МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЕГАЗОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. С. Гапанович, И. В. Гапанович

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Тюмень
ТюмГНГУ
2014

УДК 519.8 (075.8)
ББК 22.18я73
Г 198

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор В. Э. Борзых
кандидат технических наук, доцент И. Г. Соловьев

Гапанович В. С.

Г 198 Методы решения оптимизационных задач: учеб. пособие / В. С. Гапанович, И. В. Гапанович. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2014. – 272 с.

ISBN 978-5-9961-0861-9

Учебное пособие написано в соответствии с государственным образовательным стандартом по дисциплине «Методы оптимизации», изучаемой студентами вузов. В данном пособии изложены основные методы решения оптимизационных задач. Все рассмотренные методы разделены на две группы: методы оптимизации функций и методы оптимизации функционалов. В первой группе рассмотрены точные методы решения задач математического программирования: линейного, целочисленного, нелинейного, выпуклого, квадратичного. Во второй группе рассмотрены элементы вариационного исчисления. Отдельной главой выделены численные методы безусловной и условной оптимизации. Каждая глава содержит необходимые теоретические сведения, разобранные примеры решения задач с помощью основных алгоритмов, а также контрольные вопросы и варианты заданий для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности 230102.65 «Автоматизированные системы обработки информации и управления», направления 230100.62 «Информатика и вычислительная техника», а также магистров направления 230100.68 «Информатика и вычислительная техника».

Может быть полезным студентам и магистрам других направлений, инженерам, преподавателям и научным работникам, изучающих или использующих в своей деятельности методы оптимизации.

УДК 519.8 (075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-9961-0861-9

Оглавление

Введение

С задачами оптимизации приходится встречаться в различных сферах человеческой деятельности. Каждое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным, т.к. оно выбирается только после сравнения его с другими вариантами.

Интерес к задачам наилучшего выбора был высоким всегда, но особенно возрос в последние годы в связи с интенсивным развитием науки и техники.

Исторически с задачами оптимизации человечество столкнулось уже в древние века. Так уже давно были решены разнообразные задачи геометрического типа, связанные со свойствами элементарных фигур. С возникновением дифференциального исчисления появилась возможность решать более сложные задачи. Первые результаты по минимизации функций и функционалов были получены Эйлером и Лагранжем. В X1X и в начале XX века полностью сформировалось вариационное исчисление, в котором изучаются задачи минимизации функционалов.

В конце 40-х годов XX века начался новый этап развития методов оптимизации. Как всегда, толчком послужили задачи, поставленные практикой. Возникли линейное и нелинейное программирование, динамическое программирование, теория игр, теория оптимального управления.

Проблемы автоматизации проектирования технических устройств в последние годы привлекают внимание все большего числа исследователей. Развитие методологии, численных методов и алгоритмов оптимального проектирования (процесса выбора наилучшего с точки зрения технико-экономической эффективности устройства) оказывает решающее влияние на качество систем автоматического проектирования.

Методы оптимизации тесным образом связаны и с задачами управления в системах различной природы. Только теперь исследователей интересуют не любые управления, а наилучшие из всех возможных, т.е. оптимальные управления. Чтобы найти эти оптимальные управления необходимо также применять специальные методы – методы оптимизации.

Мы упомянули только два класса оптимизационных задач – задачи оптимального проектирования, которые сводятся к решению задач нелинейного программирования, и задачи оптимального управления, которые сводятся к решению вариационных задач. Безусловно, этими двумя классами задач не ограничивается сфера применения методов оптимизации, потребности решения практических проблем управления различными техническими, экономическими, социальными, биологическими процессами способствуют дальнейшему развитию и применению методов решения экстремальных задач.

Много эффективных, но узко специализированных методов оптимизации разработано в таких областях, как теория игр, теория массового обслуживания, сетевое планирование, управление запасами и т.д.

Общим для задач нахождения оптимального решения является то, что они могут быть сформулированы математически как задачи нелинейной оптимизации: для заданной математической модели исследуемой системы требуется подобрать такие значения варьируемых параметров, чтобы они обеспечивали экстремальное значение (максимум или минимум) одной наиболее важной технико-экономической характеристики при условии, что другие характеристики удовлетворяют заданной совокупности требований.

К сожалению, среди методов поиска оптимальных решений, которые получили название методов оптимизации или методов поиска, не существует универсального, который позволял бы эффективно решать любую задачу нелинейной оптимизации. В настоящее время решение каждой задачи оптимизации требует индивидуального подхода и связано с применением нескольких методов поиска оптимального решения. Но для этого разработчик должен понимать, в каких случаях и какие методы оптимального поиска необходимо применять для того или иного класса экстремальных задач.

Итак, методы оптимизации – это методы, позволяющие находить экстремум функций или функционалов при наличии или отсутствии дополнительных ограничений на аргументы.

Все методы оптимизации можно условно разбить на две группы:

- методы минимизации функций конечного числа переменных,
- методы минимизации функционалов или методы оптимизации динамических систем.

К первой группе методов относятся:

- классические методы анализа функций,
- методы математического программирования (линейного, нелинейного, целочисленного, стохастического, динамического программирования и т.д.).

Вторая группа методов служит для оптимизации динамических систем. Эту группу методов можно разделить на три части:

- вариационное исчисление,
- принцип максимума,
- динамическое программирование.

В данном пособии рассматривается классическое вариационное исчисление, которое включает в себя методы определения минимального и максимального значения функционалов без ограничений или с ограничениями-равенствами, наложенными на аргументы. Однако, в задачах автоматического управления, как правило, на управляющие воздействия накладываются очень сложные ограничения, поэтому не всегда методы классического вариационного исчисления позволяют добиться успеха. Поэтому для решения этих же задач были разработаны принцип максимума и методы динамического программирования.

Целью данного пособия является развитие конструктивных навыков самостоятельного анализа и решения основных инженерных оптимизационных задач. Пособие содержит необходимые теоретические сведения, разобранные примеры решения задач с помощью основных алгоритмов, а также варианты заданий для самостоятельной работы.

Выбор материала для пособия обусловлен Государственным образовательным стандартом курса «Методы оптимизации» по направлению «Информатика и вычислительная техника». В основу пособия легли лекции по курсам «Методы оптимизации» и «Методы решения оптимизационных задач», читаемые одним из авторов на протяжении ряда лет студентам направления «Информатика и вычислительная техника» и специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» Тюменского государственного нефтегазового университета.

Пособие состоит из четырех глав. В первой главе дана общая постановка задачи оптимизации, приведены наиболее важные классы оптимизационных задач, для некоторых из них рассмотрены методы решения. Вторая глава посвящена точным методам решения некоторых задач математического программирования, а именно, методам решения задач линейного, целочисленного, нелинейного программирования. В третьей главе рассмотрены численные методы решения оптимизационных задач: методы минимизация унимодальных функций, безусловной и условной оптимизации. Четвертая глава посвящена методам оптимизации функционалов. В ней рассмотрены элементы вариационного исчисления. В пособии приведены иллюстративные примеры применения различных методов решения оптимизационных задач, а также задачи для самостоятельной работы.

Изложение материала характеризуется сравнительно высоким уровнем формализации, носит строгий, но доступный характер.

Пособие в первую очередь предназначено студентам направления «Информатика и вычислительная техника» и специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления», а также может оказать большую помощь магистрам и аспирантам указанного направления при подготовке их квалификационных работ.

Глава 1. Понятие о задаче оптимизации

В данной главе мы рассмотрим общую постановку задачи оптимизации, укажем наиболее важные классы оптимизационных задач, вспомним некоторые сведения из курса математического анализа, относящиеся к данному курсу.

1.1. Постановка задачи оптимизации

Пусть в евклидовом пространстве R^n определена функция $f(x)= f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а также задано множество X. Требуется найти такие точки из X, в которых функция $f(x)$ достигает минимума или максимума.

Условимся обозначать задачу оптимизации в виде:

$$f(x)\to min\ (max), \qquad (1.1)$$
$$x\in X\subseteq R^n$$

или

$$min\ (max)\, f(x)\ ,$$
$$x\in X\subseteq R^n,$$

где $f(x)$ – целевая функция, $X\subseteq R^n$ – множество допустимых решений, $x\in X$ – любое допустимое решение задачи.

Допустимое решение x^*, которое доставляет экстремум функции $f(x)$, называется оптимальным, т.е.

$$f(x^*) = min\ (max)\, f(x)\ ,$$
$$x\in X\subseteq R^n.$$

В дальнейшем ограничимся изложением алгоритмов поиска минимума $f(x)$, т.к. задача максимизации функции $f(x)$ на множестве X равносильна задаче минимизации функции $(-f(x))$ на том же множестве (равносильность означает, что оптимальные решения обеих задач совпадают, а значения функций различаются только знаком).

Необходимо подчеркнуть, что решение задачи (1.1) требует уточнения.

Определение 1.1. Точка x* называется

1. точкой глобального минимума функции $f(x)$ на множестве $X\subseteq R^n$ или глобальным решением задачи (1.1), если $f(x^*)\le f(x)$ при всех $x\in X\subseteq R^n$;

2. точкой локального минимума функции $f(x)$ на множестве $X\subseteq R^n$ или локальным решением задачи (1.1), если существует некоторая ε-окрестность U точки x^*, т.е. $U=\{x\in X \mid \|x-x^*\|<\varepsilon\}$, что неравенство $f(x^*)\le f(x)$ выполняется при всех $x\in U$.

Здесь под нормой вектора понимается его длина, т.е. $\|x\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2}$.

Если приведённые в определении неравенства выполняются как строгие, то говорят, что x^* – точка строгого минимума (строгое решение) в глобальном или локальном смысле. Ясно, что глобальное решение является и локальным, обратное не верно.

При изучении задач оптимизации в первую очередь возникает вопрос о существовании оптимального решения.

Теорема 1.1. (Вейерштрасса) Пусть X – замкнутое ограниченное множество в R^n, $f(x)$ – непрерывная функция на X. Тогда существует точка глобального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве X [34].

Рассмотренная задача представляет собой общую постановку задачи оптимизации функций. Классификация задач оптимизации проводится в зависимости от свойств функции $f(x)$ и множества X.

1.2. Задача безусловной оптимизации

Задача оптимизации называется задачей безусловной оптимизации, если $X=R^n$, т.е.

$$f(x)\to\min, \quad x\in R^n. \tag{1.2}$$

Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума или условия оптимальности рассматривались в курсе математического анализа.

1.2.1. Необходимые и достаточные условия оптимальности

Обозначим через

$$f'(x^*)=\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}\right)=\operatorname{grad} f(x)$$

- вектор первых частных производных (***градиент***) дважды дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $x^*\in R^n$; а через

$$f''(x^*)=\left\{\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{nxn}$$

- симметричную матрицу вторых частных производных (***гессиан***) функции $f(x)$ в точке $x^*\in R^n$.

Теорема 1.2. (Необходимое условие). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^*\in R^n$. Если x – локальное решение задачи (1.2), то

$$f'(x^*)=0, \tag{1.3}$$

где 0 = (0,0,…,0) [34].

Теорема 1.3. (Достаточное условие). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Предположим, что $f'(x^*) = 0$, а матрица $f''(x^*)$ является положительно определенной, т.е. $y f''(x^*) y^T > 0$ при всех $y \in R^n$, $y \neq 0$. Тогда x^* – строгое локальное решение задачи (1.2) [34].

В теореме 1.3 используется понятие положительно определённой матрицы. Приведём критерий положительной определённости матриц.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы квадратная симметричная матрица $Q = \{q_{ij}\}_{nxn}$, $q_{ij} = q_{ji}$ была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все её главные миноры были положительными [13].

$$\Delta_1 = q_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 1.1. Решить задачу $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \to \min$, $x \in R^2$.

Решение. Условие (1.3) имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2 = 0 \\ 3x_2^2 - 3x_1 = 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы являются точки $x^{(1)} = (0 \quad 0)$, $x^{(2)} = (1 \quad 1)$.
При этом $f''(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix}$, $f''(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $f''(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Согласно критерию Сильвестра матрица $f''(x^{(1)})$ не является положительно определённой, т.к. $\Delta_1 = |0| = 0,$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 9 = -9$, а матрица $f''(x^{(2)})$ – положительно определена, т.к. $\Delta_1 = |6| = 6 > 0,$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} =$ $= 36 - 9 = 27 > 0$. Следовательно, в силу теоремы 1.3 точка $x^{(1)}$ не является решением задачи, а точка $x^{(2)}$ – точка строгого локального минимума функции $f(x)$.

Замечание. В случае решения задачи

$$f(x) \to \max, \quad x \in R^n$$

в теореме 1.3 матрица $f''(x^*)$ при соблюдении всех остальных условий должна быть отрицательно определенной, т.е. знаки главных миноров указанной матрицы должны чередоваться, причем $\Delta_1 < 0$, т.е. $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$ и т.д.

1.3. Задача условной оптимизации

Задача оптимизации называется задачей условной оптимизации, если X – собственное подмножество пространства R^n , т.е.

$$f(x) \to \min, \qquad (1.4)$$
$$x \in X \subset R^{\boldsymbol{n}}.$$

Очевидно, что для этой задачи необходимые и достаточные условия оптимальности, сформулированные ранее, будут выполняться только в том случае, когда локальное решение x^* задачи оптимизации является внутренней точкой множества X. Но точка x^* может лежать и на границе множества X, поэтому классические методы анализа для решения таких задач не применимы.

1.3.1. Графический способ решения задач условной оптимизации

Если оптимизационная задача содержит две переменные, т.е. $x \in R^{\boldsymbol{2}}$, или задачу оптимизации путем несложных преобразований можно привести к двум переменным, то для решения таких задач оптимизации можно использовать графический метод. В основе данного метода лежит понятие линии (или поверхности) уровня целевой функции.

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min,$$
$$x \in X \subset R^{\boldsymbol{n}}.$$

Определение 1.2. Линией уровня функции $f(x)$ называется множество точек L_a из X, на которых функция $f(x)$ принимает постоянное значение, т.е.

$$L_a = \{x \in X \mid f(x) = a, a \in R\}.$$

Для решения двумерной задачи оптимизации графическим способом необходимо:
1. построить множество допустимых решений X;
2. построить несколько характерных линий уровня целевой функции $f(x)$ и определить направление убывания (возрастания) данной функции;
3. найти оптимальное решение.

Для определения направления убывания (возрастания) функции $f(x)$ достаточно построить две линии уровня для a_1 и a_2. Если $a_1 > a_2$, то в направлении линии L_{a1} функция возрастает, а в направления линии L_{a2} функция убывает и наоборот, если $a_1 < a_2$. Направления возрастания и убывания функции помечаем знаками «+» и «-».

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то градиент $f'(x)$ перпендикулярен к проходящей через x линии уровня и направлен (если $f'(x) \neq 0$) в сторону возрастания функции. Поэтому достаточно построить одну линию уровня и градиент $f'(x)$, тогда антиградиент $-f'(x)$ укажет направление убывания функции.

Следовательно, геометрически поиск минимального значения функции сводится к нахождению минимального числа a^*, такого что линия уровня L_{a^*} с X имеет непустое пересечение, т.е. $L_{a^*} \cap X \neq \varnothing$. При этом любая точка $x^* \in L_{a^*} \cap X$ является глобальным решением задачи минимизации, а число, $a^* = f(x^*)$, будет минимальным значением функции. Оптимальное решение x^* может быть как внутренней, так и граничной точкой множества X.

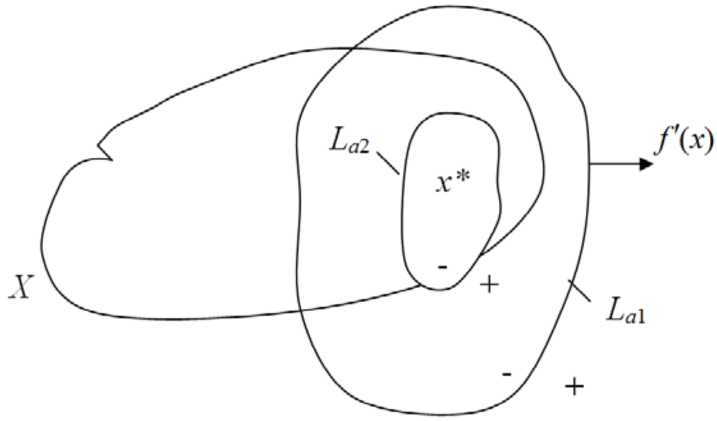


Рис. 1.1. *Геометрическая интерпретация задач условной оптимизации*

Пример 1.2. Найти решение следующей задачи:

$$\min f(x) = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1 \leq 20 \\ x_2 \geq 5 \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых решений. Для этого рассмотрим первое ограничение. Оно задает плоскость, ограниченную прямой $x_1+x_2=20$, которая проходит через две точки (0,20) и (20,0). Построим указанную прямую линию и определим, какая из двух образовавшихся полуплоскостей удовлетворяет условию задачи. Для этого испытаем точку (0,0) на принадлежность области. Т.к. точка (0,0) не удовлетворяет первому ограничению $x_1+x_2 \geq 20$, то берем ту полуплоскость, которая не содержит начало координат (рис. 1.2). Отмечаем направление стрелкой или штриховкой. У каждого ограничения ставим его номер.

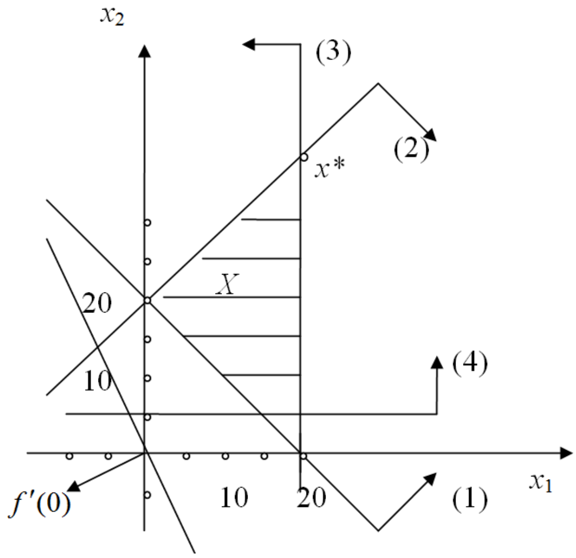


Рис. 1.2. *Графическая иллюстрация решения примера 1.2*

Аналогично строим остальные полуплоскости. Прямая $-x_1+x_2=20$ проходит через точки (0,20), (20,40).

Пересечение построенных полуплоскостей и дает множество X.

Запишем уравнение линий уровня:

$$-2x_1 - x_2 = a, \text{ где } a \text{ – любое вещественное число.}$$

Найдем $f'(0)=(-2,-1)$. Т.к. полученный вектор построить в выбранном масштабе не очень удобно, то построим коллинеарный ему вектор (-10,-5), который задает направление возрастания функции. Перпендикулярно данному вектору проведем через начало координат линию уровня целевой функции. Т.к. решается задача минимизации функции $f(x)$, то мысленно будем перемещать построенную линию уровня в направлении вектора $-f'(0)$ до получения последней точки пересечения линии уровня с областью допустимых решений, т.е. точки x^*. Для нахождения точки x^* решим систему уравнений (точка x^* лежит на пересечении границ 2 и 3 ограничений)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 = 20 \end{cases}$$

Решая данную систему, находим x^*=(20,40), а f_{min}= -80.

Пример 1.3. Найти решение следующей задачи:

$$\max f(x) = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_i \ge 0, i = 1,...,5 \end{cases}$$

Решение. Данная задача содержит пять переменных и три ограничения, поэтому, выразив три переменные через оставшиеся две, можно исходную задачу привести к задаче с двумя переменными. Вычтем третье уравнение из первого, в результате получим

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 9.$$

Из этого уравнения выразим переменную x_5 и воспользуемся условием не отрицательности этой переменной, затем полученное выражение подставим во второе уравнение. В результате получим

$$x_5 = 9 - 2x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + 9 - 2x_1 - x_2 = 15.$$

Из последнего равенства выразим переменную x_3 и воспользуемся условием не отрицательности этой переменной, затем полученное выражение подставим в третье уравнение. В результате получим

$$x_3 = 6 + x_1 - 3x_2 \geq 0,$$
$$2x_1 - 4x_2 - 6 - x_1 + 3x_2 + x_4 = -3.$$

Из последнего равенства выразим переменную x_4 и воспользуемся условием не отрицательности этой переменной.

$$x_4 = 3 - x_1 + x_2 \geq 0.$$

Т.к. целевая функция также выражена через переменные x_1 и x_2, то мы пришли к задаче условной оптимизации с двумя переменными

$$\max f(x) = x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

Полученная задача решается аналогично задаче примера 1.2.

Построим область допустимых решений. Для этого рассмотрим первое ограничение. Оно задает плоскость, ограниченную прямой $2x_1+x_2=9$, которая проходит через две точки (0,9) и (9/2,0). Построим указанную прямую и определим, какая из двух образовавшихся полуплоскостей удовлетворяет условию задачи. Для этого испытаем точку (0,0) на принадлежность области. Т.к. точка (0,0) удовлетворяет первому ограничению, то берем ту полуплоскость, которая содержит начало координат (рис. 1.2). Отмечаем направление стрелкой или штриховкой. Аналогично строим остальные полуплоскости. Прямая $-x_1+3x_2=6$ проходит через точки (0,2), (3,3). Прямая x_1-x_2=3 проходит через точки (3,0), (4,1).

Пересечение построенных полуплоскостей и дает множество X.

Запишем уравнение линий уровня:

$x_1 - x_2 = a$, где a – любое вещественное число.

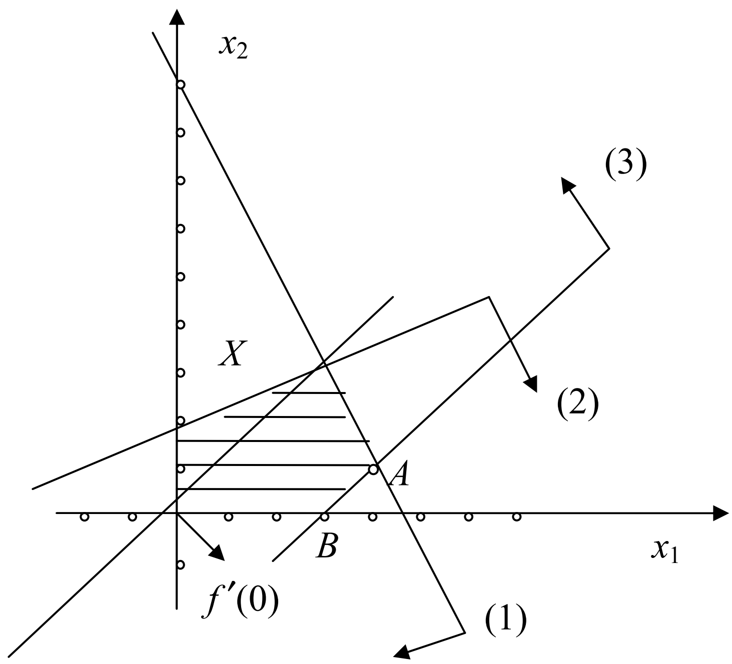


Рис. 1.3. *Графическая иллюстрация решения примера 1.3*

Найдем вектор $f'(0) = (1,-1)$, который задает направление возрастания функции. Перпендикулярно данному вектору проведем через начало координат линию уровня целевой функции. Т.к. решается задача максимизации функции $f(x)$, то мысленно будем перемещать построенную линию уровня в направлении вектора $f'(0)$ до получения последней точки пересечения линии уровня с областью допустимых решений. Нетрудно заметить, что линия уровня целевой функции параллельна стороне AB, поэтому любая точка, лежащая на стороне AB, будет являться оптимальным решением, т.е. данная задача имеет множество решений. Чтобы записать полученное множество решений, необходимо найти координаты точек A и B. Очевидно, что точка B имеет координаты (3,0).

Для нахождения точки A решим систему уравнений (точка A лежит на пересечении границ 1 и 3 ограничений)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}.$$

Решая данную систему, находим $A(4,1)$. Тогда общее решение запишется в виде:

$$X(\lambda) = \lambda A + (1 - \lambda)B,$$

где λ – любое число, удовлетворяющее условию: $0 \le \lambda \le 1$. Таким образом,

$$X(\lambda) = \lambda(4,1) + (1 - \lambda)(3,0) = (4\lambda, \lambda) + (3 - 3\lambda, 0) = (3 + \lambda, \lambda).$$

Значит, $x_1 = 3 + \lambda$, $x_2 = \lambda$, а $f_{max} = 3$. Подставим найденные значения переменных x_1 и x_2 в выражения для всех остальных переменных, получим: $x_3 = 9 - 2\lambda$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3 - 3\lambda$, $0 \le \lambda \le 1$.

Пример 1.4. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

при условии

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Т.к. система ограничений задана с помощью линейных неравенств, то ОДР строим также как и в предыдущих примерах.

Прямая $3x_1 + 2x_2 = 7$ проходит через точки (7/3,0), (0,7/2), прямая $10x_1 - x_2 = 8$ – через точки (4/5,0), (1,2), прямая $-18x_1 + 4x_2 = 12$ через точки (-2/3,0), (0,3) (рис.1.4).

ОДР представляет собой треугольник ABC.

Запишем уравнение линий уровня:

$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = a$, где a – любое вещественное число.

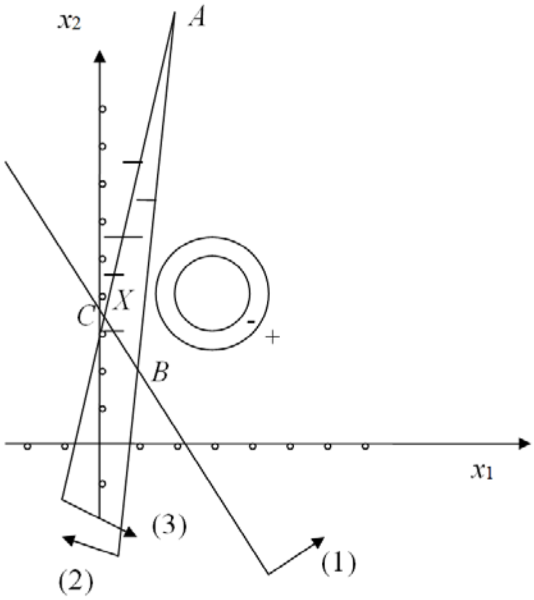


Рис. 1.4. *Графическая иллюстрация решения примера 1.4*

При $a > 0$ имеем семейство концентрических окружностей с центром в точке (3,4). Для нахождения направления возрастания и убывания целевой функции построим две произвольные ее линии уровня. Очевидно, что при увеличении значения целевой функции, т.е. a, радиус окружности тоже увеличивается. Таким образом, функция возрастает с увеличением радиуса окружности и уменьшается в противоположном направлении. Направление возрастания и убывания целевой функции пометим знаками «+» и «-».

Проводя окружности разных радиусов, можно увидеть, что минимальное значение целевая функция принимает в точке касания окружности прямой $10x_1 - x_2 = 8$, а максимальное значение в точке A.

Найдем координаты точки максимума. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8, \\ -18x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases}$$

Решением данной системы является точка (2,12). Таким образом, $X_{max} = (2,12)$, $f_{max} = 65$.

Для нахождения координат точки минимума воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $10x_1 - x_2 = 8$ и касательной к окружности в точке касания. Из уравнения прямой $10x_1 - 8 = x_2$ находим, что ее угловой коэффициент равен 10. Угловой коэффициент касательной к окружности определим как значение производной функции x_2 от переменной x_1 в точке касания. Функция x_2 задана неявно, поэтому, дифференцируя уравнение окружности по переменной x_1, получим

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0,$$

откуда

$$x_2' = -(x_1 - 3)/(x_2 - 4).$$

Приравнивая найденное выражение числу 10, получим одно из уравнений для нахождения координат точки минимума целевой функции. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка касания, получим систему уравнений для нахождения точки минимума

$$\begin{cases} -(x_1 - 3)/(x_2 - 4) = 10, \\ 10x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

Решением этой системы является точка (123/101;422/101), а $f_{min} = =324/101$.

Пример 1.5. Найти максимальное значение функции

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2$$

при условии

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых решений. Первое ограничение задает круг с центром в точке (0,0) радиуса 5. Т.к. $x_1, x_2 \ge 0$, то рассматриваем только четверть круга, которая находится в первом квадранте. Кривая $x_1x_2 = 4$ – гипербола. Рассмотрим одну ветку гиперболы, проходящую через точки (1,4) и (4,1). ОДР изображена на рис. 1.5.

Запишем уравнение линий уровня:

$$3x_1 + 4x_2 = a,$$

где a – любое вещественное число.

Т.к. целевая функция является линейной, то найдем вектор $f'(0) = (3,4)$, который задает направление возрастания функции. Перпендикулярно данному вектору проведем через начало координат линию уровня целевой функции. Т.к. решается задача максимизации функции $f(x)$, то, мысленно будем перемещать построенную линию уровня в направлении вектора $f'(0)$ до получения последней точки пересечения линии уровня с областью допустимых решений. Нетрудно заметить, что максимальное значение функции будет достигаться в точке касания линии уровня окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

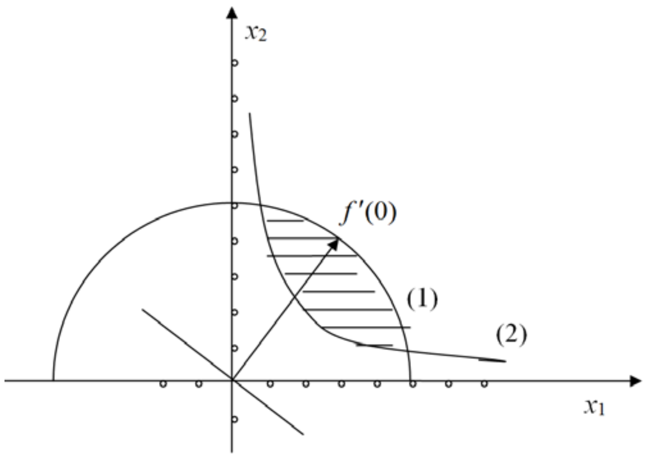


Рис. 1.5. *Графическая иллюстрация решения примера 1.4*

Для нахождения координат точки касания воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = a$ и касательной к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1, почленно продифференцируем уравнение окружности и получим

$$2x_1 + 2x_2 x_2' = 0, \text{ или } x_2' = -x_1/x_2 .$$

Т.к. угловой коэффициент линии уровня целевой функции f равен -3/4, то, приравнивая полученные соотношения, получим одно уравнение для нахождения точки максимума. В качестве второго уравнения возьмем уравнение окружности. Таким образом, для нахождения точки максимума необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1/x_2 = -3/4, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что точка максимума имеет координаты (4,3). Значит, $f_{max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

1.3.2. Задача математического программирования

Важнейший класс задач условной оптимизации составляют задачи математического программирования. Так принято называть задачи, в которых множество X задается в виде

$$X=\{x\in P \subseteq R^n \mid g_i(x) \le 0,\ i = 1\div k;\ g_i(x) = 0,\ i = (k+1)\div m\},$$

т.е. задается системой конечного числа неравенств и равенств, заданных на некотором множестве $P \subseteq R^n$.

Задачу математического программирования можно в общем виде записать так

$$f(x) \to \min$$
$$\begin{cases} g_i(x) \le 0, & i = 1 \div k, \\ g_i(x) = 0, & i = (k+1) \div n, \\ x \in P. \end{cases}$$

Разумеется, в этой задаче может не быть ограничений-неравенств или ограничений-равенств, кроме того P может совпадать с R^n, т.е. $P = R^n$.

Перечислим основные задачи математического программирования.

1. Задача линейного программирования.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=) b_i, & i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0, & j = 1,\dots,n \end{cases}.$$

Задача линейного программирования – это задача нахождения минимума линейной функции, когда на ее аргументы наложены линейные ограничения.

2. Задача нелинейного программирования.

Если в задаче математического программирования хотя бы одна из функций $f(x)$, $g_1(x)$, …, $g_m(x)$ является нелинейной, то эта задача относится к классу задач нелинейного программирования.

3. Задача выпуклого программирования.

Если в задаче математического программирования все функции $f(x)$, $g_1(x)$, …, $g_m(x)$ являются выпуклыми, то эта задача относится к классу задач выпуклого программирования.

4. Задача квадратичного программирования.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{jk} x_j x_k \to \min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=) b_i, & i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0, & j = 1,\dots,n \end{cases}$$

Задача квадратичного программирования – это задача нахождения минимума квадратичной функции, когда на ее аргументы наложены линейные ограничения.

1.3.3. Задача дискретного программирования

Задача условной оптимизации называется задачей дискретного программирования, если допустимое множество $X \subset R^n$ является дискретным (конечным или счетным множеством), либо некоторые из координат вектора x пробегают дискретные множества (например, в задаче присутствуют булевы переменные).

При этом если элементы дискретного множества X являются целочисленными, то задача называется задачей целочисленного программирования.

1.3.4. Классическая задача на условный экстремум

Наряду с задачей безусловной оптимизации в математическом анализе изучается и классическая задача на условный экстремум. Эта задача представляет собой задачу на условный экстремум, в которой множество X задано системой конечного числа равенств, которые называются уравнениями связи, т.е.

$$X=\{x\in R^n \mid g_i(x) = 0,\ i = 1\div m\}.$$

Обычно такая задача записывается следующим образом

$$\begin{aligned} & f(x)\to\min \\ & g_i(x)=0, \quad i=1,...,m \end{aligned}. \tag{1.5}$$

Будем предполагать, что функции $f(x)$, $g_1(x),\ldots, g_m(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Для решения этой задачи запишем функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(x),$$

где $x\in R^n$, $\lambda_0\in R$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in R^m$.

Коэффициенты λ_i называются множителями Лагранжа. С помощью функции Лагранжа задача на условный экстремум функции $f(x)$ сводится к задаче на безусловный экстремум функции Лагранжа $L(x,\lambda_0, \lambda)$ (т.к. оптимальные решения этих задач совпадают на множестве X).

Для нахождения экстремума функции $L(x,\lambda_0, \lambda)$ вычислим частные производные от этой функции по всем аргументам

$$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_j} = \lambda_0\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n,$$

или в векторной форме $L'_x(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f'(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g'_i(x)$.

Теорема 1.4. (Правило множителей Лагранжа) [9] Пусть функции $f(x)$, $g_1(x),\ldots, g_m(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми в некоторой окрестности точки $x^*\in R^n$. Если x^* - локальное решение задачи (1.5), тогда существуют число λ_0^* и вектор $\lambda^* =(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$, не равные 0 одновременно и такие, что

$$L'_x(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)=0.$$

Замечание. Если градиенты $g'_1(x^*),...,g'_m(x^*)$ являются линейно независимыми, то $\lambda_0^*\neq 0$. Данное условие называется **условием регулярности**.

Правило множителей Лагранжа является необходимым, но не достаточным условием локальной оптимальности.

Условие $L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$ означает, что градиенты $f'(x), g'_1(x^*), ..., g'_m(x^*)$ являются линейно зависимыми.

Напомним, что система функций $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ является линейно зависимой в точке x, если существуют константы $C_1, \ldots, C_m$, не равные 0 одновременно, что в точке x

$$C_1 g_1(x) + \ldots + C_m g_m(x) = 0 . \tag{1.6}$$

Если таких $C_1, \ldots, C_m$ не найдется, т.е. равенство (1.6) выполняется только при всех $C_i = 0$, то функции $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ являются линейно независимыми.

Любая точка $x^* \in R^n$, удовлетворяющая необходимому условию оптимальности, а также ограничениям исходной задачи $g_i(x) = 0, \quad i = 1,...,m$, называется **стационарной** точкой классической задачи на условный экстремум.

Таким образом, для нахождения стационарной точки необходимо решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,n, \\ g_i(x) = 0, \quad i = 1,...,m, \end{cases} \tag{1.7}$$

содержащую $n+m$ уравнений с $n+m+1$ неизвестными. Поэтому множители Лагранжа определяются с точностью до константы. В случае, если $\lambda_0^* \neq 0$, то полагают $\lambda_0^*=1$ (или $\lambda_0^*=-1$). Тогда, если условие регулярности выполняется, функция Лагранжа $L(x, \lambda_0, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ называется **регулярной.**

Стационарные точки не обязаны быть решением поставленной задачи. Для того, чтобы эти точки являлись решением, они должны удовлетворять достаточным условиям оптимальности.

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)$.

Итак, пусть $x^* \in R^n$ – стационарная точка, т.е. удовлетворяет системе (1.7). Тогда в этой точке функция $f(x)$ имеет **условный максимум**, если при всех значениях дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$, удовлетворяющих условиям выполняется неравенство $d^2L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) < 0$, и **условный минимум**, если $d^2L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) > 0$.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} dx_j = 0, \\ dx_1^2 + ... + dx_n^2 \neq 0, \end{cases}$$

В случае, если $x^* \in R^2$ и имеется одно уравнение связи $g(x_1, x_2) = 0$, достаточное условие можно записать в следующем виде.

Пусть (x_1*, x_2*,λ*) – решение системы (1.7). Составим определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_{x1}(x^*) & g'_{x2}(x^*) \\ g'_{x1}(x^*) & L''_{x1x1}(x^*,\lambda^*) & l''_{x1x2}(x^*,\lambda^*) \\ g'_{x2}(x^*) & L''_{x2x1}(x^*,\lambda^*) & L''_{x2x2}(x^*,\lambda^*) \end{vmatrix}.$$

Тогда, если $\Delta < 0$, то $f(x)$ в точке $x^* \in R^2$ имеет **условный максимум**, если $\Delta > 0$ – то **условный минимум**.

Пример 1.6. Найти условный экстремум функции $f(x) = x_1 + 2x_2$ **при условии** $x_1^2 + x_2^2 = 5$**.**

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 (x_1 + 2x_2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5)$$

и рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 \neq 0$ и $L(x,\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5)$. Запишем условие стационарности

$$\begin{cases} L'_{x1} = 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ L'_{x2} = 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 5. \end{cases}$$

Т.к. $\lambda_1 \neq 0$, то данная система несовместна.

Второй случай. Пусть $\lambda_0 \neq 0$, тогда $\lambda_0 = 1$ и

$$L(x,\lambda_0, \lambda_1) = x_1 + 2x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5).$$

Запишем условие стационарности $\begin{cases} L'_{x1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ L'_{x2} = 2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 5. \end{cases}$

Эта система имеет два решения $x^{(1)}: \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ \lambda_1 = 0{,}5 \end{cases}$, $x^{(2)}: \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \lambda_1 = -0{,}5 \end{cases}$.

Проверим достаточное условие. Для этого запишем второй дифференциал функции Лагранжа $L(x,\lambda_0, \lambda_1)$.

Т.к. $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2\lambda_1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, то $d^2L = 2\lambda_1(dx_1^2 + dx_2^2)$. При λ_1=0,5 имеем: $d^2L > 0$, следовательно, точка $x^{(1)}$ = (-1,-2) – точка условного минимума. При λ_1 = -0,5 имеем: $d^2L<0$, следовательно, точка $x^{(2)}$ = (1,2) – точка условного максимума.

Достаточное условие можно было проверить и другим способом. Составим определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_{x1}(x^*) & g'_{x2}(x^*) \\ g'_{x1}(x^*) & L''_{x1x1}(x^*,\lambda^*) & l''_{x1x2}(x^*,\lambda^*) \\ g'_{x2}(x^*) & L''_{x2x1}(x^*,\lambda^*) & L''_{x2x2}(x^*,\lambda^*) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2\lambda_1 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix},$$

т.к. $g'_{x1} = 2x_1,\ g'_{x2} = 2x_2,\ L''_{x1x1} = 2\lambda_1,\ L''_{x2x2} = 2\lambda_1,\ L''_{x1x2} = L''_{x2x1} = 0.$

В точке $x^{(1)}$ имеем: $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0$, следовательно, точка $x^{(1)} = (-1,-2)$ – точка условного минимума.

В точке $x^{(2)}$ имеем: $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0$, следовательно, точка $x^{(2)} = (1,2)$ – точка условного максимума.

1.4. Выпуклые множества и выпуклые функции

Важной составляющей современного аппарата теории оптимизации является выпуклый анализ – раздел математики, в котором изучаются свойства выпуклых множеств, выпуклых и вогнутых функций.

Приведем некоторые определения и утверждения из математического анализа, касающиеся выпуклых множеств, выпуклых и вогнутых функций.

Определение 1.3. Множество $X \subseteq R^n$ называется выпуклым, если оно наряду с любыми двумя его точками содержит и отрезок, их соединяющий. Другими словами, если точки $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$, то и точка $x(\lambda) = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$, принадлежит множеству X при любом λ, если $0 \le \lambda \le 1$.

Представленное выражение называется **выпуклой комбинацией** векторов $x^{(1)}, x^{(2)}$.

Примеры выпуклых множеств: круг, отрезок, куб, плоскость и т.д.; невыпуклых множеств: дуга, окружность, кольцо, тор и т.д. Пустое множество является множеством выпуклым.

Теорема 1.5. Пересечение конечного числа выпуклых множеств является множеством выпуклым [13].

Определение 1.4. Крайней (угловой) точкой выпуклого множества X называется такая точка этого множества, которая не может быть представлена в виде выпуклой комбинации двух любых других точек этого множества.

Например, квадрат имеет 4 угловые точки (вершины), а круг – бесконечное множество (точки, лежащие на окружности), прямая линия не имеет ни одной угловой точки.

Определение 1.5. Выпуклой оболочкой $S(X)$ множества X называется совокупность всевозможных выпуклых комбинаций, составленных из точек множества X.

Выпуклая оболочка составлена из точек вида:

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1, \quad c_i \ge 0, \quad i = 1,...,m, \quad x \in X .$$

Например, на рис.1.6 для невыпуклого множества X построена его выпуклая оболочка $S(X)$.

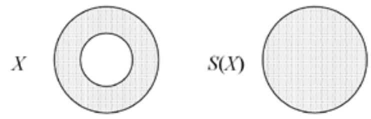


Рис. 1.6. *Построение выпуклой оболочки множества*

Если множество X является выпуклым, то $S(X) = X$.

Теорема 1.6. Любое выпуклое замкнутое ограниченное множество есть выпуклая оболочка своих крайних точек [13].

Так куб – выпуклая оболочка своих вершин, круг - выпуклая оболочка точек окружности.

Определение 1.6. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subset R^n$, называется **выпуклой (выпуклой вниз)**, если для любых двух точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ и любого числа λ, $0 \le \lambda \le 1$, выполняется

$$f(\lambda x^{(1)} + (1- \lambda)x^{(2)}) \le \lambda f(x^{(1)}) + (1- \lambda) f(x^{(2)}).$$

Если в этом определении все неравенства выполняются как строгие, то функция $f(x)$ называется **строго выпуклой**. График этой функции не содержит прямолинейных участков.

Геометрически выпуклость функции означает, что любая точка произвольной хорды графика функции $f(x)$ располагается не ниже соответствующей точки самого графика.

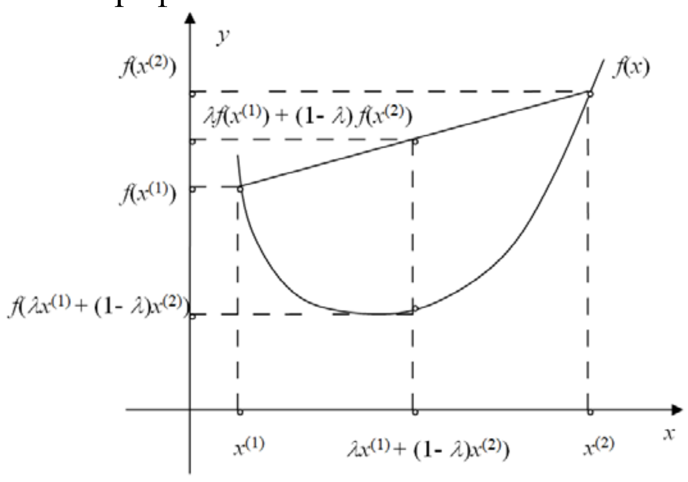


Рис. 1.7. *Геометрическая иллюстрация понятия выпуклости функции*

Определение 1.7. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subset R^n$, называется **вогнутой (выпуклой вверх)**, если для любых двух точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ и любого числа λ, $0 \le \lambda \le 1$, выполняется

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \ge \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}).$$

Если в этом определении все неравенства выполняются как строгие, то функция $f(x)$ называется **строго вогнутой**.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subset R^n$, является выпуклой, если функция $-f(x)$ является вогнутой.

Свойства выпуклых функций

1. Выпуклая функция $f(x)$, $x \in X$, непрерывна во всех внутренних точках множества X.

Это означает, что разрывы выпуклая функция может иметь только на границе множества X.

2. Если функции $f_i(x)$, $i=1,\ldots,m$, являются выпуклыми, то и функция $f(x)$, представляющая их линейную комбинацию, т.е. $f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x)$, c_i – любые числа, также является выпуклой.

3. Выпуклая функция $f(x)$ не может иметь двух различных локальных минимумов, т.е.любой ее локальный минимум является и глобальным.

У строго выпуклой функции минимум может достигаться в единственной точке. Если минимум выпуклой функции достигается в двух точках, то он достигается и в любой точке отрезка, их соединяющего.

4. Если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, то для выпуклости функции $f(x)$ на открытом выпуклом множестве X необходимо и достаточно, чтобы матрица вторых производных $f''(x)$ была положительно полуопределенной. Если матрица $f''(x)$ положительно определенная, то $f(x)$ – строго выпуклая функция.

Симметричная матрица $Q = \{q_{ij}\}_{n\ x\ n}$ является **положительно** полуопределенной, если ее главные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r > 0$, а $\Delta_{r+1}=\ldots=\Delta_n=0$.

5. Если $f(x)$ – выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция, то любая ее стационарная точка x^0 ($f'(x^0)=0$) является ее точкой минимума, т.е. для выпуклых функций необходимое условие экстремума является и достаточным.

6. Множество $Y = \{x \in X | f(x) \le c, c \in R\}$ будет выпуклым, если $f(x)$ – выпуклая функция на множестве X.

7. Множество $Y = \{x \in X | f_i(x) \le (\ge) c_i, c_i \in R, i=1,\ldots,m\}$ будет выпуклым, если в неравенствах «≤» функция $f_i(x)$ является выпуклой, а в неравенствах «≥» функция $f_i(x)$ является вогнутой на множестве X.

1.5. Задача выпуклого программирования

Задача условной оптимизации (1.4) называется задачей выпуклого программирования, если функция $f(x)$ является выпуклой, а X – выпуклым множеством.

Если рассматривается задача $f(x)\to\max,\ x\in X\subset R^n$, то она относится к классу задач выпуклого программирования, если $f(x)$ является вогнутой, а X – выпуклым множеством.

Сформулируем ряд утверждений, справедливых для задачи выпуклого программирования.

Теорема 1.7. Если задача оптимизации является задачей выпуклого программирования, то ее любое локальное решение является и глобальным.

Таким образом, для задач выпуклого программирования понятия локального и глобального решения не различаются, поэтому можно говорить просто об их решении.

Теорема 1.8. Множество решений задачи выпуклого программирования является выпуклым множеством.

Отсюда следует, что если задача выпуклого программирования имеет два решения $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, то она имеет бесконечное множество решений

$$x(\lambda)=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)\, x^{(2)},\ 0\le\lambda\le 1,$$

которые являются точками отрезка, соединяющего решения $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Если функция $f(x)$ – строго выпуклая, то задача выпуклого программирования имеет единственное решение.

1.6. Задача оптимального управления

Постановка задачи оптимального управления значительно сложнее рассмотренных ранее задач.

Любая динамическая система может быть представлена в виде

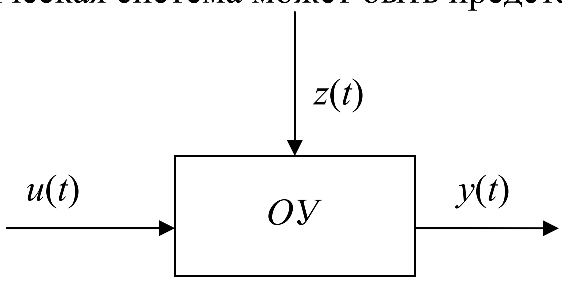


Рис. 1.8. *Функциональная схема объекта управления*

Здесь: *ОУ* – объект управления, $u(t)=(u_1(t),\ldots,\ u_m(t))$ – вектор управляющих воздействий (управлений), $y(t)=(y_1(t),\ldots,\ y_m(t))$ – вектор фазовых (управляемых) координат, $z(t)=(z_1(t),\ldots,\ z_k(t))$ – вектор внешних возмущений.

Пусть динамическая система описывается дифференциальным уравнением вида

$$F(y^{(m)}(t),...,y'(t),y(t),u(t),z(t))=0,$$

где $u(t)\in U$ – множество допустимых управлений, $y(t)\in Y$, где Y – множество возможных состояний системы, $y(t_0)=y_0\in Y_0$, где Y_0– множество начальных состояний системы, $y(T)=y_T\in Y_T$, где Y_T– множество конечных состояний системы.

В задачах оптимального управления вводится некоторый критерий, который позволяет среди всех решений выбрать наилучшее. Критерий обычно задается в виде функционала

$$I(y)=\int_{t0}^{T} f_0(y,u,t)dt \to \min .$$

Требуется построить такое допустимое управление $u(t)\in U$, которое переводило бы систему из заданной точки $y(t_0)=y_0\in Y_0$ в заданную точку $y(T)=y_T\in Y_T$ за время T и доставляло при этом минимум функционалу $I(y)$.

1.7. Задания для самостоятельной работы и контрольные вопросы

Задание 1.1. Следующую задачу линейного программирования решить графически.

$$f(x)=cx \to max$$
$$Ax=b,$$
$$x\geq o,$$

1.1.1

$c = (5, -1, 1, 0, 0)$, $b = (5, 4, 11)^{T}$,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.2

$c = (6, 1, -1, -2, 0)$, $b = (4, 1, 9)^{T}$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.3

$c = (0, 6, 1, -1, 0)$, $b = (6, 6, 6)^{T}$,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.4

$c = (7, 1, 1, -1, 0)$, $b = (5, 3, 2)^{T}$,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.5

$c = (8, 1, -3, 0, 0)$, $b = (4, 3, 6)^{T}$,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.6

$c = (0, 1, -3, -1, -1)$, $b = (2, 8, 5)^{T}$,

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

1.1.7

$c = (1, -2, -1, -1, 0)$, $b = (2, 7, 2)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.8

$c = (0, 1, -6, 1, -3)$, $b = (9, 14, 3)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.9

$c = (-8, -1, -1, 1, 0)$, $b = (5, 9, 3)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1.10

$c = (-1, 3, -1, 1, 0)$, $b = (4, 4, 15)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.1.11

$c = (0, 2, 0, 1, -3)$, $b = (6, 1, 24)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 12 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

1.1.12

$c = (10, 5, -25, 5, 0)$, $b = (32, 1, 15)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 8 & 8 & 24 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.13

$c = (6, 0, -1, 1, 2)$, $b = (8, 2, 2)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.14

$c = (-5, -1, 3, -1, 0)$, $b = (7, 7, 12)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.15

$c = (5, 3, 2, -1, 1)$, $b = (12, 16, 3)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.16

$c = (7, 0, 1, -1, 1)$, $b = (1, 12, 4)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.17

$c = (6, -1, 2, -1, 1)$, $b = (2, 11, 6)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.18

$c = (0, 0, 3, -2, -1)$, $b = (5, 7, 2)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.19

$c = (1, 7, 2, 1, -1)$, $b = (20, 12, 6)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.20

$c = (2, 0, 1, -1, 1)$, $b = (2, 14, 1)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.21

$c = (6, 1, 0, 1, 2)$, $b = (2, 18, 2)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.22

$c = (0, 3, 1, -1, 1)$, $b = (2, 2, 6)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1.23

$c = (3, 0, 1, -2, 1)$, $b = (6, 2, 2)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1. 24

$c = (0, 5, 1, -1, 1)$, $b = (2, 2, 10)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1.25

$c = (1, 5, 2, -1, 1)$, $b = (12, 1, 3)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.26

$c = (5, 0, 1, -1, 1)$, $b = (1, 3, 12)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1.27

$c = (7, 0, 2, -1, 1)$, $b = (2, 3, 11)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.28

$c = (1, -4, 1, 1, 1)$, $b = (28, 2, 12)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.29

$c = (0, 8, 2, 1, -1)$, $b = (2, 20, 6)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.30

$c = (0, -2, 1, -1, 1)$, $b = (14, 10, 1)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 1.2. Решить следующие задачи условной оптимизации графическим методом.

1.2.1

$\min f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$

$x_1 + x_2 \le 3,$

$x_1 + 2x_2 \le 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.2

$\min f = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2$

$2x_1 + 5x_2 \le 40,$

$2x_1 + x_2 \le 16,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.3

$\min f = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 20x_2$

$x_1 + x_2 \le 15,$

$2x_1 + 5x_2 \le 60,$

$3x_1 + x_2 \le 30$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.4

$\min f = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 9)^2$

$5x_1 + 2x_2 \le 60,$

$x_1 + x_2 \le 15,$

$x_1 + 4x_2 \le 40$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.5

$\min f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$

$6x_1 + 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 96,$

$-2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

1.2.6

$\min f = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2$

$x_1 + 3x_2 \le 7,$

$3x_1 + x_2 \le 3,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.7

$\min f = x_1^2 + 2x_1 - x_2$

$x_1 + x_2 \le 15,$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 30,$

$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

1.2.8

$\min f = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 32x_2$

$3x_1 + x_2 + x_3 = 30,$

$x_1 + x_2 + x_4 = 15,$

$2x_1 + 5x_2 + x_5 = 60,$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$

1.2.9

$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$

$4x_1 + 3x_2 \le 12,$

$-x_1 + x_2 \le 1,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.10

$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$

$x_1 + x_2 \le 3,$

$-2x_1 + x_2 \le 2,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.11

$\max f = -4x_1^2 - 15x_2^2 + 32x_1 + 120x_2$

$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20,$

$2x_1 - x_2 + x_4 = 8,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

1.2.12

$\min f = x_2^2 - x_1 - 2x_2$

$3x_1 + 2x_2 \le 6,$

$x_1 + 2x_2 \le 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.13

$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1 - 3x_2$

$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16,$

$-x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

1.2.14

$\max f = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + x_2$

$2x_1 - x_2 \le 6,$

$x_1 + 2x_2 \le 10,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.15

$\max f = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 16x_2$

$x_1 + 2x_2 \le 16,$

$5x_1 + 2x_2 \le 40,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.16

$\max f = -2x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 16x_2$

$x_1 + 2x_2 \le 16,$

$5x_1 + 2x_2 \le 40,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2. 17

$\max f = -x_1^2 - x_2^2 + 18x_1 + 6x_2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 16,$

$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 40,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

1.2.18

$\min f = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2$

$3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 8,$

$11x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 96,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

1.2.19

$\min f = x_1^2 + 10x_1 - x_2$

$x_1 + x_2 \le 15,$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 30,$

$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

1.2.20

$\max f = -x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 18x_2$

$x_1 + 3x_2 \le 30,$

$x_1 + x_2 \le 15,$

$5x_1 + 2x_2 \le 60$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.21

$\max f = -1/2x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 2x_2$

$2x_1 + x_2 \le 2,$

$x_1 + 2x_2 \le 2,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.22

$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 - 4x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \le 3,$

$x_1 - x_2 \le 1,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.23

$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 - 4x_1 + 8x_2$

$-x_1 + x_2 \le 4,$

$x_1 \le 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.24

$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 - 4x_1 + 8x_2$

$3x_1 + 5x_2 \le 15,$

$x_1 - x_2 \le 1,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.25

$\max f = -1/2x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 2x_2$

$-x_1 + 2x_2 \le 2,$

$2x_1 - x_2 \le 2,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.26

$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$

$4x_1 + 3x_2 \le 12,$

$-x_1 + x_2 \le 1,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.27

$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$

$x_1 + x_2 \le 3,$

$-2x_1 + x_2 \le 2,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.28

$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$

$x_1 - x_2 \le 0,$

$x_2 \le 5,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.29

$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 + 6x_2$

$3x_1 + 4x_2 \le 12,$

$-x_1 + x_2 \le 2,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

1.2.30

$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 + 6x_2$

$-x_1 + 2x_2 \le 2,$

$x_1 \le 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Задание 1.3.

- Найти проекцию начала координат в R^2 на полуплоскость $X = \{(x, y) | ax + by \ge c\}$, используя метод множителей Лагранжа. Дать геометрическую интерпретацию задачи.

№ Вар.	a	b	c	№ Вар.	a	b	c	№ Вар.	a	b	c
1	2	1	3	6	1	-5	4	11	1	-2	1
2	1	-3	1	7	4	1	5	12	2	4	2
3	3	2	4	8	-2	3	1	13	-3	1	5
4	-5	1	3	9	-4	2	2	14	1	4	3
5	4	-5	2	10	2	5	3	15	4	3	4

- Найти проекцию точки (a, b) в R^2 на множество $X = \left\{(x, y) \middle| \, x^2 + y^2 \geq c^2 \right\}$, используя метод множителей Лагранжа. Дать геометрическую интерпретацию задачи.

№ Вар.	a	b	c	№ Вар.	a	b	c	№ Вар.	a	b	c
16	3	5	3	21	-1	3	2	26	1	-4	3
17	4	-1	4	22	6	-1	5	27	1	3	1
18	5	1	5	23	-4	1	4	28	-5	4	5
19	1	2	1	24	2	7	1	29	1	-2	2
20	2	-3	2	25	5	2	3	30	3	-2	3

Контрольные вопросы

1. Что такое методы оптимизации? На какие группы условно можно разбить все методы оптимизации?
2. Сформулируйте задачу оптимизации в общем виде. Что такое целевая функция? Что такое допустимое решение задачи оптимизации? Что такое оптимальное решение задачи оптимизации?
3. Дайте определение локального и глобального минимумов (максимумов) функции $f(x)$. Объясните, в чем заключается разница этих двух понятий.
4. Сформулируйте достаточное условие существования оптимального решения.
5. Что такое задача безусловной оптимизации?
6. Что такое градиент функции $f(x)$ в точке x? Что такое гессиан функции $f(x)$ в точке x?
7. Сформулируйте необходимое и достаточное условия оптимальности в задаче безусловной оптимизации.
8. Сформулируйте условие положительной определенности квадратной симметричной матрицы.
9. Что такое задача условной оптимизации?
10. Какие задачи условной оптимизации можно решить графически? В чем заключается идея графического метода решения?
11. Что такое задача математического программирования? Перечислите основные задачи математического программирования.
12. Что такое задача дискретного программирования; целочисленного программирования?
13. Сформулируйте классическую задачу на условный экстремум. Какие отличительные особенности характерны для этой задачи?
14. Каким образом вводится функция Лагранжа? Что такое множители Лагранжа? Сформулируйте правило множителей Лагранжа.
15. Сформулируйте достаточные условия экстремума в классической задаче на условный экстремум.
16. Дайте определение выпуклого множества. Приведите примеры выпуклых, невыпуклых множеств. Сформулируйте свойство выпуклых множеств.
17. Дайте определение выпуклой вниз (вверх) функции $f(x)$. Сформулируйте свойства выпуклых функций.
18. Как формулируется задача выпуклого программирования? Какими свойствами обладают решения данной задачи?

Глава 2. Методы оптимизации функций

2.1. Линейное программирование

Линейное программирование – это наука о методах исследования и нахождения наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

2.1.1. Примеры задач линейного программирования

1. Задача о пищевом рационе

Имеется 4 вида продуктов питания: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Известна стоимость единицы каждого продукта: c_1, c_2, c_3, c_4. Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать

- белков не менее $в_1$ единиц,
- углеводов не менее $в_2$ единиц,
- жиров не менее $в_3$ единиц.

Известно, что единица продукта $П_i$ содержит

- a_{i1} единиц белков,
- a_{i2} единиц углеводов,
- a_{i3} единиц жиров.

Содержание элементов в единице каждого продукта задано в таблице

		Элемент		
		белки	углеводы	жиры
Продукты	$П_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	$П_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	$П_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}
	$П_4$.	a_{41}	a_{42}	a_{43}

Требуется так составить пищевой рацион, чтобы обеспечить получение необходимого количества элементов при минимальной стоимости рациона.

Построение математической модели

Итак, мы имеем словесную формулировку задачи. Необходимо эти условия записать математически, или, говорят, построить математическую модель задачи.

Процесс построения математической модели можно начать с ответов на следующие три вопроса:

1. Для определения каких величин должна быть построена модель?
2. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?
3. В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи ?

Конструктивный путь формулировки ответов на поставленные вопросы состоит в том, чтобы словесно выразить суть проблемы.

Словесная формулировка проблемы

Нам требуется определить: сколько ***единиц каждого из продуктов*** питания (управляемые переменные) необходимо включить в рацион, чтобы ***общая стоимость*** их была минимальной (цель), с учетом ***необходимых норм*** по содержанию белков, углеводов и жиров (ограничения).

Математическая формулировка

Переменные. Т.к. нужно определить количество единиц каждого из продуктов питания, то переменными в модели являются:

x_1 – количество единиц продукта питания $П_1$, входящего в рацион,

x_2 – количество единиц продукта питания $П_2$, входящего в рацион,

x_3 – количество единиц продукта питания $П_3$, входящего в рацион,

x_4 – количество единиц продукта питания $П_4$., входящего в рацион.

Целевая функция. Т.к. стоимость единицы продукта питания $П_1$ равна c_1 рублей, то все единицы продукта питания $П_1$, входящие в рацион, будут стоить c_1x_1 рублей. Аналогично, все единицы продукта питания $П_2$, входящие в рацион, будут стоить c_2x_2 рублей, $П_3$ – c_3x_3 рублей, $П_4$ – c_4x_4 рублей. При допущении независимости объемов продуктов, входящих в рацион, общие затраты будут равны сумме затрат от всех продуктов. Обозначив общую стоимость (в рублях) через f, можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить допустимые значения переменных x_1, x_2, x_3 и x_4, которые минимизируют общую стоимость продуктов питания, т.е. $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$.

Ограничения. При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения на необходимые нормы по содержанию белков, углеводов и жиров. Ограничение на необходимые нормы можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \text{Общее количество} \\ \text{одного из элементов} \\ \text{в рационе} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \text{Необходимая норма} \\ \text{потребления данного} \\ \text{продукта} \end{pmatrix}$$

Это приводит к следующим ограничениям.

По белкам: каждая единица продукта $П_1$ содержит a_{11} единиц белка, следовательно, x_1 единиц продукта $П_1$ содержат $a_{11}x_1$ единиц белка. Аналогично, x_2 единиц продукта $П_2$ содержат $a_{21}x_2$ единиц белка, x_3 единиц продукта $П_1$ – $a_{31}x_3$ единиц белка, x_4 единиц продукта $П_4$ – $a_{41}x_4$ единиц белка. Общее количество белка в рационе равно сумме, т.е. $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4$. Следовательно, первое ограничение имеет вид

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \geq в_1,$$

Аналогично по углеводам: $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \geq в_2$.

и по жирам: $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 \geq в_3$.

Неявное ограничение заключается в том, что количество единиц каждого из продуктов питания не может принимать отрицательного значения. Чтобы предотвратить получение таких недопустимых решений, потребуем выполнения *условия не отрицательности* переменных, т.е. введем ограничения: $x_i \geq 0$.

Итак, математическую модель можно записать следующим образом.

Определить такие неотрицательные значения переменные x_1, x_2, x_3 и x_4, при которых достигается $min\, f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$, и которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \geq в_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \geq в_2. \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 \geq в_3. \\ \quad x_i \geq 0, i = 1 \div 4. \end{cases}$$

2. Задача о загрузке станков

Ткацкая фабрика располагает N_1 станками типа 1 и N_2 станками типа 2. Станки могут производить четыре вида ткани: T_1, T_2, T_3, T_4. Каждый тип станка может производить любой из видов ткани, но в неодинаковом количестве. Станок типа 1 производит в месяц a_{11} метров ткани T_1, a_{12} метров ткани T_2, a_{13} метров ткани T_3, a_{14} метров ткани T_4. Производительности станков при производстве каждого вида ткани заданы в таблице.

Тип станка	Вид ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

Каждый метр ткани T_1 приносит фабрике доход c_1, ткани T_2 – доход c_2, ткани T_3 – доход c_3, ткани T_4 – доход c_4. Фабрике предписан план, согласно которому она обязана произвести за месяц: не менее $в_1$ метров ткани T_1, не менее $в_2$ метров ткани T_2, не менее $в_3$ метров ткани T_3, не менее $в_4$ метров ткани T_4. Требуется так загрузить станки производством тканей различного вида, чтобы план был выполнен, и при этом месячная прибыль была максимальна.

Построение математической модели

Построим математическую модель данной задачи.

Словесная формулировка проблемы

Требуется определить, какие станки и какую ткань (управляемые переменные) должны выпускать, чтобы ***общая прибыль*** была максимальной (цель), при этом план был выполнен (ограничения), и учтены ограничения по количеству станков.

Математическая формулировка

Переменные. Т.к. нужно определить, какие станки и какую ткань должны выпускать, то переменными в модели являются: x_{ij} – количество станков i-го типа, занятых производством j-ой ткани, i=1,2, j=1,2,3,4.

Целевая функция. Т.к. один метр ткани T_1 приносит прибыль c_1 рублей, а станки 1 типа выпустят ткани $a_{11}x_{11}$ метров, то прибыль от станков 1 типа составит $c_1a_{11}x_{11}$ рублей. Аналогично, станки 2 типа выпустят ткани T_1 $a_{21}x_{21}$ метров, прибыль от станков 2 типа составит $c_1a_{21}x_{21}$ рублей. Общая прибыль от ткани 1 типа составит $c_1a_{11}x_{11} + c_1a_{21}x_{21}$ рублей. Аналогично можно получить прибыль от выпуска ткани T_2, T_3, T_4.

Обозначив общую прибыль (в рублях) через f, можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить допустимые значения переменных x_{11}, x_{12}, x_{21} и x_{22}, которые максимизируют общую прибыль, т.е. $f = c_1\,(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + c_2\,(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + c_3\,(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}) + c_4\,(a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24})$.

Ограничения. При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения по ресурсам, т.е. по количеству станков, и ограничения по ассортименту.

Ограничения по ресурсам:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Сумма станков каждого типа,}\\ \text{занятых производством всех тканей}\end{array}\right] \le \left[\begin{array}{c}\text{Количества станков}\\ \text{данного типа}\end{array}\right]$$

Это приводит к следующим ограничениям.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le N_1,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le N_2.$$

Ограничения по ассортименту:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Общее количество каждого вида тканей,}\\ \text{выпущенных на станках двух типов}\end{array}\right] \ge \left[\begin{array}{c}\text{Задания по плану}\\ \text{для данного вида ткани}\end{array}\right]$$

Это приводит к следующим ограничениям.

$$a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \ge в_1,$$
$$a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \ge в_2,$$
$$a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \ge в_3,$$
$$a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24} \ge в_4.$$

Неявное ограничение заключается в том, что количество станков i-го типа, занятых производством j-ой ткани, не может принимать отрицательного значения. Чтобы предотвратить получение таких недопустимых решений, потребуем выполнения *условия не отрицательности* переменных, т.е. введем ограничения: $x_{ij} \ge 0$.

Итак, математическую модель можно записать следующим образом.

Определить такие неотрицательные значения переменные x_{11}, x_{12}, x_{21} и x_{22}, при которых достигается $max\ f = c_1\,(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + c_2\,(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + c_3\,(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}) + c_4\,(a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24})$, и которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le N_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le N_2, \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \ge в_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \ge в_2, \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \ge в_3, \\ a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24} \ge в_4, \\ x_{ij} \ge 0,\ i=1,2,\ j=1,2,3,4. \end{cases}$$

3. Задача о распределении ресурсов

Для изготовления n видов продукции используется m видов сырья. Введем следующие обозначения:
S_i (i=1,…,m) – виды сырья.
b_i (i=1,…,m) – запасы сырья i-го типа.
P_j (j=1,…,n) – виды продукции.
a_{ij} – количество единиц i-го типа сырья, идущего на изготовление единицы j-ой продукции.
c_j – величина прибыли, получаемой от реализации единицы j-ой продукции.

Условия задачи можно записать в таблице:

Виды сырья	Кол-во единиц i-го типа сырья, идущего на изготовление единицы j-ой продукции.				Запасы сырья
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$в_1$
S_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$в_2$
.	.	.	…	.	.
.	.	.	…	.	.
.	.	.	…	.	.
S_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$в_m$
Прибыль	c_1	c_2	…	c_n	

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Построение математической модели

Построим математическую модель данной задачи.

Словесная формулировка проблемы

Требуется определить, какое количество продукции каждого вида (управляемые переменные) надо выпускать, чтобы ***общая прибыль*** была максимальной (цель), при этом необходимо учесть запасы сырья (ограничения).

Математическая формулировка

Переменные. Т.к. нужно определить, какое количество продукции каждого вида надо выпускать, то переменными в модели являются:
x_j – количество единиц j-ой продукции, которое необходимо произвести (j=1,…,n).

Целевая функция. Т.к. c_1 – величина прибыли, получаемой от реализации единицы 1-ой продукции, то прибыль от реализации x_1 единиц 1-ой продукции составит c_1x_1 рублей. Аналогично можно получить прибыль от выпуска других видов продукции.

Обозначив общую прибыль (в рублях) через f, можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить допустимые значения переменных x_1, x_2,…,x_n, которые максимизируют общую прибыль, т.е. $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Ограничения. При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения по ресурсам:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Общее кол-во использованного}\\ \text{ресурса для всех видов продукции}\end{array}\right] \le \left[\begin{array}{c}\text{Запаса данного}\\ \text{вида ресурса}\end{array}\right]$$

Это приводит к следующим ограничениям.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le в_m. \end{array}$$

Неявное ограничение заключается в том, что количество единиц продукции, которое необходимо произвести, не может принимать отрицательного значения, поэтому потребуем выполнения *условия неотрицательности* переменных, т.е. введем ограничения: $x_j \ge 0$.

Итак, математическую модель можно записать следующим образом.

Определить такие неотрицательные значения переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых достигается $max\ \ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$, и которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le в_m. \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

2.1.2. Различные формы записи задачи линейного программирования

Выделяют три основных формы записи задачи линейного программирования (ЗЛП).

1. Общая ЗЛП

$$min\ \ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=)\ в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=)\ в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=)\ в_m. \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,k \le n. \end{cases} \qquad (2.1)$$

2. Стандартная ЗЛП

$$min\ \ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le в_m. \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,k \le n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

3. Основная (каноническая) ЗЛП

$$min\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Указанные выше три формы записи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть представлена в форме другой задачи.

Чтобы перейти от одной формы записи ЗЛП к другой, необходимо уметь, во-первых, сводить задачу минимизации к задаче максимизации и наоборот; во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот; в-третьих, преобразовывать переменные, на которые не наложены условия не отрицательности.

1. *Преобразование целевой функции*

Целевая функция в ЗЛП может рассматриваться как на максимум, так и на минимум. Но иногда удобно изменить исходную функцию. Максимизация функции f эквивалентна задаче минимизации функции $(-f)$. Эквивалентность означает, что при одной и той же совокупности ограничений оптимальные значения переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ обеих задач будут одинаковыми. Отличие заключается в том, что значения целевых функций обеих задач будут отличаться только знаком. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать задачу минимизации функции f.

2. Преобразование ограничений

Ограничения-неравенства преобразуются к равенствам путем добавления неотрицательной переменной в неравенствах «≤» (добавленная переменная называется остаточной) либо вычитанием неотрицательной переменной в неравенствах «≥» (вычитаемая переменная называется избыточной).

Например, неравенство $x_1 + 2x_2 \leq 6$ приводится к равенству $x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$, где $x_3 \geq 0$, а неравенство $3x_1 + 2x_2 \geq 10$ приводится к равенству $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$, где $x_4 \geq 0$.

Переход от ограничений-равенств к ограничениям-неравенствам осуществляется следующим образом:

- Разрешить систему ограничений относительно m переменных, например, $x_1, x_2,\ldots,x_m$.
- Выразить переменные $x_1, x_2,\ldots,x_m$ через оставшиеся $n - m$ переменные $x_{m+1}, x_{m+2},\ldots,x_m$.
- Воспользоваться условием не отрицательности переменных $x_1, x_2,\ldots,x_m$.

Пример 2.1. Преобразовать ограничения-равенства к ограничениям-неравенствам.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 10 \\ x_1,\ x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

Сложим равенства, в результате получим $4x_1 + 6x_2 + 2x_4 = 16$.

Выразим из последнего уравнения переменную x_4 и воспользуемся ее не отрицательностью, в результате получим ограничение-неравенство

$$x_4 = 8 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0.$$

Теперь вычтем из первого уравнения второе, получим $-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4$.

Выразим из последнего уравнения переменную x_3 и воспользуемся ее не отрицательностью, в результате получим ограничение-неравенство

$$x_3 = -2 + x_1 + x_2 \ge 0.$$

Таким образом, система ограничений преобразовалась к виду

$$\begin{cases} 8 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ -2 + x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. Преобразование переменных

Любую переменную x_j, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения, можно представить как разность двух неотрицательных переменных $x_j = x_j^{/} - x_j^{//},\quad x_j^{/}, x_j^{//} \ge 0$. Это выражение необходимо подставить во все ограничения и в целевую функцию вместо переменной x_j.

2.1.3. Основная задача линейного программирования

Рассмотрим основную задачу линейного программирования.

Постановка задачи: требуется найти такие неотрицательные значения переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (2.4)$$

и при которых линейная функция $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$ достигает своего минимального значения.

ЗЛП относится к задаче на условный экстремум. Казалось бы, что для исследования линейной функции на экстремум достаточно применить известные результаты математического анализа, однако, это невозможно, что довольно легко показать. Т.к. функция f – линейная, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = c_j$. Но все коэффициенты c_j не могут равняться одновременно 0, поэтому внутри области, образованной системой ограничений, экстремальных точек быть не может. Они могут быть только на границе области.

Для решения ЗЛП разработаны специальные методы. Универсальный способ решения ЗЛП – это симплекс-метод.

Введем ряд определений.

Определение 2.1. Функция f в постановке задачи называется **целевой функцией**, а условия (2.4) – системой ограничений.

Определение 2.2. Совокупность чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, удовлетворяющих системе ограничений (2.4), называется **допустимым решением**.

Определение 2.3. Система ограничений (2.4) называется областью допустимых решений (ОДР).

Определение 2.4. Допустимое решение $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, при котором целевая функция f принимает минимальное (максимальное) значение, называется **оптимальным**.

Основная задача линейного программирования необязательно должна иметь решение. Может оказаться, что уравнения в системе ограничений противоречат друг друга, тогда область допустимых решений – пустое множество. Кроме того может оказаться, что допустимые решения существуют, но среди этих решений нет оптимального. Это возможно в том случае, когда ОДР является неограниченной снизу (в задаче минимизации) или сверху (в задаче максимизации).

Рассмотрим вопрос о существовании допустимого решения. При решении этого вопроса можно исключить из рассмотрения целевую функцию, т.к. наличие допустимых решений определяется только системой ограничений.

Итак, пусть имеется система линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Прежде чем ответить на вопрос: когда существуют неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие этой системе, введем ряд определений.

Определение 2.5. Матрицей системы линейных уравнений называется матрица $A = \{a_{ij}\}_{mxn}$, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Определение 2.6. Расширенной матрицей системы называется матрица $\hat{A}$, состоящая из матрицы A и столбца свободных членов B, т.е. $\hat{A} = (A,B)$.

Определение 2.7. Рангом матрицы называется наибольший из порядков миноров, отличных от нуля.

Определение 2.8. Определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении выбранных k строк и k столбцов, называется **минором** k=го порядка.

Теорема 2.1. (О совместности системы линейных уравнений). Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы совпадал с рангом расширенной матрицы, т.е. $r(A) = = r(\hat{A}) = r$ [18].

Ранг системы совпадает с числом линейно независимых уравнений в данной системе.

Будем в дальнейшем предполагать, что рассматриваемая система является совместной.

Очевидно, что ранг матрицы системы r не может быть больше m и не может быть больше n: $r \le m$, $r \le n$.

Первый случай. Пусть $r = n$, т.е. число линейно независимых уравнений совпадает с числом переменных. Отбросив линейно зависимые уравнения, получим систему, состоящую из n уравнений с n переменными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = в_n. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Т.к. $r(A) = n$, то определитель системы отличен от нуля, $|A| \neq 0$, и по теореме Крамера система имеет единственное решение, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ [18]. Если в этом решении хотя бы одна переменная отрицательна, то общая ЗЛП не имеет допустимых решений. Если все переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ неотрицательны, то найденное решение является допустимым. Очевидно, что оно является и оптимальным. Этот случай – тривиальный.

Второй случай. Пусть $r < n$, т.е. число линейно независимых уравнений меньше числа переменных. Тогда, если система совместна, то она имеет бесконечное множество решений. Действительно, r переменных, например, $x_1,x_2,\ldots,x_r$, можно единственным образом выразить через оставшиеся n - r переменные, т.е. $x_{r+1},\ldots, x_n$.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{2,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r,\, r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}x_n \end{cases} \qquad (2.7)$$

Придавая переменным $x_{r+1},\ldots, x_n$ произвольные значения, будем получать, причем единственным образом, соответствующие значения переменных $x_1,x_2,\ldots,x_r$. Переменные $x_{r+1},\ldots, x_n$, которые могут принимать произвольные значения, будем называть **свободными**, остальные переменные $x_1,x_2,\ldots,x_r$, которые выражаются через свободные, будем называть **базисными** переменными.

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что уравнения в системе ограничений являются линейно независимыми, т.е. $r(A) = r = m$.

Определение 2.9. Решение, в котором свободные переменные равны 0, называется **базисным**, т.е. $X = (\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_m, 0,\ldots,0)$.

Определение 2.10. Если в базисном решении все переменные неотрицательны, то такое решение называется **опорным**.

Определение 2.11. Опорное решение называется **невырожденным,** если оно содержит ровно m положительных компонент, в противном случае решение называется **вырожденным.**

Таким образом, если $r < n$, то система уравнений имеет множество решений. Если среди этих решений нет ни одного решения, у которого все переменные неотрицательны, то ОДР исходной задачи – пустое множество, т.е. допустимых решений нет. Если найдутся решения, в которых все переменные неотрицательны, то они и будут допустимыми для исходной задачи.

Выяснив условия существования допустимых решений ЗЛП, перейдем к следующей проблеме – как среди допустимых решений найти оптимальное решение. Для того чтобы понять идею метода решения ЗЛП, рассмотрим графическую интерпретацию ЗЛП.

2.1.4. Графическая интерпретация задач линейного программирования

Графический метод решения ЗЛП имеет ограниченную область применения. Обычно его применяют в случае, когда число свободных переменных равно 2, т.е. $n - m = 2$. В случае трех свободных переменных он становится менее наглядным, при большем числе свободных переменных невозможен.

Рассмотрим основную ЗЛП (2.3). Предположим, что эта задача имеет две свободных переменных, т.е. $n - m = 2$. Поэтому две переменные, например, x_1,x_2, можно взять в качестве свободных, а все остальные переменные, которые будут базисными, можно будет выразить через свободные переменные, т.е. привести систему к виду:

$$\begin{cases} x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2\,, \\ x_4 = \beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

Подставим эти выражения в целевую функцию f и воспользуемся не отрицательностью базисных переменных. В результате получим следующую ЗЛП: найти переменные x_1,x_2, которые удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \geq 0\,, \\ \beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n + \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \geq 0, \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

и доставляют минимум функции $f = d_1x_1 + d_2x_2$.

Данная задача решается графически (см. п. 1.3.1).

ОДР в ЗЛП в зависимости от конкретного вида системы может иметь один из следующих видов:

- ОДР – пустое множество (рис. 2.1, *а*),
- ОДР – единственная точка (рис. 2.1, *б*),
- ОДР – ограниченная область, выпуклый многоугольник (рис. 2.1,*в*),
- ОДР – неограниченная область (рис. 2.1,*с*).

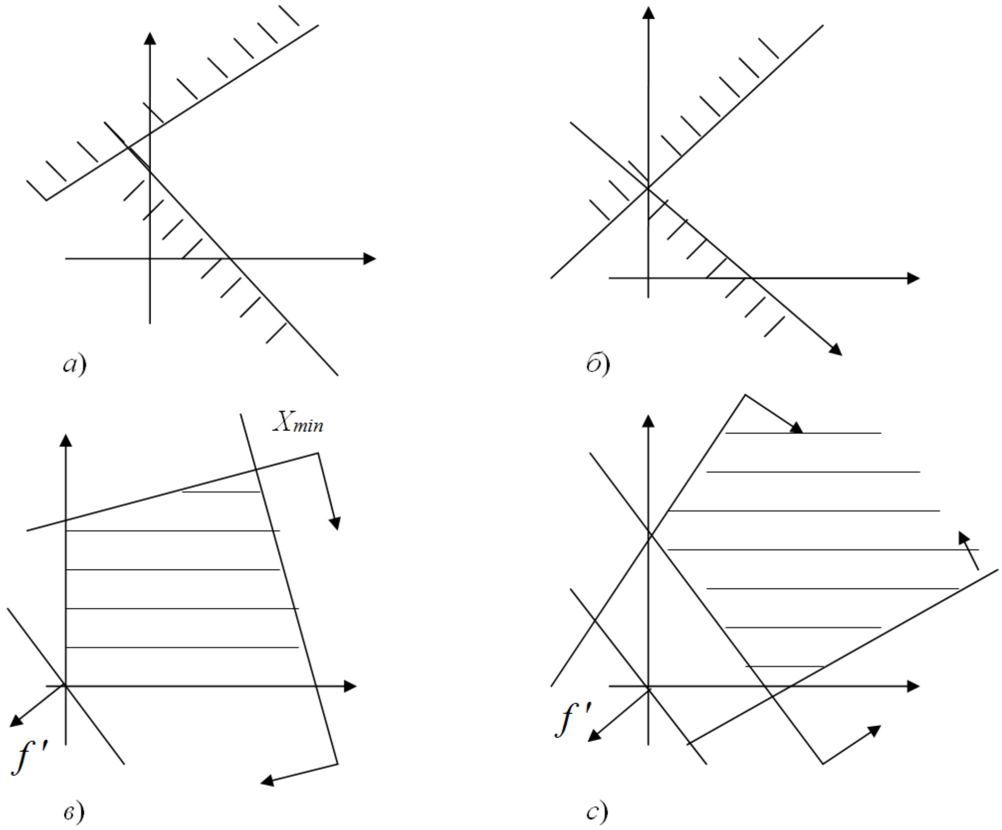


Рис. 2.1. *Геометрическая интерпретация ЗЛП*

Для построения линий уровня целевой функции и нахождения направления убывания функции f построим вектор-градиент функции f: $f' = (d_1, d_2)$ и перпендикулярно ему проведем линию уровня. В зависимости от вида ОДР, направления градиента и относительного положения линии уровня целевой функции возможны такие варианты:

- ЗЛП имеет единственное решение (рис. 2.1, *в*),
- ЗЛП не имеет оптимального решения (рис. 2.1, *с*), т.к. ОДР не ограничена в направлении убывания функции,
- ЗЛП имеет бесконечное множество решений (рис. 2.2). В этом случае минимум целевой функции достигается в любой точке, лежащей на стороне ОДР, параллельной линия уровня. Тогда оптимальное решение запишется в виде: $X(\lambda) = \lambda X^{(1)} + (1-\lambda)X^{(2)}$, где λ – любое число, удовлетворяющее условию: $0 \le \lambda \le 1$. Этот случай называется случаем альтернативного оптимума.

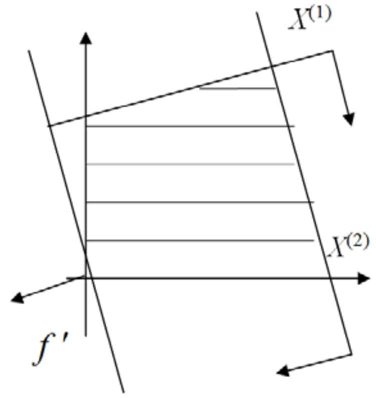


Рис. 2.2. *Случай альтернативного оптимума*

Таким образом, исходя из графического способа решений ЗЛП, можно сделать следующие выводы:

1. ЗЛП может не иметь оптимального решения, если ОДР не ограничена в направлении убывания функции f в задаче минимизации или возрастания функции f в задаче максимизации.
2. Если оптимальное решение ЗЛП существует, то оно достигается в одной из угловых точек ОДР.
3. Если оптимальное решение ЗЛП достигается в двух угловых точках ОДР, то оно достигается и в любой точке отрезка, соединяющего эти два решения (случай альтернативного оптимума).
4. В каждой вершине построенной ОДР по крайней мере две из переменных обращаются в 0 (т.к. на каждой граничной прямой одна из переменных равна 0). Поэтому решение, соответствующее вершине ОДР, является опорным (случай двух свободных переменных). Случай, когда в угловой точке более двух переменных обращаются в 0, является вырожденным. Геометрически это означает, что в угловой точке пересекаются более двух прямых.

5. Для того, чтобы найти оптимальное решение ЗЛП, достаточно перебрать угловые точки ОДР и выбрать из них ту, в которой целевая функция достигает своего экстремума, причем переход от одной угловой точки к другой необходимо осуществлять в направлении возрастания или убывания (в зависимости от решаемой задачи) целевой функции.

Именно этот результат и положен в основу метода решения ЗЛП, который называется симплекс-методом.

2.1.5. Основная идея симплекс-метода

Симплекс-метод относится к числу наиболее распространенных вычислительных методов, использующих идею последовательного улучшения решений. Этот метод является универсальным, т.е. он может быть использован при решении любой ЗЛП. Название метода происходит от слова «симплекс», что означает простейший многогранник n-мерного пространства, имеющий n+1 вершину (аналог тетраэдра в трехмерном пространстве).

Симплекс-метод не обладает той наглядностью, которая характерна для графического способа решения. В его вычислительной схеме реализуется упорядоченный процесс, при котором, начиная с некоторой исходной допустимой угловой точки, осуществляется последовательный переход от одной угловой точки к другой до тех пор, пока не будет найдена точка, соответствующая оптимальному решению, или доказана неразрешимость поставленной задачи. При этом каждая последующая угловая точка должна быть смежной с предыдущей точкой, и обратный переход к предшествующей точке не должен осуществляться.

Заметим, что две смежные угловые точки отличаются только по одной переменной в составе базисных и в составе свободных переменных. Поэтому переход от одной угловой точки к другой угловой смежной точке можно осуществить за счет обмена между базисной переменной и свободной. Ту свободную переменную, которая будет включаться в базис, назовем включаемой переменной, а ту базисную переменную, которая будет исключаться из базиса, назовем исключаемой переменной.

Рассмотрим идею симплекс-метода более подробно.

Рассмотрим основную ЗЛП

$$min\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Будем предполагать, что система ограничений содержит m линейно независимых ограничений. Выберем m переменных в качестве базисных, например, $x_1, x_2, \ldots, x_m$, остальные n-m переменных, например, $x_{m+1}, \ldots, x_n$, в качестве свободных переменных.

Тогда систему ограничений можно разрешить относительно базисных переменных, т.е. привести ее к виду:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1,q}x_q + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p + \alpha_{p,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{p,q}x_q + \ldots + \alpha_{pn}x_n = \beta_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{n,q}x_q + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m. \end{cases} \quad (2.11)$$

Т.к. оптимальное решение ЗЛП достигается в одной из угловых точек ОДР, соответствующей опорному решению, то положим свободные переменные равными 0, т.е. $x_{m+1}=\ldots= x_n =0$, тогда базисные переменные будут равны свободным членам, т.е. $x_1= \beta_1,\ldots,x_p = \beta_p,\ldots,x_m = \beta_m$. Предположим, что полученное решение является допустимым, т.е. все $\beta_i \geq 0$, i $=1,\ldots,m$. Для того, чтобы определить, является ли это решение оптимальным, выразим функцию f через свободные переменные $x_{m+1},\ldots, x_n$, и запишем ее в таком же виде, как ограничения задачи, т.е.

$$f + \gamma_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \gamma_q x_q + \ldots + \gamma_n x_n = \gamma_0 . \quad (2.12)$$

Очевидно, что при $x_{m+1}=\ldots= x_n =0$ функция $f = \gamma_0$.

Естественно возникает вопрос: можно ли за счет увеличения какой-либо переменной из свободных переменных $x_{m+1},\ldots, x_n$ уменьшить значение целевой функции f. Очевидно, что, если все коэффициенты $\gamma_{m+1},\ldots,\gamma_n$ не положительны, то этого сделать нельзя, т.к. в рамках равенства увеличение переменной приведет к увеличению функции. Следовательно, найденное опорное решение будет оптимальным. Если среди коэффициентов $\gamma_{m+1},\ldots,\gamma_n$ найдется хотя бы один положительный, то за счет увеличения переменной, именно той, которой соответствует положительный коэффициент, значение функции f можно уменьшить. Пусть, например, коэффициент $\gamma_q \geq 0$. Значит, есть смысл увеличить переменную x_q, т.е включить ее в базис и перейти к новому опорному решению, где переменная x_q – базисная.

Увеличение переменной x_q приведет не только к уменьшению функции f, но может привести и к уменьшению значений базисных переменных, поэтому увеличивать свободную переменную x_q нужно осторожно, чтобы базисные переменные не стали отрицательными.

Очевидно, что, если коэффициент в уравнении при переменной x_q отрицательный, то увеличение переменной x_q приведет к увеличению соответствующей этому ограничению базисной переменной. Если во всех ограничениях коэффициенты при переменной x_q не положительны, то переменную x_q можно увеличивать неограниченно, а, значит, линейная функция f будет не ограничена снизу, и оптимального решения ЗЛП не будет существовать.

Если же коэффициент при x_q положительный, например, $\alpha_{1q} > 0$, то увеличение переменной x_q приведет к уменьшению переменной x_1, причем x_1 станет равной 0, когда $x_q = \beta_1 / \alpha_{1q}$, Аналогично для всех остальных базисных переменных, в ограничениях для которых коэффициент при x_q положителен. Выберем среди базисных переменных ту, которая при увеличении переменной x_q первой обратится в 0, т.е. для которой отношение β_i / α_{iq}, где $\alpha_{iq}>0$, является минимальным. Пусть такой переменной является x_p. Эта переменная будет исключаемой из базиса. Осуществим обмен между переменными x_p и x_q. Делается это с помощью метода Гаусса. Разрешим p-ое уравнение относительно переменной x_q. Для этого разделим левую и правую части уравнения на элемент α_{pq}, а затем исключим переменную x_q из всех остальных ограничений и из функции f. В результате получим новое опорное решение, в котором свободные переменные $x_p = x_{m+1} = \ldots = x_{q-1} = x_{q+1} = \ldots = x_n = 0$, а переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_m, x_q$ являются базисными. Новое решение необходимо проверить на оптимальность. Данный процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, или доказана неразрешимость поставленной задачи.

Пример 2.2. Найти решение следующей задачи ЛП:

$$min\ f = -3x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_6 = 2. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,6. \end{cases}$$

Решение. Система ограничений в данной задаче уже разрешена относительно базисных переменных x_3, x_4, x_5, x_6, причем свободные члены ограничений положительны. Поэтому найдено исходное опорное решение, в котором свободные переменные $x_1 = x_2 = 0$, а базисные переменные равны: $x_3 = 6$, $x_4 = 8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2$. Соответствующее значение функции f равно 0, т.е. $f_1 = 0$.

Запишем функцию f в таком же виде, как и ограничения, перенеся все неизвестные члены в левую часть равенства: $f + 3x_1 + 2x_2 = 0$. Очевидно, что при введении свободных переменных x_1 , x_2 в базис (т.е. при их увеличении), значение функции f уменьшится, причем при введении переменной x_1 оно уменьшится больше, поэтому целесообразно ввести переменную x_1 в базис. Итак, x_1 – включаемая переменная в базис. Определим исключаемую из базиса переменную. Рассмотрим только те уравнения, в которых при переменной x_1 стоит положительный коэффициент. Из первого уравнения получим, что переменная $x_3 = 0$ при $x_1 = 6$ (при $x_2 = 0$); из второго уравнения имеем: $x_4 = 0$ при $x_1 = 4$. Таким образом при увеличении переменной x_1 первой в ноль обращается переменная x_4, значит x_4 – исключаемая переменная из базиса. Осуществим обмен между переменными x_1 и x_4. Для этого разделим второе уравнение на 2, получим $x_1 + 1/2\ x_2 + 1/2\ x_4 = 4$.

Исключим переменную x_1 из первого и третьего уравнений. Для этого из первого уравнения вычтем полученное уравнение, а к третьему прибавим, в результате чего получим:

$$\begin{cases} 3/2\,x_2 + x_3 - 1/2\,x_4 = 2, \\ x_1 + 1/2\,x_2 + 1/2\,x_4 = 4, \\ 3/2\,x_2 + 1/2x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_6 = 2. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,6. \end{cases}$$

Таким образом, второе решение имеет вид: свободные переменные $x_2 = x_4 = 0$, а базисные переменные равны: $x_1 = 4$, $x_3 = 2$, $x_5 = 5$, $x_6 = 2$. Соответствующее значение функции f равно -12, т.е. $f_2 = -12$.

Полученная точка должна быть проверена на оптимальность. Для этого выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$f + 3\ (4 - 1/2\,x_2 - 1/2\,x_4) + 2x_2 = 0.$$

Окончательно имеем:

$$f + 1/2\,x_2 - 3/2\,x_4 = -12.$$

Т.к. коэффициент при x_2 положителен, то это означает, что найденное решение не является оптимальным, и его можно улучшить за счет ввода переменной x_2 в базис. Итак, x_2 – включаемая переменная в базис. Определим исключаемую из базиса переменную. Рассмотрим только те уравнения, в которых при переменной x_2 стоит положительный коэффициент. Из первого уравнения получим, что переменная $x_3 = 0$ при $x_2 = 4/3$ (при $x_4 = 0$); из второго уравнения имеем: $x_1 = 0$ при $x_2= 8$, из третьего уравнения: $x_5 = 0$ при $x_2= 10/3$, из четвертого уравнения: $x_6 = 0$ при $x_2 = 2$. Таким образом при увеличении переменной x_2 первой в ноль обращается переменная x_3, значит x_3 – исключаемая переменная из базиса. Осуществим обмен между переменными x_2 и x_3. Для этого разделим первое уравнение на 3/2, получим $x_2 + 2/3\,x_3 - 1/3\,x_4 = 4/3$.

Исключим переменную x_2 из остальных уравнений**,** в результате придем к следующей системе:

$$\begin{cases} x_2 + 2/3\,x_3 - 1/3\,x_4 = 4/3., \\ x_1 - 1/3\,x_3 + 2/3\,x_4 = 10/3, \\ -x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ -2/3\,x_3 + 1/3\,x_4 + x_6 = 2/3. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,6. \end{cases}$$

Таким образом, третье решение имеет вид: свободные переменные $x_3 = x_4 = 0$, а базисные переменные равны: $x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2/3$. Соответствующее значение функции f равно -38/3, т.е. $f_3 = -38/3$.

Полученная точка должна быть проверена на оптимальность. Для этого выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$f + 1/2\ (4/3 - 2/3\,x_3 + 1/3\,x_4) - 3/2x_4 = -12.$$

Окончательно имеем: f - 1/3 x_3 - 4/3 x_4 = -38/3.

Т.к. коэффициенты при свободных переменных в целевой функции являются отрицательными, то увеличение этих переменных приведет к увеличению функции f. Значит, дальнейшее уменьшение целевой функции невозможно, следовательно, полученное решение (10/3; 4/3; 0; 0; 3; 2/3) является оптимальным, а f_{min}= -38/3.

Для того, чтобы упростить процесс нахождения решения и каждый раз не писать уравнения и переменные, все вычисления проводят в специальных симплекс-таблицах.

2.1.6. Табличный алгоритм симплекс-метода

Рассмотрим следующую задачу:

$$min\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Алгоритм симплекс-метода

1. ***Нахождение исходного опорного решения***.

Предположим, что систему ограничений удалось разрешить относительно базисных переменных, например, $x_1, x_2,\ldots, x_m$, остальные $n\text{-}m$ переменных, $x_{m+1},\ldots, x_n$ – свободные переменные. В результате имеем систему уравнений (2.14).

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1,q}x_q + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p + \alpha_{p,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{p,q}x_q + \ldots + \alpha_{pn}x_n = \beta_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{n,q}x_q + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases} \qquad (2.14)$$

Выразим функцию f через свободные переменные $x_{m+1},\ldots, x_n$, и запишем ее в таком же виде как ограничения задачи, т.е.

$$f + \gamma_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \gamma_q x_q + \ldots + \gamma_n x_n = \gamma_0 .$$

Все вычисления будем проводить в специальных таблицах (таблица 2.1).

В данную таблицу заносятся коэффициенты и свободные члены ограничений, а также коэффициенты целевой функции. Строка для функции f называется **оценочной**, а коэффициенты $\gamma_{m+1},\ldots, \gamma_n$ – **оценками** свободных переменных.

Если в разрешенной системе все свободные члены $\beta_j \geq 0$, то исходное опорное решение получено:

$$X^{(0)} = (\beta_1,\ldots, \beta_m, 0,\ldots,0).$$

В противном случае смотри алгоритм нахождения исходного опорного решения (разделы 2.1.7 или 2.1.8).

Таблица 2.1.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	…	x_p	…	x_m	x_{m+1}	…	x_q	…	x_n
x_1 …	β_1 …	1 …	… …	0 …	… …	0 …	$\alpha_{1,m+1}$ …	… …	$\alpha_{1,q}$ …	… …	α_{1n} …
x_p	β_p	0	…	1	…	0	$\alpha_{p,\,m+1}$	…	$\alpha_{p,q}$	…	α_{pn}
… x_m	… β_m	… 0	… …	… 0	… …	… 1	… $\alpha_{m,\,m+1}$	… …	… $\alpha_{n,q}$	… …	… α_{mn}
f	γ_0	0	…	0	…	0	γ_{m+1}	…	γ_q	…	γ_n

2. Проверка найденного решения на оптимальность

Признак оптимальности для задачи минимизации:

- Полученное опорное решение является оптимальным, если в оценочной строке оценки всех свободных переменных ***неположительны***.
- Если в оценочной строке есть хотя бы одна положительная оценка, столбец которой содержит хотя бы один положительный коэффициент, то найденное опорное решение можно улучшить.
- Если в оценочной строке есть положительная оценка, столбец которой не содержит ни одного положительного коэффициента, то оптимального решения не существует, т.к. функция f не ограничена снизу, т.е. $f \to -\infty$.

3. ***Улучшение опорного решения в случае его не оптимальности***

- В качестве включаемой переменной в базис выбирается та свободная переменная, которой соответствует положительная оценка в оценочной строке, и столбец которой содержит хотя бы один положительный коэффициент. Пусть $\gamma_q > 0$, следовательно, x_q – включаемая переменная. Столбец, соответствующий включаемой переменной, называется ***разрешающим***. Если в оценочной строке несколько положительных оценок, то выбираем наибольшую положительную оценку.
- В качестве исключаемой переменной из базиса выбирается та базисная переменная, для которой отношение свободного члена к соответствующему положительному элементу разрешающего столбца будет минимальным, т.е. для которой выполняется условие:

$$\min_{\alpha_{jp}>0}\left\{\frac{\beta_j}{\alpha_{jp}}\right\}=\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}$$

Т.е. базисная переменная x_p – исключаемая переменная. Соответствующая p-я строка называется ***разрешающей***, а элемент α_{pq} ***– разрешающим элементом.***

- Все элементы разрешающей строки разделить на разрешающий элемент α_{pq}.
- Заполнить базисные столбцы, т.е. поставить 1 на пересечении строки и столбца, соответствующих базисной переменной, а все остальные элементы базисного столбца положить равными 0.

- Пересчитать все остальные элементы симплекс-таблицы по правилу прямоугольника. Предположим, что нам необходимо вычислить значение элемента, стоящего на пересечении i-ой строки и j-го столбца α'_{ij}. Построим прямоугольник по следующему правилу: возьмем старый элемент на этом месте α_{ij}, добавим элемент разрешающей строки и j-го столбца – α_{pj}, элемент разрешающего столбца и i-ой строки – α_{iq}, а также разрешающий элемент α_{pq} (рис.2.3).

	j-й столбец		q-й столбец (разрешащий)	
i-я строка	α_{ij}		α_{iq}	
p-я строка (разрешающая)	α_{pj}		α_{pq}	

Рис. 2.3. *Графическая иллюстрация правила прямоугольника*

Тогда $\alpha'_{ij} = \dfrac{\alpha_{pq}\alpha_{ij} - \alpha_{iq}\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}$ или $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \dfrac{\alpha_{iq}\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}$.

Второй формулой удобно пользоваться тогда, когда второе слагаемое является целым числом. В противном случае лучше использовать первую формулу.

Вновь найденное решение $X' = \left(\beta'_1,...,0,\beta'_m,0,...,\beta'_q,...,0\right)$ необходимо проверить на оптимальность, т.е перейти к пункту 2.

При пересчете можно использовать следующее правило.

Правило. Если в разрешающей строке (или разрешающем столбце) имеется нулевой элемент, то соответствующий столбец (строка) переносятся в новую таблицу без изменений.

Замечание 2.1. Рассмотрим решение задачи максимизации**,** т.е. задачи

$$max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Алгоритм симплекс-метода для этой задачи отличается от рассмотренного ранее алгоритма только условием оптимальности и выбором разрешающего столбца.

Признак оптимальности для задачи максимизации:

- Полученное опорное решение является оптимальным, если в оценочной строке оценки всех свободных переменных ***не отрицательны***.
- Если в оценочной строке есть хотя бы одна отрицательная оценка, столбец которой содержит хотя бы один положительный коэффициент, то найденное опорное решение можно улучшить.

- Если в оценочной строке есть отрицательная оценка, столбец которой не содержит ни одного положительного коэффициента, то оптимального решения не существует, т.к. функция f не ограничена сверху, т.е. $f \to +\infty$.

В качестве включаемой переменной в базис выбирается та свободная переменная, которой соответствует отрицательная оценка в оценочной строке, и столбец которой содержит хотя бы один положительный коэффициент. Если в оценочной строке несколько отрицательных оценок, то выбираем наименьшую отрицательную оценку. Остальные вычисления проводятся аналогично задаче минимизации.

Замечание 2.2. Проблема вырожденности решения.

В случае, когда при увеличении свободной переменной первыми в 0 обращаются две базисных переменных и более, однозначно определить исключаемую переменную невозможно. Выбор такой переменной можно осуществлять произвольно. Однако на следующей итерации, по крайней мере, одна из базисных переменных будет равна 0, т.е. новое опорное решение будет вырожденным.

Наличие вырожденного решения не свидетельствует о какой-то «опасности» для исследователя. С практической точки зрения данная ситуация объясняется наличием в модели по крайней мере одного избыточного ограничения.

С точки зрения теории решения задач ЛП вырожденность может привести к одному из следующих случаев:

- в случае вырожденного решения может оказаться, что дальнейший обмен между свободной переменной и нулевой базисной переменной приведет только к перестановке переменных, без изменения значений всех переменных и без увеличения целевой функции. Это не означает, что вычисления необходимо прекратить. Решение не изменилось количест-венно, но оно изменилось качественно, т.к. изменился состав свободных и базисных переменных. Геометрически это означает, что в угловой точке ОДР, соответствующей найденному опорному решению, произошел переход с одной гиперплоскости на другую. Поэтому вычисления необходимо продолжить дальше до выполнения принципа оптимальности;
- в очень редких случаях может оказаться, что после нескольких итераций вы вновь вернулись к решению, с которого на-чали. Это – «проблема зацикливания». Практически для того, чтобы избежать этого, при повторных вычислениях необходимо попробовать взять в качестве разрешающего столбца другой столбец, если это возможно. Имеются специальные приемы, предотвращающие зацикливание, однако их использование чрезмерно замедляет процесс расчетов, поэтому их используют достаточно редко. Это вполне оправдано, т.к. вероятность зацикливания очень мала.

Замечание 2.3. Случай альтернативного оптимума.

Каким образом по результатам выполненных итераций узнать о наличии альтернативного оптимума?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно посмотреть на оценки свободных переменных в последней симплекс-таблице. Каждая оценка свободной переменной, взятая с противоположным знаком, показывает, насколько изменится целевая функция, если свободная переменная примет значение, равное 1. Если же оценка свободной переменной равна 0, то это означает, что включение этой переменной в базис не изменит значение целевой функции, но приведет к изменению значений остальных переменных, т.е. к новому оптимальному решению. Т.к. ЗЛП – это задача выпуклого программирования, то любое решение, лежащее на отрезке, соединяющим полученные два оптимальных решения, также будет оптимальным решением. Зная два оптимальных решения $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, остальные решения можно записать как выпуклую комбинацию полученных решений, а именно:

$$X(\lambda) = \lambda X^{(1)} + (1 - \lambda)X^{(2)},$$

где λ – любое число, удовлетворяющее условию $0\le\lambda\le1$.

Пример 2.3. Решить следующую задачу линейного программирования**:**

$$max\ f = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0. \end{cases}$$

Запишем целевую функцию в виде: $f - 9x_1 - 10x_2 - 16x_3 = 0$.

Составляем симплекс-таблицу (таблица 2.2). Т.к. в построенной таблице есть три единичных столбца, а свободные члены положительны, то это означает, что данная задача имеет исходное опорное решение, в котором переменные x_1, x_2,, x_3 – свободные, а переменные x_4, x_5, x_6 – базисные. Свободные переменные в опорном решении принимают нулевое значение, а базисные переменные равны соответствующим свободным членам.

Таким образом, исходное опорное решение имеет вид $X^{(0)} = (0, 0, 0, 360, 192, 180)$, соответствующее значение целевой функции равно $f_0=0$.

Таблица 2.2.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	360	18	15	12	1	0	0	360/12=30
x_5	192	6	4	8	0	1	0	192/8=24
x_6	180	5	3	3	0	0	1	180/3=60
f	0	-9	-10	-16	0	0	0	

Проверим найденное решение на оптимальность. Для этого рассмотрим оценки свободных переменных в оценочной строке f . В этой строке есть три отрицательные оценки: -9,-10 и -16, столбцы которых содержат положительные коэффициенты. Это означает, что найденное решение не является оптимальным, и оно может быть улучшено за счет ввода одной из свободных переменных в базис. Из свободных переменных с отрицательными оценками выберем ту, оценка которой наименьшая, т.е. x_3. Таким образом, x_3 – включаемая переменная в базис. Столбец для переменной x_3 является разрешающим.

Найдем исключаемую переменную из базиса. Для этого найдем отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца. Выберем из этих отношений то, значение которого минимальное (см. дополнительный столбец в таблице). Таким образом, переменная x_5 – исключаемая из базиса переменная. Второе уравнение является разрешающим, а элемент 8, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, будет разрешающим элементом.

Осуществим обмен между выбранными переменными. Заполним следующую симплекс-таблицу (табл.2.3).

В новом решении базисными переменными будут переменные x_4, x_3, x_6.

Разделим элементы второго уравнения на 8. Заполним базисные столбцы, поставив 1 на пересечении строки и столбца, которые соответствуют базисной переменной, а все остальные элементы базисного столбца положим равными 0.

Пересчитаем все остальные элементы симплекс-таблицы по правилу прямоугольника. Предположим, что нам необходимо вычислить значение элемента, стоящего на пересечении 1-ой строки и 1-го столбца (α'_{11}). Построим прямоугольник по следующему правилу: возьмем старый элемент на этом месте α_{11}=18, добавим элемент разрешающей строки и 1-го столбца – α_{21}=6, элемент разрешающего столбца и 1-ой строки – α_{13}=12, а также разрешающий элемент $\boldsymbol{\alpha_{23}}$=8 (рис. 2.3).

	1-й столбец		3-й столбец (разрешащий)
1-я строка	18		12
2-я строка (разрешающая)	6		8

Рис. 2.4. *Графическая иллюстрация правила прямоугольника*

Тогда $\alpha'_{11} = \dfrac{\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{13}\alpha_{21}}{\alpha_{23}} = \dfrac{8*18 - 6*12}{8} = 9$

или $\alpha'_{11} = \alpha_{11} - \dfrac{\alpha_{13}\alpha_{21}}{\alpha_{23}} = 18 - \dfrac{6*12}{8} = 9$.

Остальные элементы таблицы пересчитываются аналогично.

Пересчитаем столбец свободных членов (0-ой столбец).

$$\alpha'_{10} = 360 - \frac{192*12}{8} = 72,$$

$$\alpha'_{30} = 180 - \frac{192*3}{8} = 108,$$

$$\alpha'_{40} = 0 - \frac{192*(-16)}{8} = 384.$$

Пересчитаем элементы первого столбца.

$$\alpha'_{31} = \frac{8*5 - 6*3}{8} = 11/4,$$

$$\alpha'_{41} = \frac{8*(-9) - 6*(-16)}{8} = 3,$$

Пересчитаем элементы второго столбца.

$$\alpha'_{12} = \frac{8*15 - 4*12}{8} = 9,$$

$$\alpha'_{32} = \frac{8*3 - 4*3}{8} = 3/2,$$

$$\alpha'_{42} = \frac{8*(-10) - 4*(-16)}{8} = -2.$$

Пересчитаем элементы пятого столбца.

$$\alpha'_{15} = 0 - \frac{1*12}{8} = -3/2,$$

$$\alpha'_{35} = 0 - \frac{1*3}{8} = -3/8,$$

$$\alpha'_{40} = 0 - \frac{1*(-16)}{8} = 2.$$

В результате получим следующую таблицу (таблица 2.3).

Таблица 2.3.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	72	9	9	0	1	-3/2	0	72/9=8
x_3	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0	24/(1/2)=48
x_6	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1	108/(3/2)=72
f	384	3	-2	0	0	2	0	

Таким образом, новое опорное решение имеет вид: $X^{(1)} = (0, 0, 24, 72, 0, 108)$, соответствующее значение целевой функции равно $f_1 = 384$. Наличие в оценочной строке отрицательной оценки свободной переменной говорит о том, что найденное решение опять не является оптимальным. Его можно улучшить за счет ввода переменной x_2 в базис. Таким образом, x_2 – включаемая переменная в базис. Столбец для переменной x_2 является разрешающим.

Найдем исключаемую переменную из базиса. Для этого найдем отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца. Выберем из полученных отношений то, значение которого минимальное (см. дополнительный столбец в таблице). Таким образом, переменная x_4 – исключаемая из базиса переменная. Первое уравнение является разрешающим, а элемент 9, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки будет разрешающим элементом.

Осуществим обмен между выбранными переменными. В новом решении базисными переменными будут переменные x_2, x_3, x_6.

В результате пересчета получим следующую симплекс-таблицу (таблица 2.4).

Таблица 2.4.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
x_3	20	1/4	0	1	-1/18	1/8	0
x_6	96	5/4	0	0	0	-1/6	1
f	400	5	0	0	0	2/9	0

Таким образом, новое опорное решение имеет вид: $X^{(2)} = (0, 8, 20, 0, 0, 96)$, соответствующее значение целевой функции равно $f_2 = 400$. Отсутствие в оценочной строке отрицательных оценок говорит о том, что найденное решение является оптимальным.

2.1.7. Нахождение исходного опорного решения в задаче линейного программирования

Из примера, рассмотренного нами, видно, что для ЗЛП можно непосредственно указать исходное опорное решение (ИОР) в том случае, если система ограничений разрешена относительно базисных переменных, и свободные члены ограничений не отрицательны. В случае если система ограничений не разрешена относительно базисных переменных, или среди свободных членов ограничений есть отрицательные, то возникает задача нахождения ИОР.

Самый простой способ нахождения ИОР заключается в последовательном вводе переменных в базис с использованием симплексных преобразований. Этот метод имеет существенный недостаток, а именно, большой произвол, что затрудняет программирование этого метода. Для нахождения ИОР можно предложить следующий алгоритм. Рассмотрим задачу (2.13).

Алгоритм нахождения ИОР

1. Разрешить систему ограничений относительно базисных переменных. Для этого в качестве разрешающего элемента можно выбирать любой, отличный от нуля, элемент. Например, в строке, не разрешенной относительно базисной переменной, выбирать первый ненулевой элемент. Пересчет таблицы осуществляется по тому же правилу, что и в симплекс-методе.
2. Если после выполнения шага 1 , т.е. приведения системы ограничений к виду (2.14), все свободные члены ограничений будут не отрицательны, то исходное опорное решение найдено. В противном случае переходим к шагу 3
3. Пусть после приведения системы ограничений к виду (2.14) некоторые из β_j оказались отрицательными.
   - Найдем среди свободных членов ограничений наибольший по абсолютной величине отрицательный свободный член. Пусть это будет β_s, соответствующий s-му уравнению.
   - Вычтем почленно s-ое уравнение из всех уравнений с отрицательными свободными членами. В результате эти уравнения останутся разрешенными относительно тех же базисных переменных, но свободные члены этих уравнений станут неотрицательными. В отличие от всех остальных уравнений s-ое уравнение уже не будет разрешено относительно базисной переменной.
   - Умножим элементы s-го уравнения на -1. Тогда в этом уравнении свободный член станет положительным.
4. Выберем в s-ой строке любой положительный коэффициент, например, $\alpha_{sp}>0$. Тогда p-ый столбец выберем в качестве разрешающего столбца. Далее перейдем к шагу 5. Если же в s-ой строке не найдется ни одного положительного коэффициента, то это означает, что система ограничений несовместна, т.е. допустимых решений нет.
5. Выберем разрешающую строку также как и в симплекс-методе, после чего выполним одну итерацию симплексных преобразований. При выполнении данной итерации можем столкнуться с одним из следующих трех случаев:
   - Разрешающий элемент α_{pq}, выбранный согласно шагу 5, оказался принадлежащим s-ой строке, т.е. $p=s$, s – разрешающая строка. В этом случае за одну итерацию будет получено ИОР, т.к. s-ое уравнение будет разрешено относительно переменной $x_з$, а все остальные уравнения останутся разрешенными относительно прежних базисных переменных, причем все свободные члены будут не отрицательны.
   - Разрешающий элемент α_{pq}, выбранный согласно шагу 5, не принадлежит s-ой строке ($s \neq p$) и свободный член этого уравнения $\beta_p>0$. Тогда после выполнения одной итерации ИОР не будет получено,

т.к. s-ое уравнение не будет разрешено относительно базисной переменной, однако свободный член s-го уравнения уменьшится. Далее переходим к шагу 4. При повторном проведении итераций симплексных преобразований указанный второй случай может повториться лишь конечное число раз, после чего придем к первому случаю, либо в s-ой строке не найдется ни одного положительного коэффициента, т.е. система ограничений будет несовместной.

- Разрешающий элемент α_{pq}, выбранный согласно шагу 5, не принадлежит s-ой строке ($s \neq p$) и свободный член этого уравнения β_p=0. В этом случае при проведении итерации свободный член s-го уравнения не изменится. Таким образом, вывод, сделанный в предыдущем случае о конечном числе возможных итераций, здесь нарушается. Чтобы обойти это препятствие, необходимо попробовать выбрать другой разрешающий столбец по другому положительному коэффициенту α_{sq}>0 (если такой элемент найдется). Если на данной итерации это сделать невозможно, то после ее проведения изменится состав базисных и свободных переменных, и выбор надо начинать сначала. Если при этом следить, чтобы после некоторого числа итераций не осуществлялся возврат к ранее встречавшемуся составу базисных и свободных переменных, то эти итерации, в конечном счете, приведут либо к первому, либо ко второму случаям, либо к установлению несовместности системы ограничений.

Пример 2.4. Найти исходное опорное решение для системы ограничений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 - x_6 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения ИОР целевая функция необязательна, поэтому рассмотрим только систему ограничений. Т.к. система ограничений разрешена относительно переменных x_4 и x_6, то их можно взять в качестве базисных переменных, предварительно умножив первое и третье уравнения на (-1). В результате получим следующую симплекс-таблицу (таблица 2.5).

Таблица 2.5.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_6	-6	-5	1	-2	0	1	1	
	5	1	2	0	0	1	0	
x_4	-4	-1	-1	-1	1	0	0	

Для простоты пересчета разрешим второе уравнение относительно переменной x_5. Т.к. разрешающий элемент равен 1, то вторая строка в новую симплекс-таблицу переносится без изменений, и, т.к. в разрешающем столбце в третьей строке стоит 0, то третья строка также переносится в новую таблицу без изменения. Остальные элементы пересчитываются как в симплекс-методе.

Результаты пересчета приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_6	-11	-6	-1	-2	0	0	1	
x_5	5	1	2	0	0	1	0	
x_4	-4	-1	-1	-1	1	0	0	

В результате пересчета получили базисное решение $X = (0, 0, 0, -4, 5, -11)$, которое не является опорным, т.к. не является допустимым. Среди отрицательных свободных членов выберем наибольший по модулю, т.е. -11, и вычтем первое уравнение из третьего. Первое уравнение потом умножим на -1. В результате получим таблицу 2.7.

Итак, первое уравнение оказалось неразрешенным относительно базисной переменной.

Таблица 2.7.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	11	6	1	2	0	0	-1	11/2
x_5	5	1	2	0	0	1	0	
x_4	7	5	0	1	1	0	-1	7

Для выбора разрешающего столбца достаточно выбрать любой положительный элемент в первой строке. Для сохранения положительности свободных членов, разрешающую строку будем выбирать как в симплекс-методе. Нетрудно проверить, что только для переменной x_3 минимум отношений приходится на первую строку (имеем первый случай). Для остальных переменных это условие не выполняется. Поэтому переменная x_3 – включаемая в базис переменная. Пересчитаем симплекс-таблицу (таблица 2.8).

Таблица 2.8.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	11/2	3	1/2	1	0	0	-1/2	
x_5	5	1	2	0	0	1	0	
x_4	3/2	2	-1/2	0	1	0	-1/2	

Т.к. система ограничений разрешена относительно базисных переменных, и свободные члены всех ограничений положительны, то найдено ИОР $X^{(0)} = (0, 0, 11/2, 0, 3/2, 0)$.

2.1.8. Методы искусственного базиса

Рассмотренный в предыдущем разделе метод нахождения ИОР обладает достаточно большим произволом, поэтому вряд ли его можно назвать наилучшим способом нахождения ИОР. Наряду с рассмотренным методом существуют и другие, некоторые из которых рассмотрим в этом разделе.

Идея использования искусственных переменных достаточна проста. Она предполагает включение дополнительных неотрицательных переменных в левую часть каждого из уравнений, не содержащих очевидных начальных базисных переменных. Обеспечивая получение начального базиса, эти дополнительно вводимые переменные выполняют, по существу, ту же роль, что и остаточные переменные. Однако, поскольку эти переменные не имеют отношения к поставленной задаче (поэтому они и называются искусственными), их следует использовать только для получения ИОР, причем алгоритм нахождения оптимального решения должен вынуждать эти переменные принимать нулевые значения в оптимальном решении.

Рассмотрим два метода искусственного базиса

- М-метод или метод больших штрафов.
- Двухэтапный метод.

М – метод или метод больших штрафов

Для построения алгоритма, который в первую очередь выводил бы из базиса искусственные переменные, вводя на их место естественные переменные, можно применить следующий прием: наложить на целевую функцию штраф за использование искусственных переменных.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\min\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Пусть все $в_i \geq 0$, $i=1,\ldots,m$. Этого всегда можно добиться, умножив уравнения на -1.

Составим новую задачу. Для этого введем в ограничения задачи m неотрицательных переменных $y_1, \ldots, y_m$. Тогда система ограничений примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = в_m. \\ x_j,\ y_i \geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{2.16}$$

Целевую функцию запишем в виде:

$$min \ \ T = f + M\,(y_1 + \ldots + y_m\,),$$

где M – очень большое положительное число. Эта новая задача называется М-задачей.

Выразим искусственные переменные из ограничений, подставим полученные выражения в целевую функцию, тем самым мы выразим целевую функцию через свободные переменные.

Система ограничений разрешена относительно базисных переменных, которые образуют искусственный базис, и все свободные члены ограничений неотрицательны. Поэтому для вспомогательной задачи мы можем записать ИОР:

$$Y^{(0)} = (0,\ldots,0,\, в_1,\, в_2,\ldots,\, в_m).$$

Далее М-задача решается с помощью симплекс-метода до получения оптимального решения или установления неразрешимости М-задачи.

Связь между оптимальными решениями исходной задачи и вспомогательной задается с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.2. **[**18**]**

- Если в оптимальном решении М-задачи

  $$Y = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\, \beta_1,\, \beta_2,\ldots,\, \beta_m)$$

  все искусственные переменные равны 0, то соответствующее решение исходной задачи $X = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ будет оптимальным.

- Если в оптимальном решении М-задачи хотя бы одна искусственная переменная отлична от 0, то система ограничений исходной задачи несовместна.

- Если М-задача оказалась неразрешимой, то исходная задача также неразрешима либо по причине несовместности системы ограничений, либо неограниченности целевой функции f ($f \to -\infty$).

Замечание 2.4. Искусственные переменные можно вводить не во все ограничения, а только в те уравнения, которые не разрешены относительно естественных базисных переменных.

Замечание 2.5. В случае задачи максимизации М-задача имеет вид:

$$max \ \ T = f - M\,(y_1 + \ldots + y_m\,),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = в_m. \\ x_j\,,\, y_i \geq 0,\ \ i=1,\ldots,m,\ \ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (2.17)$$

Замечание 2.6. Если в результате выполнения очередной итерации искусственная переменная выводится из базиса, то ее можно исключить из дальнейших рассуждений.

Пример 2.5. Найти решение задачи линейного программирования

$$min\ \ f = 4x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,3,4. \end{cases}$$

Решение. Составим М-задачу, введя в первое и второе ограничения искусственные переменные. Третье ограничение уже разрешено относительно переменной x_4.

$$min\ \ T = 4x_1 + x_2 + M(y_1 + y_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + y_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,3,4, \\ y_i \geq 0,\ i=1,2. \end{cases}$$

Выразим из системы ограничений искусственные переменные и подставим полученные выражения в целевую функцию, получим

$$y_1 = 3 - 3x_1 - x_2,$$

$$y_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3,$$

$$T = 4x_1 + x_2 + M(3 - 3x_1 - x_2 + 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3) = 9M + x_1(4 - 7M) + x_2(1 - 4M) + Mx_3,$$

$$T + x_1(-4 + 7M) + x_2(-1 + 4M) - Mx_3 = 9M.$$

Все дальнейшие вычисления приведены в таблице 2.9.

Таблица 2.9.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	3	3	1	0	0	1	0	3/3=1
y_2	6	4	3	-1	0	0	1	3/2
x_4	4	1	2	0	1	0	0	4
f	$9M$	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	
x_1	1	1	1/3	0	0		0	3
y_2	2	0	5/3	-1	0		1	6/5
x_4	3	0	5/3	0	1		0	9/5
f	$4+2M$	0	$(1+5M)/3$	$-M$	0		0	
x_1	3/5	1	0	1/5	0			3
x_2	6/5	0	1	-3/5	0			
x_4	1	0	0	1	1			1
f	13/5	0	0	1/5	0			
x_1	2/5	1	0	0	-1/5			
x_2	3/5	0	1	0	3/5			
x_4	1	0	0	1	1			
f	137/5	0	0	0	-1/5			

Т.к. оценка свободной переменной отрицательна, то найдено оптимальное решение М-задачи: Y = (2/5; 3/5; 0; 1; 0; 0), и т.к. все искусственные переменные вышли из базиса, т.е. равны 0, то найдено оптимальное решение исходной задачи: X = (2/5; 3/5; 0; 1), а f_{min} = 137/5.

Двухэтапный метод

Недостаток М-метода связан с очень большой величиной коэффициента M, что может привести к ошибкам в вычислениях. Из-за большой величины M вклад исходных коэффициентов целевой функции может оказаться несущественным. Вследствие ошибок округления, свойственных любой вычислительной машине, процесс вычисления может стать нечувствительным к значениям исходных коэффициентов. При этом возникает опасность того, что переменные будут интерпретироваться, как переменные с нулевыми коэффициентами.

Двухэтапный метод позволяет избежать этого. Искусственные переменные вводятся аналогично, однако коэффициент M не фигурирует.

Процесс нахождения решения разбивается на два этапа.

Первый этап. Вводятся искусственные переменные, необходимые для получения исходного опорного решения. Записывается новая целевая функция, равная сумме искусственных переменных

$$T = y_1 + \ldots + y_m ,$$

и решается задача нахождения минимума этой вспомогательной функции при ограничениях исходной задачи с введенными искусственными переменными. Если минимальное значение новой целевой функции равно 0, т.е. все искусственные переменные равны 0, то получено ИОР для исходной задачи, и осуществляется переход ко второму этапу. Если минимальное значение новой целевой функции не равно 0, т.е. не все искусственные переменные равны 0, то исходная задача не имеет допустимых решений и процесс нахождения решения заканчивается.

Второй этап. Оптимальное решение, полученное на первом этапе, используется в качестве ИОР исходной задачи. Далее решается задача нахождения оптимального решения с помощью симплекс-метода.

Пример 2.6. Рассмотрим условие примера 2.5.

Решение.

Первый этап. Введем искусственные переменные и составим вспомогательную задачу:

$$min\ \ T = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + y_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \ge 0,\ j{=}1{,}2{,}3{,}4, \\ y_i \ge 0,\ i{=}1{,}2. \end{cases}$$

Преобразуем функцию T, выразив ее через свободные переменные:

$$T = 3 - (3x_1 + x_2) + 6 - (4x_1 + 3x_2 - x_3) = 9 - 7x_1 - 7x_2 + x_3$$

$$\text{Или } T + 7x_1 + 7x_2 - x_3 = 9.$$

Для того, чтобы проще было перейти ко второму этапу, добавим в таблицу и функцию f и будем ее пересчитывать также, как и другие строк,

$$f - 4x_1 - x_2 = 0.$$

Все вычисления приведены в таблице 2.10.

Таблица 2.10.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	3	3	1	0	0	1	0	3/3=1
y_2	6	4	3	-1	0	0	1	3/2
x_4	4	1	2	0	1	0	0	4
f	0	-4	-1	0	0	0	0	
T	9	7	4	- 1	0	0	0	
x_1	1	1	1/3	0	0		0	3
y_2	2	0	5/3	-1	0		1	6/5
x_4	3	0	5/3	0	1		0	9/5
f	4	0	1/3	0	0		0	
T	2	0	5/3	- 1	0		0	
x_1	3/5	1	0	1/5	0			3
x_2	6/5	0	1	-3/5	0			
x_4	1	0	0	1	1			1
f	13/5	0	0	1/5	0			
T	0	0	0	0	0			
x_1	2/5	1	0	0	-1/5			
x_2	3/5	0	1	0	3/5			
x_4	1	0	0	1	1			
f	137/5	0	0	0	-1/5			

После того, как все искусственные переменные вышли из базиса, и функция T приняла нулевое значение, строку для этой функции можно удалить из симплекс-таблицы и продолжить второй этап – нахождение оптимального решения.

Нетрудно заметить, что оптимальное решение имеет вид: $X = (2/5; 3/5; 0; 1)$, а $f_{min} = 137/5$.

Следует подчеркнуть, что количество итераций М-метода и двухэтапного метода всегда одинаково, и между симплекс-таблицами всегда есть взаимно-однозначное соответствие.

2.2. Элементы теории двойственности

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить некоторую, определенным образом с ней связанную другую задачу линейного программирования, которая называется двойственной или сопряженной по отношению к исходной задаче.

Рассмотрим задачу линейного программирования: найти такое решение $X = =(x_1, x_2,\dots, x_n)$, удовлетворяющее следующим условиям задачи:

$$max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le в_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le в_m. \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\dots,n. \end{cases} \tag{2.18}$$

Построим другую задачу: найти такое решение $Y = (y_1, y_2,\dots, y_m)$, удовлетворяющее следующим условиям задачи:

$$min\ \ T = в_1\, y_1 + в_2x_2 + \dots + в_mx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + \dots + a_{m1}\, y_m \ge c_1, \\ a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \dots + a_{m2}\, y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{1n}\, y_1 + a_{2m}\, y_2 + \dots + a_{mn}\, y_m \ge c_n \\ y_i \ge 0,\ i=1,2,\dots,m. \end{cases} \tag{2.19}$$

Вторая задача называется двойственной по отношению к первой задаче. Можно показать, что, если записать двойственную задачу ко второй задаче, то получим первую задачу. Поэтому эту пару задач в линейном программировании называют **парой двойственных задач**.

Сравнивая две сформулированные задачи, можно увидеть, что двойственная задача составляется по следующему правилу:

1. Если целевая функция исходной задачи задается на максимум, то целевая функция двойственной задачи рассматривается на минимум.

2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

составленная из коэффициентов при неизвестных исходной задачи и аналогичная матрица двойственной задачи $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{ь1} \\ a_{12} & a_{33} & \dots & a_{ь2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

получаются друг из друга транспонированием (т.е. заменой строк столбцами, а столбцов – строками).

3. Число переменных двойственной задачи равно числу ограничений исходной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных исходной задачи.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы ограничений исходной задачи, а правыми частями в системе ограничений двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

5. Если переменная x_j исходной задачи принимает неотрицательное значение, то j-ое условие двойственной задачи является неравенством вида «≥».

6. Если переменная x_j исходной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j-ое условие двойственной задачи записывается в виде равенства

7. Аналогичные связи можно установить между переменными двойственной задачи и ограничениями исходной задачи. Если i-ое ограничение исходной задачи записывается в виде неравенства со знаком «≤», то переменная y_i двойственной задачи неотрицательна. В противном случае, если i-ое ограничение исходной задачи записывается в виде равенства, то переменная y_i двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Схематично это изображено на рис. 2.5.

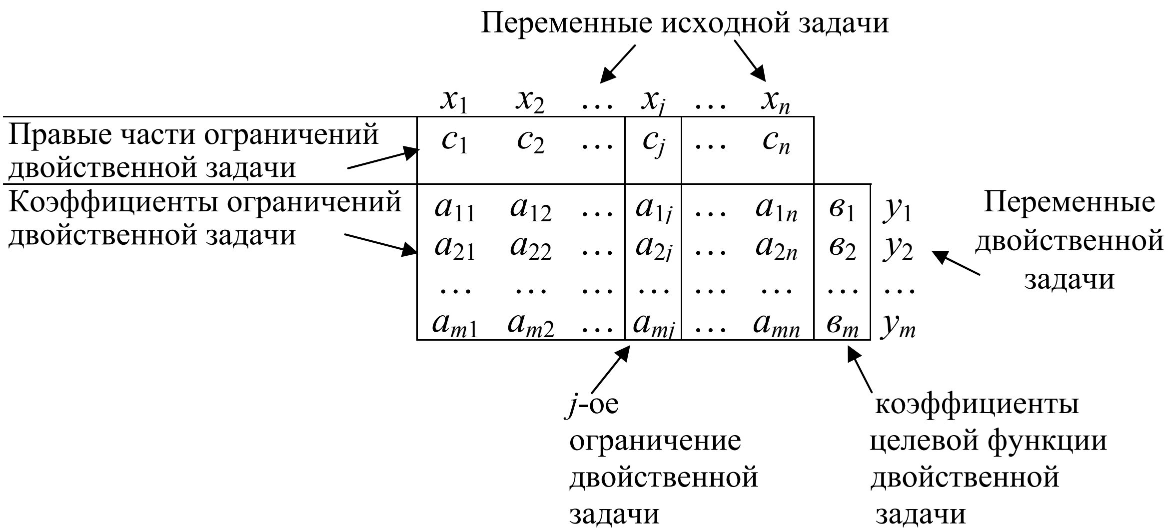


Рис. 2.5. *Схема для составления двойственной задачи*

Из приведенной схемы следует, что

- каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи;
- каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи.

Двойственные пары задач подразделяют на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач переменные принимают неотрицательные значения, а, значит, ограничения записываются в виде неравенств.

Пример 2.7. Построить двойственную задачу к исходной задаче

$$max\ f = 4x_1 + x_2 - 4x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \ge -11, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Исходная задача относится к паре несимметричных двойственных задач, т.к. одна из переменных исходной задачи не ограничена по знаку, и одно из ограничений записано в виде равенства. Т.к. исходная задача рассматривается на максимум, то преобразуем систему ограничений таким образом, чтобы все ограничения записывались либо в виде равенства, либо в виде неравенства «≤», имеем

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ \end{array} \right.$$

Запишем целевую функцию двойственной задачи. Для этого каждому ограничению исходной задачи сопоставим двойственную переменную y_i. Свободные члены ограничений – коэффициенты целевой функции двойственной задачи. Т.к. исходная задача рассматривается на максимум, то двойственная – на минимум.

$$min\ T = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3.$$

Запишем ограничения двойственной задачи. Каждой переменной исходной задачи сопоставим ограничение двойственной задачи. Коэффициенты исходной целевой функции – свободные члены ограничений двойственной задачи. Т.к. первая и вторая переменные исходной задачи принимают неотрицательные значения, то соответствующие им ограничения двойственной задачи запишутся в виде неравенств «≥». Т.к. третья переменная исходной задачи принимает любые значения, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи запишется в виде равенства. Двойственные переменные y_1 и y_3 будут принимать неотрицательные значения, т.к. им соответствуют ограничения-неравенства исходной задачи, а переменная y_2 не ограничена по знаку, т.к. ей соответствует ограничение-равенство. В результате получим следующую систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 = -4, \\ y_1, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Окончательно имеем следующую двойственную задачу

$$min\ \ T = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 = -4, \\ y_1, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 2.8. Построить двойственную задачу к исходной задаче

$$min\ \ f = 12x_1 + 24x_2 + 18x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Исходная задача относится к паре несимметричных двойственных задач, т.к. две из переменных исходной задачи не ограничены по знаку, и одно из ограничений записано в виде равенства. Т.к. исходная задача рассматривается на минимум, то преобразуем систему ограничений таким образом, чтобы все ограничения записывались либо в виде равенства, либо в виде неравенства «≥», имеем

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ \end{array} \right.$$

Запишем целевую функцию двойственной задачи. Т.к. исходная задача рассматривается на минимум, то двойственная – на максимум

$$max\ \ T = 2y_1 + y_2 + 3y_3.$$

Запишем ограничения двойственной задачи. Т.к. вторая переменная исходной задачи принимает неотрицательные значения, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи запишется в виде неравенств «≤». Т.к. первая и третья переменные исходной задачи принимают любые значения, то соответствующие им ограничения двойственной задачи запишутся в виде равенства. Двойственные переменные y_1 и y_2 будут принимать неотрицательные значения, т.к. им соответствуют ограничения-неравенства исходной задачи, а переменная y_3 не ограничена по знаку, т.к. ей соответствует ограничение-равенство. В результате получим следующую систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_2 - 5y_3 = 12, \\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 24, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 18, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Окончательно имеем следующую двойственную задачу

$$max\ \ T = 2y_1 + y_2 + 3y_3,$$

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_2 - 5y_3 = 12, \\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 \le 24, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 18, \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Связь между решениями исходной и двойственной задач

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач.

Исходная задача

$$max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le в_m. \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Двойственная задача

$$min\ \ T = в_1\, y_1 + в_2 y_2 + \ldots + в_m y_n$$

$$\begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + \ldots + a_{m1}\, y_m \ge c_1, \\ a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{m2}\, y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ . \\ a_{1n}\, y_1 + a_{2m}\, y_2 + \ldots + a_{mn}\, y_m \ge c_n \\ y_i \ge 0,\ i=1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Каждая из задач двойственной пары является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена одним из предложенных методов независимо от другой задачи.

Однако, оказывается, что, имея решение одной из двойственных задач, можно найти и решение другой задачи. Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются теоремами двойственности [18].

Теорема 2.3. (Первая теорема двойственности)

- Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем значения целевых функций при оптимальных решениях равны между собой, т.е. $f_{max} = T_{min}$.
- Если одна из пары двойственных задач не имеет оптимального решения ($f_{max} \to +\infty$ или $T_{min} \to -\infty$) то другая задача не имеет допустимых решений.

Теорема 2.4. (Вторая теорема двойственности)

- Если для оптимального решения одной из задач какое-либо неравенство выполняется как строгое («>» или «<»), то соответствующая ему переменная в оптимальном решении двойственной задачи (y_i или x_j) равна 0.
- Наоборот, если какая-то переменная (y_i или x_j) в оптимальном решении положительна, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи любым ее оптимальным решением обращается в равенство.

Вторую теорему двойственности можно записать еще так. Для оптимальных решений двойственных задач должны выполняться следующие условия:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0,$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0.$$

Пример 2.9. Найти решение исходной и двойственной задач.

$$min\ \ f = 6y_1 + 9y_2 + 3y_3,$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем двойственную задачу:

$$max\ \ T = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Исходная задача решается симплекс-методом, а двойственная – графически, поэтому будем решать двойственную задачу.

Построим область допустимых решений.

- Прямая $-x_1 + 3x_2 = 6$ проходит через точки (0,2),(3,3).
- Прямая $2x_1 + x_2 = 9$ проходит через точки (0,9),(9/2,0).
- Прямая $x_1 - x_2 = 3$ проходит через точки (4,1),(3,0).

Линии уровня целевой функции: $2x_1 + x_2 = a$, где $a \in R$, $T' = (2,1)$.

Решение примера приведено на рисунке 2.6.

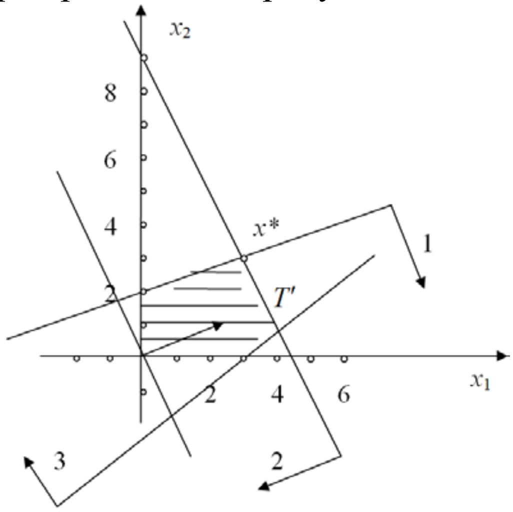


Рис. 2.6. *Графическая иллюстрация решения примера 2.9*

Нетрудно увидеть, что двойственная задача имеет бесконечное множество решений. Выберем любое из них, например, x^*. Для нахождения координат этой точки решим систему двух уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 = 9, \end{cases}$$

Решением этой системы является точка $x^* = (3,3)$. Значит, $T_{max} = 9$.

Для нахождения решения исходной задачи воспользуемся теоремами двойственности. Согласно первой теореме двойственности исходная задача имеет оптимальное решение, т.к. двойственная задача разрешима, причем $f_{min} = T_{max} = 9$.

Рассмотрим вторую теорему двойственности. Т.к. точка x^* имеет ненулевые координаты, то ограничения исходной задачи любым оптимальным решением обращаются в равенство. Кроме того, т.к. третье ограничение в точке x^* выполняется как строгое неравенство, то соответствующая ему переменная y_3 исходной задачи равна 0. В результате имеем систему

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 = 2, \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 1, \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим решение исходной задачи: $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3 = 0$, т.е. $Y = (0, 1, 0)$. Нетрудно проверить, что $f_{min} = 6*0 + 9*1 + 3*0 = 9$.

Указанный прием вычисления оптимального решения исходной задачи оказывается излишним, если решается симметричная двойственная задача с помощью симплекс-метода [18].

Предположим, что решается одна из двух двойственных задач, в которой неравенства имеют вид «≤» и свободные члены ограничений неотрицательны. Пусть переменные $x_{k+1},\dots,x_{k+m}$ являются базисными в исходном опорном решении. Тогда оптимальное решение двойственной задачи будет совпадать в последней симплекс-таблице с оценками тех переменных, которые в исходном опорном решении были базисными. Это справедливо и в том случае, если исходная задача решается М-методом.

Пример 2.10. Найти решение исходной и двойственной задач.

$$max\ f = x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Составим двойственную задачу

$$min\ \ T = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3,$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \ge 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge -1, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Из двух двойственных задач, безусловно, преимуществом обладает исходная задача, т.к. в ней неравенства имеют вид «≤» и свободные члены ограничений неотрицательны. Это позволяет сразу найти исходное опорное решение. Итак, преобразуем систему ограничений исходной задачи в равенства. Введенные при этом остаточные переменные и будут являться базисными. Преобразуем целевую функцию исходной задачи, получим

$$f - x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Все вычисления приведены в таблице 2.11.

Таблица 2.11.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	12	-1	4	-2	1	0	0	12/4=3
x_5	17	1	1	2	0	1	0	17
x_6	4	2	-1	2	0	0	1	
f	0	-1	-2	1	0	0	0	
x_2	3	-1/4	1	-1/2	1/4	0	0	
x_5	14	5/4	0	5/2	-1/4	1	0	56/5
x_6	7	7/4	0	3/2	1/4	0	1	28/4=7
f	6	-3/2	0	0	1/2	0	0	
x_2	4	0	1	-2/7	2/7	0	1/7	
x_5	9	0	0	10/7	-3/7	1	-5/7	
x_1	4	1	0	6/7	1/7	0	4/7	
f	12	0	0	9/7	5/7	0	6/7	

Итак, оптимальное решение исходной задачи имеет вид: $X_{опт}=(4,4,0,0,9,0)$, $f_{max}=12$.

Переменные x_4, x_5, x_6 были в ИОР в базисе, поэтому оценки, соответствующие этим переменным в последней симплекс-таблице, и дадут решение двойственной задачи, а именно, $y_1 = 5/7, y_2 = 0, y_3 = 6/7$, $T_{min} = 12$. Нетрудно проверить, что $T_{min} = 12*5/7 + 17*0 + 4*6/7 = 84/7 = 12$, а решение, полученное с помощью теорем двойственности, совпадет с найденным решением (показать самим).

Рассмотрение пар двойственных задач оказывается весьма эффективным средством теоретического исследования проблем линейного программирования и построения различных вычислительных методов. Одной из первых практических разработок, базирующихся на теории двойственности, является двойственный симплекс-метод. Другое интересное приложение данной теории связано с разработкой алгоритма решения транспортной задачи. Теория двойственности лежит в основе решения матричных игр.

Теория двойственности также широко используется при экономическом анализе решения задач линейного программирования. Иногда использование двойственных задач позволяет упростить процесс нахождения решения исходных задач.

2.3. Транспортная задача по критерию стоимости

Среди задач линейного программирования, к которым сводится анализ практических моделей управления и планирования, можно выделить ряд задач, дополнительные условия в которых обладают определенными особенностями. Особая структура ограничений часто позволяет существенно упростить общие методы решения задач линейного программирования применительно к специальным задачам. Среди специальных задач в приложениях чаще других встречается так называемая транспортная задача и различные ее модификации и обобщения. Транспортными задачами называются задачи определения оптимального плана перевозок груза из данных пунктов отправления в заданные пункты назначения. Большое количество задач, не связанных с перевозками груза, такие как распределение ресурсов между предприятиями, самолетов между воздушными линиями, регулирование парка вагонов, распределение посевной площади и т.д., имеют модели, схожие с моделью транспортной задачи. Эти задачи часто называют задачами транспортного типа. Естественно, что для их решения также можно использовать методы решения транспортной задачи.

Транспортные задачи разделяются на задачи по критерию стоимости и критерию времени.

Рассмотрим транспортную задачу по критерию стоимости.

2.3.1. Постановка задачи и ее математическая модель

Имеются m пунктов отправления груза $A_1, A_2,\dots,A_m$, в которых сосредоточены запасы некоторого однородного груза в количестве соответственно $a_1, a_2,\dots,a_m$ единиц. Кроме того имеются n пунктов потребления $B_1, B_2,\dots,B_n$, заявки которых соответственно равны $b_1, b_2,\dots,b_n$ единиц груза. Задана матрица $C = \{c_{ij}\}_{m \times n}$, где c_{ij} – стоимость (иногда называют «транспортные издержки») перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. Требуется построить такой план перевозок груза, т.е. необходимо указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i-го поставщика к j-му потребителю, так, чтобы максимально удовлетворить заявки потребителей, и при этом суммарные затраты на перевозку груза были бы минимальными.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами и суммарными потребностями различают следующие транспортные задачи:

- транспортные задачи с правильным балансом или закрытые модели, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$;

- транспортные задачи с неправильным балансом или открытые модели, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Закрытая модель транспортной задачи служит канонической формой данной задачи, поэтому в первую очередь остановимся на ней.

Построим математическую модель транспортной задачи с правильным балансом. Введем управляемые переменные x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю. Очевидно, что транспортная задача имеет mn переменных. Эти переменные должны удовлетворять следующим ограничениям:

- суммарное количество груза, вывозимое от i-го поставщика во все пункты назначения, должно быть равно запасу груза в данном пункте. Это дает m условий-равенств:

$$\begin{array}{c} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \end{array}$$

- суммарное количество груза, доставляемое j-му потребителю от всех поставщиков, должно быть равно заявке данного потребителя. Это дает n условий-равенств:

$$\begin{array}{c} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \end{array}$$

- условия неотрицательности переменных: $x_{ij} \geq 0$.

Суммарные затраты на перевозку всего груза составят

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Таким образом, требуется определить переменные x_{ij}, которые доставляют минимум функции

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \\ x_{ij} \geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n. \end{cases}$$

Функция f и ограничения в этой задаче являются линейными, поэтому данная задача является задачей линейного программирования. Как и любую задачу линейного программирования ее можно решить с помощью симплекс-метода. Но данная задача имеет некоторые особенности, в силу которых для нее разработаны более простые методы. Во-первых, коэффициенты во всех ограничениях равны 1. Во-вторых, каждая переменная входит только в два ограничения. В-третьих, система симметрична относительно всех переменных x_{ij}. В-четвертых, транспортная задача имеет mn переменных. Поэтому, если для нее заполнять симплекс-таблицы, то они будут большой размерности, и каждый столбец для переменных будет содержать две единицы, а все остальные нули.

Кроме того, нетрудно убедиться, что не все ограничения в транспортной задаче являются независимыми. Действительно, сложим все ограничения по поставщикам и, отдельно, по всем потребителям.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Получим два одинаковых ограничения. Это означает, что одно из ограничений можно представить как линейную комбинацию всех остальных ограничений задачи. Таким образом, только $m+n-1$ ограничения являются линейно независимыми, а значит, базисных переменных в любом опорном решении данной задачи будет $m+n-1$, все остальные переменные, т.е. $mn-(m+n-1)$, будут свободными.

Введем следующие определения.

Определение 2.12. Любую совокупность переменных $X=\{x_{ij}\}_{m\text{x}n}$, удовлетворяющую системе ограничений, будем называть допустимым решением или допустимым планом перевозок.

Определение 2.13. Допустимый план $X=\{x_{ij}\}_{m\text{x}n}$ будем называть опорным планом перевозок, если в нем отличны от нуля не более $m+n-1$ перевозок, остальные перевозки равны нулю.

Определение 2.14. Опорный план $X=\{x_{ij}\}_{m\text{x}n}$ будем называть оптимальным планом перевозок, если он среди всех допустимых планов приводит к наименьшему значению целевой функции f.

Теорема 2.5. (условие разрешимости транспортной задачи) [16]. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы груза в пунктах отправления равнялись суммарным заявкам в пунктах назначения, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Таким образом, транспортная задача всегда имеет решение.

Рассмотрим некоторые методы решения транспортной задачи. Любой метод решения транспортной задачи, как и симплекс-метод, представляет собой метод последовательного улучшения решения, т.е. содержит следующие этапы:

- нахождение исходного опорного решения;
- проверка найденного решения на оптимальность;
- улучшение решения в случае его не оптимальности путем однократного замещения базисной переменной на свободную переменную.

2.3.2. Методы нахождения исходного опорного решения

Построение исходных опорных планов, а также преобразование решений будем проводить в специальных таблицах (см. табл. 2.12), в которых указываются запасы поставщиков, заявки потребителей, стоимости перевозок единицы груза (помещаются в правый верхний угол клетки), а также планируемые перевозки.

Таблица 2.12.

	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22} a		c_{2n}
…				
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

Нумерация строк и столбцов осуществляется в соответствии с номерами поставщиков и потребителей. Столбец-запасы и строка-потребности являются нулевыми. Если планируется перевозка $x_{ij}=a\neq 0$ (например, $x_{22} = a$), то эта перевозка записывается в левом нижнем углу клетки (i,j) (т.е. (2,2)), и эта клетка считается занятой. Если $x_{ik}=0$, то клетку (i,k) оставляем свободной. Таким образом, каждому опорному плану будет соответствовать $m+n-1$ занятая клетка.

Решение задачи записывается в виде матрицы $X=\{x_{ij}\}_{m\text{x}n}$.

Метод «северо-западного» угла

Заполнение таблицы начинается с левого верхнего угла таблицы (северо-западного), т.е. с клетки (1,1). В эту клетку помещаем количество груза, равное

$$x_{11} = \min (a_1,b_1).$$

Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, тем самым закрываем первый столбец и переходим в оставшейся таблице к левому верхнему углу, т.е. к клетке (1,2), в которую помещаем количество груза, равное

$$x_{12} = \min(a_1\text{-}b_1,\, b_2) \text{ и т.д.}$$

Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$, тем самым закрываем первую строку и переходим в оставшейся таблице к левому верхнему углу, т.е. к клетке (2,1), в которую помещаем количество груза, равное

$$x_{21} = \min(a_2,\, b_1 - a_1) \text{ и т.д.}$$

Если $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1$, и тогда одновременно закроются и строка, и столбец. Это приведет к тому, что количество занятых клеток будет меньше, чем $m+n-1$, т.е. решение будет вырожденным. Для того чтобы сохранить необходимое количество занятых клеток, занесем в следующую клетку по строке или столбцу, в ту, где стоимость меньше, нулевую перевозку, и будем считать эту клетку занятой. Такие нули будем называть ***базисными.*** Далее переходим к клетке (2,2), в которую помещаем количество груза, равное

$$x_{22} = \min(a_2,\, b_2) \text{ и т.д.}$$

Заполнив вторую клетку, переходим к заполнению другой клетки и т.д., пока не исчерпаются все запасы и потребности.

Пример 2.11. Найти исходное опорное решение по методу «северо-западного» угла в следующей транспортной задаче: запасы *a* =(40,120,60,40), потребности *b*=(80.50.60.20.50), стоимости перевозок заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 10 & 4 \\ 10 & 7 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 4 & 12 \\ 6 & 3 & 11 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим таблицу, в которую будем заносить элементы решения (см. табл.2.13). Прежде чем находить решение, необходимо проверить, является ли данная задача закрытой. Для этого найдем суммарные запасы: $\sum_{i=1}^{m} a_i = 260$, и суммарные потребности: $\sum_{j=1}^{n} b_j = 260$. Т.к. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задача с правильным балансом или закрытая.

Найдем исходное опорное решение.

- Заполнение таблицы начинаем с левого верхнего угла таблицы, т.е. с клетки (1,1). В эту клетку помещаем количество груза, равное x_{11}=min (40,80) =40. Закрываем первую строку (помечаем символом $\vee$).
- Переходим в оставшейся таблице к левому верхнему углу, т.е. к клетке (2,1), в которую помещаем количество груза, равное x_{21} = min (120, 40) = 40. Закрываем первый столбец.
- Переходим в оставшейся таблице к левому верхнему углу, т.е. к клетке (2,2), в которую помещаем количество груза, равное x_{22} = min (80, 50)=50, закрываем второй столбец.

- Переходим к клетке (2,3), в нее помещаем количество груза, равное x_{23}=min (30, 60) = 30, закрываем вторую строку.
- Переходим к клетке (3,3), в нее помещаем количество груза, равное x_{33}=min (60, 30) = 30, закрываем третий столбец.
- Переходим к клетке (3,4), в нее помещаем количество груза, равное x_{34}=min (30, 20) = 20, закрываем четвертый столбец.
- Переходим к клетке (3,5), в нее помещаем количество груза, равное x_{35}=min (10, 50) = 10, закрываем третью строку.
- Переходим к клетке (4,5), в нее помещаем количество груза, равное x_{45}=min (40, 40) = 40, закрываем четвертую строку и пятый столбец.

Итак, мы получили решение

- $$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 50 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.13.

		80	50	60	20	50
∨	40	5 **40**	8	3	10	4
∨	120	10 **40**	7 **50**	9 **30**	6	5
∨	60	7	3	6 **30**	4 **20**	12 **10**
∨	40	6	3	11	5	4 **40**
		∨	∨	∨	∨	∨

Для найденного решения значение функции затрат равно

$$f_0 = 5*40+10*40+7*50+9*30+6*30+4*20+12*10+4*40=1760.$$

В полученном решении количество занятых клеток равно m+n–1, т.е.8.

Замечание 2.7. Решение, которое найдено по методу «северо-западного» угла, является опорным, т.к. оно содержит m+n–1 занятую клетку. Это получается в результате того, что на каждом шаге мы закрываем либо строку, либо столбец, и только на последнем шаге мы закрываем и строку, и столбец. Поэтому количество шагов – (m+n–1).

Метод минимального элемента

Решение, которое найдено по методу «северо-западного» угла, как правило, далеко от оптимального, т.к. при его построении мы не учитываем стоимости перевозки груза. Поэтому потребуется достаточно большое количество итераций по улучшению найденного решения. Рассмотрим еще один метод нахождения исходного опорного плана – метод минимального элемента, который дает решение значительно лучше, чем метод «северо-западного» угла. Идея метода заключается в следующем: на каждом шаге выбираем среди оставшихся клеток клетку с наименьшей стоимостью и в нее помещаем минимум из запасов на этом шаге и потребностей, и так до тех пор, пока весь груз не будет вывезен, а потребности удовлетворены. Рассмотрим этот метод на предыдущем примере.

Пример 2.12. Найти исходное опорное решение по методу минимального элемента в транспортной задаче примера 2.11.

Решение.

- Заполнение таблицы начинаем с клетки с наименьшей стоимостью 3. Таких клеток в таблице три. Выберем любую из них, например, (1,3). В эту клетку помещаем количество груза, равное x_{13}=min (40,60) =40. Закрываем первую строку.
- Переходим в оставшейся таблице к клетке с наименьшей стоимостью 3. Таких клеток в таблице осталось две. Выберем любую из них, например, (3,2)., в которую помещаем количество груза, равное x_{32} = min (60, 50) = 50. Закрываем второй столбец.
- Переходим в оставшейся таблице к клетке с наименьшей стоимостью 4. Таких клеток в таблице осталось две. Выберем любую из них, например, (3,4), в которую помещаем количество груза, равное x_{34} = min (10, 20)=10, закрываем третью строку.
- Переходим в оставшейся таблице к клетке с наименьшей стоимостью 4, т.е. к клетке (4,5), в нее помещаем количество груза, равное x_{45}=min(40, 50)=40, закрываем четвертую строку.
- Переходим в оставшейся таблице к клетке с наименьшей стоимостью 5, т.е. к клетке (2,5), в нее помещаем количество груза, равное x_{25}=min (120, 10) = 10, закрываем пятый столбец.
- Переходим в оставшейся таблице к клетке с наименьшей стоимостью 6, т.е. к клетке (2,4), в нее помещаем количество груза, равное x_{24}=min (110, 10) = 10, закрываем четвертый столбец.
- Переходим в оставшейся таблице к клетке с наименьшей стоимостью 9, т.е. к клетке (2,3), в нее помещаем количество груза, равное x_{23}=min (100, 20) = 20, закрываем третий столбец.
- Переходим к оставшейся клетке (2,1), в нее помещаем количество груза, равное x_{21}=min (80, 80) = 80, закрываем вторую строку и первый столбец.

Полученное решение приведено в табл. 2.14.

Таблица 2.14.

		80	50	60	20	50
∨	40	+ 5	8	- 3 **40**	10	4
∨	120	- 10 **80**	7	+ 9 **20**	6 **10**	5 **10**
∨	60	7	3 **50**	6	4 **10**	12
∨	40	6	3	11	5	4 **40**
		∨	∨	∨	∨	∨

Итак, мы получили решение $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 50 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$,

для найденного решения значение функции затрат равно

$$f_0 = 3*40+10*80+9*20+6*10+5*10+3*50+4*10+4*40=1560.$$

В полученном решении количество занятых клеток равно $m+n-1$, т.е.8.

Замечание 2.8. Решение, которое найдено по методу минимального элемента является опорным, т.к. оно содержит $m+n-1$ занятую клетку. В случае вырожденного решения поступаем также как и в методе «северо-западного» угла.

2.3.3. Распределительный метод

Переход от одного опорного плана к другому на каждой итерации будем производить, как и в симплекс-методе, путем замены базисной переменной на свободную переменную. Осуществляется это за счет переноса груза, без нарушения баланса, из клетки в клетку по некоторому замкнутому циклу.

Определение 2.15. ***Циклом*** в транспортной задаче будем называть несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке осуществляет поворот на 90°.

Каждый цикл содержит четное количество вершин, а значит и четное количество ребер.

Условимся обозначать знаком «+» те вершины цикла, в которых перевозки будут увеличиваться, а знаком «-» те вершины, в которых перевозки будут уменьшаться.

Определение 2.16. Цикл с помеченными вершинами будем называть ***означенным.***

Т.к. переход к новому решению осуществляется за счет обмена между базисной и свободной переменными, то цикл будем строить по следующему правилу:

- цикл начинается и заканчивается в выбранной свободной клетке, которая помечается знаком «+»,
- все остальные вершины цикла находятся в занятых клетках, которые помечаются знаками «+» и «-» таким образом, чтобы две смежные вершины цикла имели разные знаки, при этом направление обхода цикла неважно.

Если найдено решение, содержащее $m+n-1$ занятую клетку, то для любой свободной клетки указанный цикл можно всегда построить, и при том только один.

Построим цикл в рассматриваемом примере для клетки (1,1). Цикл изображен в табл. 2.14.

Определение 2.17. Перенести (перебросить) некоторое количество груза по означенному циклу означает увеличить на это количество груза перевозки, стоящие в клетках со знаком «+», и уменьшить – в клетках со знаком «-».

Очевидно, что при таком переносе груза баланс между запасами и потребностями сохраняется, и, следовательно, новое решение также будет допустимым. Стоимость же нового плана может при этом как увеличиться, так и уменьшиться.

Определение 2.18. ***Цена цикла*** – это величина, на которую изменится суммарная стоимость перевозок при перемещении одной единицы груза по означенному циклу.

Цена цикла равна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла, т.е. стоимость, стоящая в положительных клетках берется со знаком «+», а в отрицательных – со знаком «-».

Обозначим цену цикла, построенного для клетки (i,j) через γ_{ij}. Для построенного цикла в таблице 2.14 цена цикла равна γ_{11}=5-3+9-10=1.

При перемещении одной единицы груза по циклу суммарная стоимость изменится на γ_{ij}, а при переброске k единиц изменится на величину $k\gamma_{ij}$. Очевидно, что для улучшения плана перевозок имеет смысл перебрасывать груз только по тем циклам, цена которых отрицательна.

Т.к. цена построенного в примере цикла положительна, то за счет переброски груза по данному циклу улучшить найденное решение нельзя, поэтому построим цикл пересчета для другой свободной клетки, например, (4,2). Построенный цикл приведен в табл. 2.15. Его цена равна γ_{42}=3-3+4-6+5-4=-1. Наличие цикла с отрицательной ценой говорит о том, что найденное решение не является оптимальным, и его можно улучшить за счет переброски груза по построенному циклу.

Количество единиц груза, которое можно переместить по данному циклу, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных клетках цикла (если переместить большее количество единиц груза, то возникнут отрицательные перевозки; если переместить меньшее количество груза, то увеличится число занятых клеток, поэтому новое решение не будет опорным), т.е. перебрасывается количество груза, равное

$$d = \min_{"-"}\{x_{ij}\}.$$

Таблица 2.15

	80	50	60	20	50
40	5	8	3 **40**	10	4
120	10 **80**	7	9 **20**	**-** 6 **10**	+ 5 **10**
60	7	**-** 3 **50**	6	+ 4 **10**	12
40	6	+ 3	11	5	**-** 4 **40**

Клетка, помеченная знаком «-», которой соответствует минимальная перевозка d, освобождается, а свободная клетка, для которой построен цикл пересчета, занимается.

В рассмотренном примере $d = \min\limits_{"-"}\{10,50,40\} = 10$. Новое решение приведено в таблице 2.16.

Значение функции затрат для нового решения равно:

$$f_1 = f_0 + \gamma_{42} d = 1560 + (-1)*10 = 1550.$$

Построенный метод решения транспортной задачи называется ***распределительным.***

Таблица 2.16.

	80	50	60	20	50
40	5	8	3 **40**	10	4
120	10 **80**	7	9 **20**	6	5 **20**
60	7	3 **40**	6	4 **20**	12
40	6	3 **10**	11	5	4 **30**

Алгоритм распределительного метода

а) Построить исходное опорное решение.

б) Для любой свободной клетки (i,j) построить цикл пересчета и найти его цену γ_{ij}. Если цена $\gamma_{ij} < 0$, то перейти к следующему шагу. Если цена $\gamma_{ij} \geq 0$, то цикл пересчета строим для следующей свободной клетки и так до тех пор, пока не будет найден цикл с отрицательной ценой. Если такого цикла построить не удалось, то это означает, что найденное решение оптимально.

в) Переместить по построенному циклу величину груза, равную минимальной перевозке в отрицательных клетках: $d = \min\limits_{"-"}\{x_{ij}\}$. Новое решение необходимо проверить на оптимальность, т.е. перейти к шагу б).

Замечание 2.9.

- На каждом этапе целесообразно в первую очередь строить цикл для свободных клеток, имеющих наименьшие стоимости.
- При переброске по циклу может возникнуть следующая ситуация: одновременно освобождаются две или более занятых клеток, т.е. минимальная перевозка стоит в нескольких отрицательных клетках. В этом случае освобождаем одну клетку, стоимость которой больше, а в остальные освобождающиеся клетки ставим базисные нули и считаем эти клетки занятыми.
- При переброске по циклу может возникнуть еще одна ситуация: минимальная перевозка d равна 0 (случай вырожденного решения в задаче линейного программирования). В этом случае необходимо перебросить 0 по циклу и продолжить процесс нахождения решения до выполнения принципа оптимальности.
- Как и в общей задаче линейного программирования в транспортной задаче может существовать альтернативный оптимум, который обнаруживается по наличию свободной переменной в оптимальном решении, для которой цена цикла равна нулю. Рассмотренный метод обладает существенным недостатком: нужно строить циклы для всех свободных клеток и находить их цены. Это очень трудоемкая работа, если размерность задачи велика. Желательно иметь метод, который сначала бы определял свободную клетку, для которой цикл имеет отрицательную цену, а затем уже строил бы этот цикл. Такой метод есть, и он называется метод потенциалов.

2.3.4. Метод потенциалов

Рассмотрим транспортную задачу:

$$min\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,...,m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,...,n, \\ x_{ij} \geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n. \end{cases}$$

Составим для транспортной задачи двойственную, сопоставив каждому ограничению по поставщикам двойственную переменную α_i, $i=1,\ldots,m$, а каждому ограничению по потребителям – переменную β_j, $j=1,\ldots,n$. Таким образом, двойственная задача имеет $m+n$ переменных. Двойственная задача имеет вид:

$$max\ T = \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \le c_{11}, \\ \alpha_1 + \beta_2 \le c_{12}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m + \beta_n \le c_{mn}, \end{cases}$$

Переменные α_i, i=1,…,m, и β_j, j=1,…,n, могут принимать любые значения. Введенные двойственные переменные и называются потенциалами.

Рассмотрим теоремы двойственности. Т.к. транспортная задача всегда разрешима, значит, согласно первой теореме двойственности, двойственная к ней задача также всегда имеет решение, причем $f_{min} = T_{max}$.

Согласно второй теореме двойственности ограничения двойственной задачи, соответствующие базисным переменным исходной задачи, должны выполняться как равенства, т.е. для любой занятой клетки (i,j) выполняется условие

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}.$$

Отсюда получаем условие оптимальности.

Принцип оптимальности. Если для всех базисных клеток (i,j) найденного опорного плана выполняется условие

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}.$$

а для всех свободных клеток (p,q)

$$\alpha_p + \beta_q \le c_{pq},$$

то найденное решение является оптимальным и никакими способами улучшить его нельзя.

Этот принцип справедлив и для вырожденного решения транспортной задачи, в котором некоторые базисные переменные равны нулю.

Величину $\alpha_p+\beta_q=\widetilde{c}_{pq}$ будем называть ***псевдостоимостью*** клетки (p,q).

Из принципа оптимальности следует, что для нахождения потенциалов нужно решить систему уравнений, состоящую из (m+n-1)-го линейного уравнения, содержащих m+n переменных. Отсюда следует, что потенциалы определяются с точностью до произвольной постоянной. Покажем, что значение функции T при различных системах потенциалов остается неизменной. Действительно, пусть имеются две системы потенциалов $(\alpha_i^{(1)}, \beta_j^{(1)})$, $(\alpha_i^{(2)}, \beta_j^{(2)})$. Тогда

$$\alpha_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} = c_{ij} = \alpha_i^{(2)} + \beta_j^{(2)}.$$

Откуда: $\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)} = \beta_j^{(2)} - \beta_j^{(1)} = h$. Таким образом,

$$T^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i (\alpha_i^{(2)} + h) + \sum_{j=1}^{n} b_j (\beta_j^{(1)} - h) =$$

$$= T^{(2)} + h(\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j) = T^{(2)}.$$

Таким образом, при нахождении системы потенциалов можно любой из них положить для простоты равным нулю и через него определить все остальные потенциалы.

Для улучшения плана перевозок необходимо воспользоваться следующим свойством потенциалов и псевдостоимостей: какова бы ни была система потенциалов (α_i ,β_j), удовлетворяющая для занятых клеток условиям

$$\alpha_i+\beta_j=\tilde{c}_{ij}=c_{ij},$$

для любой свободной клетки цена цикла пересчета будет равна разности между стоимостью и псевдостоимостью данной клетки, т.е.

$$\gamma_{pq}=c_{pq}-\tilde{c}_{pq}.$$

Действительно, рассмотрим произвольную транспортную задачу размерностью 3х4. Знаком «х» в таблице 2.17 отметим занятые клетки, воспользовавшись «методом северо-западного угла». Построим цикл для клетки (1,4) и найдем его цену, при этом будем использовать принцип оптимальности. Имеем

$$\gamma_{14}=c_{14}-c_{34}+c_{33}-c_{23}+c_{22}-c_{12}=$$

$$=c_{14}-(\alpha_3+\beta_4)+(\alpha_3+\beta_3)-(\alpha_2+\beta_3)+(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_2)=$$
$$=c_{14}-(\alpha_1+\beta_4)=c_{14}-\tilde{c}_{14}.$$

Таблица 2.17.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	c_{11} x	- c_{12} x	c_{13}	+ c_{14}
a_2	c_{21}	+ c_{22} x	- c_{23} x	c_{24}
a_3	c_{31}	c_{32}	+ c_{33} x	- c_{34} x

Таким образом, если для какой-то свободной клетки (p,q)

$$\alpha_p+\beta_q>c_{pq},$$

то это означает, что найденное решение не является оптимальным, и его можно улучшить за счет ввода свободной переменной x_{pq} в базис.

Алгоритм метода потенциалов

а) Построить исходное опорное решение.

б) Для найденного опорного плана найти систему потенциалов (α_i ,β_j), удовлетворяющую для занятых клеток условиям

$$\alpha_i+\beta_j=\tilde{c}_{ij}=c_{ij},$$

при этом один из потенциалов положить равным нулю.

в) Для всех свободных клеток (p,q) найти псевдостоимости $\tilde{c}_{pq}=\alpha_p+\beta_q$ и записать их в левом верхнем углу клетки. Если окажется, что для всех свободных клеток псевдостоимости не превосходят стоимости клеток, то это означает, что найденное решение оптимально.

г) Если хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость больше стоимости, то для этой клетки построить цикл пересчета. Если таких клеток окажется несколько, то цикл построить для той клетки, для которой цена цикла окажется меньше.

д) Переместить по построенному циклу величину груза, равную минимальной перевозке в отрицательных клетках: $d = \min\limits_{"-"}\{x_{ij}\}$. Новое решение необходимо проверить на оптимальность, т.е. перейти к шагу б).

Пример 2.13. Продолжим решение примера 2.12. Добавим в таблицу еще один столбец и еще одну строку, в которые будем записывать потенциалы.

Положим α_2=0, т.к. во второй строке больше занятых клеток. Тогда, т.к.

$$\alpha_2+\beta_1=10,\ \text{то}\ \beta_1=10,$$
$$\alpha_2+\beta_3=9,\ \text{то}\ \beta_3=9,$$
$$\alpha_2+\beta_5=5,\ \text{то}\ \beta_5=5,$$
$$\alpha_4+\beta_5=4,\ \text{то}\ \alpha_4=-1,$$
$$\alpha_4+\beta_2=3,\ \text{то}\ \beta_2=4,$$
$$\alpha_3+\beta_2=3,\ \text{то}\ \alpha_3=-1,$$
$$\alpha_3+\beta_4=4,\ \text{то}\ \beta_4=5,$$
$$\alpha_1+\beta_3=3,\ \text{то}\ \alpha_1=-6.$$

Для всех свободных клеток вычислим псевдостоимости $\tilde{c}_{pq}$ и запишем их в левом верхнем углу клетки. Можно записывать только те псевдостоимости, для которых выполняется условие: $\tilde{c}_{pq} \geq c_{pq}$. Все вычисления приведены в таблице 2.18.

Таким образом, нашлись три клетки, в которых псевдостоимость больше, чем стоимость (псевдостоимости этих клеток выделены). Найдем для каждой из этих клеток цену цикла. Имеем

$$\gamma_{31}=7-9=-2,\ \gamma_{41}=6-9=-3,\ \gamma_{33}=6-8=-2.$$

Т.к. для клетки (4,1) цена цикла меньше, то построим для этой клетки цикл пересчета. Построенный цикл приведен в таблице 2.18. Перебросим по данному циклу 30 единиц груза, получим новое решение, которое приведено в таблице 2.19.

Таблица 2.18.

	80	50	60	20	50	α_i
40	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{-2}$ 8	3 **40**	$\boxed{-1}$ 10	$\boxed{-1}$ 4	$\alpha_1 = -6$
120	10 **80** -	$\boxed{4}$ 7	9 **20**	$\boxed{5}$ 6	5 **20** +	$\alpha_2 = 0$
60	$\boxed{9}$ 7	3 **40**	$\boxed{8}$ 6	4 **20**	$\boxed{4}$ 12	$\alpha_3 = -1$
40	$\boxed{9}$ 6 +	3 **10**	$\boxed{8}$ 11	$\boxed{4}$ 5	4 **30** -	$\alpha_4 = -1$
β_j	$\beta_1 = 10$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 9$	$\beta_4 = 5$	$\beta_5 = 5$	

Новое значение функции $f_2 = f_1 - \gamma_{41} d = 1550 - 3*30 = 1460$. Полученное решение опять проверяем на оптимальность. Для этого опять найдем потенциалы, псевдостоимости свободных клеток. Все вычисления приведены в таблице 2.19.

Таблица 2.19.

	80	50	60	20	50	α_i
40	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{1}$ 8	3 **40**	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{-1}$ 4	$\alpha_1 = -6$
120	10 **50** -	$\boxed{7}$ 7	9 **20**	$\boxed{8}$ 6 +	5 **50**	$\alpha_2 = 0$
60	$\boxed{6}$ 7	3 **40** +	$\boxed{5}$ 6	4 **20** -	$\boxed{-1}$ 12	$\alpha_3 = -4$
40	6 **30** +	3 **10** -	$\boxed{5}$ 11	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{1}$ 4	$\alpha_4 = -4$
β_j	$\beta_1 = 10$	$\beta_2 = 7$	$\beta_3 = 9$	$\beta_4 = 8$	$\beta_5 = 5$	

Т.к. $\gamma_{24} = -2$, то строим для клетки (2,4) цикл пересчета. Перебросим по этому циклу 10 единиц груза. Все вычисления приведены в таблице 2.20.

Новое значение функции $f_3 = f_2 - \gamma_{24} d = 1460 - 2*10 = 1440$. Полученное решение опять проверяем на оптимальность. Для этого опять найдем потенциалы, псевдостоимости свободных клеток (таблица 2.20).

Таблица 2.20.

	80	50	60	20	50	α_i
40	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{-1}$ 8	3 **40**	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{-1}$ 4	$\alpha_1 = -6$
120	10 **40** -	$\boxed{5}$ 7	9 **20**	6 **10** +	5 **50**	$\alpha_2 = 0$
60	$\boxed{8}$ 7 +	3 **50**	$\boxed{7}$ 6	4 **10** -	$\boxed{3}$ 12	$\alpha_3 = -2$
40	6 **40**	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{5}$ 11	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$ 4	$\alpha_4 = -4$
β_j	$\beta_1 = 10$	$\beta_2 = 5$	$\beta_3 = 9$	$\beta_4 = 6$	$\beta_5 = 5$	

Т.к. $\gamma_{31} = \gamma_{33} = -1$ то строим для любой из этих клеток, например, клетки (3,1) цикл пересчета. Перебросим по этому циклу 10 единиц груза. Все вычисления приведены в таблице 2.21.

Таблица 2.21.

	80	50	60	20	50	α_i
40	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{0}$ 8	3 **40**	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{-1}$ 4	$\alpha_1=-6$
120	10 **30**	$\boxed{6}$ 7	9 **20**	6 **20**	5 **50**	$\alpha_2=0$
60	7 **10**	3 **50**	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{2}$ 12	$\alpha_3=-3$
40	6 **40**	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{5}$ 11	$\boxed{2}$ 5	$\boxed{1}$ 4	$\alpha_4=-4$
β_j	$\beta_1=10$	$\beta_2=6$	$\beta_3=9$	$\beta_4=6$	$\beta_5=5$	

Новое значение функции $f_4 = f_3 - \gamma_{31}d = 1440 - 1*10 = 1430$. Полученное решение опять проверяем на оптимальность. Для этого опять найдем потенциалы, псевдостоимости свободных клеток. Все вычисления приведены в таблице 2.21.

Т.к. для всех свободных клеток выполняется условие: $\tilde{c}_{pq} \le c_{pq}$, то найденное решение $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 20 & 20 & 50 \\ 10 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является оптимальным, при этом $f_{min}=1430$.

Наличие в оптимальном решении клетки (3,3), для которой $\tilde{c}_{33} = c_{33}$, говорит о том, что данная транспортная задача имеет бесконечное множество решений. Чтобы это множество решений получить, достаточно для указанной клетки построить цикл пересчета и получить новое опорное решение с тем же самым значением функции f. Множество решений запишется в виде: $X = \lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}$, $0 \le \lambda \le 1$.

2.3.5. Транспортная задача с неправильным балансом

1. Транспортная задача с избытком запасов

Будем предполагать, что в транспортной задаче $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Тогда математическая модель этой задачи будет иметь вид

$$min\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1,...,m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,...,n, \\ x_{ij} \ge 0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n. \end{cases}$$

Для того, чтобы свести эту задачу к закрытой модели, достаточно ввести фиктивного потребителя $B_ф$, которому приписать фиктивную заявку

$$b_ф = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

а стоимости перевозок положить равными 0, т.е. $c_{iф} = 0$, $i = 1,\dots,m$.

Если в оптимальном решении переменная $x_{iф} \neq 0$, то это означает, что данное количество груза осталось невостребованным у i-го поставщика.

2. Транспортная задача с избытком потребностей

Будем предполагать, что в транспортной задаче $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Тогда математическая модель этой задачи будет иметь вид

$$min\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ,\ i = 1,\dots, m , \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j ,\ j = 1,\dots, n , \\ x_{ij} \ge 0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n. \end{cases}$$

Для того, чтобы свести эту задачу к закрытой модели, достаточно ввести фиктивного поставщика $A_ф$, которому приписать фиктивные запасы

$$a_ф = \sum_{ji=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

а стоимости перевозок положить равными 0, т.е. $c_{фj} = 0$, $j = 1,\dots,n$.

Если в оптимальном решении переменная $x_{фj} \neq 0$, то это означает, что на данное количество груза заявка j-го потребителя осталась неудовлетворенной.

2.3.6. Транспортная задача с дополнительными ограничениями

При решении ряда конкретных транспортных задач часто бывает необходимо учитывать дополнительные ограничения, которые не встречались при рассмотрении классической задачи. Рассмотрим некоторые усложнения в постановке транспортной задачи.

1. ***Блокирование перевозок***

Предположим, что в силу каких-то определенных обстоятельств перевозка груза из пункта A_i в пункт B_j невозможна. Это означает, что в оптимальном решении клетка (i,j) должна быть свободной, т.е. $x_{ij} = 0$. Назовем такое дополнительное условие «запрещением перевозки» или «блокированием перевозки».

При введении этого ограничения в модель нарушается ее основное преимущество – симметричность относительно всех переменных. Поэтому необходимо учесть это дополнительное ограничение, не нарушая симметричности модели. Осуществляется это при помощи искусственного завышения коэффициента стоимости c_{ij}, т.е. стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j полагается равной очень большому числу M, а затем задача решается как классическая транспортная задача.

Таблица 2.22.

	B_j	
A_i	M	

2. В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Например, из пункта A_i в пункт B_j требуется перевезти ровно p единиц груза. Это означает, что в оптимальном решении $x_{ij} = p$. Введение этого дополнительного условия в модель также нарушает ее симметричность. Для сведения этой задачи к классической в клетку (i,j) запишем данное количество груза p, а в дальнейшем эту клетку заблокируем и будем считать ее свободной.

Таблица 2.23.

	B_j	
A_i	M $\boxed{\mathbf{p}}$	

3. Иногда из пункта A_i в пункт B_j требуется перевезти груза не менее заданной величины p, т.е в модели добавляется условие $x_{ij} \geq p$. Для сведения этой задачи к классической запасы поставщика A_i и заявку потребителя B_j уменьшают на p единиц, а затем в оптимальном решении увеличивают переменную x_{ij} на p единиц.

Таблица 2.24.

	$b_j - p$	
$a_i - p$	c_{ij}	

4. В некоторых транспортных задачах требуется найти оптимальный план перевозок при условии, что из пункта A_i в пункт B_j требуется перевезти груза не более заданной величины p, т.е в модели добавляется условие $x_{ij} \leq p$. Для сведения этой задачи к классической сделаем следующее. В исходной таблице заменим потребителя B_j на два потребителя: $B_j^{(1)}$ и $B_j^{(2)}$,

заявки которых положим равными: $b_j^{(1)} = p$, $b_j^{(2)} = b_j - p$, а стоимости перевозок единицы груза: $c_{kj}^{(1)} = c_{kj}^{(2)} = c_{kj}, k \neq i$, $c_{ij}^{(1)} = c_{ij}$, $c_{ij}^{(2)} = M$, т.е последняя клетка блокируется. Далее задачу решаем обычными методами.

Заметим, что данная задача будет разрешима, если для нее существует хотя бы один опорный план.

Таблица 2.25.

	$B_j^{(1)}$	$B_j^{(2)}$	
	p	$b_j - p$	
A_i	c_{ij}	M	
A_{i+1}	$c_{i+1,j}$	$c_{i+1,j}$	

5. ***Перевозка неоднородного груза***

До сих пор мы рассматривали транспортные задачи, в которых осуществлялась перевозка однородного груза. Такие задачи имеют сравнительно ограниченное практическое применение. Значительно чаще приходится встречаться с перевозками неоднородного груза, например, перевозка угля разных сортов, перевозка цемента разных марок и т.д.

Характерной особенностью этих задач является условие взаимозаменяемости разных сортов перевозимого груза при удовлетворении потребностей. Это означает, что некоторая часть потребностей может быть удовлетворена различными видами имеющегося в наличии груза, но в различных количествах с учетом свойств каждого вида груза и характера потребностей.

Покажем, каким образом подобные задачи могут быть приведены к ранее рассмотренным задачам о перевозке некоторого условного однородного груза.

Пусть имеются, к примеру, два поставщика A_1, A_2 и два потребителя B_1 и B_2. Предположим, что у каждого поставщика имеется груз двух сортов. Обозначим ресурсы первого поставщика по каждому грузу – $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$. Аналогично для второго – $a_2^{(1)}, a_2^{(2)}$. Таким образом, мы уже имеем дело не с двумя, а с четырьмя поставщиками с запасами – $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_2^{(2)}$.

Теперь рассмотрим заявки каждого потребителя. Очевидно, что в условиях этой задачи эти потребности могут быть трех видов:

- Потребности только на груз первого сорта: $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}$.
- Потребности только на груз второго сорта: $b_1^{(2)}, b_2^{(2)}$.
- Взаимозаменяемые потребности: $b_1^{(3)}, b_2^{(3)}$.

Будем предполагать, что $b_1^{(3)}, b_2^{(3)}$ означают потребности потребителей B_1 и B_2, выраженные в единицах груза первого сорта.

Таким образом, вместо двух потребителей B_1 и B_2 будем рассматривать шесть потребителей с заявками: $b_1^{(1)}$, $b_1^{(2)}$, $b_1^{(3)}$, $b_2^{(1)}$, $b_2^{(2)}$, $b_2^{(3)}$.

Занесем все перечисленные исходные данные и, кроме того, коэффициенты затрат c_{ij} на перевозку единицы груза в таблицу 2.26

Будем предполагать, что стоимости c_{ij} не зависят от сорта перевозимого груза.

Пусть p единиц груза первого сорта могут быть заменены при удовлетворении потребностей q единицами груза второго сорта. Тогда отношение $\alpha = \dfrac{q}{p}$ назовем ***коэффициентом взаимозаменяемости***, который показывает, сколько единиц груза второго сорта могут заменить единицу груза первого сорта. Этот коэффициент позволяет привести все данные таблицы к одному условному грузу, например, к грузу второго сорта. Так ресурсы $a_1^{(1)}$ и $a_2^{(1)}$ эквивалентны соответственно $\alpha a_1^{(1)}$ и $\alpha a_2^{(1)}$ единицам груза второго сорта. Аналогично потребности $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_1^{(3)}, b_2^{(3)}$ эквивалентны соответственно $\alpha b_1^{(1)}$, $\alpha b_2^{(1)}$, $\alpha b_1^{(3)}$, $\alpha b_2^{(3)}$ единиц груза второго сорта.

Таблица 2.26.

		B_1			B_2		
		$b_1^{(1)}$	$b_1^{(2)}$	$b_1^{(3)}$	$b_2^{(1)}$	$b_2^{(2)}$	$b_2^{(3)}$
A_1	$a_1^{(1)}$	c_{11}	c_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{12}	c_{12}
	$a_1^{(2)}$	c_{11}	c_{11}	c_{11}	c_{12}	c_{12}	c_{12}
A_2	$a_2^{(1)}$	c_{21}	c_{21}	c_{21}	c_{22}	c_{22}	c_{22}
	$a_2^{(2)}$	c_{21}	c_{21}	c_{21}	c_{22}	c_{22}	c_{22}

Однако стоимости c_{ij} связаны с перевозками реального груза и зависят от его реального веса, а не от потребительских свойств. Поэтому, увеличив искусственно ресурсы первого сорта груза в α раз, необходимо в этих строках уменьшить в α раз стоимости.

Наконец, следует предусмотреть , чтобы потребности первого и второго вида удовлетворялись бы только за счет груза требуемого сорта. Для этого произведем блокировку недопустимых перевозок с помощью искусственно завышенных стоимостей M. В результате получится следующая таблица:

Таблица 2.27.

		B_1			B_2		
		$\alpha b_1^{(1)}$	$b_1^{(2)}$	$\alpha b_1^{(3)}$	$\alpha b_2^{(1)}$	$b_2^{(2)}$	$\alpha b_2^{(3)}$
A_1	$\alpha a_1^{(1)}$	$\frac{c_{11}}{\alpha}$	M	$\frac{c_{11}}{\alpha}$	$\frac{c_{12}}{\alpha}$	M	$\frac{c_{12}}{\alpha}$
	$a_1^{(2)}$	M	c_{11}	c_{11}	M	c_{12}	c_{12}
A_2	$\alpha a_2^{(1)}$	$\frac{c_{21}}{\alpha}$	M	$\frac{c_{21}}{\alpha}$	$\frac{c_{22}}{\alpha}$	M	$\frac{c_{22}}{\alpha}$
	$a_2^{(2)}$	M	c_{21}	c_{21}	M	c_{22}	c_{22}

Дальнейшее решение задачи можно производить обычными методами, рассматривая условно четырех поставщиков груза и шесть потребителей.

Условие закрытой модели в данном случае будет выглядеть так:

$$\alpha(a_1^{(1)} + a_2^{(1)}) + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} = \alpha(b_1^{(1)} + b_1^{(3)} + b_2^{(1)} + b_2^{(3)}) + b_1^{(2)} + b_2^{(2)}.$$

Однако этого условия недостаточно для разрешимости данной задачи. Очевидно, что запасы груза первого сорта и второго сорта должны быть не меньше потребностей в этих грузах, т.е.

$$a_1^{(1)} + a_2^{(1)} \geq b_1^{(1)} + b_2^{(1)},$$
$$a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \geq b_1^{(2)} + b_2^{(2)}.$$

После получения оптимального решения преобразованной задачи необходимо вернуться к единицам груза первого сорта, умножив соответствующие элементы решения на величину $\frac{1}{\alpha}$.

2.4. Транспортная задача по критерию времени

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых критерием эффективности была суммарная стоимость перевозок. Однако в некоторых задачах на первый план выдвигается не стоимость перевозок, а время T, в течение которого эти перевозки будут совершены, например, задачи, связанные с перевозкой скоропортящегося груза.

Рассмотрим ***постановку данной задачи***.

Имеются m пунктов отправления груза $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых сосредоточены запасы некоторого однородного груза в количестве соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц. Кроме того имеются n пунктов потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$, заявки которых соответственно равны $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц груза. Допустим, что выполняется условие закрытой модели, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Задана матрица $T = \{t_{ij}\}_{m\times n}$, где t_{ij} – время, затрачиваемое на перевозку груза от i-го поставщика к j-му потребителю. Предполагается, что время t_{ij} не зависит от количества перевозимого груза, т.е. количество транспортных средств достаточно для осуществления любого объема перевозок. Требуется построить такой план перевозок груза, т.е. необходимо указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i-го поставщика к j-му потребителю, так, чтобы весь груз был доставлен потребителям в кратчайший срок.

Такая транспортная задача и называется транспортной задачей по критерию времени.

Составим ***математическую модель данной задачи***.

Пусть, как и ранее, x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю. Система ограничений в модели такой задачи, по-видимому, не будет отличаться от соответствующей системы ограничений в модели транспортной задачи по критерию стоимости.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \\ x_{ij} \geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n. \end{cases}$$

Изменится лишь выражение для целевой функции. Выразим функцию T через t_{ij} и x_{ij}. Рассмотрим некоторый план перевозок $X = \{x_{ij}\}_{m\times n}$. Очевидно, что данный план перевозок осуществится за то время, за которое закончится самая длительная перевозка, т.е. T – это максимальное из всех t_{ij}, соответствующих занятым клеткам, т.е., где $x_{ij}>0$. Следовательно,

$$T = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\}.$$

Очевидно, что среди всех планов перевозок необходимо выбрать такой план X, для которого величина T будет наименьшей, т.е.

$$T = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} \rightarrow \min.$$

Поставленная задача не является задачей линейного программирования, т.к. целевая функция не является линейной относительно переменных x_{ij}. Поэтому многие требования, предъявляемые к транспортной задаче по критерию стоимости, в данном случае не обязаны выполняться. В первую очередь, это касается количества занятых клеток в опорном плане и правила построения цикла пересчета.

Рассмотрим метод решения подобных задач, который называется «***методом запрещенных клеток***».

Алгоритм метода запрещенных клеток

а) Привести задачу к закрытой модели.

б) Построить исходное опорное решение.

в) Для найденного плана определить

$$T = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} \text{ для занятых клеток.}$$

г) Все свободные клетки, которым будут соответствовать значения $t_{ij} \geq T$, исключаются из дальнейшего рассмотрения (вычеркиваются).

д) В оставшейся таблице рассмотрим занятую клетку (p,q), для которой $t_{pq}=T$, и построим для нее «разгрузочный» цикл по следующему правилу:

- Цикл начинается и заканчивается в выбранной клетке (p,q). Эта клетка помечается знаком «-».
- Все остальные вершины цикла могут находиться как в занятых клетках, так и свободных, но при условии, что знаком «-» помечаются только занятые клетки, т.е. для которых $x_{ij}>0$, а знаком «+» те клетки, для которых $t_{ij}<T$.
- Таких циклов, вообще говоря, можно построить несколько.

е) Переместить по построенному циклу величину груза, равную минимальной перевозке в отрицательных клетках: $d = \min_{"-"}\{x_{ij}\}$.

ж) Если $d = \min_{"-"}\{x_{ij}\} = x_{pq}$, то клетка (p,q) полностью освобождается и исключается из дальнейших рассуждений (вычеркивается). Новое решение необходимо проверить на оптимальность, т.е. перейти к шагу в).

з) Если $d = \min_{"-"}\{x_{ij}\} < x_{pq}$, то клетка (p,q) полностью не освободится, но перевозка в данной клетке уменьшится: $x'_{pq} = x_{pq} - d$. В этом случае строим новый разгрузочный цикл для этой клетки (p,q) и так до тех пор, пока она не освободится. Если это удастся сделать, то переходим к шагу в).

Если это сделать не удалось, то это означает, что найденное решение оптимально.

Пример 2.14. Решить следующую транспортную задачу по критерию времени.

	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

Решение. Данная задача является закрытой, т.к. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 50$.

Найдем исходное опорное решение по методу северо-западного угла. Решение приведено в таблице 2.28. Т.к. рассматриваемая задача не является задачей линейного программирования, то количество занятых клеток не обязательно равно $m+n$-1.

Найдем для построенного плана $T_1 = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = 8$, что соответствует клетке (1,1). Вычеркнем те свободные клетки (i,j), для которых $t_{ij} \geq 8$. Это клетка (3,2).

Таблица 2.28.

50	5	10	20	15
10	- 8 **5**	+ 3 **5**	5	2
15	+ 4	- 1 **5**	6 **10**	7
25	1	~~9~~	4 **10**	3 **15**

Для клетки (1,1) строим разгрузочный цикл. Клетку (1,1) помечаем знаком «-».

Перебросим по построенному циклу количество груза $d = \min\limits_{"-"}\{x_{ij}\}$=5. Новое решение приведено в таблице 2.29.

Таблица 2.29.

50	5	10	20	15
10	~~8~~	- 3 **10**	+ 5	2
15	4 **5**	+ 1	- 6 **10**	~~7~~
25	1	~~9~~	4 **10**	3 **15**

Клетка (1,1) освободилась, поэтому вычеркнем ее.

Найдем для построенного плана $T_2 = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = 6$, что соответствует клетке (2,3). Вычеркнем те свободные клетки (i,j), для которых $t_{ij} \geq 6$. Это клетка (2,4).

Для клетки (2,3) строим разгрузочный цикл. Клетку (2,3) помечаем знаком «-».

Перебросим по построенному циклу количество груз

$$d = \min_{"-"}\{x_{ij}\}=10.$$

Новое решение приведено в таблице 2.30.

Клетка (2,3) освободилась, поэтому вычеркнем ее.

Найдем для построенного плана $T_3 = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = 5$, что соответствует клетке (1,3). Вычеркнем те свободные клетки (i,j), для которых $t_{ij}>6$. Таких клеток нет.

Таблица 2.30.

50	5	10	20	15
10	~~8~~	3	- 5 10	+ 2
15	4 **5**	1 **10**	~~6~~	~~7~~
25	1	~~9~~	+ 4 **10**	- 3 **15**

Для клетки (1,3) строим разгрузочный цикл. Клетку (1,3) помечаем знаком «-».

Перебросим по построенному циклу количество груза

$$d = \min_{"-"}\{x_{ij}\} = 10.$$

Новое решение приведено в таблице 2.31.

Клетка (1,3) освободилась, поэтому вычеркнем ее.

Найдем для построенного плана $T_4 = \max_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = 4$, что соответствует клеткам (2,1) и (3,3). Чтобы улучшить найденный план перевозок, необходимо разгрузить уже две клетки (2,1) и (3,3). Нетрудно убедиться, что сделать это невозможно.

Таблица 2.31.

50	5	10	20	15
10	~~8~~	3	~~5~~	2 10
15	4 **5**	1 **10**	~~6~~	~~7~~
25	1	~~9~~	4 **20**	3 **5**

Следовательно, найденное решение является оптимальным, при этом $T_{min} = 4$.

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

2.5. Целочисленное линейное программирование

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, в которых переменные означают количество неделимой продукции, например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам и т.д.

Задачи целочисленного программирования подразделяются на полностью целочисленные, если условие целочисленности наложено на все переменные, и частично целочисленные, если условие целочисленности относится лишь к некоторым переменным.

Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, являются линейными, то задача является линейно целочисленной.

Один из простейших способов решения таких задач – это округление до ближайшего целого. Однако в этом случае нет гарантии, что округленное решение будет удовлетворять системе ограничений исходной задачи, т.е. будет допустимым. Но даже, если округленное решение будет допустимым, нет гарантии, что оно будет оптимальным. Поэтому для решения задач целочисленного программирования разработаны специальные методы решения.

Рассмотрим следующую задачу целочисленного линейного программирования

$$min\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \text{ – целые, } x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n, \end{cases} \qquad (2.20)$$

Предположим, что задача линейного программирования имеет следующую область допустимых решений (рис. 2.7).

Если наложить требование целочисленности переменных, то допустимое множество решений такой задачи представляет собой совокупность изолированных целочисленных точек и не является выпуклым (рис. 2.7).

Если добавить новые ограничения, связывающие внешние целочисленные точки, а затем в качестве многогранника решений использовать все выпуклое множество, ограниченное осями координат и новыми ограничениями, то получим новую задачу линейного программирования со следующими свойствами:

- новый многогранник решений содержит все точки с целыми координатами, которые входили в первоначальный многогранник решений; любая угловая точка имеет целочисленные координаты;
- т.к. линейная функция достигает своего оптимума в угловой точке ОДР, то построением такого многогранника и обеспечивается целочисленность оптимального решения.

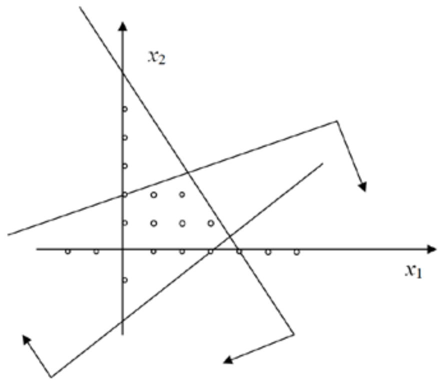


Рис. 2.7. *ОДР задачи целочисленного программирования*

Методы решения задач целочисленного программирования можно разделить на группы:

- методы отсечений,
- комбинаторные методы.

Название «методы отсечений» связано с тем обстоятельством, что вводимые в них дополнительные ограничения отсекают некоторые области многогранника допустимых решений, в которых отсутствуют точки с целочисленными координатами. Мы остановимся на методе отсекающих плоскостей Гомори.

В основе комбинаторных методов лежит идея перебора всех допустимых целочисленных решений. Основная проблема этих методов заключается в разработке процедур, позволяющих рассматривать непосредственно лишь часть указанных решений, а остальные допустимые решения учитывать косвенным образом. Мы рассмотрим из этой группы метод ветвей и границ.

2.5.1. Метод Гомори

Рассмотрим метод Гомори для полностью целочисленных задач. Поэтому необходимым условием применения данного алгоритма является целочисленность всех коэффициентов и правых частей ограничений. Например, ограничение

$$x_1 - 1/3x_2 \le 13/3$$

необходимо записать как $3x_1 - x_2 \le 13$.

Необходимость введения требования целочисленности параметров исходной задачи обусловлена следующими соображениями. Из дальнейшего рассмотрения будет видно, что как исходные, так и дополнительные (остаточные или избыточные) переменные задачи, решаемой с помощью метода Гомори, должны быть целочисленными. Между тем наличие в ограничениях дробных коэффициентов приводит к нарушению целочисленности дополнительных переменных, которые представляют собой разность двух, вообще говоря, нецелых чисел, и не обязаны быть целыми. В этом случае алгоритм может не найти целочисленного оптимального решения даже тогда, когда оно существует.

Предположим, что решается следующая задача

$$min\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \\ x_j \text{ - целые, } x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n, \end{cases} \qquad (2.21)$$

Алгоритм метода Гомори

1. Используя симплекс-метод, найти решение поставленной задачи без учета условия целочисленности переменных (ослабленная задача).
2. Если полученное решение оказывается целочисленным, то оно является оптимальным решением исходной задачи.
3. Если оптимальное решение ослабленной задачи содержит хотя бы одну дробную переменную, то для нее составляется дополнительное ограничение, которое вносится в последнюю симплекс-таблицу, и вычисления продолжаются до выполнения принципа оптимальности решения. Если дробных переменных несколько, то дополнительное ограничение составляется для той переменной, у которой дробная часть больше.
4. Если во вновь полученном оптимальном решении есть опять дробная переменная, то для нее опять составляют дополнительное ограничение и так до тех пор, пока не будет получено оптимальное целочисленное решение исходной задачи или доказана ее неразрешимость.

Задача будет не разрешима (т.е. не будет целочисленного оптимального решения), если в последней симплекс-таблице в строке для дробной переменной все коэффициенты целые.

Алгоритм гарантирует, что за конечное число шагов либо будет получено целочисленное оптимальное решение, либо доказана неразрешимость поставленной задачи.

Составление дополнительного ограничения

Пусть в последней симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению ослабленной задачи, переменная x_j – дробная. Составим для нее дополнительное ограничение. Для этого выпишем из симплекс-таблицы ограничение, соответствующее переменной x_j.

$$\alpha_{j1}x_1 + \ldots + x_j + \ldots + \alpha_{jn}x_n = \beta_j. \tag{2.22}$$

Т.к. β_j – дробное, то найдется хотя бы один дробный коэффициент α_{jk} , в противном случае задача будет не разрешима. Обозначим через $[\beta_j]$, $[\alpha_{jk}]$ – целые части чисел β_j и α_{jk} , т.е наибольшие целые числа, не превосходящие данных чисел β_j и α_{jk}. Например, [1,5] = 1, [-1,5] = -2.

Тогда величины дробных частей q_j и s_{jk} чисел β_j и α_{jk} определятся следующим образом:

$$q_j = \beta_j - [\beta_j], \text{ и } s_{jk} = \alpha_{jk} - [\alpha_{jk}],$$

например, 1,5 – [1,5] = 0,5, -1,5 - [-1,5] = 0,5. Дробные части q_j и s_{jk} – неотрицательные числа.

Перейдем в ограничении (2.22) к дробным частям коэффициентов и свободного члена. Очевидно, что будет справедливо неравенство:

$$s_{j1}x_1 + \ldots + s_{j,j-1}x_{j-1} + s_{j,j+1}x_{j+1} + \ldots + s_{jn}x_n \geq q_j .$$

Преобразуем данное неравенство таким образом, чтобы все коэффициенты и свободный член были в нем целыми.

$$\tilde{s}_{j1}x_1 + \ldots + \tilde{s}_{j,j-1}x_{j-1} + \tilde{s}_{j,j+1}x_{j+1} + \ldots + \tilde{s}_{jn}x_n \geq \tilde{q}_j .$$

Перейдем к ограничению-равенству, введя дополнительную переменную

$$\tilde{s}_{j1}x_1 + \ldots + \tilde{s}_{j,j-1}x_{j-1} + \tilde{s}_{j,j+1}x_{j+1} + \ldots + \tilde{s}_{jn}x_n - u_1 = \tilde{q}_j . \qquad (2.23)$$

Полученное ограничение (2.23) внесем в последнюю симплекс-таблицу и продолжим итерационный процесс до получения нового оптимального решения.

Пример 2.15. Методом Гомори найти решение следующей задачи

$$max\ f = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \text{ – целые.} \end{cases}$$

Решение. Запишем данную задачу в канонической форме и преобразуем целевую функцию

$$f - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ – целые.} \end{cases}$$

Решим задачу с помощью симплекс-метода без учета целочисленности переменных. Приведем последнюю симплекс-таблицу

Таблица 2.32.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	7/2	0	1	1/2	-1/2	0	
x_1	13/2	1	0	1/2	1/2	0	
x_5	34	0	0	1	2	1	
f	71/2	0	0	5/2	1/2	0	

Нетрудно заметить, что получено оптимальное решение ослабленной задачи: X=(19/2, 7/2, 0, 0, 34). В найденном решении две дробные переменные, имеющие одинаковые дробные части. Поэтому дополнительное ограничение можно составлять для любой из этих переменных. Составим дополнительное ограничение для переменной x_2. Для этого выпишем ограничение из последней таблицы для выбранной переменной

$$x_2 + 1/2\, x_3 - 1/2\, x_4 = 7/2.$$

Перейдем в этом ограничении к дробным частям коэффициентов и свободного члена. Очевидно, что будет справедливо неравенство:

$$1/2\,x_3 + 1/2\,x_4 \geq 1/2.$$

Преобразуем данное неравенство таким образом, чтобы все коэффициенты и свободный член были в нем целыми.

$$x_3 + x_4 \geq 1.$$

Перейдем к ограничению-равенству, введя дополнительную переменную

$$x_3 + x_4 - u_1 = 1.$$

Полученное ограничение внесем в последнюю симплекс-таблицу и продолжим итерационный процесс до получения нового оптимального решения. Т.к. добавленное ограничение не разрешено относительно базисной положительной переменной, то встает задача нахождения ИОР. Для этого в строке, неразрешенной относительно базисной переменной выберем произвольный положительный коэффициент, например, a_{44}=1, и введем переменную x_4 в базис. Разрешающую строку выберем как в симплекс-методе. Т.к. минимальное отношение соответствует добавленной строке, то ИОР будет получено за одну итерацию. Далее продолжим итерационный процесс до выполнения принципа оптимальности.

Таблица 2.33.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	
x_2	7/2	0	1	1/2	-1/2	0	0	
x_1	13/2	1	0	1/2	1/2	0	0	13
x_5	34	0	0	1	2	1	0	17
	1	0	0	1	1	0	-1	1
f	71/2	0	0	5/2	1/2	0	0	
x_2	4	0	1	1	0	0	-1/2	
x_1	9	1	0	0	0	0	1/2	
x_5	32	0	0	-1	0	1	2	
x_4	1	0	0	1	1	0	-1	
f	35	0	0	2	0	0	1/2	

Получено оптимальное целочисленное решение: X = (9, 4, 0, 1, 32), а f_{max}=35.

Замечание 2.10. Ошибки округления, возникающие в процессе вычислений с помощью вычислительной техники, в ряде случаев приводят к получению неверного, т.е. неоптимального решения. Трудности такого рода можно избежать, если исключить операции с десятичными дробями, т.е. оперировать с обыкновенными дробями. Однако использование обыкновенных дробей значительно усложняет алгоритм и может привести к переполнению.

Замечание 2.11. Второй недостаток метода заключается в том, что решения, последовательно получаемые в процессе реализации алгоритма, не являются допустимыми для исходной задачи, т.е. алгоритм не позволяет получить какое-либо целочисленное решение, отличное от оптимального. Это означает, что в случае вынужденного прекращения вычислений до момента окончания процесса решения не будет зафиксировано ни одного «приемлемого» целочисленного решения исходной задачи.

2.5.2. Метод ветвей и границ

Данный метод решения задачи целочисленного программирования также опирается на решение ослабленной задачи, т.е. без условия целочисленности переменных. Однако в отличие от рассмотренного метода Гомори метод ветвей и границ непосредственно применим как к полностью целочисленным, так и частично целочисленным задачам.

Пусть решается задача (2.21). Согласно общей идее метода сначала решается ослабленная задача линейного программирования. При этом можно использовать любой метод решения задач линейного программирования. Если решение ослабленной задачи является целочисленным, то это решение и будет оптимальным решением исходной задачи.

Остановимся на случае, когда в оптимальном решении ослабленной задачи есть дробные переменные. Пусть переменная x_j – целочисленная переменная, значение которой β_j в полученном оптимальном решении ослабленной задачи дробное.

Очевидно, что интервал ($[\beta_j]$, $[\beta_j]+1$) не содержит допустимых целочисленных решений. Поэтому допустимое целое значение x_j должно удовлетворять одному из неравенств:

$$x_j \le [\beta_j], \ \ x_j \ge [\beta_j]+1.$$

Введение этих условий в задачу с ослабленными ограничениями порождает две, не связанные между собой, задачи. В этом случае говорят, что задача разветвляется или разбивается на две подзадачи.

Осуществляемый в процессе ветвления учет необходимых условий целочисленности позволяет исключить части ОДР, не содержащие точек с целыми координатами.

Затем каждая из подзадач с учетом введенного дополнительного ограничения решается как задача линейного программирования.

Если полученное оптимальное решение подзадачи является допустимым, т.е. целочисленным, то это решение следует зафиксировать как наилучшее на данном этапе. При этом нет необходимости продолжать ветвление этой подзадачи, поскольку за счет дальнейшего ветвления улучшить полученное решение не удастся.

Если полученное оптимальное решение подзадачи не является допустимым, т.е. не является целочисленным, то данная подзадача в свою очередь должна быть разбита на две подзадачи с учетом условия целочисленности переменных, которые в полученном решении являются дробными.

Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока либо каждая подзадача приведет к целочисленному решению, либо будет установлена ее неразрешимость. Наилучшее из зафиксированных допустимых решений и будет являться оптимальным. Если такого решения в процессе ветвления не было зафиксировано, то это означает, что исходная задача не разрешима.

Эффективность вычислительной процедуры можно повысить, введя в рассмотрение понятие границы: $\bar{f}$ – верхняя граница в задаче минимизации, $\underline{f}$- нижняя граница в задаче максимизации. При отсутствии дополнительной информации на начальном этапе можно положить $\bar{f} = +\infty$ ($\underline{f} = -\infty$).

Если в процессе ветвления было получено целочисленное решение, для которого значение целевой функции лучше, чем зафиксированная граница, то это значение функции фиксируется в качестве новой границы.

Если в процессе ветвления было получено решение подзадачи, для которого значение целевой функции хуже, чем зафиксированная граница, то эту подзадачу можно дальше не рассматривать. В таких случаях говорят, что задача прозондирована, и ее можно исключить из списка подзадач, порожденных исходной задачей.

Последняя зафиксированная граница и дает оптимальное значение целевой функции.

Количество решаемых задач зависит от того, в каком порядке порождаются и решаются подзадачи, а также по какой дробной переменной идет процесс ветвления.

Процесс нахождения оптимального решения удобно изображать в виде дерева.

Пример 2.16. Найти решение следующей задачи целочисленного программирования

$$max\ f = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \text{ – целые.} \end{cases}$$

Решение. Найдем решение ослабленной задачи. Т.к. задача содержит две переменные, то будем решать ее графически (рис. 2.8). Положим $\underline{f} = -\infty$.

Прямая $5x_1 + 7x_2 = 35$ проходит через точки (0,5) и (7,0).

Прямая $4x_1 + 9x_2 = 36$ проходит через точки (0,4) и (9,0).

Линии уровня целевой функции имеют вид: $2x_1 + 3x_2 = a$, где a – любое вещественное число, $f' = (2,3)$.

Решением ослабленной задачи является точка A_1, которая находится как решение системы ограничений

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 35, \\ 4x_1 + 9x_2 = 36. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим: $A_1 = \left(3\frac{12}{17}, 2\frac{6}{17}\right)$, а $f_1 = 14\frac{8}{17}$. Решение ослабленной задачи не является целочисленным, поэтому будем разбивать эту задачу на подзадачи, например, по переменной x_2. Заметим, что переменная $x_2 = =2\frac{6}{17}$, поэтому $[x_2]$ =2. Очевидно, что целочисленное решение должно удовлетворять одному из дополнительных условий: $x_2 \leq 2$ или $x_2 \geq 3$. Введение этих дополнительных условий приводит к двум подзадачам 2 и 3.

Порожденные подзадачи содержат все допустимые целочисленные решения исходной задачи, т.е. исходное множество допустимых целочисленных решений остается неизменным в процессе ветвления.

Совокупность порожденных подзадач показана в виде дерева на рис. 2.9.

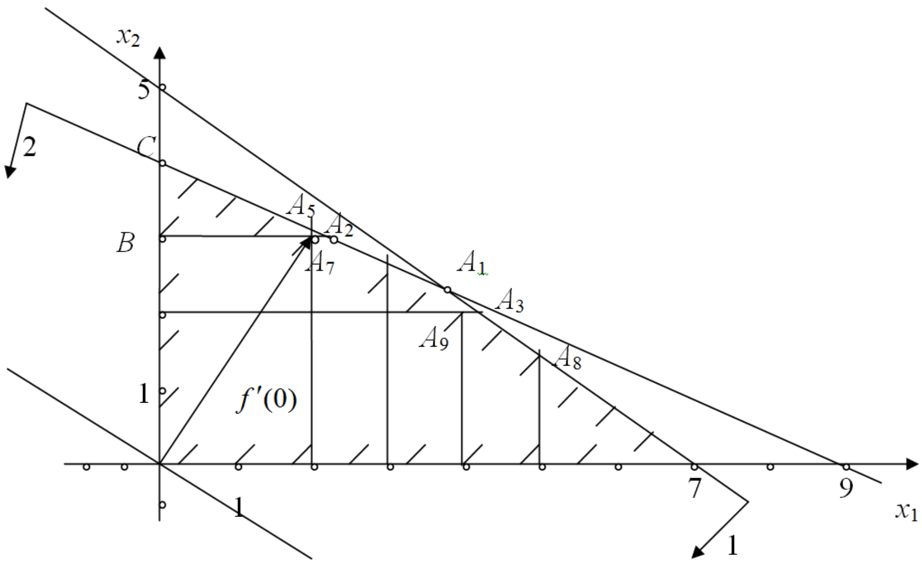


Рис. 2.8. *Геометрическая интерпретация решения примера 2.16*

На следующем шаге осуществляется выбор одной из подзадач 2 или 3. От выбора подзадачи будет зависеть количество итераций, которые необходимо выполнить для получения оптимального решения.

Предположим, что сначала решается подзадача 2. Если задача решается с помощью симплекс-метода, то к последней симплекс-таблице, содержащей оптимальное решение ослабленной задачи, добавляется ограничение $x_2 \geq 3$, преобразованное в равенство, и итерационный процесс продолжается дальше до получения оптимального решения подзадачи 2.

В данном примере ОДР для подзадачи 2 представляет собой треугольник BCA_2. Решением этой задачи является точка A_2, которая находится как решение системы ограничений

$$\begin{cases} x_2 = 3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 36. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим: $A_2 = \left(2\frac{1}{4}, 3\right)$, а $f_2 = 13\frac{1}{2}$. Решение не является целочисленным, поэтому будем ветвить эту задачу по переменной x_1. Заметим, что переменная $x_1 = 2\frac{1}{4}$, поэтому $[x_1] = 2$. Очевидно, что целочисленное решение должно удовлетворять одному из дополнительных условий: $x_1 \le 2$ или $x_1 \ge 3$. Введение этих дополнительных условий приводит к двум подзадачам 4 и 5. Далее решаем аналогично.

Подзадача 4 не имеет оптимального решения, т.к треугольник BCA_2 и полуплоскость $x_1 \ge 3$ не пересекаются.

Решением подзадачи 5 является точка A_5, которая находится как решение системы ограничений

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ 4x_1 + 9x_2 = 36. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим: $A_5 = \left(2, 3\frac{1}{9}\right)$, а $f_2 = 13\frac{1}{3}$. Далее будем ветвить эту задачу по переменной x_2. Очевидно, что целочисленное решение должно удовлетворять одному из дополнительных условий: $x_2 \le 3$ или $x_2 \ge 4$. Введение этих дополнительных условий приводит к двум подзадачам 6 и 7.

Решением подзадачи 6 является точка $C = (0,4)$, а $f_6 = 12$. Т.к. полученное решение – целочисленное, то соответствующее значение целевой функции фиксируется в качестве нижней границы, т.е. $\underline{f} = 12$.

Решением подзадачи 7 является точка $A_7 = (2,3)$, а $f_7 = 13$. Т.к. полученное решение – целочисленное, и соответствующее ему значение целевой функции лучше, чем зафиксированная граница, то это значение функции фиксируется в качестве новой границы, т.е. $\underline{f} = 13$.

Т.к. решения подзадач 6 и 7 – целочисленные, то дальше эти подзадачи не ветвятся. Перейдем к подзадаче 3.

ОДР для подзадачи 3 представляет собой трапецию. Решением этой задачи является точка A_3, которая находится как решение системы ограничений

$$\begin{cases} x_2 = 2, \\ 5x_1 + 7x_2 = 35. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$$A_3 = \left(4\frac{1}{5}, 2\right), \text{ а } f_3 = 14\frac{2}{5}.$$

Решение не является целочисленным, поэтому будем ветвить эту задачу по переменной x_1. Очевидно, что целочисленное решение должно удовлетворять одному из дополнительных условий: $x_1 \le 4$ или $x_1 \ge 5$. Введение этих дополнительных условий приводит к двум подзадачам 8 и 9.

Нетрудно заметить, что решением подзадачи 9 является точка A_9=(4,2), а f_9=14. Т.к. полученное решение – целочисленное, и соответствующее ему значение целевой функции лучше, чем зафиксированная граница, то это значение функции фиксируется в качестве новой границы, т.е. $\underline{f}$=14.

Решением подзадачи 8 является точка A_8, которая находится как решение системы ограничений

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 = 35. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим: $A_8 = \left(5, 1\dfrac{3}{7}\right)$, а $f_8 = 14\dfrac{2}{7}$. Дальнейшее ветвление подзадачи 8 нецелесообразно, т.к. разность между значением функции f и границей $\underline{f}$ меньше 1, и все коэффициенты целевой функции целые. Таким образом, ветвление подзадачи 8 в лучшем случае приведет к решению, для которого значение целевой функции равно 14. Если поиск других решений с тем же самым значением целевой функции не представляет интереса, то вершина 8 должна быть исключена из рассмотрения.

Таким образом, оптимальным решением исходной задачи является точка (4,2), а f_{max}= 14.

Заметим, что, если бы на первой итерации была выбрана подзадача 3, а не 2, то количество решаемых подзадач было бы намного меньше, т.к. решение задачи 2 было бы хуже, чем граница, поэтому данную задачу можно было бы не ветвить.

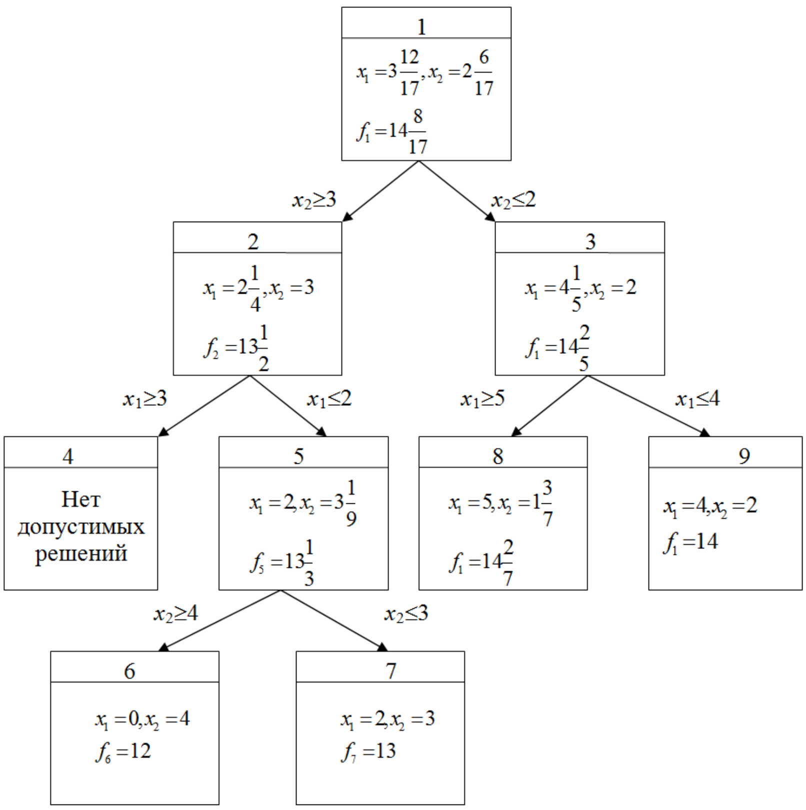


Рис. 2.9. *Дерево подзадач для примера 2.16*

Рассмотренный пример очень наглядно продемонстрировал недостатки метода. Но, несмотря на эти недостатки, в настоящее время метод ветвей и границ является наиболее надежным методом решения целочисленных задач.

2.6. Задача о назначениях

Постановка задачи

Предположим, что для выполнения m различных работ имеются n работников, причем каждый работник должен выполнять только одну работу, и каждая работа должна выполняться только одним работником. Выполнение i-ой работы ($i=1,\ldots,m$) j-м работником ($j=1,\ldots,n$) связано с затратами времени, определяемыми его квалификацией c_{ij}. Требуется распределить работников по работам таким образом, чтобы суммарные затраты времени были минимальными.

Случай *m=n*

Рассмотрим сначала случай, когда $m=n$. Для построения математической модели выберем управляемые переменные

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \textit{если } j-\textit{ый работник выполняет } i-\textit{ю работу},\\ 0, \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Т.к. требуется найти минимальные суммарные затраты времени, то целевая функция имеет вид $\min f=\sum\limits_{i,j} c_{ij}x_{ij}$,

ограничения

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij}=1,\ i=1,...,m, \text{т.к. каждая работа выполняется только одним работником},\\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ j=1,...,n, \text{ т.к. каждый работник выполняет только одну работу},\\ x_{ij}\geq 0,\ x_{ij} - \text{целые},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.\end{cases}$$

Модель этой задачи схожа с моделью транспортной задачи, поэтому для ее решения можно использовать методы решения транспортной задачи. Но проблема состоит в том, что решение этой задачи будет вырожденным на всех итерациях, т.к. будет содержать n-1 базисный нуль. Поэтому для решения этой задачи разработан специальный алгоритм.

Венгерский алгоритм

В основе метода лежат следующие утверждения.

Теорема 2.6. Если $x_{ij}=\overline{x}_{ij}$ является оптимальным решением задачи о назначениях, то это решение при соблюдении ограничений исходной задачи будет минимизировать функцию

$$\widetilde{f}=\sum_{i,j}\widetilde{c}_{ij}x_{ij},$$

где $\widetilde{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j, i, j=1,...,n$, u_i, v_j – некоторые постоянные [8].

Из этой теоремы следует, что решение задачи о назначениях не изменится, если к любому столбцу или любой строке прибавить (вычесть) некоторую постоянную величину.

Теорема 2.7. Если в задаче $min\ \widetilde{f} = \sum_{i,j} \widetilde{c}_{ij} x_{ij}$ все $\widetilde{c}_{ij} \geq 0, i, j = 1,..., n$ и можно найти набор переменных $x_{ij} = \overline{x}_{ij}$ такой, что $\sum_{i,j} \widetilde{c}_{ij} \overline{x}_{ij} = 0$, т.е. обращает целевую функцию в ноль, то это решение $x_{ij} = \overline{x}_{ij}$ является оптимальным [8].

Из последней теоремы следует, что в этом случае значение искомой функции f равно

$$f = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \text{, т.к.}$$

$$\widetilde{f} = \sum_{i,j} \widetilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i,j} (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j\right).$$

Таким образом, венгерский алгоритм сводится к добавлению (или вычитанию) постоянных величин к строкам или столбцам матрицы C до тех пор, пока достаточное количество величин $\widetilde{c}_{ij}$ не обратится в нуль, что и даст оптимальное решение.

Алгоритм

1) Получение нулей

Из всех элементов одного и того же столбца матрицы $C = \{c_{ij}\}_{nxn}$ вычесть наименьший элемент этого столбца, т.е.

$$c_{ij}^{(1)} = c_{ij} - \min_i c_{ij}.$$

В результате получим матрицу $C^{(1)}$, в каждом столбце которой есть хотя бы один нуль.

Далее, из всех элементов одной и той же строки матрицы $C^{(1)}$ вычесть наименьший элемент этой строки, т.е.

$$c_{ij}^{(2)} = c_{ij}^{(1)} - \min_j c_{ij}^{(1)}.$$

В результате получим матрицу $C^{(2)}$, в каждой строке которой есть хотя бы один нуль.

Описанные преобразования можно выполнять сначала для строк, а уже потом для столбцов.

Пример 2.17. Решить задачу о назначениях с матрицей

$C =$

	1	2	3	4	5
1	12	8	7	15	4
2	7	9	17	14	10
3	9	6	12	6	7
4	7	6	14	6	10
5	9	6	12	10	6

Решение. Выполним первый шаг алгоритма для указанной матрицы C.

$C =$

	1	2	3	4	5
1	12	8	7	15	4
2	7	9	17	14	10
3	9	6	12	6	7
4	7	6	14	6	10
5	9	6	12	10	6
	7	6	7	6	4

В результате получим

$C^{(1)} =$

	1	2	3	4	5	
1	5	2	0	9	0	0
2	0	3	10	8	6	0
3	2	0	5	0	3	0
4	0	0	7	0	6	0
5	2	0	5	4	2	0

Т.к. в матрице $C^{(1)}$ минимальными элементами во всех строках являются нули, то $C^{(2)} = C^{(1)}$.

2) Проверка решения на оптимальность

Из нулевых элементов матрицы $C^{(2)}$ получить решение с нулевым значением функции $\tilde{f} = \sum\limits_{i,j} \tilde{c}_{ij} x_{ij}$, т.е. осуществить назначение, для которого все $c_{ij}^{(2)} = 0$. Для нахождения нулевого решения в матрице $C^{(2)}$ выполнить следующее:

- В строке, содержащей наименьшее количество нулей, отметить один из нулей, заключая его в рамку. $\boxed{0}$

  Остальные нули строки и столбца, на пересечении которых стоит отмеченный нуль, зачеркнуть.
- Далее перейти к следующей строке и т.д. до тех пор, пока можно помечать нули.

Если отмеченных нулей будет n, то решение является оптимальным. Если их будет меньше, чем n, то решение не оптимально и перейти к шагу 3.

Вернемся к рассмотрению примера. В матрице $C^{(2)}$ отметим нуль во второй строке, при этом нуль в первом столбце вычеркиваем. Далее аналогично поступаем со всеми остальными строками. В результате получаем

$$C^{(2)} = \begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
1 & 5 & 2 & \boxed{0} & 9 & \cancel{0} & \\
2 & \boxed{0} & 3 & 10 & 8 & 6 & + \\
3 & 2 & \cancel{0} & 5 & \cancel{0} & 3 & + \\
4 & \cancel{0} & \cancel{0} & 7 & \boxed{0} & 6 & + \\
5 & 2 & \boxed{0} & 5 & 4 & 2 & + \\
\hline
 & + & + & & + & &
\end{array}$$

Количество отмеченных нулей 4, что меньше n=5. Значит, найденное решение не оптимально.

3) Получение минимального множества, содержащего все нули

- Отметить знаком «+» все строки, не содержащие отмеченных нулей (в примере – 3 строка).
- Отметить знаком «+» все столбцы, на пересечении которых с отмеченными строками стоит один или несколько зачеркнутых нулей (в примере – 2,4 столбцы).
- Отметить знаком «+» каждую строку, на пересечении которых с отмеченными столбцами стоит помеченный нуль (в примере – 4,5 строки).
- Повторять последние два пункта до тех пор, пока возможно получение отмеченных строк и столбцов.
- Зачеркнуть полностью каждую неотмеченную строку и каждый отмеченный столбец.

В результате получим множество с минимальным числом строк и столбцов, которое содержит все нули.

$$C^{(2)} = \begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
1 & 5 & 2 & \boxed{0} & 9 & \cancel{0} & \\
2 & 0 & 3 & 10 & 8 & 6 & + \\
3 & 2 & 0 & 5 & \cancel{0} & 3 & + \\
4 & 0 & 0 & 7 & \boxed{0} & 6 & + \\
5 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2 & + \\
\hline
 & + & + & & + & &
\end{array}$$

4) Получение дополнительного нуля

Найти минимальный элемент из не вычеркнутых элементов матрицы $C^{(2)}$ (в примере – это 2) и ***вычесть*** его из элементов ***не вычеркнутых*** столбцов и ***прибавить*** к каждому элементу ***вычеркнутых*** строк.

Эта операция приводит к вычитанию наименьшего элемента из не вычеркнутых элементов и добавлению этих элементов к числам, которые вычеркнуты дважды (стоят на пересечении вычеркнутой строки и вычеркнутого столбца). В результате получим матрицу $C^{(3)}$.

Для проверки решения на оптимальность перейти к шагу 2.

Оптимальное решение в задаче может быть не единственным.

$$C^{(3)} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 7 & 4 & \boxed{0} & 11 & \cancel{0} \\ 2 & \boxed{0} & 3 & 8 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & \boxed{0} & 3 & \cancel{0} & 1 \\ 4 & \cancel{0} & \cancel{0} & 5 & \boxed{0} & 4 \\ 5 & 2 & \cancel{0} & 3 & 4 & \boxed{0} \\ \hline \end{array}$$

В рассматриваемом примере в результате выполнения шагов 4, а затем 2, получили пять отмеченных нулей. Значит, найденное решение оптимально. Таким образом, оптимальное решение имеет вид: $x_{13}=1$, $x_{21}=1$, $x_{32}=1$, $x_{44}=1$, $x_{55}=1$, $f_{min} = 7 + 7 + 6 + 6 + 6 = 32$.

Сделаем проверку. Найдем сумму элементов, которую мы вычитали из элементов матрицы C. На первом шаге из элементов матрицы C мы вычли: 7+6+7+6+4=30. На третьем шаге мы из элементов двух не вычеркнутых столбцов вычли 2 и к элементам одной вычеркнутой строки прибавили 2, тем самым, мы вычли 2. Следовательно, окончательно мы вычли: $30+2=32 = f_{min}$.

Случай $m \neq n$.

Рассмотрим случай, когда количество работников и работ не совпадают.

- Пусть $m < n$.

Добавим к матрице C $n\text{-}m$ строк с нулевыми элементами и к полученной матрице применим алгоритм. Добавленные строки соответствуют фиктивным работам.

- Пусть $m > n$.

Добавим к матрице C $m\text{-}n$ столбцов с нулевыми элементами и к полученной матрице применим алгоритм. Добавленные столбцы соответствуют фиктивным работникам.

Решение задачи максимизации

Рассмотренный алгоритм можно применять не только для решения задачи минимизации затрат, но и для задачи максимизации эффективности, например, производительности, назначения исполнителей на работы. В этом случае c_{ij} – производительность j-го работника при выполнении i-ой работы.

Для решения этой задачи также можно использовать рассмотренный алгоритм, но предварительно необходимо преобразовать матрицу C и выполнить следующее:

- Найти максимальный элемент матрицы C: $\tilde{c}_{ij} = \max\limits_{i,j} c_{ij}$.
- Вычесть из максимального элемента соответствующие элементы матрицы C. Получим матрицу $C^{(1)}$, где $c_{ij}^{(1)} = \max\limits_{i,j} c_{ij} - c_{ij}$. Тогда задача максимизации с матрицей C будет равносильна задаче минимизации с матрицей $C^{(1)}$.
- Найти решение задачи минимизации с матрицей $C^{(1)}$.
- Полученное оптимальное назначение отметить в матрице C и найти соответствующее значение целевой функции f_{max}.

Пример 2.18. Имеются 5 рабочих мест, на которые надо распределить 5 работников. Определить максимальную суммарную эффективность, если известна матрица *C* – матрица эффективности использования работника на соответствующей работе.

$C =$

	1	2	3	4	5
1	5	4	8	5	4
2	4	7	9	12	6
3	6	8	12	7	8
4	7	10	13	13	4
5	8	4	5	4	5

Решение. Т.к максимальный элемент матрицы равен 13, то запишем матрицу $C^{(1)}$, где $c_{ij}^{(1)} = \max\limits_{i,j} c_{ij} - c_{ij}$.

$C^{(1)} =$

	1	2	3	4	5	
1	8	9	5	8	9	
2	9	6	4	1	7	
3	7	5	1	6	5	
4	6	3	0	0	9	
5	5	9	8	9	8	
	5	3	0	0	5	13

Приведем матрицу $C^{(1)}$ к виду, когда в каждом столбце и каждой строке есть хотя бы один нуль (шаг 1 алгоритма). В результате получим матрицы $C^{(2)}$ и $C^{(3)}$.

$C^{(2)} =$

	1	2	3	4	5	
1	3	6	5	8	4	3
2	4	3	4	1	2	1
3	2	2	1	6	0	0
4	1	0	0	0	4	0
5	0	6	8	9	3	0
						4

$C^{(3)} =$

	1	2	3	4	5	
1	$\boxed{0}$	3	2	5	1	+
2	3	2	3	$\boxed{0}$	1	
3	2	2	1	6	$\boxed{0}$	
4	1	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~	4	
5	~~0~~	6	8	9	3	+
	+					

Отметим нули, остальные нули вычеркнем (шаг 2). Т.к. отмеченных нулей 4, что меньше, чем n=5, то переходим к шагу 3, отмечаем строки и столбцы. Начинаем с пятой строки, которая не содержит отмеченных нулей. Затем помечаем первый столбец, т.к. на пересечении этого столбца и пятой строки стоит вычеркнутый нуль. Затем помечаем первую строку, т.к. на пересечении этой строки и помеченного первого столбца стоит отмеченный нуль. Т.к. первая строка не содержит вычеркнутых нулей, то процесс получения отмеченных строк и столбцов заканчивается. Зачеркнем каждую неотмеченную строку и каждый отмеченный столбец.

Среди не вычеркнутых элементов выберем минимальный элемент, это 1. Вычтем его из не вычеркнутых элементов и добавим к элементам, которые вычеркнуты дважды (шаг 4). Получим матрицу $C^{(4)}$, при этом мы вычли 1 из элементов четырех не вычеркнутых столбцов и прибавили ее к элементам трем вычеркнутых строк, значит, вычли 1.

$$C^{(4)} = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & \cancel{0} & 2 & 1 & 4 & \boxed{0} & + \\ 2 & 4 & 2 & 3 & \boxed{0} & 1 & \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 6 & \cancel{0} & + \\ 4 & 2 & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 4 & \\ 5 & \boxed{0} & 5 & 7 & 8 & 2 & + \\ \hline & + & & & & + & \end{array}$$

Вернемся к шагу 2. Отметим нули, остальные нули вычеркнем. Т.к. отмеченных нулей 4, что меньше, чем n=5, то переходим к шагу 3, отмечаем строки и столбцы. Начинаем с третьей строки, которая не содержит отмеченных нулей. Затем помечаем пятый столбец, т.к. на пересечении этого столбца и третьей строки стоит вычеркнутый нуль. Затем помечаем первую строку, т.к. на пересечении этой строки и помеченного пятого столбца стоит отмеченный нуль. Далее помечаем первый столбец, пятую строку. Т.к. пятая строка не содержит вычеркнутых нулей, то процесс получения отмеченных строк и столбцов заканчивается. Зачеркнем каждую неотмеченную строку и каждый отмеченный столбец.

Среди не вычеркнутых элементов выберем минимальный элемент, это 1. Вычтем его из не вычеркнутых элементов и добавим к элементам, которые вычеркнуты дважды (шаг 4). Получим матрицу $C^{(5)}$, при этом мы вычли 1 из элементов трех не вычеркнутых столбцов и прибавили ее к элементам двух вычеркнутых строк, значит, вычли 1.

Вернемся к шагу 2. Отметим нули, остальные нули вычеркнем. Т.к. отмеченных нулей 5, что равно n=5, то найденное решение является оптимальным. Таким образом, оптимальное решение имеет вид: x_{13}=1, x_{24}=1, x_{35}=1, x_{42}=1, x_{51}=1, T_{min} = 5+ + 1 + 5 + 3 + 5 = 19.

Сделаем проверку. Найдем сумму элементов, которую мы вычитали из элементов матрицы $C^{(1)}$. На первом шаге из элементов матрицы C мы вычли: 13+4=17. На третьем шаге первой итерации мы вычли 1. На третьем шаге второй итерации мы также вычли 1. Следовательно, окончательно мы вычли: 17+2=19= T_{min}.

$$C^{(5)} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \cancel{0} & 1 & \boxed{0} & 3 & \cancel{0} \\ 2 & 5 & 2 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 3 & 3 & 1 & \cancel{0} & 5 & \boxed{0} \\ 4 & 3 & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 5 \\ 5 & \boxed{0} & 4 & 6 & 7 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Отметим найденное решение в матрице C и найдем f_{max}.

$$C = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 5 & 4 & \boxed{8} & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & \boxed{12} & 6 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 7 & \boxed{8} \\ 4 & 7 & \boxed{10} & 13 & 13 & 4 \\ 5 & \boxed{8} & 4 & 5 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Окончательно имеем, f_{max}. = 8 + 12 + 8 +10 +8 = 46.

2.7. Задача о коммивояжере

Постановка задачи

Имеются n городов. Известны стоимости проезда из i-го города в j-й город, которые задаются в виде матрицы $C = \{c_{ij}\}_{nxn}$ (это может быть время или расстояние). Коммивояжер должен выбрать самый дешевый (или самый непродолжительный, или кратчайший) замкнутый маршрут, начинающийся и заканчивающийся в городе, где он живет, и проходящий через каждый из n городов, причем только один раз.

К задаче о коммивояжере сводятся многие другие практические задачи. Наиболее часто встречающейся является задача определения порядка обработки различных изделий на одном и том же оборудовании. Например, задано время переналадки оборудования при переходе от сборки одного изделия к другому. Найти порядок сборки изделий, который минимизирует общие затраты на переналадку сборочной линии.

В общем случае, когда число городов n, то число замкнутых маршрутов, удовлетворяющих указанным условиям, равно $(n$-1)!.

Математическая модель

Математическая модель задачи о коммивояжере схожа с математической моделью задачи о назначениях.

Пусть c_{ij} – стоимость проезда из i-го города в j-й город, причем $c_{ii} = \infty$ для всех i =1,…,n, т.к. нельзя непосредственно возвращаться в город, из которого выехал.

Введем переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если переезд совершается из } i - \textit{го города в } j - \textit{ый город}, \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда целевая функция минимизирует стоимость проезда по замкнутому маршруту и равна

$$f = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to min.$$

Ограничения запишутся в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1,...,n, \text{т.к. в каждый город въезжаем только один раз,} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,...,m,\ \text{т.к. из каждого города выезжаем только один раз,} \\ x_{ij} \geq 0,\ \ x_{ij} - \text{целые},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n. \end{cases}$$

Переменные x_{ij} должны выбираться таким образом, чтобы не попадать дважды ни в один из городов, пока все города не будут пройдены.

Модель этой задачи схожа с моделью транспортной задачи, поэтому для ее решения можно использовать как методы решения транспортной задачи, так и методы решения задачи о назначениях. Но мы рассмотрим для решения этой задачи специальный метод, который носит название – метод Литтла.

Метод Литтла

Метод Литтла представляет собой разновидность метода ветвей и границ (более подробное описание метода ветвей и границ смотри в разделе 2.5.2).

Пусть $C = \{c_{ij}\}_{nxn}$ – матрица затрат.

Обозначим через $S(0)$ – множество всех допустимых замкнутых маршрутов задачи о коммивояжере.

Метод Литтла основан на разбиении множества $S(0)$ на два непересекающихся подмножества и вычислении оценок для каждого из них. Далее множество с минимальной оценкой разбивается вновь на два подмножества, и вычисляются их оценки. На каждом шаге выбирается подмножество с наименьшей из всех полученных до этого шага оценок. В конце получаем один цикл, стоимость которого равна нижней границе этого подмножества, и этот маршрут является оптимальным.

Алгоритм

1) Получение нулей

Аналогично решению задачи о назначениях выделяются кратчайшие элементарные маршруты.

Для получения нижней начальной оценки r выполним приведение матрицы затрат $C = \{c_{ij}\}_{nxn}$ к виду, когда в каждой строке и каждом столбце стоит хотя бы один нуль. Данная операция называется приведением матрицы C. В результате получим матрицу C_2.

Приведение матрицы C к матрице C_2 производится путем вычитания наименьшего элемента каждой строки из всех остальных элементов данной строки и последующего вычитания наименьшего элемента каждого столбца из всех остальных элементов этого столбца.

Сумма вычитаемых в процессе приведения констант равна r. Число r представляет собой нижнюю границу затрат, меньше чем r затраты быть не могут.

Рассмотрим алгоритм на примере.

Пример 2.19. Решить задачу о коммивояжере с матрицей затрат

$C =$

	1	2	3	4	5
1	∞	4	2	5	1
2	6	∞	2	3	5
3	4	5	∞	4	7
4	2	3	4	∞	2
5	1	5	2	6	∞

Решение. Выберем в каждой строке матрицы C минимальный элемент и вычтем его из остальных элементов данной строки. Получаем матрицу C_1.

$C =$

	1	2	3	4	5	
1	∞	4	2	5	1	1
2	6	∞	2	3	5	2
3	4	5	∞	4	7	4
4	2	3	4	∞	2	2
5	1	5	2	6	∞	1
						10

$C_1 =$

	1	2	3	4	5	
1	∞	3	1	4	0	
2	4	∞	0	1	3	
3	0	1	∞	0	3	
4	0	1	2	∞	0	
5	0	4	1	5	∞	
	0	1	0	0	0	1

Выберем в каждом столбце матрицы C_1 минимальный элемент и вычтем его из остальных элементов данного столбца. В результате получим матрицу C_2.

$C_2 =$

	1	2	3	4	5
1	∞	2	1	4	0
2	4	∞	0	1	3
3	0	0	∞	0	3
4	0	0	2	∞	0
5	0	3	1	5	∞

Таким образом, $r = 10 + 1 = 11$. Меньше чем 11 затраты быть не могут.

2) Назначение штрафов

Для каждого нулевого элемента $c_{hk}=0$ матрицы C_2 определим штраф p_{hk} за не использование дуги (h, k) в виде:

$$p_{hk} = \min_{j\neq k}\{c_{hj}\} + \min_{i\neq h}\{c_{ik}\},$$

т.е. штраф равен сумме минимального элемента h-ой строки (за исключением элемента c_{hk}) и k-го столбца (за исключением элемента c_{hk}), на пересечении которых стоит выбранный нулевой элемент. Эти величины представляют собой оценки минимального штрафа, соответствующего отказу от маршрута, проходящего через дугу (h, k). Штрафы ставим над нулевыми элементами матрицы C_2.

C_2 =

	1	2	3	4	5
1	∞	2	1	4	0^1
2	4	∞	$\underline{\mathbf{0^2}}$	1	3
3	0^0	0^0	∞	0^1	3
4	0^0	0^0	2	∞	0^0
5	0^1	3	1	5	∞

3) Выбор наибольшего штрафа

Выберем нулевой элемент с наибольшим штрафом, т.е. выберем маршрут, за отказ от которого полагается максимальный штраф. Если таких нулевых элементов несколько, то выбираем из них любой. В нашем примере – это элемент (2,3).

4) Разбиение множества допустимых маршрутов на подмножества

Все множество допустимых маршрутов $S(0)$ разобьем на два подмножества:

- $S(h, k)$ – подмножество, содержащее дугу (h, k),
- $\overline{S}(h,k)$ – подмножество, не содержащее дугу (h, k).

В нашем примере это множества $S(2,3)$ и $\overline{S}(2,3)$.

5) Вычисление оценок затрат по всем маршрутам, входящим в каждое из подмножеств

- Рассмотрим множество $\overline{S}(h,k)$.

Т.к. дуга (h, k) не включена в маршрут, то для множества $\overline{S}(h,k)$ построим новую матрицу, в которой c_{hk}=∞. Для приведения новой матрицы, т.е. получения дополнительного нулевого элемента, необходимо будет вычесть минимальный элемент в строке и столбце, т.е. их сумма равна p_{hk}. В результате операции приведения получим матрицу C_3. Следовательно, помимо суммы r дополнительные затраты составят не меньше, чем p_{hk}, т.е. оценка $\overline{Q}(h,k)$ определяется равенством: $\overline{Q}(h,k) = r + p_{hk}$.

В нашем примере $\overline{Q}(2,3) = r + p_{23} = 11 + 2 = 13$.

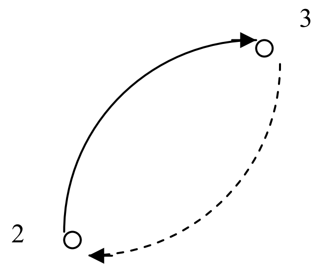
C' =

	1	2	3	4	5	
1	∞	2	1	4	0	
2	4	∞	∞	1	3	1
3	0	0	∞	0	3	
4	0	0	2	∞	0	
5	0	3	1	5	∞	
			1			2

$$C_3 = \begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline
1 & \infty & 2 & 0 & 4 & 0 \\
2 & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\
3 & 0 & 0 & \infty & 0 & 3 \\
4 & 0 & 0 & 1 & \infty & 0 \\
5 & 0 & 3 & 0 & 5 & \infty \\ \hline
\end{array}$$

- Рассмотрим множество $S(h, k)$.

Т.к. дуга (h, k) включена в маршрут, то для того, чтобы не образовался цикл, пока не просмотрены все вершины, необходимо ввести дополнительное условие: дуга (k, h) не должна входить в маршруты множества $S(h, k)$. Поэтому для множества $S(h, k)$ построим новую матрицу, в которой c_{kh}=∞ (в примере, c_{32}=∞).



В случае, когда дуга (h, k) включена в маршрут, ни одна другая дуга, начинающаяся в вершине h или заканчивающаяся в вершине k, не может использоваться в маршрутах множества $S(h, k)$, поэтому строка h и столбец k вычеркиваются из матрицы для множества $S(h, k)$.

Для приведения новой матрицы, т.е. получения дополнительного нулевого элемента, необходимо будет вычесть минимальный элемент в строке и столбце, пусть их сумма равна r_{hk}. В результате получим матрицу C_4. Следовательно, помимо суммы r дополнительные затраты составят не меньше, чем r_{hk}, т.е. оценка $Q(h, k)$. определяется равенством: $Q(h, k) = r + r_{hk}$.

В нашем примере $r_{23} = 0$, поэтому $Q(2, 3) = r + r_{23} = 11 + 0 = 11$.

$$C_4 = \begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & 4 & 5 & \\ \hline
1 & \infty & 2 & 4 & 0 & \\
3 & 0 & \infty & 0 & 3 & 0 \\
4 & 0 & 0 & \infty & 0 & \\
5 & 0 & 3 & 5 & \infty & \\ \hline
 & & 0 & & &
\end{array}$$

- Из множеств $S(h, k)$ и $\overline{S}(h,k)$ выберем то, для которого оценка $Q(h, k)$ или $\overline{Q}(h,k)$ является наименьшей.

При выборе множества $S(h, k)$ возвращаемся к шагу 2 с матрицей C_4.

При выборе множества $\overline{S}(h,k)$ возвращаемся к шагу 2 с матрицей C_3.

При повторном выполнении этого шага необходимо выбирать множество с минимальной оценкой как среди множеств $S(h, k)$ и $\overline{S}(h,k)$, так и среди ранее полученных, но не рассмотренных множеств.

Процесс построения замкнутого маршрута с минимальными затратами удобно изображать в виде дерева, которое приведено на рис.2.10.

Продолжим решение примера 2.19**.** Т.к. $Q(2, 3) < \overline{Q}(2,3)$, то выбираем множество $S(2,3)$ и переходим к шагу 2 с матрицей C_4. Вычисляем штрафы для нулевых элементов матрицы C_4.

$C_4 =$

	1	2	4	5
1	∞	2	4	0^2
3	0^0	∞	$\underline{\mathbf{0^4}}$	3
4	0^0	0^2	∞	0^0
5	0^3	3	5	∞

Выбираем наибольший штраф, это элемент – (3,4). В результате множество допустимых маршрутов разобьем на два подмножества: $S(3,4)$ и $\overline{S}(3,4)$.

Для множества $\overline{S}(3,4)$ оценка будет равна $\overline{Q}(3,4)=11+4=15$. Построим матрицу для этого множества. После приведения получим матрицу C_5.

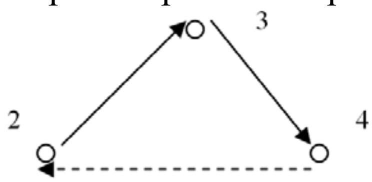
$C' =$

	1	2	4	5
1	∞	2	4	0
3	0	∞	∞	3
4	0	0	∞	0
5	0	3	5	∞
			4	

$C_5 =$

	1	2	4	5
1	∞	2	0	0
3	0	∞	∞	3
4	0	0	∞	0
5	0	3	1	∞

Построим матрицу для множества $S(3,4)$. Для того, чтобы не образовался цикл раньше, чем мы просмотрим все вершины, положим $c_{42}=\infty$.



Исключим в новой матрице третью строку и четвертый столбец.

$C' =$

	1	2	5	
1	∞	2	0	
4	0	∞	0	
5	0	3	∞	
		2		2

После приведения получим матрицу C_6.

$C_6 =$

	1	2	5
1	∞	0	0
4	0	∞	0
5	0	1	∞

Таким образом, $Q(3,4) = 11 + 2 = 13$.

Из трех полученных множеств $\overline{S}(2,3)$, $S(3,4)$, $\overline{S}(3,4)$ выберем множество с наименьшей оценкой. Таких множеств два: $\overline{S}(2,3)$, $S(3,4)$. Их оценки совпадают. Выбираем из них множество $S(3,4)$ и переходим к шагу 2 с матрицей C_6. Вычисляем штрафы для нулевых элементов матрицы C_6.

$C_6 =$

	1	2	5
1	∞	$\underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}$	0^0
4	0^0	∞	0^0
5	0^1	1	∞

Выбираем наибольший штраф. Таких элементов два. Выбираем любой из них, например, (1,2). В результате множество допустимых маршрутов разобьем на два подмножества: $S(1,2)$ и $\overline{S}(1,2)$.

Для множества $\overline{S}(1,2)$ оценка будет равна $\overline{Q}(1,2)=13+1=14$. Построим матрицу для этого множества. После приведения получим матрицу C_7.

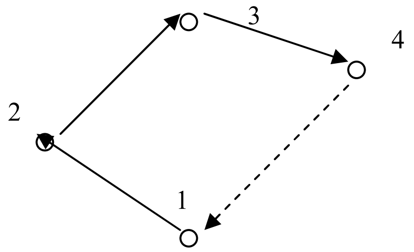
$C' =$

	1	2	5
1	∞	∞	0
4	0	∞	0
5	0	1	∞
		1	

$C_7 =$

	1	2	5
1	∞	∞	0
4	0	∞	0
5	0	0	∞

Построим матрицу для множества $S(1,2)$. Для того, чтобы не образовался цикл раньше, чем мы просмотрим все вершины, положим $c_{41}=\infty$.



Исключим в новой матрице первую строку и второй столбец.

$C' =$

	1	5	
4	∞	0	0
5	0	∞	
	0		0

После приведения получим матрицу C_8.

C_8 =

	1	5
4	∞	0
5	0	∞

Таким образом, $Q(1,2) = 13 + 0 = 13$.

Из четырех полученных множеств $\overline{S}(2,3)$, $S(1,2)$, $\overline{S}(1,2)$, $\overline{S}(3,4)$ выберем множество с наименьшей оценкой. Таких множеств два: $\overline{S}(2,3)$, $S(1,2)$. Их оценки совпадают. Выбираем из них множество $S(1,2)$ и переходим к шагу 2 с матрицей C_8. Вычисляем штрафы для нулевых элементов матрицы C_8.

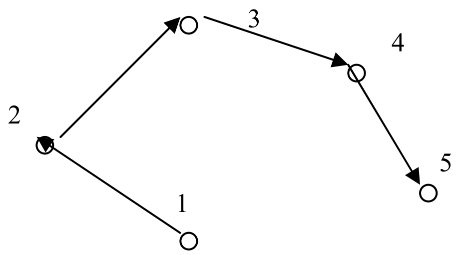
C_8 =

	1	5
4	∞	$\underline{\mathbf{0}}^{\infty}$
5	0^{∞}	∞

Выбираем наибольший штраф. Таких элементов два. Выбираем любой из них, например, (4,5). В результате множество допустимых маршрутов разобьем на два подмножества: $S(4,5)$ и $\overline{S}(4,5)$.

Для множества $\overline{S}(4,5)$ оценка будет равна $\overline{Q}(4,5)=13+\infty=\infty$.

Построим матрицу для множества $S(4,5)$.



Исключим в новой матрице четвертую строку и пятый столбец.

C'=

	1	
5	0	0
	0	0

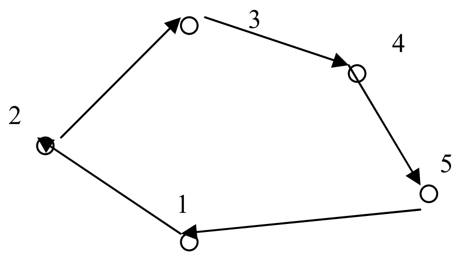
После приведения получим матрицу C_{10}.

C_{10}=

	1
5	0

Таким образом, $Q(4,5) = 13 + 0 = 13$.

В результате преобразований получили матрицу из одной дуги (5,1), присоединяя которую к построенной цепи, получим замкнутый маршрут.



Оценка множества $S(5,1)$ равна $Q(5,1) = 13 + 0 = 13$.

Эта оценка и дает минимальные затраты в данной задаче. Оптимальный маршрут имеет вид: 1-2-3-4-5-1. Можно сделать проверку: длина полученного маршрута равна L=4+2+4+2+1=13. Этот маршрут может быть не единственным. Для получения всех минимальных маршрутов необходимо вернуться к рассмотрению множества $\overline{S}(2,3)$.

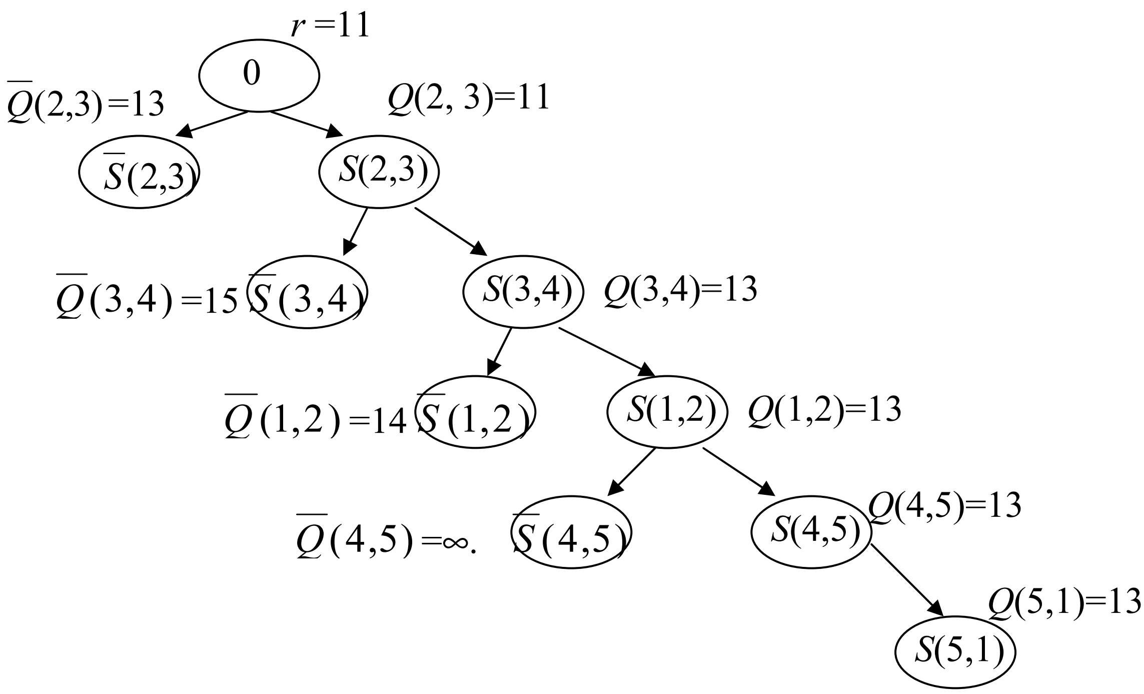


Рис. 2.10. *Процесс нахождения решения в задаче о коммивояжере*

2.8. Нелинейное программирование

Нелинейное программирование, охватывая весьма широкий круг задач, является одним из основных разделов в теории оптимальных решений.

Задачи нелинейного программирования встречаются в естественных и физических науках, технике, экономике, математике, сфере деловых отношений и т.д.

Как было рассмотрено ранее, общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти минимальное или максимальное значение функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ при условии, что ее переменные удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1,\ldots,x_n) = b_i, & i = 1,\ldots,k, \\ g_i(x_1,\ldots,x_n) \le b_i, & i = k+1,\ldots,m. \end{cases} \tag{2.24}$$

При этом предполагается, что функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g_i(x_1,\ldots,x_n)$ известны. Обычно на некоторые переменные $x_1,\ldots,x_n$ накладывается условие не отрицательности. Эти условия могут быть заданы непосредственно или содержаться в приведенных ограничениях.

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g_i(x_1,\ldots,x_n)$ – линейные функции, то мы имеем задачу линейного программирования. Любую другую задачу математического программирования условимся считать задачей нелинейного программирования.

Класс задач нелинейного программирования значительно шире класса задач линейного программирования. Тем не менее, теория нелинейного программирования еще находится в процессе развития, накопленный опыт применения алгоритмов ограничен. Следовательно, мы не сможем выделить 2-3 алгоритма, назвать их исключительно успешными и заявить, что они важны для нелинейного программирования настолько, насколько важен симплекс-метод в теории линейного программирования. Дело в том, что любой алгоритм нелинейного программирования может оказаться эффективным для решения задач одного типа и совершенно неэффективным для других задач.

Исходя из общей постановки задачи оптимизации и графического способа решения задач нелинейного программирования, можно сделать следующие выводы:

- решение задачи нелинейного программирования, в отличие от задачи линейного программирования, может достигаться в любой точке области допустимых решений, поэтому невозможно организовать перебор всех точек ОДР;

- задача нелинейного программирования может иметь как локальные, так и глобальные экстремумы; большинство методов гарантируют нахождение только локального экстремума, и только в случае задачи выпуклого программирования можно гарантировать, что найденный локальный экстремум является и глобальным.

В предыдущих разделах мы уже рассмотрели некоторые методы решения задач нелинейного программирования, а именно:

- если задача содержит две переменные или может быть приведена к двум переменным, то ее можно решить графически;

- если функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1,\ldots,n$, являются непрерывно-дифференцируемыми, ограничения – равенства и условия не отрицательности переменных отсутствуют, то мы имеем классическую задачу на условный экстремум, которая решается с помощью метода множителей Лагранжа.

2.8.1. Решение задач выпуклого программирования

Рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$\min f(x_1,\ldots,x_n),$$
$$\begin{cases} g_i(x_1,\ldots,x_n) \le b_i, \; i = 1,\ldots,m, \\ x = (x_1,\ldots,x_n) \in X, \end{cases} \tag{2.25}$$

где функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1,\ldots,m$, являются выпуклыми вниз функциями, а множество X – выпуклое множество.

Из рассмотренных свойств выпуклых множеств, выпуклых и вогнутых функций мы уже знаем, что

- ОДР задачи выпуклого программирования является выпуклым множеством,
- любой локальный минимум выпуклой функции, заданной на выпуклом множестве, является и глобальным,
- множество оптимальных решений задачи выпуклого программирования также является выпуклым, т.е., если минимум функции достигается в двух точках, то он достигается и в любой точке отрезка, который соединяет найденные решения.

Для решения задачи выпуклого программирования составим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, (g_i(x) - b_i),$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_м)$ – векторы.

Определение 2.19. Совокупность векторов $< x^*, \lambda^*>$, $x^* \in X$, $\lambda^* \ge 0$, называется ***седловой точкой*** функции Лагранжа, если для всех $x \in X$, $\lambda \ge 0$ выполняются неравенства

$$L(x^*,\lambda) \le L(x,\lambda) \le L(x,\lambda^*).$$

Теорема 2.8. [9] Если $< x^*, \lambda^*>$ – седловая точка функции Лагранжа, то x^* – решение задачи выпуклого программирования.

Согласно этой теореме, решение задачи выпуклого программирования сводится к нахождению седловых точек функции Лагранжа. Теоремы о существовании седловых точек функции Лагранжа называют теоремами Куна-Таккера, по фамилиям ученых, получивших первые результаты такого типа.

Рассмотрим теорему Куна-Таккера для частной задачи.

Пусть выпуклые скалярные функции $f(x)$ и $g_i(x)$, $i = 1,\dots,m$, $x \in R^n$, определены и непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\min f(x),$$
$$\begin{cases} g_i(x) \le b_i, \ i = 1,\dots,m, \\ x \ge 0, x \in R^n. \end{cases} \tag{2.26}$$

Задача отличается от общей задачи тем, что функции $f(x)$ и $g_i(x)$ являются непрерывно-дифференцируемыми, и отсутствует ограничение $x \in X$.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,(g_i(x) - b_i). \tag{2.27}$$

Пусть вектор x^* – решение поставленной задачи. Тогда условия теоремы Куна-Таккера могут быть дополнены аналитическими выражениями, определяющими необходимые и достаточные условия того, чтобы точка $< x^*, \lambda^* >$ была седловой точкой функции Лагранжа.

Условия Куна-Таккера запишутся в виде:

$$\begin{array}{ll} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{<x^*,\lambda^*>} \ge 0, \quad j = 1,\dots,n, & \left(\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right)_{<x^*,\lambda^*>} \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\ x_j^*\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = 0, \quad j = 1,\dots,n, & \lambda_i^*\left(\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = 0, \quad i = 1,\dots,m, \\ x_j^* \ge 0, \quad j = 1,\dots,n. & \lambda_i^* \ge 0, \quad i = 1,\dots,m. \end{array} \tag{2.28}$$

Замечание. Если решается задача максимизации

$$\max f(x),$$
$$\begin{cases} g_i(x) \le b_i, \ I = 1,\dots,m, \\ x \ge 0, x \in R^n, \end{cases} \tag{2.29}$$

то функция Лагранжа запишется в виде $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,(b_i - g_i(x))$,

а условия Куна-Таккера примут вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{<x^*,\lambda^*>} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ x_j^*\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_j}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ x_j^* \ge 0, \quad j = 1,\dots,n. \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right)_{<x^*,\lambda^*>} \ge 0, \quad i = 1,\dots,m, \\ \lambda_i^*\left(\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = 0, \quad i = 1,\dots,m, \\ \lambda_i^* \ge 0, \quad i = 1,\dots,m. \end{cases} \tag{2.30}$$

Пример 2.20. Проверить, что точка (0,8; 0,4) является оптимальным решением задачи:

$$max\ f(x) = -x_1^2 - x_2^2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1,\ x_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Решение. Составим для этой задачи функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ (\ b_i - g_i\,(x)) =$$

$$= -x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(-2x_1 - x_2 + 8) + + \lambda_3(-x_1 - x_2 + 6).$$

Покажем, что найдется такой вектор $\lambda^* \geq 0$, для которого в найденной точке (0,8;0,4) будут выполняться условия Куна-Таккера (2.29).

Запишем эти условия для данной задачи

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (-2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \leq\ 0,$$

$$x_1^*\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = x_1\left(-2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3\right)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (-2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \leq\ 0,$$

$$x_2^*\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = x_2\left(-2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3\right)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (2x_1 + x_2 - 2)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \geq\ 0,$$

$$\lambda_1^*\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = \lambda_1\left(2x_1 + x_2 - 2\right)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (-2x_1 - x_2 + 8)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \geq 0,$$

$$\lambda_2^*\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = \lambda_2\left(-2x_1 - x_2 + 8\right)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_3}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (-x_1 - x_2 + 6)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \geq 0,$$

$$\lambda_3^*\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_3}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = \lambda_3\left(-x_1 - x_2 + 6\right)\Big|_{<x^*\lambda^*>} \geq 0,$$

$x_1,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_3 \geq 0.$

Проверим, что эти условия выполняются. Действительно, т.к. $x_1 = 0{,}8$, а $x_2 = 0{,}4$, то $\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = 0$, $\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} > 0$, $\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_3}\right)_{<x^*,\lambda^*>} > 0$, значит, $\lambda_2=\lambda_3=0$.

Т.к. $x_1,\ x_2 \geq 0$, то

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (-2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (-2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

следовательно, $\lambda_1 = 0{,}8 > 0$.

Таким образом, в найденной точке условия Куна-Таккера выполняются, и $\lambda^* = (0{,}8;0;0)$. Значит, точка (0,8; 0,4) является оптимальным решением поставленной задачи.

В данном разделе мы рассмотрели основы классической теории поиска оптимального решения в нелинейных задачах с ограничениями. Классическая теория больше подходит для теоретического исследования задач, чем для практического применения. Однако в ряде случаев условия Куна-Таккера служат для построения эффективных алгоритмов. Хорошим примером применения условий Куна-Таккера является квадратичное программирование, на котором мы остановимся несколько позже.

Следует подчеркнуть, что для нелинейных задач общего вида с ограничениями-неравенствами не существуют достаточные условия экстремума в отличие от задач без ограничений и с ограничениями-равенствами, кроме задач выпуклого программирования. Также для нелинейных задач, отличных от задач выпуклого программирования, не существует приемлемого способа проверить, какой оптимум задачи был получен – локальный или глобальный.

2.8.2. Квадратичное программирование

Частным случаем задачи нелинейного программирования является задача квадратичного программирования.

Задача квадратичного программирования ставится следующим образом: найти такие значения переменных $x_1,\ldots, x_n$, доставляющие минимальное (максимальное) значение квадратичной функции

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (=)\, b_i, i = 1,\ldots, m, \\ x_j \geq 0, j = 1,\ldots, n \end{cases}.$$

Определение 2.20. ***Квадратичной формой*** относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ называется числовая функция от этих переменных, имеющая вид

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_ix_j=d_{11}x_1^2+d_{12}x_1x_2+\ldots+d_{nn}x_n^2\ .$$

Как и в общем случае решения задач нелинейного программирования для нахождения глобального экстремума задачи квадратичного программирования не существует эффективного алгоритма, если не известно, что любой локальный экстремум одновременно является и глобальным. Это означает, что задача квадратичного программирования должна относиться к классу задач выпуклого программирования.

Т.к. в задаче квадратичного программирования множество допустимых решений является выпуклым множеством, то задача квадратичного программирования будет являться задачей выпуклого программирования, если целевая функция в задаче максимизации является выпуклой вверх, а в задаче минимизации – выпуклой вниз.

Целевая функция f представляет собой сумму линейной функции и квадратичной формы. Т.к. линейная функция является как выпуклой, так и вогнутой функцией, то остается выяснить, будет ли квадратичная форма выпуклой вверх или выпуклой вниз функцией. Это зависит от типа квадратичной формы.

Определение 2.21. Квадратичная форма F называется ***положительно*** **(*отрицательно*)** ***определенной***, если для всех значений переменной $x=(x_1,\ldots,x_n)$, кроме $x=0$, выполняется условие $F(x)>0$ $(F(x)<0)$.

Определение 2.22. Квадратичная форма F называется ***положительно*** **(*отрицательно*)** ***полуопределенной***, если для всех значений переменной $x=(x_1,\ldots,x_n)$ выполняется условие $F(x)\geq 0$ $(F(x)\leq 0)$, и найдется такой набор значений переменной $x^*=(x_1,\ldots,x_n)$, $x^*\neq 0$, для которой $F(x^*)=0$.

Определение 2.23. Если квадратичная форма положительна для одних значений *x* и отрицательна для других, то она называется неопределенной.

Теорема 2.9. [21] Квадратичная форма F является выпуклой вниз (выпуклой вверх) функцией, если она является положительно (отрицательно) полуопределенной.

Замечание 2.12. Если квадратичная форма F является положительно (отрицательно) определенной, то F строго выпуклая вниз (выпуклая вверх) функция.

Теперь остановимся на вопросе, как определить тип квадратичной формы. Для этого существуют следующие утверждения.

Рассмотрим квадратичную форму $F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_i x_j$. Составим из коэффициентов квадратичной формы матрицу $Q=\{q_{ij})_{nxn}$ по следующему правилу:

$$q_{ij}=d_{ij}+d_{ji}.$$

Построенная матрица Q является симметричной, т.к. $q_{ij}=q_{ji}$ Т.к. $x=(x_1,\ldots,x_n)$, то квадратичную форму F можно записать в матричном виде

$$F=\frac{1}{2}xQx^T.$$

Нетрудно проверить, что $F'=xQ$, а $F''=Q$. Используя критерий выпуклости функций (раздел 1.4), получаем следующие утверждения.

Утверждение 2.1. [20] Квадратичная форма F является положительно (отрицательно) определенной, если матрица Q является положительно (отрицательно) определенной.

Утверждение 2.2. [20] Квадратичная форма F является положительно (отрицательно) полуопределенной, если матрица Q является положительно (отрицательно) полуопределенной.

Во всех остальных случаях квадратичная форма является неопределенной.

Пример 2.21. Определить тип квадратичной формы:

- $F_1=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2$,
- $F_2=x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$,
- $F_3=-x_1^2-x_2^2-2x_1x_2$.

Решение.

Рассмотрим квадратичную форму $F_1=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2$.

Т.к.

$d_{11}=1$,	$d_{12}=-2$,	$q_{11}=d_{11}+d_{11}=2$,	$q_{12}=d_{12}+d_{21}=-2$,
$d_{21}=0$,	$d_{22}=2$,	$q_{21}=d_{21}+d_{12}=-2$,	$q_{22}=d_{22}+d_{22}=4$

то $Q=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

Ее главные миноры равны: $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=2*4-(-2)*(-2)=4>0$. Значит, квадратичная форма F_1 является положительно определенной.

Рассмотрим квадратичную форму

$$F_2=x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3.$$

Т.к.

$d_{11}=1$,	$d_{22}=1$,	$q_{11}=d_{11}+d_{11}=2$,	$q_{12}=d_{12}+d_{21}=-4$,
$d_{12}=-4$,	$d_{23}=-6$,	$q_{21}=d_{21}+d_{12}=-4$,	$q_{22}=d_{22}+d_{22}=2$,
$d_{21}=0$,	$d_{32}=0$,	$q_{31}=d_{31}+d_{13}=2$,	$q_{32}=d_{32}+d_{23}=-6$,
$d_{13}=2$,	$d_{33}=-1$,	$q_{13}=d_{13}+d_{31}=2$,	$q_{33}=d_{33}+d_{33}=-2$,
$d_{31}=0$,		$q_{23}=d_{23}+d_{32}=-6$,	

то $Q = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

Ее главные миноры равны: $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = -12 < 0$, $\Delta_3 = |Q| = 40 > 0$. Значит, квадратичная форма F_2 является неопределенной.

Рассмотрим квадратичную форму $F_3 = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2$.

Т.к.

$d_{11}=-1$, $d_{12}=-2$, $q_{11}= d_{11} + d_{11} = -2$, $q_{12}= d_{12}+ d_{21} = -2$,
$d_{21}=0$, $d_{22}=-1$, $q_{21} = d_{21}+d_{12} = -2$, $q_{22}= d_{22} + d_{22} = -2$

то $Q = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ее главные миноры равны: $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 0$. Значит, квадратичная форма F_3 является отрицательно полуопределенной.

Для решения задач квадратичного программирования разработаны специальные методы решения. Остановимся на некоторых из них.

2.8.3. Применение условий Куна-Таккера для решения задач квадратичного программирования

Рассмотрим следующую задачу квадратичного программирования

$$\min\ f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,..., m, \\ x_j \ge 0, j = 1,..., n. \end{cases}$$

Будем предполагать, что данная задача относится к классу задач выпуклого программирования.

Построим для данной задачи функцию Лагранжа (формула (2.27))

$$L(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right).$$

Запишем условия Куна-Таккера (2.28) для данной задачи

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)_{<x^*,\lambda^*>} = c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \ge 0, \quad j = 1,..., n,$$

$$x_j^* \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)_{<x^*,\lambda^*>} = 0, \quad j = 1,..., n,$$

$$x_j^* \ge 0, \quad j = 1,..., n.$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j - b_i \le 0, \quad i = 1,...,m,$$

$$\lambda_i^*\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = 0, \quad i = 1,...,m,$$

$$\lambda_i^* \ge 0, \quad i = 1,...,m.$$

Перепишем систему линейных неравенств в виде

$$\begin{cases} -2\sum_{k=1}^{n} d_{kj}x_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \le c_j, \quad j = 1,...,n, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1,...,m. \end{cases}$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные u_j, v_i для того, чтобы привести ограничения к равенствам.

$$\begin{cases} -2\sum_{k=1}^{n} d_{kj}x_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} + u_j = c_j, \quad j = 1,...,n, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j + v_i = b_i, \quad i = 1,...,m. \end{cases} \tag{2.31}$$

Причем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = u_j, \ j = 1,...,n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -v_i, \ i = 1,...,m. \end{cases} \tag{2.32}$$

Следовательно, равенства в условиях Куна-Таккера запишутся в виде:

$$\begin{cases} x_j u_j = 0, \\ \lambda_i v_i = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Итак, мы имеем систему линейных уравнений относительно переменных x_j и λ_i. Применяя симплексные преобразования и учитывая дополнительные ограничения (2.32), найдем решение данной системы, т.е. седловую точку функции Лагранжа, а значит, оптимальное решение исходной задачи квадратичного программирования.

Дополнительные ограничения (2.32) означают, что переменные x_j и u_j, а также λ_I и v_i не могут быть одновременно отличными от нуля, поэтому они не могут одновременно находиться в базисе.

Пример 2.22. Найти решение задачи квадратичного программирования

$$max\ f(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Проверим, является ли данная задача задачей выпуклого программирования. Т.к.

d_{11}=-1, d_{12}=0, $q_{11}= d_{11} + d_{11} = -2$, $q_{12} = d_{12} + d_{21} = 0$,
d_{21}=0, d_{22}=-2, $q_{21} = d_{21}+d_{12} =0$, $q_{22} = d_{22} + d_{22} = -4$,

то $Q=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ее главные миноры равны: $\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$. Значит, квадратичная форма является отрицательно определенной, а функция $f(x)$ – выпуклой вверх. Таким образом, рассматриваемая задача является задачей выпуклого программирования.

Построим для данной задачи функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2).$$

Запишем условия Куна-Таккера для данной задачи

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \le 0,$$

$$x_1^*\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = x_1(2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (4-4x_2-2\lambda_1+\lambda_2)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \le 0,$$

$$x_2^*\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = x_2(4-4x_2-2\lambda_1+\lambda_2)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = (-x_1-2x_2+8)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} \ge 0,$$

$$\lambda_1^*\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{<x^*,\lambda^*>} = \lambda_1(-x_1-2x_2+8)\Big|_{<x^*,\lambda^*>} = 0,$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0,\ \lambda_1,\lambda_2 \ge 0.$$

Перепишем систему линейных неравенств в виде

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2 \ge 2, \\ 4x_2+2\lambda_1-\lambda_2 \ge 4, \\ x_1+2x_2 \le 8, \\ 2x_1-x_2 \le 12, \\ x_1,\ x_2 \ge 0,\ \lambda_1,\lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные u_j, v_i для того, чтобы привести ограничения к равенствам.

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2-u_1 = 2, \\ 4x_2+2\lambda_1-\lambda_2-u_2 = 4, \\ x_1+2x_2+v_1 = 8, \\ 2x_1-x_2+v_2 = 12, \\ x_1,\ x_2 \ge 0,\ \lambda_1,\lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

В силу равенств (2.32) имеем

$$x_1 u_1 = 0,$$
$$x_2 u_2 = 0,$$
$$\lambda_1 v_1 = 0.$$
$$\lambda_2 v_2 = 0.$$

Итак, мы имеем систему линейных уравнений относительно переменных x_j и λ_i. Применяя симплексные преобразования и учитывая дополнительные ограничения, найдем решение данной системы. Все вычисления приведены в таблице 2.34

Таблица 2.34.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	v_2	λ_1	λ_2	
	2	2	0	-1	0	0	0	1	2	1
	4	0	4	0	-1	0	0	2	-1	
v_1	8	1	2	0	0	1	0	0	0	8
v_2	12	2	-1	0	0	0	1	0	0	6
x_1	1	1	0	-1/2	0	0	0	1/2	1	
	4	0	4	0	-1	0	0	2	-1	1
v_1	7	0	2	1/2	0	1	0	-1/2	-1	7/2
v_2	10	0	-1	1	0	0	1	-1	-2	
x_1	1	1	0	-1/2	0	0	0	1/2	1	
x_2	1	0	1	0	-1/4	0	0	1/2	-1/4	
v_1	5	0	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	-1/2	
v_2	11	0	0	1	-1/4	0	1	-1/2	-9/4	

Т.к. базис заполнен, и свободные члены ограничений положительны, то найдено решение системы уравнений, которое удовлетворяет условиям Куна-Таккера, а значит, является оптимальным для исходной задачи. Это решение имеет вид: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $f_{max} = 3$.

Естественно возникает вопрос, является ли это решение единственным. Для того, чтобы на него ответить, достаточно посмотреть, возможен ли обмен между переменными x_j и u_j, или λ_i и v_i, т.к. одновременно переменные этих пар не могут находиться в базисе. Нетрудно заметить, что в данном примере этот обмен невозможен, т.к. на пересечении строк и столбцов, соответствующих указанным элементам, стоят отрицательные коэффициенты. Значит, найденное решение является единственным.

2.8.4. Метод Била

Метод Била представляет собой обобщение симплекс-метода. При решении задач этим методом исходным является какое-либо базисное допустимое решение системы ограничений.

Пусть задана задача квадратичного программирования

$$\min\ f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{jk} x_j x_k$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,..., m, \\ x_j \ge 0, j = 1,..., n. \end{cases}$$

Будем предполагать, что данная задача является задачей выпуклого программирования, т.е. квадратичная форма является положительно определенной (полуопределенной).

Алгоритм

1. **Найти любое базисное допустимое решение системы ограничений**.

Для его нахождения можно использовать симплексные преобразования. Предположим, что систему ограничений удалось разрешить относительно базисных переменных, например, относительно переменных $x_1,\ldots,x_m$. Выразим базисные переменные через свободные переменные $x_{m+1},\ldots,x_n$

$$x_i = b_i^{(1)} + \sum_{k=m+1}^{n} a_{ik}^{(1)} x_k, \quad i = 1,..., m, \quad b_i^{(1)} \ge 0.$$

Полученные выражения позволяют и целевую функцию f выразить через свободные переменные

$$f = c_0^{(1)} + \sum_{j=m+1}^{n} c_j^{(1)} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} d_{jk}^{(1)} x_j x_k .$$

Приравняв свободные переменные к нулю, получим первое решение:

$$x_i = b_i^{(1)}, \quad i = 1,..., m, \; x_{m+1} = \ldots = x_n = 0, \; f_1 = c_0^{(1)}.$$

2. **Проверить найденное решение на оптимальность**.

Для этого вычислим в найденной точке, т.е. когда $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, частные производные от функции f по всем свободным переменным.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = c_j^{(1)} + 2 \sum_{k=m+1}^{n} d_{jk}^{(1)} x_k \Big|_{(1)} = c_j^{(1)}, \; j=m+1,\ldots,n.$$

Если все частные производные неотрицательны, т.е. $c_j^{(1)} \ge 0$, $j=m+1,\ldots,n$, то согласно условиям Куна-Таккера, найденное решение оптимально, т.к. исходная задача рассматривается на минимум. Если найдется хотя бы одна производная, которая в найденной точке отрицательна, то за счет увеличения соответствующей свободной переменной значение функции f можно уменьшить.

Предположим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = c_m^{(1)} + 2 \sum_{k=m+1}^{n} d_{m+1,k}^{(1)} x_k \Big|_{(1)} = c_{m+1}^{(1)} < 0.$$

Будем переменную x_{m+1} вводить в базис.

3. **Перейти к новому базисному допустимому решению**.

Увеличение переменной x_{m+1} приведет, как и в задаче линейного программирования, к изменению базисных переменных, а именно, одна из базисных переменных обратится в ноль, и дальнейшее увеличение переменной x_{m+1} станет невозможным. В задачах квадратичного программирования, в отличие от задач линейного программирования, увеличение переменной x_{m+1} может повлиять не только на базисные переменные, но и на производную $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$, которая может начать увеличиваться, и при некотором значении переменной x_{m+1} станет равной нулю. Дальнейшее увеличение переменной x_{m+1} станет невозможным, т.к. при увеличении переменной x_{m+1} производная $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$ станет положительной, и целевая функция начнет возрастать. Поэтому при решении задач квадратичного программирования необходимо рассматривать два случая.

- **Первый случай**

Пусть при увеличении свободной переменной x_{m+1} первой в ноль обращается базисная переменная, например, x_1. Поэтому в качестве нового решения возьмем ту точку, в которой переменная x_1 станет свободной, а переменная x_{m+1} – базисной. Для нахождения этого решения из уравнения для переменной x_1

$$x_1 = b_1^{(1)} + \sum_{k=m+1}^{n} a_{1k}^{(1)} x_k$$

выразим переменную x_{m+1}

$$x_{m+1} = b_{m+1}^{(2)} + a_{m+1,1}^{(2)} x_1 + \sum_{k=m+2}^{n} a_{m+1,k}^{(2)} x_k \ .$$

Используя это выражение, исключим переменную x_{m+1} из выражений для остальных базисных переменных и из целевой функции

$$x_i = b_i^{(2)} + a_{i,1}^{(2)} x_1 + \sum_{k=m+2}^{n} a_{i1,k}^{(2)} x_k \ ,$$

$$f = c_0^{(2)} + \sum_{j=m+2}^{n} c_j^{(2)} x_j + c_1^{(2)} x_1 + d_{11}^{(2)} x_1^2 + \sum_{j=m+2}^{n} d_{1j}^{(2)} x_1 x_j + \sum_{j=m+2}^{n} \sum_{k=m21}^{n} d_{jk}^{(2)} x_j x_k$$

Приравняв свободные переменные нулю, получим новое решение

$$x_i = b_i^{(2)}, \quad i = 2,\dots,m+1, \ x_1 = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0, \ f_2 = c_0^{(2)}.$$

Полученное решение необходимо проверить на оптимальность, т.е. перейти к шагу 2.

- **Второй случай**

Пусть при увеличении свободной переменной x_{m+1} первой в ноль обращается производная $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$.

Введем новую переменную $u_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$, которая является неограниченной по знаку и связана со свободными переменными следующим соотношением

$$u_1 = -\ \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = -\ (c_m^{(1)} + 2\sum_{k=m+1}^{n} d_{m+1,k}^{(1)} x_k)\,.$$

Поэтому в качестве нового решения возьмем ту точку, в которой переменная u_1 станет свободной, а переменная x_{m+1} – базисной. Для получения этого решения из уравнения для переменной u_1 выразим переменную x_{m+1}

$$x_{m+1} = b_{m+1}^{(2)} + a_{m+1,1}^{(2)} u_1 + \sum_{k=m+2}^{n} a_{m+1,k}^{(2)} x_k\ .$$

Используя это выражение, исключим переменную x_{m+1} из выражений для остальных базисных переменных и из целевой функции.

Приравняв свободные переменные нулю, получим новое решение

$$x_i = b_i^{(2)},\quad i = 1,...,m+1,\ u_1 = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0,\ f_2 = c_0^{(2)}.$$

Полученное решение необходимо проверить на оптимальность, т.е. перейти к шагу 2.

Таким же образом переходим от второй точки к третьей и т.д. При этом необходимо учесть следующее. Для неограниченных по знаку переменных u_k условие Куна-Таккера имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial u_k}\Big|_{(*)} = 0\,,$$

Поэтому значение функции f можно уменьшить за счет уменьшения переменной u_k, если $\frac{\partial f}{\partial u_k}\Big|_{(*)} > 0$, и за счет увеличения переменной u_k,, если $\frac{\partial f}{\partial u_k}\Big|_{(*)} < 0$.

Кроме того, если неограниченная по знаку переменная u_k на очередной итерации стала базисной, то ее можно исключить из дальнейших рассуждений. Поэтому при переходе к последующей точке в первую очередь рассматривают возможность изменения неограниченных по знаку переменных. Если же все $\frac{\partial f}{\partial u_k}\Big|_{(*)} = 0$, то решают вопрос о включении в базис свободной ограниченной по знаку переменной.

Замечание 2.12. Задача максимизации отличается от рассмотренной задачи минимизации условием оптимальности и вводом переменных u_k . Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j} = c_j^{(1)} + 2\sum_{k=m+1}^{n} d_{jk}^{(1)} x_k\Big|_{(1)} = c_j^{(1)}$, $j=m+1,\ldots,n$, не положительны, т.е. $c_j^{(1)} \leq 0$, $j=m+1,\ldots,n$, то, согласно условиям Куна-Таккера, найденное решение оптимально. Если найдется хотя бы одна производная, которая в найденной точке положительна, то за счет увеличения соответствующей свободной переменной значение функции f можно увеличить.

Во втором случае, когда при увеличении свободной переменной x_{m+1} первой в ноль обращается производная $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$, введем новую переменную

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}.$$

Пример 2.23. Решить следующую задачу квадратичного программирования, используя метод Била.

$$min\ f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1 - 2x_1x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Ведем дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4 в систему ограничений, чтобы перейти к равенствам.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1,\ x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Проверим, является ли данная задача задачей выпуклого программирования. Т.к.

$d_{11}=1$, $d_{12}=-2$, $q_{11}= d_{11} + d_{11} = 2$, $q_{12} = d_{12} + d_{21} = -2$,
$d_{21}=0$, $d_{22}=2$, $q_{21} = d_{21}+d_{12} =-2$, $q_{22} = d_{22} + d_{22} = 4$,

то $Q = f''(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

Ее главные миноры равны: $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 8 - 4 = 4 >0$. Значит, квадратичная форма является положительно определенной, а функция $f(x)$ – выпуклой вниз. Таким образом, рассматриваемая задача является задачей выпуклого программирования.

Т.к. преобразованная система разрешена относительно переменных x_3, x_4, то выберем их в качестве базисных. Выразим базисные переменные x_3, x_4 через свободные переменные x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 6 - x_1 - x_2. \end{cases} \tag{2.34}$$

Найдем первое решение, положив свободные переменные равными нулю. Итак, **первое решение** имеет вид:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 =10, x_4 = 6,\ \ f_1 = 0.$$

Найденное решение проверим на оптимальность. Для этого вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и найдем их значения в найденной точке

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 10 - 2x_2 \Big|_{(1)} = -10 < 0, \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 4x_2 \Big|_{(1)} = 0 \cdot$$

Т.к. $\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{(1)} < 0$, то за счет увеличения переменной x_1 значение функции f можно улучшить. Определим предел возрастания переменной x_1. Для этого найдем, при каких значениях переменной x_1 базисные переменные и производная станут нулевыми. Из формул (2.34) и (2.35) находим, что

$$x_3 = 0 \text{ при } x_1 = 10,$$
$$x_4 = 0 \text{ при } x_1 = 6,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \text{ при } x_1 = 5.$$

Таким образом, при увеличении переменной x_1 первой в ноль обращается производная (второй случай). Введем дополнительную неограниченную по знаку переменную

$$u_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_1} = -(2x_1 - 10 - 2x_2).$$

Выразим из этого равенства переменную x_1, подставим полученное выражение во все ограничения и в целевую функцию, получим

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{2}u_1 + x_2, \\ x_3 = 5 + \frac{1}{2}u_1 - 3x_2, \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}u_1 - 2x_2, \end{cases} \tag{2.36}$$

$$f = -25 + \frac{1}{4}u_1^2 - 10x_2 + x_2^2 \cdot$$

Итак, **второе решение** имеет вид:

$$u_1 = x_2 = 0,\ x_1 = 5,\ x_3 = 5,\ x_4 = 1,\ f_1 = -25 .$$

Найденное решение проверим на оптимальность. Для этого вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и найдем их значения в найденной точке

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{1}{2}u_1 \Big|_{(2)} = 0, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -10 + 2x_2 \Big|_{(2)} = -10 < 0 \cdot$$

Т.к. $\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{(2)} < 0$, то за счет увеличения переменной x_2 значение функции f можно улучшить. Определим предел возрастания переменной x_2. Для этого найдем, при каких значениях переменной x_2 базисные переменные и производная станут нулевыми. Из формул (2.36) и (2.37) находим, что x_1 увеличивается с ростом x_2,

$$x_3=0 \text{ при } x_2 = \frac{5}{3},$$

$$x_4=0 \text{ при } x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=0 \text{ при } x_2 = 5.$$

Таким образом, при увеличении переменной x_2 первой в ноль обращается переменная x_4 (первый случай). Поэтому исключаем переменную x_4 из базиса.

Из выражения для переменной x_4 в системе (2.36) найдем переменную x_2, подставим полученное выражение во все ограничения и в целевую функцию, получим для третьей точки

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{2} - \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_3 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{2}x_4, \end{cases} \tag{2.38}$$

,

$$f = -\frac{119}{4} + \frac{5}{16}u_1^2 - \frac{9}{4}u_1 + \frac{9}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_4u_1 + \frac{1}{4}x_4^2.$$

Третье решение имеет вид:

$$u_1 = x_4 = 0,\ x_1 = \frac{11}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{7}{2},\ f_1 = -\frac{119}{4}.$$

Найденное решение проверим на оптимальность. Для этого вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и найдем их значения в найденной точке

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{5}{8}u_1 - \frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_4\Big|_{(3)} = -\frac{9}{4} < 0, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{9}{2} - \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}x_4\Big|_{(3)} = \frac{9}{2} > 0.$$

Т.к. $\frac{\partial f}{\partial u_1}\Big|_{(3)} < 0$, то за счет увеличения переменной u_1 значение функции f можно улучшить. Определим предел возрастания переменной u_1. Для этого найдем, при каких значениях переменной u_1 базисные переменные и производная станут нулевыми. Из формул (2.38) и (2.39) находим, что

$$x_1=0 \text{ при } u_1 = 22,$$

x_2 увеличивается с ростом u_1,

$$x_3=0 \text{ при } u_1 = 14,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}=0 \text{ при } u_1 = \frac{18}{5}.$$

Таким образом, при увеличении переменной u_1 первой в ноль обращается производная (второй случай). Введем дополнительную неограниченную по знаку переменную

$$u_2 = -\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{9}{4} - \frac{5}{8}u_1 + \frac{1}{4}x_4 .$$

Выразим из этого равенства переменную u_1, подставим полученное выражение во все ограничения и в целевую функцию, получим для следующего решения

$$\begin{cases} u_1 = \frac{18}{5} - \frac{8}{5}u_2 + \frac{2}{5}x_4 \\ x_1 = \frac{23}{5} + \frac{2}{5}u_2 - \frac{3}{5}x_4, \\ x_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}u_2 - \frac{2}{5}x_4, \\ x_3 = \frac{13}{5} + \frac{2}{5}u_2 + \frac{7}{5}x_4, \end{cases}$$

,

$$f = -\frac{169}{5} + \frac{4}{5}u_2^2 + \frac{18}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_4^2 .$$

Четвертое решение имеет вид:

$$u_2 = x_4 = 0,\ u_1 = \frac{18}{5},\ x_1 = \frac{23}{5},\ x_2 = \frac{7}{5},\ x_3 = \frac{13}{5},\ \ f_1 = -\frac{169}{5} .$$

Найденное решение проверим на оптимальность. Для этого вычислим частные производные от целевой функции по всем свободным переменным и найдем их значения в найденной точке

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{8}{5}u_2\Big|_{(4)} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{18}{5} + \frac{2}{5}x_4\Big|_{(4)} = \frac{18}{5} > 0 .$$

Т.к. $\frac{\partial f}{\partial u_2}\Big|_{(4)} = 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x_4}\Big|_{(4)} > 0$, то найденное решение является оптимальным.

Если бы потребовалась еще одна итерация, то u_1 можно было бы исключить из дальнейших рассуждений.

2.9. Задания для самостоятельной работы и контрольные вопросы

Задание 2.1. Для задачи линейного программирования из задания 1.1 выполнить следующее:

- решить ее с помощью симплекс-метода,
- составить для нее двойственную задачу,
- найти решение двойственной задачи, используя найденное решение исходной задачи.

Задание 2.2. Решить предложенные транспортные задачи. В клетках таблицы проставлены элементы матрицы стоимостей перевозок $C = \{c_{ij}\}_{mxn}$, а справа и снизу – соответственно значения величин запасов производителей и заявок потребителей.

2.2.1

14	10	2	5	10	50
11	5	4	11	3	20
9	8	12	1	18	30
1	4	9	17	18	40
15	30	65	20	10	

2.2.2

16	1	10	16	12	10
12	13	7	10	14	70
1	19	14	13	3	60
13	8	15	8	19	30
40	40	60	25	5	

2.2.3

5	3	20	7	25	10
8	12	6	12	5	48
3	1	12	2	19	27
6	3	3	1	18	46
17	33	38	21	22	

2.2.4

7	19	7	12	18	80
17	11	7	13	11	12
1	13	19	18	12	38
18	4	11	3	11	45
75	10	20	40	30	

2.2.5

10	16	3	8	15	14
3	14	12	9	1	25
2	20	4	11	5	56
7	17	13	8	15	45
40	40	20	10	30	

2.2.6

16	12	3	9	10	15
4	16	1	11	10	17
19	10	18	20	19	23
12	4	11	18	19	75
30	27	16	33	24	

2.2.7

10	9	12	7	1	30
16	4	9	19	10	70
20	17	11	1	12	50
13	14	15	7	8	20
35	30	35	45	25	

2.2.8

5	19	12	5	9	50
17	20	11	10	9	20
2	15	12	13	6	10
18	3	8	5	14	30
5	15	35	15	40	

2.2.9

5	4	20	5	14	60
19	20	2	4	5	50
9	6	8	19	1	40
7	15	20	6	11	20
10	50	40	50	20	

2.2.10

17	8	7	20	2	10
5	16	3	9	19	13
15	14	17	7	5	28
11	15	9	8	16	17
11	10	14	16	17	

2.2.11

14	13	6	12	1	20
18	20	4	2	3	30
17	5	15	10	8	70
4	12	18	13	16	71
37	26	91	24	13	

2.2.12

3	17	6	19	2	20
1	15	7	6	1	40
5	13	8	11	17	52
18	13	17	1	8	73
45	38	40	28	34	

2.2.13

14	20	7	17	8	29
18	4	14	9	7	39
17	15	16	12	20	28
19	2	1	11	7	42
25	13	60	15	25	

2.2.14

5	8	13	14	9	62
11	20	18	19	17	26
1	15	2	8	3	27
9	16	15	11	17	65
30	50	13	70	17	

2.2.17

1	3	18	7	2	53
9	4	15	20	8	45
19	17	12	8	15	38
4	3	20	2	14	15
21	30	75	10	15	

2.2.18

9	1	8	7	8	26
8	1	6	9	5	38
20	8	15	14	19	39
12	6	10	10	12	75
30	46	25	49	55	

2.2.19

10	18	12	8	13	11
17	2	18	13	7	64
4	3	1	6	12	35
12	16	8	14	15	75
55	30	20	33	47	

2.2. 20

5	13	10	5	19	15
1	10	16	15	7	40
13	17	20	18	9	14
16	10	5	6	16	76
55	30	11	30	19	

2.2.21

4	2	9	16	5	54
4	10	18	15	9	73
14	11	18	12	2	13
15	7	17	13	20	51
71	20	50	23	27	

2.2.22

6	12	5	3	11	74
13	16	9	7	12	33
17	1	16	15	5	19
20	19	18	7	18	42
28	70	15	13	42	

2.2.23

12	11	5	15	8	63
2	3	7	4	18	72
19	5	17	11	7	17
11	8	1	12	16	24
33	40	43	35	25	

2.2.24

16	17	16	12	8	37
3	6	5	14	15	40
9	8	18	2	19	55
16	5	6	18	7	63
35	40	60	45	15	

2.2.25

3	6	16	2	14	13
3	16	2	7	6	79
20	19	13	5	15	23
11	14	10	9	17	34
49	30	22	23	25	

2.2.26

19	4	18	2	14	25
19	6	10	11	8	36
5	11	1	16	13	41
3	6	2	12	17	66
34	21	19	64	30	

2.2.27

20	8	10	13	15	35
17	1	11	19	14	55
3	13	18	6	10	28
4	7	2	13	4	82
40	40	40	40	40	

2.2.28

20	12	5	1	8	15
19	3	14	7	9	76
1	4	11	14	7	12
10	15	5	16	8	88
41	27	32	53	38	

2.2.29

5	16	15	3	12	22
17	13	4	19	8	47
1	7	17	18	14	36
8	6	13	14	12	69
24	50	30	25	45	

2.2.30

15	8	10	11	14	22
5	1	3	16	14	76
2	13	10	4	5	64
19	18	14	5	12	26
44	36	29	35	44	

Задание 2.3. Для следующих задач линейного программирования составить математические модели и найти решение сформулированных задач, используя любой метод решения задач линейного программирования.

1. Малое предприятие производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 2 м^2 досок, а для изделия В – 5 м^2. Малое предприятие может получить от своих поставщиков до 1600 м^2 досок в неделю. Для изготовления каждого изделия модели А требуется 10 минут машинной обработки, а изделия модели В – 12 минут. Время машинной обработки в неделю 100 час. Сколько изделий каждой модели следует выпускать малому предприятию в неделю для получения максимальной прибыли, если каждое изделие модели А приносит 20 ден. ед. прибыли, а каждое изделие модели В – 40 ден. ед.?

2. Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил. В табл. указаны нормы расхода сырья, его общее кол-во, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на 1 т пряжи (т)		Кол-во сырья (т)
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть Капрон Акрил	0,5 a 0,5-a	0,2 0,6 0,2	600 b c
Прибыль от реализации 1т пряжи (т.р.)	1100	900	

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли, если a=0,1; b=620; c=500.

3. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров – А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м^2 материала, а для полки типа В – 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин. работы оборудования, а для изготовления одной полки типа В – 30 мин. Оборудование можно использовать 160 часов в неделю. Если прибыль от продажи одной полки типа А составляет 3 долл., а от полки типа В – 4 долл., то сколько полок надо выпускать в неделю, чтобы получить максимальную прибыль?

4. Нефтеперерабатывающий завод может использовать две различные технологии перегонки нефти для производства бензина, керосина и солярового масла. В табл. приведены данные, показывающие выход продукции, отходы, издержки производства (стоимость нефти, заработная плата, амортизация и т.п.) и загрузку оборудования в расчете на 1т переработанной нефти. Кроме того, заданы стоимость 1т готовой продукции и суточный объем заказа, который необходимо удовлетворить. Ресурс оборудования составляет 75 маш.-час в сутки. Все отходы должны пройти через очи-стные сооружения, производительность которых составляет с т/сут. Поставки нефти и спрос на всю продукцию завода не ограничены. Требуется составить суточный план производства с целью максимизации прибыли, если с=130.

Наименование продукта	Выход продукта (т)		Стоимость 1т готового продукта (т.руб)	Суточный объем заказа (т)
	Технология 1	Технология 2		
Бензин	0,6	0,3	100	117
Керосин	0,1	0,3	50	54
Соляровое масло	-	0,3	20	
Отходы	0,3	0,1		
Издержки производства(т.руб)	13	37		
Загрузка оборудования (маш.-час)	0,2	0,05		

5. Для выполнения работ P_1, P_2, P_3 сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок А и Б стоимостью соответственно c_1 и c_2 ден. ед. каждый. С использованием новой техники необходимо выполнить не менее b_1 условных единиц работы P_1, не менее b_2 условных единиц работы P_2 и не менее b_3 условных единиц работы P_3. За рассматриваемый промежуток времени с использованием трактора марки А можно выполнить a_{11} условных единиц работы P_1, a_{21} работы P_2 или a_{31} работы P_3; с использованием трактора марки Б – a_{12} условных единиц работыP_1, a_{22} работы P_2, a_{32} работы P_3. Требуется составить математическую модель задачи, позволяющую найти такой вариант приобретения тракторов той или другой марки, при котором будут выполнены все необходимые работы, а затраты на новую технику будут минимальными, и, используя метод ветвей и границ найти оптимальное решение поставленной задачи.

b_1	b_2	b_3	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	c_1	c_2
20	190	88	4	19	4	1	15	15	3	5

6. Предприятие изготовляет два вида продукции P_1 и P_2. В процессе изготовления используется сырье 4-х видов: R_1, R_2, R_3, R_4. Запасы каждого вида сырья ограничены и составляют соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 условных единиц. Известны затраты каждого вида сырья на производство единицы соответствующего вида продукции (a_{ij}). Известен доход, получаемый предприятием от реализации единицы каждого вида продукции (Cj). Необходимо составить план выпуска продукции P_1 и P_2, при котором доход предприятия от реализации всей продукции был бы максимальным. Исходные данные сведем в таблицу:

Виды сырья	Виды продукции		Запасы сырья
	P_1	P_2	
R_1	2	3	19
R_2	2	1	13
R_3	0	3	15
R_4	3	0	18
Доход	7	5	

7. Имеется два вида корма P_1 и P_2, содержащие питательные вещества (витамины) S_I, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице.

Питательное вещество (витамины)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		P_1	P_2
S_I	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма P_1 и P_2 равна 4 и 6 руб. соответственно. Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

8. На заводе ежемесячно скапливается около 14 т отходов металла, из которого можно штамповать большие и малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах составляет 600 тыс. штук, в малых – 1100 тыс. штук. Оптовая цена больших шайб составляет 11,9 тыс.руб (за тысячу штук) и малых – 5,2 тыс. руб. Расход металла на тысячу больших шайб – 22 кг, на тысячу малых – 8 кг. Для изготовления шайб используются два пресса холодной штамповки. Производительность каждого за смену – 9 тыс. штук больших шайб либо 11,5 тыс. штук малых. Завод работает в две смены. Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения плана производства шайб (из отходов завода), обеспечивающего максимальную долю в валовой продукции предприятия. За плановый период взять месяц.

9. Средства очистки пола оценивают по трем показателям:

- Очищающие свойства,
- Дезинфицирующие свойства,
- Раздражающее воздействие на кожу.

Каждый из этих показателей изменяется по линейной шкале от 0 до 100 единиц.

Продукт на рынке должен иметь по крайней мере 60 единиц очищающих свойств и 60 единиц дезинфицирующих свойств по соответствующей шкале. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Каждый продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приведены в таблице:

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие на кожу
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Сформулировать задачу нахождения смеси как задачу линейного программирования. Показать, что она может быть решена графически и найти ее решение.

10. Небольшая фабрика изготовляет два вида красок: для внутренних (I) и наружных (E) работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта – A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 т и 8 т соответственно. Расходы A и B на 1 тонну соответствующих красок приведены в таблице 1.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки.

Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тысячи долларов для краски E, 2 тысячи долларов для краски I.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов (т) на 1 т краски	
	краска E	краска I
A	1	2
B	2	1

Какое количество красок каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

11. Сформируйте вариант образования бензина АИ-80 и АИ-95, который обеспечивает максимальный доход от продажи, если имеется 5 т смеси 1-го сорта и 30 т смеси 2-го сорта. На изготовление бензина АИ-80 идет 60% смеси 1-го сорта и 40% смеси 2-го сорта, на изготовление бензина АИ-95 идет 80% смеси 1-го сорта и 20% смеси 2-го сорта. Реализуется 1т бензина АИ-80 за 5000 руб., а 1т АИ-95 – за 6000 руб.

12. Фирма занимается производством трех видов продукции и закупает сырье у двух поставщиков. Из одной тонны сырья каждого поставщика получаются различные количества продукции 3-х видов. Выход продукции из одной тонны сырья, ограничения на объем выпускаемой продукции и относительная прибыль приведены в таблице:

Продукт	Поставщик 1	Поставщик 2	Ограничения на объем продукции
1	0,2	0,3	1,8
2	0,2	0,1	1,2
3	0,3	0,3	2,4
Прибыль	5	6	

Определить количество закупаемого сырья у каждого поставщика при условии максимальной прибыли.

13. Цех для производства двух видов продукции использует четыре группы оборудования.

Оборудование	Нормы затрат оборудования на один комплект изделий (станко-час/ед.)		Фонд времени работы оборудования (станко-часы)
	1 продукция	2 продукция	
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
Прибыль (тыс.руб на (1 ед. прод.)	2	3	

Найти вариант загрузки оборудования, обеспечивающий максимальную прибыль.

14. Фирма выпускает ковбойские шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы фасона 1 вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы фасона 2. Если бы фирма выпускала только шляпы фасона 1, суточный объем производства мог бы составить 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп обоих фасонов ограничен диапазоном от 150 до 200 штук. Прибыль от продажи шляпы фасона 1 равна 8 долл., а фасона 2 – 5 долл.

Определить, какое количество шляп каждого фасона следует изготавливать, чтобы максимизировать прибыль.

15. Чтобы изготовить детали двух видов P_1 и P_2, нужно последовательно проделать ряд операций на станках M_1, M_2, M_3. Время обработки на каждом станке, приходящееся на каждую деталь, время работы станков в течение месяца, прибыль от реализации одной детали приведены в таблице:

Деталь	Время обработки (мин.)			Прибыль от одной детали (долл.)
	M_1	M_2	M_3	
P_1	11	7	6	900
P_2	9	12	16	1000
Фонд времени (мин.)	9900	8400	9600	

Сколько нужно ежемесячно производить деталей, чтобы иметь максимальную общую прибыль?

16. Для откорма скота необходимо 4 вида продуктов A,B,C,D. Фуражная промышленность производит два сорта кормов M и N, которые содержат эти составляющие.

Продукт	Содержание в корме (кг)		Требуемое кол-во продуктов ежедневно одному животному (кг)
	M	N	
A	0,1	0	0,4
B	0	0,1	0,6
C	0,1	0,2	2
D	0,2	0,1	1,7
Цена за 1 кг	10	4	

Определить, какое количество кормов того и другого сорта необходимо скармливать ежедневно каждому животному, чтобы кормление скота обошлось как можно дешевле.

17. Сформируйте вариант приготовления бензина Аи-80 и АИ-95, который обеспечивает максимальный доход от продажи, если имеется 5 т смеси 1-го сорта и 30 т смеси 2-го сорта. На изготовление бензина АИ-80 идет 60% смеси l-ro сорта и 40% смеси 2-го сорта, на изготовление бензина АИ-95 идет 80% смеси l-го сорта и 20% смеси 2-го сорта. Реализуется 1т бензина АИ-80 за 5000 руб., а l T, АИ-95- за 6000 руб.

18. Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500 туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатели	Судно	
	1	2
Пассажировместимость, чел	2000	1000
Горючее, т	12000	7000
Экипаж, чел	250	100

В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 700 человек. Определите количество судов 1 и 2 типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов 1 типа 20 млн.руб., а 2 типа – 10 млн.руб. в месяц.

19. Фирма производит и продает столы и шкафы из древесины хвойных и лиственных пород. Расход каждого вида в кубометрах на каждое изделие приведен в таблице.

	Расход древесины, $м^3$		Цена изделия, тыс.руб.
	хвойные	лиственные	
Стол	0,15	0,2	0,8
Шкаф	0,3	0,1	1,5
Запасы древесины,$м^3$	80	40	

Определите оптимальное количество столов и шкафов, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

20. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка «Колокольчик» и «Буратино». Для производства 1 л «Колокольчика» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для «Буратино» – 0,04ч, а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг специального ингредиента и 24 часа работы оборудования. Доход от продажи 1 л «Колокольчика» составляет 0,25 руб., а «Буратино» – 0,35 руб.

Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от их продажи.

21. Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел-часов в неделю. Для производства

одной детали типа А требуется 1 чел-час, а для производства одной детали типа В – 2 чел-часа. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства детали типа А уходит 2 кг полимерного материала и 3 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала – по 10 000 кг. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук. Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 1,1 руб и 1,5 руб.

22. Для подкормки растений необходимо внесение на единицу площади не менее 15 единиц минерального вещества B_1 и не менее 6 единиц минерального вещества B_2. Минеральные вещества B_1 и B_2 содержатся в имеющихся в продаже удобрениях A_1 и A_2, характеристика которых задается в таблице:

Удобрение	Стоимость единицы удобрения	Количество минерального вещества в единице удобрения	
		B_1	B_2
A_1	1	1	3
A_2	3	5	1

Определить оптимальный состав смеси удобрений, т.е. количество удобрений A_1 и A_2, которое следует вносить на единицу площади, чтобы обеспечить подкормку растений необходимым количеством минеральных веществ B_1 и B_2 с минимальными затратами.

23. Фирма решила открыть на основе технологии производства чешского стекла, фарфора и хрусталя линию по изготовлению ваз и графинов и их декорирование. Затраты сырья на производство этой продукции представлены в таблице.

Сырье	Расход сырья на производство		Поставки сырья в неделю, кг
	ваза	графин	
Кобальт	30	18	30
Сусальное 24-каратное золото	13	10	12
Оптовая цена, рvб./Расход сырья на производствошт.	700	560	

Определите оптимальный объем выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продаж, если спрос на вазы не превышает 200 шт. в неделю.

24. Малое предприятие арендовало минипекарню для производства чебуреков и беляшей. Мощность пекарни позволяет выпускать в день не более 50 кг продукции. Ежедневный спрос на чебуреки не превышает 260 штук, а на беляши – 240 штук. Суточные запасы теста и мяса, а также расходы на произыодство каждой единицы продукции приведены в таблице.

Определить оптимальный план ежедневного производства чебуреков и беляшей, обеспечивающих максимальную выручку от продажи.

	Расход на производство, кг/шт.		Суточные запасы сырья, кг
	чебурека	беляша	
Мясо	0,35	0,6	21
Тесто	0,65	0,3	22
Цена, руб.lкг	50,0	80,0	

25. Издательский дом «Геоцентр-Медиа» издает два журнала: «Автомеханик» и «Инструмент», которые печатаются в трех типографиях: «Алмаз-Пресс», «Карелия-Принт» и «Hansaprint» (Финляндия), где общее количество часов отведенное для печати и производительность печати одной тысячи экземпляров ограничены и представлены в следующей таблице:

Типография	Время печати одной тысячи экземпляров		Ресурс времени, отведенный типографией час .
	«Автомеханик»	«Инструмент»	
Алмаз- Пресс	2	14	112
Карелия-Принт	4	6	70
Hansaprint .	6	4	80
Оптовая цена руб. l шт.	16	12	

Спрос на журнал «Автомеханик» составляет 12 тысяч экземпляров, а на журнал «Инструмент» не более 7,5 тысячи экземпляров в месяц:

Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которые обеспечат максимальную выручку от продажи.

26. С Курского вокзала Москвы ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Пассажировместимость и количество вагонов железнодорожного депо станции отправления указаны в таблице.

Тип вагона		багажный	почтовый	жесткий	купейный	мягкий
Кол-во вагонов в поезде	Скорый	1	1	8	4	1
	Пассажирский	1	0	5	6	3
Пассажировместимость, чел.				58	40	32
Парк вагонов		10	8	80	70	30

Определите оптимальное количество пассажирских и скорых поездов, обеспечивающих максимальное количество ежедневно отправляемых пассажиров с вокзала.

27. Фирма производит одежду для охотников, туристов и охранных структур. Дополнительно фирма решила изготавливать шапки и подстежки из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице. Спрос на шапки составляет не более 600 шт. в месяц, а подстежек – не более 400 шт. в месяц.

Сырье	Расход сырья на производство, дм		Средний запас в месяц, дм
	шапки	подстежки	
Мех	22	140	61600
Ткань	1,5	30	15000
Оптовая цена, руб/шт	410	840	

Определить объемы производства этих изделий, обеспечивающих максимальный доход от продажи.

28. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и теле сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 долл. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл., а каждая минута теле рекламы – в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта , который обеспечивает каждая минута телерекламы в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определить оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио и телерекламой.

29. Коммерческие расчеты, произведенные студентами в деревне, привели к более выгодному использованию плодов яблок и груш путем их засушки и последующей продажи зимой в виде сухофруктов, варианты которых приведены в таблице.

Изучение спроса в магазине «Вишенка» показало, что в день продавалось 18 упаковок смеси 1 и 54 упаковки смеси 2. Из 1 кг плодов получается 200г сушеных яблок, а груш – 250 г.

Плоды	Вес в 1 кг в составе сухофруктов		Сбор плодов, кг/день
	Смесь 1	Смесь 2	
Анис (яблоки)	0,22	0,25	14
Штрейфлинг (яблоки)	0,75	0,25	16
Груши	0	0,5	12,5
Оптовая цена, руб/шт	40	50	

Определить оптимальное количество упаковок сухофруктов по 1 кг смесей первого и второго вида, обеспечивающие максимальный доход от продажи.

30. Кондитерская фабрика в Покрове освоила выпуск новых видов шоколада «Лунная начинка» и «Малиновый дождик», спрос на которые составляет соответственно не более 12 тонн и 7,7 тонны в месяц. По причине занятости трех цехов выпуском традиционных видов шоколада каждый цех может выделить только ограниченный ресурс времени в месяц. В силу специфики технологического оборудования затраты времени на производство шоколада разные и представлены в таблице.

Номер цеха	Время на производство шоколада, час.		Время, отведенное цехами под производство, час/мес
	«Лунная начинка»	«Малиновый дождик»	
1	1	7	56
2	2	3	35
3	3	2	40
Оптовая цена, руб.	8000	6000	

Определить оптимальный объем выпуска шоколада, обеспечивающий максимальную выручку от продажи.

31. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии – 60 изделий, второй линии – 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыли от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равны 30 и 20 долл. соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

32. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 долл.
2	5	20	15	3 долл.

33. Фирма производит два вида продукции – А и В. Объем сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В – 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 долл. соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

34. Денежные средства могут быть использованы для финансирования двух проектов. Проект А гарантирует получение прибыли в размере 70 центов на вложенный доллар через год. Проект В гарантирует получение прибыли в размере 2 долл. на каждый инвестированный доллар, но через два года. При финансировании проекта В период инвестиций должен быть кратным двум годам. Как следует распорядиться капиталом в 100000 долл., чтобы максимизировать величину прибыли, которую можно получить через три года после начала инвестиций? Решите данную задачу как задачу линейного программирования.

35. Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов.

36. Задан план производства во времени и по номенклатуре. Требуется за время T=6 выпустить 30 штук изделий вида P_1 и 96 штук изделий вида P_2.

Каждое изделие может производиться на двух видах оборудования *A* и *B* с различными мощностями. Производительность каждого оборудования в единицу времени на изготовление изделий каждого вида следующая:

Оборудование	Производительность	
	P_I	P_2
A	6	24
B	13	13

Стоимость единицы времени работы оборудования, затрачиваемого на единицу продукции, следующая:

Оборудование	Стоимость ед.времени	
	P_I	P_2
A	4	47
B	13	13

Определить количество изделий, выпускаемых на оборудовании за указанное время и время выпуска изделий на каждом типе оборудования при минимальных затратах.

37. Завод изготовляет изделия трех моделей (1,2,3). Для их изготовления используются два вида ресурсов (А и В), запасы которых составляют 4000 и 6000 единиц. Расход ресурсов на одно изделие каждой модели приведен в таблице.

Ресурс	Расход ресурса на одно изделие данной модели		
	1	2	3
А	2	3	5
В	4	2	7

Трудоемкость изготовления изделия модели 1 вдвое больше , чем изделия модели 2, и втрое больше, чем изделия модели 3. Численность рабочих завода позволяет выпускать 1500 изделий модели 1. Анализ условий сбыта показывает, что минимальный спрос на продукцию завода составляет 200, 200 и 150 изделий моделей 1,2,3 типов соответственно. Однако соотношение выпуска изделий моделей 1,2,3 должно быть равно 3:2:5. Удельные прибыли от реализации изделий моделей 1,2,3 составляют 30,20,50 долл. соответственно. Решите для данных условий задачу определения объемов выпуска изделий каждой модели, при которых прибыль будет максимальной.

38. Торговое предприятие реализует товары нескольких групп (*A*, *B*, *C*). Известны нормативы затрат ресурсов a_{ij} в расчете на единицу товара по каждой группе и соответственно величины ресурсов *bi*. Составить оптимальный план товарооборота по критерию максимума дохода (либо по минимуму издержек).

Ресурсы	Нормативы затрат ресурсов по продаже товаров			Ограниченные Объемы ресурсов
	A	*B*	*C*	
Рабочее время (чел.- час)	a_{11}=0,1	a_{12}=0,2	a_{13}=0,4	b_1=1100
Площадь торговых залов (м^2)	a_{21}=0,05	a_{22}= 0,02,	a_{23}=0,02	b_2=120
Издержки обращения (т.руб.)	a_{31}=3	a_{32}=1	a_{33}=2	b_3=8000
Доход в расчете на единицу товара (т.руб)	C_1=3	C_2=5	C_3=4	

39. Производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготавливаются радиаторы.

Модель радиатора	*A*	*B*	*C*	*Д*	Фонд
Необходимое количество рабочей силы (чел-час)	0,5	1,5	2	1,5	100
Необходимое количество стального листа (м^2)	4	2	6	8	80
Прибыль от продажи одного радиатора, долл	5	5	12,5	10	

Решите эту задачу с максимизацией прибыли в качестве целевой функции.

40. Фирма производит три вида продукции *A*, *B*, *C*, для выпуска каждого из которых требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах 1,2,3,4.

Вид продукции	Время обработки, ч				Прибыль, дол.
	1	2	3	4	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Пусть время обработки на устройствах – соответственно 84, 42, 21 , и 42 ч. Определите, какую продукцию и в каких количествах следует производить, чтобы получить максимальную прибыль. (Можете предположить, что рынок сбыта для каждого продукта неограничен; временем, требуемым для переключения устройства в зависимости от вида продукции, можно пренебречь; рассмотрите только задачу максимизации прибыли.).

41. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20000 цыплят, которые выращиваются до 8- недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Хотя недельный расход корма для зависит от их возраста, в дальнейшема будем считать, что в среднем (за 8 недель) он составляет 1 фунт (445 гр).

Для того чтобы цыплята достигли к восьмой неделе необходимых весовых кондиций, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. Обычно перечень ингредиентов достаточно широк, но мы ограничимся только тремя ингредиентами:

известняком, зерном и соевыми бобами. Требования к питательности рациона сформулируем в упрощенном виде, учитывая только три вида питательных веществ: кальций, белок и клетчатку. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента.

Ингредиент	Содержание питательных веществ, Фунт/(фунт ингредиента)			Стоимость, Долл/фунт
	кальций	белок	клетчатка	
Известняк	0,38	-	-	0,04
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,4

Заметим, что известняк не содержит ни белка, ни клетчатки. Смесь должна содержать:

Не менее 0,8%, но не более 1,2% кальция;

Не менее 22% белка;

Не более 5% клетчатки.

Требуется определить количество (в фунтах) каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

42. Фирма занимается составлением диеты, содержащей по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 1 0 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах на 1 кг (или 1 л) пяти имеющихся продуктов?

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

43. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами A и B. Машина A спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина B – для литровых, но каждая из них может использоваться для обоих типов бутылок с некоторой потерей эффективности в соответствии с приведенными в таблице сведениями о работе машин.

Машина	Количество бутылок, производимых за 1 мин	
	Пол-литровые бутылки	Литровые бутылки
A	50	20
B	40	30

Каждая из машин работает ежедневно по 6 часов при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а от литровой – 10центов. Недельная продукция не может превосходить 50000 л; рынок принимает не более 44000 пол-литровых бутылок и 30000 литровых.

Производитель хочет максимизировать свою прибыль при имеющихся средствах. Сформулируйте задачу в виде линейного программирования и найдите оптимальное решение.

44. Производитель элементов цельного отопления производит радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготавливаются радиаторы.

Модель радиатора	A	B	C	D	Запас
Необходимое количество рабочей силы, чел-час.	0,5	1,5	2	1,5	100
Необходимое количество стального листа, м^2	4	2	6	8	200
Прибыль от продажи одного радиатора, долл.	5	5	12,5	10	

Решите эту задачу с максимизацией прибыли в качестве целевой функции.

45. Четыре сталелитейных завода 1,2,3,4 производят еженедельно соответственно 950, 300, 1350, 450 т стали определенного сорта. Стальные болванки должны быть переданы потребителям A,B,C,D,E, еженедельные запасы которых составляют соответственно 250, 1000, 700, 650, 450 т стали.

Стоимость транспортировки от заводов к потребителям в тоннах приведена в таблице:

Завод	Потребитель				
	A	B	C	D	E
1	12	16	21	19	32
2	4	4	9	5	24
3	3	8	14	10	26
4	24	33	36	34	49

Какой нужно составить план распределения болванок, чтобы минимизировать общую стоимость?

46. Завод изготовляет изделия трех моделей (1,2,3). Для их изготовления используются два вида ресурсов (A и B), запасы которых составляют 4000 и 6000 единиц. Расход ресурсов на одно изделие каждой модели приведен в таблице.

Ресурс	Расход ресурса на одно изделие данной модели		
	1	2	3
A	2	3	5
B	4	2	7

Трудоемкость изготовления изделия модели 1 вдвое больше, чем изделия модели 2, и втрое больше, чем изделия модели 3. Численность рабочих завода позволяет выпускать 1500 изделий модели 1. Анализ условий сбыта показывает, что минимальный спрос на продукцию завода составляет 200, 200 и 150 изделий моделей 1,2,3 типов соответственно. Однако соотношение выпуска изделий моделей 1,2,3 должно быть равно 3:2:5. Удельные прибыли от реализации изделий моделей 1,2,3 составляют 30,20,50 долл. соответственно. Решите для данных условий задачу определения объемов выпуска изделий каждой модели, при которых прибыль будет максимальной.

47. Предприятие изготавливает два вида изделий А и В, причем каждый вид изделий может быть изготовлен двумя технологическими способами. Определить оптимальный объем выпуска продукции, если затраты труда и материалов на единицу продукции, их запасы и доход с единицы продукции заданы в таблице

	На ед. продукции А		На ед. продукции В		Запасы
	1 способ	2 способ	1 способ	2 способ	
Кол-во труда	1	1	1	1	15
Кол-во материала 1	7	5	3	2	120
Кол-во материала 2	3	3	10	15	100
Доход с единицы продукции	4	5	9	11	

48. Предприятие выпускает телевизоры трех различных моделей А, В, С. Каждое изделие приносит доход в размере 8, 15, .25 долл. соответственно. План производства. на период времени следующий: 100 телевизоров модели А, 150 – модели В, 75 – модели С.

В течение планируемого периода на операции может быть израсходовано 150 час, 200 час, 60 часов соответственно.

Пооперационное время изготовления изделий приводится в таблице:

Операции	Время обработки (час)		
	А	В	С
1	0,3	0,35	0,5
2	0,4	0,5	0,8
3	0,1	0,15	0,3

Определить план производства, дающий максимальный эффект.

49. Для производства комплектной продукции требуется изготовить два вида изделий. Их изготовление может осуществляться на каждом из пяти типов предприятий. Количество предприятий и их производственные мощности указаны в таблице:

Тип предприятия	Число предприятий	Производственная мощность одного предприятия	
		по изд. №1	по изд. №2
№1	5	100 тыс.	15 тыс.
№2	3	400 тыс.	200 тыс.
№3	40	20 тыс.	25 тыс.
№4	9	200 тыс.	50 тыс.
№5	2	600 тыс.	250 тыс.

Сколько предприятий каждого типа надо поставить на производство первого и сколько на производство второго изделия, чтобы обеспечить максимальный выпуск комплектов, если в каждый комплект должно входить два изделия первого вида и одно второго.

50. Промышленная фирма производит изделие, представляющее собой сборку из трех различных узлов. Эти узлы изготовляются на двух заводах.

Из-за различий в составе технологического оборудования производительность заводов по выпуску каждого из трех видов узлов неодинакова. В приводимой ниже таблице содержатся исходные данные, характеризующие как производительность заводов по выпуску каждого из узлов, так и максимальный суммарный ресурс времени, которым в течение недели располагает каждый из заводов для производства этих узлов.

Завод	Максимальный недельный фонд времени, час	Производительность, узел/час		
		Узел 1	Узел 2	Узел 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Идеальной является ситуация, когда производственные мощности обоих заводов используются таким образом, что в итоге обеспечивается выпуск одинакового количества каждого из видов узлов. Однако этого трудно добиться из-за различий в производительности заводов. Более реальная цель состоит, по-видимому, в том, чтобы максимизировать выпуск изделий, что, по существу, эквивалентно минимизации дисбаланса, возникающего вследствие некомплектности поставки по одному или двум видам узлов.

Требуется определить еженедельные затраты времени на производство каждого из трех видов узлов на каждом заводе, не превышающие в сумме временные ресурсы каждого завода и обеспечивающие максимальный выпуск изделий.

51. Рассмотрите задачу распределения самолетов трех типов по четырем маршрутам. Характеристики парка самолетов и движения по авиалиниям приведены в таблице.

Решите задачу линейного программирования, в которой требуется минимизировать сумму эксплуатационных расходов и потерь из-за неудовлетворенного спроса.

Тип самолета	Вместимость (число пассажиров)	Количество самолетов	Количество рейсов в сутки на каждом маршруте			
			1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Суточный пассажиропоток			100	200	90	120

Стоимостные характеристики авиаперевозок:

Тип самолета	Эксплуатационные расходы на 1 рейс по данному маршруту, долл.			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Убыток от неудовлетворенного спроса (на одного неперевезенного пассажира)	40	50	45	70

52. Для получения двух сплавов A и B используются четыре металла 1,2,3,4. Требования к содержанию этих металлов в сплавах A и B приведены ниже.

Сплав	Требования к содержанию металлов
A	Не более 80% металла 1 Не более 30% металла 2 Не менее 50% металла 4
B	От 40 до 60% металла 2 Не менее 30% металла 3 Не более 70% металла 4

Характеристики и запасы руд, из которых получаются металлы 1,2,3 и 4 указаны в таблице.

Руда	Минимальный запас, т	Состав, %					Цена, долл.
		1	2	3	4	Другие компоненты	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Пусть цена 1 т сплава A равна 200 долл., а 1 т сплава B – 300 долл. Решите задачу ЛП, в которой требуется максимизировать прибыль от продажи сплавов A и B. (Указание: обозначьте через x_{ijk} количество тонн металла i, получаемого из руды j и используемого для изготовления сплава k).

Задание 2.4. Решить задачи задания 2.2 как транспортные задачи по критерию времени, рассматривая заданную матрицу как матрицу T.

Задание 2.5. Решить следующие задачи целочисленного линейного программирования, используя

- метод Гомори;
- метод ветвей и границ.

2.5.1

$\min f = -x_1 - x_2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9,$

$x \ \geq 0, x_j - целые, j = 1,2,3,4.$

2.5.2

$\max f = 2x_1 + 2x_2 + 10$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 5,$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$

$x_j \geq 0, x_j - целые, j = 1,2,3,4.$

2.5.3

$\min f = -x_1 + x_4$

$-2x_1 + x_4 + x_5 = 1,$

$x_1 + x_2 - 2x_4 = 2,$

$x_1 + x_3 + 3x_4 = 3,$

$x_j \geq 0, x_j - целые, j = 1,...,5.$

2.5.4

$\min f = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4$

$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$

$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$

$3x_1 + x_4 + x_5 = 4,$

$x_j \geq 0, x_j - целые, j = 1,...,5.$

2.5.5

$\min f = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4$

$x_1 + 2x_3 + x_4 = 8,$

$x_1 + x_2 - x_4 = 4,$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,5.$

2.5.6

$\min f = x_1 + 2x_2 + x_5$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$

$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$

$x_3 - x_4 + x_5 = 1,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,5.$

2.5.7

$\min f = -x_1 - x_2$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 5,$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,4.$

2.5.8

$\min f = -4x_1 - 3x_2$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8,$

$4x_1 + x_2 + x_4 = 10,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,4.$

2.5.9

$\min f = -x_3$

$-6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6,$

$7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4,$

$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,5.$

2.5.10

$\min f = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 10,$

$2x_1 + 4x_3 \geq 14,$

$2x_2 + x_3 \geq 7,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,2,3.$

2.5.11

$\min f = -2x_1 - x_2 - x_3$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16,$

$x_1 + x_2 \leq 7,$

$3x_1 + 2x_3 \geq 18,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,2,3.$

2.5.12

$\min f = -4x_1 - 3x_2$

$4x_1 + x_2 \leq 44,$

$x_1 \leq 22,$

$x_2 \leq 18,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,2.$

2.5.13

$\min f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

$x_1 + x_4 + 6x_5 = 9,$

$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2,$

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 6,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,5.$

2.5.14

$\max f = 3x_1 + 4x_2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8,$

$x_1 + 4x_2 + x_4 = 10,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,4.$

2.5.15

$\min f = x_1 + x_2,$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 6,$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,4.$

2.5.16

$\min f = x_1 + 2x_2 + x_5,$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$

$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$

$x_3 - x_4 + x_5 = 1,$

$x_j \geq 0, x_j - \textit{целые},\ j = 1,...,5.$

2.5.17

$\max f = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$

$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6,$

$x_2 + x_3 - x_4 = 4,$

$2x_1 + x_3 + x_4 = 8,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,...,4.$

2.5.18

$\max f = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4$

$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$

$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$

$3x_2 + x_4 + x_5 = 4,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,...,5.$

2.5.19

$\max f = x_1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$

$-4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4,$

$5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,...,5.$

2.5.20

$\max f = x_1,$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 12,$

$3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,...,4.$

2.5.21

$\max f = 3x_1 + 4x_2$

$2x_1 + 3x_2 \leq 1200,$

$0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 160,$

$x_1 + x_2 \leq 450$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2.$

2.5.22

$\max f = 3x_1 + 2x_2$

$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 20,$

$x_1 + 3x_2 \leq 10,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3.$

2.5.23

$\max f = 3x_1 + 3x_2$

$x_1 + 3x_2 \geq 6,$

$3x_1 + 2x_2 \leq 36,$

$x_3 \leq 13$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2.$

2.5.24

$\max f = x_1 + x_2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5,$

$x_2 \leq 2,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3.$

2.5.25

$\min f = -x_1 - x_2$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 36,$

$x_1 \leq 13,$

$3x_1 + x_3 \geq 6,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3.$

2.5.26

$\min f = -9x_1 - 11x_2,$

$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 10,$

$x_1 \leq 5,$

$x_1 + 2x_3 \leq 8,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3.$

2.5.27

$\min f = -4x_1 - 3x_2,$

$4x_1 + x_2 \leq 10,$

$2x_1 + 3x_2 \leq 8,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2.$

2.5.28

$\min f = -x_1 - x_2,$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$

$x_1 \leq 2,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3.$

2.5.29

$\min f = x_2 - x_3,$

$3x_1 + x_2 + x_4 = 3,$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, \ j = 1,2.$

2.5.30

$\min f = -x_2,$

$3x_1 + x_2 + x_3 = 12,$

$-8x_1 + 3x_2 \leq 24,$

$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, \ j = 1,2,3.$

Задание 2.6. Решить предложенные задачи о назначениях, где матрица C - матрица прибыли.

2.6.1

5	2	9	6	9	5	6
7	2	8	4	4	8	7
6	3	5	5	10	1	5
1	4	4	2	11	2	7
7	2	3	6	12	3	1
12	11	1	7	10	4	11
13	14	15	8	13	13	17

2.6.2

5	8	4	8	8	6	7
5	2	1	6	9	9	0
1	4	15	1	7	1	7
12	4	1	2	5	2	8
4	9	12	12	2	14	8
1	3	19	10	13	1	4
4	6	18	3	7	3	0

2.6.3

3	10	5	9	16	8	17
6	8	11	8	18	19	20
7	13	10	3	4	14	18
5	9	6	21	12	17	22
5	*4*	11	6	13	14	11
17	7	12	13	16	17	9
13	0	8	8	10	12	17

2.6.4

5	13	6	10	13	8	9
10	9	7	11	8	12	11
11	5	8	12	4	18	4
12	6	9	8	5	8	5
9	4	4	5	6	6	7
11	8	7	4	7	3	8
6	5	8	12	13	9	14

2.6.5

6	5	9	10	7	12	8
9	7	11	6	8	11	10
8	10	7	8	10	7	4
5	6	10	5	6	11	12
4	9	8	9	4	1	2
5	6	10	11	10	12	5
4	11	5	4	5	12	13

2.6.6

4	5	9	6	6	14	6
8	12	4	13	16	15	16
2	15	8	10	17	7	9
14	8	4	9	5	6	7
3	5	4	12	10	11	13
10	9	11	5	6	12	8
7	12	8	12	8	11	10

2.6.7

7	10	8	11	7	15	12
1	2	5	6	10	18	4
8	11	9	2	16	3	6
5	2	5	14	3	10	5
8	7	6	7	13	8	14
6	8	17	10	11	9	5
15	18	5	9	12	6	10

2.6.8

8	4	5	18	6	1	9
9	5	7	2	4	8	4
1	10	5	6	12	9	6
2	4	7	13	10	8	5
12	3	11	9	12	10	11
5	13	8	2	3	12	13
7	8	4	18	5	6	7

2.6.9

18	4	6	7	8	11	5
13	5	12	13	5	6	8
10	13	14	17	3	4	2
5	6	5	6	4	15	3
19	20	10	7	8	6	7
12	13	1	13	15	8	7
4	1	2	2	4	16	9

2.6.10

13	4	5	12	3	6	14
7	1	9	4	11	2	10
12	4	7	6	8	7	4
5	4	6	1	7	8	6
8	9	9	7	10	3	5
7	4	4	5	4	3	6
15	3	3	13	5	6	16

2.6.11

1	17	1	4	5	18	2
21	5	6	7	8	6	16
9	10	9	14	10	15	8
14	2	3	13	6	7	15
10	8	12	1	11	2	4
6	7	1	10	3	8	6
3	19	4	12	13	20	4

2.6.12

12	13	8	5	5	16	17
1	2	6	7	8	3	4
6	7	2	16	3	9	10
4	5	15	20	19	11	4
10	1	2	18	17	3	6
5	6	4	10	5	7	8
18	19	11	12	14	14	15

2.6.13

1	4	5	8	9	4	5
5	6	7	8	10	11	12
4	18	4	7	6	7	8
5	4	3	6	10	4	5
9	10	8	9	5	12	6
6	8	11	12	7	8	9
12	4	5	6	2	5	4

2.6.14

1	5	7	10	2	3	4
8	2	5	4	7	10	1
8	3	10	17	8	2	3
5	6	7	10	1	3	7
4	8	12	5	4	5	6
10	15	1	2	5	6	7
8	7	12	6	18	5	4

2.6.15

5	1	4	2	10	6	7
4	5	10	4	5	8	10
15	12	14	15	4	5	7
4	8	9	10	12	13	14
5	4	7	8	9	10	5
7	8	4	3	5	6	7
9	10	5	8	11	4	3

2.6.16

3	5	10	7	8	10	12
4	6	7	4	5	6	7
12	13	11	6	7	8	9
10	4	5	8	9	4	5
8	7	9	5	6	7	11
1	3	12	1	4	5	6
4	10	11	13	15	16	8

2.6.17

20	5	12	13	4	3	8
9	10	11	12	13	14	15
8	4	5	4	6	7	8
10	5	7	3	4	5	4
3	12	13	4	6	7	8
9	4	8	9	8	5	4
11	4	3	15	4	5	14

2.6.18

8	4	3	1	12	13	5
4	2	5	3	4	5	5
1	4	2	5	6	7	8
9	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
5	6	7	8	9	10	4
6	1	2	13	3	4	5

2.6.19

1	5	2	10	3	12	4
6	7	8	9	10	12	5
8	3	4	5	6	8	9
1	2	13	4	5	6	7
8	9	4	5	6	8	10
3	4	8	7	12	13	1
4	5	1	2	3	8	10

2.6. 20

4	18	17	7	3	2	1
5	6	1	2	14	3	12
6	8	7	12	10	8	6
7	12	5	4	6	7	15
3	1	2	4	17	3	4
6	12	4	5	6	8	9
11	2	1	4	6	7	12

2.6.21

7	8	4	3	5	6	1
3	2	5	6	7	2	13
12	4	5	7	8	2	4
2	1	10	7	6	5	12
5	6	12	13	15	16	3
4	18	2	5	7	8	12
4	5	6	2	3	12	1

2.6. 22

20	5	1	8	9	10	18
16	12	4	5	6	7	8
13	15	16	8	9	10	6
7	8	12	5	7	8	9
5	7	9	10	11	12	6
12	5	7	8	9	4	5
7	4	3	4	5	1	2

2.6.23

5	4	3	1	2	5	4
8	16	12	3	5	4	2
6	7	8	9	10	6	7
2	3	7	8	4	3	12
6	7	1	2	7	8	5
3	4	7	6	8	9	7
5	8	6	2	1	4	5

2.6.24

12	4	5	6	7	2	1
5	7	8	9	10	11	8
6	3	4	5	6	7	9
8	7	2	11	12	13	2
6	5	1	5	6	7	6
1	4	5	7	12	4	5
8	9	14	5	6	7	4

2.6.25

1	5	3	4	7	6	10
12	2	4	7	8	9	10
13	3	5	6	4	3	2
1	4	5	8	9	12	15
25	5	1	3	8	10	6
7	3	6	1	6	5	1
12	5	8	5	10	4	26

2.6. 26

3	2	4	7	5	8	5
4	8	5	6	6	9	6
5	10	7	4	7	4	7
10	4	13	8	3	8	3
12	3	4	9	2	10	14
5	7	6	12	1	7	5
1	10	11	8	4	2	8

2.6.27

1	4	5	6	7	15	2
3	5	7	9	5	12	10
4	7	8	10	7	3	4
6	8	12	12	9	6	1
10	2	3	4	12	7	4
1	9	4	7	15	2	8
2	11	6	10	4	5	10

2.6.28

4	5	6	7	9	4	1
3	7	10	6	8	5	7
4	8	5	7	16	8	9
5	5	3	5	4	2	3
3	6	4	2	5	4	5
1	7	2	6	8	1	2
4	8	1	7	9	6	7

2.6.29

0	4	8	5	7	5	2
4	8	6	7	8	4	6
1	5	24	8	8	11	16
2	2	6	14	6	7	2
6	2	14	4	2	8	7
4	2	4	8	9	13	10
7	21	2	9	14	16	3

2.6.30

5	4	8	5	4	8	9
4	7	9	12	6	7	8
6	8	12	7	8	9	12
7	10	13	13	4	5	6
8	4	5	4	5	6	7
9	5	6	8	9	10	12
10	12	7	4	5	6	7

Задание 2.7. Решить предложенную задачу о коммивояжере, где заданная матрица C – матрица затрат.

2.7.1

∞	14	40	33	16	51
48	∞	34	4	11	24
57	35	∞	24	38	52
30	50	44	∞	9	31
18	42	24	31	∞	30
1	38	31	19	32	∞

2.7.2

∞	31	15	19	8	55
19	∞	22	31	7	35
25	43	∞	53	57	16
5	50	49	∞	39	9
24	24	33	5	∞	14
34	26	6	3	36	∞

2.7.5

∞	4	39	22	10	47
58	∞	56	18	4	35
34	29	∞	17	57	18
52	4	22	∞	15	37
41	44	25	11	∞	32
11	6	19	2	58	∞

2.7.6

∞	41	60	39	46	10
31	∞	59	16	1	51
29	51	∞	14	42	50
35	12	52	∞	16	26
16	39	15	60	∞	57
15	30	38	47	36	∞

2.7.7

∞	19	25	11	2	35
37	∞	26	58	21	43
10	50	∞	39	22	3
38	39	24	∞	38	45
27	9	32	9	∞	2
33	48	60	53	1	∞

2.7.8

∞	58	56	13	21	54
21	∞	58	43	56	14
4	46	∞	38	7	22
44	56	42	∞	6	60
3	34	36	11	∞	17
59	47	40	60	13	∞

2.7.9

∞	5	8	12	25	36
24	∞	23	20	18	15
30	19	∞	18	3	9
11	36	27	∞	35	25
16	21	28	29	∞	31
30	33	42	53	14	∞

2.7.10

∞	39	45	2	51	33
30	∞	20	33	40	35
54	16	∞	55	22	56
19	36	25	∞	16	43
29	8	8	12	∞	25
16	47	31	14	8	∞

2.7.11

∞	22	26	56	38	60
34	∞	12	51	37	27
45	33	∞	44	47	27
39	7	16	∞	57	8
35	56	40	58	∞	27
9	20	36	31	18	∞

2.7.12

∞	16	13	35	41	52
19	∞	29	31	26	18
57	51	∞	44	51	7
5	40	32	∞	14	16
33	41	28	3	∞	53
19	54	24	10	41	∞

2.7.15

∞	50	33	18	5	44
41	∞	19	24	20	32
12	23	∞	42	14	25
42	51	2	∞	43	5
27	28	31	33	∞	1
12	37	50	21	21	∞

2.7.16

∞	13	40	28	60	52
58	∞	11	39	22	56
22	15	∞	23	15	19
25	47	51	∞	25	54
47	46	18	42	∞	52
44	49	50	52	29	∞

2.7.17

∞	44	39	22	10	47
58	∞	56	18	4	35
34	29	∞	17	37	18
52	4	28	∞	15	37
41	44	25	11	∞	32
11	6	19	2	58	∞

2.7.18

∞	26	60	39	46	10
31	∞	59	16	1	51
29	41	∞	14	42	50
25	12	52	∞	16	26
16	39	15	64	∞	57
15	30	38	47	37	∞

2.7.19

∞	17	25	11	2	35
37	∞	26	58	21	43
10	60	∞	39	22	3
38	39	24	∞	38	45
27	9	32	9	∞	2
33	58	60	53	16	∞

2.7.20

∞	18	56	13	21	54
21	∞	38	43	56	14
4	42	∞	38	7	22
44	56	22	∞	6	60
3	34	36	11	∞	17
19	47	50	45	13	∞

2.7.21

∞	25	8	12	25	36
24	∞	23	20	18	15
30	12	∞	18	3	9
51	34	27	∞	55	25
16	21	28	29	∞	31
30	33	42	53	24	∞

2.7.22

∞	33	45	2	51	33
30	∞	20	33	40	35
14	16	∞	55	22	56
19	36	25	∞	16	43
29	8	18	12	∞	25
16	17	31	14	8	∞

2.7.23

∞	22	26	56	38	60
36	∞	12	51	37	27
45	33	∞	34	47	37
39	7	16	∞	37	8
35	56	40	58	∞	26
9	29	36	31	18	∞

2.7.24

∞	16	13	35	41	52
15	∞	29	31	26	18
17	51	∞	41	27	7
25	40	32	∞	14	16
35	31	28	3	∞	53
19	54	24	10	31	∞

2.7.25

∞	15	43	38	10	45
43	∞	18	6	49	40
41	42	∞	29	1	48
33	44	20	∞	20	21
40	17	16	16	∞	15
33	4	37	34	36	∞

2.7.26

∞	44	60	54	29	39
13	∞	46	19	41	6
36	7	∞	37	41	3
11	4	41	∞	14	26
15	12	38	41	∞	24
19	6	45	57	11	∞

2.7.27

∞	61	27	54	46	5
42	∞	11	32	28	21
36	35	∞	33	22	33
46	14	59	∞	19	59
48	58	11	14	∞	47
16	50	35	19	27	∞

2.7.28

∞	66	46	39	3	40
47	∞	50	46	16	49
48	50	∞	42	19	16
24	44	47	∞	23	33
38	17	6	51	∞	26
29	59	55	34	18	∞

2.7.29

∞	14	17	25	54	37
57	∞	43	2	13	34
7	24	∞	8	9	7
13	28	30	∞	56	18
26	44	4	52	∞	52
18	5	49	14	12	∞

2.7.30

∞	6	56	35	48	29
34	∞	46	46	55	26
29	31	∞	32	13	42
26	34	12	∞	17	7
28	35	40	13	∞	47
60	25	59	36	31	∞

2.7.31

На сборочном конвейере производится сборка четырёх видов изделий: A, B, C, D. Стоимость переналадки сборочной линии при переходе от одной модели к другой задана матрицей:

	A	B	C	D
A	0	15	8	17
B	13	0	21	11
C	12	10	0	30
D	13	21	23	0

С конвейера сходит по одной партии изделий каждого вида, после чего происходит возврат к первой модели. Определить порядок сборки изделий, который минимизирует общие затраты на переналадку линии.

2.7.32

На прокатном стане должны быть обработаны партии изделий видов А, Б, В, Г. Продолжительность переналадки прокатного стана при переходе от обработки одной детали к обработке другой детали задана следующей матрицей:

	А	Б	В	Г
А	0	6	9	7
Б	9	0	5	8
В	6	5	0	3
Г	8	5	4	0

Определить оптимальную последовательность обработки деталей на прокатном стане, которая минимизирует затраты времени на переналадку, и найти оптимальную величину этих затрат.

Задание 2.8. Найти решение задачи нелинейного программирования из задания 1.2:

- применяя условия Куна-Таккера, предварительно исследовав целевую функцию на выпуклость,
- с помощью метода Била.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение задачи линейного программирования. Приведите примеры задач линейного программирования.
2. Какие формы записи задачи линейного программирования Вы знаете? Как осуществляется переход от одной формы записи к другой?
3. Сформулируйте условие существования допустимых решений в задаче линейного программирования. Когда основная задача линейного программирования имеет единственное решение; множество решений?
4. Какие переменные в ЗЛП называются свободными, какие – базисными? Какое решение называется базисным; опорным; вырожденным; невырожденным?
5. Какие выводы о решении задачи ЛП можно сделать, исходя из ее графической интерпретации?
6. Какая идея заложена в основу симплекс-метода?
7. Сформулируйте табличный алгоритм симплекс-метода.
8. В чем заключается проблема вырожденности решения задачи линейного программирования?
9. Как определить случай альтернативного оптимума по симплекс-таблице?
10. Какие методы нахождения исходного опорного решения Вы знаете? Сформулируйте алгоритм нахождения исходного опорного решения с помощью симплексных преобразований.
11. Для чего в задаче линейного программирования вводятся искусственные переменные? Какие методы искусственного базиса Вы знаете?
12. В чем состоит идея М-метода? Каким образом связаны оптимальные решения исходной задачи линейного программирования и М-задачи?
13. В чем состоит идея двухэтапного метода?
14. Сформулируйте правила составления двойственной задачи. Каким образом записываются целевая функция, ограничения и переменные двойственной задачи?

15. Какие пары двойственных задач называются симметричными; несимметричными?
16. Сформулируйте первую теорему двойственности, вторую теорему двойственности.
17. Сформулируйте транспортную задачу по критерию стоимости. Каким образом подразделяются транспортные задачи по критерию стоимости?
18. Постройте математическую модель транспортной задачи с правильным балансом.
19. Сформулируйте условие разрешимости транспортной задачи.
20. Какие методы нахождения исходного опорного решения в транспортной задаче Вы знаете? В чем суть метода «северо-западного угла»? метода «минимального элемента»?
21. Что называется циклом в транспортной задаче; означенным циклом; ценой цикла? Сформулируйте правило построения цикла. Что означает перебросить груз по циклу?
22. Сформулируйте алгоритм распределительного метода для решения транспортной задачи.
23. Что такое потенциалы? Сформулируйте принцип оптимальности в методе потенциалов.
24. Каким образом определяется цена цикла в методе потенциалов?
25. Сформулируйте алгоритм метода потенциалов для решения транспортной задачи.
26. Как решается транспортная задача с неправильным балансом?
27. Что такое блокировка перевозок? Как в этом случае решается транспортная задача? Какие еще дополнительные ограничения могут встретиться в модели транспортной задачи? Как в этом случае решаются задачи?
28. Как решается задача о перевозке неоднородного груза?
29. Сформулируйте транспортную задачу по критерию времени. Постройте математическую модель транспортной задачи по критерию времени. К какому классу оптимизационных задач относится данная задача? Сформулируйте алгоритм «метода запрещенных клеток»?
30. Каким образом формулируется задача целочисленного линейного программирования? Как подразделяются задачи целочисленного программирования? Почему задачи целочисленного программирования нельзя решать простым округлением?
31. На какие группы делятся методы решения задач целочисленного программирования? В чем заключается идея методов, относящихся к одной группе?
32. К какой группе методов относится метод Гомори? Для решения каких задач используется метод Гомори? Что представляет собой ослабленная задача?
33. Сформулируйте алгоритм метода Гомори. Как с помощью метода Гомори определить, что задача целочисленного программирования не имеет оптимального решения? Каким образом составляется дополнительное ограничение в методе Гомори? Что такое целая и дробная части числа?
34. К какой группе методов относится метод ветвей и границ? Сформулируйте алгоритм метода ветвей и границ.
35. Каким образом задача разбивается на две подзадачи? До каких пор идет процесс разбиения задачи на подзадачи? Как с помощью метода ветвей и границ определить, что задача целочисленного программирования не имеет оптимального решения?
36. Что такое нижняя и верхняя граница функции? Как за счет ввода границ функции уменьшить количество решаемых задач? В каком виде в методе ветвей и границ изображается процесс нахождения решений?
37. Каким образом формулируется задача о назначениях? Как строится математическая модель данной задачи для случая, когда количество работ и работников совпадают?
38. Какие утверждения лежат в основе венгерского алгоритма? Сформулируйте венгерский алгоритм.
39. Как осуществляется проверка полученного решения?
40. Каким образом решается задача о назначениях, если количество работ и работников не совпадают?
41. Как решается задача максимизации?
42. Каким образом формулируется задача о коммивояжере? Как строится математическая модель данной задачи?
43. К какой группе методов относится метод Литтла? Какая идея лежит в основе метода Литтла?
44. Сформулируйте алгоритм метода Литтла.

45. Когда алгоритм заканчивает свою работу? Как изображается процесс нахождения решения?
46. Сформулируйте задачу нелинейного программирования. Какие выводы можно сделать относительно решения задачи нелинейного программирования, исходя из ранее полученных знаний об этих задачах?
47. Какие методы решения задач нелинейного программирования были рассмотрены нами ранее?
48. Как формулируется задача выпуклого программирования? Почему при решении задач нелинейного программирования необходимо проверять, относится ли решаемая задача к классу задач выпуклого программирования или нет?
49. Каким образом составляется функция Лагранжа для задачи выпуклого программирования в случае задачи минимизации; задачи максимизации?
50. Что такое седловая точка функции Лагранжа? Как решение задачи выпуклого программирования связано с седловыми точками функции Лагранжа?
51. Сформулируйте теорему Куна-Таккера в общем виде. Запишите условия Куна-Таккера для частного случая для задачи минимизации; задачи максимизации.
52. Как формулируется задача квадратичного программирования?
53. Что такое квадратичная форма? Какие бывают квадратичные формы? Как определить тип квадратичной формы?
54. Сформулируйте условия, которым должна удовлетворять задача квадратичного программирования для того, чтобы она относилась к классу задач выпуклого программирования.
55. В каком виде должна быть записана задача квадратичного программирования, чтобы ее можно было решить с помощью условий Куна-Таккера?
56. Как решается задача квадратичного программирования с помощью условий Куна-Таккера? Как записывается функция Лагранжа? Как записываются условия Куна-Таккера? К какой задаче сводится решение задачи квадратичного программирования? Какой смысл заключается в дополнительных нелинейных ограничениях? Как эти ограничения используются при нахождении оптимального решения исходной задачи?
57. В чем идея метода Била для решения задачи квадратичного программирования? Модификацией какого метода является метод Била? В чем его отличие?
58. В каком виде должна быть записана задача квадратичного программирования, чтобы ее можно было решить с помощью метода Била?
59. Сформулируйте алгоритм метода Била.

Глава 3. Численные методы оптимизации

К сожалению, опираясь на условия оптимальности или используя точные методы, получить решение задачи оптимизации в явном виде не всегда удаётся в силу, например, трудностей вычислений, и тогда её приходится решать приближенно с применением численных методов.

3.1. Общие сведения о численных методах оптимизации

Любой численный метод решения задачи оптимизации основан на точном или приближённом вычислении значений целевой функции, а также ее производных. На основании полученной информации строится последовательность приближений $\{x^{(k)}\}$, k=0,…, к решению задачи – искомой точки минимума x^* или, если такая точка не единственна – к множеству точек минимума.

Для каждой конкретной задачи вопрос о том, какие характеристики следует выбрать для вычисления, решается в зависимости от свойств минимизируемой функции, ограничений и имеющихся возможностей по хранению и обработке информации. Так, для минимизации не дифференцируемой функции нельзя воспользоваться алгоритмом, предусматривающим возможность вычисления в произвольной точке градиента функции. В случае когда доступен небольшой объем памяти компьютера, при решении задачи большой размерности нельзя воспользоваться алгоритмом, требующим вычисления на каждом шаге, хранения в памяти матрицы вторых производных и т.п.

Алгоритмы, использующие лишь информацию о значениях минимизируемой функции, называются алгоритмами нулевого порядка; алгоритмы, использующие также информацию о значениях первых производных, – алгоритмами первого порядка; алгоритмы, использующие, кроме того, информацию о вторых производных – алгоритмами второго порядка.

Будем рассматривать задачу

$$f(x)\to\min,\ x\in X\subseteq R^{\boldsymbol{n}}\ . \qquad (3.1)$$

В дальнейшем для записи методов минимизации будем пользоваться соотношением вида

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k h^{(k)},\quad \alpha_k\in R,\quad k=0,1,2,\ \dots\ . \qquad (3.2)$$

Причём нулевое приближение $x^{(0)}$ предполагается заданным. В формуле (3.2) $x^{(k+1)}$ и $x^{(k)}$ обозначают (k+1)–е и k-е приближения к решению задачи (3.1); вектор $h^{(k)}$ определяет направление (k+1)–го шага метода минимизации, а коэффициент α_k – длину этого шага. При этом следует иметь в виду, что при $\left\|h^{(k)}\right\|\neq 1$ длина отрезка, соединяющего точки $x^{(k)}$ и $x^{(k+1)}$, конечно не равна $|\alpha_k|$.

Конкретный алгоритм определяется заданием точки $x^{(0)}$, правилами выбора векторов $h^{(k)}$ и чисел α_k на основе полученной в результате вычислений информации, а также условием остановки.

Обычно название метода минимизации определяется способом выбора направления $h^{(k)}$, а его различные модификации различаются способами выбора шага α_k.

Важной характеристикой бесконечно шаговых методов является сходимость. Говорят, что метод (3.2) сходится, если $x^{(k)} \to x^*$ при $k \to \infty$, где x^* – решение задачи (3.1). В случае, когда точка минимума x^* не единственная, под сходимостью метода понимается сходимость последовательности $\{x^{(k)}\}$, k=0,1,…, к множеству x^* точек минимума функции $f(x)$.

Большинство теорем о сходимости методов оптимизации доказываются в предположении, что задача (3.1) – задача выпуклого программирования. Для не выпуклых задач численные методы оптимизации обычно позволяют находить лишь локальные решения, а точнее говоря, стационарные точки. Задача нахождения глобального решения в общем случае чрезвычайно сложна.

Условие остановки может определяться имеющимися в наличии вычислительными ресурсами. Остановка может производиться по достижении заданной точности решения задачи. На практике часто используются следующие условия остановки

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon_1, \qquad (3.3)$$

$$\left\| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \right\| \le \varepsilon_2, \qquad (3.4)$$

$$\left\| f'(x^{(k)}) \right\| \le \varepsilon_3, \qquad (3.5)$$

где символ $\| \;\|$ означает евклидову норму вектора: $\| z \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_1^2}$, $z \in R^n$;

ε_1, ε_2, ε_3 – заданные малые положительные числа.

Многие методы минимизации относятся к числу методов спуска. В методах спуска направление движения к минимуму на каждом шаге выбирается из числа направлений убывания минимизируемой функции.

Определение 3.1. Говорят, что вектор h задает ***направление убывания*** $f(x)$ в точке x, если $f(x+\alpha h) < f(x)$ при всех достаточно малых $\alpha > 0$. Сам вектор h также называют направлением убывания.

Метод (3.2) называется методом спуска, если вектор $h^{(k)}$ задает направление убывания функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$, а число α_k положительно и таково, что

$$f(x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}) < f(x^{(k)}), \quad x^{(k)}, x^{(k+1)} \in X,\ k=0,1,2,\dots .$$

Способы выбора шага α_k

1. ***Выбор длины шага из условия минимизации функции вдоль выбранного направления***

Коэффициенты α_k в методе (3.2) можно определять из условия

$$f(x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}) = \min_{\alpha} f(x^{(k)} + \alpha h^{(k)}), \qquad (3.6)$$

где для методов спуска минимум берется по $\alpha > 0$.

Такой способ выбора α_k является в некотором смысле наилучшим, ибо он обеспечивает достижение наименьшего значения функции вдоль заданного направления. Однако он требует решения на каждом шаге одномерной задачи минимизации. Эти задачи решаются, как правило, приближенно с помощью численных методов, что приводит к значительному объему вычислений.

2. *Априорный выбор длины шага*

Иногда величину α_k выбирают до начала вычислений. Так, в ряде методов достаточно потребовать выполнения условий

$$\alpha_k > 0, \quad k=0,1,\ldots; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$$

(например, можно взять $\alpha_k = c/(k+1)$).

Условие сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2$ накладывают, чтобы добиться достаточно быстрой сходимости последовательности α_k к нулю с целью обеспечения сходимости метода в окрестности точки экстремума x^*. Условие же расходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ призвано обеспечить достижение точки экстремума x^* даже при неудачном выборе начального приближения $x^{(0)}$, т.е. при большом расстоянии от $x^{(0)}$ до x^*.

3. Дробление шага

Если $h^{(k)}$ – направление убывания, то дробление шага можно осуществлять следующим образом. Выбирают произвольную постоянную величину $\alpha > 0$ и в формуле (3.2) полагают $\alpha_k = \alpha$. При этом для каждого $k \geq 0$ проверяют выполнение условия монотонности

$$f(x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}) < f(x^{(k)}). \qquad (3.7)$$

Если оно не выполняется, то производится дробление шага, обычно полагают $\alpha_k = \alpha/2$, и вновь проверяют выполнение условия (3.7). Процесс дробления, т.е. деления текущего значения α на 2, продолжается до тех пор, пока условие (3.7) не окажется выполненным. Этот процесс не может быть бесконечным, поскольку $h^{(k)}$ – направление убывания. Первое α, при котором условие (3.7) будет выполнено, и принимается за длину шага.

Отметим, что рассмотренные принципы выбора длины шага в методах не исчерпывают множества всех применяемых на практике способов.

3.2. Численные методы минимизации унимодальных функций

Необходимость отдельного рассмотрения численных методов поиска экстремума функций одной переменной диктуется следующими обстоятельствами.

Во-первых, эти методы используются во многих алгоритмах поиска экстремума функций, зависящих от нескольких переменных.

Во-вторых, классы функций одной переменной служат удобной моделью для теоретического исследования эффективности методов оптимизации.

В-третьих, иногда удается, используя те или иные приемы, непосредственно с помощью алгоритмов одномерной оптимизации получить решение многомерных задач.

Следует подчеркнуть, что универсальных методов, пригодных для минимизации произвольных функций одной переменной, не существует. Поэтому приходится строить алгоритмы, ориентированные на различные встречающиеся в прикладных задачах классы функций.

В данном разделе остановимся на классе унимодальных функций. Будем решать задачу: $f(x) \rightarrow \min$, $x \in X \subseteq R$.

Определение 3.2. Функция $f(x)$ называется ***унимодальной*** на множестве X, если существует такая точка $x^* \in X$, что слева от нее функция $f(x)$ убывает, а справа возрастает, т.е.

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2 < x^*,\ x_1, x_2 \in X,$$
$$f(x_1) < f(x_2), \text{ если } x^* < x_3 < x_4,\ x_3, x_4 \in X.$$

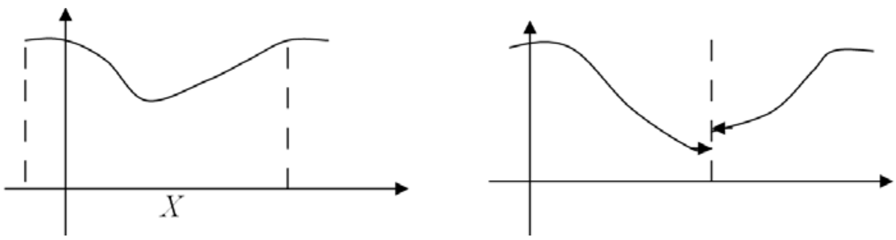


Рис. 3.1. *Примеры унимодальных функций*

Примером унимодальной функции является строго выпуклая функция. Но существуют и невыпуклые функции.

Если ограничиться только рассмотрением непрерывных функций, то свойство унимодальности функций означает наличие у нее единственного локального минимума.

Методы оптимизации, основанные на свойстве унимодальности минимизируемой функции, можно назвать методами сокращения интервала локализации. Основная идея этих методов заключается в том, что на каждом k-ом шаге поиска путем исключения тех подинтервалов, в которых в силу унимодальности функции $f(x)$ точка x^* не содержится, определяется текущий интервал $[a_k,b_k]$, удовлетворяющий системе неравенств: $a_k, < x^* < b_k$. Длина текущего интервала зависит от расположения в нем точек испытаний x_1 *и* x_2, выбор которых определяется конкретным методом поиска, но которые расположены симметрично относительно середины интервала $[a_k,b_k]$:

$$x_1 = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon,\ x_2 = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

3.2.1. Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии)

Назовем ***отрезком локализации*** точки минимума любой отрезок из $X=[a,b]$, содержащий точку минимума.

Будем предполагать, что $X=[a,b]$, что не нарушает общности. Если X – не ограничено, то можно построить конечношаговый процесс, позволяющий указать отрезок, в котором содержится точка x^*.

Опишем простейший алгоритм локализации точки минимума, известный под названием метода деления пополам.

Найдем значения функции $f(x)$ в точках $x_1=a$ и $x_2=b$: $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Введем дополнительно три точки: x_3, x_4, x_5,

$$x_3 = x_1 + (b - a)/4,$$
$$x_4 = x_3 + (b - a)/4,$$
$$x_5 = x_4 + (b - a)/4,$$

которые делят отрезок $[a,b]$ на 4 равные части,

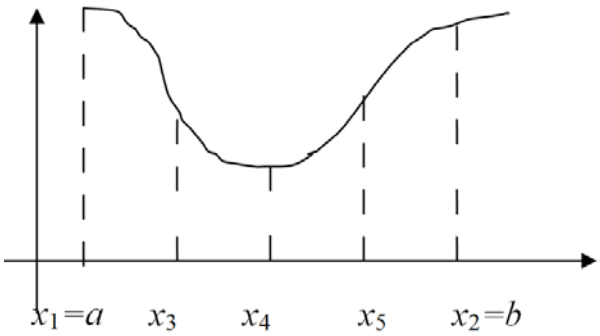


Рис. 3.2. *Графическая иллюстрация метода деления пополам*

и вычисляем значения: $f(x_3)$, $f(x_4)$, $f(x_5)$.

Среди чисел $f(x_i)$ находим минимальное значение: $f(x_k)=\min\limits_{1\le i\le 5} f(x_i)$.

Ясно, что в силу унимодальности функции $f(x)$ точка минимума x^* может находиться только в отрезке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$, длина которого равна половине отрезка $[a,b]$.

Рассмотрим m-ую итерацию.

На m-ой итерации отрезок локализации будет иметь вид $[x_{k-1}^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}]$, причем уже известны значения функции $f(x_{k-1}^{(m)})$, $f(x_k^{(m)})$, $f(x_{k+1}^{(m)})$. Введем в рассмотрение еще две точки $x_{k+2}^{(m)}$, $x_{k+3}^{(m)}$, которые делят отрезки $[x_{k-1}^{(m)}, x_k^{(m)}]$, $[x_k^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}]$ пополам, т.е.

$$x_{k+2}^{(m)} = (x_k^{(m)} + x_{k-1}^{(m)})/2,$$
$$x_{k+3}^{(m)} = (x_{k+1}^{(m)} + x_k^{(m)})/2,$$

и найдем $f(x_{k+2}^{(m)})$, $f(x_{k+3}^{(m)})$. Среди полученных значений выбираем минимальное значение: $f(x_k^{(m+1)}) = min\{f(x_{k-1}^{(m)}), f(x_k^{(m)}), \ldots, f(x_{k+3}^{(m)})\}$.

Ближайшие точки слева и справа к точке $x_k^{(m+1)}$ составляют границы нового отрезка локализации: $[x_{k-1}^{(m+1)}, x_{k+1}^{(m+1)}]$.

Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнятся условия окончания счета.

Таким образом, в методе деления пополам на каждой итерации (кроме первой) минимизируемая функция подсчитывается в двух новых точках.

Если на очередной итерации минимум достигается в граничной точке, то отрезок локализации на очередной итерации уменьшается в 4 раза, а именно, если $x_k^{(m+1)} = x_{k-1}^{(m)}$, то отрезок локализации будет иметь вид $[x_k^{(m+1)}, x_{k+1}^{(m+1)}]$, если $x_k^{(m+1)} = x_{k+1}^{(m)}$, то отрезок локализации будет иметь вид $[x_{k-1}^{(m+1)}, x_k^{(m+1)}]$.

Если количество вычислений значений минимизируемой функции ничем не ограничено, то описанный процесс можно продолжать до тех пор, пока не получится отрезок локализации $[x_{k-1}^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}]$, длина которого не превосходит ε (ε – заданная точность):

$$x_{k+1}^{(m)} - x_{k-1}^{(m)} < \varepsilon.$$

Т.к. каждое деление пополам требует двух вычислений (кроме первой итерации), то для достижения требуемой точности необходимо выполнить $n=2m+1$ вычислений.

После определения допустимого отрезка локализации $[x_{k-1}^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}]$ в качестве решения достаточно взять $x^* = x_{k-1}^{(m)}$, если $f(x_{k-1}^{(m)}) < f(x_{k+1}^{(m)})$ и $x^* = x_{k+1}^{(m)}$, если $f(x_{k-1}^{(m)}) > f(x_{k+1}^{(m)})$.

Однако заметим, что на практике встречаются функции, нахождение значений которой в каждой точке связано с большим объемом вычислений или дорогостоящими экспериментами, наблюдениями.

В таких ситуациях возможно даже, что число n, определяющее количество вычислений значений функции, заранее жестко задано и превышение его недопустимо.

Пример 3.1. Найти $\min f(x) = x^2 - x$, если $x \in [0,2]$, $\varepsilon = 0.15$.

Решение.

***Первая итерация*.**

Разделим отрезок [0,2] на четыре равные части и найдем значения функции $f(x)$ в полученных точках:

$x_1 = 0, f(x_1) = 0,$
$x_2 = 2, f(x_2) = 2,$
$x_3 = 1, f(x_3) = 0,$
$x_4 = 0.5, f(x_4) = -0.25,$
$x_5 = 1.5, f(x_5) = 0.75.$

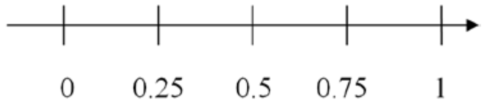
Выберем среди полученных значений функции наименьшее:

$$\min f(x_i) = f(x_4) = -0.25.$$

Следовательно, отрезок локализации на следующую итерацию будет равен [0,1]. Т.к. его длина равна 1, что больше заданной точности ε, переходим к следующей итерации.

Вторая итерация.

Разделим отрезок [0,1] на четыре равные части и найдем значения функции $f(x)$ в полученных точках:



$x_1 = 0, f(x_1) = 0,$
$x_2 = 1, f(x_2) = 0,$
$x_3 = 0{,}5, f(x_3) = -0.25,$
$x_4 = 0.25, f(x_4) = -0.1875,$
$x_5 = 0.75, f(x_5) = -0.1875.$

Выберем среди полученных значений функции наименьшее:

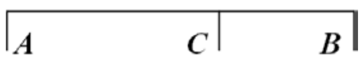
$$\min f(x_i) = f(x_3) = -0.25.$$

Следовательно, отрезок локализации на следующую итерацию будет равен [0.25,0.75]. Т.к. его длина равна 0.5, что больше заданной точности ε, переходим к следующей итерации и т.д., пока не будет достигнута требуемая точность.

3.2.2. Метод «золотого» сечения

Метод «золотого» сечения является значительно менее трудоемким, чем метод половинного деления.

Определение 3.3. **«*Золотым*» *сечением*** отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.



$$AC = x, \quad AB = a$$
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}.$$

Нахождение x сводится к решению уравнения: $a^2 = x(a+x)$. Откуда

$$x = \frac{(\sqrt{5} - 1)a}{2} \approx 0{,}62a.$$

Рассмотрим идею метода «золотого» сечения.

Пусть $f(x)$ – унимодальная функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Нетрудно заметить, что, если вычислить значения $f(x_1)$, $f(x_2)$ в любых двух точках $x_1, x_2 \in [a,b]$, то это позволяет локализовать точку минимума в меньшем отрезке. Если $f(x_1) > f(x_2)$, где $x_1 < x_2$, то $x^* \in [x_1,b]$, если $f(x_1) < f(x_2)$, где $x_1 < x_2$, то $x^* \in [a,x_2]$. Разумно положить

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \varepsilon,\ x_2 = \frac{a+b}{2} + \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

Однако использование этих формул нерационально, т.к. на следующей итерации точки x_1 и x_2 будут далеки от центра отрезка и поэтому окажутся бесполезными при новой локализации. Целесообразно точки x_1, $x_2 \in [a,b]$ выбрать так, чтобы одну из них можно было использовать и на следующей итерации.

Так как заранее неизвестно, какая унимодальная функция минимизируется, то точки x_1, x_2 должны равно отстоять от концов отрезка $[a,b]$, т.е.

$$x_1 - a = b - x_2.$$

По основному замыслу одна из точек x_1 и x_2 должна использоваться на следующей итерации. Так как заранее неизвестно, сколько итераций потребуется в той или иной задаче, то для осуществления этого замысла нужно точки x_1 и x_2 выбрать так, чтобы на новом отрезке локализации оставшаяся точка занимала такое же положение, как и на исходном отрезке $[a,b]$.

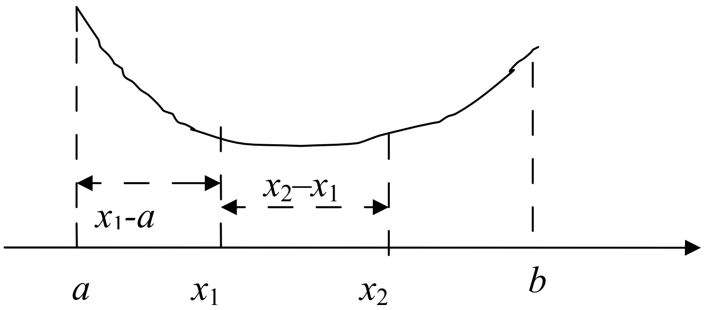


Рис. 3.3. *Графическая иллюстрация метода «золотого» сечения*

$$\frac{b-a}{x_1-a} = \frac{x_2-a}{x_2-x_1}.$$

Полученные соотношения однозначно определяют x_1 и x_2

$$\begin{cases} \dfrac{b-a}{x_1-a} = \dfrac{x_2-a}{x_2-x_1}. \\ x_1 - a = b - x_2 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x_1^2 + (a-3b)x_1 + (b^2 + ab - a^2) = 0.$$

Отсюда $x_1 = a + (b-a)\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$$x_2 = b - (b-a)\frac{3-\sqrt{5}}{2} = a + (b-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (3.8)$$

Каждая из этих точек осуществляет «золотое» сечение отрезка $[a,b]$. Кроме того, точка x_1 производит «золотое» сечение отрезка $[a, x_2]$, а точка x_2 – «золотое» сечение отрезка $[x_1,b]$.

Приведенные вычисления обосновывают следующий алгоритм локализации точки минимума, который и называется ***методом «золотого» сечения***.

На первой итерации выбираем точки x_1 и x_2 по формуле (3.8), которые расположены симметрично относительно середины отрезка ($a < x_1 < x_2 < b$), причем

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = \frac{b-a}{x_2-a} = \frac{x_2-a}{b-x_2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}6\,.$$

Если $f(x_1) > f(x_2)$, то отрезок локализации – $[x_1,b]$, если $f(x_1) < f(x_2)$, то отрезок локализации – $[a,x_2]$.

Пусть $[a_k,b_k]$ – отрезок локализации на k-ой итерации. По построению известно значение $f(x_k)$ в точке x_k. Вычислим значение $f(x)$ в точке

$$\bar{x} = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}(\sqrt{5}-1) \text{ или в точке}$$

$$\bar{x} = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}(3-\sqrt{5})\,.$$

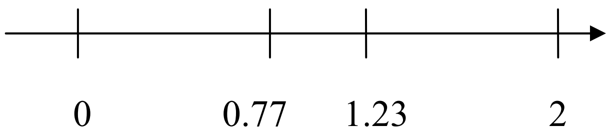
Новый отрезок локализации имеет вид: $[x_k,b_k]$, если $f(x_k) > f(\bar{x})$, и $[a_k, \bar{x}]$, если $f(x_k) < f(\bar{x})$. Таким образом, на каждой итерации (кроме первой) метода «золотого» сечения производится вычисление минимизируемой функции в одной новой точке. Это позволяет уменьшить отрезок локализации точки минимума в 1.6 раза.

Если число вычислений заранее не ограничено, то вычисляем, например, до тех пор, пока $b_n - a_n < \varepsilon$, где ε – заданная точность. Если n жестко задано, то $x^* = x_n$, $f_{min} = f(x^*)$.

Пример 3.2. Найти $\min f(x) = x^2 - x$, если $x \in [0,2]$, $\varepsilon = 0.15$.

Решение.

Первая итерация. Найдем точки x_1 и x_2 по формулам (3.8), а также соответствующие им значения функции $f(x)$.

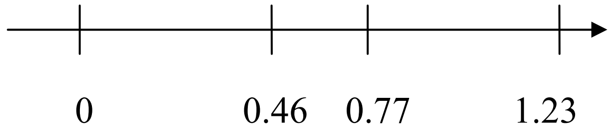


$$x_1 = 0 + 2\,\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.77,\ f(x_1) = -\,0.18,$$

$$x_2 = 2 - 2\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1.23,\quad f(x_2) = 0.28.$$

Т.к. $f(x_2) > f(x_1)$, то отрезок локализации – [0;1.23].

Вторая итерация.



$$x_2 = 0.77,\ f(x_2) = -0.18,$$

$$x_1 = 0 + 1.23\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.46, \quad f(x_1) = -0.2484.$$

Т.к. $f(x_2) > f(x_1)$, то отрезок локализации – [0;0.77] и т.д.

3.2.3. Метод Фибоначчи

Определение 3.4. ***Числами Фибоначчи*** называются числа F_i, которые задаются условиями: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots$.

Для того, чтобы вывести формулу, выражающую числа Фибоначчи в явном виде, необходимо найти решение рекуррентного уравнения $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ среди геометрических прогрессий с i-м членом t^i. Имеем $t^{i+1} = t^i + t^{i-1}$. Решая эти уравнения, получаем следующую формулу**:**

$$F_i = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1}}{\sqrt{5}}.$$

Рассмотрим идею метода Фибоначчи. Пусть имеем унимодальную функцию $f(x)$, $x \in [a,b]$. По заданной точности вычислений ε найдем вспомогательное число

$$k = \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Для полученного числа k находим числа Фибоначчи так, чтобы выполнялось условие: $F_{j-1} < k < F_j$. Далее определяем шаг поиска

$$\delta = \frac{b-a}{F_j}.$$

Вычисляем значение $f(a)$. Следующая точка, в которой вычисляется значение $f(x)$, находится по формуле:

$$x_1 = a + \delta F_{j-2}.$$

Если $f(a) > f(x_1)$, то следующая точка:

$$x_2 = x_1 + \delta F_{j-3}.$$

В противном случае при $f(a) < f(x_1)$:

$$x_2 = x_1 - \delta F_{j-3}.$$

Далее процесс идет с уменьшающей величиной шага, который для i-ой итерации равен $\delta_i = \delta\, F_{j-i-2}$.

Теперь берем точку $x_{i+1} = x_i + \delta_i$. Если $f(x_{i+1}) < f(x_i)$, то следующий шаг выполняется из точки

$$x_{i+2} = x_{i+1} + \delta_{i+1}.$$

Если же $f(x_{i+1}) > f(x_i)$, то

$$x_{i+2} = x_i - \delta_{i+1}$$

(в последней формуле предыдущей точкой является точка x_i, а не x_{i+1}).

Указанный процесс продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны все числа Фибоначчи в убывающей последовательности:

$$F_{j-i-1}= F_{j-i+1} - F_{j-i},\ i=0,1,2,\ \ldots\ .$$

Пример 3.3. Требуется найти точку минимума функции $f(x) = x^2 - x$, $x\in [0,2]$, с точностью до $\varepsilon=0,1$.

Решение. Находим вспомогательное число

$$k=\frac{b-a}{\varepsilon}=20.$$

Запишем числа Фибоначчи: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$.

Тогда $k=20$ заключено в пределах $13=F_6 < 20 < F_7=21$. Минимальный шаг поиска равен $\delta=\frac{b-a}{F_j}=\frac{2}{21}=0,09$. Находим

$$x_1 = a + \delta F_{j-2} = \delta F_5 = 0,09*8=0,72.$$

Так как $f(0)=0 > f(x_1) = -0,2$, то

$$x_2 = x_1 + \delta F_{j-3} = x_1 + \delta F_4 = 0,72+0,09*5=1,17.$$

Имеем $-0,2=f(x_1)< f(x_2)=0,2$, значит

$$x_3 = x_1 - \delta_2 = x_1 - \delta F_3 = 0,72 - 0,27 = 0,45.$$

Далее, $-0,24=f(0,45) < f(x_2)=0,2$ и

$$x_4 = x_3 + \delta_3 = x_3 + \delta F_2 = 0,45 + 0,18 = 0,63.$$

Аналогично получаем $x_5=0,36$, $x_6=0,45$. Значит, $f_{min} = f(0.45) = -0,25$.

3.3. Численные методы безусловной оптимизации

Рассмотрим задачу

$$f(x)\to\min,\ x\in R^n\ . \tag{3.9}$$

Существуют различные численные методы решения этой задачи, тем не менее следует подчеркнуть, что не существует универсальных методов, пригодных для минимизации произвольных функций. Поэтому приходится строить алгоритмы, ориентированные на различные встречающиеся в прикладных задачах классы функций.

3.3.1. Методы оптимизации нулевого порядка

В практических задачах нередко встречаются случаи, когда минимизируемая функция не обладает нужной гладкостью (т.е. не является непрерывно дифференцируемой) либо является гладкой, но вычисление ее производных с нужной точностью требует большого объема вычислений. В таких случаях необходимо использовать методы минимизации, которые требуют вычисления лишь значений функции, но не требуют вычисления значений производных. Такие методы называются ***методами нулевого порядка***.

3.3.1.1. Метод покоординатного спуска с постоянным шагом

Существуют многочисленные варианты метода покоординатного спуска, из которых один будет изложен в данном пункте – метод покоординатного спуска с постоянным шагом. Основная идея этих методов заключается в том, что поиск точки минимума x^* сводится к поочерёдному изменению переменных вдоль одной из координатных осей, вследствие чего у $x^{(k)}$ на каждой итерации изменяется лишь одна из координат.

Алгоритм состоит из циклов, каждый из которых содержит n итераций и характеризуется тем, что величина шага в течение всех n итераций остаётся постоянной.

В качестве начального приближения $x^{(0)}$ выбирается любая точка из R^n.

Предположим, что выбрано положительное значение шага α.

Пусть в результате некоторого числа итераций была найдена точка $x^{(k)} \in R^n$. Опишем один цикл алгоритма. В цикле вычисляются точки $x^{(k+1)},\ldots, x^{(k+n)}$, $k \geq 0$.

Обозначим через $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ - i-ый единичный координатный вектор, т.е. вектор, у которого i-ый элемент равен единице, а остальные элементы равны нулю. Пусть в результате предыдущего цикла получен некоторый шаг α.

Рассмотрим $(i+1)$-ю итерацию цикла $(i=0,\ldots,n-1)$. Пусть в результате предыдущих i итераций цикла была получена точка $x^{(k+i)}$.

1) Если $f(x^{(k+i)} - \alpha e_{i+1}) < f(x^{(k+i)})$, то положим $x^{(k+i+1)} = x^{(k+i)} - \alpha e_{i+1}$ и перейдём к следующей итерации. В противном случае переходим к следующему шагу.
2) Если $f(x^{(k+i)} - \alpha e_{i+1}) \geq f(x^{(k+i)})$, то вычислим $f(x^{(k+i)} + \alpha e_{i+1})$.
3) Если $f(x^{(k+i)} + \alpha e_{i+1}) < f(x^{(k+i)})$,, то положим $x^{(k+i+1)} = x^{(k+i)} + \alpha e_{i+1}$ и перейдём к следующей итерации. В противном случае переходим к следующему шагу.
4) Если $f(x^{(k+i)} + \alpha e_{i+1}) \geq f(x^{(k+i)})$, то положим $x^{(k+i+1)} = x^{(k+i)}$ и перейдём к следующей итерации.

В случае, если неравенства в п.2) и в п.4) выполняются одновременно для всех $i = 0,1,\ldots,n-1$, т.е. при переборе направлений всех координатных осей цикл оказался нерезультативным, уменьшим величину α, т.е положим шаг, равным $\alpha/2$, и повторим все процедуры цикла, но уже с меньшим шагом.

Если величина шага α оказалась меньше заданной точности ε, и при данном шаге цикл оказался нерезультативным, то вычисления заканчиваются. В качестве приближённого решения берем последнюю найденную точку. В противном случае, если $\alpha > \varepsilon$, перейдём к выполнению следующего цикла.

Пример 3.4. Найти минимум функции методом покоординатного спуска, заканчивая вычисления при $\alpha \leq 0{,}05$.

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$$

Решение. Выберем α=1, $x^{(0)}$ = (2,0), тогда $f(x^{(0)})$ = -10.

Рассмотрим ***первый цикл***.

Первая итерация.

Т.к. $x^{(0)} - \alpha e_1$ =(2,0)–1*(1,0)=(1,0)

и f(1,0) = -6 > $f(x^{(0)})$, то вычислим $x^{(0)} + \alpha e_1$.
Т.к. $x^{(0)} + \alpha e_1$ =(2,0) + 1*(1,0) = (3,0)

и f(3,0) = -12 < $f(x^{(0)})$, то положим $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha e_1$= = (3,0) и перейдём к следующей итерации первого цикла.

Вторая итерация.

Т.к. $x^{(1)} - \alpha e_2$ =(3,0)–1*(0,1)=(3,-1)

и f(3,-1) = -6 > $f(x^{(1)})$, то вычислим $x^{(1)} + \alpha e_2$.
Т.к. $x^{(1)} + \alpha e_2$ =(3,0) + 1*(0,1) = (3,1)
и f(3,1) = -14 < $f(x^{(1)})$, то положим $x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha e_2$= = (3,1) и перейдём к следующему циклу, причем величина шага вычислений остается прежней.

Второй цикл.

Первая итерация.

Т.к. $x^{(2)} - \alpha e_1$ =(3,1)–1*(1,0)=(2,1) и f(2,1) = -13 > $f(x^{(2)})$, то вычислим $x^{(2)} + \alpha e_1$. Т.к. $x^{(2)} + \alpha e_1$ =(3,1) + 1*(1,0) = (4,1) и f(4,1) = -13 > $f(x^{(2)})$, то положим $x^{(3)}=x^{(2)}$= =(3,1) и перейдём к следующей итерации второго цикла.

Вторая итерация.

Т.к. $x^{(3)} - \alpha e_2$ =(3,1)–1*(0,1)=(3,0) и f(3,0) = -12 > $f(x^{(3)})$, то вычислим $x^{(3)} + \alpha e_2$. Т.к. $x^{(3)} + \alpha e_2$ = (3,1) + 1*(0,1) = (3,2) и f(3,2) = -12 > $f(x^{(3)})$, то положим $x^{(4)} = x^{(3)}$ = = (3,1) и перейдём к следующему циклу, причем величина шага вычислений уменьшается, α=0,5, т.к. второй цикл оказался нерезультативным.

Третий цикл.

Первая итерация.

Т.к. $x^{(4)} - \alpha e_1$ =(3,1)–0,5*(1,0)=(2,5;1) и f(2,5;1) = -13,75 > $f(x^{(4)})$, и $x^{(4)} + \alpha e_1$= =(3,1) + 0,5*(1,0) = (3,5;1) и f(3,5;0) = -13,75 > $f(x^{(4)})$, то положим $x^{(5)}=x^{(4)}$= =(3,1) и перейдём к следующей итерации второго цикла.

Вторая итерация.

Т.к. $x^{(5)} - \alpha e_2$ =(3;0,5), f(3;0,5) = -13,5 > $f(x^{(5)})$ и $x^{(5)} + \alpha e_2$ = (3;1,5), f(3;1,5)= = -13,5 > $f(x^{(5)})$, то положим $x^{(6)} = x^{(5)}$ = (3,1) и перейдём к следующему циклу, причем величина шага вычислений уменьшается, α=0,25, т.к. третий цикл оказался нерезультативным.

Данный процесс продолжаем до тех пор, пока величина шага α не станет меньше заданной точности, т.е. α < 0,05. В результате получим x^*= (3,1), f_{min}=-14.

3.3.1.2. Метод Гаусса-Зейделя

Данный метод представляет собой модификацию метода покоординатного спуска и отличается от него тем, что длина шага α_k на каждой итерации выбирается из условия минимизации функции вдоль выбранного направления, т.е. на каждой итерации решается одномерная задача минимизации

$$f(x^{(k)}+\alpha_k e_k)=\min_{\alpha} f(x^{(k)}+\alpha e_k). \tag{3.10}$$

Для окончания алгоритма используется условие (3.3) или (3.4).

Алгоритм одного цикла метода

Предположим что за предыдущие циклы найдена точка $x^{(k)}$.

1. Положим i=1.
2. Вычислим $x^{(k+i)}=x^{(k+i-1)}+\alpha e_i$, где шаг α - неизвестное число.
3. Подставим найденное значение $x^{(k+i)}$ в функцию $f(x)$ и решим одномерную задачу минимизации
   $$f(x^{(k+i-1)}+\alpha_i e_i)=\min_{\alpha} f(x^{(k+i-1)}+\alpha e_i).$$
   Найденное решение этой задачи и возьмем в качестве шага α_i на данной итерации.
4. Положим $i=i+1$. Если $i\neq n$, то перейдем к шагу 2. Если $i=n$, то перейдем к шагу 5.
5. Проверим критерий окончания счета. Если он выполняется, то $x^*=x^{(k+n)}$, в противном случае переходим к следующему циклу.

Пример 3.5. Найти минимум функции методом Гаусса-Зейделя, заканчивая вычисления при $\left\|x^{(k+n)}-x^{(k)}\right\|<0{,}05$.

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-7x_1-7x_2$$

Решение. Выберем $x^{(0)}=(0,0)$, тогда $f(x^{(0)})=0$.

Рассмотрим ***первый цикл***.

Первая итерация.

Вычислим $x^{(0)}+\alpha e_1=(0,0)+\alpha*(1,0)=(\alpha,0)$ и $f(\alpha,0)=\alpha^2-7\alpha$. Найдем минимальное значение этой функции. Т.к. функция $f(\alpha,0)$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх, то минимум этой функции будет достигаться в вершине, т.е. при $\alpha=7/2$ (вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ находится в точке $x=-b/(2a)$). Следовательно, положим $x^{(1)}=(7/2,0)$ и перейдём к следующей итерации первого цикла.

Вторая итерация.

Вычислим $x^{(1)}+\alpha e_2=(7/2,0)+\alpha*(0,1)=(7/2,\alpha)$ и $f(7/2,\alpha)=2\alpha^2-7/2\alpha-49/4$. Аналогично, минимум этой функции будет достигаться в вершине, т.е. при $\alpha=7/8$. Следовательно, $x^{(2)}=(7/2,7/8)$.

Проверим выполнение критерия окончания счета.

Т.к. $\left\| x^{(2)} - x^{(0)} \right\| = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{8} - 0\right)^2} > 0{,}05$, то перейдём к следующему циклу.

Итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока не выполнится условие $\left\| x^{(k+n)} - x^{(k)} \right\| < 0{,}05$.

Метод Гаусса-Зейделя хорошо приспособлен для функций, минимум которых по каждой из переменных мало зависит или не зависит совсем от значений остальных переменных.

Хотя скорость сходимости методов покоординатного спуска и Гаусса-Зейделя, вообще говоря, невысокая, благодаря простоте каждой итерации, методы находят широкое применение.

Геометрической интерпретацией траектории поиска, которая получается по методам покоординатного спуска и Гаусса-Зейделя, является ломаная линия, состоящая из отрезков прямых, параллельных осям координат.

Замечание 3.1. Решение задач одномерной оптимизации (3.10) для определения констант α в общем случае следует осуществлять численно, например, методом золотого сечения или деления отрезка пополам.

Во многих задачах оптимизации рассматриваются квадратичные функции, т.е. функции вида

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i . \qquad (3.11)$$

Если ввести числа $q_{ij} = d_{ij} + d_{ji}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, то получим симметричную матрицу $Q = \{q_{ij}\}_{nxn}$, $q_{ij} = q_{ji}$, с помощью которой можно представить квадратичную функцию в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} x Q x^T + R x^T , \qquad (3.12)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $R = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Тогда градиент и матрица вторых производных функции (3.12) равны

$$f'(x) = xQ + R, \quad f''(x) = Q . \qquad (3.13)$$

Пример 3.6. Для функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$$

- найти матрицу Q и вектор R в представлении (3.12) функции $f(x)$;
- найти градиент $f'(x)$.
- исследовать функцию $f(x)$ на выпуклость.

Решение. Очевидно, что

$d_{11} = 1,\quad d_{12} = 1,\quad r_1 = -7,\quad q_{11} = d_{11} + d_{11} = 2,\quad q_{12} = d_{12} + d_{21} = 1,$

$d_{21} = 0,\quad d_{22} = 2,\quad r_2 = -7,\quad q_{21} = q_{12} = 1,\quad .q_{22} = d_{22} + d_{22} = 4,$

т.е. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad R = (-7;-7).$

Тогда $f'(x) = xQ + R = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + (-7;-7) = (2x_1 + x_2 - 7;\, x_1 + 4x_2 - 7)$.

Найдём главные миноры Δ_i матриц $f''(x) = Q$:

$$\Delta_1 = 2,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Так как $\Delta_i > 0$, i = 1, 2, то функция $f(x)$ выпукла в R^2.

Для квадратичной функции $f(x)$ задача нахождения шага α_k из условия минимизации функции вдоль заданного направления может быть решена аналитически. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{2}xQx^T + Rx^T.$$

Пусть

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha h^{(k)}.$$

Тогда

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + \alpha h^{(k)}) = \frac{1}{2}(x^{(k)} + \alpha h^{(k)})Q\,(x^{(k)} + \alpha h^{(k)})^T + R(x^{(k)} + \alpha h^{(k)})^T.$$

Вычислим производную этой функции по переменной α и приравняем ее к нулю.

$$f'(x^{(k+1)}) = \frac{1}{2}h^{(k)}Q\,(x^{(k)} + \alpha h^{(k)})^T + \frac{1}{2}(x^{(k)} + \alpha h^{(k)})Q\,(h^{(k)})^T + R(h^{(k)})^T = 0,$$

$$f'(x^{(k+1)}) = \frac{1}{2}h^{(k)}Q\,(x^{(k)})^T + \frac{1}{2}\alpha h^{(k)}Q\,(h^{(k)})^T + \frac{1}{2}x^{(k)}Q\,(h^{(k)})^T +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha h^{(k)}Q\,(h^{(k)})^T + R(h^{(k)})^T = 0.$$

Т.к. матрица Q – симметричная матрица, то $h^{(k)}Q\,(x^{(k)})^T = x^{(k)}Q\,(h^{(k)})^T$. Тогда имеем

$$f'(x^{(k+1)}) = \alpha h^{(k)}Q\,(h^{(k)})^T + x^{(k)}Q\,(h^{(k)})^T + R(h^{(k)})^T = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = -\frac{x^{(k)}Q\left(h^{(k)}\right)^T + R\left(h^{(k)}\right)^T}{h^{(k)}Q\left(h^{(k)}\right)^T}. \tag{3.14}$$

Этой формулой можно воспользоваться в методе Гаусса-Зейделя для нахождения шага α на каждой итерации, положив при этом $h^{(k)} = e_k$, т.е.

$$\alpha = -\frac{x^{(k)}Q(e_k)^T + R(e_k)^T}{e_kQ(e_k)^T}. \tag{3.15}$$

Пример 3.7. Рассмотрим в примере 3.5 первую итерацию первого цикла. Воспользуемся для нахождения шага α полученной формулой. Имеем

$$x^{(0)} + \alpha e_1 = (0,0) + \alpha*(1,0) = (\alpha,0),$$

где

$$\alpha = -\frac{x^{(k)}Q(e_k)^T + R(e_k)^T}{e_kQ(e_k)^T} = -\frac{(0,0)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + (-7,-7)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}{(1,0)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}} = = -\frac{7}{(2,1)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}} = \frac{7}{2}.$$

Следовательно, $x^{(1)}$ = (7/2;0) и перейдём к следующей итерации первого цикла.

3.3.2. Методы оптимизации первого порядка

3.3.2.1. Метод градиентного спуска

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, x \in R^n .$$

Одним из наиболее распространённых в инженерной практике является градиентный метод или метод градиентного спуска. Метод основан на следующем свойстве градиента функции: вектор $f'(x)$ определяет направление наискорейшего возрастания функции f в точке x. Следовательно, вектор $-f'(x)$ (антиградиент) указывает направление наискорейшего убывания функции f в точке x.

Будем считать, что выбрана некоторая начальная точка $x^{(0)}$. Тогда градиентный метод заключается в построении последовательности точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ по правилу

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)}), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0,1,2,..., \tag{3.16}$$

где величина α_k – длина шага градиентного метода выбирается из условия монотонности функции, т.е. путем дробления.

В качестве условия окончания вычислений используется близость градиента $f'(x^{(k)})$ к нулевому вектору: условие (3.5) или выполнение неравенств

$$\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| < \varepsilon, \ i = 1,2,\ldots,n,$$

(ε – заданное достаточно малое число).

Если условие окончания вычислений выполнено, то полагают $x^* \approx x^{(k)}$ и $f(x^*) \approx f(x^{(k)})$.

Дадим геометрическую интерпретацию градиентного метода (рис. 3.4).

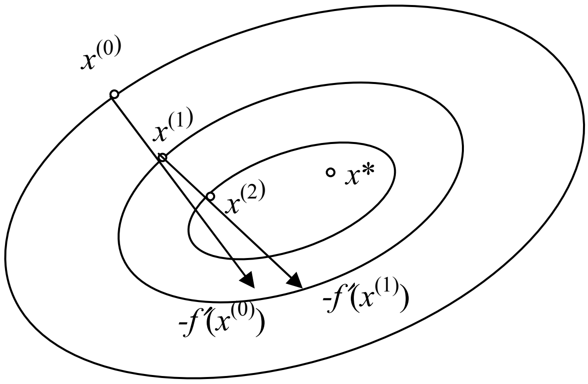


Рис. 3.4. *Графическая интерпретация градиентного метода*

Пример 3.8. Найти минимум функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$$

в R^2 **методом градиентного спуска, выбирая шаг** α_k **из условия монотонности. Вычисления завершить при** $\left|\dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| < 0{,}05$**,** $\boldsymbol{i}$ **= 1, 2.**

Решение. Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (0;0)$ и $\alpha_0 = 1$. Тогда $f(x^{(0)})=0$.

Первая итерация.

Так как

$$f'(x) = (2x_1 + x_2 - 7;\ x_1 + 4x_2 - 7), \text{ то } f'(x^{(0)}) = (-7; -7).$$

Тогда

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 f'(x^{(0)}) = (0;0) - 1 \cdot (-7;-7) = (7;7).$$

При этом $f(x^{(1)})=98 > f(x^{(0)})$, поэтому $\alpha_0 = 0{,}5$. Вычисляем новую точку $x^{(1)}$.

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 f'(x^{(0)}) = (0;0) - 0{,}5 \cdot (-7;-7) = (7/2;7/2).$$

Т.к. $f(x^{(1)})=0 = f(x^{(0)})$, то $\alpha_0 = 0{,}25$ и процесс нахождения точки $x^{(1)}$ продолжаем дальше.

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 f'(x^{(0)}) = (0;0) - 0{,}25 \cdot (-7;-7) = (7/4;7/4).$$

Т.к. $f(x^{(1)})= -49/4 < f(x^{(0)})$, то $\alpha_1 = \alpha_0 = 0{,}25$ и проверяем критерий окончания счета. Т.к. $f'(x^{(1)}) = (-7/4;\ 7/4)$, то условие $\left|\dfrac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_i}\right| < 0{,}05$ не выполняется, поэтому переходим к следующей итерации.

Вторая итерация.

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \alpha_1 f'(x^{(1)}) = (7/4;\ 7/4) - 0{,}25 \cdot (-7/4;\ 7/4) = (2{,}1875;\ 1{,}3125).$$

Т.к. $f(x^{(2)})$= -13,3985 < $f(x^{(1)})$, то $\alpha_2 = \alpha_1 = 0{,}25$ и проверяем критерий окончания счета. Т.к. $f'(x^{(2)}) = (-1{,}3125;\ 0{,}4375)$, то условие $\left|\dfrac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_i}\right| < 0{,}05$ не выполняется, поэтому переходим к следующей итерации и т.д., пока не будет выполнено условие окончания счета.

3.3.2.2. Метод наискорейшего спуска

Рассмотрим метод наискорейшего спуска, который является модификацией метода градиентного спуска, и в котором оптимальная длина шага α_k вдоль направления антиградиента является решением одномерной задачи минимизации

$$f(x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})) = \min_{\alpha>0} f(x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})) \qquad (3.17)$$

Оказывается, что при выборе шага согласно (3.13) градиенты функции f в точках $x^{(k+1)}$ и $x^{(k)}$ ортогональны (рис.3.5), т.к.

$$f'(x^{(k+1)})\,[\,f'(x^{(k)})\,]^T = 0.$$

Если функция $f(x)$ – квадратичная, то величина α_k может быть найдена в явном виде. Для этого воспользуемся формулой (3.15)

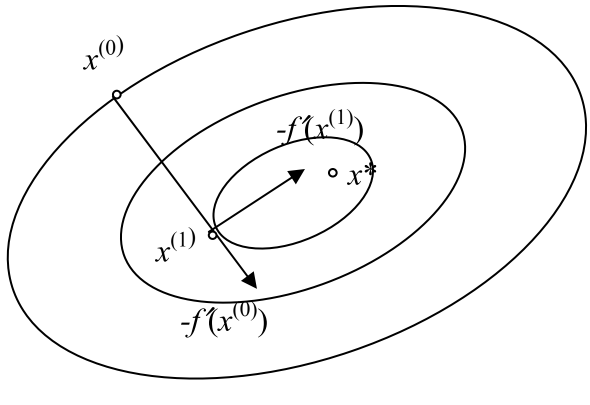


Рис. 3.5. *Графическая интерпретация метода наискорейшего спуска*

$$\alpha = -\frac{x^{(k)}\,Q\left(h^{(k)}\right)^T + R\left(h^{(k)}\right)^T}{h^{(k)}\,Q\left(h^{(k)}\right)^T}.$$

Положим в этой формуле $h^{(k)} = -f'(x^{(k)})$ и воспользуемся тем, что для квадратичной функции $f'(x^{(k)}) = x^{(k)}Q + R$, получим

$$\alpha_k = \frac{f'\left(x^{(k)}\right)\left[f'\left(x^{(k)}\right)\right]^T}{f'\left(x^{(k)}\right)Q\left[f'\left(x^{(k)}\right)\right]^T}. \qquad (3.18)$$

Пример 3.9. Найти минимум функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$$

в R^2 **методом наискорейшего спуска, выбирая шаг** α_k **из условия минимизации функции вдоль выбранного направления. Вычисления завершить при** $\left|\dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| < 0{,}05$**,** $\quad$ ***i*** **= 1, 2.**

Решение.

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (0;0)$. Тогда $f(x^{(0)})=0$.

Первая итерация.

Так как

$$f'(x) = (2x_1 + x_2 - 7;\ x_1 + 4x_2 - 7), \text{ то } f'(x^{(0)}) = (-7; -7).$$

Тогда

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha f'(x^{(0)}) = (0;0) - \alpha(-7;-7) = (7\alpha;7\alpha).$$

Подставим координаты найденной точки в функцию $f(x)$. Получим

$$f(7\alpha,7\alpha) = 49\alpha^2 + 98\alpha^2 + 49\alpha^2 - 49\alpha - 49\alpha = 98(2\alpha^2 - \alpha).$$

Найдем минимальное значение этой функции. Для этого найдем первую производную этой функции по α и приравняем ее к нулю.

$$f'(7\alpha,7\alpha) = 98(4\alpha - 1) = 0,$$

т.е. $\alpha = 1/4$. Т.к. функция $f'(7\alpha,7\alpha)$ при переходе через точку $\alpha = 1/4$ меняет знак с «-» на «+», то при $\alpha = 1/4$ функция $f'(7\alpha,7\alpha)$ достигает своего минимального значения.

Шаг α можно найти, если воспользоваться формулой (3.18)

$$\alpha_k = \frac{f'(x^{(k)})\left[f'(x^{(k)})\right]^T}{f'(x^{(k)})\,Q\left[f'(x^{(k)})\right]^T}.$$

Тогда имеем

$$\alpha_k = \frac{(-7,-7)\begin{pmatrix}-7\\-7\end{pmatrix}}{(-7,-7)\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\-7\end{pmatrix}} = \frac{(1,1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{(1,1)\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \frac{2}{(3,5)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $x^{(1)} = (7/4;\ 7/4)$.

Проверим выполнение критерия окончания счета. Т.к. $f'(x^{(1)}) = (-7/4; 7/4)$, то условие $\left|\dfrac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_i}\right| < 0{,}05$ не выполняется, поэтому переходим к следующей итерации.

Итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока не выполнится условие $\left|\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_i}\right| < 0,05$.

Последовательность точек $x^{(k)}$, найденная с помощью градиентных методов, сходится к точке x^*, которая является стационарной точкой функции $f(x)$. Из курса математического анализа известно, что стационарная точка может не являться точкой минимума. Поэтому, если функция $f(x)$ не является выпуклой, то градиентные методы не гарантируют, что найденное решение – это локальный минимум.

Для выпуклых функций любая стационарная точка будет являться точкой глобального минимума.

Градиентные методы часто используются для создания других методов.

Недостаток градиентных методов связан с его чувствительностью к погрешности вычислений. Этот недостаток особенно сильно проявляется в окрестности точки минимума, где норма градиента достаточна мала. Поэтому градиентные методы в начальной стадии работают лучше, чем на заключительном этапе.

3.3.2.3. Метод сопряжённых градиентов

Метод сопряжённых градиентов применяется для минимизации квадратичной функции.

В методах сопряжённых направлений требуется найти направления $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ такие, что последовательность n одномерных задач минимизации вдоль этих направлений приводит к нахождению минимума квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2}xQx^T + Rx^T$ с положительно определённой матрицей Q при любом $x_0 \in R^n$. Оказывается, что указанным свойством обладает система взаимно сопряжённых относительно матрицы Q направлений.

Определение 3.5. Векторы (направления) $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ называются ***сопряжёнными*** относительно матрицы Q, если они отличны от нуля и удовлетворяют условию:

$$h^{(1)}\,Q\,(h^{(2)})^T = 0. \tag{3.19}$$

Определение 3.6. Векторы (направления) $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ называются ***взаимно сопряжёнными*** относительно матрицы Q, если все они отличны от нуля и

$$h_i\,Q\,h_j^T = 0,\ i \neq j,\ i, j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Рассмотрим задачу

$$f(x) = \frac{1}{2}xQx^T + Rx^T \to \min,\ x \in R^{\boldsymbol{n}},$$

где Q – положительно определенная матрица.

Построим систему взаимно сопряжённых направлений по правилу

$$h_0 = -f'(x^{(0)}), \quad h_k = -f'(x^{(k)}) + \beta_{k-1} h_{k-1}, \quad k \geq 1, \tag{3.20}$$

где постоянные β_{k-1} определяются из условия сопряженности векторов h_k и h_{k-1}. Найдем выражения для этих коэффициентов. Запишем условие сопряженности (3.19) для векторов h_k и h_{k-1}:

$$h_{k-1}\, Q\, h_k^{\ T} = 0.$$

Или

$$0 = h_{k-1}\, Q\, h_k^{\ T} = h_{k-1}\, Q(-f'(x^{(k)}) + \beta_{k-1} h_{k-1})^T =$$

$$= -\, h_{k-1}\, Q(f'(x^{(k)}))^T + \beta_{k-1}\, h_{k-1}\, Q(h_{k-1})^T.$$

Т.к. Q –симметричная матрица, то $h_{k-1}\, Q(f'(x^{(k)}))^T = (f'(x^{(k)}))\, Q\, (h_{k-1})^T$. Отсюда имеем

$$\beta_{k-1} = \frac{f'(x^{(k)})\, Q\, h_{k-1}^T}{h_{k-1}\, Q\, h_{k-1}^T}. \tag{3.21}$$

Сама минимизирующая последовательность точек метода сопряжённых градиентов определяется так:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h_k,$$

где $f(x^{(k)} + \alpha_k h_k) = \min\limits_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} + \alpha\, h_k)$.

Шаг метода α_k при этом можно определить по формуле

$$\alpha_k = -\frac{\left[f'(x^{(k)})\right]^{\mathrm{T}} h_k}{h_k Q\, h_k^T}. \tag{3.22}$$

Данный метод обеспечивает нахождение точки минимума квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2} x Q x^T + R x^T$ за конечное число шагов, не более чем n.

Заметим, что, если $f'(x^{(k)}) = 0$ при $k<n$, то вычисления следует прекратить, т.к. задача решена.

Можно показать, что направления h_k – направление убывания, поэтому $\alpha_k \geq 0$.

Пример 3.10. Найти минимум функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$$

в R^2 методом сопряженных градиентов, выбирая шаг α_k из условия минимизации функции вдоль выбранного направления.

Решение.

Так как функция $f(x)$ – квадратичная в R^2 и её гессиан $f''(x)$ = $Q=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ положительно определён, то точка минимума функции $f(x)$ может быть найдена после двух шагов метода сопряжённых градиентов.

Пусть начальное приближение имеет вид: $x^{(0)} = (0,0)$.

Первая итерация

Данная итерация выполняется также как и в методе наискорейшего спуска. Градиент функции $f(x)$ равен $f'(x)=\begin{pmatrix}2x_1+x_2-7 & x_1+4x_2-7\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Тогда h_0 = = $-f'(x^{(0)}) = (7,7)$.

Найдем следующее приближение

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 h_0 = (0,0) + \alpha_0(7,7) = (7\alpha_0, 7\alpha_0).$$

Минимум функции $f(x^{(1)}) = 98(2\alpha_0^2 - \alpha_0)$ достигается при $\alpha_0 = 1/4$, и, следовательно, $x^{(1)} = (7/4;7/4)$. Так как $f'(x^{(1)}) = (-7/4;7/4)$, то переходим к следующей итерации.

Вторая итерация

Так как $f'(x^{(1)}) = (-7/4;7/4)$, то для нахождения направления на данном шаге вычислим коэффициент β_0 по формуле (3.21). Имеем

$$\beta_0=\frac{f'(x^{(1)})\,Q\,h_0^T}{h_0\,Q\,h_0^T}=\frac{\left(-\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right)\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}}{(7;7)\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}}=\frac{7*(-1;1)\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}*7*\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{4*7*(1;1)\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}*7*\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\frac{(-1;3)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{4*(3;5)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\frac{2}{4*8}=\frac{1}{16}.$$

Тогда

$$h_1=-f'(x^{(1)})+\beta_0 h_0=\left(-\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{16}(7;7)=\left(\frac{35}{16};-\frac{21}{16}\right).$$

Для нахождения следующего приближения найдем шаг α_1. Для этого воспользуемся формулой (3.22)

$$\alpha_1=-\frac{\left[f'(x^{(1)})\right]^{\mathrm{T}}h_1}{h_1 Q\,h_1^T}=-\frac{\left(-\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right)\begin{pmatrix}35/16\\-21/16\end{pmatrix}}{\left(\frac{35}{16};-\frac{21}{16}\right)\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}35/16\\-21/16\end{pmatrix}}=-\frac{\frac{7}{4}(-1;1)*\frac{7}{16}*\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}}{\frac{7}{16}(5;-3)\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}*\frac{7}{16}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}}$$

$$=-\frac{4(-8)}{(7;-7)\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}}=\frac{32}{56}=\frac{4}{7}.$$

Таким образом,

$$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1 h_1=\left(\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right)+\frac{4}{7}\left(\frac{35}{16};-\frac{21}{16}\right)=(3,1),$$

$$f(x^{(2)}) = -14,$$

Нетрудно проверить, что $f'(x^{(2)}) = (0;0)$. Следовательно, $x^* = (3,1)$, а $f(x^*) = -14$.

До сих пор мы предполагали, что матрица Q является положительно определенной. В случае, когда матрица Q является положительно полуопределенной, доказывается, что метод сопряженных градиентов также позволяет определить не более чем за n шагов точку минимума, если она существует, либо доказать, что ее не существует.

Сформулируем метод сопряженных градиентов для не квадратичных функций. Для этого преобразуем формулы так, чтобы они не содержали матрицу Q, т.е.

$$\beta_{k-1} = \frac{f'(x^{(k)})\ h_{k-1}^T}{h_{k-1}\ h_{k-1}^T}. \tag{3.23}$$

Метод с введенным коэффициентом β_{k-1} также называется ***методом сопряжённых градиентов*** и применяется для минимизации не квадратичных функций. Естественно, что при этом метод перестаёт быть конечным, направления $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, \ldots$ не являются, вообще говоря, взаимно сопряжёнными относительно какой либо матрицы Q. Задачу определения шага α_k приходится решать с помощью численных методов.

Для повышения точности обычно в метод сопряжённых градиентов вводится процедура "обновления" – коэффициенты β_{n-1} , β_{2n-1} , β_{3n-1} , … не вычисляются по предложенной выше формуле, а полагаются равными нулю, при этом $h_i = -f'(x^{(i)})$, где $i = 0, n, 2n, \ldots$. Такая модификация позволяет уменьшить влияние погрешностей решения одномерных задач минимизации.

В этом случае метод сопряженных градиентов принимает вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h_k, \tag{3.24}$$

$$f(x^{(k)} + \alpha_k h_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} + \alpha\, h_k), \tag{3.25}$$

$$h_0 = -f'(x^{(0)}), \tag{3.26}$$

$$h_k = -f'(x^{(k)}) + \beta_{k-1} h_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{f'\left(x^{(k)}\right)\left[f'\left(x^{(k)}\right)\right]^T}{f'\left(x^{(k-1)}\right)\left[f'\left(x^{(k-1)}\right)\right]^T}, & k \neq n, 2n, \ldots \\ 0, \quad k = n, 2n, \ldots \end{cases}. \tag{3.27}$$

Метод сопряженных градиентов обладает высокой скоростью сходимости. В то же время его трудоемкость невелика. Он по трудоемкости лишь немного превосходит метод наискорейшего спуска. Все это позволяет отнести метод сопряженных градиентов к числу наиболее эффективных алгоритмов первого порядка.

3.3.3. Методы оптимизации второго порядка

Рассмотрим методы, которые относятся к числу наиболее эффективных способов решения задач безусловной оптимизации. В этих методах для определения направления убывания функции используются вычисления первых и вторых производных функции $f(x)$, за счёт чего обеспечивается более быстрая, чем в градиентных методах, сходимость к решению задач минимизации.

3.3.3.1. Метод Ньютона

Предположим, что $f(x)$ – выпуклая, дважды дифференцируемая на R^n функция, причём $f''(x)$– невырожденная на R^n матрица, т.е. $|f''(x)| \neq 0$.

В методе Ньютона последовательность $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, … генерируется из следующих соображений. Т.к. функция $f(x)$ – дважды дифференцируемая на R^n, то разложим в окрестности найденной точки $x^{(k)}$ функцию $f(x)$ в ряд по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x^{(k)}) + (f'(x^{(k)}),\ x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(\,(x - x^{(k)})\ f''(x^{(k)}), x - x^{(k)}) + o(\|x - x^{(k)}\|^2),$$

здесь $(f'(x^{(k)}),\ x - x^{(k)})$ – скалярное произведение векторов $f'(x^{(k)})$ и $x- x^{(k)}$, $(\,(x - x^{(k)})\ f''(x^{(k)}),\ x - x^{(k)})$ – скалярное произведение векторов $x- x^{(k)}$ и $(x - x^{(k)}) f''(x^{(k)})$.

Для нахождения следующей точки $x^{(k+1)}$ минимизируем функцию $f_k(x)$, которая является квадратичной частью приращения $f(x)$ - $f(x^{(k)})$, т.е. будем решать задачу

$$f_k(x) = (f'(x^{(k)}),\ x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(\,(x - x^{(k)})\ f''(x^{(k)}), x - x^{(k)}) \to min.$$

Нетрудно показать, что $f_k''(x) = f''(x^{(k)})$. Т.к. необходимым и достаточным условием выпуклости функции $f(x)$ является положительная полуопределенность матрицы ее вторых производных, а функция $f(x)$ по условию выпуклая функция, то и функция $f_k(x)$ – выпуклая функция.

Поэтому для нее необходимое условие минимума является и достаточным. Следовательно, достаточное условие минимума этой функции запишется в виде

$$f_k'(x) = f'(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})\ f''(x^{(k)}) = 0.$$

Решая эту систему линейных уравнений и принимая найденную точку минимума x за $x^{(k+1)}$, получаем

$$f'(x^{(k)}) + x\, f''(x^{(k)}) - x^{(k)}\ f''(x^{(k)}) = 0.$$

Умножим полученное равенство справа на матрицу, обратную к матрице вторых производных, т.е. на $[f''(x^{(k)})]^{-1}$, тогда

$$f'\left(x^{(k)}\right)[f''\left(x^{(k)}\right)]^{-1} + x - x^{(k))} = 0.$$

Отсюда

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)}, \qquad (3.28)$$

где $h^{(k)} = - f'\left(x^{(k)}\right)[f''\left(x^{(k)}\right)]^{-1}$, $k =- 0,1, \dots$.

Критерием достижения требуемой точности вычислений обычно служит условие (3.5) или выполнение неравенств

$$\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| < \varepsilon, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

(ε – заданное достаточно малое число).

Быстрая сходимость метода Ньютона доказывается лишь для достаточно хорошего начального приближения $x^{(0)}$, т.е. начальное приближение $x^{(0)}$ должно лежать в достаточно малой окрестности точки минимума x^*. Это требование является недостатком метода Ньютона, т.к. на практике это условие выполнить трудно, в связи с чем при неудачном начальном приближении использование метода может привести к расходящемуся процессу. В силу этого метод Ньютона часто используют на завершающем этапе минимизации при уточнении приближения к точке x^*, найденного другим, более простым методом.

Ещё более существенным недостатком является высокая трудоёмкость метода, обусловленная необходимостью вычисления и обращения на каждом шаге матрицы вторых производных минимизируемой функции.

В силу названных причин применение классического метода Ньютона не всегда приводит к успеху.

Многочисленные модификации метода направлены на то, чтобы, сохраняя основное достоинство метода – быструю сходимость, уменьшить трудоемкость метода и ослабить зависимость метода от начальных данных.

Отметим, что метод Ньютона в случае квадратичной функции $f(x)$ за одну итерацию обеспечивает получение оптимального решения задачи безусловной минимизации.

Пример 3.11. Найти минимум функции методом Ньютона.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 7x_1 - 7x_2$$

Решение. Так как функция $f(x)$ – квадратичная в R^2 и её гессиан $f''(x)$ $= Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ положительно определён, то точка минимума функции $f(x)$ может быть найдена в результате одного шага метода Ньютона.

Пусть начальное приближение имеет вид: $x^{(0)} = (0,0)$.

Градиент функции $f(x)$ равен $f'(x) = \left(2x_1 + x_2 - 7 \quad x_1 + 4x_2 - 7\right)^{\mathrm{T}}$. Тогда $f'(x^{(0)}) = (-7,-7)$.

Вычислим $[f''(x^{(0)})]^{-1}$, имеем

$$[f''(x^{(0)})]^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)},$$

где $h^{(0)} = -\ f'(x^{(0)})[f''(x^{(0)})]^{-1}$, т.е.

$$x^{(1)} = (0,0) - (-7,-7)\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (1,1)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (3,1).$$

Т.к. $f'(x^{(1)}) = (0;0)$, следовательно, $x^* = (3,1)$, а $f(x^*) = -14$.

3.3.3.2. Метод Ньютона с регулировкой шага

Для обеспечения сходимости метода Ньютона к точке минимума x^* независимо от значения начального приближения $x^{(0)}$ применяется метод Ньютона с регулировкой шага, где последовательность приближений строится по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}, \tag{3.29}$$

где $h^{(k)} = -\ f'(x^{(k)})[f''(x^{(k)})]^{-1}$, k =- 0,1, … , а длина шага α_k является оптимальным решением задачи одномерной оптимизации

$$f\left(x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})\left[f''(x^{(k)})\right]^{-1}\right) = \min_{0\le\alpha\le1} f\left(x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})\left[f''(x^{(k)})\right]^{-1}\right)$$

При $\alpha_k = 1$ данный метод совпадает с классическим методом Ньютона.

Вместо решения рассмотренной экстремальной задачи шаг α_k можно выбирать из условия монотонности функции

$$f\left(x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})\left[f''(x^{(k)})\right]^{-1}\right) < f(x^{(k)}) \tag{3.30}$$

Для этого на каждой итерации, начиная с $\alpha_k = 1$, уменьшают значение α_k до тех пор, пока не выполнится неравенство (3.30) (способ дробления шага). Если приближение $x^{(k)}$ находится далеко от точки минимума x^*, то длина шага α_k будет выбираться небольшой, при приближении точки $x^{(k)}$ к точке x^* длина шага α_k будет стремиться к единице.

Следует отметить, что метод Ньютона с регулировкой шага является одним из наиболее употребительных в вычислительной практике.

Уменьшить трудоёмкость метода можно, вычисляя матрицу $[f''(x^{(k)})]^{-1}$ не на каждом шаге, как в формуле (3.29), а один раз через каждые S шагов; число S подбирается эмпирически.

3.3.3.3. Квазиньютоновские методы минимизации

В данном разделе рассматриваются алгоритмы, не требующие вычисления матрицы $[f''(x^{(k)})]^{-1}$ и основанные на формировании специальным образом последовательности матриц $H^{(k)}$. Эта последовательность обладает тем свойством, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\| H^{(k)} - \left[f''(x^{(k)})\right]^{-1}\right\| = 0,$$

и её члены вычисляются только на основании информации о значениях первых производных функции $f(x)$.

Учитывая идейную близость с методом Ньютона, эти алгоритмы приведены в данном параграфе.

Предположим, что функция $f(x)$ является дважды дифференцируемой.

Алгоритм построения минимизирующей последовательности точек запишем следующим образом

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}, \tag{3.31}$$

где $h^{(k)} = -\ f'(x^{(k)})\ H^{(k)}$, $k = 0,1, \ldots ,$ $\alpha_k > 0$ – длина шага алгоритма; $H^{(k)}$ – nxn – матрица, которую будем выбирать таким образом, чтобы она в некотором смысле аппроксимировала матрицу $[f''(x^{(k)})]^{-1}$.

Заметим, что

$$f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k+1)}) = f''(x^{(k+1)})\ (x^{(k)} - x^{(k+1)}) + o(\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|).$$

Выразим отсюда невырожденную матрицу $f''(x^{(k+1)})$ с точностью до членов более высокого порядка, чем $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|$. Имеем

$$[f''(x^{(k+1)})]^{-1}\ [f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k+1)})] \approx x^{(k)} - x^{(k+1)}.$$

При этом, если функция $f(x)$ – квадратичная, т.е. $f(x) = \frac{1}{2}xQx^T + Rx^T$, то $f'(x) = xQ + R,\ \ f''(x) = Q$, и приближенное равенство обращается в точное

$$[f''(x^{(k+1)})]^{-1}\ \Delta y^{(k)} = \Delta x^{(k)},$$

где $\Delta y^{(k)} = f'(x^{(k+1)}) - f'(x^{(k)})$, $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$.

Поэтому потребуем, чтобы для матрицы $H^{(k+1)}$, стремящейся к $[f''(x^{(k+1)})]^{-1}$ при $k\to\infty$, выполнялось условие

$$H^{(k+1)}\ \Delta y^{(k)} = \Delta x^{(k)}$$

Это условие носит название ***квазиньютоновского***. Оно лежит в основе целого ряда методов аппроксимации $[f''(x^{(k)})]^{-1}$. Соответствующие методы минимизации, для которых на каждом шаге выполняется квазиньютоновское условие, также называются ***квазиньютоновскими***.

Пусть приближения к $[f''(x^{(k)})]^{-1}$ строятся по формуле

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \Delta H^{(k)},$$

где $H^{(0)}$ – любая положительно определенная симметричная $n \times n$ матрица, чаще на практике берется единичная матрица, а $n \times n$ матрица-поправка $\Delta H^{(k)}$ определяется согласно одной из следующих формул

$$\Delta H^{(k)} = \frac{(\Delta x^{(k)})(\Delta x^{(k)})^{\mathrm{T}}}{\Delta y^{(k)}(\Delta x^{(k)})^{T}} - \frac{(H^{(k)}(\Delta y^{(k)})^{T})^{T}(\Delta y^{(k)})^{\mathrm{T}} H^{(k)}}{\Delta y^{(k)} H^{(k)} (\Delta y^{(k)})^{T}}; \qquad (3.32)$$

$$\Delta H^{(k)} = \frac{1}{\Delta y^{(k)}\left(\Delta y^{(k)}\right)^{T}} \left\{\Delta x^{(k)}(\Delta y^{(k)})^{\mathrm{T}} + \Delta y^{(k)}(\Delta x^{(k)})^{\mathrm{T}} - H^{(k)}\Delta y^{(k)}(\Delta y^{(k)})^{\mathrm{T}} - \Delta y^{(k)}(\Delta y^{(k)})^{\mathrm{T}} H^{(k)}\right\} -$$

$$- \frac{1}{\Delta y^{(k)}\left(\Delta y^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}} \left\{ \frac{[\ \Delta y^{(k)}(\Delta x^{(k)})^{T} - \Delta y^{(k)} H^{(k)} (\Delta y^{(k)})^{T}\ ][\Delta y^{(k)}(\Delta y^{(k)})^{\mathrm{T}}]}{\Delta y^{(k)}(\Delta y^{(k)})^{T}} \right\}; \qquad (3.33)$$

$$\Delta H^{(k)} = \frac{1}{\Delta y^{(k)}(\Delta x^{(k)})^{T}} \left\{ - \Delta x^{(k)}(\Delta y^{(k)})^{\mathrm{T}} H^{(k)} - H^{(k)}\Delta y^{(k)}(\Delta x^{(k)})^{\mathrm{T}} + \right.$$

$$\left. + \left[1 + \frac{\Delta y^{(k)} H^{(k)} (\Delta y^{(k)})^{T}}{\Delta y^{(k)}(\Delta x^{(k)})^{T}}\right] \Delta x^{(k)}(\Delta x^{(k)})^{\mathrm{T}} \right\}; \qquad (3.34)$$

$$\Delta H^{(л)} = \frac{1}{\Delta y^{(л)} H^{(л)} \Delta y^{(л)}} \left\{ \Delta x^{(л)}(\Delta y^{(л)})^{\mathrm{T}} H^{(л)} + H^{(л)}\Delta y^{(л)}(\Delta x^{(л)})^{\mathrm{T}} - \right.$$

$$\left. - \left[1 + \frac{\Delta y^{(л)} \Delta x^{(л)}}{\Delta y^{(л)} H^{(л)} (\Delta y)^{(л)}}\right] H^{(л)}\Delta y^{(л)}(\Delta y^{(л)})^{\mathrm{T}} H^{(л)} \right\}; \qquad (3.35)$$

Длина шага в квазиньютоновских методах чаще всего выбирается из условия минимизации функции $f(x)$ вдоль заданного направления:

$$f[\ x^{(k)} - \alpha_k H^{(k)} f'(x^{(k)})\ ] = \min_{\alpha \geq 0} f\left[x^{(k)} - \alpha\, H^{(k)} f'(x^{(k)})\right].$$

Иногда $\alpha = 1$ как в классическом методе Ньютона, или выбирается в процессе дробления шага.

Оказывается, что для квадратичной функции $f(x)$ с симметричной положительно определённой матрицей Q все рассмотренные методы (3.32)-(3.35) генерируют одну и ту же последовательность точек $\{x^{(k)}\}$, причем

$$H^{(n)} = [f''(x^{(n)})]^{-1} = Q^{-1},\ x^{(n)} = x^*,$$

т.е. квазиньютоновские методы позволяют найти минимум квадратичной функции за n шагов. Для неквадратичной функции это не так.

Квазиньютоновские методы являются эффективным средством решения задач безусловной оптимизации. Их отличает высокая скорость сходимости, в то же время при их реализации не приходится выполнять такие трудоемкие операции, как вычисление матрицы вторых производных и ее обращение. Однако при большой размерности пересчет матриц $H^{(k)}$ вызывает затруднения.

3.4. Численные методы условной оптимизации

Один из численных подходов к решению задач условной оптимизации состоит в модификации градиентных методов безусловной минимизации так, чтобы в процессе построения последовательных приближений к точке минимума учитывалась принадлежность переменных допустимому множеству.

Рассмотрим несколько методов минимизации, основанных на этом подходе применительно к решению следующей задачи выпуклого программирования

$$f(x) \to min, \qquad (3.36)$$
$$x \in X \subset R^n,$$

где X – выпуклое замкнутое множество, $f(x)$ - выпуклая дифференцируемая на X функция.

3.4.1. Метод проекции градиента

Как уже отмечалось выше, в случае задач безусловной минимизации, когда $X=R^n$, весьма распространенным приближенным методом является метод градиентного спуска, в основе которого лежит свойство градиента: направление наибыстрейшего убывания функции совпадает с направлением антиградиента $(-f'(x))$.

Однако, непосредственное применение описанного метода в случае $X \neq R^n$ может привести к затруднениям, т.к. при каком-либо k точка $x^{(k+1)}$ может не принадлежать X. Эту трудность можно преодолеть, если предусмотреть процедуру возврата очередного приближения градиентного спуска $x^{(k+1)}$ на допустимое множество X. Если $x^{(k+1)} \notin X$, то такой возврат производится посредством проецирования $x^{(k+1)}$ на множество X, т.е. замены $x^{(k+1)}$ на ближайшую точку множества X. В результате мы придем к ***методу проекции градиента***.

Определение 3.7. Пусть заданы замкнутое выпуклое множество $X \subset R^n$ и точка $z \in R^n$. Точка $z_X = P_X(z)$ называется ***проекцией*** точки z на множество X, если

$$\rho(z_X, z) = \min_{x \in X} \rho(x, z)$$

где $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - расстояние между точками x и y в пространстве R^n.

Очевидно, что, если $z \in X$, то $P_X(z) = z$.

Таким образом, в методе проекции градиента последовательные приближения $x^{(k)}$ к точке минимума x^* целевой функции $f(x)$ на множестве X вычисляются по формулам:

$$x^{(k+1)} = P_X[x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})], \qquad (3.37)$$

где $k = 0, 1, \ldots$.

В качестве начального приближения $x^{(0)}$ выбирается любая точка из множества X.

В зависимости от способа вычисления α_k различают несколько вариантов метода проекции градиента. Шаг α_k можно выбрать любым из способов, описанных в разделе по безусловной оптимизации.

Вычисления по формуле (3.37) завершаются при выполнении неравенства

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k+1)} \right\| \le \varepsilon ,$$

где величина $\varepsilon > 0$ определяет точность решения задачи. Окончательно полагают

$$x^* \approx x^{(k)}, \qquad f^* \approx f(x^{(k)}).$$

Заметим, что в данном методе на каждой итерации кроме выбора параметров α_k нужно еще проецировать точку на множество X, что является, в свою очередь, самостоятельной задачей нелинейного программирования

$$F(x) = \|x - z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - z_j)^2 \to \min, \tag{3.38}$$

$$x \in X , \;\; z \notin X,$$

решение которой может вызвать затруднения.

Поэтому методом проекции градиента обычно пользуются лишь в тех случаях, когда задача проецирования решается в явном виде, например, когда множество X представляет собой шар в R^n, параллелепипед, гиперплоскость, полупространство или положительный октант. Если же задача проецирования для своего решения, в свою очередь, требует применения тех или иных итерационных методов, то эффективность описанного метода, вообще говоря, значительно снижается.

Пример 3.12. Найти проекцию $P_X(z)$ точки $z \in X$, на множество

$$X = \{x \in R^n \mid \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le r_0^2\}$$

(замкнутый шар радиуса r_0 с центром в точке (0,0) в пространстве R^n).

Решение.

Запишем условие задачи (3.38) для рассматриваемого случая:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - z_j)^2 \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le r_0^2 . \tag{3.39}$$

Рассмотрим возможные случаи.

С л у ч а й 1. $z \in X$, т.е. $\sum_{j=1}^{n} z_j^2 \le r_0^2$. Тогда $P_X(z) = z$.

С л у ч а й 2. $z \notin X$, т.е. $\sum_{j=1}^{n} z_j^2 = r^2 > r_0^2$.

Запишем ограничение-неравенство (3.39) в виде равенства, добавив в его левую часть дополнительную переменную $x_{n+1} = y^2 \ge 0$. В результате получим классическую задачу на условный минимум

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - z_j)^2 \to \min,$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + y^2 - r_0^2 = 0.$$

Для решения полученной задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - z_j)^2 + \lambda(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + y^2 - r_0^2)$$

и запишем для нее необходимые условия экстремума:

$$L'(x, y, \lambda) = 0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 2(x_j - z_j) + 2\lambda x_j = 0, \qquad j = 1, \dots, n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y\lambda = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 + y^2 - r_0^2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему из (n+2) уравнений с (n+2) неизвестными: $x_1, \dots, x_n, y, \lambda$, с учетом $\sum_{j=1}^{n} z_j^2 = r^2 > r_0^2$, находим:

$$\begin{cases} y = 0, \qquad j = 1, \dots, n, \\ \lambda_j = \dfrac{r}{r_0} - 1, \\ x_j = \dfrac{r_0}{r} z_j, \end{cases}$$

т.е.

$$x = \frac{r_0}{r} z = \frac{r_0}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} z_j^2}} z.$$

Проверим выполнение достаточного условия минимума функции Лагранжа $L(x,y,\lambda)$ в найденной точке: $d^2L > 0$. Для этого вычислим все производные второго порядка в точке $(x,y,\lambda) = (\frac{r_0}{r}z;\ 0;\ \frac{r}{r_0} - 1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2 + 2\lambda = 2\dfrac{r}{r_0}, \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \qquad\qquad i, j = 1,\ldots,n, i \neq j, \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda = 2\left(\dfrac{r}{r_0} - 1\right). \end{cases}$$

Поэтому $d^2L = 2\dfrac{r}{r_0}\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 + 2\left(\dfrac{r}{r_0} - 1\right)dy^2 > 0$ при $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 + dy^2 > 0$, т.е. достаточное условие минимума выполняется. Окончательно

$$P_X(z) = \begin{cases} z, & \text{если} \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \le r_0^2, \\ \dfrac{r_0}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} z_j^2}} z, & \text{если} \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \ge r_0^2. \end{cases} \tag{3.40}$$

Задание. Найти проекцию $z_X = P_X(z)$ точки $z \in R^n$ на указанные множества $X \subset R^n$.

1. $X = \{x \in R^n \mid x_j \ge 0, j = 1,\ldots,n\}$ (первый октант пространства R^n);
2. $X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^{(0)})^2 \le r_0^2\}$ (замкнутый шар радиуса r_0 с центром в точке $x^{(0)}$);
3. $X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b; a = (a_1,\ldots,a_n) \neq 0\}$ (гиперплоскость с нормальным вектором a);
4. $X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b; a = (a_1,\ldots,a_n) \neq 0\}$ (полупространство в R^n);
5. $X = \{x \in R^n \mid a_i \le x_i \le b_i, i = 1,\ldots, n\}$ (n-мерный параллелепипед).

Пример 3.13. Решить следующую задачу

$$f(x) = -x_1 + x_2^2 \to \min,$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 1.$$

методом проекции градиента, завершая вычисления при выполнении условия:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le 0{,}01 .$$

Решение. Данная задача является задачей выпуклого программирования. В качестве начального приближения возьмем, например, точку $x^{(0)} = (0;0{,}5) \in X = \{x \in R^n \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$. Градиент целевой функции имеет вид: $f'(x) = (-1;2x_2)$. Выберем α = 0,75.

Первая итерация. Т.к. $f'(x^{(0)}) = (-1;1)$, по формуле (3.37) находим

$$x^{(1)} = P_X[x^{(0)} - \alpha f'(x^{(0)})] = P_X[(0;0{,}5) - 0{,}75(-1;1)] = P_X[(0{,}75;-0{,}25)].$$

Точка (0,75;-0,25)$\in X$, поэтому $x^{(1)}$ = (0,75;-0,25). Проверим выполнение условий монотонности:

$$f(x^{(0)}) = 0 + (0{,}5)^2 = 0{,}25;$$
$$f(x^{(1)}) = -0{,}75 + (-0{,}25)^2 = -0{,}6875.$$

Т.к. $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$, то условие монотонности выполняется.

Требуемая точность не достигнута, т.к.

$$\left\| x^{(0)} - x^{(1)} \right\| = \{\sum_{J=1}^{2} (x_j^{(0)} - x_j^{(1)})^{1/2} = \{0{,}75^2 + 0{,}75^2\}^{1/2} = 1{,}06 > 0{,}01 .$$

Вторая итерация. Шаг вычислений α оставляем прежним. Как и на предыдущем шаге находим:

$$f'(x^{(1)}) = (-1;-0{,}5),$$
$$x^{(2)} = P_X[(0{,}75;-0{,}25) - 0{,}75(-1;-0{,}5)] = P_X[(1{,}5;\ 0{,}125)].$$

Точка z(1,5; 0,125) не принадлежит допустимому множеству X. Множество X представляет собой замкнутый шар радиуса r_0 = 1 с центром в начале координат в пространстве R^2, поэтому, используя результат примера 3.12, по формуле (3.35) находим

$$x^{(2)} = P_X[(1{,}5;\ 0{,}125)] = \frac{(1{,}5;\ 0.125)}{\sqrt{1{,}5^2 + 0{,}125^2}} = (0{,}9965;\ 0{,}08304),$$
$$f(x^{(2)}) = -0{,}9965 + (0{,}08304)^2 = -0{,}9896.$$

Т.к. $f(x^{(2)}) < f(x^{(1)})$, то условие монотонности выполняется. Требуемая точность не достигнута, т.к.

$$\left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\| = \sqrt{(0{,}75 - 0{,}9965)^2 + (-0{,}25 - 0{,}08304)^2} = 0{,}4145 > 0{,}01,$$

и процесс нахождения решения исходной задачи продолжается до достижения заданной точности. Окончательно получим,

$$x^* \approx x^{(5)} = (0{,}99998, -0{,}00194),\ \ f^* \approx f(x^{(5)}) = -1 .$$

Отметим, что точное решение рассматриваемой задачи есть: x^*=(1,0), f=-1.

3.4.2. Метод условного градиента

Рассмотрим второй градиентный метод, применимый к решению выпуклых задач (3.37), который называется методом условного градиента или методом линейной аппроксимации (линеаризации) целевой функции.

В основе метода лежит понятие условного градиента, который получается минимизацией на заданном множестве X линейной аппроксимации заданной функции $f(x)$.

В качестве $x^{(0)}$ выбирается любая точка из множества X.

Метод условного градиента укладывается в общую схему методов спуска. Приближения к решению задачи (3.36) строятся по рекуррентной формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}, \ k = 0,1,2,..., \qquad (3.41)$$

где вектор $h^{(k)}$ одновременно указывает направление убывания функции $f(x)$ и возможное направление относительно X в точке $x^{(k)} \in X$ (т.е. $x^{(k+1)} \in X$), а число $\alpha_k > 0$ выбирается из условий монотонности функции

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}), \ x^{(k+1)} \in X .$$

Пусть известно k-ое приближение $x^{(k)} \in X \ (k \ge 0)$ к решению задачи (3.36), причем $f'(x^{(k)}) \ne 0$. Тогда в окрестности точки $x^{(k)}$ функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = f(x^{(k)}) + (f'(x^{(k)}), x - x^{(k)}) + \circ(\|x - x^{(k)}\|), \qquad (3.42)$$

где $(f'(x^{(k)}), x - x^{(k)})$ – скалярное произведение векторов $f'(x^{(k)})$ и $x - x^{(k)}$, и линейная функция

$$f_k(x) = (f'(x^{(k)}), x - x^{(k)})$$

является приближением разности $f(x) - f(x^{(k)})$ с точностью до величины $o(\|x - x^{(k)}\|)$, в некоторой окрестности точки $x^{(k)}$.

Для выбора $h^{(k)}$ на k-ом шаге в формуле (3.41) поставим вспомогательную задачу минимизации на множестве X линейной аппроксимации функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$, т.е., отбрасывая константу $f(x^{(k)})$ в (3.42), запишем ее в виде:

$$f_k(x) = (f'(x^{(k)}), x - x^{(k)}) \to \min, \qquad x \in X . \qquad (3.43)$$

Пусть $z^{(k)}$ – решение этой задачи. Т.к. X - выпуклое, замкнутое множество, то решение $z^{(k)} \in X$. Тогда в формуле (3.36) полагают

$$h^{(k)} = z^{(k)} - x^{(k)}. \qquad (3.44)$$

Этот вектор принято называть ***условным антиградиентом*** функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$. Таким образом, следующее приближение $x^{(k+1)}$ к точке минимума x^* функции $f(x)$ на множестве X найдем по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k (z^{(k)} - x^{(k)}), \qquad \alpha_k \in (0,1). \tag{3.45}$$

В силу выпуклости множества X всегда $x^{(k+1)} \in X$.

В зависимости от способа выбора величины α_k можно получить различные варианты описанного метода. В результате необходимо положить

$$\alpha_k = \min(1, \alpha_k^*),$$

где α_k^* найдено по одному из описанных выше способов нахождения шага.

Условие окончания вычислений по методу условного градиента совпадает с аналогичным условием метода проекции градиента.

Отметим, что вспомогательная задача (3.43) является, вообще говоря, задачей нелинейного программирования. Укажем случаи, когда поиск ее решения $z^{(k)}$ не представляет особых затруднений.

С л у ч а й 1. Допустимое множество X задано линейными ограничениями и условием не отрицательности переменных. В этом случае задача (3.38) - это задача линейного программирования и ее решение можно найти с помощью симплекс-метода.

В случае, если $X = \{x \in E^n \mid a_j \le x_j \le b_j, j = 1,..., n\}$ – n-мерный параллелепипед, то

$$z_j^{(k)} = \begin{cases} a_j & \text{, если } \dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} > 0, \\ b_j & \text{, если } \dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} < 0, \\ \dfrac{a_j + b_j}{2} & \text{, если } \dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} = 0. \end{cases} \tag{3.46}$$

С л у ч а и 2. Допустимое множество

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^{(0)})^2 \le r_0^2\}$$

- шар радиуса r_0 с центром в точке $y^{(0)}$. Тогда

$$z^{(k)} = y^{(0)} - r_0 \frac{f'(x^{(k)})}{\left\| f'(x^{(k)}) \right\|}.$$

Пример 3.14. Решить следующую задачу

$$f(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 \to \min, \qquad 0 \le x_1 \le 1, \qquad 0 \le x_2 \le 2$$

методом условного градиента.

Решение.

Данная задача является задачей выпуклого программирования, т.к. функция $f(x)$ – выпуклая. В качестве начального приближения выберем точку

$$x^{(0)} = (0{,}0) \in X = \{x \in E^2 \mid 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 2\}.$$

Первая итерация. Найдем градиент $f'(x)$ = ($2x_1$- 4; $2x_2$- 2) в точке $x^{(0)}$: $f'(x^{(0)})$ = (-4; -2).

Запишем вспомогательную задачу (3.43)

$$f_k(x) = (f'(x^{(0)}), x - x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_i}\left(x_i - x_i^{(0)}\right) = -4x_1 - 2x_2 \to \min,$$
$$0 \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le 2.$$

Вспомогательная задача является задачей линейного программирования, которая может быть решена графически. Однако воспользуемся для ее решения условием (3.46), откуда следует, что $z^{(1)}$ = (1;2).

Найдем α_0 из условия минимизации функции вдоль выбранного направления. Имеем

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha(z^{(0)} - x^{(0)}) = (0{,}0) + \alpha((1{,}2) - (0{,}0)) = (\alpha, 2\alpha)$$

Обозначим $\Phi_0(\alpha) = f(x^{(1)})$, т.е. $\Phi_0(\alpha) = f[(\alpha, 2\alpha)] = 5\alpha^2 - 8\alpha.$. Из условия $\Phi_0'(\alpha) = 0$ находим: α = 0,8 (проверить, что в этой точке есть минимум функции Φ_0). Откуда $\alpha_0 = min$ (1; α) = 0,8.

Вычислим очередное приближение: $x^{(1)} = (\alpha_0; 2\alpha_0) = (0{,}8; 1{,}6)$. Т.к. $\left\| x^{(0)} - x^{(1)} \right\| = \{(0{,}8)^2 + (1{,}6)^2\}^{1/2} = 1{,}79 > 0{,}1$, то требуемая точность не достигнута, и процесс нахождения оптимального решения исходной задачи продолжается. Окончательно, $x^* \approx x^{(8)} = (0{,}957; 0{,}953)$, $f^* \approx f(x^{(8)}) = -3{,}91$.

3.4.3. Метод возможных направлений

Рассмотрим задачу минимизации (3.36).

Метод возможных направлений основан на следующей идее: на каждой итерации этого метода определяется возможное направление убывания функции и по этому направлению осуществляется спуск с некоторым положительным шагом. Собственно, на этой идее были основаны и градиентные методы, рассмотренные ранее: в методе проекции градиента нужно было проецировать точку на исходное множество X, а в методе условного градиента - решать задачу минимизации линейной функции на множестве X. В рассматриваемом методе направление спуска находят следующим образом: строят в точке x конус возможных направлений, который задается системой линейных неравенств, и выбирают в этом конусе вектор конечной длины, составляющий острый угол с антиградиентом целевой функции.

Итак, процесс нахождения решения задачи минимизации заключается в построении последовательных приближений к точке минимума x^* целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве, по формуле (3.2), где направление $h^{(k)}$ – возможное направление убывания функции $f(x)$.

Определение 3.8. Вектор $h^{(k)} \neq 0$, определяющий направление перемещения (3.2) из точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$, назовем ***возможным направлением убывания*** функции $f(x)$ в точке x на множестве X, если $h^{(k)}$ удовлетворяет следующим двум требованиям:

1. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ точка $x^{(k+1)}$ из (3.2) принадлежит множеству X (т.е. $h^{(k)}$ задает ***возможное направление)*** .

2. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ выполняется неравенство $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$ (т.е. $h^{(k)}$ определяет ***направление убывания*** $f(x)$).

Первое условие означает, в частности, что для граничных точек $x^{(k)}$ допустимого множества X вектор $h^{(k)}$ направлен внутрь X.

Величина $\alpha_k > 0$ в (3.2) выбирается из условия наибольшего убывания целевой функции в направлении $h^{(k)}$ с учетом требования $x^{(k+1)} \in X$.

Заметим, что, если задача выбора возможного направления убывания на каждой итерации слишком сложна и требует решения вспомогательных задач минимизации, сравнимых по трудности, быть может, с исходной задачей, то такой метод минимизации будет малоэффективным. Возникает вопрос: нельзя ли указать простые и достаточно удобные для реализации способы выбора возможных направлений убывания? Оказывается, для достаточно широких классов гладких задач такие способы существуют.

Рассмотрим сначала метод возможных направлений решения задачи минимизации выпуклой дифференцируемой нелинейной функции $f(x)$ на допустимом множестве X, заданном линейными ограничениями

$$f(x) \to \min \tag{3.47}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,...,m, \tag{3.48}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,...,n. \tag{3.49}$$

Если задача наряду с ограничениями-неравенствами содержит и равенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, то для преобразования их к виду (3.48) следует выразить из этих равенств какие-либо переменные через остальные, записать для них условие не отрицательности и исключить выбранные переменные из остальных ограничений и целевой функции.

Опишем выбор вектора $h^{(k)} = (h_1^{(k)},...,h_n^{(k)})$ из (3.2), определяющего возможное направление убывания функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$. Рассмотрим возможные случаи.

С л у ч а й 1. Пусть в точке $x^{(k)}$ все неравенства (3.48) и (3.49) выполняются как строгие. Это означает, что $x^{(k)}$ - внутренняя точка допустимого множества X. Тогда

$$h^{(k)} = -f'(x^{(k)}), \tag{3.50}$$

т.е. определение очередного приближения $x^{(k+1)}$ из (3.2) совпадает с итерацией градиентного метода.

С л у ч а й 2. Пусть хотя бы одно из неравенств (3.48), (3.49) в точке $x^{(k)}$ обращается в равенство, т.е. $x^{(k)}$ является граничной точкой допустимого множества *X*. Тогда выбор $h^{(k)}$ в соответствии с (3.50), вообще говоря, невозможен, т.к. может оказаться, что точка $x^{(k+1)}$ из (3.2) при любом $\alpha_k > 0$ не принадлежит множеству X ($h^{(k)}$ из (3.50) не является возможным в точке $x^{(k)}$ направлением).

Опишем, как определять возможное направление убывания $h^{(k)}$ в этом случае.

Обозначим через I_k и J_k множества индексов, соответствующих ограничениям (3.48), (3.49), которые в точке $x^{(k)}$ обращаются в равенства, т.е.

$$I_k = \{i \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i\}, \qquad J_k = \{j \mid x_j^{(k)} = 0\}. \tag{3.51}$$

Представим компоненты $h_j^{(k)}$ вектора $h^{(k)}$ для $j \notin J_k$ в виде

$$h_j^{(k)} = h_j^{(k)+} - h_j^{(k)-}, \tag{3.52}$$

где

$$h_j^{(k)+} = \begin{cases} h_j^{(k)}, \text{если}\, h_{\mathrm{j}}^{(k)} \ge 0, \\ 0 \quad, \text{если}\, h_{\mathrm{j}}^{(k)} < 0; \end{cases}$$

$$h_j^{(k)-} = \begin{cases} 0 \quad\;, \text{если}\, h_{\mathrm{j}}^{(k)} \ge 0, \\ -h_j^{(k)}, \text{если}\, h_{\mathrm{j}}^{(k)} < 0. \end{cases}$$

Очевидно, $h_j^{(k)+}, h_j^{(k)-} \ge 0$, и $h_j^{(k)+} * h_j^{(k)-} = 0$, для всех $j \notin J_k$. Такое представление для $h_j^{(k)}$, $j \notin J_k$, позволяет находить вектор $h^{(k)}$ как решение задачи линейного программирования, содержащей условие не отрицательности переменных, несмотря на то, что его компоненты могут быть отрицательными.

Для $j \in J_k$ представление (3.52) не используется, т.к. у вектора $h^{(k)}$, определяющего возможное направление, компоненты $h_j^{(k)}$ с номерами $j \in J_k$ не могут быть отрицательными.

Итак, вектор $h^{(k)} = (h_1^{(k)}, ..., h_n^{(k)})$ из (3.2) ищется как решение следующей задачи линейного программирования:

$$F(h^{(k)}) = (f'(x^{(k)}), h^{(k)}) = \sum_{j \in J_k} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} h_j^{(k)} + \sum_{j \notin J_k} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} (h_j^{(k)+} - h_j^{(k)-}) \to \min, \tag{3.53}$$

$$(a^{(i)}, h^{(k)}) = \sum_{j \in J_k} a_{ij} h_j^{(k)} + \sum_{j \notin J_k} a_{ij} (h_j^{(k)+} - h_j^{(k)-}) \le 0, \quad i \in I_k, \tag{3.54}$$

$$\sum_{j=1}^{n} | h_j^{(k)} | = \sum_{j \in J_k} h_j^{(k)} + \sum_{j \notin J_k} (h_j^{(k)+} - h_j^{(k)-}) \le 1, \tag{3.55}$$

$$h_j^{(k)} \ge 0, \quad j \in J_k, \tag{3.56}$$

$$h_j^{(k)+}, h_j^{(k)-} \geq 0, \quad j \notin J_k\ , \tag{3.57}$$

$$h_j^{(k)+} * h_j^{(k)-} = 0, \quad j \notin J_k, \tag{3.58}$$

где $a^{(i)} = (a_{i1}, ..., a_{in})$.

Для учета дополнительного условия (3.58) при решении задачи (3.51) - (3.57) симплекс-методом следует не включать переменные $h_j^{(k)+}$ и $h_j^{(k)-}$ с одинаковым номером j в число базисных переменных одновременно.

Поясним смысл соотношений (3.53) - (3.58).

1. Минимум целевой функции $F_k(h^{(k)})$ из (3.53) соответствует минимально возможный с учетом ограничений (3.54) – (3.58) угол между искомым вектором $h^{(k)}$ и антиградиентом $(-f'(x^{(k)}))$, определяющим направление скорейшего убывания $f(x)$ в точке $x^{(k)}$.

2. Ограничение (3.54) для каждого $i \in I_k$ означает, что вектор $h^{(k)}$ составляет угол $\varphi_i \geq \pi/2$ с вектором $a^{(i)}$, нормальным к граничной гиперплоскости $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i$ допустимого множества X и направленным вне X.

Т.к. точка $x^{(k)}$ принадлежит этой гиперплоскости, то условие (3.54) для любого $i \in I_k$ гарантирует, что направление $h^{(k)}$ является возможным по отношению к i-му ограничению (3.48) исходной задачи.

3. Условие (3.55) является ограничением на длину вектора $h^{(k)}$ и обеспечивает ограниченность снизу целевой функции $F_k(h^{(k)})$ из (3.53).

4. Неравенство (3.56) для каждого $j \in J_k$ гарантирует, что направление $h^{(k)}$ является возможным по отношению к j-му ограничению (3.49) исходной задачи.

5. Соотношения (3.57) и (3.58) следуют из представления (3.52) компонент $h_j^{(k)}$, $j \notin J_k$ вектора $h^{(k)}$.

Опишем теперь, как определить величину перемещения α_k вдоль направления $h^{(k)}$ из (3.2). Для найденного вектора $h^{(k)}$ она находится из условия

$$f(x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}) = \min_{\alpha > 0,\, x^{(k)} + \alpha h^{(k)} \in U} f(x^{(k)} + \alpha h^{(k)}), \tag{3.59}$$

т.е. $\alpha_k = \min(\overline{\alpha}_{k1}, ..., \overline{\alpha}_{km}, \widehat{\alpha}_{k1}, ..., \widehat{\alpha}_{kn}, \alpha_k^*)$, где $\overline{\alpha}_{ki}$ и $\widehat{\alpha}_{kj}$ – максимальные перемещения, при которых для точки $x^{(k+1)}$ из (3.2) выполняются соответственно i-ое ограничение (3.48) и j-ое ограничение (3.49), т.е.

$$\overline{\alpha}_{ki} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } (a^{(i)}, h^{(k)}) \leq 0, \\ [b_i - (a^{(i)}, x^{(k)})]/(a^{(i)}, h^{(k)}), & \text{если } (a^{(i)}, h^{(k)}) > 0, \end{cases} \tag{3.60}$$

$$\widehat{\alpha}_{ki} = \begin{cases} +\infty, & \text{, если } h_j^{(k)} \ge 0, \\ -x_j^{(k)} / h_j^{(k)}, & \text{если } h_j^{(k)} < 0, \end{cases} \tag{3.61}$$

а α_k^* находится из условия наискорейшего спуска вдоль направления вектора $h^{(k)}$ без учета ограничений (3.48), (3.49), т.е.

$$\Phi_k(\alpha_k^*) = \min_{\alpha>0} \Phi_k(\alpha), \tag{3.62}$$

где $\Phi_k(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha h^{(k)})$.

Приведем алгоритм k-го шага решения задачи (3.47) - (3.49) методом возможных направлений.

1. Подставить $x^{(k)}$ в неравенства (3.48) и (3.49) и определить множества индексов I_k, J_k по формулам (3.51).

2. Если $I_k = J_k = \varnothing$, найти вектор $h^{(k)}$ из (3.50), в противном случае определить $h^{(k)}$ из решения задачи линейного программирования (3. 53) - (3.57) с помощью формулы (3.52).

3. Для найденного вектора $h^{(k)}$ определить α_k из формул (3.59)-(3.62).

4. Найти очередное приближение $x^{(k+1)}$ по формуле (3.2).

Условие завершения вычислений рассмотренным выше методам.

Пример 3.15. Решить следующую задачу нелинейного программирования

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min \tag{3.63}$$

$$x_1 + x_2 \le 3, \tag{3.64}$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4, \tag{3.65}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \tag{3.66}$$

методом возможных направлений, завершая вычисления при условии, что $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le 0{,}01$.

Решение.

Данная задача является задачей выпуклого программирования. В качестве начального приближения выберем точку

$$x^{(0)} = (0{,}4; 1{,}4) \in \{X = \{x \in E^2 \mid x_1 + x_2 \le 3, x_1 + 2x_2 \le 4, x_1, x_2 \ge 0\}.$$

Ш а г 1.

1. Ограничения (3.64) - (3.66) в точке $x^{(0)}$ выполняются как строгие, т.е. $x^{(0)}$ – внутренняя точка множества X, поэтому $I_0 = J_0 = \varnothing$.

2. В соответствии с (3.50) находим

$$h^{(0)} = -f'(x^{(0)}) = -(2(x-4); 2(x-2)) = (7{,}2; 1{,}2). \tag{3.67}$$

3. Из формул (3.59) - (3.62) получаем:

а) т.к. $a^{(1)} = (1;\ 1)$ и $(a^{(1)}, h^{\{0\}}) = 7{,}2 + 1{,}2 = 8{,}4 > 0$, то

$$\overline{\alpha}_{01} = \frac{b_1 - (a^{(1)}, x^{(0)})}{(a^{(1)}, h^{(0)})} = \frac{3-(0{,}4+1{,}4)}{8{,}4} = 1/7,$$

б) т.к. $a^{(2)} = (1;2)$ и $(a^1, h^{(0)}) = 7{,}2 + 2*1{,}2 = 9{,}6 > 0$, то

$$\overline{\alpha}_{02} = \frac{b_2 - (a^{(2)}, x^{(0)})}{(a^{(2)}, h^{(0)})} = \frac{4-(0{,}4+2*1{,}4)}{9{,}6} = 1/12,$$

в) т.к. $h_j^{(0)} > 0$, $j = 1{,}2$, то $\widehat{\alpha}_{01} = \widehat{\alpha}_{02} = \infty$.

г) определим α_0^* в соответствии с (3.62), используя условие минимума: $\Phi_0'(a) = 0$.

$$\Phi_0(\alpha) = f(x^{(0)} + \alpha h^{(0)}) = (0{,}4 + 7{,}2\alpha - 4)^2 + (1{,}4 + 1{,}2\alpha - 2)^2,$$

$$\Phi_0'(\alpha) = 106{,}56\alpha - 53{,}28 = 0, \text{ откуда } \alpha_0^* = 0{,}5.$$

д) из (3.59) окончательно находим

$$\alpha_0 = \min(1/7,\ 1/12,\ \infty,\ \infty,\ 0{,}5) = 1/12 \qquad (3.68)$$

4. Используя равенства (3.2), (3.67), (3.68), получим

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 h^{(0)} = (0{,}4;1{,}4) + (1/12)(7{,}2;1{,}2) = (1;1{,}5). \qquad (3.69)$$

5. Проверим выполнение условия окончания счета.

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| = \{(1-0{,}4)^2 + (1{,}5-1{,}4)^2\}^{1/2} > 0{,}01.$$

Т.к. условие остановки не выполняется, перейдем к шагу 2.

Шаг 2.

I. В найденной точке $x^{(1)}$ второе ограничение (3.65) выполняется как равенство, поэтому $x^{(1)}$ – граничная точка множества X, причем $I_1 = \{2\}$, $J_1 = \varnothing$.

2. Задача (3.53) - (3.57) для определения $h^{(1)}$ принимает вид

$$F_1(h^{(1)}) = \frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_1}(h_1^{(1)+} - h_1^{(1)-}) + \frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2}(h_2^{(1)+} - h_2^{(1)-}) =$$
$$= -6(h_1^{(1)+} - h_1^{(1)-}) - (h_2^{(1)+} - h_2^{(1)-}) \to \min$$

$$(a^{(2)}, h^{(1)}) = h_1^{(1)+} - h_1^{(1)-} + 2h_2^{(1)+} - 2h_2^{(1)-} \le 0,$$
$$h_1^{(1)+} - h_1^{(1)-} + h_2^{(1)+} - h_2^{(1)-} \le 1,$$
$$h_j^{(1)+}, h_j^{(1)-} \ge 0,$$
$$h_j^{(1)+} * h_j^{(1)-} = 0, \quad j = 1{,}2.$$

Решив данную задачу с помощью симплекс-метода, получим

$$h_1^{(1)+} = 2/3, \quad h_2^{(1)-} = 1/3, \quad h_1^{(1)-} = h_2^{(1)+} = 0,$$

т.е.

$$h^{(1)} = (h_1^{(1)+} - h_1^{(1)-};\ h_2^{(1)+} - h_2^{(1)-}) = (2/3;\ -1/3). \qquad (3.70)$$

4. По формулам (3.59) - (3.62) находим: $\overline{\alpha}_{11} = 3/2; \overline{\alpha}_{12} = \widehat{\alpha}_{11} = \infty$. Т.к. $h_2^{(1)} < 0$, то $\widehat{\alpha}_{12} = -x_2^{(1)} / h_2^{(1)} = 9/2$. Определим α_0^* из (3.62).

$$\Phi_1(\alpha) = (1 + (2/3)\alpha - 4)^2 + (3/2 - \alpha/3 - 2)^2,$$

$$\Phi_1'(\alpha) = (10/9)\alpha - 11/3 = 0,$$

значит α = 3,3. Окончательно,

$$\alpha_1 = \min(3/2,\ \infty,\ \infty,\ 9/2,\ 3{,}3) = 3/2. \tag{3.71}$$

4. Очередное приближение $x^{(2)}$ находим по формуле (3.2) с учетом (3.69) – (3.71):

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 h^{(1)} = (1; 1{,}5) + 1{,}5(2/3; -1/3) = (2; 1).$$

5. Проверим условие окончания счета

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\| = \{(2-1)^2 + (1-1{,}5)^2\}^{1/2} > 0{,}01$$

и перейдем к шагу 3.

Окончательно получим: $x^* = x^{(4)} = (5/2; 1/2)$, $\mathrm{f}^* = f(x^{(4)}) = 9/2$ (решение получено точное, т.к. $x^{(3)} = x^{(4)}$).

Метод возможных направлений используется также для решения задачи нелинейного программирования более общего вида, чем в (3.47) - (3.49), а именно,

$$f(x) \to \min \tag{3.72}$$

$$g_i(x) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \tag{3.73}$$

где $f(x)$, $g_i(x)$ – выпуклые, дифференцируемые в R^n функции.

Опишем один из вариантов определения необходимого для решения этой задачи вектора $h^{(k)}$ из (3.2) методом возможных направлений, а также укажем критерий окончания вычислений.

1. **Выбор вектора** $h^{(k)}$

Если $x^{(k)}$ – внутренняя точка допустимого множества X, т.е. $g_i(x^{(k)}) < 0, \quad i = 1,\dots,m,$ то вектор $h^{(k)}$ так же, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (3.50).

Если же $x^{(k)}$ – граничная точка множества X, т.е. множество индексов

$$I_k = \{i \mid g_i(x^{(k)}) = 0\} \tag{3.74}$$

непустое, то компоненты $h_j^{(k)}$ вектора $h^{(k)}$ представляются в виде $h_j^{(k)} = h_j^{(k)+} - h_j^{(k)-}$ и находятся из решения следующей задачи линейного программирования с переменными σ_k, $h_j^{(k)+}$, $h_j^{(k)-}$, $j = 1,\dots,n$:

$$F_k = -\sigma_k \to \min \tag{3.75}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j}(h_j^{(k)+} - h_j^{(k)-})\right] + \sigma_k \le 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\frac{\partial g_i(x^{(k)})}{\partial x_j}(h_j^{(k)+}-h_j^{(k)-})]+\sigma_k\le 0,\quad i\in I_k,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(h_j^{(k)+}+h_j^{(k)-})\le 1,$$

$$\sigma_k, h_j^{(k)+}, h_j^{(k)-}\ge 0,$$

$$h_j^{(k)+} * h_j^{(k)-}=0,\quad j=1,...,n.$$

Замечание. Для ускорения сходимости метода возможных направлений множество индексов (3.74) иногда определяют не по точному, а по приближенному равенству $g_i(x)=0$ с возрастающей точностью ε_k, т.е. вместо I_k используют множество

$$I_k(\varepsilon_k)=\{i\,|-\varepsilon_k\le g_i(x^{(k)})\le 0\},$$

где $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$.

2. **Выбор величины перемещения α_k**

Величина α_k находится по аналогии с предыдущим случаем (3.47) – (3.49), т.е.

$$\alpha_k=\min(\alpha_{k1},...,\alpha_{km},\alpha_k^*),$$

где α_k^* определяется из (3.62), а α_{k1}, i = 1,...,m, - максимально возможное перемещение вдоль направления $h^{(k)}$ с учетом i-го ограничения (3.73), найденное из условия $g_i(x^{(k)}+\alpha_{k1}h^{(k)})=0$.

3. **Критерий окончания вычислений**

Условием достижения заданной точности решения $\varepsilon > 0$ задачи (3.72) - (3.73) методом возможных направлений служит выполнение хотя бы одного из неравенств: $\|f'(x^{(k)})\|\le\varepsilon,\ \ \sigma_k\le\varepsilon.$

3.4.4. Методы штрафных и барьерных функций

До сих пор мы рассматривали методы решения экстремальных задач, рассчитанные на случай, когда допустимое множество имеет достаточно простую структуру, например, задается линейными ограничениями. Учет общих нелинейных ограничений представляет собой более сложную проблему. Здесь трудно предложить какие-либо универсальные подходы. Один из возможных подходов, основанный на учете ограничений путем изменения целевой функции исходной задачи оптимизации, дают методы штрафных и барьерных функций. Эти методы имеют важное значение, т.к. они представляют собой не только эффективную вычислительную схему для отыскания решения задач математического программирования, но они служат также полезным инструментом при теоретическом анализе задач оптимизации; с их помощью можно получать необходимые условия оптимальности и т.д.

К методам штрафных и барьерных функций обычно относят целую группу методов, которые позволяют заменить задачу (3.1) последовательностью задач безусловной минимизации

$$F_k(x) = f(x) + H_k(x) \to \min, \quad x \in R^n, \quad k = 1,2,\dots , \tag{3.76}$$

где H_k – функции, которые с ростом k во все большей степени учитывают ограничения, определяющие допустимое множество X исходной задачи (3.1). Функции H_k обладают следующими свойствами:

- на большей части допустимого множества X эти функции близки к 0;
- каждая из них достаточно быстро возрастает либо при приближении изнутри к границе допустимого множества X (***барьерные*** функции), либо при выходе за его пределы (***штрафные*** функции).

Рассмотрим методы ***штрафных*** функций.

Определение 3.9. Пусть $X \subseteq R^n$ – заданное множество.Последовательность функций $\{H_k(x)\}$, определенных в R^n и обладающих свойством

$$\lim_{k\to\infty} H_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{, если } x \in X, \\ +\infty, & \text{если } x \notin X, \end{cases}$$

называется последовательностью штрафных функций множества X.

Для задачи нелинейного программирования

$$f(x) \to \min \tag{3.77}$$

$$g_i(x) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n,$$

где функции f и g_i являются выпуклыми, последовательность штрафных функций может быть построена различными способами. Положим

$$H(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) g_i(x) \tag{3.78}$$

где

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } g_i(x) \le 0, \\ \lambda_i, & \text{если } g_i(x) > 0, \end{cases}$$

а $\lambda_i > 0$ – некоторые постоянные числа, представляющие собой весовые коэффициенты.

Используя штрафную функцию, последовательно переходят от одной точки к другой до тех пор, пока не получат приемлемое решение. При этом координаты последующей точки находят по формуле

$$x_j^{(k+1)} = \max\{0; x_j^{(k)} - \alpha_k [\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^{(k)})}{\partial x_j}]\}. \tag{3.79}$$

Из последнего соотношения следует, что, если предыдущая точка $x^{(k)}$ – внутренняя, то $\lambda_i = 0$, $i = 1,..,$m, и переход к последующей точке осуществляется в направлении антиградиента. Если же $x^{(k+1)} \notin X$, то за счет выбора

λ_i на последующих итерациях достигается возвращение в допустимое множество. Причем, чем меньше λ_i, тем быстрее находится приемлемое решение. Поэтому итерационный процесс обычно начинают при сравнительно малых значениях λ_i и, продолжая его, эти значения постепенно увеличивают.

Опишем k-ый шаг решения задачи (3.77) методом штрафных функций.

1. Предположим, что найденная точка $x^{(k)} \in X$. Тогда $\lambda_i = 0$, i=1,...,m.

2. Вычислить частные производные по всем переменным от целевой функции и функций, определяющих область допустимых решений.

3. По формуле (3.79) найти координаты точки, определяющей возможно новое решение задачи. При этом шаг вычислений α_k можно определить с помощью одного из рассмотренных ранее способов.

4. Проверить, удовлетворяют ли координаты найденной точки допустимому множеству X. Если нет, то перейти к следующему пункту. Если $x^{(k+1)}$ -допустимая точка, то исследовать необходимость перехода к последующей допустимой точке. В случае такой необходимости перейти к п. 2, в противном случае найдено приемлемое решение задачи.

5. Установить значения весовых коэффициентов λ_i и перейти к п.3.

Критерии достижимости требуемой точности аналогичны критериям в градиентных методах оптимизации.

Пример 3.16. Решить следующую задачу нелинейного программирования

$$f = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \le 18, \quad x_1, x_2 \ge 0,$$

методом штрафных функций, завершая вычисления при выполнении условия $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le 0{,}01$.

Решение. Данная задача является задачей выпуклого программирования. Положим $x^{(0)} = (6{,}7) \in U = \{x \in E^2 \mid (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \le 18\}$, $f(x^{(0)}) = 85$. Возьмем α=0,1.

Обозначим $g(x) = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 - 18$. Определим частные производные от функций f и g по переменным x_1 и x_2:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2; \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 - 14; \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2 - 14.$$

Первая итерация. Т. к. $x^{(0)} \in X$, то координаты следующей точки $x^{(1)}$ определим по формуле

$$x_1^{(1)} = \max\{0; x_1^{(0)} - \alpha \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}\} = \max\{0; 6 - 0{,}1 * 2 * 6\} = 4{,}8,$$

$$x_2^{(1)} = \max\{0; x_2^{(0)} - \alpha \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2}\} = \max\{0; 7 - 0{,}1 * 2 * 7\} = 5{,}6.$$

Проверим, принадлежит ли эта точка допустимой области. Для этого найдем: $g(x^{(1)}) = (2{,}2)^2 + (1{,}4)^2 - 18 = -11{,}2 \le 0$, значит $x^{(1)} \in X$. Т.к. $f(x^{(1)})$ = 54,4 < $f(x^{(0)})$, а $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \{(4{,}8-6)^2 + (5{,}6-7)^2\}^{1/2} > 0{,}01$, то шаг вычислений α оставляем прежним и перейдем к следующей итерации.

Вторая итерация. Находим, как и на предыдущем шаге,

$$x_1^{(2)} = \max\{0; 4{,}8 - 0{,}1 * 2 * 4{,}8\} = 3{,}84;$$

$$x_2^{(2)} = \max\{0; 5{,}6 - 0{,}1 * 2 * 5{,}6\} = 4{,}48;$$

$$g(x^{(2)}) = (3{,}16)^2 + (2{,}52)^2 - 18 = -1{,}664 < 0.$$

Т.к. $g(x^{(2)}) < 0$, то $x^{(2)} \in X$; $f(x^{(2)}) = 34{,}816 < f(x^{(1)})$;

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \{(3{,}84-4{,}8)^2 + (4{,}48-5{,}6)^2\}^{1/2} > 0{,}01.$$

Третья итерация. Находим

$$x_1^{(3)} = \max\{0; 3{,}84 - 0{,}1 * 2 * 3{,}84\} = 3{,}072;$$

$$x_2^{(3)} = \max\{0; 4{,}48 - 0{,}1 * 2 * 4{,}48\} = 3{,}584;$$

$$g(x^{(3)}) = (3{,}928)^2 + (3{,}416)^2 - 18 \approx 9{,}1.$$

Т.к. $g(x^{(3)}) > 0$, то $x^{(3)} \notin X$.

Четвертая итерация. Т.к. $x^{(3)} \notin X$, то координаты следующей точки определим по формуле

$$x_1^{(4)} = \max\{0; x_1^{(3)} - \alpha[\frac{\partial f(x^{(3)})}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x^{(3)})}{\partial x_1}]\} =$$

$$= \max\{0; 3{,}072 - 0{,}1[2 * 3{,}072 + \lambda(2 * 3{,}072 - 14)]\} =$$

$$= \max\{0; 2{,}4576 + 0{,}7856\lambda\},$$

$$x_2^{(4)} = \max\{0; x_2^{(3)} - \alpha[\frac{\partial f(x^{(3)})}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g(x^{(3)})}{\partial x_2}]\} =$$

$$= \max\{0; 3{,}584 - 0{,}1[2 * 3{,}584 + \lambda(2 * 3{,}584 - 14)]\} =$$

$$= \max\{0; 2{,}8672 + 0{,}6832\lambda\}.$$

Необходимо выбрать параметр λ так, чтобы точка $x^{(4)}$ не слишком далеко удалялась от границы допустимой области X и вместе с тем принадлежала этой области. Путем подбора находим, что можно взять λ = 2. При данном значении получаем: $x_1^{(4)}$ = 4,0288, $x_2^{(4)}$= 4,2336. Найдем: $g(x^{(4)})$ = $(2.9712)^2 + (2{,}7664)^2 - 18 < 0$; $f(x^{(4)}) = (4.0288)^2 + (4.2336)^2 = 34{,}1546 < f(x^{(2)})$.

Т.к. $\|x^{(4)} - x^{(2)}\| \approx 0{,}31 > 0{,}01$, то необходимо перейти к следующей итерации.

Окончательно, получим $x^* \approx (4{,}005; 4{,}012)$.

В ***методе барьерных функций*** исходная задача нелинейного программирования также сводится к последовательности задач безусловной минимизации, но функции $H_k(x)$ выбираются таким образом, чтобы при больших k функции $F_k(x)$ из (3.76) мало отличались от $f(x)$ во внутренних точках допустимого множества X, и в то же время при приближении точки $x \in X$ к границе множества X эти функции неограниченно возрастали.

Определение 3.10. Пусть множество $X \subset R^n$ задано. Последовательность функций $\{H_k(x)\}$, определенных во всех внутренних точках множества X называется ***последовательностью барьерных функций*** этого множества, если выполняются условия:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} H_k(x) = 0$ для любой фиксированной внутренней точки x множества X;

2) $\lim\limits_{r\to\infty} H_k(x^{(r)}) = +\infty$ для любой последовательности внутренних точек $\{x^{(r)}\}$ множества X, сходящейся к какой-либо граничной точке этого множества.

Рассмотрим некоторые варианты метода барьерных функций. Положим

$$H_k(x) = H(x)/(k+1), \qquad k = 0,1,...,$$

где $H(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} |g_i(x)|^{-p}, \qquad p > 0,$ или $H(x) = -\sum\limits_{i=1}^{m} \ln[-g_i(x)].$

Нетрудно показать, что приведенные функции определяют последовательности барьерных функций допустимого множества X задачи (3.77).

3.5. Задания для самостоятельной работы и контрольные вопросы

Задание 3.1. Вычислить указанное минимальное или максимальное значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, используя

- метод половинного деления (варианты с нечетным номером),
- метод «золотого» сечения (варианты с четным номером),
- метод Фибоначчи.

Точку x^* определить с точностью до 10^{-2}.

3.1.1. $f_{min}(x)$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x \ln x$, [1.5;2],

3.1.2. $f_{min}(x)$, $f(x) = 1+\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt[3]{x^2}) - x\, \mathrm{arctg}\, \sqrt[3]{x}$, [0.5;1],

3.1.3. $f_{min}(x)$, $f(x) = x^3 - 3\sin x$, [0.5;1],

3.1.4. $f_{min}(x)$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$, [0.5;1],

3.1.5. $f_{max}(x)$, $f(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \cos x$, [0;1],

3.1.6. $f_{max}(x)$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - e^x - 2x$, [-1.5;1],

3.1.7. $f_{min}(x)$, $f(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x - 2x^2$, [3.5;4.5],

3.1.8. $f_{max}(x)$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1+x)(ln(1+x) - 1)$, [-0.5;0.5],

3.1.9. $f_{min}(x)$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x(lnx - 1)$, [0.5;1],

3.1.10. $f_{min}(x)$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x(lg(x/e) - 2)$, [1.5;2],

3.1.11. $f_{min}(x)$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x\, lg(\frac{x}{e})$, [1.5;2],

3.1.12. $f_{max}(x)$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - e^x - 2x$, [-1.5;1],

3.1.13. $f_{min}(x)$, $f(x) = 1 - 32x + 4x^2 + x^4$, [1;2],

3.1.14. $f_{min}(x)$, $f(x) = 1 + 4x + 2x^2 + x^4$, [-1;0],

3.1.15. $f_{max}(x)$, $f(x) = 2 + 5x - 10x^2 + 5x^3 - x^5$, [-3;-2],

3.1.16. $f_{min}(x)$, $f(x) = 3 + 120x - 4x^2 - x^4$, [2.5;3],

3.1.17. $f_{max}(x)$, $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{7}x^7$, [1;1.5],

3.1.18. $f_{max}(x)$, $f(x) = 5x + x^2 - \frac{1}{4}x^4$, [2;3],

3.1.19. $f_{max}(x)$, $f(x) = 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$, [0;1],

3.1.20. $f_{min}(x)$, $f(x) = 2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4$, [0;0.5],

3.1.21. $f_{max}(x)$, $f(x) = 2x^2 - (x + 1)^4$, [-3;-2],

3.1.22. $f_{min}(x)$, $f(x) = 2x + x^2 - \frac{1}{5}x^5$, [-1;-0.5],

3.1.23. $f_{min}(x)$, $f(x) = x - 2x^2 + \frac{1}{5}x^5$, [1;2],

3.1. 24. $f_{max}(x)$, $f(x) = 1 - 6x - 3x^2 - x^6$, [-1;0],

3.1.25. $f_{min}(x)$, $f(x) = 2x^2 + 3(5 - x)^{4/3}$, [1.5;2],

3.1.26. $f_{max}(x)$, $f(x) = 20x - 5x^2 + 8x^{5/4}$, [3;3.5],

3.1.27. $f_{max}(x)$, $f(x) = 80x - 30x^2 - \frac{1}{4}x^4$, [1;2],

3.1.28. $f_{max}(x)$, $f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - 1/6x^6$, [1;1.5],

3.1.29. $f_{min}(x)$, $f(x) = e^{-x} - 2\cos x$, [0;1],

3.1.30. $f_{min}(x)$, $f(x) = -\cos x - \cos 2x - 2x$, $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Задание 3.2. Для предложенных задач выполнить следующее:

1. Исследовать на выпуклость в R^2 функцию

$$f(x) = \frac{1}{2} xQx^T + Rx^T,$$

где

$$x = (x_1, x_2), \quad R = (r_1, r_2), \; Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \; q_{21}=q_{12}.$$

2. Составить программу и решить задачу

$$f(x) \to min, x \in R^2$$

a) градиентным методом, методом Гаусса-Зейделя, методом сопряженных градиентов (варианты с нечетными номерами),

b) методом покоординатного спуска, методом наискорейшего спуска, методом сопряженных градиентов (варианты с четными номерами),

выбирая в качестве начального приближения произвольную точку из R^2.

Шаг в градиентном методе следует выбирать из условия монотонности функции.

3. Решение, полученное в п.2, уточнить с помощью метода Ньютона.

3.2.1. $R = (1.1), Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

3.2.2. $R = (4.1), \; Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2.3. $R = (7.1), \; Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.4. $R = (2.4), \; Q = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.5. $R = (3,1), \; Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.6. $R = (4,2), \; Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.7. $R = (3,6), \; Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.8. $R = (2,1), \; Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.9. $R = (3,4), \; Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

3.2.10. $R = (1,8), \; Q = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.2.11. $R = (5,2), \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

3.2.12. $R = (8,2), \; Q = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.13. $R = (10,7), \; Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

3.2.14. $R = (7,3), \; Q = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.15. $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2.16. $R = (3,11), \; Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$.

3.2.17. $R = (8,7), \; Q = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2.18. $R = (0,3), \; Q = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.19. $R = (4,7),\ Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$ **3.2.20**. $R = (1,2),\ Q = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

3.2. 21. $R = (4,0),\ Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$ **3.2.22**. $R = (7,2),\ Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$

3.2.23. $R = (6,7),\ Q = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$ **3.2.24**. $R = (11,5),\ Q = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$

3.2.25. $R = (9,4),\ Q = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$ **3.2.26**. $R = (10,1),\ Q = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$

3.2.27. $R = (5,6),\ Q = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$ **3.2.28**. $R = (10,4),\ Q = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$

3.2.29. $R = (8,3),\ Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$ **3.2.30**. $R = (9,1),\ Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Задание 3.3. Для предложенных задач выполнить следующее:

1. В каждом варианте исследовать обе задачи на выпуклость.
2. Составить программу и решить
   - первую задачу
   а) методом условного градиента;
   б) методом возможных направлений;
   в) методом штрафных функций;
   г) методом барьерных функций;
   - вторую задачу методом проекции градиента,

выбирая в качестве начального приближения произвольную точку из R^2 и точность $\varepsilon = 10^{-3}$.

3.3.1

$$\min Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2,\quad x_1 + x_2 \le 3,\quad x_1 + 2x_2 \le 4,\ x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = x_1^2 - x_2\quad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 1.$$

3.3.2

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 20x_2,\quad x_1 + x_2 \le 15,\quad 2x_1 + 5x_2 \le 60,\quad 3x_1 + x_2 \le 30,\ x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 9)^2,\quad 5 \le x_1 \le 60,\quad 0 \le x_2 \le 15,$$

3.3.3

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2,\quad 6x_1 + 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 96,\quad -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

$$\min Z = x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 + x_2,\quad x_1 + 3x_2 = 7.$$

3.3.4

$$\min Z = x_1^2 + 2x_1 - x_2,\quad x_1 + x_2 \le 15,\quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 30,\quad 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

$$\min Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 32x_2,\quad 3x_1 + x_2 \le 30.$$

3.3.5

$$\max Z = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2,\quad 4x_1 + 3x_2 \le 12,\quad -x_1 + x_2 \le 1,\ x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\max Z = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2,\quad x_1 + x_2 = 3.$$

3.3.6

$$\max Z = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2,\quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20,\quad 2x_1 - x_2 + x_4 = 8,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

$$\min Z = -x_1 - 2x_2 + x_2^2,\quad 3x_1 + 2x_2 \le 6.$$

3.3.7

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2,\quad 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16,\quad -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

$$\max Z = 2x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2,\quad -1 \le x_1 \le 3,\quad 1 \le x_2 \le 4.$$

3.3.8

$$\max Z = 10x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2,\quad x_1 + 2x_2 \le 16,\quad 5x_1 + 2x_2 \le 40,\ x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\max Z = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2,\quad x_1 + 2x_2 \le 16.$$

3.3.9

$$\max Z = 18x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2,\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 16,\quad 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 40,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2,\quad x_1, x_2 \ge 0.$$

3.3.10

$$\min Z = x_1^2 + 2x_1 - x_2,\quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 30,\quad x_1 + x_2 \le 15,\quad 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60,\quad x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

$$\max Z = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2,\quad x_1 + 3x_2 \le 30.$$

3.3.11

$$\min Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2,\quad 2x_1 + 5x_2 \le 40,\quad 2x_1 + x_2 \le 16,\ x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2,\quad x_1 + x_2 \le 2.$$

3.3.12

$$\min Z = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 9)^2,\quad 5x_1 + 2x_2 \le 60,\quad x_1 + x_2 \le 15,\quad x_1 + 4x_2 \le 40,\ x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = x_1^2 - x_2,\quad 2x_1 - 2x_2 \le 1.$$

3.3.13

$$\min Z = x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 + x_2,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 7,$$
$$3x_1 + x_2 \le 3,\ x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

$$\min Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2,$$
$$2x_1 + x_2 \le 2.$$

3.3.14

$$\min Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 32x_2,$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 30,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 15,$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_5 = 60,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5.$$

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2,$$
$$2x_1 + x_2 = 2.$$

3.3.15

$$\max Z = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2,$$
$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2,\ x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2,$$
$$x_1 + x_2 = 3.$$

3.3.16

$$\min Z = -x_1 - 2x_2 + x_2^2,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4,\ x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2,$$
$$x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \le 9.$$

3.3.17

$$\max Z = 2x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2,$$
$$2x_1 - x_2 \le 6,$$
$$x_1 + x_2 \le 10,\ x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = 2x_1 + x_2,$$
$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 1.$$

3.3.18

$$\max Z = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 16,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 40,\ x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$\min Z = x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 36x_2,$$
$$-1 \le x_1 \le 4,$$
$$1 \le x_2 \le 2.$$

3.3.19

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2,$$
$$3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 8,$$
$$11x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 96,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.$$

$$\min Z = 9x_1^2 + x_2^2 - 54x_1 + 4x_2,$$
$$x_1 + 2x_2 = 16.$$

3.3.20

$$\max Z = -x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 18x_2,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 30,$$
$$x_1 + x_2 \le 15,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 60,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

$$\min Z = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 + 16x_2,$$
$$x_1 + 3x_2 = 30.$$

3.3.21

$$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 - 4x_1 + 8x_2$$
$$-x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$min\, f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2,$$
$$x_1 + x_2 \ge 2.$$

3.3.22

$$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 - 4x_1 + 8x_2$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 15,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$min\, f = 2x_1 - 3x_2$$
$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1.$$

3.3.23

$$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 12,$$
$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$min\, f = 2x_1 + 5x_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 4.$$

3.3.24

$$\max f = -1/2x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 2x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$2x_1 - x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$max\, f = 2x_1 + 5x_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 3.$$

3.3.25

$$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 - 4x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$max\, f = x_1 + 3x_2$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1.$$

3.3.26

$$\max f = -1/2x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 2,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$min\, f = 2x_1 + 3x_2$$
$$(x_1 + 3)^2 + (x_2 + 1)^2 \le 1.$$

3.3.27

$$\max f = -1/2x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 - 2x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$2x_1 - x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$min\, f = 6x_1^2 + x_2^2 - 54x_1 + 4x_2,$$
$$x_1 + 6x_2 \ge 12.$$

3.3.28

$$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$$
$$x_1 - x_2 \le 0,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$min\, f = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + 2x_2 = 12.$$

3.3.29

$$\max f = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$max\, f = -x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + 2x_2 = 8.$$

3.3.30

$$\max f = -x_1^2 - 3/2x_2^2 + 6x_2$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$-x_1 + x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$min\, f = 2x_1 + 3x_2$$
$$(x_1 + 3)^2 + (x_2 + 1)^2 \le 9.$$

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой численный метод решения задачи оптимизации?
2. Как в общем виде записывается последовательность приближений к решению задачи оптимизации? Поясните, что означают входящие в формулу символы.
3. Что означает сходимость методов оптимизации?
4. Что такое условие остановки? В каком виде оно может быть записано?
5. Что такое метод спуска?
6. Какие способы выбора шага Вы знаете? Охарактеризуйте каждый способ.
7. В чем заключается необходимость в рассмотрении численных методов нахождения экстремума функции одной переменной?
8. Какая функция называется унимодальной?
9. В чем заключается идея методов нахождения экстремума унимодальной функции?
10. Что такое отрезок локализации?
11. Сформулируйте метод деления отрезка пополам.
12. Что такое «золотое» сечение отрезка?
13. Сформулируйте метод «золотое» сечения.
14. Что такое числа Фибоначчи? Как они определяются?
15. Сформулируйте метод Фибоначчи.

16. От чего зависит число итераций в методе Фибоначчи?
17. Какие методы называются методами оптимизации нулевого порядка и почему?
18. В чем заключается идея метода покоординатного спуска с постоянным шагом?
19. Каким образом выбирается начальное приближение в данном методе? Как выбирается направление перехода от достигнутой точки к следующему приближению?
20. Что представляет собой цикл? Как меняется величина шага на протяжении всего цикла?
21. Опишите один цикл данного алгоритма. Какой цикл называется нерезультативным? Как изменяется величина шага вычислений в случае нерезультативного цикла?
22. Что представляет собой условие остановки в данном методе?
23. В чем отличие метода Гаусса-Зейделя от метода покоординатного спуска?
24. Опишите один цикл метода Гаусса-Зейделя.
25. Как аналитически можно вычислить шаг в методе Гаусса-Зейделя для квадратичной функции?
26. Какие методы называются методами оптимизации первого порядка и почему?
27. Какие свойства градиента используются в методах градиентного спуска?
28. Как строится последовательность приближений в данном методе? Каким образом выбирается начальное приближение в данном методе?
29. Как выбирается направление перехода от достигнутой точки к следующему приближению?
30. Опишите одну итерацию данного алгоритма.
31. Как выбирается величина шага вычислений?
32. Что представляет собой условие остановки в данном методе?
33. В чем отличие метода наискорейшего спуска от градиентного метода?
34. Опишите одну итерацию метода наискорейшего спуска.
35. Как аналитически можно вычислить шаг в данном методе для квадратичной функции?
36. Какие векторы называются сопряженными относительно матрицы Q? Какова идея метода сопряженных градиентов? Для минимизации каких функций используется данный метод? Как Вы считаете, в чем преимущество данного метода по сравнению с другими методами первого порядка для указанного класса функций?
37. Как строится последовательность приближений в данном методе? Каким образом выбирается начальное приближение?
38. Как выбирается направление перехода от достигнутой точки к следующему приближению?
39. Как выбирается величина шага вычислений?
40. Можно ли метод сопряженных градиентов использовать для минимизации произвольной функции? Если да, то в чем его отличие от рассмотренного ранее метода?
41. Какие методы называются методами оптимизации второго порядка и почему?
42. Опишите одну итерацию метода Ньютона с постоянным шагом.
43. Как строится последовательность приближений в данном методе? Каким образом выбирается начальное приближение?
44. Как выбирается направление перехода от достигнутой точки к следующему приближению?
45. Каковы достоинства и недостатки этого метода? Каким образом можно изменить данный метод, чтобы преодолеть его недостатки? Какие при этом возникают трудности?

Глава 4. Методы оптимизации функционалов

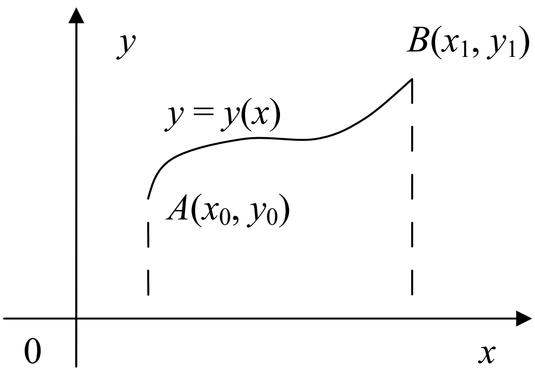
4.1. Элементы вариационного исчисления

Наряду с задачами, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции $y = y(x)$, в задачах, например, физики, теории управления нередко возникает необходимость найти максимальное или минимальное значения величины особого рода, которые называются функционалами.

Функционалы – это переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций. Функционал каждой функции из определенного множества ставит в соответствие число.

Приведем некоторые примеры функционалов.

1. Функционалом является длина L плоской кривой $y = y(x)$, соединяющей две заданные точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$.



Величина L может быть вычислена, если задано уравнение кривой $y = y(x)$, по формуле

$$L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Рис. 4.1. *Длина дуги кривой*

2. Площадь S некоторой поверхности также является функционалом, т.к. она определяется выбором поверхности, т.е. выбором функции $f(x,y)$, и определяется следующим образом

$$S[f(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + (\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}\, dxdy,$$

где D – проекция поверхности $f(x,y)$ на плоскость Oxy.

Примеров функционалов можно приводить много: это и моменты инерции, и координаты центра тяжести кривой или поверхности, статические моменты и т.д. Во всех этих задачах можно выделить характерную для функционалов зависимость: функции ставится в соответствие число (в то время как раньше при заданном значении функции $f(x)$ числу соответствовало число).

Определение 4.1. ***Вариационное исчисление*** – это раздел методов оптимизации, который изучает методы, позволяющие находить минимальные или максимальные значения функционалов.

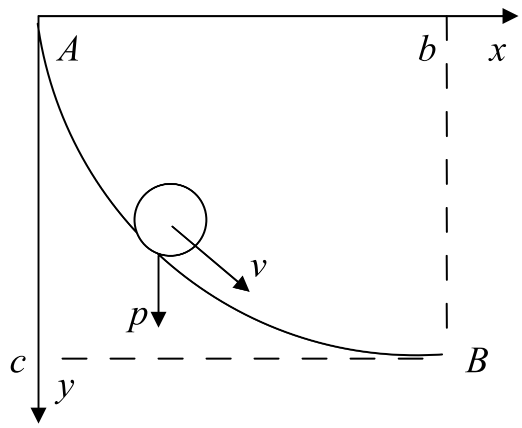
Определение 4.2. . Задачи, в которых требуется исследовать функционал на max или min , называются ***вариационными задачами***.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название вариационных принципов механики или физики. К числу таких вариационных принципов или простейших следствий из них принадлежат: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения количества движения и т.д.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и сформировалось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами после выхода фундаментальных работ известного математика Леонарда Эйлера, которого с полным основанием можно считать создателем вариационного исчисления.

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи.

1. **Задача о брахистохроне**. В 1696 известный швейцарский математик Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал математикам решить задачу о линии быстрейшего ската – брахистохроне (по гречески: брахистос – кратчайший, хронос – время). В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой, двигаясь по которой тяжелый материальный шарик пройдет путь от A до B за минимальное время.



Легко увидеть, что линией быстрейшего ската не будет прямая линия, соединяющая точки A и B, хотя она и является кратчайшим расстоянием между этими точками. При движении по прямой скорость движения будет возрастать медленнее, чем по кривой, более круто спускающейся вниз у точки A. Поэтому по этой кривой большая часть пути будет пройдена с большей скоростью.

Рис. 4.2. *Задача о брахистохроне*

Построим математическую модель данной задачи. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \cdot$$

Отсюда: $v = \sqrt{2gy}$. Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой линии. Т.к. $v = \frac{dS}{dt}$, то $dt = \frac{dS}{v}$. Зная, что элемент дуги вычисляется по формуле $dS = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$, можно записать время движения от точки A до точки B в виде функционала

$$T[y(x)] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Задача о брахистохроне свелась к нахождению непрерывно-дифференцируемой функции $y = y(x)$, которая принимает заданные значения на концах отрезка $[0,b]$, а именно, $y(0) = 0$, $y(b) = c$, и доставляет минимум функционалу $T[y(x)]$.

2. Задача о геодезических линиях. Требуется определить линию наименьшей длины, которая соединяет две заданные точки на некоторой поверхности $\varphi(x,y,z)=0$. Такие линии называются ***геодезическими***.

Мы имеем типичную вариационную задачу на условный экстремум: необходимо найти минимум функционала

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\,dx,$$

причем $y(x)$ и $z(x)$ должны удовлетворять условию: $\varphi(x,y,z)=0$.

Эта задача была решена в 1698 году Якобом Бернулли (братом Иоганна Бернулли), но общий метод решения таких задач был предложен Эйлером и Лагранжем.

3. Изопериметрическая задача. Требуется найти замкнутую линию заданной длины L, ограничивающую максимальную площадь S.

Такой линией, как было известно еще в Древней Греции, является окружность.

В рассматриваемой задаче необходимо найти максимум функционала

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx$$

при наличии дополнительного ограничения

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = L.$$

Дополнительные ограничения такого типа и называются ***изопериметрическими***. Общие методы решения изопериметрических задач были разработаны Эйлером.

4.1.1. Основные понятия вариационного исчисления

Методы решения вариационных задач очень схожи с методами исследования на максимум и минимум функций, поэтому для лучшего усвоения этого материала можно проводить аналогии с теорией функций.

Введем ряд определений.

Определение 4.3. Переменная величина $I\,[y(x)]$, аргументом которой является функция $y = y(x)$ называется ***функционалом***, если каждой функции $y = y(x)$ из некоторого класса функций соответствует число $I[y(x)]$.

Обозначается функционал следующим образом:

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx. \tag{4.1}$$

Аналогично определяются функционалы, зависящие от нескольких функций, и функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.

Определение 4.4. ***Приращением или вариацией*** δy аргумента $y(x)$ функционала $I\,[y(x)]$ называется разность между двумя функциями:

$$\delta y = y(x) - \tilde{y}(x), \tag{4.2}$$

где $\tilde{y}(x)$ меняется произвольно в некотором классе функций.

Для того чтобы ввести понятие непрерывности функционала, необходимо ответить на вопрос, какие изменения функции $y(x)$, являющейся аргументом функционала, называются малыми, или, что то же самое, какие кривые $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ считаются мало отличающимися или близкими.

Близость кривых можно определить по-разному. Можно кривые считать близкими, если они близки по ординатам, т.е. $y(x)$-$\tilde{y}(x)$ мало. Можно кривые считать близкими, если они близки не только по ординатам, но и по направлениям касательных, т.е. $y'(x)$ - $\tilde{y}'(x)$ мало и т.д.

Определение 4.5. Кривые $y(x)$, $\tilde{y}(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, называются близкими в смысле близости нулевого порядка, если для любого $x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|\,y(x) - \tilde{y}(x)\,| < \varepsilon, \tag{4.3}$$

где ε – заданная точность.

Определение 4.6. Кривые $y(x)$, $\tilde{y}(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, называются близкими в смысле близости первого порядка, если для любого $x \in [a,b]$ выполняются неравенства

$$|\,y(x) - \tilde{y}(x)\,| < \varepsilon, \tag{4.4}$$
$$|\,y'(x) - \tilde{y}'(x)\,| < \varepsilon,$$

где ε – заданная точность.

Определение 4.7. Кривые $y(x)$, $\tilde{y}(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, называются близкими в смысле близости k-го порядка, если для любого $x \in [a,b]$ выполняются неравенства

$$
\begin{gathered}
|y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon, \qquad (4.5)\\
|y'(x) - \tilde{y}'(x)| < \varepsilon,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
|y^{(k)}(x) - \tilde{y}^{(k)}(x)| < \varepsilon,
\end{gathered}
$$

где ε – заданная точность.

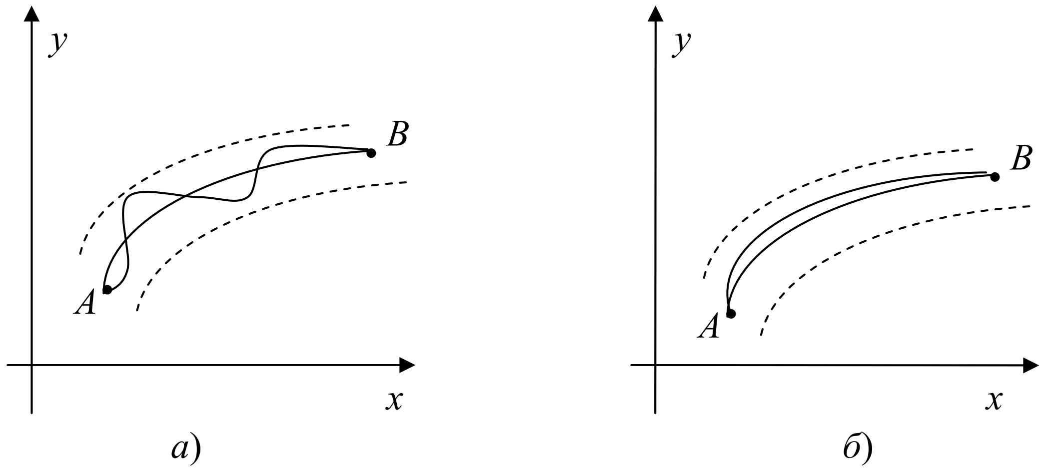


Рис. 4.3. *а) кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка,*
б) кривые, близкие в смысле близости первого порядка

Из этих определений следует, что, если кривые близки в смысле близости k-го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Определение 4.8. Функционал $I\,[y(x)]$ называется непрерывным при $y=y(x)$ в смысле близости k-го порядка, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$\left| I\,[y(x)] - I\,[\tilde{y}(x)] \right| < \varepsilon$$

при

$$
\begin{gathered}
|y(x) - \tilde{y}(x)| < \delta,\\
|y'(x) - \tilde{y}'(x)| < \delta,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
|y^{(k)}(x) - \tilde{y}^{(k)}(x)| < \delta,
\end{gathered}
$$

где функция $\tilde{y}$ берется из класса функций, на котором функционал $I\,[y(x)]$ определен.

4.1.2. Вариационная задача с закрепленными концами

Рассмотрим постановку простейшей задачи вариационного исчисления – задачи с закрепленными концами.

Формулируется она следующим образом: среди множества скалярных непрерывно-дифференцируемых функций одной переменной $y=y(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$ и принимающих на концах отрезка заданные значения, $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$, выбрать ту, на которой функционал

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

принимает минимальное значение.

Относительно функции F будем предполагать, что она непрерывна на $[a,b]$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Функция F задана, а функция $y(x)$ является ее аргументом.

Введем ряд определений.

Определение 4.9. Кривые $y=y(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, называются ***допустимыми***, если они являются непрерывно-дифференцируемыми и удовлетворяют условиям на концах отрезка: $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$.

Геометрически это означает следующее:

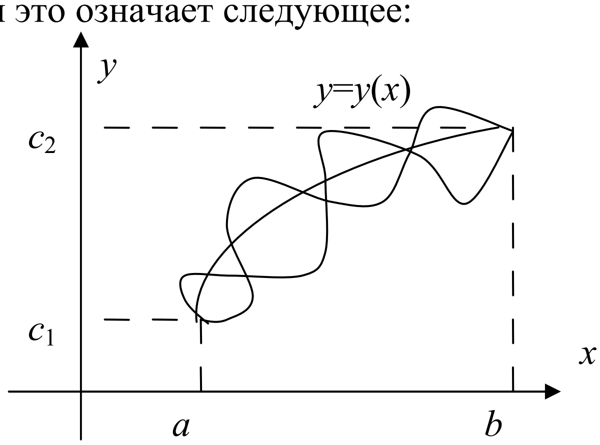


Рис. 4.4. *Множество допустимых кривых*

Понятие экстремума функционала нуждается в уточнении, а именно, для функционала вводятся понятия сильного и слабого минимумов.

Определение 4.10. Будем говорить, что на допустимой кривой $y=y(x)$ функционал $I\,[y(x)]$ достигает ***сильного минимума***, если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой кривой $\tilde{y}\,(x)$, удовлетворяющей условию

$$|\, y(x) - \tilde{y}\,(x)\,| < \varepsilon,\ \ x \in [a,b],$$

выполняется неравенство $I\,[\,\tilde{y}\,(x)] \geq I\,[y(x)]$.

Определение 4.11. Будем говорить, что на допустимой кривой $y=y(x)$ функционал $I\ [y(x)]$ достигает ***слабого минимума***, если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой кривой $\tilde{y}(x)$, удовлетворяющей условиям

$$|\, y(x) - \tilde{y}(x)\,| < \varepsilon,\ \ x\in[a,b],$$
$$|\, y'(x) - \tilde{y}'(x)\,| < \varepsilon,$$

выполняется неравенство $I\,[\tilde{y}(x)] \geq I\,[y(x)]$.

При определении сильного минимума с кривой $y=y(x)$ сравниваются все допустимые кривые $\tilde{y}=\tilde{y}(x)$, близкие с исходной в смысле близости нулевого порядка, а при определении слабого минимума кривые $\tilde{y}=\tilde{y}(x)$, близкие с исходной в смысле близости первого порядка.

Если на кривой $y=y(x)$ функционал достигает сильного минимума, то на этой кривой тем более достигается и слабый минимум. Поэтому достаточные условия сильного минимума являются достаточными условиями и слабого минимума.

С другой стороны, если на кривой $y=y(x)$ не достигается слабый минимум функционала, то на ней не достигается и сильный минимум, т.е. необходимое условие слабого минимума является необходимым условием и сильного минимума.

4.1.3. Метод вариаций

Универсальный метод исследования задач минимизации функционалов был предложен в 1760 году Лагранжем и получил название ***метод вариаций***. Другой метод, основанный на аппроксимации функционалов функциями, был предложен Эйлером.

Метод вариаций для решения вариационных задач очень похож на метод исследования функций на максимум и минимум.

Введем несколько определений.

1. Вариация допустимой кривой

Предположим, что на минимум функционала испытывается допустимая кривая $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$. Тогда любая другая допустимая кривая $\tilde{y}(x)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\, h(x), \tag{4.6}$$

где ε – числовой параметр, $h(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, причем $h(a)=h(b)=0$.

Определение 4.12. Функцию

$$\delta y = \tilde{y}(x) - y(x) = \varepsilon\, h(x) \tag{4.7}$$

будем называть ***вариацией допустимой кривой***, или приращением δy допустимой кривой (аргумента) $y=y(x)$ функционала $I\,[y(x)]$.

Вариация допустимой кривой – это аналог приращения Δx аргумента x функции $f(x)$.

2. Вариация функционала

Рассмотрим функционал

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx.$$

Вычислим его приращение на допустимых кривых $y=y(x)$ и $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$. Имеем

$$\Delta I\,[y(x)] = I[\,\widetilde{y}\,(x)] - I[y(x)] = \int_a^b \left[F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}') - F(x, y, y')\right]dx =$$

$$= \int_a^b \left[F(x, y + \varepsilon h(x), y' + \varepsilon h'(x)) - F(x, y, y')\right]dx.$$

При фиксированных функциях $y(x)$ и $h(x)$ ($\widetilde{y}\,(x) = y(x) + \varepsilon\, h(x)$) приращение $\Delta I\,[y(x)]$ является функцией $\Phi(\varepsilon)$ параметра ε и может быть разложено в ряд Тейлора по степеням ε, то есть представлено в виде:

$$\Delta I\,[y(x)] = \varepsilon\, \delta I + \frac{1}{2}\varepsilon^2\, \delta^2 I + o\,(\varepsilon^2). \tag{4.8}$$

Определение 4.13. Коэффициент δI при первой степени параметра ε называется ***первой вариацией функционала*** $I[y(x)]$ на кривой $y(x)$, а коэффициент $\delta^2 I$ при $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ – ***второй вариацией функционала*** $I[y(x)]$.

Первая и вторая вариации функционала – это аналог первого и второго дифференциалов функции $f(x)$.

Получим явные выражения для первой и второй вариаций функционала. Для этого запишем разложение функции $F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')$ в ряд Тейлора по степеням ε

$$F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}') = F(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') = F(x, y, y') +$$

$$+\varepsilon\left[\left.\frac{\partial F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\partial \widetilde{y}}\right|_{\varepsilon=0} h(x) + \frac{\partial F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\partial \widetilde{y}'}\Big|_{\varepsilon=0} h'(x)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left.\frac{\partial^2 F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\partial \widetilde{y}^2}\right|_{\varepsilon=0} h^2 + 2\left.\frac{\partial^2 F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\partial \widetilde{y}\partial \widetilde{y}'}\right|_{\varepsilon=0} hh' + \frac{\partial^2 F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\partial \widetilde{y}'^2}\Big|_{\varepsilon=0} (h')^2\right] + o(\varepsilon^2)$$

Таким образом, учитывая, что $\left[\dfrac{\partial F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\partial \widetilde{y}}\right]_{\varepsilon=0} = \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}$,

$\left[\dfrac{\partial F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\partial \widetilde{y}'}\right]_{\varepsilon=0} = \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}$ и т.д., получаем

$$\Delta I[y(x)] = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} h + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} h' \right] dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y \partial y'} hh' + \frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y'^2} (h')^2 \right] dx + o(\varepsilon^2).$$

Следовательно,

$$\delta I[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} h + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} h' \right] dx, \tag{4.9}$$

$$\delta^2 I[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y \partial y'} hh' + \frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y'^2} (h')^2 \right] dx,$$

или это можно записать так:

$$\delta I[y(x)] = \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}, \tag{4.10}$$

$$\delta^2 I[y(x)] = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} I(y + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Последнее представление удобно при фактическом вычислении вариаций функционалов, т.к. вычисление вариаций сводится к вычислению производных функции одной переменной.

3. Необходимое и достаточное условия слабого минимума функционала в терминах вариаций

Теорема 4.1. [35] Если функционал $I[y(x)]$ на допустимой кривой $y=y(x)$ достигает слабого минимума (максимума), то первая вариация функционала $\delta I[y(x)]$ на этой кривой обращается в ноль, т.е.

$$\delta I[y(x)] = 0. \tag{4.11}$$

Условие $\delta I[y(x)] = 0$ называется условием стационарности.

Рассмотрим достаточное условие слабого минимума. Так же как и при рассмотрении функций, достаточное условие экстремума функционалов определяется через вторую вариацию функционала.

Теорема 4.2. [35] Если $y=y(x)$ – допустимая кривая, для которой выполняется условие стационарности, т.е. $\delta I[y(x)]=0$, то на этой кривой будет достигаться слабый минимум, если $\delta^2 I[y(x)] > 0$, и слабый максимум, если $\delta^2 I[y(x)] < 0$.

4.1.4. Уравнения Эйлера

Необходимое условие слабого минимума для простейшей задачи выражается с помощью уравнения Эйлера.

Но предварительно сформулируем следующую лемму.

Лемма Лагранжа (основная лемма вариационного исчисления) [35]. Если для каждой непрерывной функции η (x), заданной на [a,b] и принимающей на концах отрезка нулевые значения, η (a) = η (b)=0, выполняется условие

$$\int_a^b \Phi(x)\eta(x)dx = 0,$$

где Φ(x) – непрерывная функция на [a,b] , то Φ(x)≡0 на этом же отрезке.

Итак, пусть $y=y(x)$, $x\in[a,b]$ – допустимая кривая, на которой достигается слабый минимум функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx.$$

Тогда, согласно необходимому условию слабого минимума, на этой кривой первая вариация функционала равна 0, т.е. $\delta I[y(x)]=0$. Используя выражение для первой вариации, имеем

$$\delta I[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} h + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} h'\right]dx = 0.$$

Рассмотрим интеграл от второго слагаемого и вычислим его по частям.

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} h'\right]dx = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}, \ du = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}dx, \\ h'(x)dx = dv, \quad v = h(x). \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} h(x)dx.$$

Тогда, т.к. первое слагаемое равно 0 ($h(a)=h(b)=0$), получим

$$\delta I[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}\right] h(x)dx = 0.$$

Это равенство должно выполняться для всех непрерывно-дифференцируемых функций $h(x)$, удовлетворяющих условию: $h(a)=h(b)=0$. Тогда по основной лемме вариационного исчисления

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \qquad (4.12)$$

Это уравнение и называется ***уравнением Эйлера.***

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.3. Если на допустимой кривой $y(x)$ функционал $I[y(x)]$ достигает слабого минимума, то эта кривая $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (4.12).

Любая допустимая кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, называется ***экстремалью***.

Сокращенно уравнение Эйлера можно записать так:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \tag{4.13}$$

где $F_y = \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}$, $F_{y'} = \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$,

или в развернутом виде:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0,$$

т.е. уравнение Эйлера, вообще говоря, – это нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно искомой функции $y(x)$.

Общее его решение содержит две произвольные постоянные, которые можно найти, используя граничные условия: $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$.

Итак, экстремум функционала может достигаться только на экстремалях. Однако недостаточно определить экстремали функционала, необходимо показать, что на этих кривых действительно реализуется экстремум, т.е. надо воспользоваться достаточными условиями экстремума [35]. В силу сложности достаточных условий экстремума функционала, мы в нашем курсе ограничимся нахождением экстремалей функционалов. Заметим, что во многих вариационных задачах существование экстремума очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и, если решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то оно и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

Пример 4.1. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_1^2 \left(y' + x^2 y'^2\right)dx,$$

которые удовлетворяют граничным условиям: $y(1)=1$, $y(2)=2$.

Решение.

Т.к. $F(x,y,y') = y' + x^2 y'^2$, то $F_y = 0$, $F_{y'} = 1 + 2x^2 y'$. Тогда уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

запишется в виде

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Отсюда $F_{y'} = C$, где C – постоянная величина, или $1 + 2x^2 y' = C$. Разрешим это уравнение относительно производной

$$y' = \frac{C-1}{2x^2} = \frac{C_1}{x^2},$$

где $C_1 = (C-1)/2$ – новая константа. Интегрируя последнее уравнение, получим общее решение уравнения Эйлера

$$y=\int\frac{C_1}{x^2}dx=-\frac{C_1}{x}+C_2\ .$$

Для нахождения констант C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями: $y(1)=1$, $y(2)=2$. Получим

$$\begin{cases} -C_1+C_2=1, \\ -\dfrac{1}{2}C_1+C_2=2. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим, что $C_1 = 2$ и $C_2 = 3$. Таким образом, экстремаль имеет вид

$$y=-\frac{2}{x}+3\,.$$

В этом примере уравнение Эйлера мы смогли разрешить относительно производной и проинтегрировать полученное выражение, но это не всегда так, т.к. нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка интегрируются в конечном виде только в некоторых случаях. Поэтому далее рассмотрим некоторые частные случаи уравнения Эйлера, для которых можно получить решения в явном виде.

4.1.5. Частные случаи уравнения Эйлера

Рассмотрим уравнение Эйлера $F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0$, где $F = F(x,y,y')$.

1. Пусть функция F не зависит от y', т.е. $F = F(x,y)$. Тогда уравнение Эйлера примет вид: $F_y = 0$. Данное уравнение не является дифференциальным, оно – функциональное, поэтому решение полученного уравнения не содержит констант и, в общем случае, может не удовлетворять граничным условиям: $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$. Следовательно, решение рассматриваемой задачи, в общем случае, не существует. И только в исключительных случаях, когда решение уравнения $F_y = 0$ удовлетворяет граничным условиям, можно найти кривую, которая является экстремалью функционала.

Пример 4.2. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)]=\int_a^b\left(y^2\right)dx\,,$$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$.

Решение.

Т.к. $F(x,y,y')=y^2$, то $F_y = 2y$, $F_{y'}=0$. Тогда уравнение Эйлера

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

запишется в виде

$$F_y=0.$$

Отсюда $2y = 0$, т.е. $y = 0$. Таким образом, если $y_0 = y_1 = 0$, то прямая $y=0$ является экстремалью и доставляет минимум функционалу, т.к. $I[y(x)]\geq 0$. Если $y_0 \neq 0$ или $y_1 \neq 0$, то данная задача решения не имеет.

2. Пусть функция F линейно зависит от y', т.е. $F = M(x,y) + N(x,y)\, y'$. Тогда, т.к. $F_y = \dfrac{\partial M}{\partial y} + y'\dfrac{\partial N}{\partial y}$, а $F_{y'} = N(x,y)$, уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y} + y'\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{d}{dx} N(x,y) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} + y'\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} - y'\frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Данное уравнение также не является дифференциальным, оно – функциональное, поэтому решение полученного уравнения, в общем случае, может не удовлетворять граничным условиям: $y(a)=c_1$, $y(b)=c_2$. Следовательно, решение рассматриваемой задачи, в общем случае, не существует. И только в некоторых случаях, когда решение уравнения $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = = 0$ удовлетворяет граничным условиям, можно найти кривую, которая является экстремалью функционала.

Пример 4.3. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0$, $y(1)=a$.

Решение. Т.к. $F(x,y,y') = y^2 + x^2 y'$, то $M(x,y) = y^2$, $N(x,y) = x^2$. Тогда уравнение Эйлера

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

запишется в виде

$$2y - 2x = 0.$$

Отсюда $y = x$. Таким образом, если $a = 1$, то прямая $y = x$ является экстремалью функционала. Если $a \neq 1$, то данная задача решения не имеет.

3. Пусть функция F зависит только от y', т.е. $F = F(y')$. Тогда, т.к. $F_y = 0$, уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \text{ или } F_{y'}(y') = C.$$

Отсюда получаем: $y' = k_i$.

Решая это уравнение, находим, что экстремали имеют вид: $y = k_i\, x + b_i$, т.е. семейство прямых, для которых константы k_i *и* b_i находятся из граничных условий.

Пример 4.4. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$.

Решение. Т.к. $F(x,y,y') = \sqrt{1+(y')^2}$, то $F_y = 0$, $F_{y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$.

Тогда уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

запишется в виде

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C.$$

Отсюда

$$y'^2 = C\,(1 + y'^2),$$

$$y'^2 = \frac{C}{1-C} = C_1^2,$$

$$y' = C_1,$$

$$y = C_1 x + C_2.$$

Константы C_1 и C_2 находятся из граничных условий.

4. Пусть функция F зависит от x и y', т.е. $F = F(x, y')$. Тогда, т.к. $F_y = 0$, уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \text{ или } F_{y'}(x, y') = C.$$

Полученное уравнение – дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть проинтегрировано либо разрешением его относительно y', либо путем подстановки.

Пример 4.5. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$.

Решение. Т.к. $F(x,y,y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$, то $F_y = 0$, $F_{y'} = \dfrac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}$. Тогда уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

запишется в виде

$$F_{y'} = \frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}} = C.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{C}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Положим $y' = tg\ t$. Тогда

$$x = C_1\frac{tg\ t}{\sqrt{1+(tg\ t)^2}} = C_1 \sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = tg\ t,$$

$$dy = tg\ t\ dx = tg\ t\ C_1 \cos t\ dt = C_1 \sin t\ dt.$$

Из последнего уравнения находим

$$y = \int C_1 \sin t\ dt = -C_1 \cos t + C_2.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \sin t, \\ y = -C_1 \cos t + C_2. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^2 \sin^2 t + C_1^2 \cos^2 t = C_1^2,$$

$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^2,$$

т.е. решением является семейство окружностей с центром на оси ординат. Константы C_1 и C_2 находятся из граничных условий.

5. Пусть функция F зависит от y и y', т.е. $F = F(y, y')$. Тогда, т.к. $F_{xy'} = 0$, то уравнение Эйлера в развернутом виде

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0,$$

примет вид:

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Умножим это уравнение на y', получим

$$y'F_y - y'F_{yy'}y' - y'F_{y'y'}y'' = 0.$$

Нетрудно показать, что это выражение можно записать следующим образом

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0.$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = y'F_y + y''F_{y'} - y''F_{y'} - y'F_{yy'}y' - y'F_{y'y'}y'' =$$

$$= y'F_y - y'F_{yy'}y' - y'F_{y'y'}y''.$$

Тогда уравнение Эйлера запишется в виде:

$$F - y'F_{y'} = C.$$

Полученное уравнение – дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть проинтегрировано либо разрешением его относительно y', либо путем подстановки.

Пример 4.6. (Задача о брахистохроне) Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0$, $y(b)=c$.

Решение. Т.к. $F(x,y,y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$, то $F_{y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}$. Тогда уравнение Эйлера

$$F - y'F_{y'} = C$$

запишется в виде

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C.$$

Или

$$\sqrt{y(1+y'^2)} = \frac{1}{C\sqrt{2g}}.$$

$$y(1+y'^2) = \left(\frac{1}{C\sqrt{2g}}\right)^2 = C_1.$$

Отсюда

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2}, \text{ причем } y(0)=0,\ y(b)=c.$$

Положим $y' = ctg\, t$.

Тогда

$$y = C_1 \frac{1}{1+ctg^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t),$$

$$\frac{dy}{dx} = ctg\, t\,,$$

$$dx = \frac{dy}{ctg\, t} = \frac{2C_1 \sin t \cos t \sin t\, dt}{\cos t} = 2C_1 \sin^2 t\, dt = C_1(1-\cos 2t)dt\,,$$

$$x = \int C_1(1-\cos 2t)dt = C_1\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2\,.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1-\cos 2t). \end{cases}$$

Константы C_1 и C_2 найдем из граничных условий.

Полученная кривая – это циклоида.

4.1.6. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Рассмотрим функционалы вида

$$I[y_1,..., y_m] = \int_a^b F(x, y_1,..., y_m, y_1',..., y_m')dx\,.$$

Для получения необходимых условий экстремума функционала $I[y_1,..., y_m]$ при заданных граничных значениях:

$$y_1(a)=y_{10},\ y_2(a)=y_{20},\ \ldots\ y_n(a)=y_{n0},$$
$$y_1(b)=y_{11},\ y_2(b)=y_{21},\ \ldots\ y_n(b)=y_{n1},$$

будем варьировать только одну из функций $y_j(x)$, $j=1,\ldots,n$, оставляя все остальные функции без изменения. При этом функционал $I[y_1,..., y_m]$ превратится в функционал, зависящий только от одной функции $y_j(x)$,

$$I[y_1,..., y_m] = \tilde{I}[y_j(x)].$$

Следовательно, функция $y_j(x)$, доставляющая экстремум функционалу $I[y_1,..., y_m]$, должна удовлетворять уравнению Эйлера:

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx}F_{y_j'} = 0\,.$$

Т.к. это рассуждение можно провести для любой функции $y_j(x)$, то получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx}F_{y_j'} = 0\,,\ j=1,\ldots,n.$$

Решение этой системы будет содержать $2n$ постоянных, которые можно найти из граничных условий.

Пример 4.7. Найти экстремали функционала

$$I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} \left((y')^2 + (z')^2 + 2yz\right) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$, $z(0)=0$, $z(\pi/2)= =-1$.

Решение. Т.к. $F(x,y, z, y', z') = (y')^2+(z')^2 +2yz$, то $F_y=2z$, $F_{y'}= 2y'$, $F_z=2y$, $F_{z'}= 2z'$. Тогда уравнения Эйлера

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases},$$

запишутся в виде

$$\begin{cases} 2z - 2y'' = 0 \\ 2y - 2z'' = 0, \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} z = y'' \\ y = z''. \end{cases}$$

Продифференцируем второе уравнение дважды по переменной x, получим

$$z^{(\mathrm{IV})} = y'' = z$$

или

$$z^{(\mathrm{IV})} - z = 0.$$

В результате получаем линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Для полученного уравнения запишем характеристическое уравнение

$$k^4 - 1 = 0,$$

$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0,$$

$$(k - 1)\,(k + 1)\,(k^2 + 1) = 0,$$

и найдем его корни: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$.

Отсюда решение уравнения запишется в виде

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Найдем функцию y. Т.к.

$$z' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

получим

$$y = z'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_4 найдем из граничных условий. Получим

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ z(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_4 = 1 \\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = -1 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим: $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = -1$. Таким образом, экстремаль имеет вид

$$\begin{cases} z = -\sin x, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

4.1.7. Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Исследуем на экстремум функционал

$$I[y(x)] = \int_a^b F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) dx,$$

где функцию F будем считать дифференцируемой $n+2$ раза по всем аргументам и будем предполагать, что граничные условия имеют вид:

$$y(a)=y_0,\ y'(a)=y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(a)=y_0^{(n-1)},$$
$$y(b)=y_1,\ y'(b)=y'_1,\ ...,\ y^{(n-1)}(b)=y_1^{(n-1)},$$

т.е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее производных до $(n$-$1)$-го порядка включительно.

Предположим, что экстремум достигается на кривой $y=y(x)$, дифференцируемой $2n$ раз. Рассмотрим допустимую кривую $\tilde{y}(x)$, которая также дифференцируема $2n$ раз и которая может быть представлена в виде

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\, h(x),$$

где ε – числовой параметр, $h(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, причем

$$h(a) = h(b)=0,$$
$$h'(a) = h'(b)=0,$$
$$. . . . .$$
$$h^{(n-1)}(a) = h^{(n-1)}(b)=0.$$

Если $y(x)$ и $h(x)$ – фиксированные функции, то получим некоторое семейство кривых, зависящих от параметра ε. Если рассматривать функционал $I[y(x)]$ на данных кривых, то функционал будет являться функцией, зависящей от ε и достигающей экстремума при $\varepsilon=0$, т.е.

$$\delta I[y(x)] = \frac{d}{d\varepsilon} I(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Вычислим

$$\delta I[y(x)] = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F\left(x,\tilde{y},\tilde{y}',...,\tilde{y}^{(n)}\right)dx\right]\Big\|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(F_y h + F_{y'} h' + ... + F_{y^{(n)}} h^{(n)}\right)dx .$$

Рассмотрим интеграл от второго слагаемого

$$\int_a^b F_{y'} h' dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = F_{y'},\ du = \dfrac{d}{dx} F_{y'} dx, \\ h'(x)dx = dv, \quad v = h(x). \end{array} \right| = F_{y'} h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'}\ h(x)dx .$$

Аналогично вычисляются интегралы от всех остальных слагаемых, причем интеграл от третьего слагаемого нужно дифференцировать по частям два раза, и т.д., от последнего слагаемого – n раз.

Учитывая граничные условия для функции $h(x)$, окончательно получим

$$\delta I[y(x)] = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + ... + (-1)^{(n)} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) h(x) dx .$$

Т.к. на кривой, доставляющей экстремум функционалу, $\delta I[y(x)] = 0$, то согласно основной лемме вариационного исчисления имеем

$$F_e - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + ... + (-1)^{(n)} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \qquad (4.14)$$

Следовательно, функция $y=y(x)$, доставляющая экстремум функционалу $I[y(x)] = \int_a^b F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)dx$, должна быть решением выше полученного уравнения.

Это дифференциальное уравнение порядка $2n$ носит название ***уравнения Эйлера – Пуассона***, а его интегральные кривые называются экстремалями рассматриваемой вариационной задачи.

Общее решение данного уравнения содержит $2n$ произвольных постоянных, которые можно найти из граничных условий.

Если рассмотреть функционал общего вида

$$I[y_1,..., y_m] = \int_a^b F\left(x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(n)},..., y_m, y_m', y_m'',..., y_m^{(n)}\right)dx ,$$

то, варьируя произвольную функцию $y_j(x)$ и сохраняя все остальные, получим необходимое условие экстремума функционала в виде системы уравнений Эйлера – Пуассона

$$F_{н_о} - \frac{d}{dx} F_{y_о'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y_о''} + ... + (-1)^{(n)} \frac{d^n}{dx^n} F_{y_о^{(n)}} = 0, j = 1,\ldots,m. \qquad (4.15)$$

Пример 4.8. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(1+(y'')^2\right) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

Решение. Т.к. $F(x,y,y',y'') = 1 + (y'')^2$, то $F_y=0$, $F_{y'} = 0$, $F_{y''}=2y''$. Тогда уравнение Эйлера-Пуассона

$$F_e - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0,$$

запишется в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2}y'' = 0,$$

$$y^{(IV)} = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение четыре раза по переменной x, получим

$$y''' = C_1,$$

$$y'' = C_1 x + C_2,$$

$$y' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_4 найдем из граничных условий. Получим

$$\begin{cases} y(0) = C_4 = 0 \\ y'(0) = C_3 = 1 \\ y(1) = \dfrac{C_1}{6} + \dfrac{C_2}{2} + C_3 + C_4 = 1 \cdot \\ y'(1) = \dfrac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 1$. Таким образом, экстремаль имеет вид

$$y = x.$$

4.1.8. Вариационные задачи на условный экстремум

Вариационными задачами на условный экстремум называются задачи, в которых требуется найти экстремум функционала $I[y_1,...,y_m]$, когда на аргументы функционала $I[y_1,...,y_m]$ наложены дополнительные ограничения. Дополнительные ограничения могут быть следующего вида:

- ***Функциональные связи***

$$\varphi_i(x, y_1,\dots, y_m) = 0, \quad i=1,..., k, \ k<m.$$

Такие связи называются неголономными.

Напомним, как может быть решена подобная задача при исследовании на экстремум функции

$$z=f(x_1,\dots,x_n)$$

при наличии связей

$$\varphi_i(x_1,\dots, x_n) = 0, \quad i=1,..., k.$$

Теоретически, если считать уравнения связи независимыми, то их можно разрешить относительно m переменных, например, $x_1,\dots, x_k$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_{k+1},\dots, x_n), \\ x_2 = x_2(x_{k+1},\dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = x_m(x_{k+1},\dots, x_n), \end{cases}$$

и подставить найденные значения переменных $x_1,\dots, x_k$ в функцию $f(x_1,\dots,x_n)$. При этом функция $f(x_1,\dots,x_n)$ становится функцией $\varPhi(x_{k+1},\dots,x_n)$ только n- k независимых переменных $x_{k+1},\dots,x_n$. Таким образом, задача свелась к исследованию функции $\varPhi$ на безусловный экстремум. Этим методом, безусловно, мы можем воспользоваться только тогда, когда систему уравнений связи можно разрешить относительно k переменных, например, $x_1,\dots, x_k$.

Этим же методом, с учетом последнего замечания, конечно, можно решать и вариационные задачи. Разрешая уравнения связи $\varphi_i(x,y_1,\dots,y_m)=0$ относительно k функций, например, $y_1,\dots,y_k$, и подставляя найденные функции в функционал, получим функционал $W(y_{k+1},\dots,y_m)$, зависящий только от функций $y_{k+1},\dots,y_m$, и, следовательно, к нему применимы рассмотренные выше методы.

Однако, как для функций, так и для функционалов более удобен другой метод – метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим задачу нахождения минимума функционала

$$I[y_1,...,y_m]=\int_a^b F(x, y_1,..., y_m, y_1',..., y_m')dx$$

при условиях

$$\varphi_i(x, y_1,\dots, y_m) = 0, \quad i=1,..., k, \ k<m.$$

Составим для этой задачи вспомогательный функционал вида

$$I^*[y_1,...,y_m]=\int_a^b\left[F+\sum_{i=1}^k\lambda_i\varphi_i\right]dx$$

или

$$I^*[y_1,...,y_m]=\int_a^b F^*dx\,,$$

где

$$F^*=F+\sum_{i=1}^k\lambda_i\varphi_i\,.$$

Введение функционала $I^*[y_1,...,y_m]$ позволяет задачу на условный экстремум для функционала $I[y_1,...,y_m]$ свести к задаче на безусловный экстремум для функционала $I^*[y_1,...,y_m]$, которая решается с помощью уравнений Эйлера

$$F_{y_j}-\frac{d}{dx}F_{y'_j}=0\,,\ j=1,\dots,m,$$

дополненных уравнениями связи

$$\varphi_i\,(x, y_1,\dots, y_m) = 0,\quad i=1,..., k,\ \ k<m.$$

Число уравнений $k+m$, вообще говоря, достаточно, чтобы найти $k+m$ неизвестных функций $y_1,\dots,y_m$, $\lambda_1,\dots, \lambda_k$, а граничные условия

$$y_j(a)= y_{j0},\quad y_j(b)= y_{j1},$$

которые не должны противоречить уравнениям связи, позволят найти $2m$ произвольных постоянных в общем решении уравнения Эйлера.

Очевидно, что найденные таким образом кривые будут экстремалями исходного функционала $I[y_1,...,y_m]$. Это следует из того, что при найденных из системы функциях $y_1,\dots,y_m$, $\lambda_1,\dots,$ λ_k, все уравнения связи $\varphi_i(x,y_1,\dots,y_m)=0$ выполняются, поэтому

$$I^*[y_1,...,y_m] = I[y_1,...,y_m]\,.$$

Кроме того, если при функциях $y_1,\dots,y_m$, найденных из системы, будет достигаться безусловный экстремум функционала $I^*[y_1,...,y_m]$, т.е. экстремум по отношению ко всем близким кривым, как удовлетворяющим уравнениям связи, так и не удовлетворяющим им, то, в частности, экстремум достигается и по отношению к более узкому классу кривых, удовлетворяющих уравнениям связи.

Однако из этого рассуждения не следует, что все решения исходной задачи на условный экстремум будут давать безусловный экстремум функционалу $I^*[y_1,...,y_m]$, и, следовательно, остается невыясненным вопрос, все ли решения могут быть найдены этим методом.

Ограничимся рассмотрением следующего слабого утверждения

Теорема 4.4. [35]. Функции $y_1,\ldots,y_m$, реализующие минимум функционала

$$I[y_1,\ldots,y_m]=\int_a^b F(x,y_1,\ldots,y_m,y_1',\ldots,y_m')dx$$

при наличии уравнений связи

$$\varphi_i(x,y_1,\ldots,y_m)=0,\quad i=1,\ldots,k,\ k<m,$$

удовлетворяют при соответствующем выборе множителей Лагранжа $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала

$$I^*[y_1,\ldots,y_m]=\int_a^b F^*dx,$$

где

$$F^*=F+\sum_{i=1}^k \lambda_i\varphi_i\ .$$

Функции $y_1,\ldots,y_m$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ находятся из следующих уравнений:

$$\begin{cases} F_{y_j}-\dfrac{d}{dx}F_{y_j'}=0,\ j=1,\ldots,m., \\ \varphi_i(x,y_1,\ldots,y_m)=0,\quad i=1,\ldots,k. \end{cases}$$

Уравнения $\varphi_i(x,y_1,\ldots,y_m)=0$, $i=1,\ldots,k$, можно также считать уравнениями Эйлера, если аргументами функционала считать не только функции $y_1,\ldots,y_m$, но и функции $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. Уравнения $\varphi_i(x,y_1,\ldots,y_m)=0$, $i=1,\ldots,k$, предполагаются независимыми.

Пример 4.9. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$.

Решение.

Расстояние между двумя точками на поверхности определяется по формуле

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx\,.$$

Таким образом, имеем задачу: найти

$$min\ L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$$

при условии $\varphi(x, y, z) = 0$.

Введем вспомогательный функционал

$$L^*=\int_{x_1}^{x_2}(\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(x)\varphi(x,y,z))dx$$

и запишем для него уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \lambda(x)\varphi_y - \dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}} = 0, \\ \lambda(x)\varphi_z - \dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}} = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений и определяются функции $y(x)$ и $z(x)$, на которых может достигаться условный минимум функционала.

- ***Дифференциальные связи***

Дифференциальными называются связи вида

$$\varphi_i\,(x, y_1,\ldots, y_n, y_1{}',\ldots,y_n{}') = 0.$$

В механике такие связи называются ***голономными***.

В этом случае также доказывается, что условный экстремум функционала

$$I[y_1,\ldots,y_m] = \int_a^b F(x, y_1,\ldots,y_m, y_1',\ldots,y_m')dx$$

достигается на тех кривых, на которых реализуется безусловный экстремум функционала

$$I^*[y_1,\ldots,y_m] = \int_a^b \left[F + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x)\varphi_i \right] dx .$$

Пример 4.10. Объект управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dy}{dt} = ay + mu, \quad a, m > 0 .$$

Требуется найти закон управления, переводящий систему из положения y=y_0 при t = 0 в положение y = 0 при $t \to \infty$ и доставляющий минимум функционалу

$$I[y(x)] = \int_0^{+\infty} \left(\beta\, y^2 + cu^2\right) dt .$$

Решение. Введем вспомогательный функционал

$$I^*[y(x)] = \int_0^{+\infty} \left(\beta\, y^2 + cu^2 + \lambda(y' - ay - mu)\right) dt ,$$

где $F^* = \beta\, y^2 + cu^2 + \lambda(y' - ay - mu)$.

Уравнения Эйлера

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0, \\ F_u - \dfrac{d}{dx}F_{u'} = 0, \\ y' = ay + mu\,, \end{cases}$$

для данной задачи запишутся в виде

$$\begin{cases} 2\beta y - \lambda a - \dfrac{d}{dt}\lambda = 0\,, \\ 2cu - \lambda m = 0\,, \\ y' = ay + mu\,, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda' = 2\beta y - \lambda a\,, \\ u = \dfrac{\lambda m}{2c}\,, \\ y' = ay + mu\,. \end{cases}$$

Преобразуем данную систему, получим

$$\begin{cases} \lambda' = 2\beta y - \lambda a\,, \\ y' = ay + \dfrac{m^2}{2c}\lambda\,. \end{cases}$$

Продифференцируем второе уравнение еще раз по переменной t.

$$y'' = ay' + \frac{m^2}{2c}\lambda'\,.$$

Подставим λ' из первого уравнения и выразим λ из второго уравнения, получим

$$y'' = ay' + \frac{m^2}{2c}\left(2\beta y - \lambda a\right) =$$

$$= ay' + \frac{m^2}{c}\beta y - \frac{m^2 a}{2c}\frac{2c}{m^2}\left(y' - ay\right).$$

После упрощения имеем

$$y'' - (a^2 + \frac{m^2\beta}{c})y = 0$$

Обозначим

$$a^2 + \frac{m^2\beta}{c} = q^2\,.$$

Тогда

$$y'' - q^2 y = 0\,.$$

В результате преобразований получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$k^2 - q^2 = 0,$$

$$k_{1.2} = \pm q .$$

Тогда решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$y = C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt} .$$

Константы C_1, C_2 найдем из граничных условий. Получим

$$\begin{cases} y(0) = y_0 = C_1 + C_2 \\ y(\infty) = 0 = C_1 e^{\infty} + C_2 \cdot 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим: $C_1 = 0$, $C_2 = y_0$. Таким образом, экстремаль имеет вид

$$y = y_0 e^{-qt},$$

а также

$$\lambda(x) = \frac{2c}{m^2}(y' - ay) = \frac{2c}{m^2}\left(y_0 e^{-qt}(-q) - ay\right) = \frac{2c}{m^2}(-q - a)y,$$

$$u = \frac{\lambda m}{2c} = -\frac{q + a}{m} y .$$

- ***Интегральные связи (изопериметрические задачи)***

Изопериметрическими задачами называются вариационные задачи, в которых требуется найти экстремум функционала

$$I[y_1, \ldots, y_m] = \int_a^b F(x, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m)dx$$

при наличии изопериметрических уравнений связи

$$\int_a^b F_i(x, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m)dx = L_i,\ i = 1, \ldots, k,$$

где L_i – некоторые постоянные.

Этот случай можно свести к случаю дифференциальных связей, если ввести дополнительные переменные. Обозначим

$$\int_a^x F_i(x, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m)dx = z_i,\ i = 1, \ldots, k .$$

Откуда $z_i(a)=0$, $z_i(b)= L_i$. Продифференцируем $z_i(x)$ по переменной x, получим

$$z'_i(x) = F_i\ (x, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m),\ i=1,..,k.$$

Тем самым интегральные связи заменились дифференциальными

$$\varphi_i = F_i\ (x, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m) - z'_i(x) = 0,\ i=1,..,k.$$

Данная задача на условный экстремум может быть сведена к задаче на безусловный экстремум для функционала

$$I^*[y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_k]=\int_a^b\left[F+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x)(F_i-z_i')\right]dx=\int_a^b F^*\,dx,$$

где $F^*=F+\sum_i^k\lambda_i(x)(F_i-z_i'(x))$.

Уравнения Эйлера для данного функционала $I^*[y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_k]$ запишутся в виде

$$\begin{cases} F^*_{y_j}-\dfrac{d}{dx}F^*_{y_j}=0, & j=1,..,m,\\ F^*_{z_i}-\dfrac{d}{dx}F^*_{z_i'}=0, & i=1,\ldots,k,\\ F^*_{\lambda_ш}-\dfrac{d}{dx}F^*_{\lambda_ш'}=0, & i=1,\ldots,k,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F_{y_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(F_i)_{y_j}-\dfrac{d}{dx}[F_{y_j'}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(F_i)_{y_j'}]=0, \quad j=1,..,m,\\ \dfrac{d}{dx}\lambda_i(x)=0, \quad i=1,\ldots,k,\\ F_i-z_i'=0, \quad i=1,\ldots,k.\end{cases}$$

Из второй группы, состоящей из k уравнений, находим, что все λ_i= =const, а первые m уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для функционала

$$I^{**}[y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_k]=\int_a^b\left[F+\sum_{i=1}^{k}\lambda_iF_i\right]dx.$$

Таким образом, мы получаем следующее правило: для получения необходимого условия в изопериметрической задаче о нахождении экстремума функционала

$$I[y_1,\ldots,y_m]=\int_a^b F(x,y_1,\ldots,y_m,y_1',\ldots,y_m')dx$$

при наличии ограничений

$$\int_a^b F_i(x,y_1,\ldots,y_m,y_1',\ldots,y_m')dx=L_i,\ i=1,\ldots,k,$$

надо составить вспомогательный функционал

$$I^{**}[y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_k]=\int_a^b\left[F+\sum_{i=1}^{k}\lambda_iF_i\right]dx,$$

где λ_i=const, и записать уравнения Эйлера.

Произвольные постоянные C_1, C_2,…, C_{2m} в общем решении уравнений Эйлера и постоянные $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ можно найти из граничных условий

$$y_j(a)=y_{j0},\quad y_j(b)=y_{j1},\quad j=1,..,m,$$

и изопериметрических условий

$$\int_a^b F_i(x, y_1,..., y_m, y_1',..., y_m')dx = L_i,\ i=1,...,k.$$

Система уравнений Эйлера для функционала

$$I^{**}[y_1,..., y_m, z_1,..., z_k] = \int_a^b \left[F + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i \right] dx$$

не изменится, если его умножить на некоторый постоянный множитель μ_0, и, следовательно, представить его в виде:

$$\mu_0 I^{**}[y_1,..., y_m, z_1,..., z_k] = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{k} \mu_i F_i \right] dx,$$

где $F_0=F$, $\mu_i = \mu_0 * \lambda_i$, $i=1,\dots,k$. Теперь все функции F_i входят симметрично, поэтому экстремали в исходной вариационной задаче и в задаче нахождения экстремума функционала

$$\int_a^b F_s(x, y_1,..., y_m, y_1',..., y_m')dx$$

при наличии изопериметрических условий

$$\int_a^b F_i(x, y_1,..., y_m, y_1',..., y_m')dx = L_i,\ i=1,..., s-1, s+1,.., k,$$

совпадают при любом выборе s.

Это свойство носит название ***принципа взаимности***. Например, задача о максимуме площади фигуры, ограниченной кривой заданной длины, и задача о минимуме длины замкнутой кривой, ограничивающей заданную площадь, взаимны и имеют одинаковые экстремали.

Пример 4.11. Найти кривую $y=y(x)$, заданной длины L, для которой площадь S криволинейной трапеции достигает максимума.

Решение. Найдем экстремали функционала

$$S = \int_a^b y dx,\ y(a) = y_0,\ y(b) = y_1,$$

при условии

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L.$$

Составим вспомогательный функционал

$$S^{**} = \int_a^b [y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}]dx \text{, где } F^{**} = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}\ .$$

Т.к. F^{**} не зависит от x, то уравнение Эйлера для этой задачи имеет вид

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

или, согласно пункту 4.1.5,

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0.$$

Окончательно уравнение Эйлера запишется в виде:

$$F - y'F_{y'} = C_1$$

или

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Откуда

$$y - C_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Положим $y' = ctg\ t$. Тогда

$$y - C_1 = -\lambda \sin t,$$
$$y = C_1 - \lambda \sin t.$$

Т.к. $\dfrac{dy}{dx} = ctg\, t$, то

$$dx = \frac{dy}{ctgt} = \frac{d\left(C_1 - \lambda \sin t\right)}{ctgt} = \frac{-\lambda \cos t\, dt}{ctgt} = \frac{-\lambda \cos t \sin t\, dt}{\cos t} = -\lambda \sin t\ .$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$x = C_2 + \lambda \cos t.$$

Итак, уравнение экстремали имеет вид

$$\begin{cases} x = C_2 + \lambda \cos t. \\ y = C_1 - \lambda \sin t, \end{cases}$$

или

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = (\lambda \cos t)^2 + (-\lambda \sin t)^2 = \lambda^2,$$

Т.е. экстремалями является семейство окружностей. Постоянные C_1, C_2 и λ находятся из граничных условий

$$y(a) = y_0,\ y(b) = y_1$$

и изопериметрического ограничения

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = L\ .$$

4.2. Задания для самостоятельной работы и контрольные вопросы

Задание 4.1. Установить порядок близости кривых

а) $y(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$, $\tilde{y}(x)=0$ на $[0,2\pi]$;

б) $y(x)=\dfrac{\sin x}{n}$, $\tilde{y}(x)=0$ на $[0,\pi]$;

в) $y(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, $\tilde{y}(x)=0$ на $[0,1]$.

Задание 4.2. Найти все экстремали функционала *J(y)*, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

4.2. 1

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (y'^2+xy)dx;\ y(0)=y(1)=0.$

2. $J(y)=\int\limits_0^1 (48y-y''^2)dx, y(0)=y'(0)=0, y(1)=1, y'(1)=4.$

4.2. 2

1. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/4} (4y\cos x+y'^2-y^2)dx;\ y(0)=y(\pi/4)=0.$

2. $J(y)=\int\limits_0^1 (-24xy+y''^2)dx, y(0)=y'(0)=0, y(1)=1/5, y'(1)=1.$

4.2. 3

1. $J(y)=\int\limits_0^e (2y-x^2y'^2)dx;\ y(1)=e,\ y(e)=0.$

2. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (-y'^2+y''^2)dx;\ y(0)=y'(0)=0,\quad y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}, y'(\frac{\pi}{2})=0.$

4.2. 4

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (y'^2+yy'+12xy)dx;\ y(0)=y(1)=0.$

2. $J(y)=\int\limits_0^{в} (y'^2+y''^2)dx, y(0)=y'(0)=y(в)=y'(в)=0.$

4.2. 5

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (e^y+xy')dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=1.$

2. $J(y)=\int\limits_0^1 e^{-x}y''^2dx, y(0)=0, y'(0)=1, y(1)=e, y'(1)=2e.$

4.2. 6

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (y'^2+y^2+xy)dx;\ y(0)=y(1)=0$.

2. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}(x^2-y^2+y''^2)dx, y(0)=1, y'(0)=y(\pi/2)=0, y'(\pi/2)=-1$

4.2.7

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (y'^2+y^2+2ye^x)dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=\dfrac{1}{2e}$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^{\pi/2}(y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2)dx,$

$y_1(0)=y_2(0)=0, y_1(\pi/2)=1,\ y_2(\pi/2)=-1$.

4.2. 8

1. $J(y)=\int\limits_0^{\ln 2}(y'^2+3y^2)e^{2x}dx;\ y(0)=0,\ y(\ln 2)=\dfrac{15}{8}$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2-2y_1y_2)dx,$

$y_1(0)=y_2(0)=0, y_1(1)=\mathrm{sh}1,\ y_2(1)=-\mathrm{sh}1$.

4.2. 9

1. $J(y)=\int\limits_0^b (y'^2+y^2-4y\sin x)dx;\ y(0)=0,\ y(b)=y_1$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^{\pi/2}(y_1'y_2'-y_1y_2)dx,$

$y_1(0)=y_2(0)=0, y_1(\pi/2)=1,\ y_2(\pi/2)=-1$.

4.2. 10

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (y'^2)dx;\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1'y_2'+y_1y_2)dx, y_1(0)=y_2(0)=0, y_1(1)=e, y_2(1)=1/e$

4.2. 11

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (e^{x+y}-y-\sin x)dx;\ y(0)=0, y(1)=-1$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1'y_2'+6xy_1+12x^2y_2)dx, y_1(0)=y_2(0)=0, y_1(1)=y_2(1)=1$

4.2. 12

1. $J(y)=\int\limits_0^{3/2}(y'^2+2x)dx;\ y(0)=0, y(3/2)=1$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_1^3 (xy_1'^2+y_2'^2+xy_1y_2)dx,$

$y_1(1)=1, y_2(1)=0, y_1(3)=\ln 3+1,\ y_2(3)=0$.

4.2. 13

1. $J(y)=\int\limits_{-1}^{1}(xy'+y'^2)dx;\ y(-1)=1,\ y(1)=0$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_{0}^{\pi/2}(y_1'^2+y_2'^2-2y_1y_2)dx,$

$y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1(\pi/2)=1,\ y_2(\pi/2)=1.$

4.2. 14

1. $J(y)=\int\limits_{1}^{2}x^n y'^2dx;\ y(1)=\dfrac{1}{1-n},y(2)=\dfrac{2^{1-n}}{1-n},n\in N,n\neq 1$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_{0}^{1}(120xy-y'')dx,y(0)=y'(0)=0,y(1)=1,y'(1)=6$

4.2. 15

1. $J(y)=\int\limits_{0}^{\pi/2}(-y'^2+2y+y^2)dx;\ y(0)=y(\dfrac{\pi}{2})=0$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_{0}^{1}y'''^2dx,y(0)=y'(0)=y''(0)=0,y(1)=1,y'(1)=4,y''(1)=12$

4.2. 16

1. $J(y)=\int\limits_{0}^{1}(-y'^2+y)dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=0$.

2. $J(y)=\int\limits_{1}^{2}x^n y'^2dx;\ y(1)=\dfrac{1}{1-n},y(2)=\dfrac{2^{1-n}}{1-n},n\in N,n\neq 1$.

4.2. 17

1. $J(y)=\int\limits_{-1}^{2}y'(x^2y'+1)dx;\ y(-1)=1,\quad y(2)=4$.

2. $J(y)=\int\limits_{a}^{b}(4y^2+5y'^2+y''^2)dx,y(a)=c_1,y'(a)=c_2,y(b)=c_3,y'(b)=c_4$

4.2. 18

1. $J(y)=\int\limits_{1}^{3}(4x^2+y'^2+12xy)dx;\ y(1)=0,\quad y(3)=26$.

2. $J(y)=\int\limits_{0}^{1}(2xy+y'''^2)dx,y(0)=y'(0)=y''(0)=y(1)=y'(1)=y''(1)=0$

4.2. 19

1. $J(y)=\int\limits_{0}^{2}(e^{y'}+3)dx;\ y(0)=0,\quad y(2)=1$.

2. $J(y)=\int\limits_{0}^{\pi/2}(4y^2-5y'^2+y''^2)dx,y(0)=3,y'(0)=4,y(\dfrac{\pi}{2})=1,y'(\dfrac{\pi}{2})=-4.$

4.2. 20

1. $J(y)=\int\limits_0^1 e^y (y')^2\,dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=\ln 4$.

2. $J(y)=\int\limits_a^b (yy'+y'^2+yy''+y'y''+y''^2)dx,$

$y(a)=c_1, y(b)=c_2, y'(a)=c_3, y'(b)=c_4.$

4.2. 21

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (xy'^2+y'^2+x^2+1)dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=1$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_a^b (xy_1'^2+y_2'^2+xy_1'y_2')dx,$

$y_1(a)=c_1, y_1(b)=c_2, y_2(a)=c_3, y_2(b)=c_4.$

4.2. 22

1. $J(y)=\int\limits_{-1}^1 (y'^3+y'^2)dx;\ y(-1)=-1,\quad y(1)=3$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_a^b (y_1'^2-y_2'^2+2y_1'y_2'+2y_2^2+2y_1 cosx)dx,$

$y_1(a)=c_1, y_1(b)=c_2, y_2(a)=c_3, y_2(b)=c_4.$

4.2. 23

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (xy'^2+y'^2-x^3)dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=1$.

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_a^b (y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2)dx,$

$y_1(a)=c_1, y_1(b)=c_2, y_2(a)=c_3, y_2(b)=c_4.$

4.2. 24

1. $J(y)=\int\limits_0^1 (x^2+2y'^2+y^2)dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=1$.

2. $J(y)=\int\limits_a^b (16y^2+e^x-y''^2)dx,\ y(a)=c_1, y'(a)=c_2, y(b)=c_3, y'(b)=c_4.$

4.2. 25

1. $J(y)=\int\limits_1^2 \left(1+\frac{x^3}{y'^2}\right)dx;\ y(1)=1,\quad y(2)=4$.

2. $J(y)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b (y'')^2\,dx,\ y(a)=0, y'(a)=0, y(b)=0, y'(b)=0.$

4.2. 26

1. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}(y^2-y'^2+tg\,x-1)dx;\ y(0)=1,\quad y(\frac{\pi}{2})=1.$

2. $J(y)=\int\limits_0^1(2y'^2+y^2+y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=0,\ y'(1)=-sh1.$

4.2. 27

1. $J(y)=\int\limits_0^1(y'^3+y')dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=2.$

2. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}(x^2-y^2+y''^2)dx,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=0,\ y'(\frac{\pi}{2})=-1.$

4.2. 28

1. $J(y)=\int\limits_0^2(x^2+y'^2+y^2-2xy)dx;\ y(0)=0,\quad y(2)=3.$

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_1^2(y_2'^2-xy_1'y_2)dx,$

$y_1(1)=1,\ y_1(2)=-\frac{1}{6},\ y_2(1)=1,\ y_2(2)=\frac{1}{2}.$

4.2. 29

1. $J(y)=\int\limits_2^3\left(\frac{x^3}{y'^2}+2x\right)dx;\ y(2)=4,\quad y(3)=9.$

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_{0,5}^1(y_1'^2-2xy_1y_2')dx,$

$y_1(0{,}5)=2,\ y_1(1)=1,\ y_2(0{,}5)=15,\ y_2(1)=1.$

4.2. 30

1. $J(y)=\int\limits_0^1(y^2+y'^2+2ye^x)dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=e.$

2. $J(y_1,y_2)=\int\limits_a^b\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}\,dx,$

$y_1(a)=c_1,\ y_1(b)=c_2,\ y_2(a)=c_3,\ y_2(b)=c_4.$

Задание 4.3. Найти экстремали функционалов в следующих примерах

4.3.1. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}\,dx,\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=2,\ y_1(1)=2,\ y_2(1)=1,$

при условии $2y_1-y_2-3x=0$.

4.3.2. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2)dx, y_1(0) = -1, y_2(0) = 0, y_1(1) = -1, y_2(1) = 1,$ при условии $y_1 + y_2 - 2x^2 + x + 1 = 0$.

4.3.3. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2)dx, y_1(0) = 1, y_2(0) = -1,$

$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, при условии $y_1 - y_2 - 2\cos x = 0$.

4.3.4. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (2y_1'^2 + y_2'^2 + y_1^2)dx,\ y_1(0) = 1, y_1(1) = e + \frac{1}{e},$

$y_2(0) = 0, y_2(1) = 2e - \frac{1}{e},$ при условии $y_1' - y_2 = 0$.

4.3.5. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (-y_2'^2 + y_1'^2)dx,\ y_1(0) = 0, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$

$y_2(0) = 0, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2},$ при условии $y_1' = y_2 + \sin x$.

4.3.6. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (2y_1 y_2 + y_2'^2 + y_1'^2)dx,\ y_1(0) = -1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1,$

$y_2(0) = 1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1,$ при условии $y_1' + y_2' = 4x$.

4.3.7. $J(y) = \int_0^1 y'^2 dx;\ y(0) = 0, \quad y(1) = 5$, при условии $\int_0^1 xy\,dx = 1$.

4.3.8. $J(y) = \int_0^1 y'^2 dx;\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1$, при условии $\int_0^1 y\,dx = 0$.

4.3.9. $J(y) = \int_0^{\pi} y \sin x\,dx;\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$, при условии $\int_0^{\pi} y'^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

4.3.10. $J(y) = \int_{-1}^1 y\,dx;\ y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$, при условии $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \pi$.

4.3.11. $J(y) = \int_0^1 y'^2 dx;\ y(0) = 0, \quad y(1) = 2$, при условии $\int_0^1 y^2 dx = 4$.

4.3.12. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1' \ y_2' \ dx,\ y_1(0) = 0, y_1(1) = 0,\ y_2(0) = 0, y_2(1) = 0$, при условии $\int_0^1 y_1 dx = 0, \int_0^1 y_2 dx = 0$.

4.3.13. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2)dx,\ y_1(0)=0, y_1(1)=0,\ \ y_2(0)=0, y_2(1)=0$, при условии $\int\limits_0^1 y_1 y_2 dx=-2$.

4.3.14. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2)dx,\ y_1(0)=0, y_1(1)=2ch1,$
$y_2(0)=0, y_2(1)=2sh1$, при условии y'_1 - y_2 = 0.

4.3.15. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^{\pi/2} (y_1^2+y_2^2-y_2'^2-y_1'^2+\cos x)dx,\ y_1(0)=1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$
$y_2(0)=1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, при условии y_1 = y_2 + sin x.

4.3.16. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (2y_2'^2+y_1'^2+y_2^2)dx,\ y_1(0)=-2, y_1(1)=-\frac{1}{e^2},$
$y_2(0)=1, y_2(1)=0$, при условии y_1 - y'_2 = 0.

4.3.17. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (x^3+y_2'^2+y_1'^2)dx,\ y_1(0)=2, y_1(1)=1,\quad y_2(0)=1, y_2(1)=2$, при условии y_1 - $2y_2$ = - $3x$.

4.3.18. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (1+y_2'^2+y_1'^2)dx,\ y_1(0)=0, y_1(1)=2,\ \ y_2(0)=y_2(1)=0$, при условии y_1+y_2 = $2x^2$.

4.3.19. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2^2)dx,\ \ y_1(0)=0, y_1(1)=1,\ \ y_2(0)=1, y_2(1)=0$, при условии y'_1 - y_2 = 0.

4.3.20. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^{\pi} (y_1'^2-y_2'^2)dx, y_1(0)=0, y_2(0)=0, y_1(\pi)=0, y_2(\pi)=\frac{\pi}{2},$
при условии y'_1 - y_2 +cos x = 0.

4.3.21. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^{\pi/2} (2y_1y_2+y_2'^2+y_1'^2)dx,\ y_1(0)=1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+1,$
$y_2(0)=-1, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-1$, при условии y'_1 + y'_2 - $4x$ = 0.

4.3.22. $J(y_1,y_2)=\int\limits_a^b (y_1+y_2+y'_2\ )dx,\ y_1(a)=y_1^{(0)}, y_1(b)=y_1^{(1)},$
$y_2(a)=y_2^{(0)}, y_2(b)=y_2^{(1)}$, при условии y'_1 + y'_2 - 1 = 0.

4.3.23. $J(y)=\int\limits_0^1 y'^2dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=0$, при условии $\int\limits_0^1 ydx=1$, $\int\limits_0^1 xydx=0.$

4.3.24. $J(y)=\int\limits_0^\pi y'^2dx;\ y(0)=0,\quad y(\pi)=1$, при условии $\int\limits_0^\pi y\sin xdx=0.$

4.3.25. $J(y)=\int\limits_0^\pi y\sin xdx;\ y(0)=0,\quad y(\pi)=\pi$, при условии $\int\limits_0^\pi y'^2dx=\dfrac{3\pi}{2}.$

4.3.26. $J(y)=\int\limits_0^1 (y'^2+y^2)dx;\ y(0)=0,\quad y(1)=\dfrac{1}{e}$, при условии $\int\limits_0^1 e^{-x}ydx=\dfrac{1}{4}\left(1-3e^{-2}\right)..$

4.3.27. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 y_1'\ y_2'\ dx,\ y_1(0)=0, y_1(1)=0,\ \ y_2(0)=0, y_2(1)=1$, при условии $\int\limits_0^1 xy_1dx=1$, $\int\limits_0^1 xy_2dx=0$.

4.3.28. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1+y_2)dx,\ y_1(0)=0, y_1(1)=1,\ \ y_2(0)=0, y_2(1)=-3$, при условии $\int\limits_0^1 y_1'y_2'dx=0$.

4.3.29. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 (y_1'^2+y_2'^2)dx,\ y_1(0)=0, y_1(1)=0,\ \ y_2(0)=0, y_2(1)=0$, при условии $\int\limits_0^1 y_1y_2dx=-2$.

4.3.30. $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1 x(y_1-y_2)dx,\ y_1(0)=0, y_1(1)=2,\ \ y_2(0)=0, y_2(1)=0$, при условии $\int\limits_0^1 y_1'y_2'dx=-\dfrac{4}{5}$.

Контрольные вопросы

1. Что такое вариационное исчисление и вариационные задачи?
2. Что такое функционал? Приведите примеры функционалов.
3. Что такое приращение функции $y(x)$? Как понимается близость двух кривых в вариационном исчислении?
4. Сформулируйте простейшую задачу вариационного исчисления.
5. Дайте определение допустимой кривой.
6. Что такое сильный и слабый экстремумы функционала? Чем отличаются эти два понятия экстремума функционала? Что можно сказать про необходимые и достаточные условия сильного и слабого экстремумов функционала? Ответ обоснуйте.

7. Что такое вариация допустимой кривой?
8. Что такое первая и вторая вариации функционала? Получите их аналитическое выражение.
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условия слабого экстремума функционала в терминах вариаций.
10. Постройте вывод уравнения Эйлера.
11. Как называются кривые, удовлетворяющие уравнению Эйлера? Можно ли утверждать, что на этих кривых функционал достигает своего экстремума? Ответ обоснуйте.
12. Запишите уравнение Эйлера в развернутом виде. Сколько неизвестных постоянных содержит общее решение уравнения Эйлера? Как они находятся?
13. Приведите частные случаи уравнения Эйлера, когда удается найти его решение.
14. Сформулируйте необходимое условие слабого минимума для функционалов, зависящих от нескольких функций и их первых производных.
15. Сформулируйте необходимое условие слабого минимума для функционалов, зависящих от производных высших порядков функции $y(x)$.
16. Как формулируется вариационная задача на условный экстремум? Какого вида могут ограничения в данной задаче?
17. Как решается вариационная задача на условный экстремум при наличии функциональных связей?
18. Как решается вариационная задача на условный экстремум при наличии дифференциальных связей?
19. Как решается вариационная задача на условный экстремум при наличии интегральных связей? Как данные задачи сводятся к задачам с дифференциальными связями? Что такое – принцип взаимности для изопериметрических задач?

Список литературы

Основная литература

1. *Акулич М.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]: учебное пособие / М.Л. Акулич.– СПб. [и др]: Лань, 2009.– 347 с.
2. *Гончаров В.А.* Методы оптимизации : учебное пособие для студентов вузов – М.: Юрайт: Высшее образование, 2010.– 191 с.
3. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления : учебник / Н.М. Гюнтер.– СПб. [и др]: Лань, 2009.– 320 с.
4. *Лесин В.В.* Основы методов оптимизации : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим, физическим и математическим направлениям подготовки / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец.– СПб. [и др.]: Лань, 2011.– 341 с.
5. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование : учебное пособие / А.В. Кузнецов [и др.]; ред.: А.В. Кузнецов, Р.А. Рутковский.– СПб. [и др.]: Лань, 2010.– 448 с.

Дополнительная литература

1. *Ашманов С.А.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов.– М.: Наука, 1991.– 448 с.
2. *Афанасьев М.Ю.* Прикладные задачи исследования операций : учебное пособие / М.Ю. Афанасьев.– Москва: ИНФРА-М, 2006.– 352 с.
3. *Бразовская Н.В.* Математические методы принятия управленческих решений : учебное пособие / Н.В. Бразовская, О.В. Бразовская.– Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2003.– 153 с.
4. *Васильев О.В.* Методы оптимизации в задачах и упражнениях : учебное пособие / О.В. Васильев, А.В. Аргучинцев.– М.: Физматлит, 1999.– 208 с.
5. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач : учебное пособие для вузов / Ф.П. Васильев.– М.: Наука, 1988.– 549 с.
6. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология : учебное пособие для студентов вузов / Е.С. Вентцель.– М.: Дрофа, 2006.– 208 с.
7. *Волков И.К.* Исследование операций : учебник для студентов втузов / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко.– М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2002.– 436 с.
8. *Габасов Р.* Методы оптимизации : учебное пособие / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова.– Минск: Изд-во БГУ, 1975.– 280 с.

9. *Гапанович В. С.* Методические указания и задания для контрольной работы по разделу «Безусловная оптимизация» / В. С. Гапанович, И. В. Гапанович.– Тюмень, ТюмГНГУ, 1993.– 32 с.
10. *Гапанович В. С.* Методические указания и задания для самостоятельной работы по разделу «Численные методы условной оптимизации» / В. С. Гапанович, И. В. Гапанович.– Тюмень, ТюмГНГУ, 1995.– 32 с.
11. *Гапанович В. С.* Методические указания и индивидуальные задания к практическим занятиям по курсу «Системный анализ и исследование операций» / В. С. Гапанович, И. В. Гапанович.– Тюмень, ТюмГНГУ, 1995.– 32 с.
12. *Измайлов А. Ф.* Численные методы оптимизации : учебное пособие для студентов вузов / А. Ф. Измайлов, М. В. Солодов.– М.: Физматлит, 2003.– 301 с.
13. *Калихман И. Л.* Линейная алгебра и программирование : учебник для студентов вузов / И. Л. Калихман.– М.: Высшая школа, 1967.– 427 с.
14. *Карманов В. Г.* Математическое программирование : учебное пособие для студентов вузов / – М.: Физматлит, 2001.– 264 с.
15. *Капустин В. Ф.* Практические занятия по курсу математического программирования : учеб. пособие / – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976.– 192 с.
16. *Кремер Н. Ш.* Исследование операций в экономике : учебное пособие для студентов вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; ред. Н. Ш. Кремер.– М.: ЮНИТИ, 2004.– 408 с.
17. *Кузнецов А. В.* Высшая математика. Математическое программирование: учебник для студентов вузов / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод; под ред. А. В. Кузнецова.– Минск: Вышэйшая школа, 2001.– 351 с.
18. *Кузнецов Ю. Н.* Математическое программирование : учебное пособие для студентов вузов / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко.– М.: Высшая школа, 1980.– 304 с.
19. *Пантелеев А. В.* Вариационное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие – М.: Изд-во МАИ, 2000.– 228 с.
20. *Пантелеев А. В.* Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие для студентов втузов / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова.– М.: Высшая школа, 2005.– 544 с.
21. *Плотников А. Д.* Математическое программирование : экспресс-курс / А. Д. Плотников.– Минск: Новое знание, 2006.– 171 с.
22. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения : учебное пособие / А. В. Ефимов [и др.].– М.: Наука, 1990.– 304 с.
23. *Сигал И. Х.* Введение в прикладное дискретное программирование : учеб. пособие / И. Х. Сигал, А. П. Иванова.– М.: Физматлит, 2002.– 240 с.

24. *Струченков В. И.* Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы : учебное пособие / В. И. Струченков.– М.: Издательство «Экзамен», 2005.– 256 с.
25. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций : пер.с англ. / Х. А. Таха.– М. и др.: Вильямс, 2001.– 912 с.
26. *Черноруцкий И. Г.* Методы оптимизации и принятия решений : учебное пособие для вузов / И. Г. Черноруцкий.– СПб.: Лань,2001.– 382 с.
27. *Черноруцкий И. Г.* Методы оптимизации в теории управления : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров «Системный анализ и управление» и «Информатика и вычислительная техника» / И. Г. Черноруцкий.– М. [и др.]: Питер, 2004.– 256 с.
28. *Черноруцкий И. Г.* Методы принятия решений : учебное пособие для студентов вузов / И. Г. Черноруцкий.– СПб.: БХВ – Петербург, 2005.– 408 с.
29. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник: В 3-х томах / Г. М. Фихтенгольц.– М.; СПб.: Физматлит; Невский диалект, 2002.
30. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : – М.: Наука, 1989.– 424 с.

Учебное издание

Гапанович Владимир Сергеевич

Гапанович Ирина Вениаминовна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В авторской редакции
Дизайн обложки *А. В. Клеменко*

Подписано в печать 06.03.2014. Формат 60x90 1/16.
Усл. печ. л. 17,0. Тираж 100 экз. Заказ № 519.

Библиотечно-издательский комплекс
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Тюменский государственный нефтегазовый университет».
625000, Тюмень, ул. Володарского, 38.

Типография библиотечно-издательского комплекса.
625039, Тюмень, ул. Киевская, 52.