Лекция 6

Пораждащи функции

Деф: $X : \Omega \to \mathbb{N}$ е целочислена случайна величина.

Тогава под пораждаща ф-я на X разбираме

$$g_X(s) := \mathbb{E}\, s^X = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X = n) \quad , \text{за } s \in [-1, 1]$$

$$g_X : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

Твърдение: Нека X е целочислена с пораждаща ф-я g_X.

Тогава: а) $\mathbb{E}X = g_X'(1)$

б) $\mathbb{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$

в) $k!\,\mathbb{P}(X = k) = g_X^{(k)}(0) \quad , \quad k \geq 0$

Д-во: а) $g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X=n) \qquad g_X'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n . s^{n-1} \mathbb{P}(X = n)$

$$g_X'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n . \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}X$$

б) $g_X'(s) = \frac{d}{ds} \mathbb{E}\, s^X = \mathbb{E} \frac{d}{ds} s^X = \mathbb{E} X s^{X-1}$

$g_X''(s) = \mathbb{E}X(X-1)s^{X-2}$

$g_X''(1) = \mathbb{E}X(X-1) = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X$

$\Rightarrow \mathbb{E}X^2 = g_X''(1) + \mathbb{E}X = g_X''(1) + g_X'(1)$

$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$

в) $0!.\mathbb{P}(X=0) = g_X^{(0)}(0) = g_X(0) = \mathbb{P}(X=0)$

$1!\,\mathbb{P}(X=1) = g_X'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n.0^{n-1}\,\mathbb{P}(X=n) = 1.\mathbb{P}(X=1)$

$\vdots$

$k!.\mathbb{P}(X=k) = g_X^{(k)}(0)$

$\blacksquare$

<u>Следствие:</u> Нека X и Y са целочислени. Тогава

$$X \stackrel{d}{=} Y \iff g_X \equiv g_Y$$

Д-во: "$\Rightarrow$" Ако $X \stackrel{d}{=} Y$, то $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(Y=n)$, $\forall n \geq 0$

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n\,\mathbb{P}(Y=n) = g_Y(s)$$

"$\Leftarrow$" Ако $g_X \equiv g_Y \stackrel{в)}{\Rightarrow} \cancel{k!}\,\mathbb{P}(X=k) = g_X^{(k)}(0) = g_Y^{(k)}(0) = \cancel{k!}\,\mathbb{P}(Y=k)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k)$, $\forall k \geq 0$

<u>Деф:</u> Дискретните случайни величини $X_1, \dots, X_n$ или $(X_j)_{j=0}^{\infty}$ са независими в съвкупност (Лекция 4)

$\forall (j_1, \dots, j_n)$, $\forall n \geq 2$, $(X_{j_1}, \dots, X_{j_n})$ са независими в съвкупност

<u>Деф:</u> Дискретните случайни величини $X_1, \dots, X_n$ или $(X_j)_{j=0}^{\infty}$ имат еднакво разпределение, ако $X_i \stackrel{d}{=} X_j$, $1 \leq i, 1 \leq j$ или $X_i \stackrel{d}{=} X_j$ $1 \leq i, j < \infty$

Теорема: Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност целочислени случайни величини. Тогава ако $Y = X_1 + \dots + X_n$, то

$$g_Y(s) = \prod_{j=1}^{n} g_{X_j}(s)$$

Д-во: $\underline{n=2}$ $\quad Y = X_1 + X_2$

$$g_Y(s) = \mathbb{E}\, s^{X_1+X_2} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} s^{i+j}\, \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = i) =$$

$$\overset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} s^i . s^j\, \mathbb{P}(X_1 = j) . \mathbb{P}(X_2 = i) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} s^j . \mathbb{P}(X_1 = j) \sum_{i=0}^{\infty} s^i\, \mathbb{P}(X_2 = j) = g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s) \quad \blacksquare$$

Някои основни дискретни случайни величини

Схема на Бернули: имате редица от бинарни експерименти с два изхода $-\{0,1\}$. Тези експерименти са независими помежду си и са с еднакво разпределение.

т.е. $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ $\quad X_j = \begin{cases} 1 & p \rightarrow \text{вероятност за успех} \\ 0 & q \end{cases}, \quad \begin{matrix} p+q=1 \\ p \geq 0, q \geq 0 \end{matrix}$

А. Разпределение на Бернули. Това е изходът на един конкретен опит в схемата на Бернули. $X \sim Be(p)$, $p \in [0,1]$

X_1	0	1
$\mathbb{P}$	q	p

$\mathbb{E}X_1 = p \quad , \quad DX_1 = \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 = p - p^2 = p \cdot q$

$g_{X_1}(s) = q \cdot s^0 + p \cdot s^1 = q + ps$

Б.| Биномно разпределение. $X \sim Bi(n,p)$

X брои броя на успехите в първите n експеримента в схемата на Бернули с вероятност за успех $p = \mathbb{P}(X_1 = 1)$

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Твърдение: а) $g_X(s) = (q+ps)^n$

б) $\mathbb{E}X = np \quad , \quad DX = npq$

в) $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad 0 \le k \le n$

Д-во: а) $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \overset{\text{Тв}}{\Longrightarrow} g_X(s) = (g_{X_1}(s))^n = (q+ps)^n$

б) $\mathbb{E}X = g_X'(1) = np(q + p.1)^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np$

$DX \overset{\text{нез.}}{=} \sum_{j=1}^{n} DX_j = nDX_1 = npq$

също $DX = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$

в) $k! . \mathbb{P}(X=k) \overset{\text{тв.}}{=} g_X^{(k)}(0) = \left((q+ps)^n\right)^{(k)}\Big|_{s=0} =$

$= n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot p^k \cdot (q+ps)^{n-k}\Big|_{s=0} =$

$\Rightarrow \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \mathbb{P}(X=k)$

$\blacksquare$

В.| Геометрично разпределение. $X \sim Ge(p)$

X брои броят неуспехи до първи успех в схемата на Бернули.

$$X = \min\{n \geq 1 \mid \sum_{j=1}^{n} X_j = 1\} - 1$$

Твърдение: а) $g_X(s) = \dfrac{p}{1-qs}$

б) $\mathbb{E}X = \dfrac{q}{p}$, $DX = \dfrac{q}{p^2}$

в) $\mathbb{P}(X=k) = q^k \cdot p$, $k \geq 0$

Д-во: в) $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X_1=0, \ldots, X_{k-1}=0, X_k=0, X_{k+1}=1) =$

$$\overset{\text{нез.}}{=} \mathbb{P}(X_1=0).\mathbb{P}(X_2=0)\ldots\mathbb{P}(X_k=0).\mathbb{P}(X_{k+1}=1) = q^k \cdot p$$

а) $g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n . \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n . q^n . p = p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (sq)^n =$

$$= \frac{p}{1-q.s}$$

б) $g_X'(s) = \dfrac{pq}{(1-qs)^2}$ $\quad g_X''(s) = \dfrac{pq+2q}{(1-qs)^3} = \dfrac{2q^2p}{(1-qs)^3}$

$$\mathbb{E}X = g_X'(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$$

$$DX = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

Теорема: 'Безпаметност'

Нека $X \sim ge(p)$. Тогава за всеки $k, m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X \geq m+k \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq m)$$

Д-во:

$$\mathbb{P}(X \geq m+k \mid X \geq k) = \frac{\mathbb{P}(X \geq m+k \cap X \geq k)}{\mathbb{P}(X \geq k)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq m+k)}{\mathbb{P}(X \geq k)} = \frac{q^{m+k}}{q^k} = q^m$$

Г. Отрицателно биномно разпределение. $X \sim NB(r,p)$ $r \geq 1$

X брои броят неуспехи до r-ти успех в схемата на Бернули.

$$X = \min\{n \geq 1 : \sum_{j=0}^{n} X_j = r\} - r \qquad (NB(1,p) \sim ge(p))$$

$$X = \sum_{j=1}^{r} Y_j \qquad (Y_j)_{j=1}^{r} \text{ са независими в съвкупност}$$

$$Y_j \sim ge(p)$$

$$\underbrace{0\,00\,1}_{Y_1}\ \underbrace{00\,1}_{Y_2}\ \underbrace{0\,1}_{Y_3}\ \underbrace{1}_{Y_4}$$

Твърдение: а) $g_X(s) = \left(\dfrac{p}{1-qs}\right)^r$

б) $\mathbb{E}X = \dfrac{rq}{p}$, $DX = \dfrac{rq}{p^2}$

в) $\mathbb{P}(X=k) = \dbinom{r+k-1}{k} \cdot p^r \cdot q^k$

Д-во: б) $\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{j=1}^{r} Y_j = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{E}Y_j = r \cdot \frac{q}{p}$

$$DX = D\sum_{j=1}^{r} Y_j \overset{\text{нез.}}{=} \sum_{j=1}^{r} DY_j = r \cdot \frac{q}{p^2}$$

в) $k!\,\mathbb{P}(X=k) = g_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{ds^s} \frac{p^r}{(1-qs)^r} =$

$$= p^r r.(r+1)\ldots(r+k-1) q^k \cdot \frac{1}{(1-q.s)^{r+k}}\bigg|_{s=0} = (r+k-1)\ldots r.p^r.q^k$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{r+k-1}{k} \cdot p^r \cdot q^k$$

Д. Поасоново разпределение. $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$

Деф: $X \sim Poi(\lambda)$, ако $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Твърдение: $X \sim Poi(\lambda)$, то $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

и $\mathbb{E}X = DX = \lambda$

Д-во: $g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s}$

$g'_X(s) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s}$ $\quad g'_X(1) = \lambda = \mathbb{E}X$

$g''_X(s) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda s}$ $\quad g''_X(1) = \lambda^2$ $\quad DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Твърдение:

Нека $(X_n)_{n \geq 1}$ е редица от целочислени случайни величини, такава че $\lim\limits_{n\to\infty} g_{X_n}(s) = g_X(s)$, $-1 \leq s \leq 1$, където X е целочислена сл. вел. и g_X е нейната пораждаща ф-я.

Тогава $\forall k \geq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

<u>Теорема на Поасон:</u> Нека $X_n \sim Bin(n, p_n)$ $n \geq 1$. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Тогава $\forall k \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}}{\underset{\|}{\mathbb{P}(X_n = k)}} = \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ или } X \sim Poi(\lambda).$$

Пример: $X_n \sim Bin(n, \frac{1}{n})$, $\lambda = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

$$\mathbb{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{k!} e^{-1}, \text{ (вместо да смятаме } \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k})$$

Пример: $Y \sim Bin(n,p)$ $np = \lambda$, $np \leq 20$ и $n \geq 100$

$$\mathbb{P}(Y = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Д-во: Да допуснем, че $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Тогава

$$g_{X_n}(s) \overset{\text{бин.}}{=} (1 - p_n + p_n s)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} s\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda(1-s)}{n}\right)^n$$

$$g_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda(1-s)} = e^{\lambda(s-1)} \equiv g_X(s), \; X \sim Poi(\lambda)$$