Лицей БНТУ
220012, г.Минск, ул. Кедышко, 4, 8(017)280-03-05, email: *liceum@bntu.by*

Житейские проблемы

Секция: "Математика"

Авторы:
Жирко Михаил Сергеевич,
лицей БНТУ, 10"А" класс

Накорнеева Юлия Альбертовна,
лицей БНТУ, 11"А" класс

Научный руководитель:
Цыбулько Оксана Евгеньевна,
лицей БНТУ,
учитель математики,
тел. моб. +375-29-680-60-10
Очеретняя Ольга Павловна,
лицей БНТУ,
учитель математики,
тел. моб. +375-29-620-82-58

Минск, 2022

Содержание

Аннотация

Приходилось ли вам когда-нибудь двигать мебель? Или наблюдать за этим процессом? Представьте, требуется перенести объект из одной комнаты в другую. Пока ничего сложного: берешь и несешь. Добавим к задаче граничное условие: комнаты соединяет коридор, который состоит из двух частей, пересекающихся под прямым углом, и задача уже не выглядит столь простой. Так как же узнать сможет ли объект пройти через коридор.

Описанный сюжет известен в математике как задача о перемещении дивана (шкафа). Впервые строго сформулирована она была в 1966 году канадским математиком Лео Мозером, хотя в узких кругах была широко известна и ранее. Однако, в данной задаче рассматиривается пронос дивана, определенной площади. Мы же решили изучить при каких параметрах шкафа и коридора шкаф пройдет.

Введение

Приходилось ли вам когда-нибудь двигать мебель? Или наблюдать за этим процессом? Представьте, требуется перенести объект из одной комнаты в другую. Пока ничего сложного: берешь и несешь. Добавим к задаче граничное условие: комнаты соединяет коридор, который состоит из двух частей, пересекающихся под прямым углом, и задача уже не выглядит столь простой. Так как же узнать сможет ли объект пройти через коридор.

Описанный сюжет известен в математике как задача о перемещении дивана (шкафа). Впервые строго сформулирована она была в 1966 году канадским математиком Лео Мозером, хотя в узких кругах была широко известна и ранее. Однако, в данной задаче рассматиривается пронос дивана, определенной площади. Мы же решили изучить при каких параметрах шкаф пройдет по коридору.

Цель работы:Исследование различных по форме шкафов, коридоров и выражение соотношений между их параметрами для определения условий, при которых данный шкаф пройдет по коридору.

Задачи:

1. Найти соотношения между параметрами шкафа и шириной коридора при которых шкаф пройдет, если проекция шкафа на пол:

– прямоугольный равнобедренный треугольник;

– правильный треугольник;

– прямоугольник;

– правильный многоугольник;

2. Рассмотреть различные по конструкции коридоры: г-образной коридор, коридор со срезанным внутреннним углом, дверной проем.

Актуальность:

Название задачи — ”Житейские проблемы”, что отсылает нас к ее актуальности. Все мы сталкивались с проблемой проноса шкафа (объекта) по коридору и знание ограничений на параметры шкафа облегчало бы данную задачу.

Однако данное исследование имеет более обширные перспективы дальнейшего применения:

1. Развитие нейронных сетей в навигации и оптимизации перемещения объектов;

2. Автоматизация процесса распределения и выдачи грузов в складских помещениях, что позволяет экономить складские площади.

3. Помощь в разработке программного обеспечения для автопилотирования автомобилей, самолетов, космических аппаратов и т. д.

Ответы, полученные входе иследования, могут применяться во всех сферах жизни: в быту, строительстве, грузоперевозках и т. п. Так же поиск решения данной задачи может привести к возникновению новых методов, а может, и направлений в математике.

Объект исследования: Задача оптимизации в определенных пространствах многоугольных форм.

Основные методы исследования: Анализ расположения объектов, моделирование.

Основная часть:

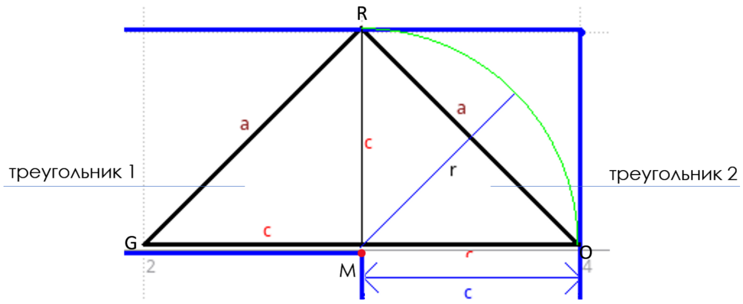
***Замечание*:** Для каждой проекции шкафа рассматривается отрезок относительно которого шкаф должен пройти. Будем считать, что шкаф пройдёт, если рассматриваемый отрезок будет меньше или равен ширине коридора. Для ограничения значения стороны шкафа будет использоваться $\leq$.

Пункт 1

Проекция на пол шкафа – прямоугольный равнобедренный треугольник, длина катетов которого равна a:

1. Треугольник повернут гипотенузой к внутренней горизонтальной стене коридора a:

Гипотенуза прямоугольного равнобедренного шкафа GRO параллельна и прилегает к внутренней горизонтальной стене. Высота RM, равна c. Рассмотрим движение треугольника по четверти окружности радиусом c с центром в точке M.



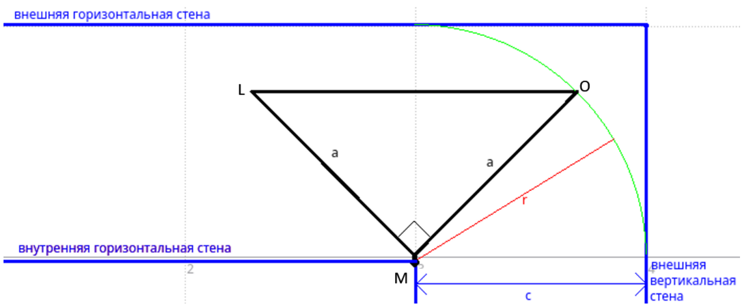
Шкаф пройдёт, если его точки, при повороте, будут лежать внутри четверти окружности и не выйдут за пределы стен коридора. Треугольники 1 (GRM) и 2 (ROM), образованы высотой RM исходного треугольника и его катетами GR и RO, а исходя из равенства двух сторон и угла между ними, треугольники 1 и 2 равны между собой. Так как они равны и подобны треугольнику GRO (углы при гипотенузе у них равны), то гипотенуза исходного треугольника GRO равна $2c$ (катеты треугольников 1 и 2 равны c, а гипотенуза GO треугольника равна сумме отрезков GM и MO). Так как вершина R движется по окружности с центорм в точке M, а высота треугольника GRO равна радиусу этой окруности и угол, образованный отрезком RM и стеной до поворота составляет 90°, как и MO. Следовательно четверть окружности вписана в коридор, а сама окружность пересекает только внутреннюю стену коридора, а сделовательно весь треугольник за пределы стен при повороте не выйдет.Выразим катет треугольника GRO:

$$\sqrt{2a^2} = 2c$$
$$2a^2 = (2c)^2$$
$$a = c\sqrt{2}$$

Так как в данном пункте мы рассматриваем максимальное значение длины стороны треугольника, то а может принимать значение меньше либо равное $c\sqrt{2}$.

$$a \leq c\sqrt{2}$$

2.Треугольник повернут гипотенузой к внешней горизонтальной стене коридора



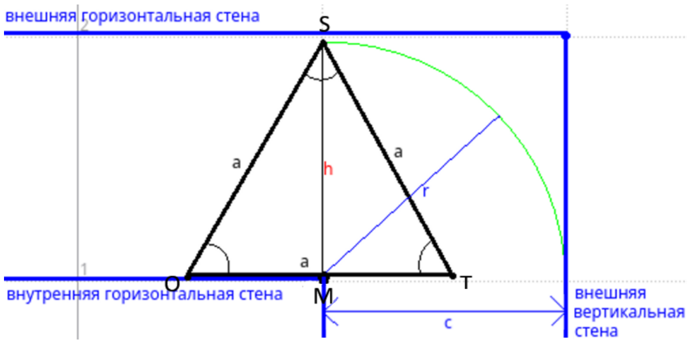
Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника LO параллельна внешней горизонтальной стене. Тогда для того, чтобы шкаф прошёл, будем рассматривать движение треугольника по четверти окружности радиусом c с центром вращения в точке M. Шкаф пройдёт, если a и будет меньше или равен радиусу окружности и меньше или равен ширине коридора с. Тогда ограничение примет вид:

$$\begin{cases} a \leq r \\ r = c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

1.2. Проекция на пол шкафа – равносторонний треугольник, со стороной равна a:

1.2.1 Основание шкафа опирается на внутреннюю горизонтальную стену коридора и параллельно ей.

Шкаф располагается так, что его основание параллельно внутренней горизонтальной стене и прилегает к ней. Опустим перпендикуляр SM из вершины S, прилегающей к внешней горизонтальной стене коридора, на сторону OT равностороннего треугольника, которая прилегает к внутренней горизонтальной стене. Тогда, этот перпендикуляр, являющийся высотой треугольника, будет меньше или равен c.



Для того, чтобы шкаф прошёл, будем рассматривать движение треугольника по четверти окружности радиусом c с центром в точке M, расположенной на середине стороны OT. Радиус окружности равен ширене коридора, а значит шкаф будет проходить при высоте меньшей или равной ширине коридора $h \leq c$. Проекция шкафа на пол - равносторонний треугольник, выразим проведённую нами высоту:

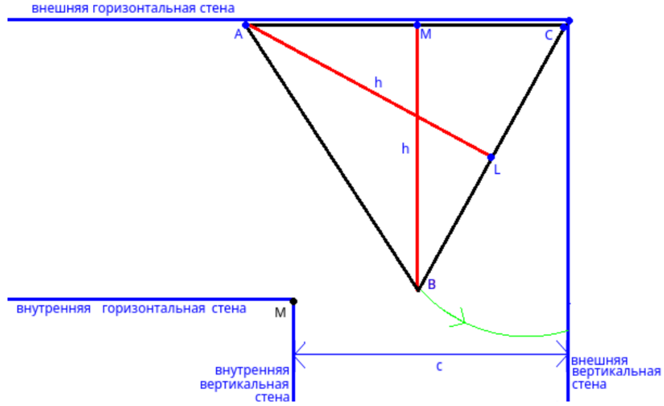
$$\begin{cases} h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ h \leq c \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} \leq c$$

Теперь получим ограничение на сторону шкафа a:

$$a \leq \frac{c2\sqrt{3}}{3}$$

1.2.2 Основание шкафа опирается на внешнюю горизонтальную стену коридора и параллельно ей:

Шкаф располагается так, что его основание параллельно внешней горизонтальной стене и прилегает к ней. Тогда, наибольших размеров шкаф будет достигать тогда, когда высота, проведённая из точки B к основанию будет равна ширине коридора.



Движение в коридоре будет проходить следующим образом: шкаф продвигается по прямому коридору до соприкосновения его угла C с внешней вертикальной стеной, после, шкаф поворачивается так, что бы точки B и C соприкасались с внешней вертикальной стеной коридора. Далее шкаф идет симметрично проходу до поворота. Значит ограничением для стороны шкафа будет высота, которая меньше либо равна ширине коридора.

$$\begin{cases} h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ h \le c \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} \le c$$

Значит ограничение на сторону шкафа будет выглядеть таким образом:

$$a \le \frac{2c\sqrt{3}}{3}$$

Пункт 2

2.1. Проекция на пол шкафа – прямоугольник, длина стороны которого равна a, а ширина равна b:

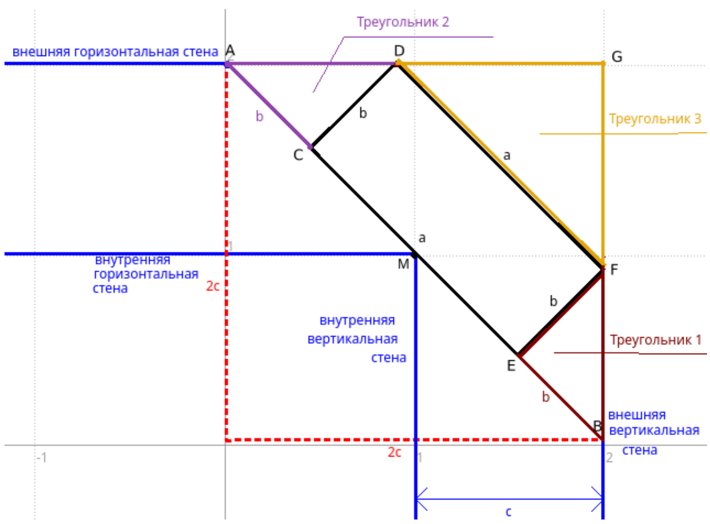
Замечание: Ширина шкафа не может быть больше ширины коридора, потому что в таком случае шкаф будет вылазить за границы коридора. значит ограничение на ширину будет выглядеть как $b \le c$.

Найдем угол, при котором шкаф принимает максимальные параметры. Данный пункт является частным случаем пункта 3 при значении параметра $m = 0$. В таком случае, в соответствии с формулой пункта 3, имеем:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{c}{m+c}} = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$$

Таким образом, предельный случай достигается тогда, когда $\alpha = 45^\circ$.

Шкаф будем распологать под углом 45° для нахождения максимальных параметров шкафа. Тогда сторона AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABG равна $2\sqrt{2}c$.



Так как углы $\angle CAD, \angle EBF, \angle ADC, \angle EFB$ равны 45° и $CD = EF = b$ (противоположные стороны прямоугольника), то исходя из равнобедренности прямоугольных треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle FBE$ становится ясно, что $AC = CD = EF = EB = b$. Тогда отрезок AB составляют отрезки $AC = b$, $EB = b$ и $EC = a$. Тогда становится очевидным, что $a + 2b = AB = 2\sqrt{2}c$ в крайнем случае. Тогда ограничение на большую и меньшую сторону шкафа:

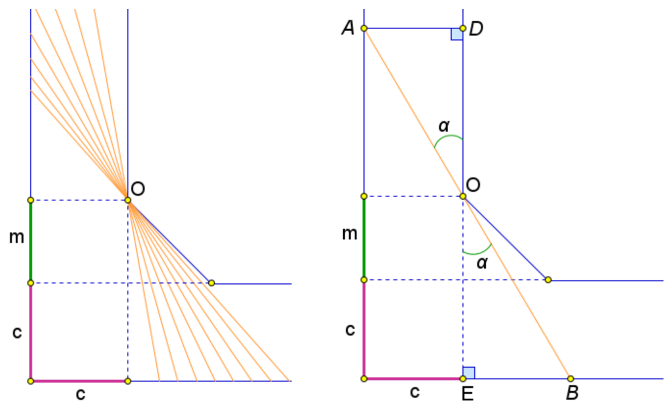
$$\begin{cases} a + 2b \le 2\sqrt{2}c \\ b \le c \end{cases}$$

Пункт 3

Внутренний угол коридора «срезан» под углом 45° к продолжению стены, катеты «срезанного треугольника» равны m.

1. Рассмотрим случай, когда ширина шкафа $b \longrightarrow 0$.

Будем проводить через точку O (угол среза) отрезки такие, что их концы лежат на стенах стенах коридора. Тогда из множества отрезков найдется отрезок AB, длина которого минимальна. Отметим, что каждый отрезок однозначно задается углом, который он образует с вертикалью.



Данная длина — 2 отрезка является максимальной среди тех, при которых шкаф пройдет в коридоре, так как при рассмотрении отрезка большей длины получаем, что, шкаф застрянет при собстенном угле, потому что при дальшейшем повороте длина отрезка, который может пройти, уменьшается.

Отметим также, что после прохождения шкаф будет двигаться симметрично после того, как тот образует угол $\angle\alpha$. Следовательно, если шкаф проходит первый поворот, он также пройдет и второй.

Найдем длину данного отрезка AB. Рассмотрим подобные прямоугольные треугольники ΔAOD и ΔBOE:

$$\begin{cases} \angle AOD = \angle BOE = \angle\alpha \\ OE = c + m \\ AD = c \end{cases} \implies \frac{c}{\sin\alpha} + \frac{c+m}{\cos\alpha} = AB$$

Так как длина отрезка однозначно задается углом, найдем экстремум функции $f(\alpha) = \frac{c}{\sin\alpha} + \frac{c+m}{\cos\alpha}$:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{c}{\sin\alpha} + \frac{c+m}{\cos\alpha}\right)}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{-c\cdot\cos^3\alpha + (m+c)\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = 0$$

$$m\sin^3\alpha + c\sin^3\alpha - c\cos^3\alpha = 0$$

$$\frac{m}{c} = \frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\sin^3\alpha} = \operatorname{ctg}^3\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg}^3\alpha = \frac{c}{m+c} \implies \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}$$

Обозначим $d = \sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}$. Известно, что:

$$\begin{cases} \sin(\operatorname{arctg} d) = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}} \\ \cos(\operatorname{arctg} d) = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \end{cases}$$

Теперь вычислим длину отрезка AB:

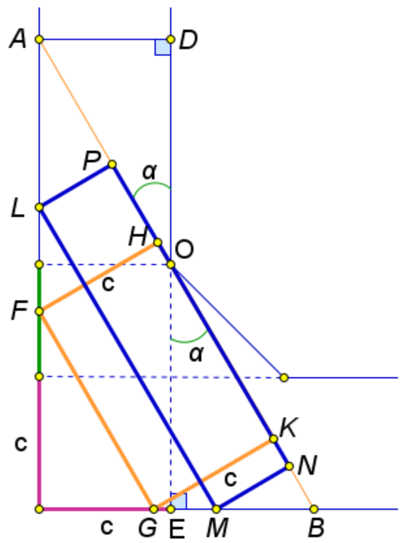
$$AB = \frac{c}{\sin\alpha} + \frac{c+m}{\cos\alpha} = \left(\frac{c}{d} + c + m\right)\sqrt{1+d^2} = \left(\frac{c}{\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}} + c + m\right)\sqrt{1 + \left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2}$$

$$AB = (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2 + 1\right)^3}$$

Тогда ограничение на длину стороны шкафа принимает следующий вид:

$$a \le (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2 + 1\right)^3}$$

2. Рассмотрим оставшиеся случаи, когда ширина шкафа $b \nrightarrow 0$.



В таких случаях длина шкафа такого с максимальными параметрами, что тот проходит в коридоре, будет лежать на отрезке AB, так как, аналогично предыдущему случаю, в ином случае получим, что шкаф застрянет при собственном угле.

Рассмотрим шкаф длины a и ширины $b \le c$. Предположим, что существует шкаф такой, что он не вписан в трапецию $BGFA$, то есть выходит за ее пределы, и проходит в коридоре. Отметим, что, так как $b \le c$, имеем, что длина такого шкафа достигает такого значения, что шкаф выходит за пределы трапеции. Тогда данный шкаф выходит также и за пределы сторон коридора, что невозможно.

Таким образом, любой шкаф, проходящий в коридоре, можно либо вписать в трапецию $BGFA$, либо целиком поместить в нее.

Рассмотрим соотношения сторон в трапеции, образованной длиной шкафа LM, стороной AB и стенами коридора:

$$LM = a = AB - b\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha))$$

$$a = (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2 + 1\right)^3} - b\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2 + 1\right)^3} - \frac{2b}{\sin 2\alpha}$$

Тогда ограничения на параметры шкафа принимают следующий вид:

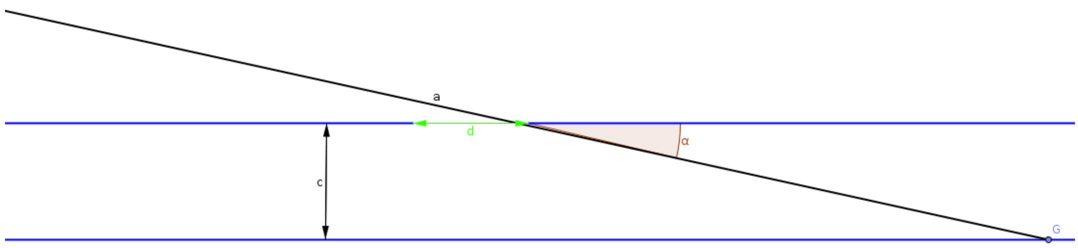
$$\begin{cases} a \le (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2 + 1\right)^3} \\ b \le c \\ a = (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2 + 1\right)^3} - \frac{2b}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

Пункт 4

Шкаф прямоугольной формы проносят по коридору шириной c и через дверной проём в стене коридора шириной d. Толщина стены, в которой находится дверной проём равна h:

4.1.1. $h \to 0, b \to 0$

Ширина шкафа стремится к 0, толщина стены коридора стремится 0. Тогда, будем считать, что проекция шкафа на пол - отрезок.



При проносе через дверной проем шкаф будет касаться краев данного проема, при этом образуя $\angle\alpha$ с внешними стенами коридора. Выразим сторону шкафа:

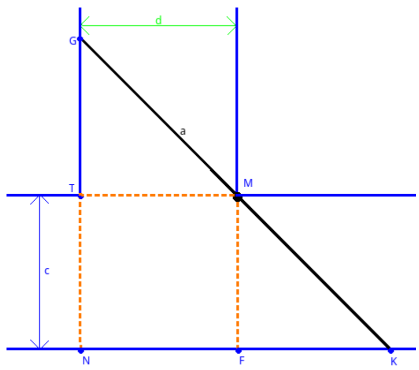
$$a = \frac{c}{\sin\alpha}$$

Отметим, что $\sin\alpha \in (0, 90°]$. Таким образом, шкаф может иметь сколь угодно большую длину такую, что $a \in \mathbb{R}^+$.

4.1.2. $b \to 0, c = d, h \geq c$

Можно заметить, что данный подпункт такой же, как и пункт 2.1 задачи, так как c в данном случае равно d, а h больше либо равно d. Тогда становится очевидным, что все ограничения на a и b из пункта 2.1 подходят для этого подпункта. Получим:

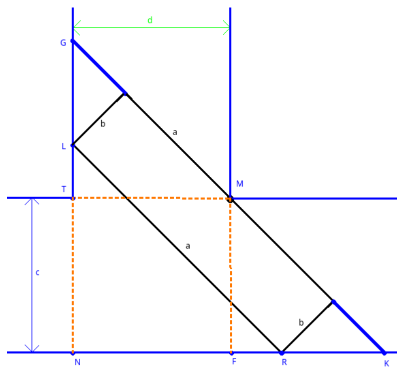
$$a \leq 2\sqrt{2}c$$



4.1.3. $b \nrightarrow 0, c = d, h \geq c$

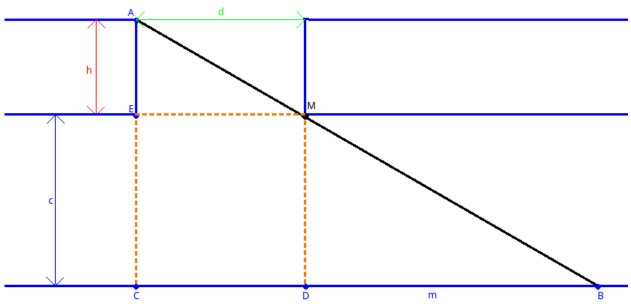
Заметим, что по аналогии с пунктом 4.a.2 мы получаем, что данный случай является схожим с пунктом 2.2 задачи. Тогда становится очевидным, что все ограничения на a и b из пункта 2.2 подходят для этого подпункта. Получим:

$$\begin{cases} a + 2b \leq 2\sqrt{2}c \\ b \leq c \end{cases}$$



4.1.4. $b \to 0, c = d, h < c$

Так как $h < c$ имеем, что шкаф пройдет раньше, чем достигнет угла в 45°. Соответственно, он пройдет при меньших углах, которые тот образует с нижней горизонтальной стеной. В предельном случае шкаф будет касаться точек A и M.



Рассмотрим подобные прямоугольные треугольники ΔAEM и ΔACB. Тогда имеем, что:

$$\frac{EM}{CM} = \frac{AE}{AC}$$

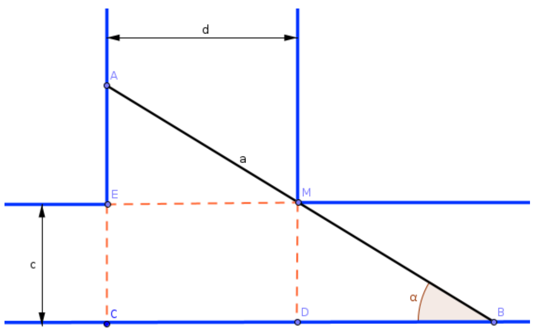
$$\frac{d}{d+m} = \frac{h}{h+c} \implies m = \frac{d(h+c)}{h} - d$$

$$a = \sqrt{h^2+d^2} + \sqrt{c^2+m^2} = \sqrt{h^2+d^2} + \sqrt{c^2 + \left(\frac{d(h+c)}{h} - d\right)^2} = \sqrt{h^2+d^2} + \sqrt{c^2 + \left(\frac{dc}{h}\right)^2}$$

Таким образом, получаем ограничение на длину стороны шкафа:

$$a \le \sqrt{h^2+d^2} + \sqrt{c^2 + \left(\frac{dc}{h}\right)^2}$$

4.1.5. $b \to 0, d > c, h \ge \cos(90^\circ - \alpha)a - c$



Рассмотрим случай, когда точка A шкафа лежит на левой вертикальной стене. Тогда получаем, рассмотрев ситуацию, когда точка A лежит на угле данной стены, что выполняется соотношение:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{CA}{AB} = \frac{h+c}{AB} \implies h = \cos(90^\circ - \alpha)a - c$$

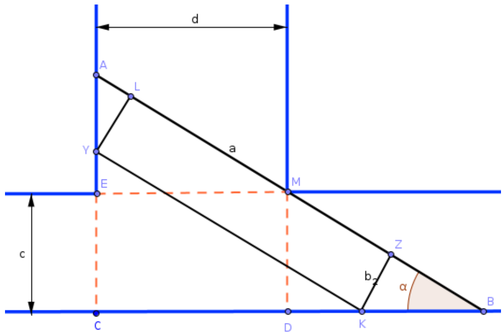
Тогда ограничение на h принимает данный вид:

$$h \ge \cos(90^\circ - \alpha)a - c$$

Данный случай (а так же случаи 4a.6, 4a.8, 4a.9) являются частным случаем пункта 3 при $b \longrightarrow 0$. При этом $c \neq d$. Аналогично построим рассмотренное в данном пункте множество отрезков, только за m будем брать не величину катета треугольника среза, а величину $d-c$. Приходим к тому, что исходные соотношения одинаковы. Продифференцировав, получим такое же соотношение, как и при рассмотрении пункта 3. Тогда получаем, что ограничение на длину стороны шкафа принимает следующий вид:

$$a \leq (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2+1\right)^3}$$

4.1.6. $b \nrightarrow 0, d > c, h \geq \cos(90^\circ - \alpha)a - c$



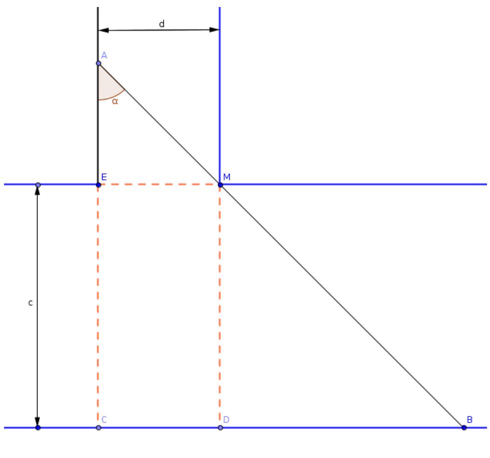
Данный случай является частным случаем пункта 3 при $b \not\longrightarrow 0$, и тогда получаем, что ограничение на длину стороны шкафа принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a \leq (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2+1\right)^3} \\ b \leq c \\ a = (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2+1\right)^3} - \frac{2b}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

4.1.8 $b \rightarrow 0, d < c, h \geq \cos(\alpha)a - c$

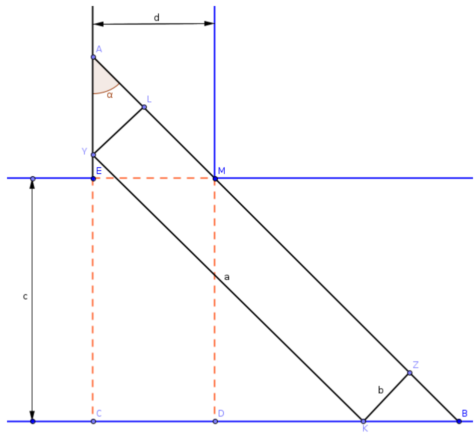
Данный случай является частным случаем пункта 3 при $b \longrightarrow 0$. Тогда получаем, что ограничение на длину стороны шкафа принимает следующий вид:

$$a \leq (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2+1\right)^3}$$



4.1.9. $b \nrightarrow 0, d < c, h \geq \cos(\alpha)a - c$

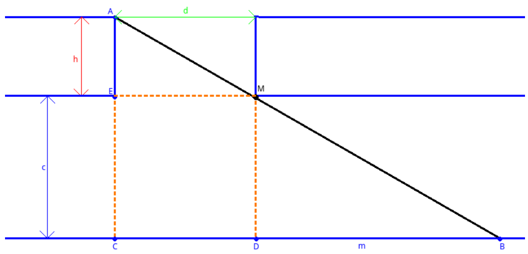
Данный случай является частным случаем пункта 3 при $b \nrightarrow 0$, и тогда получаем, что ограничение на длину стороны шкафа принимает следующий вид:



$$\begin{cases} a \leq (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2+1\right)^3} \\ b \leq c \\ a = (c+m)\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\frac{c}{m+c}}\right)^2+1\right)^3} - \frac{2b}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

4.1.10. $b \to 0, d < c, h < \cos(\alpha)a - c$

Так как $h < c$ имеем, что шкаф пройдет раньше, чем достигнет угла $90^\circ - \alpha$ (угол ABC из пункта 4а.8). Соответственно, он пройдет при меньших углах, которые тот образует с нижней горизонтальной стеной. В предельном случае шкаф будет касаться точек A и M.



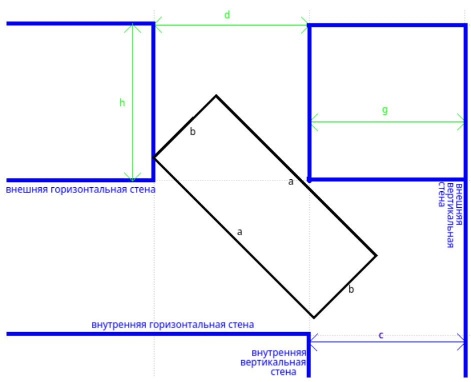
Тогда ограничение на длину стороны шкафа примет вид:

$$a \leq \sqrt{h^2 + d^2} + \sqrt{c^2 + \left(\frac{dc}{h}\right)^2}$$

Расположение двери определяется дополнительным параметром g – расстоянием от правой стены коридора до начала дверного проёма.

4.2.1. $g \neq 0$

Параметр g не будет влиять на размеры шкафа до тех пор, пока g не станет меньше $2c$, так как при g больших и равных $2c$, шкаф будет по отдельности проходить сначала коридор г-вида, а затем дверной проем из пункта 4.



Тогда при $g \geq 2$ мы должны выбрать такое соотношение сторон a и b из пунктов 2(коридор г-вида) и 4(дверной проём), что они будут являться минимальной верхней оценкой этих сторон.

Тогда получим:

1) A = "максимальное соотношение сторон из пункта 2.1"

B = "максимальное соотношение сторон из пунктов 4a.1, 4a.4, 4a.5, 4a.7,4a.8, 4a.10 в зависимости от данных параметров"

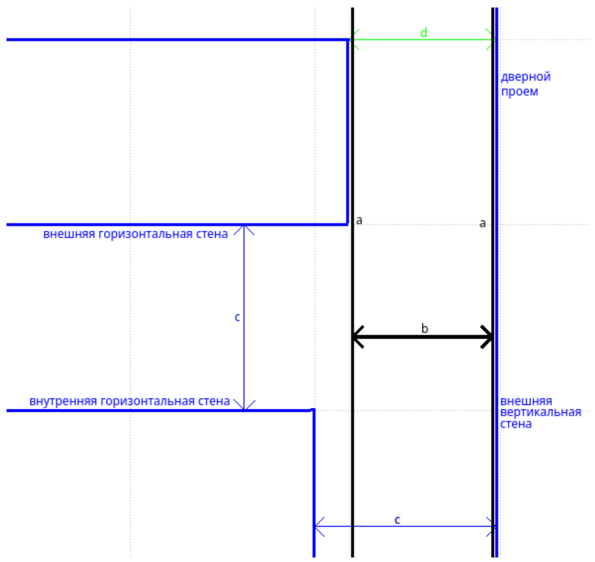
$$\begin{cases} g \geq 2c \\ min(A, B) \end{cases}$$

2) C = "максимальное соотношение сторон из пункта 2.2"

D = "максимальное соотношение сторон из пунктов 4a.3, 4a.6, 4a.9 в зависимости от данных параметров"

$$\begin{cases} g \geq 2c \\ min(C, D) \end{cases}$$

4.2.2. $g = 0$



При рассмотрении данного пункта были получено два типа ограничений при $c \leq d$ и $c > d$

(h - произвольное):

Ограничения для случая $c \leq d$:

$$\begin{cases} b \leq c \\ a \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Ограничения для случая $c \geq d$:

$$\begin{cases} b \leq d \\ a \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Пункт 5

Шкаф, проекция которого - правильный многоугольник, пронесли, не наклоняя, по коридору шириной c. При каком соотношении между величинами a и c шкаф удастся пронести по коридору.

Обычный коридор:

5.1. Нечетное количество сторон:

Замечание: s - перпендикуляр равнобедренного треугольника, построение которого будет выполняться нами в этом пункте; R - радиус описанной около m-угольника окружности. Условимся, что n-угольник с нечётным количеством сторон

$$m = 2k + 1, k \in N$$

и будем называть его просто m-угольником. Условимся называть сторону шкафа прилегающую к стене коридора основанием.

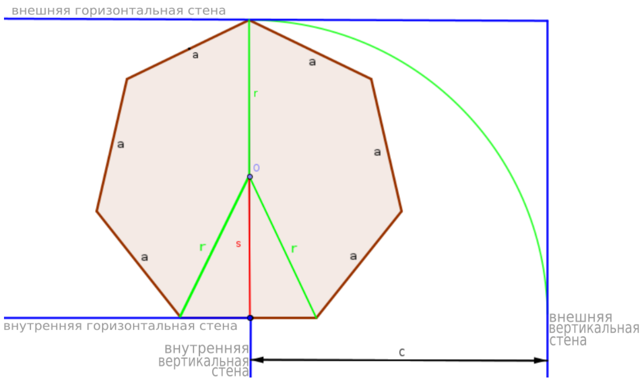
Будем рассматривать два случая, для каждого из них сторона шкафа a будет принимать максимально возможное значение. В первом случае основание шкафа изначально прилегает к внутренней горизонтальной стене, а во втором к внешней горизонтальной стене. Наиболее выгодными будут именно те случаи, когда основание m-угольника будет прилегать к одной из горизонтальных стен, так как изначально, в прямом коридоре, единственным ограничением будет являться ширина коридора.

Для достижения максимального значения стороны a надо рассматривать минимальное расстояние от вершины угла m-угольника до крайней точки проекции шкафа на пол в вертикальной оси.

Так как проекция на пол шкафа – правильный m-угольник, наиболее выгодно будет разместить его так, чтобы его высота, проведённая из вершины угла к основанию была равна ширине коридора. Для этого она должна располагаться перпендикулярно относительно горизонтальных стен, а основание при этом будет параллельно горизонтальной стене и будет прилегать к ней. То есть, для достижения максимального значения a, надо изначально рассматривать такие случаи, когда основание параллельно горизонтальной стене и прилегает к ней.

5.1.1. Одна сторона параллельна нижней стене коридора и прилегает к ней:

Чтобы пронести шкаф, проекция на пол которого - правильный m-угольник, при его максимально возможной стороне, будем рассматривать случай, когда одна его сторона параллельна внутренней горизонтальной стене коридора и прилегает к ней.



Тогда, перпендикуляр опущенный из вершишины угла, соприкосающегося с внешней горизонтальной стеной, к внутренней горизонтальной стене меньше или равен c. Впишем правильный m-угольник в окружность, тогда радиус окружности:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{m}}$$

Проекция шкафа на пол - правильный m-угольник, а значит его угол равен:

$$\beta = \frac{180^\circ \cdot (m-2)}{m}$$

Из середины окружности проведём прямые равные радиусу окружности к основанию, так как проекция шкафа на пол - правильный m-угольник, то углы при основании этого треугольника равны $\frac{180^\circ \cdot (m-2)}{2m}$. В образованном радиусами треугольнике проведём высоту s, которая будет делить основание треугольника на две равные части $\frac{a}{2}$. Перпендикуляр проведённый из вершины угла соприкосающегося с внешней горизонтальной стеной к основанию лежит на диаметре описанной около пятиугольника окружности, значит, мы можем его записать, как $R + s$. Так как проведённый нами перпендикуляр равен c, то:

$$c = R + s$$

Теперь рассмотрим один из образованных высотой треугольников. Угол прилегающий к основанию и к радиусу равен $\frac{180°\cdot(m-2)}{2m}$, тогда другой угол равен $90° - \frac{180°\cdot(m-2)}{2m}$. Катет треугольника равен $\frac{a}{2}$, угол противолежащий к нему равен $90° - \frac{180°\cdot(m-2)}{2m}$, а гипотенуза равна радиусу описанной около m-угольника окружности, выразим s:

$$s \leq R\cos\left(90° - \frac{180°\cdot(m-2)}{2m}\right)$$

$$c \geq R + R\cos\left(90° - \frac{180°\cdot(m-2)}{2m}\right)$$

$$c \geq \frac{a}{2\sin\frac{180°}{m}}\left(1 + \cos\left(90° - \frac{180°\cdot(m-2)}{2m}\right)\right)$$

Тогда ограничение на сторону m-угольника:

$$a \leq \frac{2c\sin\frac{180°}{m}}{\left(1+\cos\left(90° - \frac{180°\cdot(m-2)}{2m}\right)\right)}$$

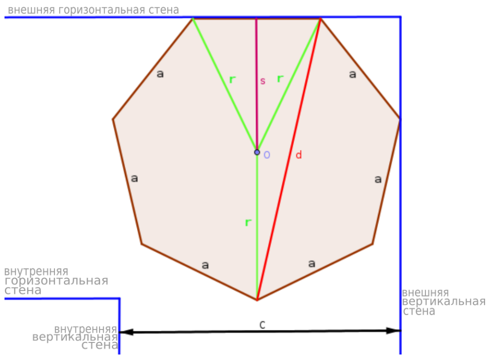
В замечании мы условились, что $m = 2k + 1$, подставим это значение в полученную нами формулу и получим ограничение на сторону правильного m-угольника:

$$a \leq \frac{2c\sin\frac{180°}{2k+1}}{\left(1+\cos\left(90° - \frac{180°\cdot(2k+1-2)}{2(2k+1)}\right)\right)}$$

$$a \leq \frac{2c\sin\frac{180°}{2k+1}}{\left(1+\cos\left(90° - \frac{180°\cdot(2k-1)}{2(2k+1)}\right)\right)}$$

5.1.2. Одна сторона параллельна верхней стене коридора и прилегает к ней:

Будем рассматривать случай, когда одна сторона шкафа, параллельна внешней стене коридора и прилегает к ней.



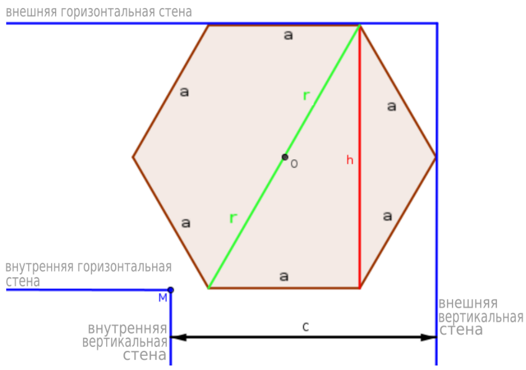
Тогда, наибольших размеров шкаф будет достигать тогда, когда высота проведённая из угла прилегающего к внутренней горизонтальной стене к противолежащему основанию будет меньше или равна ширине коридора. Тогда, повторив действия воспроизведённые нами в предыдущем подподпункте и получим ограничение на сторону шкафа a:

$$a \leq \frac{2c\sin\frac{180°}{2k+1}}{\left(1+\cos\left(90° - \frac{180°\cdot(2k-1)}{2(2k+1)}\right)\right)}$$

5.2.1. Правильный n-угольник с чётным количеством сторон:

Замечание: Условимся называть стороны шкафа, прилегающие к горизонтальным стенам, основаниями.

Так как проекция на пол шкафа – правильный n-угольник, наиболее выгодно будет разместить его так, чтобы его высота, соединяющая середины двух оснований, располагалась перпендикулярно относительно внутренней горизонтальной стены, так как изначально, в прямом коридоре, единственным ограничением будет являться ширина коридора.



Для этого многоугольник должен располагаться перпендикулярно относительно горизонтальных стен, а основание при этом будет параллельно горизонтальной стене и будет прилегать к ней.

То есть, для достижения максимального значения a, надо изначально рассматривать такой случай, когда основания параллельны горизонтальным стенам и прилегают к ним. Тогда шкаф джижется по г-образной траектории, при этом сохраняя параллельность оснований относительно внутренней горизонтальной стены. Впишем многоугольник в окружность, тогда, диаметр окружности, высота, ограниченная шириной коридора, и основание образовывают прямоугольный треугольник.

Так как катет h, расположенный перпендикулярно относительно основания, меньше или равен c, гипотенуза треугольника равна $2R$, катет треугольника, расположенный параллельно относительно внутренней горизонтальной стены, равен a, введём ограничение на сторону шкафа:

$$a^2 = 4R^2 - h^2$$

Радиус описанной окружности можно записать как $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$

По теореме Пифагора:

$$\left(\frac{a}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2 + a^2 = h^2$$

Для того, что бы шкаф прошел $h \leq c$. Значит преобразуем предыдущее выражение:

$$\left(\frac{a}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2 + a^2 \leq c^2$$

Тогда, ограничение для стороны a:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2 + a^2} \leq c$$

$$a\sqrt{\left(\frac{(1+\sin\frac{180^\circ}{n})}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2} \leq c$$

Результаты исследования:

1. Выведены соотношения в равнобедренном прямоугольном треугольнике для г-образного коридора.
2. Выведены соотношения в равностороннем треугольнике для г-образного коридора.
3. Выведены соотношения в прямоугольнике для все типов коридоров.
4. Выведены соотношения в правильном многоугольнике для г-образного коридора.

Заключение:

В процессе исследования мы изучили различные формы шкафов, коридоров, и вывели соотношения между их параметрами для определения условий, при которых данный шкаф пройдет по коридору. Цели, поставленные в начале исследования, были достигнуты, и задачи выполнены. Ответы, полученные входе иследования, смогут применяться во всех сферах жизни: в быту, строительстве, грузоперевозках и т.п.

Соотношения между параметрами шкафа и коридора , найденные в процессе исследования, не описаны в литературе и в интернет-ресурсах, следовательно, можно утверждать, что данное исследование было проведено впервые.