Лекция 5

Деф: 1 'ф-я на разпределение'

Нека X е сл. вел. . Тогава ф-ята $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

се нарича ф-я на разпределение.

Пример:

1)

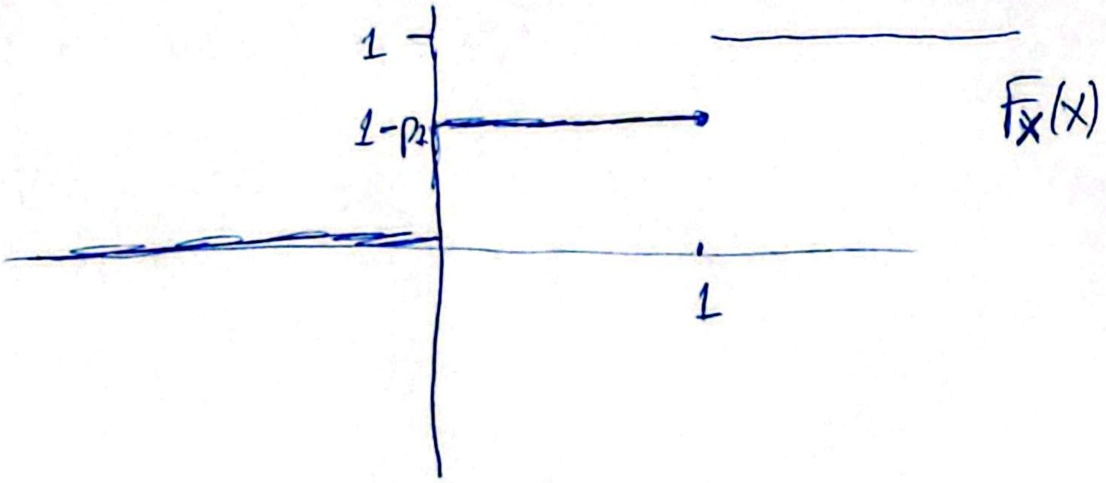
X	x_1	x_2	x_3	....
$\mathbb{P}$	p_1			

x_i са нарастващи

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ p_1 & x \in (x_1, x_2] \\ p_1 + p_2 & x \in (x_2, x_3] \\ \vdots & \end{cases}$$

2) $X = 1_H$

X	0	1
$\mathbb{P}$	$1 - p_1$	$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(X=1) = p_1$



Математическо очакване и дисперсия
expectation variance

<u>Деф:</u> 'очакване' Нека X е дискретна случайна величина.

Тогава под очакване на X (или $\mathbb{E}X$) разбираме.

$$\mathbb{E}X = \sum_j x_j \cdot p_j \quad \text{ако} \quad \sum_j |x_j| \cdot p_j < \infty$$

Коментар: Ако X приема краен брой ст-ти то

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot p_j < 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j .$$

Ако X приема безкраен брой ст-ти

$$\mathbb{P}(X=j) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{j^2}, \; j \geq 1 \quad \mathbb{E}X \doteq \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{1}{j^2} = \infty \quad \text{не} \; \nexists$$

Пример: X е равномерно на $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(X=j) = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \mathbb{E}X = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j$$

средноаритметично $$\mathbb{E}X = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j = \bar{X}$$

⊕ $f(a) = \sum_j (x_j - a)^2 p_j \xrightarrow{\min} a = \mathbb{E}X$

⊕ $\mathbb{E}$ има роля в ЗГЧ и ЦГТ.

Пример: Игра на рулетка

червено/черно

X	-1	1
$\mathbb{P}$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

точно число

X	-1	35
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$\mathbb{E}X = -1 \cdot \frac{19}{37} + 1 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{1}{37}$$

$$\mathbb{E}X = -\frac{36}{37} + \frac{35}{37} = -\frac{1}{37}$$

Коментари:

$$Y = g(X) \text{, то } \mathbb{E}Y = \mathbb{E}g(X) = \sum_j g(x_j) \cdot \underset{\mathbb{P}(X = x_j)}{p_j} = \sum_j y_j p_j$$

$$Z = g(X, Y) \qquad \mathbb{E}Z = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) \, \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Лема: Нека X и Y са две дискретни сл. в., такива че $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ съществуват. Тогава:

а) $X = c$, то $\mathbb{E}X = c$

б) $c \in \mathbb{R}$, то $\mathbb{E}cX = c\,\mathbb{E}X$

в) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ линейност

г) ако в допълнение $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Д-ва:

а) $X = c \qquad \mathbb{E}X = c \cdot \mathbb{P}(X = c) = c \cdot 1 = c$

б) $Z = cX = g(X)$, то $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}cX = \sum_j g(x_j)\cdot p_j = \sum_j c x_j p_j =$
$= c.\mathbb{E}X$

в) $Z = X + Y = g(X,Y)$ $\qquad \mathbb{E}Z = \mathbb{E}(X+Y) = \sum_{j,i} g(x_i,y_j)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) =$
$g(x,y) = x+y$
$$= \sum_{i,j}(x_i+y_j)\cdot\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) =$$
$$= \sum_{i,j} x_i \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) + \sum_{i,j} y_j \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) =$$
$$= \sum_i x_i \sum_j \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) + \sum_j y_i \sum_i \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) =$$
$$= \sum_i x_i \mathbb{P}(X=x_i) + \sum_j y_j \mathbb{P}(Y=y_j) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$$

г) $X \perp\!\!\!\perp Y$ $\quad \mathbb{E}XY = \mathbb{E}g(X,Y)$ $\quad g(x,y) = x\cdot y$

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}g(X,Y) = \sum_{i,j} g(x_i,y_j)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) =$$
$$= \sum_{i,j} x_i\cdot y_j \mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j) =$$
$$= \sum_i x_i \mathbb{P}(X=x_i)\sum_j y_j \mathbb{P}(Y=y_j) = \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

Пример:

Искаме да тестваме хора за ковид, но тестовете са по-малко. Затова събираме пробите заедно и тестваме с 1 тест. Ако е отрицателен - всички са здрави, ако не - тестваме поотделно.

$$X_n = \begin{cases} 1 & p^n \quad \text{- общ отрицателен} \\ n+1 & 1-p^n \end{cases}$$

$1 - p = 0,05$ заразени

$p = 0,95$ здрави

$$\frac{\mathbb{E}X_n}{n} = \frac{1}{n}\left(1.p^n + (n+1)(1-p^n)\right) = 1 + \frac{1}{n} + p^n$$

$$1 + \frac{1}{n} + p^n \xrightarrow[n\geq 1]{\min} \quad n = 5$$

$$\min_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}X_n}{n} = \frac{\mathbb{E}X_5}{5} = 0,43 \implies \mathbb{E}X_5 = 2,15$$

Следствие: Ако $X \geq 0$, то $\mathbb{E}X \geq 0$

Д-во: $\mathbb{E}X = \sum_j x_j p_j \geq 0$

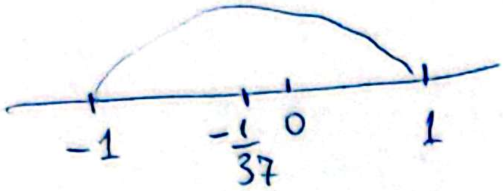
Дисперсия (variance)

Отново играта на рулетка:

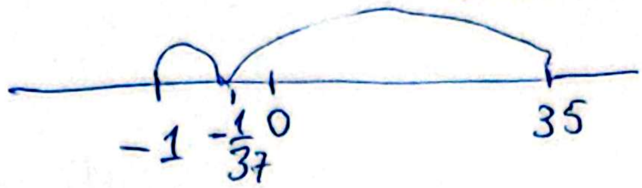
X	-1	1
$\mathbb{P}$	$19/37$	$\frac{18}{37}$

Y	-1	35
$\mathbb{P}$	$36/37$	$1/37$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = -\frac{1}{37}$$



волатилност



<u>Деф:</u> 'дисперсия' Нека X е дискр. сл. в. с очакване $\mathbb{E}X$.

Тогава $DX := \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$, стига $DX < \infty$,

наричаме дисперсия. $(DX = Var(X))$

Коментар: $DX = \min_{a \in \mathbb{R}} \sum_j (x_j - a)^2 p_j = \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j =$

$g(X) = (X - \mathbb{E}X)^2$

$= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$

Пример: $DX = \mathbb{E}\left(X + \frac{1}{37}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{37}\right)^2 \cdot \frac{18}{37} + \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \cdot \frac{17}{37} = 0{,}948\ldots$

$DY = \mathbb{E}\left(Y + \frac{1}{37}\right)^2 = \left(35 + \frac{1}{37}\right)^2 \cdot \frac{1}{37} + \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \cdot \frac{36}{37} = 34, \ldots$

Пример:

ДЪРПАНЕ НА ВЪЖЕ

N – хора

$X_1, \dots, X_N$

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{дясно} \\ -1 & \text{ляво} \end{cases}$$

$$Y_N = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

$$\mathbb{E}Y_N = \mathbb{E}\sum_{j=1}^{N} X_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}X_j = 0 \quad , \ \mathbb{E}X_j = 1.\tfrac{1}{2} - 1.\tfrac{1}{2} = 0$$

Обаче $\mathbb{P}(Y_N = 0) \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ $\quad DY_N = N DX_n = N$ - ще го видим

$\sqrt{DX}$ – стандартно отклонение

<u>Твърдение: 1</u> Ако X е дискр. сл. вел. с крайна дисперсия.
$(\mathbb{E}X < \infty$ и $DX < \infty)$, то $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Д-во:
$$DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2] =$$
$$= \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}(-2X\mathbb{E}X) + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X.\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 =$$
$$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

Следствие: Нека X е дискр. сл. вел. и $DX < \infty$.
Тогава $\mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}X)^2$

Д-во:
$$0 \leq DX = \mathbb{E}(\underbrace{X - \mathbb{E}X}_{Y})^2 = \mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

Твърдение: Нека X и Y са дискр. сл. вел., такива че $DX<\infty$ и $DY<\infty$

Тогава:

а) $X=c$, то $DX=0$

б) $Z=cX$, то $DZ=c^2DX$ $(c\in\mathbb{R})$

в) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $D(X+Y)=DX+DY$

Д-во: а) $X=c \Rightarrow \mathbb{E}X=c$. Тогава $DX=\mathbb{E}(X-c)^2=$

$$=1(c-c)^2=0$$

б) $DZ=\mathbb{E}(Z-\mathbb{E}Z)^2=\mathbb{E}(cX-c\mathbb{E}X)^2=c^2\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2=c^2DX$

в) $D(X+Y)=\mathbb{E}(X+Y)^2-(\mathbb{E}(X+Y))^2=\mathbb{E}[X^2+2XY+Y^2]-(\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y)^2=$

$=\mathbb{E}X^2+\cancel{2\mathbb{E}XY}+\mathbb{E}Y^2-(\mathbb{E}X)^2-(\mathbb{E}Y)^2-\cancel{2\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y}=$

$\overset{\text{нез.}}{=} DX+DY$

Коментар: В общност $\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n}X_j=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}X_j$,

Ако $X_1,\dots,X_n$ са независими в съвкупност, то

$$D\sum_{j=1}^{n}X_j=\sum_{j=1}^{n}DX_j$$