

Юстина Иванова

Специалист по анализу данных

Математика для data science:
Векторы. Операции с векторами.
Матрицы. Перемножение матриц.
Преобразования элементов в пространстве

Спикер



Юстина Иванова,

- Специалист по анализу данных «ОЦРВ», Сочи
- Инженер-программист МГТУ им. Баумана,
- Магистр по программе «Искусственный интеллект» Университета Саутгемптон

Вектор

Вектор — упорядоченный конечный список чисел.
Вектора обычно записываются как вертикальный список,
например:

$$\begin{bmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{pmatrix}$$

Вектор может быть записан также в следующем виде:

$$(-1.1, 0.0, 3.6, -7.2)$$

Скаляр

Скаляр — число.

Число может являться целым натуральным и записывается как:

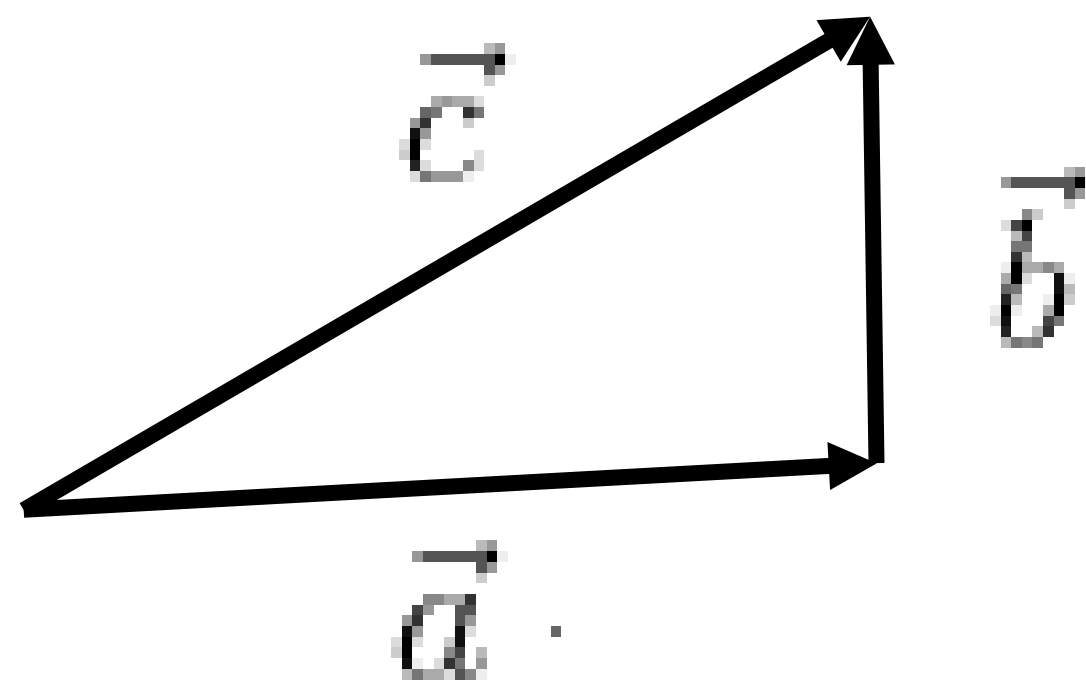
$$s \in \mathbb{N}$$

Число может быть десятичным и записываться как:

$$s \in \mathbb{R}$$

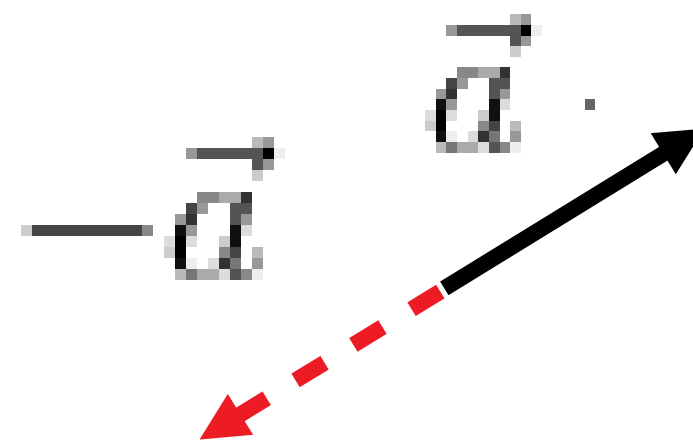
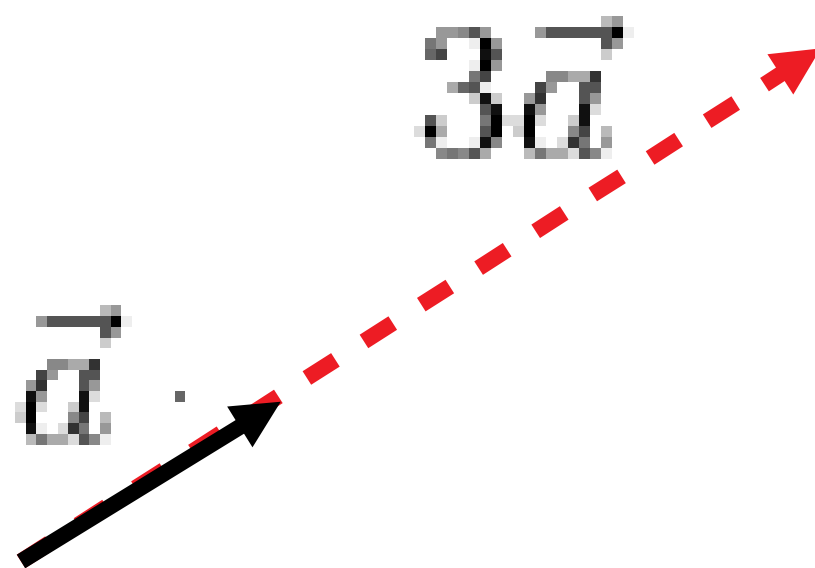
Операции с векторами.

Сложение векторов:



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Умножение вектора на число:



Подсчет длины вектора.

Длина вектора может быть подсчитана по формуле евклидова расстояния:

$$|x| = \sqrt{\sum_i (|x_i|^2)}$$

где p — размерность вектора.

Для двумерного вектора данная формула становится следующего вида и называется L^2 нормой:

$$|a| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

где a — вектор с координатами (x, y) .

Скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение векторов (dot product по англ.) - это скаляр (число), полученное в результате перемножения длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

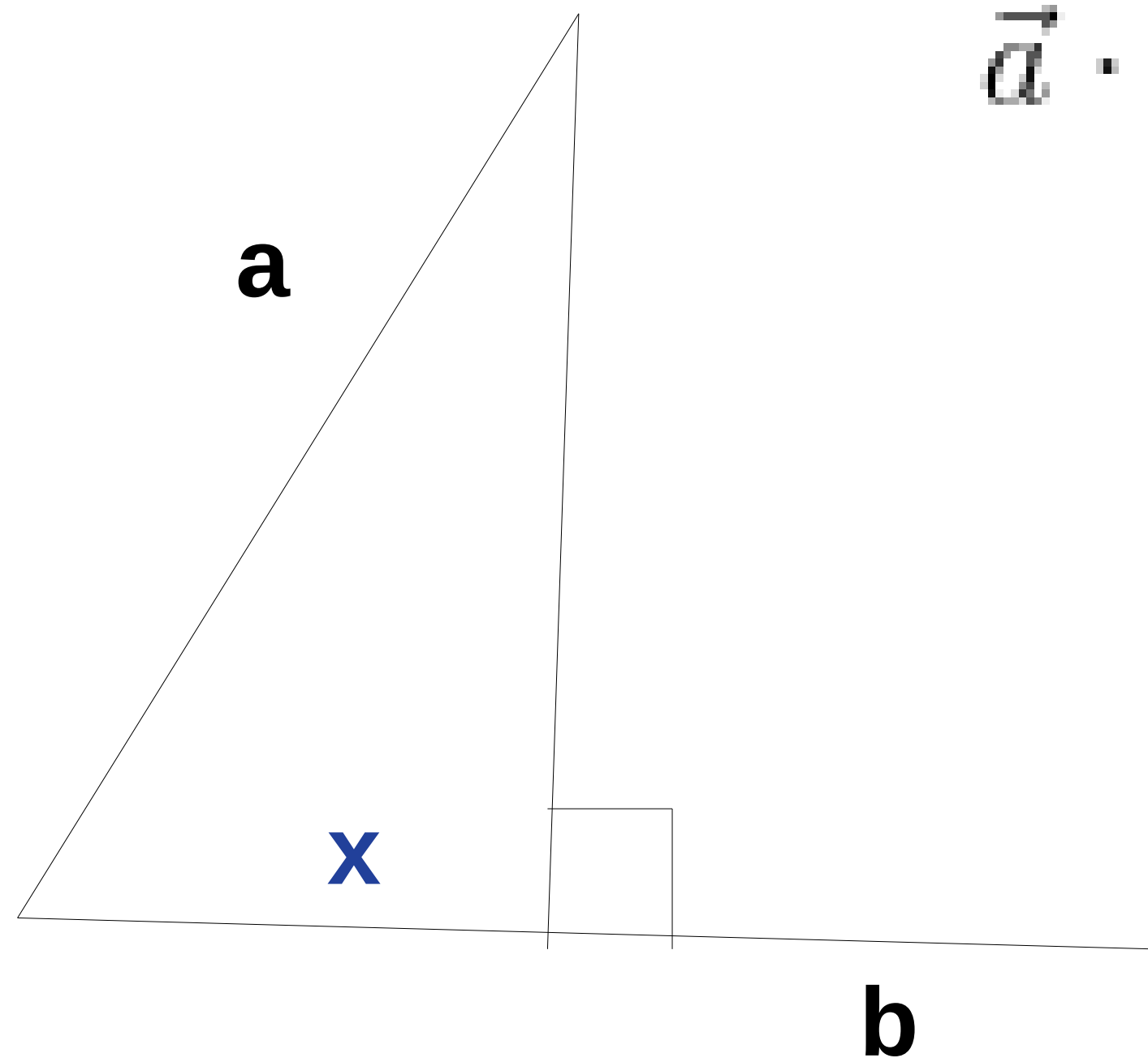
Если известны координаты векторов, то скалярное произведение можно посчитать по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

где $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$ вектора в двумерном пространстве

Проекция вектора на вектор.

Длина вектора x , полученного в результате проекции вектора a на вектор b , равна делению скалярного произведения вектора a на вектор b на длину b .



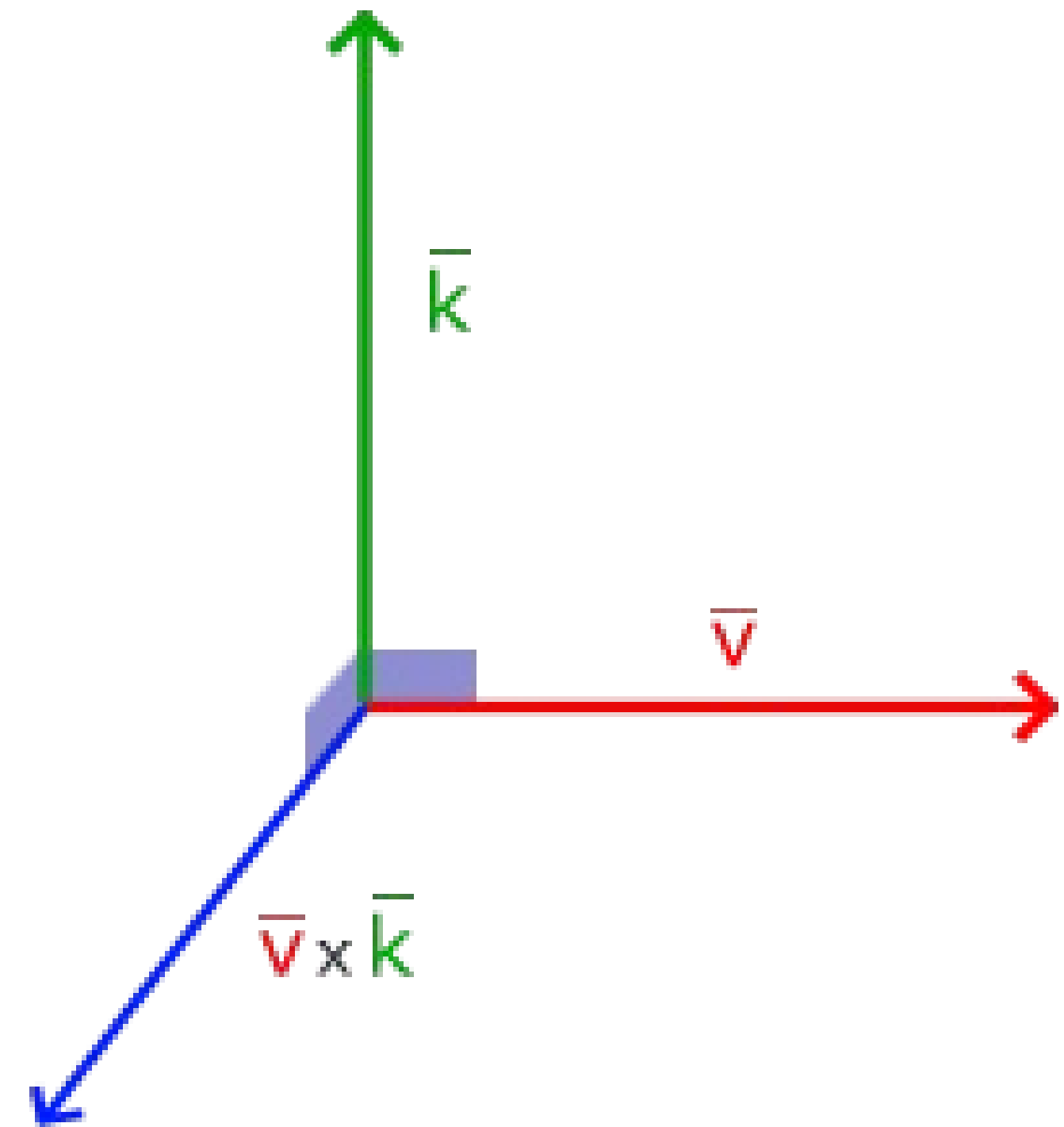
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= |x|/|a| \\ |x| &= \cos(\alpha) \cdot |a| \\ |x| &= \mathbf{a \cdot b} / |b|\end{aligned}$$

Векторное произведение векторов.

Векторное произведение возможно только в трехмерном пространстве и принимает на вход два непараллельных вектора, а возвращает вектор, который ортогонален входным.

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \\ A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x \end{pmatrix}$$



Если входные вектора ортогональны друг другу, то векторное произведение создаст 3 ортогональных вектора.

Матрица.

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}$$

Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы.

Диагональная матрица — квадратная матрица, все элементы которой, кроме диагональных, равны 0.

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}$$

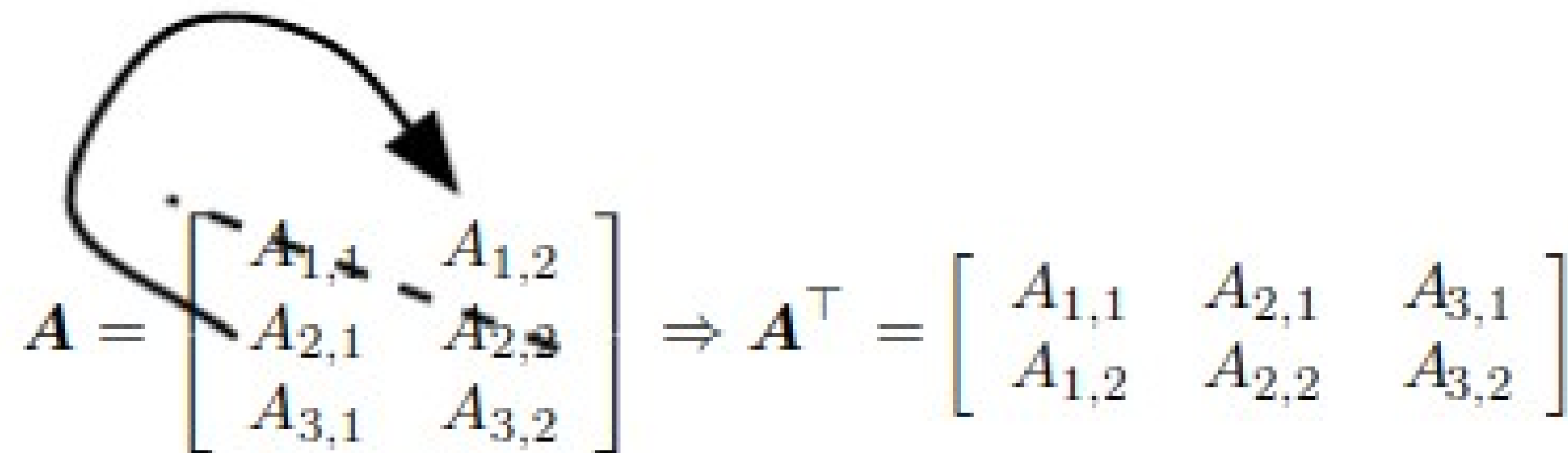
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Единичная матрица — квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, остальные элементы равны 0.

Транспонирование матрицы.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Транспонирование матрицы
— это замена строк на
столбцы.



$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

Транспонирование матрицы можно рассматривать как отображение матрицы относительно главной диагонали.

Сложение и умножение матрицы на скаляр.

Сложение.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Умножение на скаляр.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot 5 = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 15 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Перемножение матриц.

Даны 2 матрицы: А и В. Умножение матрицы А на В можно выполнить, если количество столбцов матрицы А равно количеству строк матрицы В.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 6 & 7 & 7 \\ 16 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица.

Обратная матрица к данной — это матрица при перемножении которой с текущей матрицей получается единичная матрица.

$$A A^{-1} = I$$

Например:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Свойства обратной матрицы. Детерминант.

Обратная матрица должна быть квадратной и невырожденной (определитель не равен нулю).

Детерминант (определитель) матрицы $A = (a_{ij})$ -

$$\Delta A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 1} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

$n \times n$ размер матрицы

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ все перестановки матрицы

$N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ число инверсий в перестановке

Определители матриц. Примеры.

Определитель матрицы для единичной матрицы:

$$\Delta = |\alpha_{11}| = \alpha_{11}$$

Определитель для квадратной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Определитель трехмерной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Собственный вектор матрицы.

Ненулевой вектор \bar{u} , который при умножении на некоторую квадратную матрицу A превращается в самого же себя с числовым коэффициентом λ , называется собственным вектором матрицы:

$$A\bar{u} = \lambda\bar{u}$$

Собственное значение матрицы.

Коэффициент λ в формуле и есть собственное значение:

$$A\bar{u} = \lambda\bar{u}$$

Пример собственных вектора и значения.

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{собственный вектор}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{матрица}$$

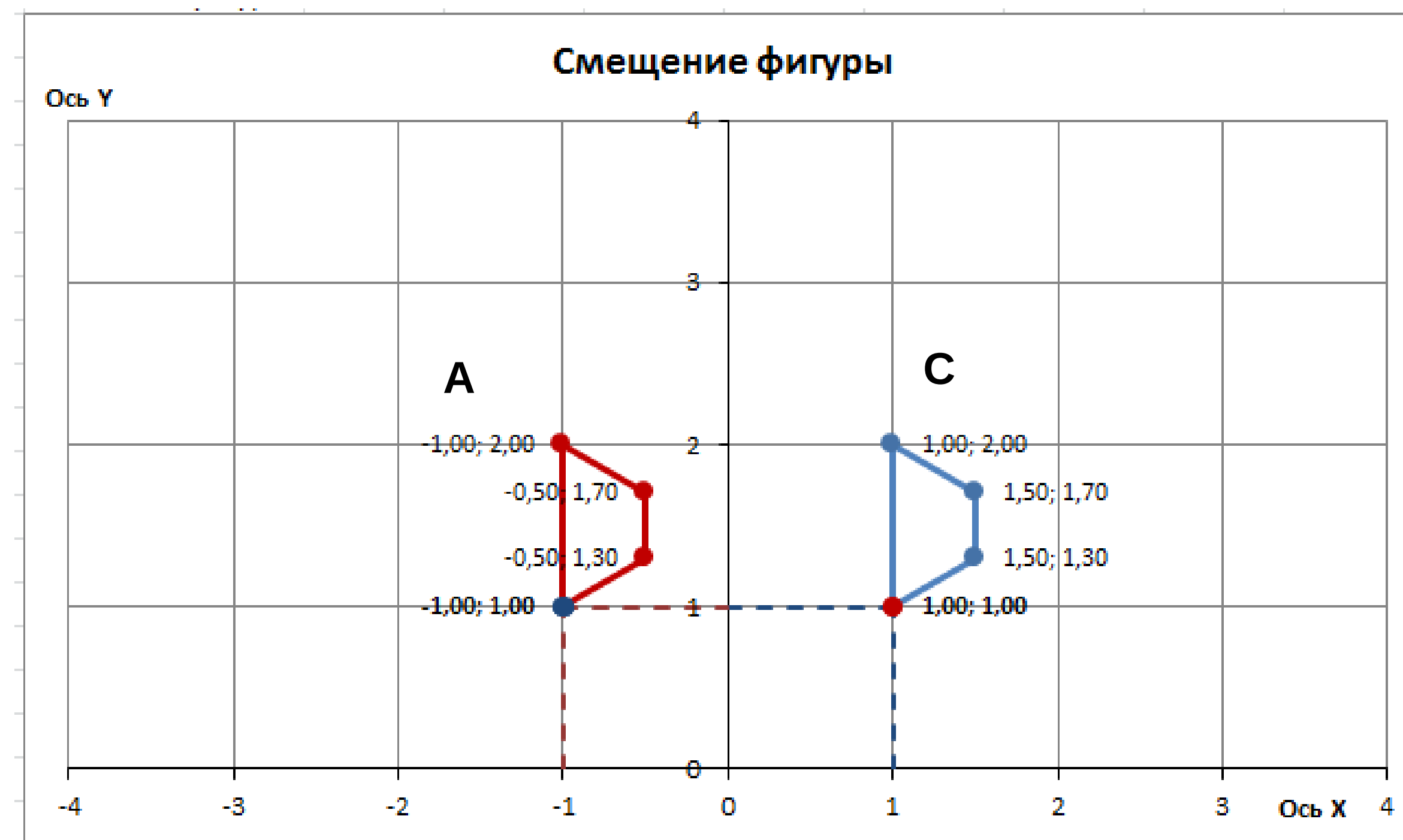
Умножаем матрицу A на собственный вектор:

$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 \quad \text{собственное значение}$$

Смещение объекта с помощью сложения векторов.

Смещение объекта в пространстве:



$$A + B = C$$

A — исходный объект

B — вектор смещения

C — новое положение объекта

$$B = (2, 0)$$

Смещение объекта с помощью матричных преобразований

Смещение объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу сдвига:

$$\begin{array}{c} \text{матрица сдвига} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \text{координаты точки} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{новое положение точки} \\ \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Масштабирование объекта

Масштабирование объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу масштабирования:

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \cdot x \\ S_2 \cdot y \\ S_3 \cdot z \\ 1 \end{pmatrix}$$

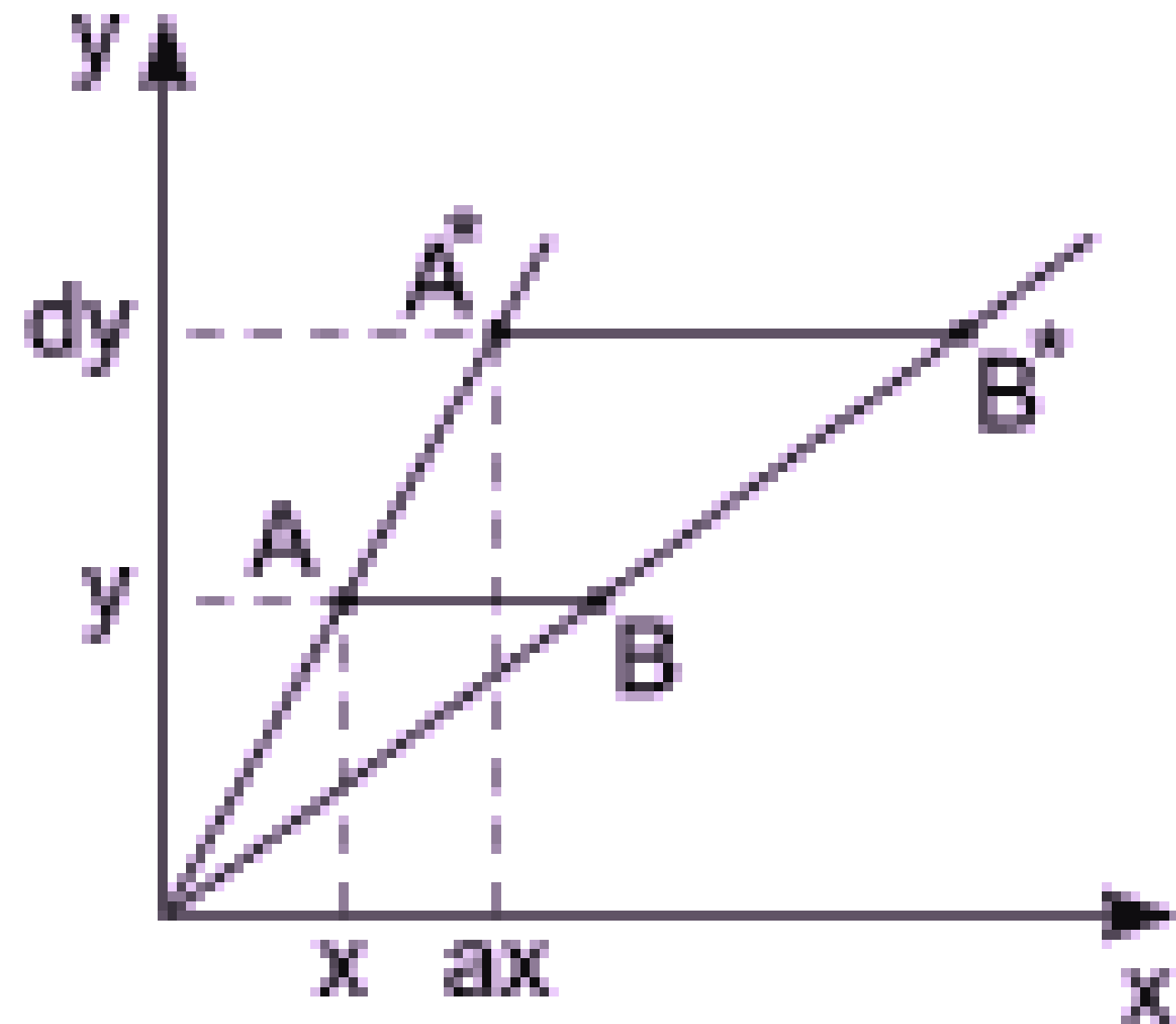
матрица масштабирования

↑
координаты точки

новое положение точки

Пример масштабирования объекта

Масштабирование объекта в пространстве:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & dy & 1 \end{vmatrix}$$

Поворот объекта вокруг оси x

Поворот объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу поворота:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \cos \theta \cdot y - \sin \theta \cdot z \\ \sin \theta \cdot y + \cos \theta \cdot z \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица поворота вокруг оси x на угол θ

новое положение точки

координаты точки

Поворот объекта вокруг оси y

Поворот объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу поворота:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot z \\ y \\ -\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot z \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица поворота вокруг оси y на угол θ

новое положение точки

координаты точки

Поворот объекта вокруг оси z

Поворот объекта как результат перемножения матрицы объекта на матрицу поворота:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y \\ \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица поворота вокруг оси y на угол θ

координаты точки

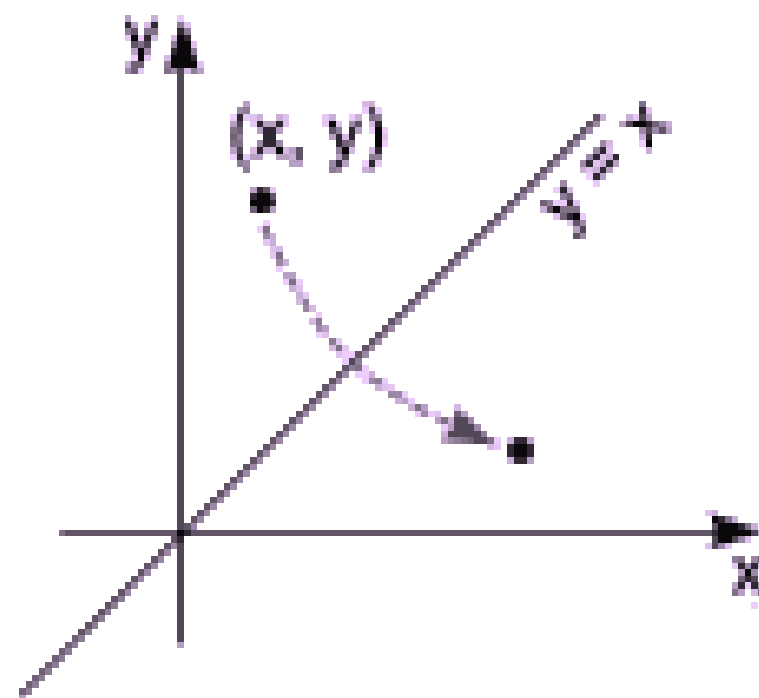
новое положение точки

Матрица вращения вокруг произвольной оси

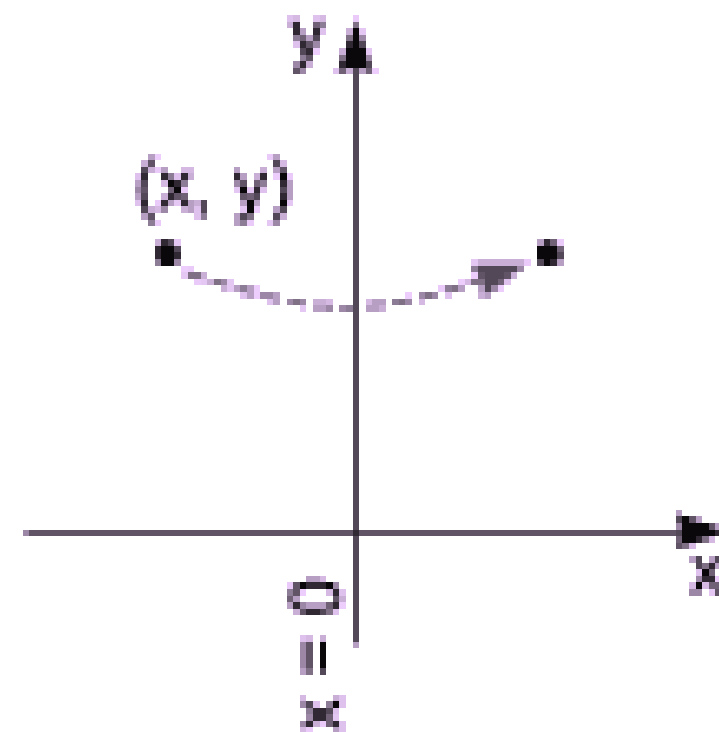
Матрица поворота вокруг произвольной оси: (R_x, R_y, R_z) — это ось вращения::

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + R_x^2 (1 - \cos \theta) & R_x R_y (1 - \cos \theta) - R_z \sin \theta & R_x R_z (1 - \cos \theta) + R_y \sin \theta & 0 \\ R_y R_x (1 - \cos \theta) + R_z \sin \theta & \cos \theta + R_y^2 (1 - \cos \theta) & R_y R_z (1 - \cos \theta) - R_x \sin \theta & 0 \\ R_z R_x (1 - \cos \theta) - R_y \sin \theta & R_z R_y (1 - \cos \theta) + R_x \sin \theta & \cos \theta + R_z^2 (1 - \cos \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

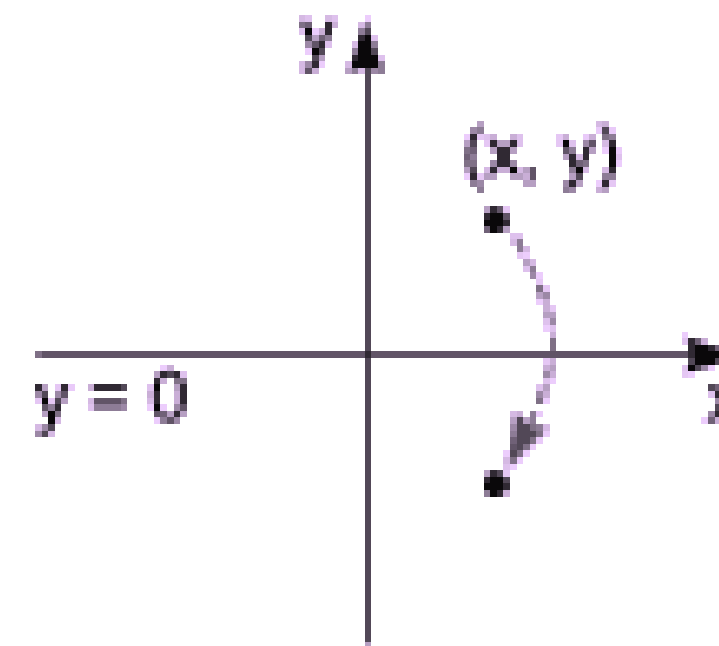
Зеркалирование или отображение объекта



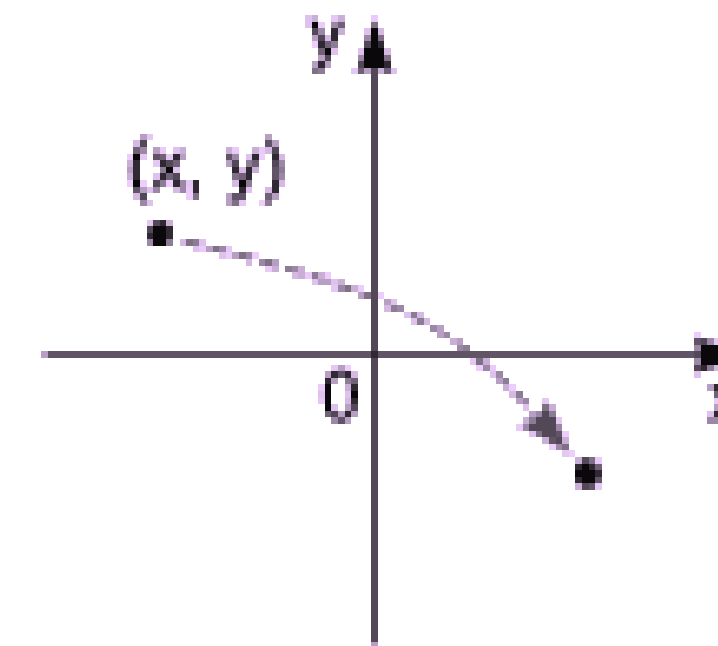
a



b



c



d

вокруг прямой $y=x$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 1 \end{vmatrix}$$

вокруг оси $y=0$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y & 1 \end{vmatrix}$$

вокруг оси x

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & y & 1 \end{vmatrix}$$

вокруг относительно
начала координат

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -y & 1 \end{vmatrix}$$

Комбинирование матриц

Несколько операций над объектом могут быть объединены с помощью умножения матриц трансформаций.

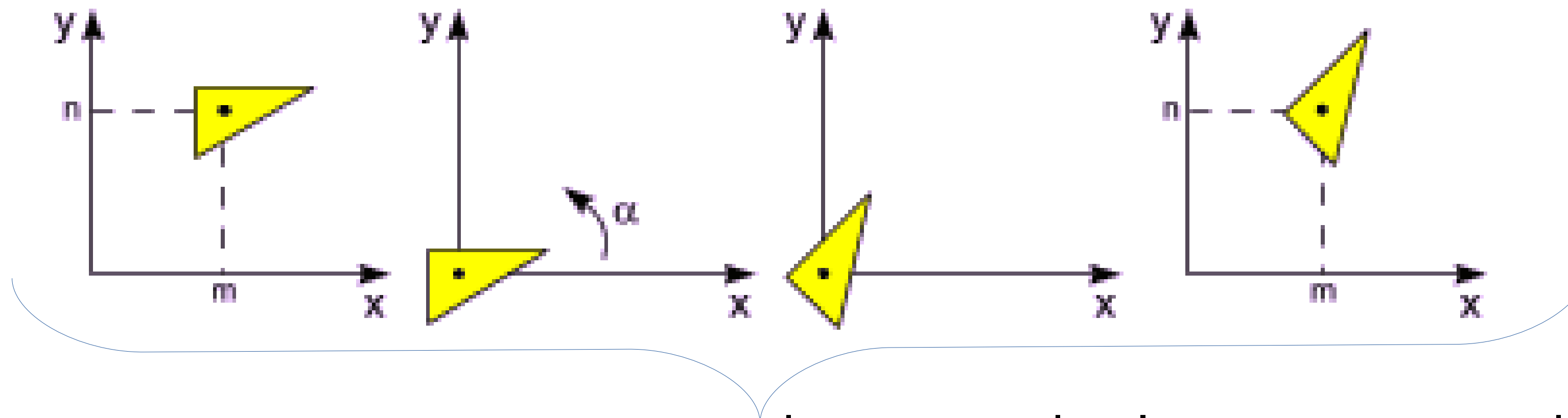
$$\textit{Trans. Scale} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица сдвига
 матрица масштабирования
 матрица трансформации

Поворот вокруг произвольной точки.

Процесс поворота каждой точки фигуры вокруг произвольной точки $A(m,n)$:

- смещение точки на вектор $(-m, -n)$
- поворот точки с помощью матрицы поворота
- смещение точки в исходное положение на вектор $(+m, +n)$



Матрица трансформаций =

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}$$

Система линейных уравнений.

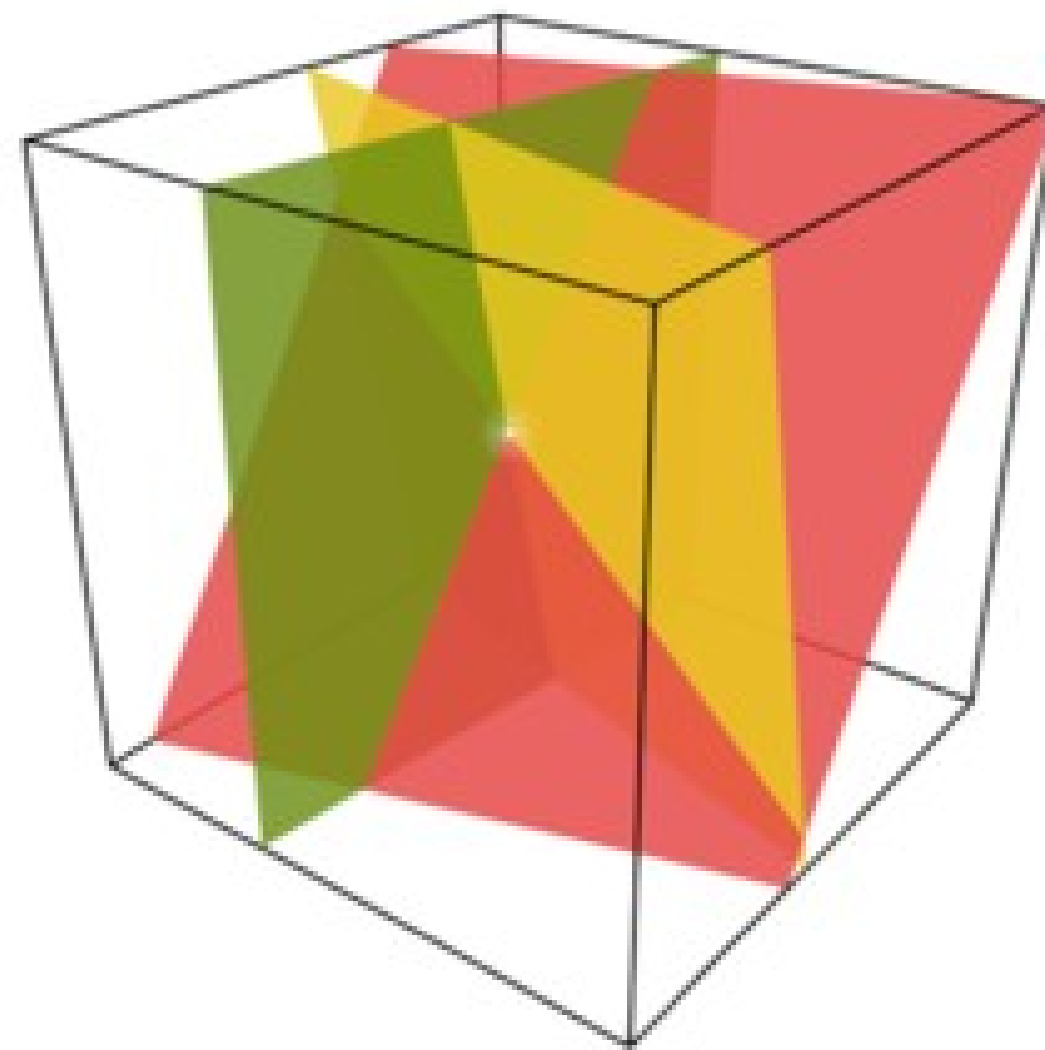
Систему линейных уравнений можно записать в виде перемножения и сложения матриц.

$$Ax + b = 0$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 = 0 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0$$

Решение систем линейных уравнений.



Система линейных уравнений от трёх переменных определяет набор плоскостей. Точка пересечения является решением.

$$Ax + b = 0$$

Если матрица A невырожденная (определитель отличен от нуля), и для неё существует обратная матрица A^{-1} , то решение можно записать как

$$x = A^{-1}b$$

Спасибо за внимание!

Юстина Иванова,

Data scientist

«ОЦРВ»