НЕТОЛОГИЯ

Юстина Иванова

Специалист по анализу данных

Математика для data science:

НЕТОЛОГИЯ

Спикер

Юстина Иванова,

- Специалист по анализу данных «ОЦРВ», Сочи
- Инженер-программист МГТУ им. Баумана,
- Магистр по программе «Искуственный интеллект» Университета Саутгемптон

Система линейных уравнений.

Систему линейных уравнений можно записать в виде перемножения и сложения матриц.

$$Ax + b = 0$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 = 0 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0$$

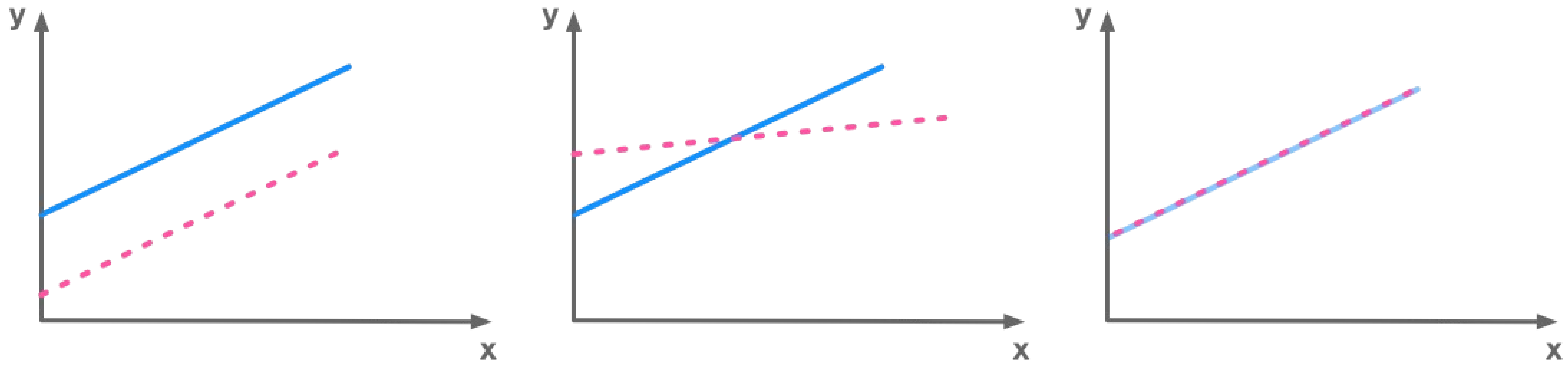
Решение системы линейных уравнений.

Рассмотрим случай системы уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Данная система – две прямые в двумерном пространстве.

Нет решений Одно решение Множество решений



Зависимость коэффициентов и количества решений.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

- система имеет одно решение

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

- система решений не имеет

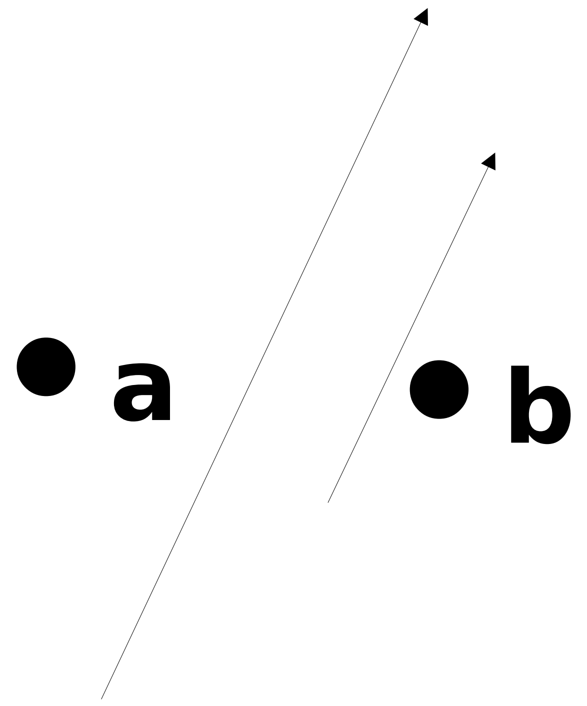
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- система имеет бесконечное множество решений

Способы решения системы линейных уравнений.

- Метод подставновки
- Метод сложения
- Графически
- Метод введения новых переменных
- Метод Гауса

Линейная зависимость векторов в 2D.



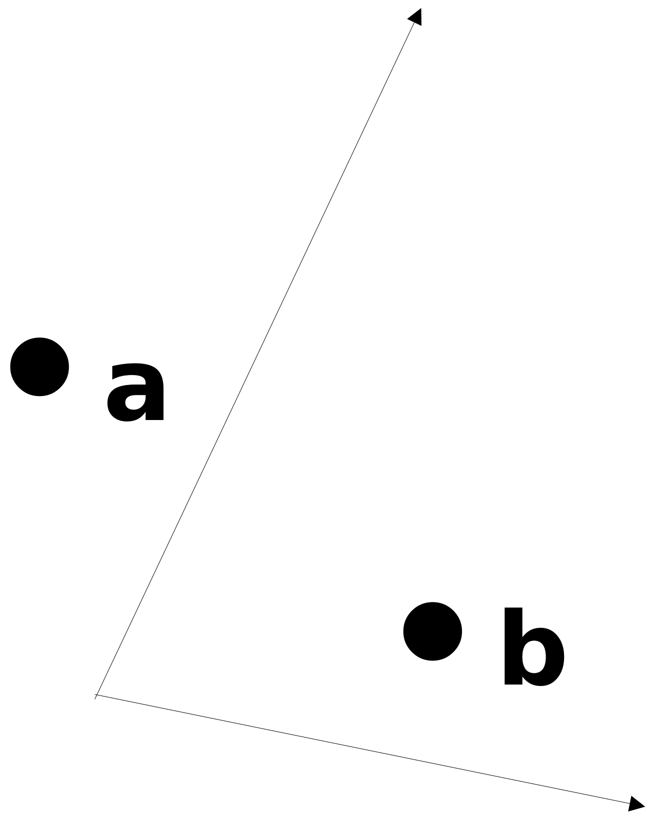
Два вектора плоскости линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

$$\vec{a} = \alpha \vec{b}$$

Коллинеарные векторы линейно выражаются друг через друга.

$$\vec{b} = \frac{1}{\alpha} \vec{a}$$

Базис векторов в двухмерном пространстве.

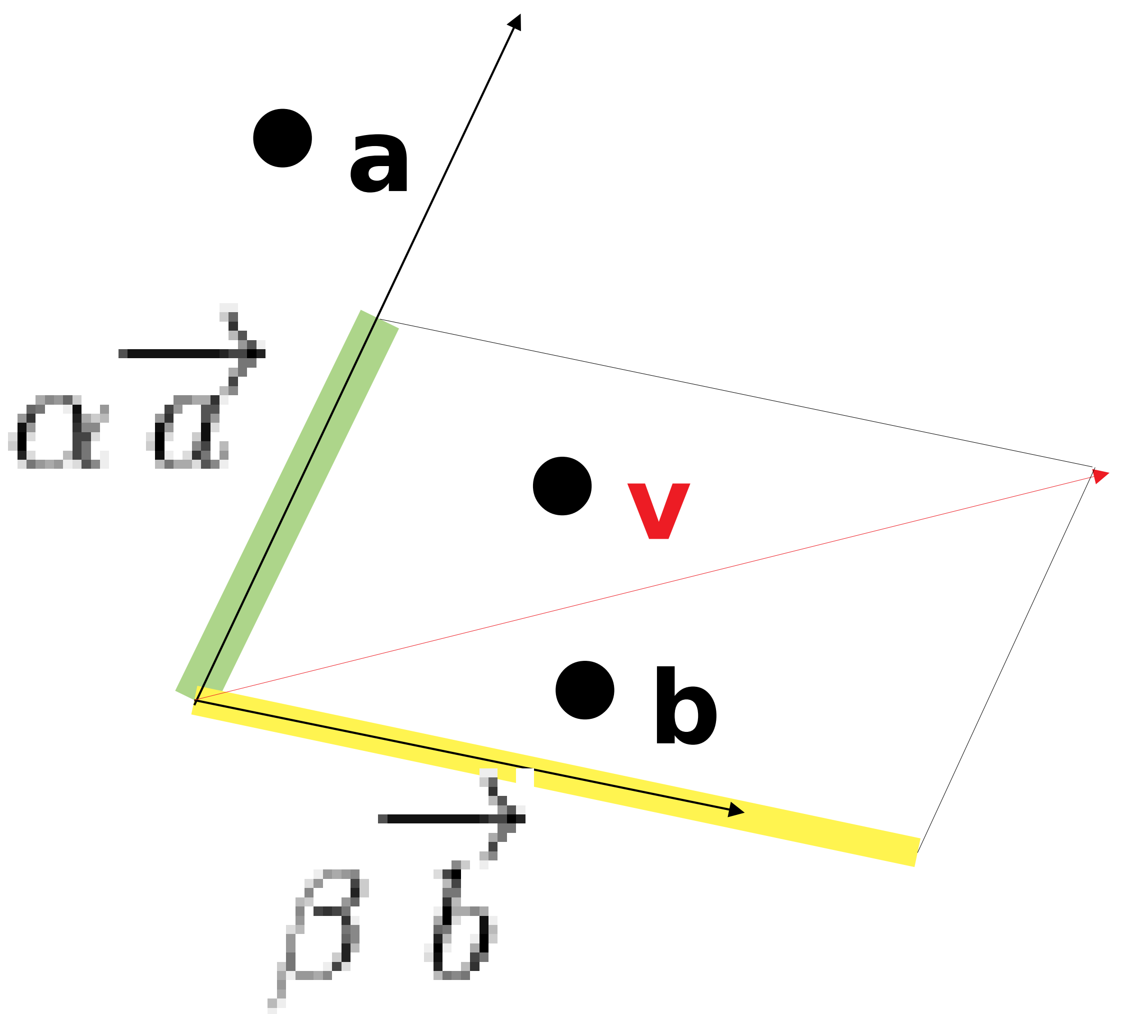


Два вектора плоскости линейно независимы, если они неколлинеарны.

Базис в двухмерном пространстве – два линейно независимых вектора.

Любой вектор плоскости раскладывается единственным образом по базису.

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$



Числа α и β - координаты вектора в данном базисе.

Ортонормированный базис.

Базис плоскости - пара линейно независимых (неколлинеарных) векторов , взятых в определённом порядке.

Базисы $(\vec{a}, \vec{b})$ и $(\vec{b}, \vec{a})$ – это два совершенно разных базиса.

Ортогональный базис – базис, составленный попарно из ортогональных (перпендикулярных) векторов.

Ортонормированный базис - удовлетворяет еще и условию единичности нормы всех его элементов. То есть это ортогональный базис с нормированными элементами.

Коллинеарность векторов в пространстве.

Пример: проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ (-2,4) и $\vec{b}$ (1,-2).

Решение:

Для того чтобы два вектора плоскости $\vec{a}(x_a, y_a)$, $\vec{b}(x_b, y_b)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны:

$$\begin{cases} x_a = \lambda x_b \\ y_a = \lambda y_b \end{cases}$$

Составим уравнение для векторов. Так как координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

$$\begin{cases} -2 = \lambda \cdot 1 \\ 4 = \lambda \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2$$

Задание.

Пример: проверить, образуют ли базис векторы $\vec{a}$ (3,7) и $\vec{b}$ (-6,14).

Ответ.

Пример: проверить, образуют ли базис векторы $\vec{a}$ (3,7) и $\vec{b}$ (-6,14).

Решение:

Составим линейную систему для двух коэффициентов:

$$\begin{cases} x_a = \lambda x_b \\ y_a = \lambda y_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \cdot (-6) \\ 7 = \lambda \cdot 14 \end{cases}$$

система несовместна (решений нет).

Вывод: векторы линейно независимы и образуют базис.

Коллинеарность векторов в 2D пространстве.

Два вектора плоскости $\vec{a}(x_a, y_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат данных векторов, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = 0$$

Линейная зависимость векторов в 3D.

3 вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются компланарными.

Компланарные векторы всегда линейно зависимы, или выражаются друг через друга.

$$\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$$

3 некомпланарных вектора всегда линейно независимы.

Базис трёхмерного пространства

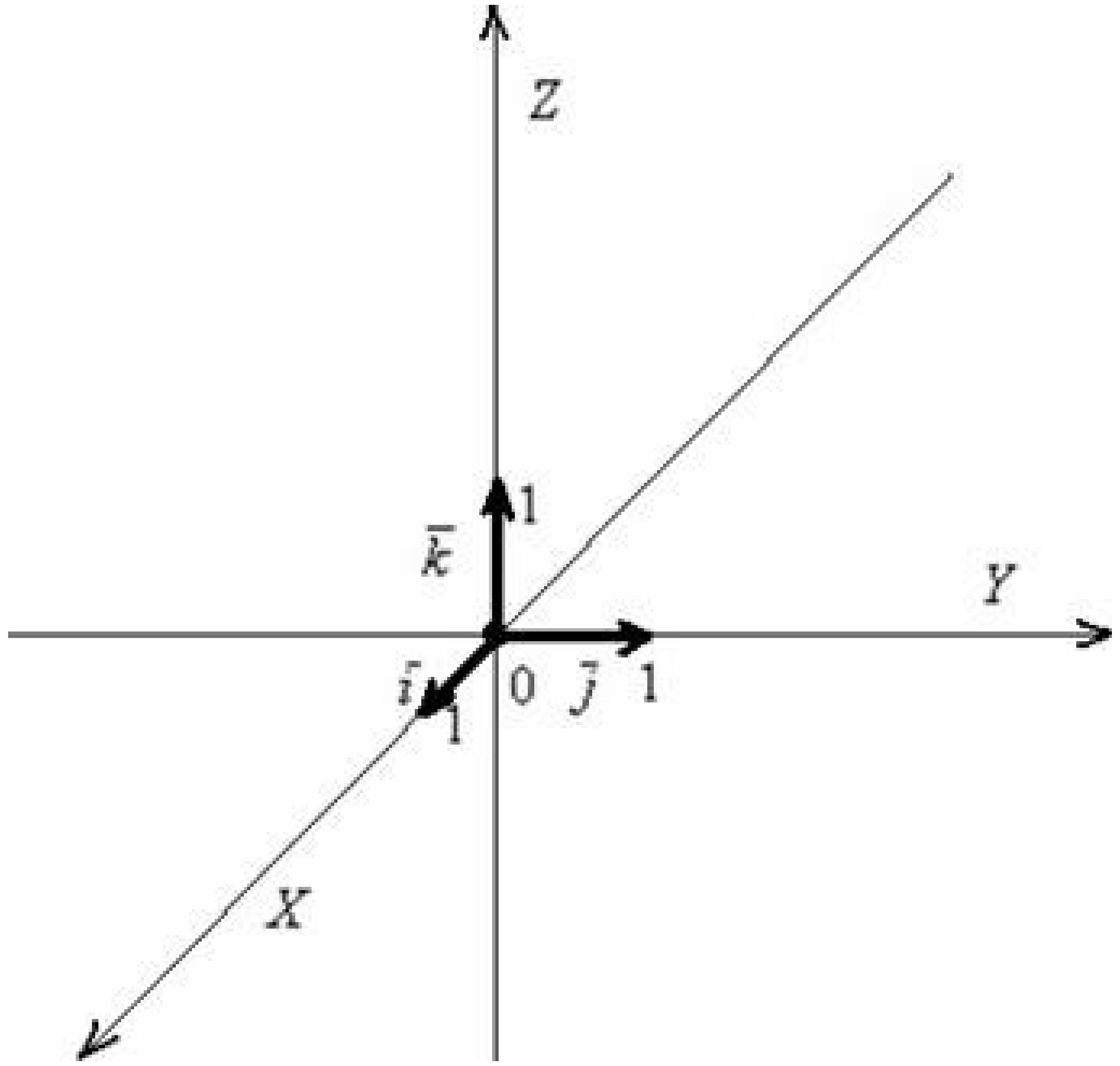
Базис в трёхмерном пространстве – три независимых (некомпланарных) вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, взятых в определённом порядке, при этом любой вектор $\overrightarrow{v}$ пространства единственным образом раскладывается по данному базису:

$$\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}$$

α, β, γ - координаты вектора в базисном пространстве.

Декартова прямоугольная система координат.

Точка O пространства, которая называется началом координат, и ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задают декартову прямоугольную систему координат пространства.



Компланарность векторов.

Три вектора пространства $\vec{a}(x_a, y_a, z_a), \vec{b}(x_b, y_b, z_b), \vec{c}(x_c, y_c, z_c)$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат данных векторов, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} = 0$$

Задача.

Проверить, образуют ли базис пространства следующие векторы:

$$\vec{a}\,(4,-2,2),\ \vec{b}\,(-3,3,-4),\ \vec{c}\,(2,-4,3)$$

Решение:

Фактически всё решение сводится к вычислению определителя, составленного из координат векторов:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4\cdot(9 - 16) + 3\cdot(-6+8) + 2\cdot(8-6) = -28+6+4 = -18 \neq 0$$

Ответ: векторы линейно независимы и образуют базис.

Разложение вектора по базису в 3D пространстве.

Даны 4 вектора: $\overrightarrow{a_1}(4,1,4), \overrightarrow{a_2}(-2,-1,1), \overrightarrow{a_3}(3,1,5), \overrightarrow{b}(-3,-2,1)$

Разложим вектор $\vec{b}$ по $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$

Проверим, являются ли вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ базисами в трехмерном пространстве:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4(-5-1) + 2(5-$$

$4) + 3(1+4) = -24 + 2 + 15 = -7 \neq 0$ - векторы линейно независимы и образуют базис.

Вектор $\vec{b}$ можно представить ввиде уравнения:

$$\overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + x_3\overrightarrow{a_3}$$

Разложение вектора по базису в 3D пространстве.

$$\vec{b} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3}$$

Распишем данное уравнение покоординатно:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Решить уравнение можно следующими способами:

Метод Крамера

С помощью обратной матрицы

Метод Гауса

- http://mathprofi.ru/pravilo_kramera_matrichnyi_metod.html

Разложение вектора по базису в 3D пространстве.

$$\overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + x_3\overrightarrow{a_3}$$

У данной системы 3 корня:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = -1$$

Разложение вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$:

$$\overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + x_3\overrightarrow{a_3} = 1 \cdot \overrightarrow{a_1} + 2 \cdot \overrightarrow{a_2} - 1 \cdot \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3}$$

Собственный вектор и собственное значение.

Разложение на собственные векторы используется для оптимизации квадратичных функций в двумерном пространстве.

Метод главных компонент.

- Преобразует исходные данные (вектора) в новый базис, причем базис состоит из собственных векторов.
- Уменьшает размерность таблицы, оставляя при этом только нужные для предсказываемого значения атрибуты.
- Решает проблему минимизации ошибки (евклидова расстояния от точки до линейного многообразия).

Функция ошибок в машинном обучении.

Задача – минимизировать функцию ошибок.

Минимизация решается с помощью дифференцирования функции по нескольким атрибутам (векторам).

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Задача – минимизировать функцию ошибок.

Минимизация решается с помощью дифференцирования функции по вектору, в котором ищем наименьшее значение.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае содержит:

- Независимую переменную x
- Зависимую переменную y (функцию)
- Первую производную функции y'

Решить дифференциальное уравнение – это значит найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному уравнению.

Пример диф. Уравнения 1-го порядка.

Решить дифференциальное уравнение:

$$xy' = y$$

Перепишем производную:

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Пример диф. Уравнения 1-го порядка.

Интегралы табличные:

$$ln\,|y| = ln\,|x| + C$$

Перепишем константу C:

$$ln\,|y| = ln\,|x| + ln\,|C|$$

По формуле сложения интегралов:

$$ln\,|y| = ln\,|Cx|$$

Избавляемся от натурального логарифма:

$$y = Cx$$

Ответ: любая прямая вида y=Cx, где C – const, является решением.

Интегралы.

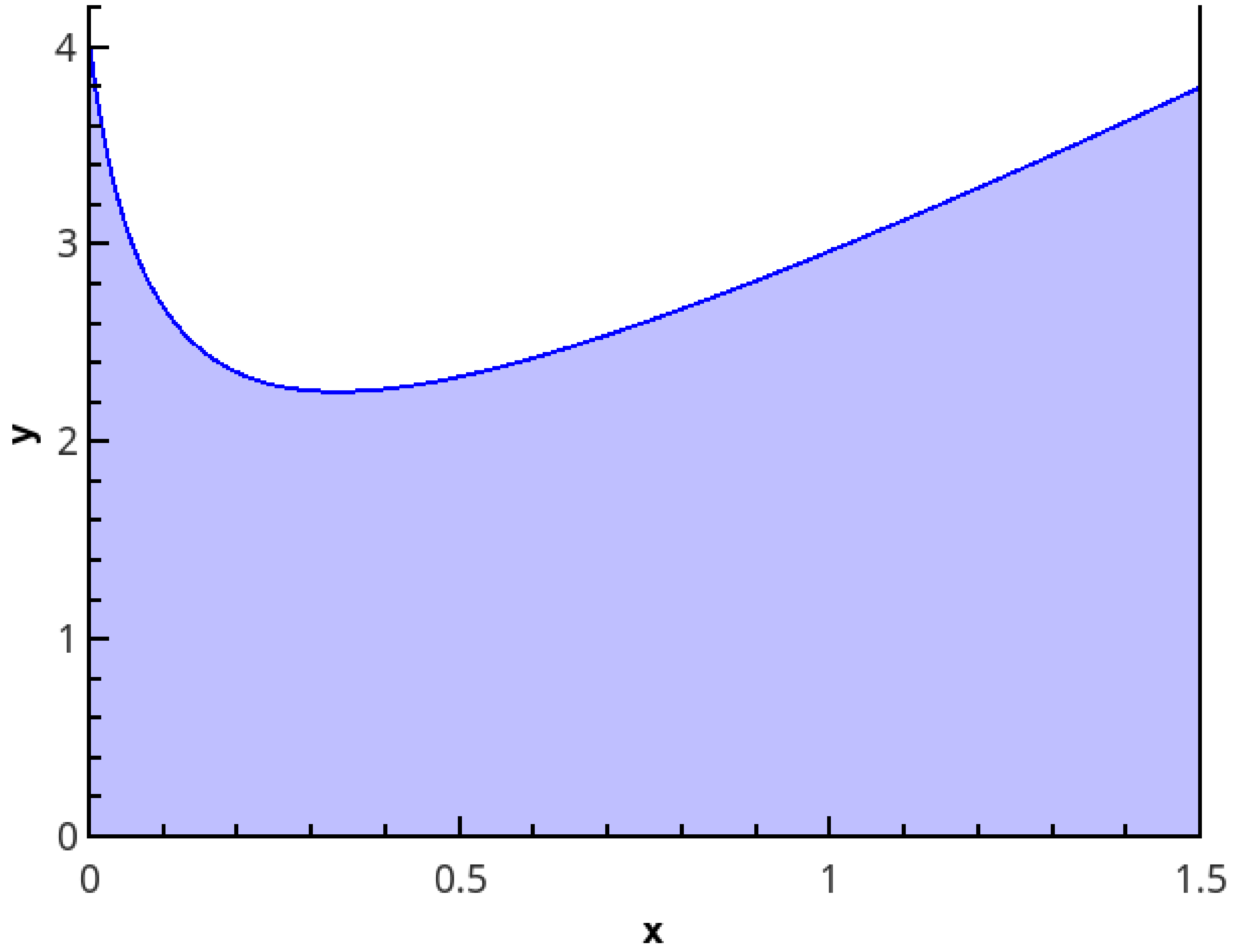
Интеграл функции f(x) на отрезке [a,b] называется следующий предел:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\Delta x = max\left\{x_{i+1} - x_i\right\}$$ - мелкость разбиения

$x_0 = a, x_n = b, \xi_i -$ Произвольное число на отрезке [xi;xi+1]

Геометрический смысл интеграла.



Интеграл функции f(x) равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком функции и прямыми x=a и x=b.

Лимиты (пределы).

Функция f(x) имеет предел A в точке x0, если для всех значений x, достаточно близких к x0, значение f(x) близко к A.

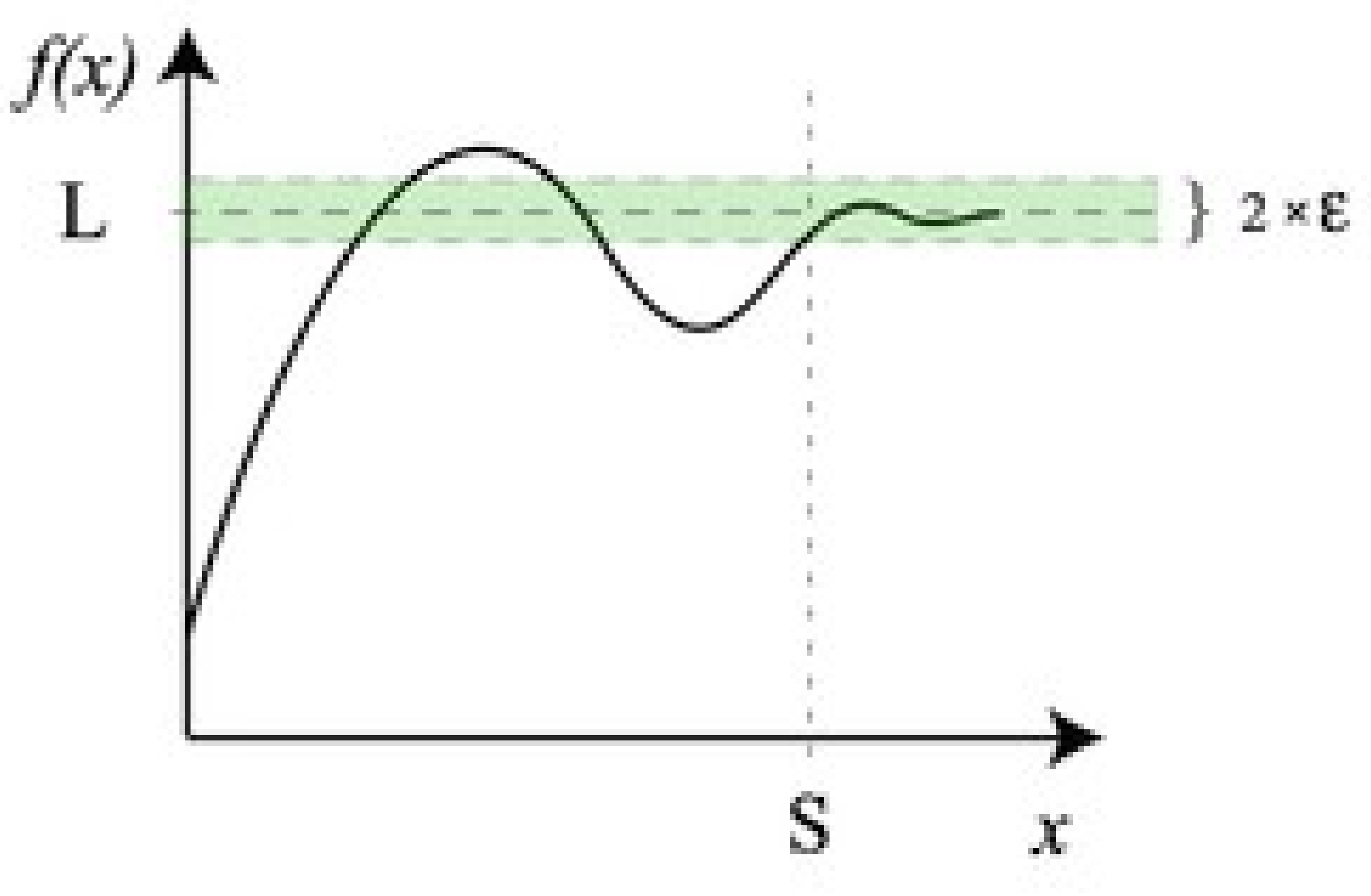


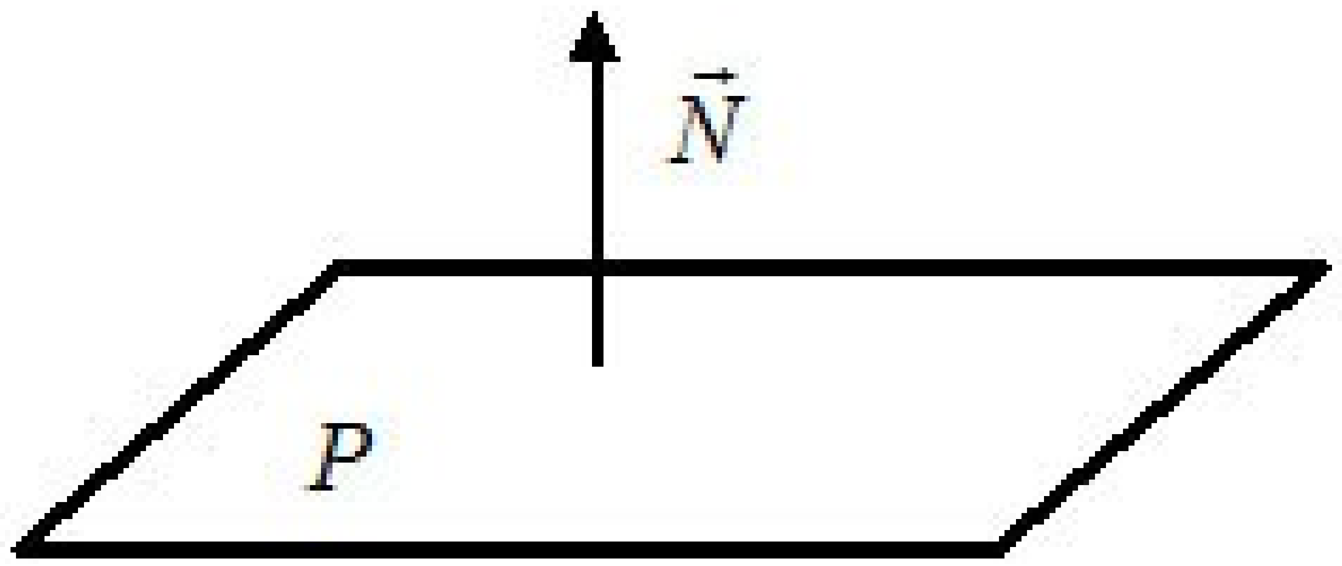
График функции, предел которой при аргументе, стремящемся к бесконечности, равен L.

ru.wikipedia.org/wiki/Предел_(математика)

НЕТОЛОГИЯ

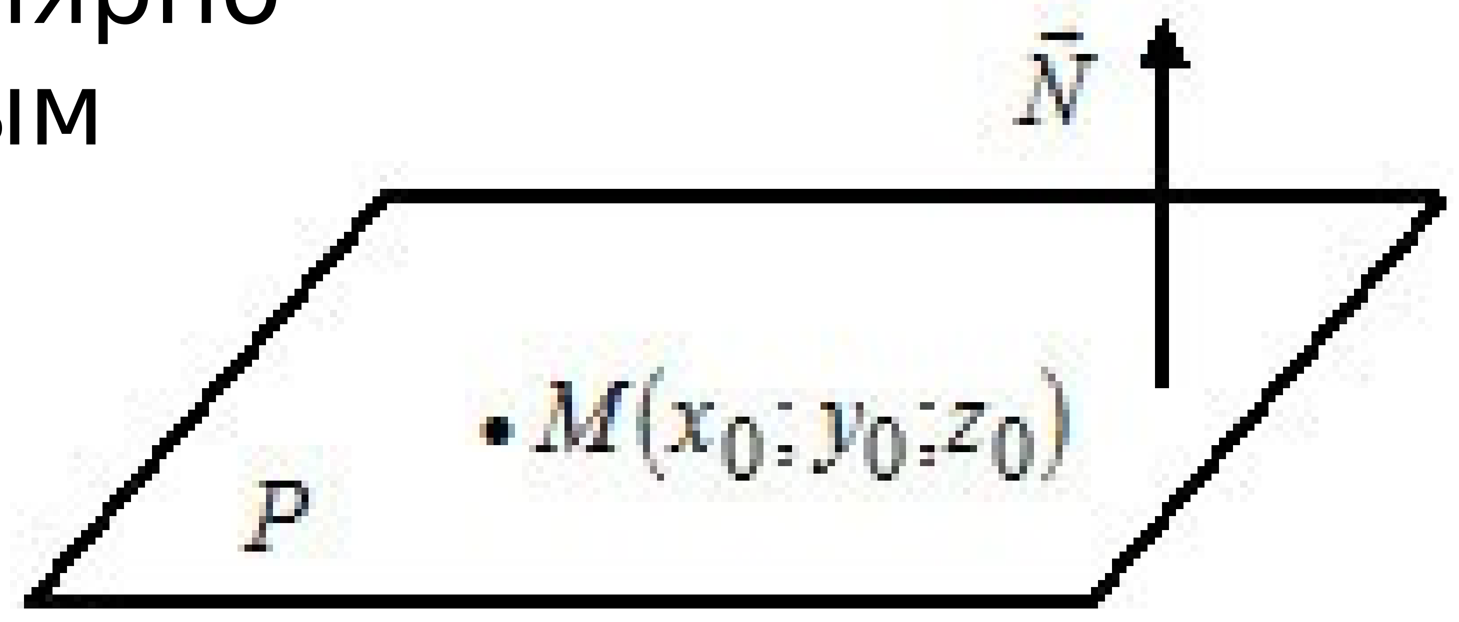
Уравнение плоскости в пространстве.

Плоскость в пространстве задается следующими способами:

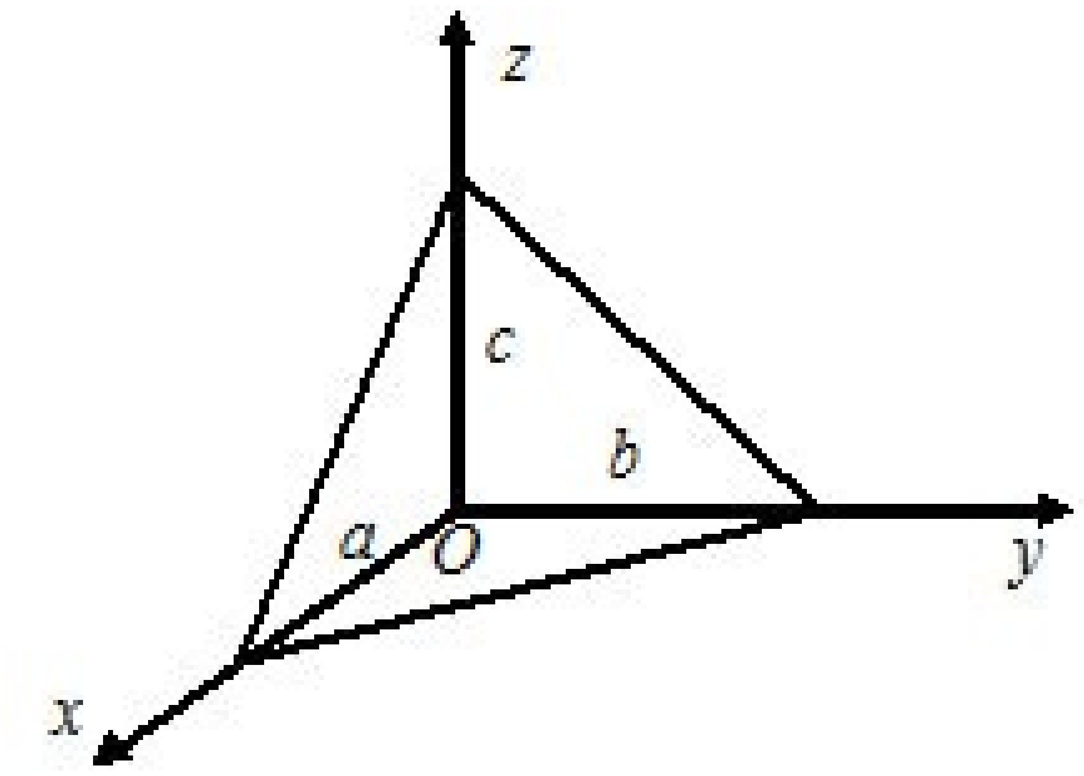


$Ax+By+Cz+D=0$− общее уравнение плоскости P, где **N**=(A,B,C)− нормальный вектор плоскости P.

$A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-z0)=0$ - уравнение плоскости P, которая проходит через точку M(x0,y0,z0) перпендикулярно вектору **N**=(A,B,C). Вектор **N** называется нормальным вектором плоскости.

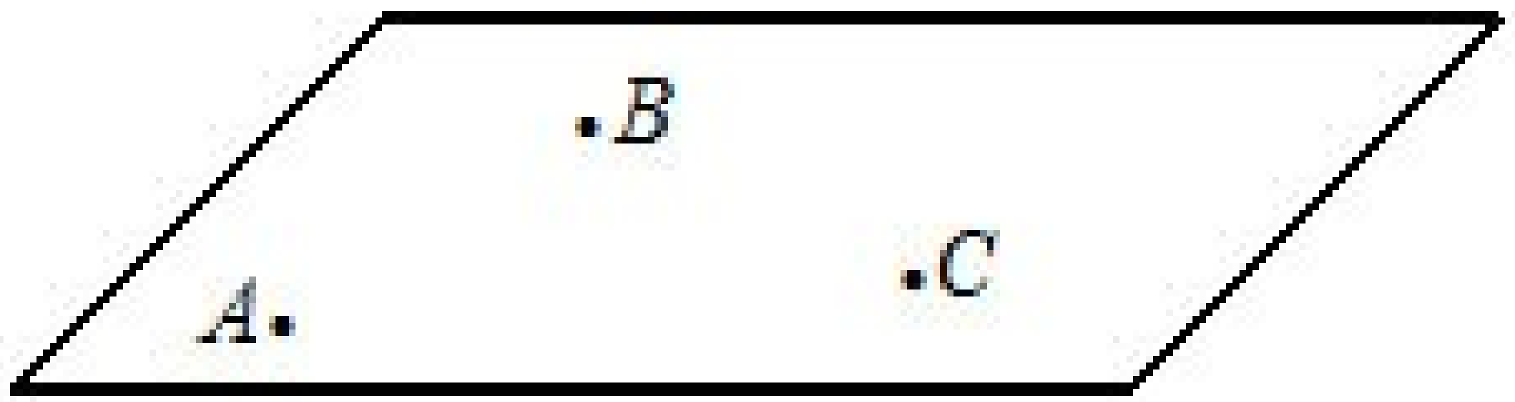


Уравнение плоскости в пространстве.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

− уравнение плоскости в отрезках на осях, где a, b и c− величины отрезков, которые плоскость отсекает на осях координат.



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}$$

уравнение плоскости, которая проходит через три точки A(x1,y1,z1),B(x2,y2,z2) и C(x3,y3,z3).

Уравнение плоскости в пространстве.

$$x \cdot cos(\alpha) + y \cdot cos(\beta) + z \cdot cos(\gamma) - p = 0$$

нормальное уравнение плоскости, где cos(α),cos(β) и cos(γ)− направляющие косинусы нормального вектора **N**, направленного из начала координат в сторону плоскости, а p>0− расстояние от начала координат до плоскости.

Расстояние от точки M(x0,y0,z0) до плоскости P:Ax+By+Cz+D=0 вычисляется по формуле

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Спасибо за внимание!

Юстина Иванова,
Data scientist
«ОЦРВ»