

ЛЕКЦИЯ 6

Пораждащи функции

ДЕФ: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ е целочислена случайна величина.

Тогава под пораждаща ф-я на X разбираме

$$g_X(s) := \mathbb{E} s^X = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X=n), \text{ за } s \in [-1, 1]$$

$$g_X: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

ТВЪРЖДЕНИЕ: Нека X е целочислена с пораждаща ф-я g_X .

Тогава: а) $\mathbb{E}X = g'_X(1)$

б) $DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

в) $k! \mathbb{P}(X=k) = g_X^{(k)}(0)$, $k \geq 0$

Д-во: а) $g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X=n)$ $g'_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot s^{n-1} \mathbb{P}(X=n)$

$$g'_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}X$$

б) $g'_X(s) = \frac{d}{ds} \mathbb{E} s^X = \mathbb{E} \frac{d}{ds} s^X = \mathbb{E} X s^{X-1}$

$$g''_X(s) = \mathbb{E} X(X-1) s^{X-2}$$

$$g''_X(1) = \mathbb{E} X(X-1) = \mathbb{E} X^2 - \mathbb{E}X$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X^2 = g''_X(1) + \mathbb{E}X = g''_X(1) + g'_X(1)$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$$