MODUL

PRAKTIKUM PEMODELAN

DOSEN :

Heni Widayani, M.Si

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI

MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2018

PERTEMUAN PERTAMA

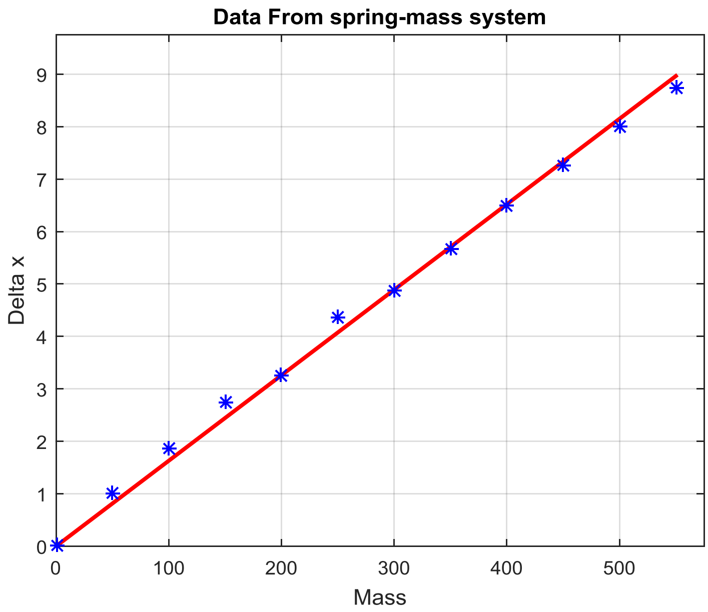
Introduction for Mathematical Modelling

A. Sistem Pegas

Hasil eksperimen dari pengukuran pertambahan panjang pegas sebagai fungsi dari massa beban yang digantungkan pada pegas. Data eksperimen yang dikumpulkan ditunjukkan oleh Tabel 1.

Tabel 1. Data eksperimen pegas

Massa	Δx
50	1.000
100	1.875
150	2.750
200	3.250
250	4.375
300	4.875
350	5.675
400	6.500
450	7.250
500	8.000
550	8.750



Gambar 1. Simulasi Model Massa Pegas

Model sistem massa pegas tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\Delta x \approx \frac{4.875 - 3.25}{300 - 200} m = 0.01625\, m$$

Gunakan MATLAB untuk menghasilkan gambar 1.

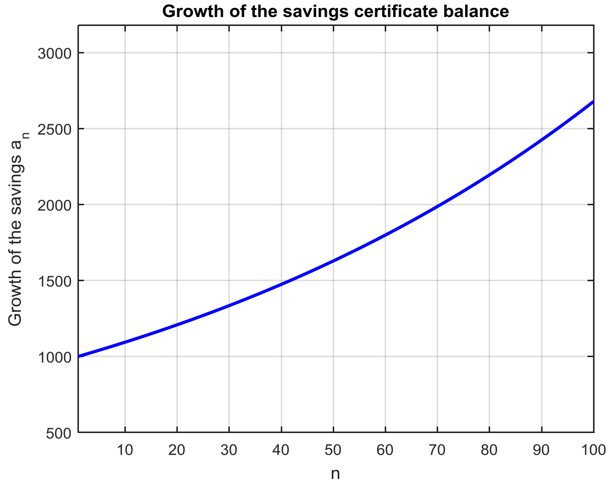
```
clc; clear all; close all;
   n=12;
for i=1:n
      x(i)=0+50*(i-1);
end
y=[0 1.000 1.875 2.750 3.250 4.375 4.875 5.675 6.500 7.250 8.000 8.750];
figure(1)
plot(x,0.0163*x,'r-','LineWidth',2); hold on;
plot(x,y,'b*','LineWidth',1); hold off;
axis([0 max(x)+25 0 max(y)+1]);
title('Data From spring-mass system');
xlabel('Mass'); ylabel('Delta x');
grid on;
```

B. Tabungan dengan bunga majemuk

Si Fulan menabung uangnya sebesar $1000 di sebuah bank. Tabungan ini dijanjikan akan mendapat bunga majemuk (bunga terakumulasi) 1% setiap bulan. Setelah menabung di bulan pertama, si Fulan tidak lagi menabung tapi tidak pernah juga mengambil tabungan tersebut sedikit pun. Uang si Fulan dari bulan ke bulan dapat dinyatakan sebagai

$$a_{n+1} = 1.01 a_n, \qquad a_0 = 1000$$

atau dapat diilustrasikan sebagai mana Gambar 2.



Gambar 2. Jumlah Tabungan Fulan setiap bulan

```
clc; clear all; close all;
n=100;
y=zeros(n,1);
y(1)=1000;
for i=1:(n-1)
    y(i+1)=1.01*y(i);
end
figure(1);
plot(1:n,y,'b-','LineWidth',2);
axis([1 n min(y)-500 max(y)+500]);
grid on;
xlabel('n'); ylabel('Growth of the savings a_n');
title('Growth of the savings certificate balance');
```

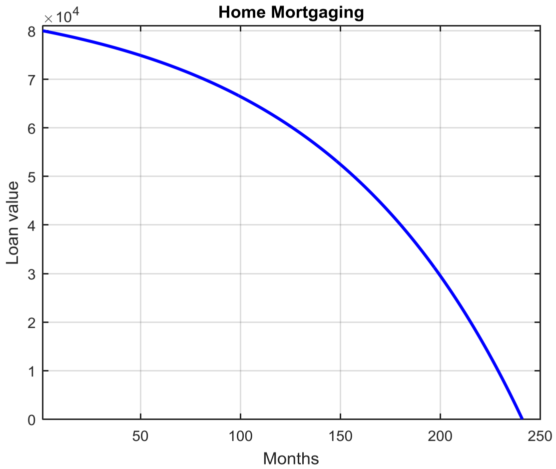
C. Kredit Uang

Pada enam tahun yang lalu, Nyonya Salim membeli sebuah rumah dengan mengkredit \$80.000 untuk jangka waktu 20 tahun, dengan cicilan per bulan \$880.87 dan bunga 1% per bulan. Pada tahun ini, mereka telah melakukan 72 kali pembayaran cicilan dan mereka ingin tahu berapa jumlah hutang mereka (Nyonya Salim baru saja menerima warisan dengan nilai warisan yang cukup besar, sehingga berniat untuk melunasi hutang dengan warisan tersebut).

Nilai perubahan hutang yang harus dibayar bertambah karena adanya bunga dan berkurang karena adanya pembayaran cicilan, atau dapat ditulis

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = 0.01 b_n - 880.87, \;\; b_0 = 80000$$

Nilai cicilan pembayaran hutang Nyonya Salim ditunjukkan oleh Gambar 3.



Gambar 3. Besar Pembayaran Cicilan Rumah Nyonya Salim

```
clc; clear all; close all;
n=250;
b=zeros(n,1);
b(1)=80000; % initial condition
for i=1:(n-1)
    b(i+1)=1.01*b(i)-880.87;
end
figure(1);
plot(1:n,b,'b-','LineWidth',2);
axis([1 n 0 max(b)+1000]);
grid on;
xlabel('Months'); ylabel('Loan value');
title('Home Mortgaging');
```

D. Model Pertumbuhan Bakteri

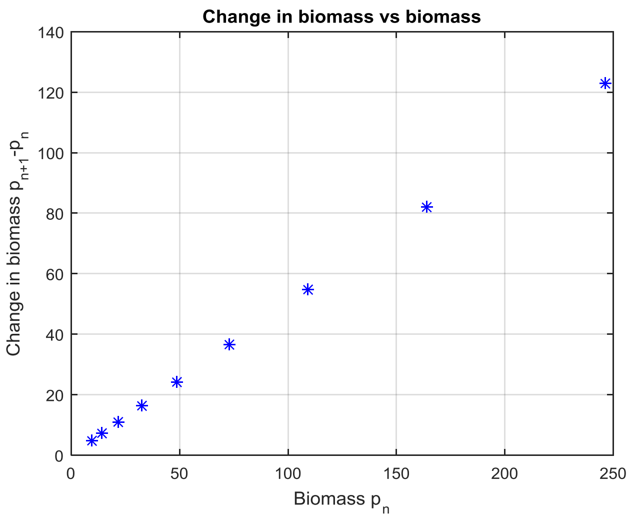
Tabel 2 di bawah diperoleh dari hasil eksperimen pengukuran pertumbuhan bakteri. Gambar 4 menunjukkan bahwa perubahan populasi bakteri proporsional dengan jumlah populasi bakteri. Dengan demikian, diperoleh

$$\Delta p_n = (p_{n+1} - p_n) = kp_n$$

di mana p_n menotasikan jumlah populasi bakteri setelah n jam (dalam gram).

Tabel 2. Data Jumlah Populasi Bakteri

Waktu (jam)	**Jumlah Populasi (p_n)**	**Perubahan populasi (p_{n+1}-p_n)**
0	9.6	
1	18.3	8.7
2	29.0	10.7
3	47.2	18.2
4	71.1	23.9
5	119.1	48.0
6	174.6	55.5
7	257.3	82.7



Gambar 4. Plot banyak populasi bakteri dengan pertambahan populasi

```
clc; clear all; close all;
n=10;
```

```
p=zeros(n,1);
dp=zeros(n,1);
p(1)=9.6;
for i=2:n
    p(i)=1.5*p(i-1);
    dp(i-1)=0.5*p(i-1);
end
figure(1);
plot(p(1:n-1,1),dp(1:n-1,1),'b*');
grid on;
title('Change in biomass vs biomass');
xlabel('Biomass p_n'); ylabel('Change in biomass p_{n+1}-p_n');
```

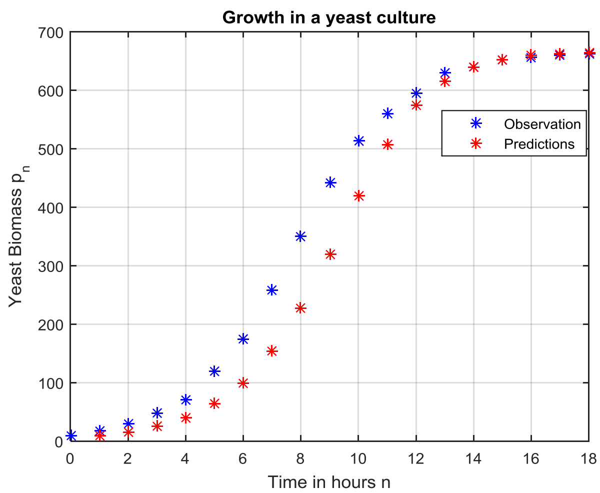
E. Model Pertumbuhan Bakteri Direvisi

Saat tempat perkembangbiakan bakteri dibatasi, maka perubahan populasi bakteri per jam menjadi mengecil saat tempat/makanan/sumber kehidupan dibatasi. Hal ini ditunjukan oleh kolom ke-3 dari Tabel 3. Dari gambar 5 terlihat bahwa populasi akan menuju pada suatu nilai batas atau disebut *carrying capacity*. Dari gambar 5, kita dapat memperkirakan nilai dari *carrying capacity* sebesar 665. Saat $p_n$semakin mendekati 665, perubahan populasi semakin menurun atau $(665 - p_n)$ semakin menurun saat p_n mendekati 665. Dengan demikian, model matematika untuk kasus ini dapat dituliskan sebagai

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k(665 - p_n)p_n$$

Tabel 3. Data eksperimen dengan tempat terbatas

waktu n (jam)	**Banyak Populasi p_n**	**perubahan Populasi per jam p_{n+1}-p_n**	**$p_n(665-p_n)$**
0	9.6	8.7	6291.84
1	18.3	10.7	11834.61
2	29.0	18.2	18444.00
3	47.2	23.9	29160.16
4	71.1	48.0	42226.29
5	119.1	55.5	65016.69
6	174.6	82.7	85623.84



Gambar 5. Scattered Plot untuk Data Eksperimen dan Model

```
clc; clear all; close all;
n=18;
p=[9.6 18.3 29.0 47.2 71.1 119.1 174.6 257.3 350.7 441.0 513.3 559.7 594.8 ...
   629.4 640.8 651.1 655.9 659.6 661.8];
dp=[8.7 10.7 18.2 23.9 48.0 55.5 82.7 93.4 90.3 72.3 46.4 35.1 34.6 11.4 ...
   10.3 4.8 3.8 2.2];
figure(1);
```

```
plot(0:n,p,'b*');hold on;
grid on;
title('Growth in a yeast culture');
xlabel('Time in hours n');
ylabel('Yeast Biomass p_n');
pn(1)=p(1);
for i=2:n
     pn(i)=pn(i-1)+0.00082*(665-pn(i-1))*p(i-1);
end
figure(1)
plot(1:n,pn,'r*');
hold off;
legend('Observation','Predictions');
```

F. Penyebaran Penyakit Menular

Sebuah asrama mahasiswa ditinggali oleh 400 orang mahasiswa. Pada asrama tersebut terdapat lebih dari 1 mahasiswa yang terkena flu. Misalkan i_n menotasikan jumlah mahasiswa yang terinfeksi setelah n periode waktu. Asumsikan bahwa interaksi (bertemu) antara mahasiswa yang terinfeksi dengan mahasiswa yang sehat dibutuhkan untuk proses penyebaran virus flu. Jika semua mahasiswa rentan terhadap flu, maka $(400 - i_n)$ menotasikan mahasiswa yang rentan namun belum terinfeksi flu. Jika semua mahasiswa yang sakit dapat menyebarkan virus, kita dapat memodelkan perubahan jumlah mahasiswa yang terinfeksi proporsional dengan perkalian jumlah mahasiswa yang terinfeksi dengan jumlah mahasiswa yang masih rentan dan belum terinfeksi, atau dapat dituliskan sebagai

$$\Delta i_n = i_{n+1} - i_n = k i_n (400 - i_n)$$

G. Pelarutan Obat Digoxin dalam darah

Digoxin adalah jenis obat yang digunakan untuk pengobatan penyakit jantung. Dokter harus bisa meresepkan jumlah /dosis obat tersebut dengan tepat sehingga menjaga konsentrasi dari digoxin di dalam tubuh pasien berada di atas level efektif tapi tidak melebihi level aman (bervariasi tergantung keadaan tiap pasien). Untuk dosis awal, disuntikkan 0.5 mg ke dalam darah. Tabel 4 menunjukkan hasil pengamatan di mana a_n menunjukkan jumlah dari digoxin yang tersisa di dalam tubuh pasien tertentu setelah n hari, bersamaan dengan perubahan Δa_ndi tiap hari.Permasalahan ini dapat dimodelkan secara matematik sebagai

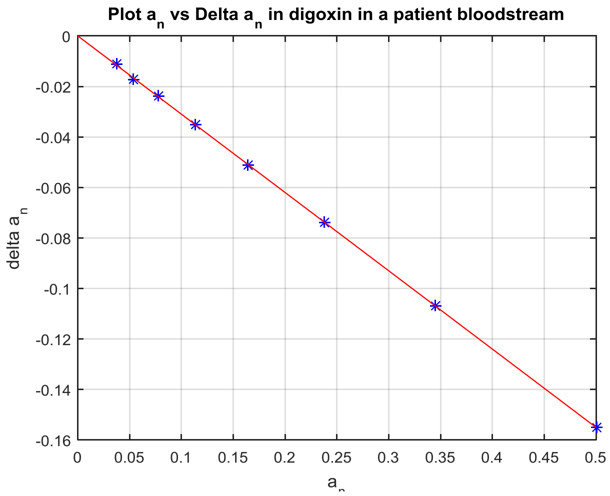
$$a_{n+1} = 0{,}69 a_n,\ a_0 = 0{,}5.$$

Tabel 4. Hasil Pengamatan konsentrasi Digoxin pada seorang pasien

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0.5	0.345	0.238	0.164	0.113	0.078	0.054	0.037	0.026
Δa_n	-0.155	-0.107	-0.074	-0.051	-0.035	-0.024	-0.016	-0.011	

```
clc; clear all; close all;
a=[0.5 0.345 0.238 0.164 0.113 0.078 0.054 0.037 0.026];
da=[-0.155 -0.107 -0.074 -0.051 -0.035 -0.024 -0.017 -0.011];
figure(1);
plot(a(1:length(a)-1),da,'b*'); hold on;
n=length(a);
an(1)=a(1);
for i=2:n
    an(i)=0.69*an(i-1);
    dan(i-1)=-0.31*an(i-1);
end
an(n)=0;
dan(n)=0;
figure(1)
plot(an,dan,'r-'); hold off;
grid on;
xlabel('a_n');
```

```
ylabel('delta a_n');
title('Plot a_n vs Delta a_n in digoxin in a patient bloodstream');
```



H. Perubahan Suhu

Sebuah kaleng beris soda dingin dikeluarkan dari mesin pendingin dan ditempatkan di sebuah ruang kelas yang hangat. Kita akan mengukur suhu dari kaleng tersebut secara periodik. Suhu dari kaleng soda tersebut pada awalnya 40^0F dengan suhu ruangan sebesar 72^0F. Suhu didefinisikan sebagai ukuran energi setiap unit volum. Karena volum dari kaleng soda tersebut relatif cukup kecil dibanding volum ruang kelas, kita dapat mengasumsikan bahwa suhu ruangan tetap konstan. Lebih lanjut, kita asumsikan bahwa keseluruhan dari kaleng soda memiliki suhu yang sama (mengabaikan adanya variasi suhu di dalam kaleng). Kita dapat menduga bahwa perubahan suhu setiap periode waktu lebih besar ketika perbedaan suhu kaleng soda dan ruangan cukup besar. Saat perbedaan suhu kaleng soda dan ruangan cukup kecil, maka perubahan suhu per unit waktu akan mengecil. Misalkan t_n menotasikan suhu dari kaleng soda setelah n time periods dan k adalah konstanta positif, model perubahan suhu kaleng soda dapat dituliskan sebagai

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = k(72 - t_n),\ \ t_0 = 40$$

I. Pengolahan Limbah

Sebuah tangki pengolah limbah memproses limbah kasar sehingga menghasilkan pupuk dan air bersih dengan membuang semua kontaminannya. Proses tersebut terjadi sedemikian sehingga setiap jam 12% dari kontaminan yang terdapat pada tangki dibuang. Berapa persentase dari kontaminan yang masih tersisa dalam tangki setelah 1 hari? Berapa lama waktu yang dibutuhkan agar kontaminan hanya tersisa setengah nya? Berapa lama hingga level kontaminan turun hingga 10% dari awalnya?

Misalkan jumlah awal dari kontaminan limbah adalah a_0 dan misalkan a_n menotasikan jumlah dari kontaminan limbah setelah n jam. Kita dapat membangun model dari proses pengolahan limbah di tangki sebagai berikut

$$a_{n+1} = a_n - 0.12a_n = 0.88a_n$$

J. Masalah Persewaan Mobil

Sebuah perusahaan persewaan mobil memiliki dua distributor, di kota Orlando dan Tampa. Perusahaan tersebut memiliki kelebihan dalam mengorganisir beberapa agen perjalanan yang akan mengakomodir aktivitas wisatawan di kedua kota. Akibatnya, wisatawan dapat menyewa mobil di kota satu dan meninggalkan mobil yang disewa tersebut di kota lainnya. Wisatawan pun dapat memulai perjalanannya dari kota manapun. Perusahaan tersebut ingin menentukan berapa biaya tambahan apabila wisatawan tidak mengembalikan mobil sesuai dengan kota tempat peminjamannya. Lebih lanjut, saat mobil dapat dikembalikan di kota manapun, apakah akan ada jumlah mobil yang cukup untuk memenuhi permintaan persewaan mobil di setiap kota? Jika tidak, berapa banyak mobil yang harus dipindahkan oleh perusahaan tersebut dari Orlando ke Tampa atau sebaliknya? Jawaban dari pertanyaan tersebut akan membantu perusahaan mengetahui berapa biaya yang harus dibayar oleh wisatawan yang mengembalikan mobil bukan di kota tempat peminjamnnya.

Dari data pengamatan sebelumnya kita ketahui bahwa 60% dari mobil yang disewa di Orlando juga dikembalikan di Orlando, sedangkan sisanya 40% dikembalikan di Tampa. Sedangkan dari kantor Tampa, 70% mobil yang disewa kembali di Tampa sedangkan 30% dikembalikan di Orlando.

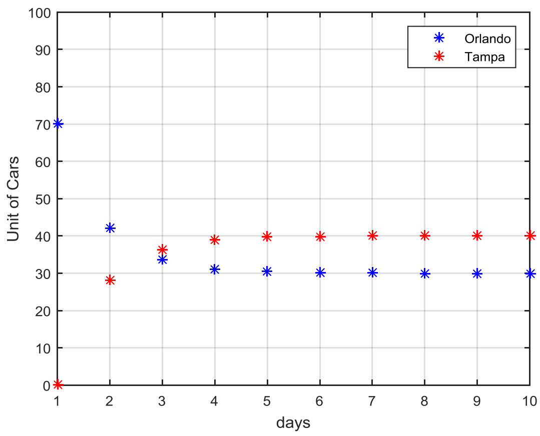
Misalkan n menotasikan jumlah dari hari kerja. Kita definisikan
O_n= Banyaknya mobil di kota Orlando pada akhir hari ke-n
T_n= Banyaknya mobil di kota Tampa pada akhir hari ke-n
Dari data pengamatan, kita dapat peroleh sistem dinamik dari jumlah mobil sebagai

$$O_{n+1} = 0.6O_n + 0.3T_n$$
$$T_{n+1} = 0.4O_n + 0.7T_n$$

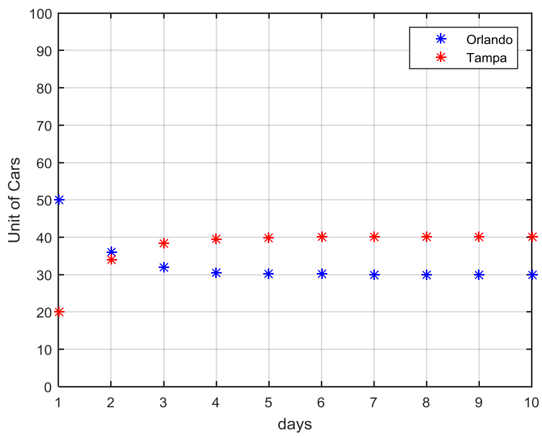
Gunakan MATLAB untuk mensimulasikan dinamika di atas dengan beberapa syarat awal berikut !

Syarat Awal	Orlando	Tampa
Kasus 1	70	0
Kasus 2	50	20
Kasus 3	20	50
Kasus 4	0	70

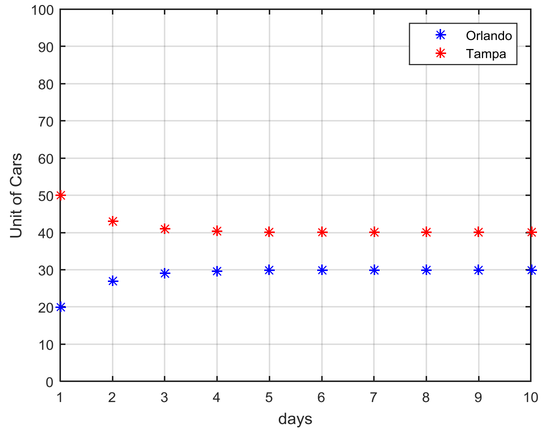
```
clc; clear all; close all;
n=10;
O(1)=600;
T(1)=800;
for i=1:(n-1)
    O(i+1)=0.6*O(i)+0.3*T(i);
    T(i+1)=0.4*O(i)+0.7*T(i);
end
figure(1)
plot(1:n,O,'b*');hold on;
plot(1:n,T,'r*');hold off;
grid on;
legend('Orlando','Tampa');
xlabel('days');
ylabel('Unit of Cars');
```



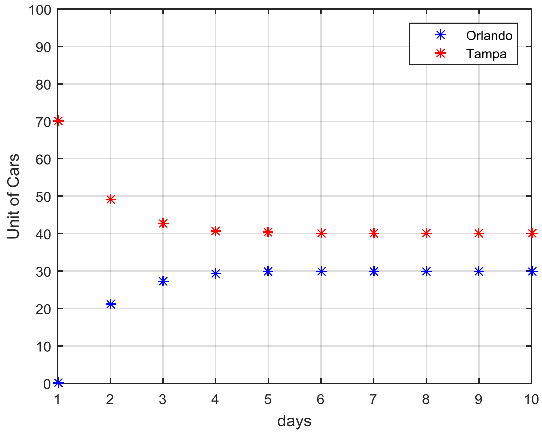
(a) Syarat Awal 1



(b) Syarat Awal 2



(c) Syarat Awal 3



(d) Syarat Awal 4

K. Perang Trafalgar

Pada Perang Trafalgar di 1805, gabungan pasukan laut Perancis dan Spanyol di bawah pimpinan Napoleon berperang melawan pasukan laut Inggris di bawah pimpinan Laksamana Nelson. Pada awalnya, pasukan Perancis-Spanyol memiliki 33 kapal dan Pasukan Inggris memiliki 27 kapal. Selama terjadinya peperangan, setiap pasukan mengalami kerugian yang sama dengan 10% dari jumlah kapal lawan (Semakin banyak kapal lawan, maka kerugian dari pasukan tersebut akan semakin besar). Jika Napoleon dan Laksamana Nelson keduanya menstrategikan pasukan penuh pada hari pertama peperangan, pasukan mana yang akan menjadi pemenang pada peperangan ini? (Catatan : nilai pecahan atau desimal pada kasus ini memiliki arti bahwa kapal tersebut tidak dalam kapasitas penuh).

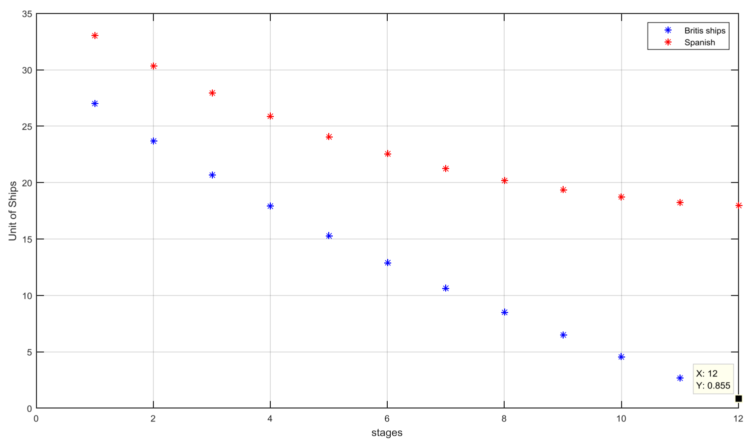
Misalkan n menotasikan banyaknya tahap pertemuan selama periode perang tersebut, dan kita definisikan

B_n = banyaknya kapal pasukan Inggris pada tahap ke-n

F_n = banyaknya kapal pasukan Perancis-Spanyol pada tahap ke-n

Setelah tahap peperangan mencapai tahap n, jumlah dari kapal yang masih ada pada tiap pasukan dapat dinyatakan sebagai

$$B_{n+1} = B_n - 0.1F_n, \quad B_0 = 27$$
$$F_{n+1} = F_n - 0.1B_n, \quad F_0 = 33$$



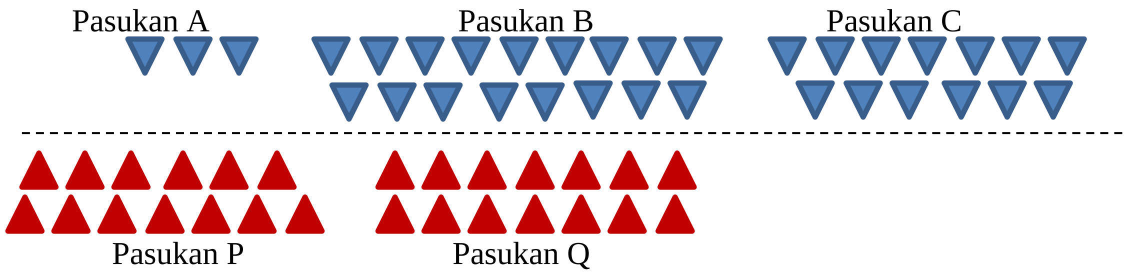

```
clc; clear all; close all;
n=12;
B(1)=27;
F(1)=33;
for i=1:(n-1)
    B(i+1)=B(i)-0.1*F(i);
```

```
    F(i+1)=F(i)-0.1*B(i);
end
figure(1)
plot(1:n,B,'b*');hold on;
plot(1:n,F,'r*');hold off;
grid on;
legend('Britis ships','Spanish');
xlabel('stages');
ylabel('Unit of Ships');
```

Strategy Pembagian Pasukan Laksaman Nelson

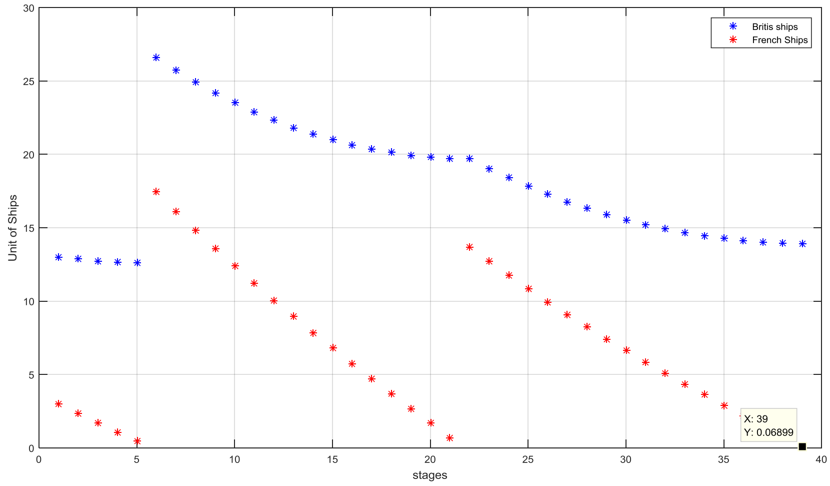
Pasukan Napoleon memilik 33 kapal yang akan dipisah menjadi 3 subpasukan, yaitu pasukan A (3 kapal), pasukan B (17 kapal), dan pasukan C(13 kapal). Pasukan A akan dikeluarkan di hari pertama. Sisa dari peperangan hari pertama akan bergabung dengan pasukan B di hari kedua. Dan sisa kapal di peperangan hari kedua akan bergabung debgan pasukan C di hari ketiga.

Laksamana Nelson mengetahui strategi Napoleon melalui mata-mata yang dikirimkan. Laksamana Nelson kemudian membuat strategi untuk membagi pasukan Inggris menjadi 2 pasukan, Pasukan P(13 kapal) dan Pasukan Q (14 kapal). Pasukan P akan dikeluarkan di hari pertama dan sisanya akan bergabung dengan Pasukan Q di hari kedua. Sisa kapal yang bertahan dari peperangan di hari kedua akan melawan Pasukan C.
Asumsikan bahwa setiap pihak menderita kerugian 5% sejumlah kapal dari pihak lawan. Siapakah yang akan menjadi pemenang dari perang ini?




```
clc; clear all; close all;
n1=5;
B1(1)=13;
F1(1)=3;
for i=1:(n1-1)
    B1(i+1)=B1(i)-0.05*F1(i);
    F1(i+1)=F1(i)-0.05*B1(i);
end

n2=16;
B2(1)=B1(n1)+14;
F2(1)=F1(n1)+17;
for i=1:(n2-1)
    B2(i+1)=B2(i)-0.05*F2(i);
    F2(i+1)=F2(i)-0.05*B2(i);
end

n3=18;
B3(1)=B2(n2)+0;
F3(1)=F2(n2)+13;
for i=1:(n3-1)
    B3(i+1)=B3(i)-0.05*F3(i);
    F3(i+1)=F3(i)-0.05*B3(i);
end

figure(2);
B=[B1 B2 B3];
```

```
F=[F1 F2 F3];
plot(1:n1+n2+n3,B,'r*'); hold on;
plot(1:n1+n2+n3,F,'b*'); hold off;
grid on;
legend('Britis ships','French Ships');
xlabel('stages');
ylabel('Unit of Ships');
```



L. Maskapai Pilihan Wisatawan

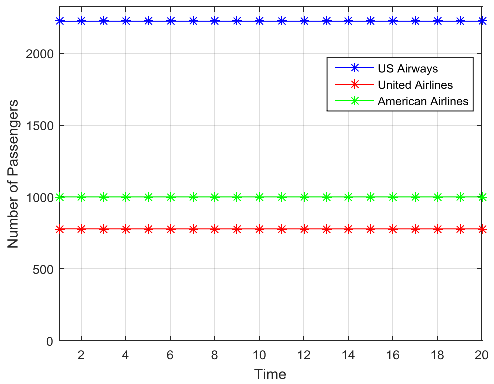
Sebuah bandara lokal didukung oleh 3 maskapai penerbangan besar, American Airlines, United Airlines, dan US Airways yang memiliki rute penerbangan tertentu. Setelah dilakukan survei mingguan pada bisnis wisatawan lokal, diperoleh hasil bahwa 75% wisatwan yang sebelumnya menggunakan US Airways tetap menggunakan US Airways, 5% berpindah ke United dan 20% berpindah ke American. Sedangkan dari wisatawan yang menggunakan United, 60% tetap setia pada United, sedangkan 20% berpindah ke US Airways, dan 20% berpindah ke American. Pada wisatawan yang menggunakan American, hanya 40% yang setia, sedangkan 40% berpindah ke US Airways, dan 20% berpindah ke United. Kita asumsikan bahwa pilihan ini berlanjut dari minggu ke minggu (tidak ada yang berpindah maskapai lagi) dan tidak ada wisatawan lain yang masuk atau keluar dari sistem. Jika sistem ini memiliki 4000 wisatawan setiap minggunya, bagaimanakah perilaku jangka-panjang dari sistem dinamik ini ? Gunakan Matlab untuk mensimulasikan sistem dinamik ini, dan variasikan nilai awal sebagaimana nilai pada tabel di bawah ini.

	US Airways	United Airlines	American Airlines
Kasus 1	2222	778	1000
Kasus 2	2720	380	900
Kasus 3	1000	1000	2000
Kasus 4	0	0	4000

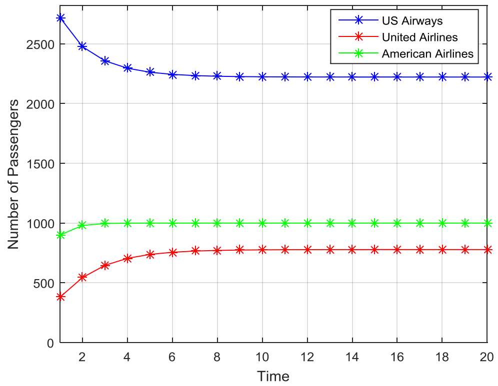
Misalkan n menotasikan minggu ke- n dan definisikan
S_n= Banyaknya wisatawan US Airways pada minggu n
U_n= Banyaknya wisatawan United Airlines pada minggu n
A_n= Banyaknya wisatawan American Airlines pada minggu n
Model dinamik dari masalah ini adalah

$$S_{n+1} = 0.75S_n + 0.20U_n + 0.40A_n$$
$$U_{n+1} = 0.05S_n + 0.60U_n + 0.20A_n$$
$$A_{n+1} = 0.20S_n + 0.20U_n + 0.40A_n$$

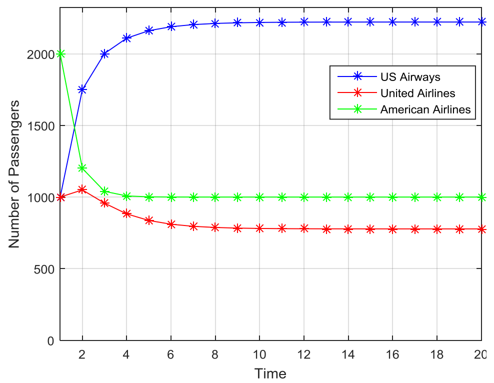
```
clc; close all; clear all;
n=21;
S(1)=1000;
U(1)=1000;
A(1)=2000;
for i=1:(n-1)
    S(i+1)=0.75*S(i)+0.2*U(i)+0.4*A(i);
    U(i+1)=0.05*S(i)+0.6*U(i)+0.2*A(i);
    A(i+1)=0.2*S(i)+0.2*U(i)+0.4*A(i);
end
figure(1);
plot(1:n,S,'b-*');hold on;
plot(1:n,U,'r-*');
plot(1:n,A,'g-*');hold off;
grid on;
xlabel('Time'); ylabel('Number of Passengers');
legend('US Airways','United Airlines','American Airlines');
axis([0 23 0 max(max(max(S),max(U)),max(A))+100]);
```



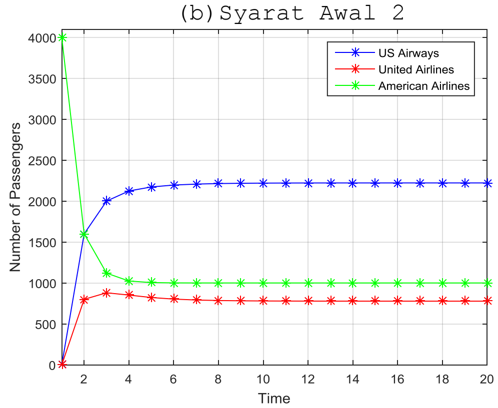
(a) Syarat Awal 1



(b) Syarat Awal 2



(c) Syarat Awal 3



(d) Syarat Awal 4

M. Competitive Hunter Model-Spotted Owls and Hawks

Pada suatu habitat, spesies burung hantu totol berkompetisi dengan elang agar dapat bertahan hidup. Pada habitat tersebut, tidak ada spesies hewan lain dan setiap spesies individu memiliki pertumbuhan populasi yang tidak terbatas di mana perubahan populasi selama suatu selang waktu (misalkan 1 hari) proporsional dengan besar populasi pada awalnya. Pengaruh dari kehadiran spesies kedua akan mengurangi laju pertumbuhan dari spesies lain. Kita asumsikan bahwa penurunan diperkirakan proporsional dengan jumlah dari intreaksi yang mungkin terjadi di antara kedua spesies tersebut (walaupun terdapat banyak kemungkinan lain untuk memodelkan kompetisi dari dua spesies). Jika O_n merepresentasikan banyaknya burung hantu pada akhir hari ke-n dan H_n merepresentasikan banyaknya elang, maka kita dapat memodelkan kompetisi ini sebagai

$$\Delta O_n = k_1 O_n - k_3 O_n H_n$$
$$\Delta H_n = k_2 H_n - k_4 O_n H_n$$

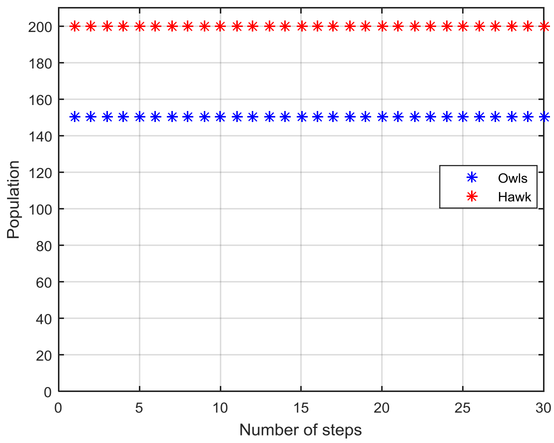
dengan

- $k_1$dan k_2 adalah konstant positif laju petumbuhan.
- $k_3$dan k_4 adalah konstanta positif laju kompetisi

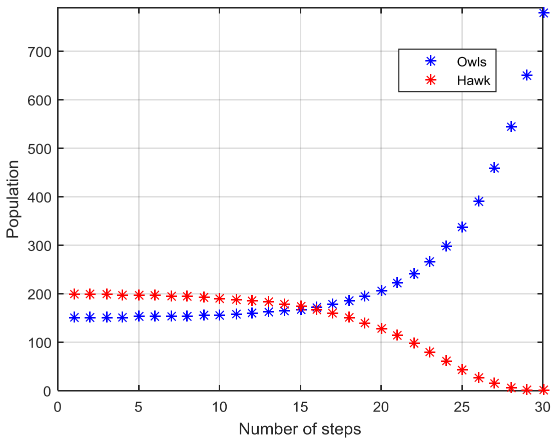
Lakukan simulasi dengan $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.3, k_3 = 0.001, k_4 = 0.002$ dan variasikan nilai awalnya sebagai mana tabel di bawah ini !

Kondisi awal	Burung Hantu	Elang
Kasus 1	150	200
Kasus 2	151	199
Kasus 3	149	201
Kasus 4	10	10

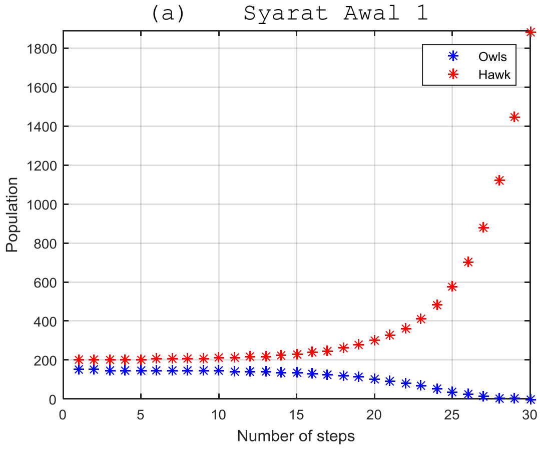
```
clc; clear all; close all;
k1=0.2; k2=0.3; k3=0.001; k4=0.002;
n=30;
O(1)=10; H(1)=10;
for i=1:(n-1)
    O(i+1)=(1+k1)*O(i)-k3*O(i)*H(i);
    H(i+1)=(1+k2)*H(i)-k4*O(i)*H(i);
end
figure(1);
plot(1:n,O,'b*'); hold on;
plot(1:n,H,'r*'); hold off;
grid on;
xlabel('Number of steps');
ylabel('Population');
legend('Owls','Hawk');
axis([0 30 0 max(max(O),max(H))+10]);
```



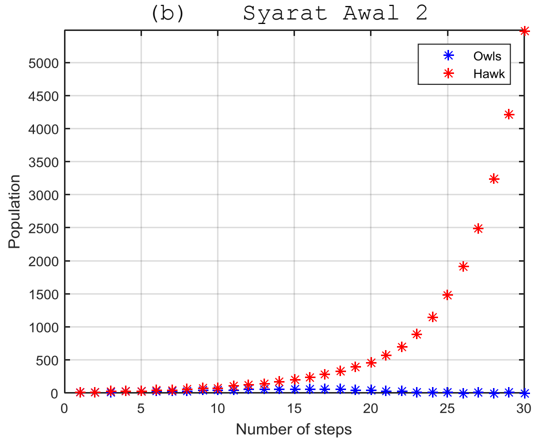
(a) Syarat Awal 1



(b) Syarat Awal 2



(c) Syarat Awal 3



(d) Syarat Awal 4

PERTEMUAN KEDUA

Compartmental Model

A. Peluruhan Materi Radiometri

Misalkan N(t) adalah massa (gram) dari atom radiaktif pada waktu t dan misalkan Δt adalah perubahan yang sangat kecil dari waktu ($\Delta t \to 0$). Perubahan jumlah atom akan proporsional dengan jumlah atom pada awal pengamatan, yakni

$$\frac{dN}{dt} = -kN, \;\; N(t_0) = N_0 \tag{1}$$

di mana k adalah konstanta positif yang menotasikan laju peluruhan per atom per unit waktu (konstanta peluruhan).

Gunakan Maple untuk menentukan solusi dari persamaan (1) dan carilah nilai limit dari solusi tersebut untuk $t \to \infty$! Gambarkan solusi persamaan tersebut untuk $N_0 = 1$ dengan memvariasikan nilai k !

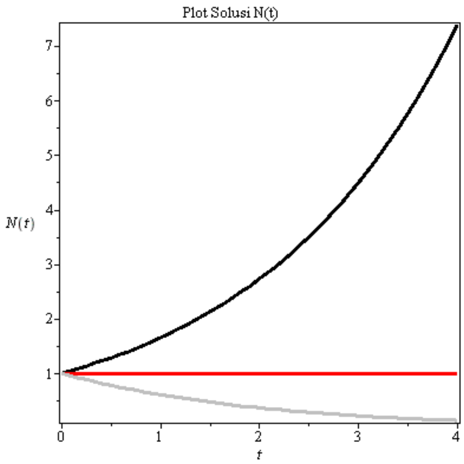
```
restart : with(plots) : with(DEtools) :
ode := diff(N(t), t) = -k·N(t) : #persamaan diferensial
ics := N(0) = n0 : #syarat awal
Solusi := dsolve({ode, ics});#hitung solusi
solve(op(subs(t = τ, Solusi))[2] = n0/2, k); # k untuk t=τ
assume(k > 0);
lim_{t → infinity} Solusi; #solusi saat k>0
assume(k < 0); assume(n0 > 0);
lim_{t → infinity} Solusi; #solusi saat k<0
k := -0.5 : n0 := 1 :
plot1 := DEplot( ode, N(t), t = 0 ..4, [ics], arrows = NONE, linecolour
      = black) :
k := 0 : n0 := 1 :
plot2 := DEplot( ode, N(t), t = 0 ..4, [ics], arrows = NONE, linecolour
      = red) :
k := 0.5 :  n0 := 1 :
plot3 := DEplot( ode, N(t), t = 0 ..4, [ics], arrows = NONE, linecolour
      = gray) :
display(plot1, plot2, plot3, title = "Plot Solusi N(t)", axes = boxed) ;
```

$$Solusi := N(t) = n0\,\mathrm{e}^{-k\,t}$$

$$\frac{\ln(2)}{\tau}$$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$$



Study Case :Lascaux Cave Paintings

In the Cave of Lascaux in France there are some ancient wall paintings, believed to be prehistoric. Using a Geiger counter, the current decay rate of C^{14} in charcoal fragments collected from the cave was measured as approximately 1.69 disintegrations per minutes per gram of carbon. In comparison,for living tissue in 1950 the measurement was 13.5 disintegration per minute per gram of carbon. How long ago was the radioactive carbon formed (the Lascaux Cave painting painted)?

ANSWER :

#Lascaux cave Printings

$\tau := 5568 : dNtPerdN0 := \frac{1.69}{13.5} :$

$k := evalf\left(\frac{\ln(2)}{\tau}\right);$

$T := -\frac{1}{k} \cdot \ln(dNtPerdN0);$

$$k := 0.0001244876402$$
$$T := 16692.10817$$

Let $N(t)$ be the amout of C^{14} per gram in the charcoal at time t. We know that $\tau = 5568$ years (the half-life of C^{14}), so we get

$k \approx 0.0001245$ per year

Let $t_0 = 0$ be the current time. Let T be the time that the charcoal was formed, and thus $T < 0$. For $T < t < t_0$, the C^{14} decays follow the function

$$N(t) = N_0 e^{-kT}$$

We don't have the $N(T)$ or N_0, but we have $N'(T) =$

$$\frac{N'(T)}{N'(0)} = \frac{N(T)}{N_0}$$

Thus, we get

$T = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{N(T)}{N_0}\right) = -16690$ years ago

B. Salt dissolved in a tank

A large tank contains 100 litres of salt water. Initially s_0 kg of salt is dissolved. Salt water flows into the tank at the rate of 10 litres per minute, with the concentration $c_{in}(t)$

(kg of salt/litre) of this incoming water-salt mixture varies with time. We assume that the solution in the tank is thoroughly mixed and that the salt solution flows out at the same rate at which it flows in: that is, the volume of water-salt mixture in the tank remain constant.

$$\frac{dS}{dt} = 10c_{in}(t) - \frac{1}{10}S(t), \quad S(0) = s_0$$

$$S(T) = s_0 e^{-T/10} + 10e^{-T/10}\int_0^T c_{in}(s)e^{s/10}dt$$

$restart; with(DEtools):$

$ode1 := diff(S(t), t) = 10 \cdot cin - \frac{S(t)}{10}:$

$ics1 := S(0) = s0:$

$Solusi1 := dsolve(\{ode1, ics1\});$

$\lim_{t \to infinity} Solusi1;$

$cin := 0.05;$

$ivs := [S(0) = 10, S(0) = 5, S(0) = 0];$

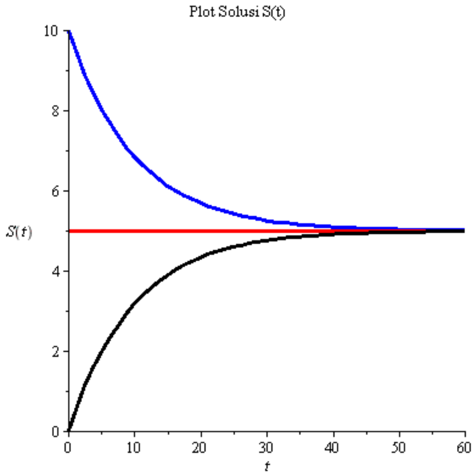
$DEplot(\ ode1, S(t), t = 0..60, ivs, arrows = NONE, \text{linecolor} = [\text{blue}, \text{red}, \text{black}], title = \text{"Plot Solusi S(t)"});$

$$Solusi1 := S(t) = 100\,cin + e^{-\frac{1}{10}t}(s0 - 100\,cin)$$

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = 100\,cin$$

$$cin := 0.05$$

$$ivs := [S(0) = 10, S(0) = 5, S(0) = 0]$$



$restart; with(DEtools):$

$ode1 := diff(S(t), t) = 10 \cdot (0.2 + 0.1 \cdot \sin(t)) - \frac{S(t)}{10}:$

$ics1 := S(0) = s0:$

$Solusi1 := dsolve(\{ode1, ics1\});$

$\lim_{t \to infinity} Solusi1;$

$cin := 0.05;$

$ivs := [S(0) = 10, S(0) = 5, S(0) = 0];$

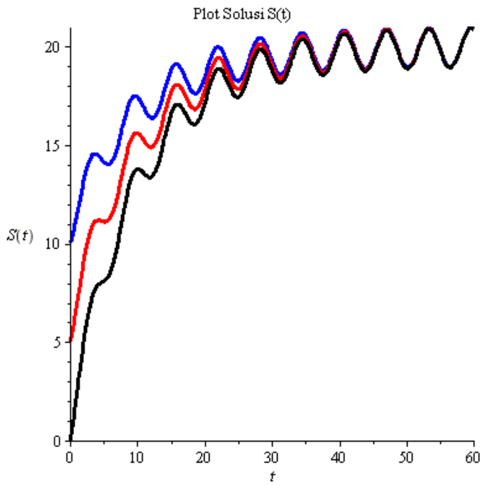
$DEplot(\ ode1, S(t), t = 0..60, ivs, arrows = NONE, \text{linecolor} = [\text{blue}, \text{red}, \text{black}], title = \text{"Plot Solusi S(t)"}, numpoints = 700);$

$$Solusi1 := S(t) = 20 - \frac{100}{101}\cos(t) + \frac{10}{101}\sin(t) + e^{-\frac{1}{10}t}\left(s0 - \frac{1920}{101}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = \frac{1910}{101} .. \frac{2130}{101}$$

$$cin := 0.05$$

$$ivs := [S(0) = 10, S(0) = 5, S(0) = 0]$$



Study Cases : Lake Pollution Models

Assumption :

1. The lake has a constant volume V
2. The lake water is continuously well mixed so the pollution is uniform throughout

Let $M(t)$ is the mass of the pollutant in the lake

Let $C(t)$ be the concentration of the pollutant in the lake at time t.

Let F be the rate at which water flows out of the lake in m^3/day.

Let c_{in} is the concentration g/m^3) of the pollutant in the flow entering lake

$$\frac{dM}{dt} = Fc_{in} - F\frac{M(t)}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{F}{V}c_{in} - \frac{F}{V}C,\ C(0) = C_0$$

How long it will take for the lake's pollution level to reach 5% of its initial level, if only fresh water flows into the lake ? Implement the result for the cases below

a. Consider Lake Eric with $V = 458 \times 10^9$ m^3 and $F = 480 \times 10^6$ m^3/day = 1,75 x 10^{11} m^3/year.
b. Consider Lake Ontario with V=1636 x 10^9 m^3 and $F = 572 \times 10^6$ m^3/day = 2,089 x 10^{11} m^3/year.

   $t_{0.05}$ = 7.8 years

   $t_{0.05}$ = 23.5 years

Although the flow rate in and out of Lake Ontario is similar to Lake Erie, it takes significantly longer to clear the pollution from Lake Ontario due to the larger volume water in Lake Ontario.

```
restart; with(DEtools) :
ode := diff(C(t), t) = F/V·(c_in − C(t)) :
ics := C(0) = c0 : #syarat awal
Solusi := dsolve({ode, ics});#hitung solusi
assume(F > 0); assume(V > 0); assume(c0 > 0);
lim_{t → infinity} Solusi;
```

$$Solusi := C(t) = c_{\mathbf{in}} + e^{-\frac{F\,t}{V}}\left(c0 - c_{\mathbf{in}}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = c_{\mathbf{in}}$$

```
restart; with(DEtools) :
ode := diff(C(t), t) = F/V·(c_in − C(t)) :
ics := C(0) = c0 : #syarat awal
Solusi := dsolve({ode, ics}) :#hitung solusi
SolusiCinNol := subs(c_in = 0, Solusi) :
Time := solve(op(SolusiCinNol)[2] = C, t);
Time5PersenAwal := evalf(subs(C = 0.05·c0, Time));
DataDanauEric := {V = 458·10^9, F = 1.75·10^11} :
subs(DataDanauEric, Time5PersenAwal);
DataDanauOntario := {V = 1636·10^9, F = 2.089·10^11} :
subs(DataDanauOntario, Time5PersenAwal);
```

$$Time := -\frac{\ln\left(\frac{C}{c0}\right) V}{F}$$

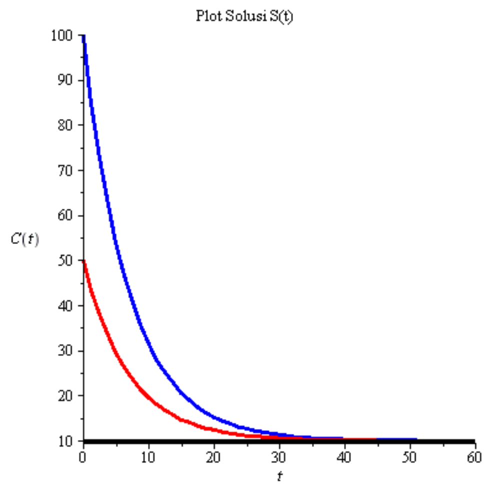
$$Time5PersenAwal := \frac{2.995732274\,V}{F}$$

$$7.840259322$$

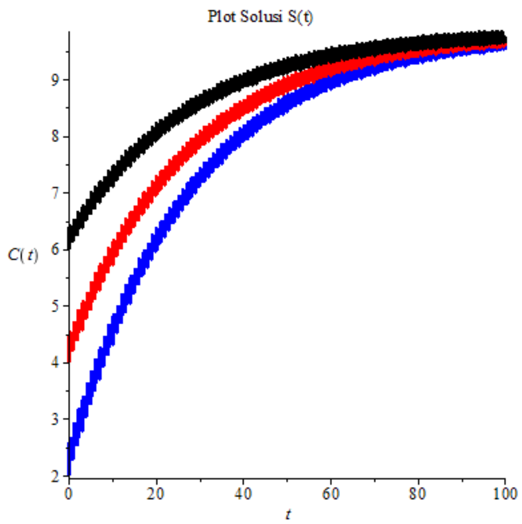
$$23.46107229$$

```
restart; with(DEtools) : with(plots) :
ode := diff(C(t), t) = F/V·(c_in − C(t)) :
Data := {F = 4, V = 28, c_in = 10} :
de := subs(Data, ode);
ivs := [C(0) = 100, C(0) = 50, C(0) = 10] :
DEplot( de, C(t), t = 0 ..60, ivs , arrows = NONE, linecolor = [blue,
    red, black], title = "Plot Solusi S(t)");
```

$$de := \frac{d}{dt} C(t) = \frac{10}{7} - \frac{1}{7} C(t)$$



$$restart; with(DEtools) : with(plots) :$$
$$ode := diff(C(t), t) = \frac{(1 + 6\cdot\sin(2\cdot\text{Pi}\cdot t))}{28}\cdot(10 + 10\cdot\cos(2\cdot\text{Pi}\cdot t) - C(t)) :$$
$$ivs := [C(0) = 2, C(0) = 4, C(0) = 6] :$$
$$DEplot(ode, C(t), t = 0..100, ivs, arrows = NONE, linecolor = [blue, red, black], title = \text{"Plot Solusi S(t)"}, numpoints = 1000);$$



C. Drug Assimilation into the blood

The drug dissolves in the gastrointestinal tract (GI-tract) and each ingredient is diffused into bloodstream. Drug carried to the locations in which they act and are removed from the blood by the kidneys and the liver. Let $x(t)$ be the amount of a drug in the GI-tract at time t. Let $y(t)$ be the amount of a drug in the bloodstream at time t.

1. A single cold pill

- ❑ There is no ingestion of the drug except that which occurs initially.
- ❑ Assumption :

a. The output rate of GI-tract is proportional to the drug concentration, which is proportional to the amount of drug in the bloodstream

b. In the bloodstream, the initial amount of the drugs is zero. The level increases as the drug diffuses from the GI-tract an decreases as the kidneys and liver remove it.

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x, \qquad x(0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y, \;\; y(0) = 0$$

where x_0 is the amount of a drug in the pill, k_1 and k_2 are positive contant of proportionality.

The cold pill is made up of a decongestant and an antihistamine, which are define the value of k_1 and k_2.

$$x(t) = x_0 e^{-k_1 t}$$
$$y(t) = \frac{k_1}{k_1 - k_2}\left(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t}\right)$$

	Decongestant	**Antihistamine**
k_1	1.3860/hr	0.6931/hr
k_2	0.1386/hr	0.0231/hr

```
restart : with(plots) : with(DEtools) :
de1 := diff(x(t), t) =-k1·x(t) :
de2 := diff(y(t), t) = k1·x(t) − k2·y(t) :
ics1 := x(0) = x0 :
ics2 := y(0) = 0 :
Solusix := dsolve({de1, ics1});
Solusiy := factor(dsolve({subs(Solusix, de2), ics2}));
assume(k1 > 0) : assume(k2 > 0) :
lim         Solusix;
t → infinity
```

$$Solusix := x(t) = x0\, e^{-k1\, t}$$

$$Solusiy := y(t) = -\frac{k1\, x0 \left(e^{-t\,(k1 - k2)} - 1\right) e^{-k2\, t}}{k1 - k2}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

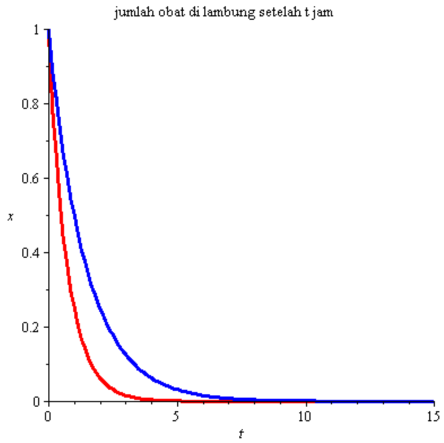
```
DataDecongestant := {k1 = 1.386, k2 = 0.1386} :
System1 := [subs(DataDecongestant, de1), subs(DataDecongestant,
    de2)];
initx := 1 :
inity := 0 :
plot1 := DEplot(System1, [x, y], t = 0 ..15, {[0, initx, inity]}, stepsize
    = 0.1, scene = [t, x], linecolour = red, arrows = NONE) :
plot2 := DEplot(System1, [x, y], t = 0 ..15, {[0, initx, inity]}, stepsize
    = 0.1, scene = [t, y], linecolour = red, arrows = NONE) :
```

$$System1 := \left[\frac{d}{dt}\, x(t) = -1.386\, x(t),\ \frac{d}{dt}\, y(t) = 1.386\, x(t) - 0.1386\, y(t)\right]$$

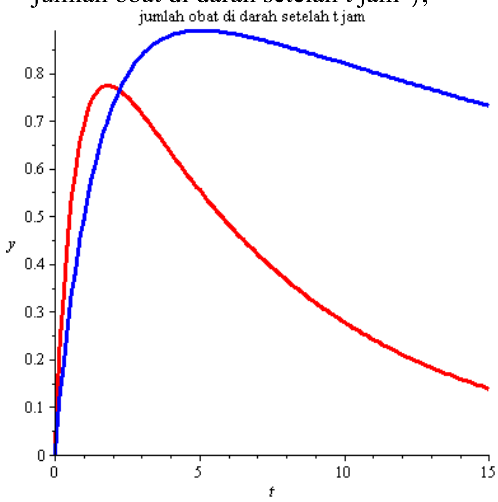
```
DataAntihistamine := {k1 = 0.6931, k2 = 0.0231} :
System2 := [subs(DataAntihistamine, de1), subs(DataAntihistamine,
    de2)];
initx := 1 :
inity := 0 :
plot3 := DEplot(System2, [x, y], t = 0 ..15, {[0, initx, inity]}, stepsize
    = 0.1, scene = [t, x], linecolour = blue, arrows = NONE) :
plot4 := DEplot(System2, [x, y], t = 0 ..15, {[0, initx, inity]}, stepsize
    = 0.1, scene = [t, y], linecolour = blue, arrows = NONE) :
```

$$System2 := \left[\frac{d}{dt} x(t) = -0.6931\, x(t), \frac{d}{dt} y(t) = 0.6931\, x(t) - 0.0231\, y(t) \right]$$

display(*plot1*, *plot3*, *title* = "jumlah obat di lambung setelah t jam");



display(*plot2*, *plot4*, *title* = "jumlah obat di darah setelah t jam");



2. A course of cold pills

We take a course of pills rather than just one. There is a continuous flow of drugs into the GI-tract

$$\frac{dx}{dt} = I - k_1 x, \qquad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y, \qquad y(0) = 0$$

where I is a positive constant represnting the rate of ingestion of the drug (g/hr).

The analytic solution was

$$x(t) = \frac{I}{k_1}(1 - e^{-k_1 t})$$
$$y(t) = \frac{I}{k_2}\left[1 - \frac{1}{k_2 - k_1}(k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t})\right]$$

* This solution is valid only if $k_1 \neq k_2$

```
> restart : with(plots) : with(DEtools) :
  de1 := diff(x(t), t) = In − k1·x(t) :
  de2 := diff(y(t), t) = k1·x(t) − k2·y(t) :
  ics1 := x(0) = 0 :
  ics2 := y(0) = 0 :
  Solusix := dsolve({de1, ics1});
  Solusiy := factor(dsolve({subs(Solusix, de2), ics2}));
```

$$Solusix := x(t) = \frac{In}{k1} - \frac{e^{-k1\,t}\,In}{k1}$$

$$Solusiy := y(t) = \frac{In\left(-e^{-k2\,t}\,k1 - k2 + k1 + e^{-k1\,t}\,k2\right)}{k2\,(-k2 + k1)}$$

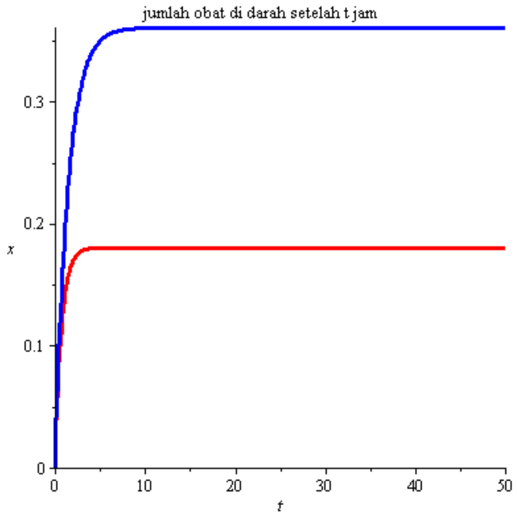
```
> DataDecongestant := {In = 0.25, k1 = 1.386, k2 = 0.1386} :
  System1 := [subs(DataDecongestant, de1), subs(DataDecongestant,
      de2)];
  initx := 0 :
  inity := 0 :
  plot1 := DEplot(System1, [x, y], t = 0 ..50, {[0, initx, inity]}, stepsize
      = 0.1, scene = [t, x], linecolour = red, arrows = NONE) :
  plot2 := DEplot(System1, [x, y], t = 0 ..50, {[0, initx, inity]}, stepsize
      = 0.1, scene = [t, y], linecolour = red, arrows = NONE) :
```

$$System1 := \left[\frac{d}{dt}\,x(t) = 0.25 - 1.386\,x(t),\ \frac{d}{dt}\,y(t) = 1.386\,x(t) - 0.1386\,y(t)\right]$$

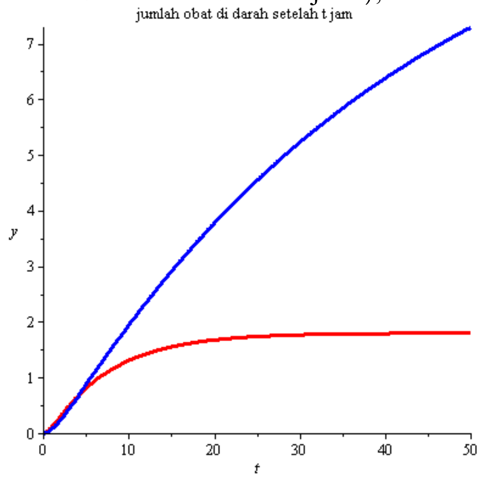
```
> DataAntihistamine := {In = 0.25, k1 = 0.6931, k2 = 0.0231} :
  System2 := [subs(DataAntihistamine, de1), subs(DataAntihistamine,
      de2)];
  initx := 0 :
  inity := 0 :
  plot3 := DEplot(System2, [x, y], t = 0 ..50, {[0, initx, inity]}, stepsize
      = 0.1, scene = [t, x], linecolour = blue, arrows = NONE) :
  plot4 := DEplot(System2, [x, y], t = 0 ..50, {[0, initx, inity]}, stepsize
      = 0.1, scene = [t, y], linecolour = blue, arrows = NONE) :
```

$$System2 := \left[\frac{d}{dt}\,x(t) = 0.25 - 0.6931\,x(t),\ \frac{d}{dt}\,y(t) = 0.6931\,x(t) - 0.0231\,y(t)\right]$$

```
> display(plot1, plot3, title = "jumlah obat di darah setelah t jam");
```



> $display(plot2, plot4, title = \text{"jumlah obat di darah setelah t jam"});$



D. Dull, dizzy, or dead?

Australian law prohibits driving of vehicles (including boats and horse) for those with BAL (blood alcohol level) above 0.05. This the relates to 50mg/100ml alcohol in the bloodstream. This restriction is a result of U.S statistics which indicate that a person with a BAL of 0.15 is 25 times more likely to have a fatal accident than one with no alcohol. Furthermore, for 41% of Australian men excessive alcohol leads to confrontational behaviour.

BAL	Behavioural effect	
5%	Lowered alertness, usually good feeling, release of inhibitors, impaired judgement	Dull and dignified
10%	Slowed reaction times and impaired motor function, less caution	Dangerous and devilish
15%	Large consistent increases in reaction time	Dizzy
20%	Marked depression in sensory and motor capability, decidedly intoxicated	Disturbing
25%	Severe motor disturbance, staggering, sensory perceptions greatly impaired, smashed	Disgusting and dishevelled
30%	Stuporous but conscious, no comprehension of what's going on	Delirious and disoriented

35%	Surgical anaesthesia, minimal level causing death	Dead drunk
40%	50 times the minimal level, causing death	Dead !

The alcohol intake into the GI-tract is "controlled" by the drinker. The amount of alcohol subsequently absorbed into the bloodstream depends on the concentration of alcohol, other liquid and food in the GI-tract, as well as on the weight and sex of the individual. Alcohol is removed from the bloodstream at a constant rate by the liver. This is independent of the body weight, sexm of the individual and concentration of alcohol in the bloodstream and assumes that the liver has not been damaged by large doses of alcohol. (Ignoring that a small percentage leaves through sweat, saliva, breath, and urine. This means BAL estimate may be slightly above the true value).

Let $C_1(t)$ be the concentration of alcohol in the GI-tract at time t. Let $C_2(t)$ be the concentration of alcohol in the bloodstream at time t

$$\frac{dC_1}{dt} = I - k_1 C_2$$
$$\frac{dC_2}{dt} = k_2 C_1 - \frac{k_3 C_3}{C_2 + M}$$

In the case of drinking on an empty stomach, $k_1 = k_2$. If drinking occurs together with a meal (or is diluted) then $k_1 > k_2$

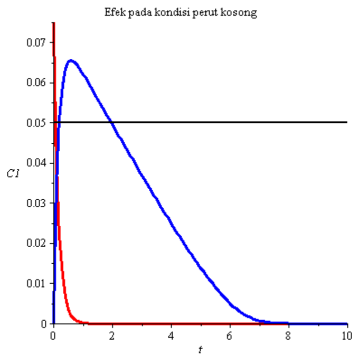
Kondisi perut kosong

```
restart : with(plots) : with(DEtools) :
k1 := 6 : k2 := 6 : k3 := 0.014 : M := 0.005 :
de1 := diff(C1(t), t) =-k1·C1(t) :
de2 := diff(C2(t), t) = k2·C1(t) - k3·C2(t)/(C2(t) + M) :
ics1 := C1(0) = c0 :
ics2 := C2(0) = 0 :
Solusix := dsolve({de1, ics1});
#Solusiy:=factor(dsolve({subs(Solusix, de2), ics2}));
```

$$Solusix := C1(t) = c0\, e^{-6t}$$

```
System1 := [de1, de2];
initx := 0.075 :
inity := 0 :
plot1 := DEplot(System1, [C1, C2], t = 0 ..10, {[0, initx, inity]},
    stepsize = 0.1, scene = [t, C1], linecolour = red, arrows = NONE) :
plot2 := DEplot(System1, [C1, C2], t = 0 ..10, {[0, initx, inity]},
    stepsize = 0.1, scene = [t, C2], linecolour = blue, arrows = NONE)
    :
plot3 := plot([[0, 0.05], [10, 0.05]], color = black) :
display(plot1, plot2, plot3, title = "Efek pada kondisi perut kosong");
```

$$System1 := \left[\frac{d}{dt} C1(t) = -6\, C1(t), \frac{d}{dt} C2(t) = 6\, C1(t) - \frac{0.014\, C2(t)}{C2(t) + 0.005}\right]$$



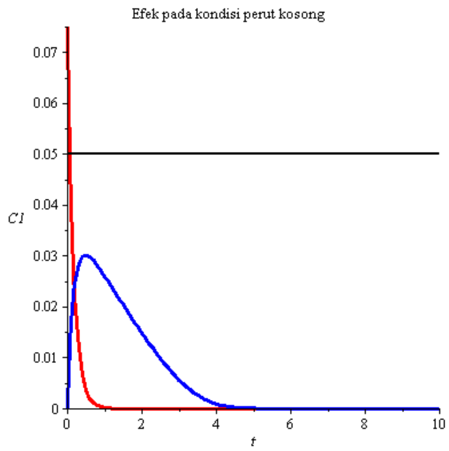
Kondisi perut ada makanan

```
restart : with(plots) : with(DEtools) :
k1 := 6 : k3 := 0.014 : M := 0.005 :
de1 := diff(C1(t), t) =-k1·C1(t) :
de2 := diff(C2(t), t) = k1/2·C1(t) − k3·C2(t)/(C2(t) + M) :
ics1 := C1(0) = c0 :
ics2 := C2(0) = 0 :
Solusix := dsolve({de1, ics1});
#Solusiy:=factor(dsolve({subs(Solusix, de2), ics2}));
```

$$Solusix := C1(t) = c0\, e^{-6\, t}$$

```
System1 := [de1, de2];
initx := 0.075 :
inity := 0 :
plot1 := DEplot(System1, [C1, C2], t = 0 ..10, {[0, initx, inity]},
    stepsize = 0.1, scene = [t, C1], linecolour = red, arrows = NONE) :
plot2 := DEplot(System1, [C1, C2], t = 0 ..10, {[0, initx, inity]},
    stepsize = 0.1, scene = [t, C2], linecolour = blue, arrows = NONE)
    :
plot3 := plot([[0, 0.05], [10, 0.05]], color = black) :
display(plot1, plot2, plot3, title = "Efek pada kondisi perut kosong");
```

$$System1 := \left[\frac{d}{dt} C1(t) = -6\, C1(t), \frac{d}{dt} C2(t) = 3\, C1(t) - \frac{0.014\, C2(t)}{C2(t) + 0.005}\right]$$



Pertemuan Ketiga
Single Population Model

A. Model Pertumbuhan Eksponensial

$$\frac{dX}{dt} = \beta X - \alpha X = rX, \quad X(0) = x_0 \tag{3.1}$$

dengan

- β adalah konstanta laju kelahiran per kapita
- α adalah konstanta laju kematian per kapita
- r adalah konstanta laju pertumbuhan atau laju reproduksi

Solusi dari persamaan (3.1) adalah

$$X(t) = x_0 e^{rt}$$

Perhatikan bahwa saat $r > 0$, model mendeskripsikan pertumbuhan eksponensial, sedangkan saat $r < 0$ model mendeskripsikan peluruhan eksponensial.

Praktikum :

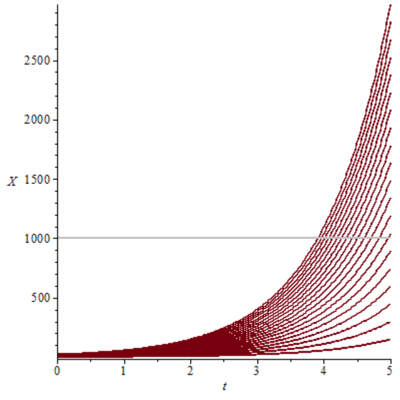
1. Gunakan Maple untuk mencari bentuk solusi eksak dari persamaan (3.1) dan menghitung t yang membuat jumlah populasi bernilai 2 kali lipat dari jumlah awal !
2. Simulasikan bentuk solusi dari persamaan (3.1) dengan nilai $r = 1, r = 0,$ dan $r = -1$ dengan menvariasikan nilai awalnya !

```
restart; with(plots) :
ode := diff(X(t), t) = r·X(t) :
ics := X(0) = x0 :
Solusi := dsolve({ode, ics});
solve(2·x0 = op(Solusi)[2], t);
```

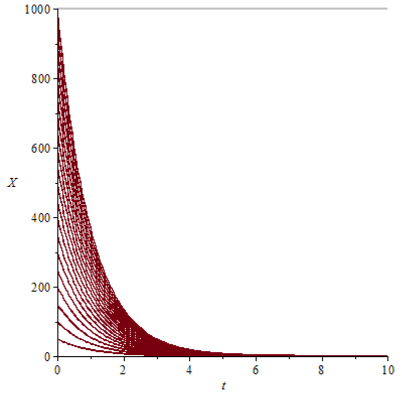
$$Solusi := X(t) = x0\, e^{r\,t}$$

$$\frac{\ln(2)}{r}$$

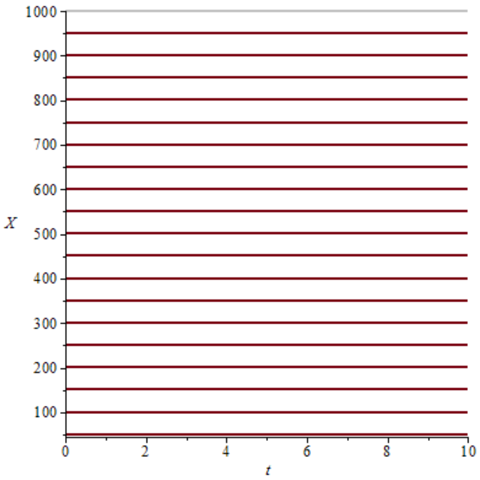
```
r := 1 : K := 1000 :
soln := x0→dsolve({ode, X(0) = x0}, X(t), numeric) :
plot1 := x0→(odeplot(soln(x0), [t, X(t)], 0 ..5)) :
list1 := seq(plot1(i), i = 1 ..20) :
line1 := plot([[0, K], [5, K]], colour = gray) :
display(list1, line1);
```



$r := -1 : K := 1000 :$
$soln := x0 \rightarrow dsolve(\{ode, X(0) = x0\}, X(t), numeric) :$
$plot1 := x0 \rightarrow (odeplot(soln(x0), [t, X(t)], 0..10)) :$
$list1 := seq(plot1(i \cdot 50), i = 1..20) :$
$line1 := plot([[0, K], [10, K]], colour = gray) :$
$display(list1, line1);$



$r := 0 : K := 1000 :$
$soln := x0 \rightarrow dsolve(\{ode, X(0) = x0\}, X(t), numeric) :$
$plot1 := x0 \rightarrow (odeplot(soln(x0), [t, X(t)], 0..10)) :$
$list1 := seq(plot1(i \cdot 50), i = 1..20) :$
$line1 := plot([[0, K], [10, K]], colour = gray) :$
$display(list1, line1);$



B. Model Pertumbuhan Logistik

$$\frac{dX}{dt} = \beta X - \alpha X - \gamma X^2 = rX - \gamma X^2,\ X(t) = x_0 \tag{3.2}$$

dengan

- β adalah konstanta laju kelahiran per kapita
- α adalah konstanta laju kematian per kapita karena natural attrition
- γ adalah konstanta laju kematian dikarenakan persaingan untuk bertahan hidup
- r adalah konstanta laju pertumbuhan

Definisikan kapasitas pembawa (*carrying capacity*) sebagai jumlah maksimum individu yang dapat didukung oleh suatu lingkungan atau habitat. Kapasitas Pembawa (K) secara matematis dituliskan sebagai $K = \frac{r}{\gamma}$, sehingga persamaan (3.2) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dX}{dt} = rX - \gamma X^2 = r\left(1 - \frac{X}{K}\right)X,\ X(t) = x_0$$

Praktikum :

1. Gunakan Maple untuk mencari bentuk solusi eksak dari persamaan (3.2) dan menghitung t yang membuat jumlah populasi bernilai 2 kali lipat dari jumlah awal !
2. Simulasikan bentuk solusi dari persamaan (3.2) dengan nilai $r = 1$ dan $K = 1000$ dengan menvariasikan nilai awalnya ! Ulangi dengan mengganti nilai K !

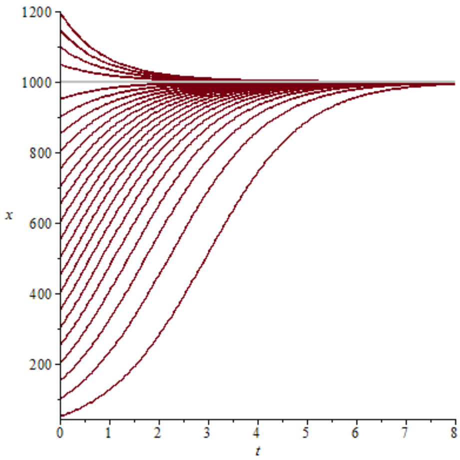
```
restart; with(plots) :
ode := diff(X(t), t) = r·X(t)·(1 − X(t)/K) :
ics := X(0) = x0 :
Solusi := dsolve({ode, ics});
WaktuDouble := solve(op(Solusi)[2] = 2·x0, t);
TK := solve(op(ode)[2], X(t));
```

$$Solusi := X(t) = \frac{x0\, K}{x0 + e^{-r\,t} K - e^{-r\,t} x0}$$

$$WaktuDouble := -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{K - 2\,x0}{K - x0}\right)}{r}$$

$$TK := 0, K$$

```
r := 1 : K := 1000 :
soln := x0→dsolve({ode, X(0) = x0}, X(t), numeric) :
plot1 := x0→(odeplot(soln(x0), [t, X(t)], 0 ..8)) :
list1 := seq(plot1(i·50), i = 1 ..24) :
line1 := plot([[0, K], [8, K]], colour = gray) :
display(list1, line1);
```



C. Model Pertumbuhan dengan Pemanenan

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) - h,\ X(0) = x_0 \tag{3.3}$$

dengan

- h adalah konstanta laju pemanenan (jumlah total tangkapan setiap unit waktu / jumlah kematian akibat dari pemanenan setiap unit waktu)

Persamaan (3.3) dapat dituliskan dalam bentuk kapasitas pembawa (K) sebagai berikut

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{r}{K}\left(X^2 - KX + \frac{Kh}{r}\right),\ X(0) = x_0$$

Praktikum :

1. Gunakan Maple untuk mencari bentuk solusi eksak dari persamaan (3.3) dengan nilai $r = 1$, $K = 10$, $h = 9/10$ dan $X(0) = x_0$ dan menghitung t yang membuat jumlah populasi bernilai 2 kali lipat dari jumlah awal ! Tentukan pula bentuk solusi eksaknya dan titik kesetimbangannya?
2. Simulasikan bentuk solusi dari persamaan (3.3) pada hasil nomor 1 dengan menvariasikan nilai awalnya! Ulangi dengan mengganti nilai K !

$restart; with(plots):$

$ode := diff(X(t), t) = r \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{K}\right) - h:$

$ics := X(0) = x0:$

$r := 1 : K := 10 : h := \frac{9}{10}:$

$Solusi := dsolve(\{ode, ics\});$
$WaktuDouble := solve(\, op(Solusi)[2] = 2 \cdot x0, t);$
$TK := solve(op(ode)[2] = 0, X(t));$

$$Solusi := X(t) = \frac{e^{-\frac{4}{5}t}\, x0 - 9\, e^{-\frac{4}{5}t} - 9\, x0 + 9}{e^{-\frac{4}{5}t}\, x0 - 9\, e^{-\frac{4}{5}t} - x0 + 1}$$

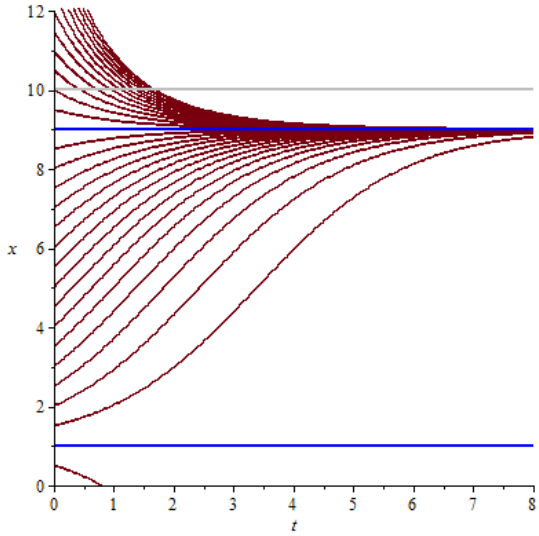
$$WaktuDouble := -\frac{5}{4}\ln\left(\frac{9 - 11\, x0 + 2\, x0^2}{9 - 19\, x0 + 2\, x0^2}\right)$$

$$TK := 1, 9$$

$soln := x0 \rightarrow dsolve(\{ode, X(0) = x0\}, X(t), numeric):$
$plot1 := x0 \rightarrow (odeplot(soln(x0), [t, X(t)], 0..8)):$

$list1 := seq\left(plot1\left(\frac{i}{2}\right), i = 0..30\right):$

$line1 := plot([[0, K], [8, K]], colour = gray):$
$BatasAtas := plot([[0, TK[1]], [8, TK[1]]], colour = blue):$
$LevelKritis := plot([[0, TK[2]], [8, TK[2]]], colour = blue):$
$display(list1, line1, BatasAtas, LevelKritis, view = [0..8, 0..12]);$



D. Model Pertumbuhan Logistik Diskrit

Pada model pertumbuhan diskrit, diasumsikan bahwa populasi tidak berubah kecuali pada selang waktu diskrit. Hal ini berkaitan dengan waktu kawin beberapa spesies hewan yang terjadi hanya pada musim tertentu atau pada selang waktu yang diskrit (tidak berlangsung sepanjang tahun). Model pertumbuhan diskrit berbentuk

$$X_{n+1} - X_n = \beta X_n - \alpha X_n - \gamma X_n{}^2,\; n = 0,1,2,3, \ldots \qquad (3.4)$$

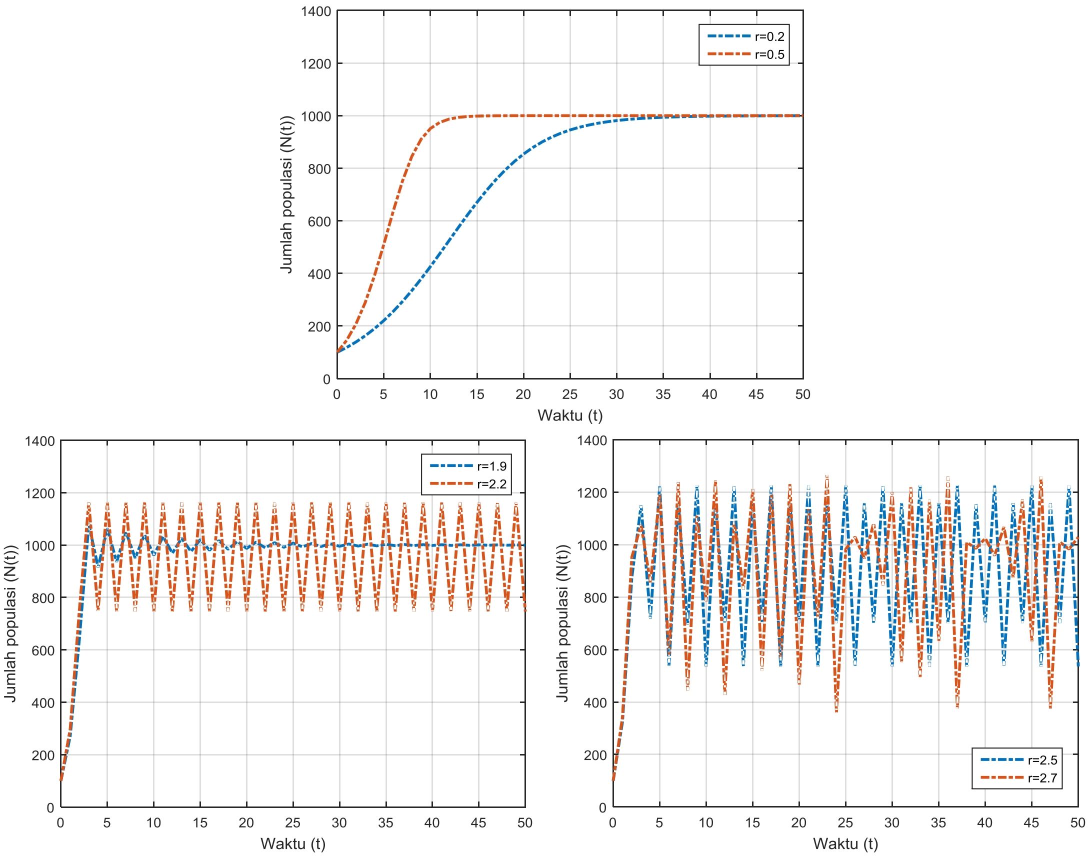
Dalam bentuk kapasita pembawa (K), persamaan (3.4) menjadi

$$X_{n+1} = X_n + rX_n\left(1 - \frac{X_n}{K}\right),\; n = 0,1,2,3, \ldots$$

Praktikum :

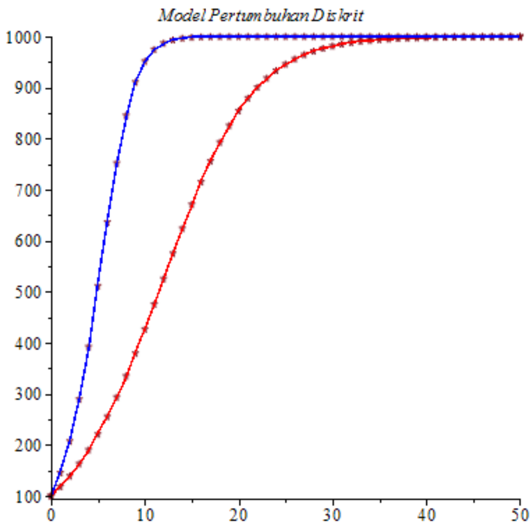
1. Gunakan Matlab/Maple untuk mensimulasikan model pertumbuhan logistik diskrit dengan menvariasikan nilai r. (Gunakan $N = 50$, $K = 1000$, dan $x_0 = 100$). Perhatikan perbedaan solusi untuk setiap variasi r!

```
clc; clear all; close all;
N=50;  K=1000; x0=100;
x=zeros(N+1,1);t=zeros(N+1,1);
X(1)=x0; t(1)=0;
r=[0.2 0.5];
%r=[1.9 2.2];
%r=[2.5 2.7];
nr=length(r);
for i=1:nr
  for n=1:N
    t(n+1)=n;
    X(n+1)=X(n)+r(i)*X(n)*(1-X(n)/K);
  end
  figure(1)
  plot(t,X,'-.','linewidth',2); hold on;
end
legend('r=0.2','r=0.5');grid on;
axis([0,N,0,K*1.4]);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Jumlah populasi (N(t))');
```

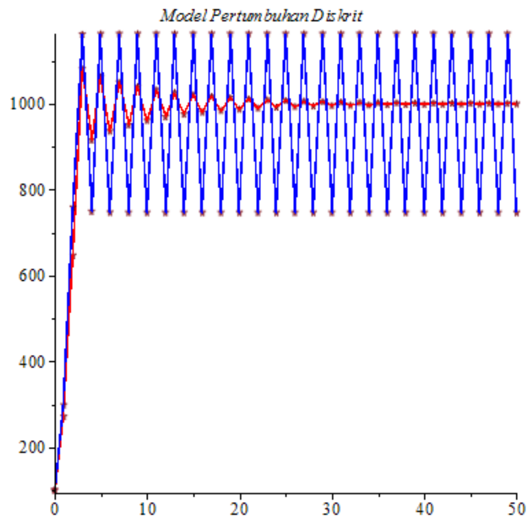


> *restart* : *with*(*plots*) : $X[0] := 100$: $K := 1000$: $IterMax := 50$:

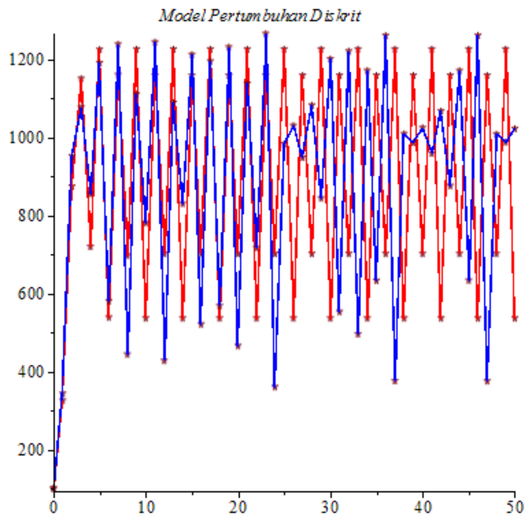
```
> r := 0.2 :
  for n from 0 to IterMax do
  X[n + 1] := X[n] + r·X[n]·(1 − X[n]/K);
  end do:
  points1 := [seq([n, X[n]], n = 0 ..IterMax)] :
  plot11 := plot(points1, style = point, symbol = asterisk) :
  plot12 := plot(points1, style = line, colour = red) :

> r := 0.5 :
  for n from 0 to IterMax do
  X[n + 1] := X[n] + r·X[n]·(1 − X[n]/K);
  end do:
  points2 := [seq([n, X[n]], n = 0 ..IterMax)] :
  plot21 := plot(points2, style = point, symbol = asterisk) :
  plot22 := plot(points2, style = line, colour = blue) :

> display(plot11, plot12, plot21, plot22, title
      = `Model Pertumbuhan Diskrit`);
```



(a) $r = 0.2$ dan $r = 0.5$



(b) $r = 1.9$ dan $r = 2.2$



(c) $r = 2.5$ dan $r = 2.7$

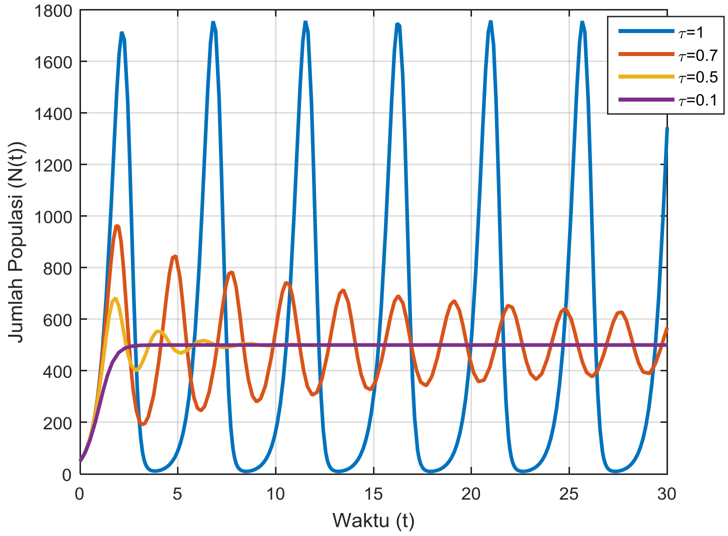
E. Model Pertumbuhan dengan waktu tunda

Jika kita asumsikan bahwa persamaan logistik diterapkan pada waktu sebelumnya $t - \tau$, dimana τ merepresentasikan waktu tunda diantara naiknya angka kematian dengan akibatnya (menurunnya angka reproduksi dari populasi), kita peroleh

$$\frac{dX}{dt} = rX(t)\left(1 - \frac{X(t-\tau)}{K}\right)$$

Praktikum : Gunakan function *delay diferential equation* (dde23) yang terdapat pada Matlab untuk mengambarkan solusi model pertumbuhan dengan waktu tunda dan variasikan besar τ!

```
function xdot=rhs(t,X,Xlag);
global r K;
xdot=r*X*(1-Xlag/K);
end

clc; clear all; close all;
global r K tau
r=2.2; K=500;
tn=30; x0=50;
Tao=[1 0.7 0.5 0.1];
for i=1:length(Tao)
    tau=Tao(i);
    sol=dde23(@rhs,tau,x0,[0 tn]);
    figure(1);
    plot(sol.x,sol.y,'linewidth',2);
    hold on;
end
hold off;
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Jumlah Populasi (N(t))');
legend('\tau=1','\tau=0.7','\tau=0.5','\tau=0.1');
grid on;
```



Pertemuan Keempat
Interaction Population Model

A. Model Epidemi Influenza

Populasi dibagi menjadi 3 kelompok :

$S(t)$: orang sehat yang rentan terinfeksi influenza (Susceptible)

$I(t)$: orang yang terinfeksi influenza dan dapat menginfeksi orang lain

$R(t)$: orang yang telah sembuh dari influenza dan memiliki kekebalan terhadap virus influenza

Asumsi :

- Populasi orang sehat yang rentan terinfeksi cukup besar, sehingga perbedaan acak pada setiap individu dapat diabaikan
- Kelahiran dan kematian diabaikan (terkait dengan lama infeksi influenza yang relatif jauh lebih kecil dibanding lama hidup individu)
- Penyakit influenza disebarkan melalui kontak antara individu sehat dengan terinfeksi.
- Periode laten (periode individu sudah terinfeksi virus namun belum menunjukkan tanda-tanda sakit) diabaikan, atau dianggap sama dengan nol.
- Orang yang sembuh dari penyakit dianggap memiliki kekebalan terhadap virus tersebut (bisa jadi kebal dalam periode tertentu).
- Populasi dianggap bercampur secara homogen pada setiap waktu (orang terinfeksi dan rentan terdistribusi secara random di area pengamatan)

Model epidemi influenza berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) \\ S(0) &= s_0, I(0) = i_0, R(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

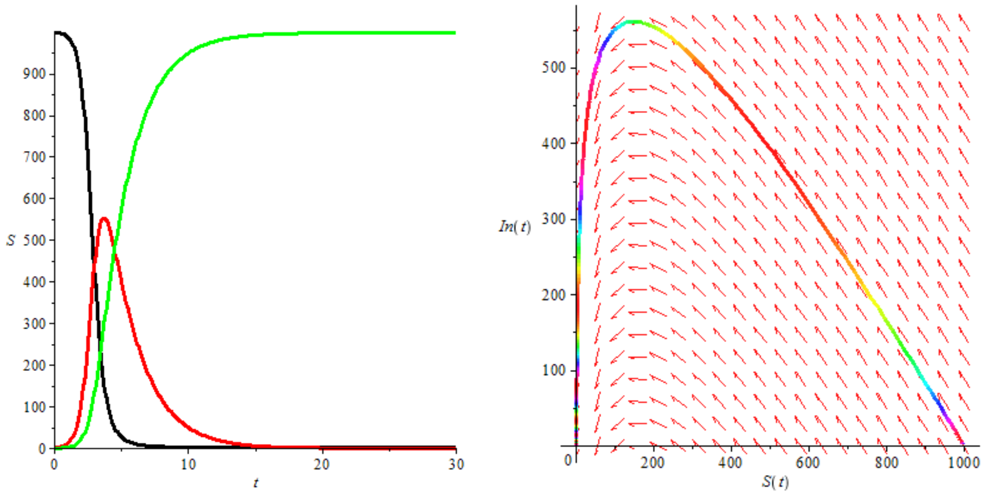
dengan

- β adalah koefisien transmisi atau laju infeksi
- γ adalah laju kesembuhan (γ^{-1} adalah waktu rata-rata individu terinfeksi mengalami sakit)

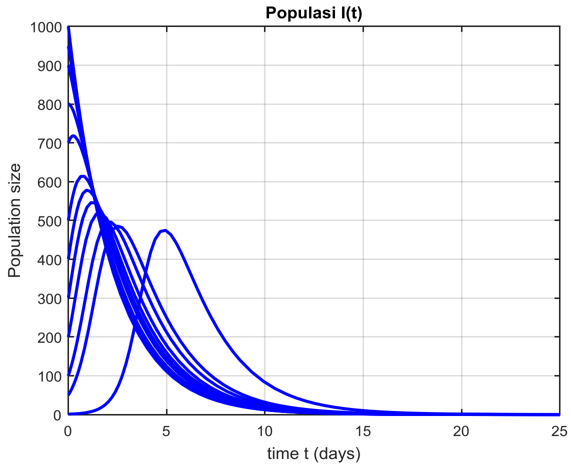
Praktikum :

1. Gunakan Maple atau Matlab untuk mensimulasikan solusi sistem persamaan (4.1) dengan $\beta = 2.8 \times 10^{-3}$ dan $\gamma = 0.44$. Syarat awal $S(0) = 999, I(0) = 1$,dan $R(0) = 0$. Apa yang dapat Anda simpulkan ?
2. Lakukan langkah 1 dengan mengganti syarat awal menjadi $S(0) = 800, I(0) = 200, R(0) = 0$. Apa yang berbeda dengan hasil nomor 1?

Jawaban :



1.



2.

Kode Maple :

```
> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
  unprotect(gamma); gamma := 'gamma':
  β := 2.8·10^(-3) : gamma := 0.44 :
  ode1 := diff(S(t), t) =-β·S(t)·In(t) :
  ode2 := diff(In(t), t) = β·S(t)·In(t) − γ·In(t) :
  ode3 := diff(R(t), t) = γ·In(t) :
  inits := [S(0) = 999, In(0) = 1, R(0) = 0] :
  myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE :
  plot1 := DEplot([ode1, ode2, ode3], [S, In, R], t = 0 ..30, [inits], scene = [t, S], linecolour = black, myopts) :
  plot2 := DEplot([ode1, ode2, ode3], [S, In, R], t = 0 ..30, [inits], scene = [t, In], linecolour = red, myopts) :
  plot3 := DEplot([ode1, ode2, ode3], [S, In, R], t = 0 ..30, [inits], scene = [t, R], linecolour = green, myopts) :
  display(plot1, plot2, plot3);

> phaseportrait([D(S)(t) =-β·S(t)·In(t), D(In)(t) = β·S(t)·In(t) − γ·In(t)], [S(t), In(t)], t = 0 ..200, [[S(0) = 999, In(0) = 1]], stepsize = .05, scene
  = [S(t), In(t)], linecolour = sin(t*Pi/2), method = classical[foreuler]);
```

Kode MATLAB :

```
%=============Epidemic Model for Influenza===========%
clc; clear all; close all;
global beta gamma
tn=25;
u0=[500;500;0];
beta=2.18*10^(-3); gamma=0.44;
[tsol,usol]=ode45(@rhs1,[0,tn],u0);
Ssol=usol(:,1); Isol=usol(:,2); Rsol=usol(:,3);
figure(1);
plot(tsol,Ssol,'k','linewidth',2); hold on;
plot(tsol,Isol,'r','linewidth',2); hold on;
plot(tsol,Rsol,'g','linewidth',2);hold off;
grid on;
legend('S(t)','I(t)','R(t)');
```

```
xlabel('time t (days)');
ylabel('Population size');
title('Populasi I(t)');

figure(2);
plot(Ssol,Isol,'r','linewidth',2); grid on;
xlabel('S(t)'); ylabel('I(t)');

function udot=rhs1(T,u)
global beta gamma;
S=u(1); I=u(2); R=u(3);
Sdash =-beta*S*I;
Idash = beta*S*I-gamma*I;
Rdash = gamma*I;
udot=[Sdash; Idash; Rdash];
end
```

B. Model Endemik Penyakit

Model endemik penyakit bisa diperoleh dari pengembangan dari model epidemi influenza dengan menambahkan faktor kelahiran dan kematian alami pada model. Dengan demikian diperoleh model sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bN - \beta SI - aS \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - aI \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - aR\end{aligned} \tag{4.2}$$

dengan

- a adalah laju kematian alami per kapita dari populasi
- b adalah laju kelahiran alami per kapita dari populasi

Perhatikan bahwa pada model ini, kematian akibat penyakit diabaikan (penyakit tidak menyebabkan kematian). Notasi N menyatakan total populasi, secara matematis dapat ditulis dalam bentuk

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$

Laju total populasi berbentuk

$$\frac{dN}{dt} = (b - a)N$$

Jika $b = a$ maka total populasi konstan di setiap waktu $\left(\frac{dN}{dt} = 0\right)$.

Praktikum :

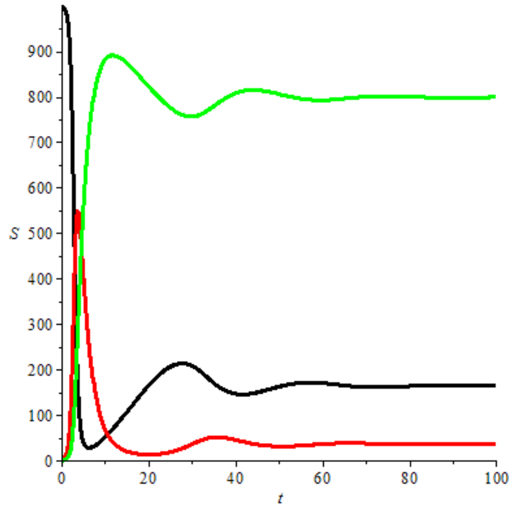
1. Tentukan titik kesetimbangan dari sistem (4.2) ! Tentukan syarat kestabilan untuk titik DFE !
2. Simulasikan menggunakan Maple / MATLAB sistem persamaan (4.2) dengan $b = \frac{1}{50}, a = \frac{1}{50}, N = 1000, \gamma = 0.44, \beta = 2.8 \times 10^{-3}$! Hitung pula nilai setiap titik kesetimbangan!

Jawab :

1. Terdapat 2 titik kesetimbangan, $DFE = \left(S^* = \frac{bN}{a}, I^* = 0, R^* = 0\right)$ dan $END = \left(S^* = \frac{\gamma+a}{\beta}, I^* = \frac{bN}{\gamma+a} - \frac{a}{\beta}, R^* = \frac{\gamma}{a}\left(\frac{bN}{\gamma+a} - \frac{a}{\beta}\right)\right)$. Syarat kestabilan untuk DFE adalah $b\beta N - a\gamma - a^2 < 0$ atau

$$\frac{bN}{\gamma + a} < \frac{a}{\beta}$$

2. Dengan menggunakan nilai parameter tersebut, diperoleh bahwa $DFE = (1000,0,0)$ dan $END = (164.28\,, 36.33, 799.37)$. Simulasi solusi sistem persamaan (4.2) diperlihatkan oleh gambar di bawah ini



Kode Maple :

```
> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
  dS := b·N − β·S·In − a·S :
  dIn := β·S·In − γ·In − a·In :
  dR := γ·In − a·R :
  TTK := solve({dS, dIn, dR}, {S, In, R}) :
  DFE := TTK[1];
  END := TTK[2];
  A := Matrix(jacobian([dS, dIn, dR], [S, In, R])) :
  JacA := subs(DFE, A) : eigenvalues(JacA);
  JacB := subs(END, A) : charpoly(JacB, λ);
```

$$DFE := \left\{In = 0,\, R = 0,\, S = \frac{bN}{a}\right\}$$

$$END := \left\{In = \frac{bN\beta - a\gamma - a^2}{\beta\,(\gamma + a)},\, R = \frac{\gamma\,(bN\beta - a\gamma - a^2)}{\beta\,(\gamma + a)\,a},\, S = \frac{\gamma + a}{\beta}\right\}$$

$$-a,\, -a,\, \frac{bN\beta - a\gamma - a^2}{a}$$

$$\frac{(\lambda + a)\,(\lambda^2\gamma + \lambda^2 a + \lambda\, bN\beta + bN\beta\gamma + a\,bN\beta - a\gamma^2 - 2\,a^2\gamma - a^3)}{\gamma + a}$$

```
> unprotect(gamma); gamma := 'gamma':
  β := 2.8·10^(−3) : gamma := 0.44 : b := 1/50 : a := 1/50 : N := 1000 :
  DFE;
  END;
```

$$\{In = 0,\, R = 0,\, S = 1000\}$$

$$\{In = 36.33540372,\, R = 799.3788820,\, S = 164.2857143\}$$

```
> ode1 := diff(S(t), t) = b·N − β·S(t)·In(t) − a·S(t) :
  ode2 := diff(In(t), t) = β·S(t)·In(t) − γ·In(t) − a·In(t) :
  ode3 := diff(R(t), t) = γ·In(t) − a·R(t) :
  inits := [S(0) = 999, In(0) = 1, R(0) = 0] :
  myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE :
  plot1 := DEplot([ode1, ode2, ode3], [S, In, R], t = 0 ..100, [inits], scene = [t, S], linecolour = black, myopts) :
  plot2 := DEplot([ode1, ode2, ode3], [S, In, R], t = 0 ..100, [inits], scene = [t, In], linecolour = red, myopts) :
  plot3 := DEplot([ode1, ode2, ode3], [S, In, R], t = 0 ..100, [inits], scene = [t, R], linecolour = green, myopts) :
  display(plot1, plot2, plot3);
```

C. Pemangsa dan mangsa (*Predator and Prey*)

Asumsi :

- Populasi cukup besar, sehingga perbedaan acak antar setiap individu dapat diabaikan.

- Pengaruh dari pestisida diabaikan
- Hanya terdapat dua populasi, populasi pemangsa dan populasi mangsa yang ada di ekosistem
- Saat tidak ada populasi pemangsa, populasi mangsa bertumbuh secara eksponensial

Model dinamika populasi dengan asumsi tersebut menghasilkan sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \beta_1 X - c_1 XY \\ \frac{dY}{dt} &= c_2 XY - \alpha_2 Y \end{aligned} \tag{4.3}$$

Praktikum :

1. Tentukan semua titik kesetimbangan sistem (4.3).
2. Simulasikan solusi sistem persamaan (4.3) dengan $\beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 0.5, c_1 = 0.01$, dan $c_2 = 0.005$ dengan syarat awal $X(0) = 200$ dan $Y(0) = 80$!
3. Lakukan langkah (1) dan (2) untuk model predator-prey dengan adanya kematian akibat pestisida pada kedua spesies (spesies X dan spesies Y) atau untuk sistem persamaan (4.4) berikut dengan nilai $p_1 = p_2 = 0.1$!

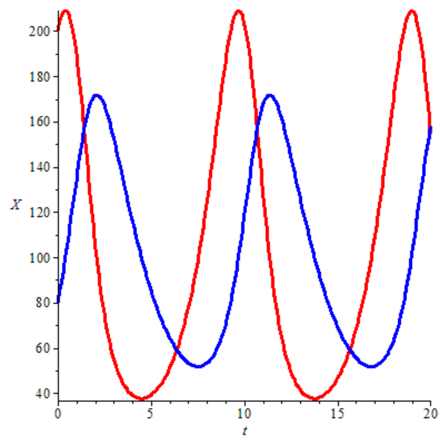
$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \beta_1 X - c_1 XY - p_1 X \\ \frac{dY}{dt} &= c_2 XY - \alpha_2 Y - p_2 Y \end{aligned} \tag{4.4}$$

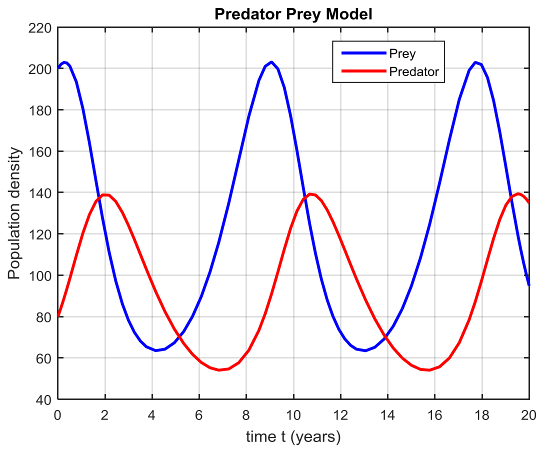
4. Lakukan langkah (1) dan (2) untuk model predator-prey dimana spesies X (spesies prey) diasumsikan bertumbuh mengikuti model pertumbuhan logistik, sedangkan spesies Y (spesies predator) bertumbuh mengikut model pertumbuhan eksponensial atau mengikut sistem persamaaan (4.5) berikut dengan $K = 1000$!

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \beta_1 X \left(1 - \frac{X}{K}\right) - c_1 XY \\ \frac{dY}{dt} &= c_2 XY - \alpha_2 Y \end{aligned} \tag{4.5}$$

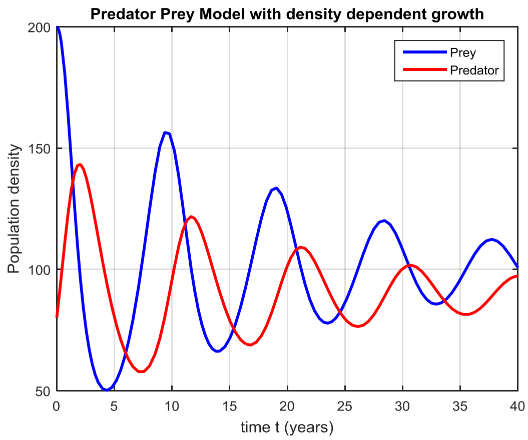
Jawab :

1. Terdapat 2 titik kesetimbangan, $DFE = (S^*, I^*) = (0,0)$ dan $END = \left(\frac{\alpha_2}{c_2}, \frac{\beta_1}{c_1}\right)$
2. Nilai parameter yang digunakan menghasilkan $DFE = (0,0)$ dan $END = (100,100)$. Solusi sistem persamaan ditunjukkan oleh gambar di bawah ini





Simulasi Nomor 3



Simulasi Nomor 4

Kode Maple :

$> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :$

$dX := \beta_1 \cdot X - c_1 \cdot X \cdot Y :$

$dY := -\alpha_2 \cdot Y + c_2 \cdot X \cdot Y :$

$TTK := solve(\{dX, dY\}, \{X, Y\}) :$

$DFE := TTK[1];$

$END := TTK[2];$

$A := Matrix(jacobian([dS, dIn, dR], [S, In, R])) :$

$JacA := subs(DFE, A) : eigenvalues(JacA);$

$JacB := subs(END, A) : charpoly(JacB, \lambda);$

$$DFE := \{X = 0, Y = 0\}$$

$$END := \left\{X = \frac{\alpha_2}{c_2}, Y = \frac{\beta_1}{c_1}\right\}$$

$$0, 0, 0$$

$$\lambda^3$$

$> \beta_1 := 1.0 : \alpha_2 := 0.5 : c_1 := 0.01 : c_2 := 0.005 :$

$DFE;$

$END;$

$ode1 := diff(X(t), t) = \beta_1 \cdot X(t) - c_1 \cdot X(t) \cdot Y(t) :$

$ode2 := diff(Y(t), t) = -\alpha_2 \cdot Y(t) + c_2 \cdot X(t) \cdot Y(t) :$

$inits := [X(0) = 200, Y(0) = 80] :$

$myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE :$

$plot1 := DEplot([ode1, ode2], [X, Y], t = 0 ..20, [inits], scene = [t, X], linecolor = red, myopts) :$

$plot2 := DEplot([ode1, ode2], [X, Y], t = 0 ..20, [inits], scene = [t, Y], linecolor = blue, myopts) :$

$display(plot1, plot2);$

$$\{X = 0, Y = 0\}$$

$$\{X = 100.0000000, Y = 100.0000000\}$$

Kode Matlab

```
clc; clear all; close all;
global beta1 alpa2 c1 c2
beta1=1.0; alpa2=0.5; c1=0.01; c2=0.005;
tn=20;
u0=[200;80];
[tsol,usol]=ode45(@rhs3,[0,tn],u0);
Xsol= usol(:,1); Ysol=usol(:,2);
figure(1)
plot(tsol,Xsol,'b','linewidth',2); hold on;
plot(tsol,Ysol,'r','linewidth',2); hold off;
legend('Prey','Predator');
grid on;
xlabel('time t (years)');
ylabel('Population density');
title('Predator Prey Model');

function udot=rhs3(T,u)
global beta1 alpa2 c1 c2
```

```
X=u(1); Y=u(2);
Xdash = beta1*X-c1*X*Y;
Ydash = -alpa2*Y+c2*X*Y;
udot=[Xdash; Ydash];
end
```

D. Competing Species

Asumsi :

- Ukuran populasi cukup besar sehingga perbedaan acak tiap individu dapat diabaikan.
- Kedua spesies merefleksikan kenyataan di ekosistem dengan cukup akurat.
- Setiap populasi bertumbuh secara ekponensial saat tidak adanya spesies kompetitor.

Model kompetisi spesies dengan asumsi ini berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \beta_1 X - c_1 XY \\ \frac{dY}{dt} &= \beta_2 Y - c_2 XY \end{aligned} \tag{4.6}$$

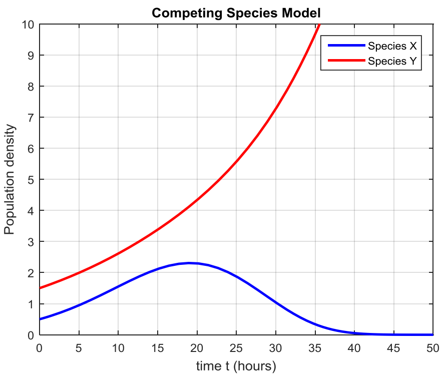
- β_1 dan β_2 adalah laju pertumbuhan per kapita (selisih laju kelahiran alami dikurang laju kematian alami per kapita). Kedua parameter ini tidak bergantung pada ada atau tidaknya spesies lain.
- c_1 dan c_2 adalah parameter interaksi antar kedua spesies.

Praktikum :

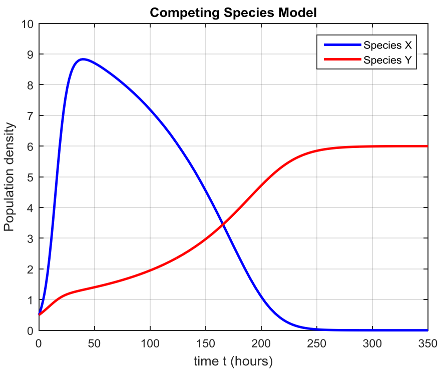
1. Tentukan semua titik kesetimbangan untuk sistem persamaan (4.6), lalu simulasikan solusi sistem dengan $\beta_1 = 0.22, \beta_2 = 0.061, c_1 = 0.053, c_2 = 0.0046$ dengan syarat awal $X(0) = 1$ dan $Y(0) = 3$!
2. Lakukan langkah 1 untuk model kompetisi spesies dengan laju pertumbuhan kedua spesies tanpa adanya spesies kompetitor mengikuti model pertumbuhan logistik. Model kompetisi spesies akan berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \beta_1 X - d_1 X^2 - c_1 XY \\ \frac{dY}{dt} &= \beta_2 Y - d_2 Y^2 - c_2 XY \end{aligned}$$

Jawaban :



Simulasi Nomor 1



Simulasi Nomor 2

Kode Maple :

```
restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
dX := β1·X − c1·X·Y:
dY := β2·Y−c2·X·Y:
TTK := solve({dX, dY}, {X, Y}) :
DFE := TTK[1];
END := TTK[2];
A := Matrix(jacobian([dS, dIn, dR], [S, In, R])) :
JacA := subs(DFE, A) : eigenvalues(JacA);
JacB := subs(END, A) : charpoly(JacB, λ);
```

$$DFE := \{X = 0, Y = 0\}$$

$$END := \left\{X = \frac{\beta_2}{c_2}, Y = \frac{\beta_1}{c_1}\right\}$$

$$0, 0, 0$$

$$\lambda^3$$

```
β1 := 0.22 : β2 := 0.061 : c1 := 0.053 : c2 := 0.0046 :
DFE;
END;
ode1 := diff(X(t), t) = β1·X(t) − c1·X(t)·Y(t) :
ode2 := diff(Y(t), t) = β2·Y(t)−c2·X(t)·Y(t) :
inits := [X(0) = 1, Y(0) = 3] :
myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE :
plot1 := DEplot([ode1, ode2], [X, Y], t = 0 ..50, [inits], scene = [t, X], linecolor = red, myopts) :
plot2 := DEplot([ode1, ode2], [X, Y], t = 0 ..50, [inits], scene = [t, Y], linecolor = blue, myopts) :
display(plot1, plot2);
```

$$\{X = 0, Y = 0\}$$

$$\{X = 13.26086957, Y = 4.150943396\}$$

Kode Matlab

```
clc; clear all; close all;
global beta1 beta2 c1 c2
beta1=0.22; beta2=0.06; c1=0.053; c2=0.0046;
tn=50;
u0=[0.5;1.5];
[tsol,usol]=ode45(@rhs6,[0,tn],u0);
Xsol= usol(:,1); Ysol=usol(:,2);
figure(1)
plot(tsol,Xsol,'b','linewidth',2); hold on;
plot(tsol,Ysol,'r','linewidth',2); hold off;
legend('Species X','Species Y');
grid on;
xlabel('time t (hours)');
ylabel('Population density');
title('Competing Species Model');
axis([0, tn, 0, 10]);

function udot=rhs6(T,u)
global beta1 beta2 c1 c2
X=u(1); Y=u(2);
Xdash = beta1*X-c1*X*Y;
Ydash = beta2*Y-c2*X*Y;
udot=[Xdash; Ydash];
end
```

E. Model Dinamika Pasukan Perang

Asumsi :

- Jumlah pasukan cukup besar sehingga perbedaan acak antar setiap individu dapat diabaikan
- Tidak ada penambahan pasukan dan tidak ada kejadian di luar rencana seperti wabah penyakit atau pemberontakan.

- Untuk peperangan dengan senjata api (meriam atau senapan), laju pasukan musuh yang terluka sebanding dengan jumlah dari pasukan tersebut.
- Untuk peperangan dengan pedang (pasukan merah dan biru harus saling berhadapan langsung), laju pasukan musuh yang terluka sebanding dengan banyak pasukan yang saling berhadapan.

Untuk model peperangan dengan senjata api, model dinamika pasukan berbentuk

$$\frac{dR}{dt} = -a_1 B$$
$$\frac{dB}{dt} = -a_2 R \tag{4.7}$$

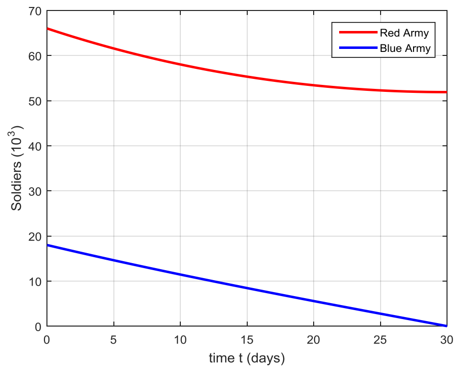
- a_1 dan a_2 adalah ukuran efektifitas dari pasukan Biru dan pasukan Merah (*attrition coefficients*)

Praktikum :

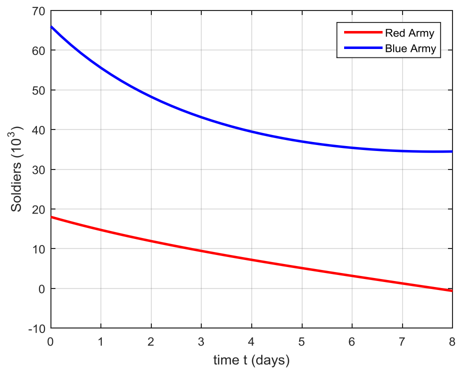
1. Simulasikan sistem persamaan (4.7) dengan menggunakan $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.01$, $R(0) = 66$ dan $B(0) = 18$. Lakukan hal yang sama dengan syarat awal dibalik, yaitu $B(0) = 66$ dan $R(0) = 18$!
2. Misalkan pasukan B menggunakan senjata api, sedangkan pasukan R menggunakan pedang / bambu runcing, model dinamika jumlah pasukan akan menjadi
$$\frac{dR}{dt} = -a_1 B$$
$$\frac{dB}{dt} = -c_2 RB \tag{4.8}$$
Simulasikan sistem (4.8) dengan menggunakan nilai $a_1 = 0.05$ dan $c_2 = 0.01$ dengan jumlah awal pasukan sama dengan langkah 1!
3. Misalkan kedua pasukan menggunakan senjata perang tradisional, pasukan A menggunakan pedang, sedangkan pasukan B menggunakan clurit, model dinamika jumlah pasukan berbentuk
$$\frac{dR}{dt} = -c_1 RB$$
$$\frac{dB}{dt} = -c_2 RB \tag{4.9}$$
Simulasikan sistem (4.9) dengan menggunakan nilai parameter $c_1 = 0.05$ dan $c_2 = 0.01$ dengan jumlah awal pasukan sama dengan langkah 1!
4. Kesimpulan apa yang dapat ditarik dari hasil simulasi 1, 2 dan 3 ?

Jawaban :

1. Pada nilai parameter ini, pasukan Merah memiliki peluang kalah yang lebih kecil dari pasukan B (atau kualitas senjata perang pasukan Merah lebih jelek dibanding pasukan Biru). Namun,, karena jumlah pasukan Merah pada waktu ke nol lebih banyak dibanding pasukan Biru, pada hari ke-30 pasukan Merah tetap memenangkan peperangan. Sedangkan saat jumlah pasukan Biru lebih banyak dari pasukan A, maka yang terjadi adalah pasukan Biru memenangkan peperangan sebelum hari ke-5, sesuai dengan gambar (b) di bawah ini.

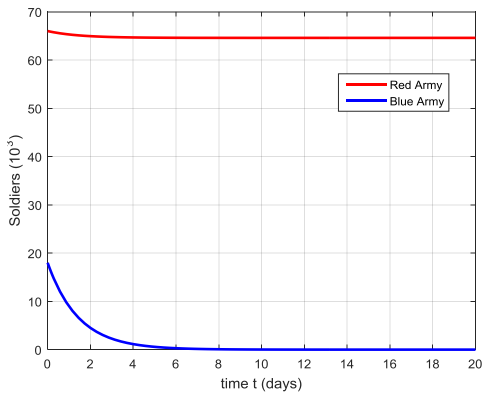


(a) $R(0) = 66$ dan $B(0) = 18$

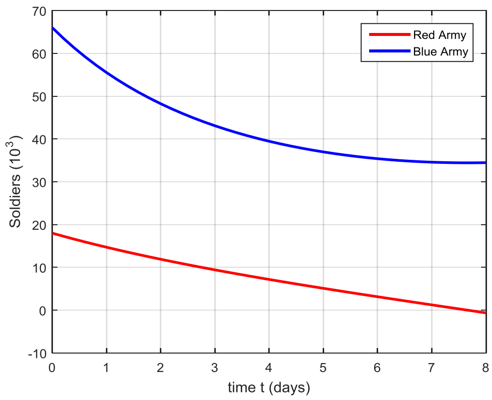


(b) $R(0) = 18$ dan $B(0) = 66$

2. Pada model (4.8), simulasi dengan nilai peluang kekalahan pasukan Merah dan pasukan B akibat perang sama dengan langkah 1, tampak bahwa pasukan Merah tetap memenangkan peperangan dengan waktu perang yang lebih cepat, yakni berakhir sebelum hari ke-7. Sehingga, pasukan Merah akan tetap memenangkan peperangan walau hanya bermodal pedang jika pada awalnya jumlah pasukan merah cukup banyak.



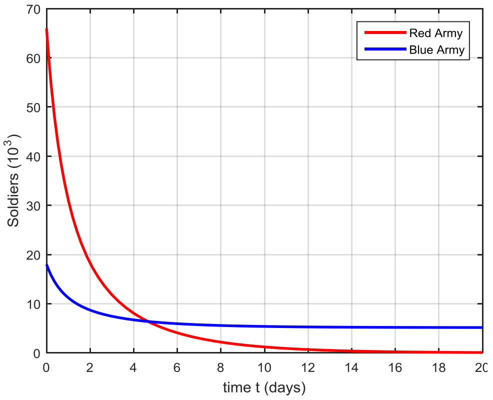
(b) $R(0) = 66$ dan $B(0) = 18$



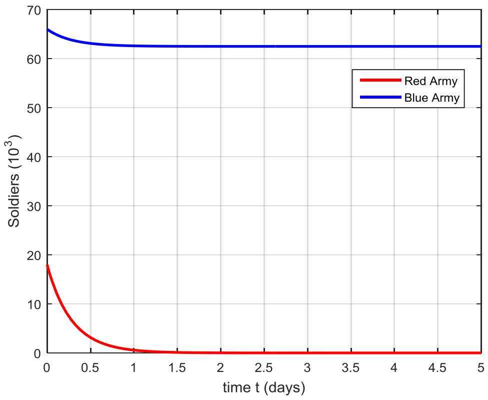
(b) $R(0) = 18$ dan $B(0) = 66$

Saat jumlah pasukan M lebih sedikit dibanding dengan pasukan B, tampak dari gambar (b) bahwa pasukan B akan memenangkan peperangan sebelum hari ke-8.

3. Pada model (4.9), dengan jumlah pasukan Merah pada awalnya lebih banyak dibanding pasukan Biru ternyata hasil yang terjadi adalah pasukan merah memenangkan peperangan pada hari ke-16.



(a) $R(0) = 66$ dan $B(0) = 18$



(b) $R(0) = 18$ dan $B(0) = 66$

Kode Maple

```
> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
  dR := -a1·B :
  dB := -a2·R :
  TTK := solve({dR, dB}, {R, B});
  A := Matrix(jacobian([dR, dB], [R, B])) :
  JacA := subs(TTK, A) : NilaiEigen := eigenvalues(JacA);
                                TTK := {B = 0, R = 0}
                          NilaiEigen := sqrt(a1 a2), -sqrt(a1 a2)

> a1 := 0.05 : a2 := 0.01 :
  TTK; NilaiEigen;
  ode1 := diff(R(t), t) =-a1·B(t) :
  ode2 := diff(B(t), t) =-a2·R(t) :
  inits := [R(0) = 66, B(0) = 18] :
  myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE :
  plot1 := DEplot([ode1, ode2], [R, B], t = 0 ..30, [inits], scene = [t, R], linecolour = red, myopts) :
  plot2 := DEplot([ode1, ode2], [R, B], t = 0 ..30, [inits], scene = [t, B], linecolour = blue, myopts) :
  display(plot1, plot2);
                                {B = 0, R = 0}
                        0.02236067977, -0.02236067977
```

Kode MATLAB

```
clc; clear all; close all;
global a1 a2
a1=0.0544; a2=0.0106;
tn=5;
u0=[18;66];
[tsol,usol]=ode45(@rhs10,[0,tn],u0);
Rsol= usol(:,1); Bsol=usol(:,2);
figure(1)
plot(tsol,Rsol,'r','linewidth',2); hold on;
plot(tsol,Bsol,'b','linewidth',2); hold off;
legend('Red Army','Blue Army');
grid on;
xlabel('time t (days)');
ylabel('Soldiers (10^3)');

function udot=rhs10(T,u)
global a1 a2
R=u(1); B=u(2);
Rdash = -a1*B*R;
Bdash = -a2*R*B;
udot=[Rdash; Bdash];
end
```

F. Naik dan turunnya jumlah penduduk

Misalkan pada suatu kota, penduduk dapat dikategorikan dalam tiga kelompok

$F(t)$: kelompok rakyat jelata (petani, pedagang, penduduk sipil)

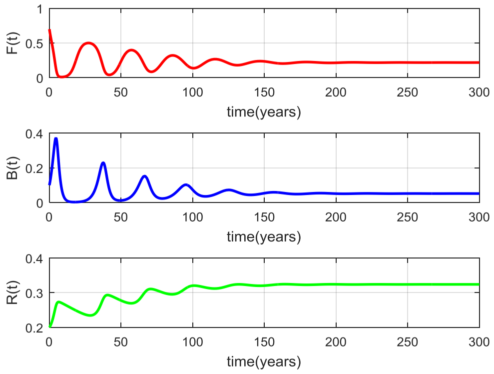
$B(t)$: kelompok penjahat/ perampok
$R(t)$: kelompok pembuat peraturan / penguasa (Gubernur, tentara dan polisi)
Model dinamika jumlah penduduk di setiap kelas dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\frac{dF}{dt} = rF\left(1 - \frac{F}{K}\right) - \frac{aFB}{b+F} - hFR$$
$$\frac{dB}{dt} = \frac{eaFB}{b+F} - mB - \frac{cBR}{d+B}$$
$$\frac{dR}{dt} = \frac{faFB}{b+F} - gR$$

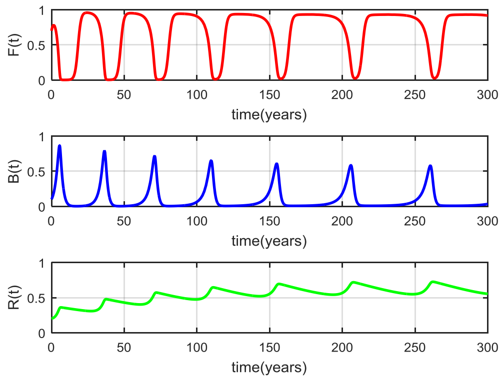
Praktikum :

1. Simulasikan solusi sistem persamaan tersebut dengan parameter $r = 1, K = 1, a = 1, b = 0.17, d = 0.42, m = 0.4, c = 0.4, f = 0.1, g = 0.009, e = 1.2$ dan $h = 2.0$ dengan syarat awal $F(0) = 0.7, B(t) = 0.1,$ dan $R(t) = 0.2$!
2. Lakukan kembali langkah (1) dengan menurunkan nilai parameter h menjadi 0.1! Apa yang dapat disimpulkan dari hasil langkah 1 dan 2? Manakah kondisi yang lebih diharapkan untuk terjadi di kehidupan nyata? Mengapa?

Jawaban :



(1)$h = 2.0$



(2) $h = 0.1$

Dari hasil simulasi tersebut, tampak bahwa besar nilai h akan mempengaruhi perilaku solusi jangka panjang. Tampak pada hasil pertama, ketika nilai $h = 2.0$, dalam jangka panjang jumlah penjahat stabil pada nilai 0.05, sedangkan ketika nilai $h = 0.1$ jumlah penjahat naik dan turun, dengan nilai tertinggi sekitar 0.5, sedangkan terendah sebesar 0.008. Perhatikan bahwa pada kondisi ini, ketika jumlah penjahat mencapai puncaknya, jumlah rakyat turun ke nilai terendah sedangkan jumlah polisi / tentara mencapai nilai tertinggi, dan sebaliknya. Parameter h menotasikan peluang seorang penduduk yang awalnya rakyat jelata berubah menjadi penjahat / pengacau. Ketika h besar, artinya usaha pemerintah atau aparat keamanan untuk menindak rakyat jelata yang berpotensi untuk mengacau sangat tinggi. Nilai h yang kecil, artinya pemerintah atau aparat tidak terlalu mengontrol penduduk yang berpotensi mengacau atau menjadi penjahat (terjadi pengabaikan terhadap potensi pemberontakan atau kejahatan).

Kode Maple

```
> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
```

$dF := r \cdot F \cdot \left(1 - \frac{F}{K}\right) - \frac{a \cdot F \cdot B}{b + F} - h \cdot F \cdot R :$

$dB := \frac{e \cdot a \cdot F \cdot B}{b + F} - m \cdot B - \frac{c \cdot B \cdot R}{d + B} :$

$dR := \frac{f \cdot a \cdot F \cdot B}{b + F} - g \cdot R :$

```
TTK := solve({dF, dB, dR}, {F, B, R}) :
TTK1 := TTK[1];
TTK2 := TTK[2];
TTK3 := TTK[3] :
A := Matrix(jacobian([dF, dB, dR], [F, B, R])) :
JacA := subs(TTK1, A) : NilaiEigenTTK1 := eigenvalues(JacA);
JacB := subs(TTK2, A) : NilaiEigenTTK2 := eigenvalues(JacB);
```

$TTK1 := \{B = 0, F = 0, R = 0\}$

$TTK2 := \{B = 0, F = K, R = 0\}$

$NilaiEigenTTK1 := r, -m, -g$

$NilaiEigenTTK2 := -r, \frac{e\,a\,K - m\,b - m\,K}{b + K}, -g$

```
> r := 1 : K := 1 : a := 1 : b := 0.17 : m := 0.4 : c := 0.4 : f := 0.1 : g := 0.009 : e := 1.2 : d := 0.42 :
h := 2.0 :
TTK1; NilaiEigenTTK1;
TTK2; NilaiEigenTTK2;
```

$ode1 := diff(F(t), t) = r \cdot F(t) \cdot \left(1 - \frac{F(t)}{K}\right) - \frac{a \cdot F(t) \cdot B(t)}{b + F(t)} - h \cdot F(t) \cdot R(t) :$

$ode2 := diff(B(t), t) = \frac{e \cdot a \cdot F(t) \cdot B(t)}{b + F(t)} - m \cdot B(t) - \frac{c \cdot B(t) \cdot R(t)}{d + B(t)} :$

$ode3 := diff(R(t), t) = \frac{f \cdot a \cdot F(t) \cdot B(t)}{b + F(t)} - g \cdot R(t) :$

```
inits := [F(0) = 0.7, B(0) = 0.1, R(0) = 0.2] :
myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE :
DEplot([ode1, ode2, ode3], [F, B, R], t = 0 ..300, [inits], scene = [t, F], linecolour = red, myopts);
DEplot([ode1, ode2, ode3], [F, B, R], t = 0 ..300, [inits], scene = [t, B], linecolour = blue, myopts);
DEplot([ode1, ode2, ode3], [F, B, R], t = 0 ..300, [inits], scene = [t, R], linecolour = green, myopts);
```

$\{B = 0, F = 0, R = 0\}$

$1, -0.4, -0.009$

$\{B = 0, F = 1, R = 0\}$

$-1, 0.6256410256, -0.009$

Kode Matlab

```
clc; clear all; close all;
global r K a b h m e c d g f
r=1; K=1; a=1; b=0.17; h=0.1; d=0.42;
m=0.4; c=0.4; f=0.1; g=0.009; e=1.2;
tn=400;
u0=[0.7;0.1;0.2];
[tsol,usol]=ode45(@rhs11,[0,tn],u0);
Fsol= usol(:,1); Bsol=usol(:,2); Rsol=usol(:,3);
figure(1);
subplot(3,1,1); plot(tsol,Fsol,'r','linewidth',2); grid on; xlabel('time(years)');
ylabel('F(t)');
subplot(3,1,2); plot(tsol,Bsol,'b','linewidth',2); grid on; xlabel('time(years)');
ylabel('B(t)');
subplot(3,1,3); plot(tsol,Rsol,'g','linewidth',2); grid on; xlabel('time(years)');
ylabel('R(t)');

function udot=rhs11(T,u)
global r K a b h m e c d g f
F=u(1); B=u(2); R=u(3);
Fdash = r*F*(1-F/K)-a*F*B/(b+F)-h*F*R;
Bdash = e*a*F*B/(b+F)-m*B-c*B*R/(d+B);
Rdash = f*a*F*B/(b+F)-g*R;
udot=[Fdash; Bdash; Rdash];
end
```