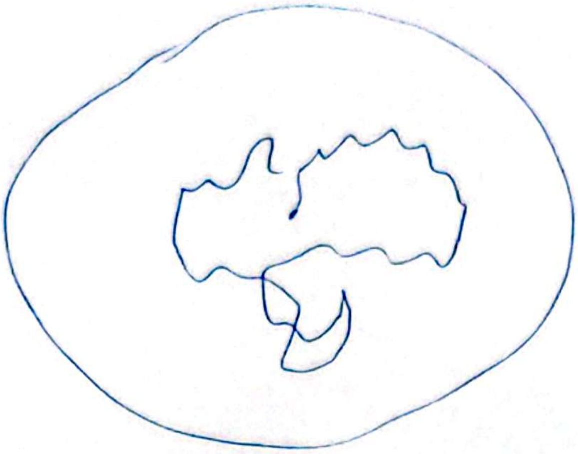
Лекция 1

Пример:

Робърт Браун, 1827г. Полен върху повърхност на вода:



1905г. - „Брауново движение" (от А. Айнщайн)

Пример:

На 06.09.2009г. се падат едни и същи числа на два последователни тиража на 6 от 49.

"Деф": Под случаен експеримент разбираме изследване/опит, чиито изход не е предопределен.

Изходите се наричат елементарни събития и се означават с w.

Деф: За даден случаен експеримент мн-вото от ел. събития се означава с Ω.

Примери:

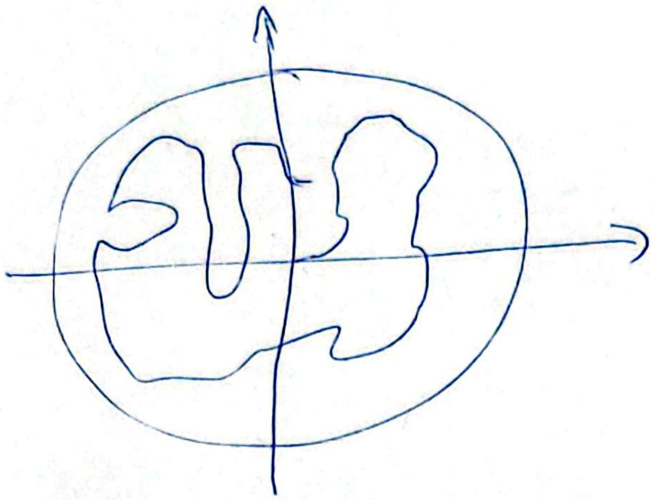
1) $\Omega = \{\text{'ези'}, \text{'тура'}\}$; $\Omega = \{0, 1\}$

2) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $w_5 = \{5\}$

3) $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ $N = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$;

4) $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ - време на работа на процесор

5) $\Omega = \{w$ - ф-ии $\mid w(0) = 0, w$ е непр. ф-я $\}$



6) $\Omega = \bigotimes_{i=1}^{10000} \Omega_i$
↳ всички шесторки

$w \in \Omega$ $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(10000)})$ $N^{10000} = |\Omega|$

"Деф": Нека Ω е мн-во от ел. събития и нека $A \subseteq \Omega$, тогава A се нарича събитие.

Пример: 1) $\Omega = \{$клиенти$\}$; $A = \{$мъже клиенти$\}$

2) $\Omega = \mathbb{R}_+$ $A = (a, b)$ $0 \le a \le b \le \infty$;

3) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $A = \{1,3,5\}$

4) $\Omega = \{w_1, \dots, w_N\}$ $\quad A = \{w_1\}$

Операции с множества (събития)

$A \subseteq B$ ако $w \in A \Rightarrow w \in B$

$A = B$ ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

"Деф": 'или' $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$, то $C = A \cup B$

Разбираме C, така че ако $w \in C$, то $w \in A$ <u>или</u> $w \in B$.

Пример: $A = \{$гласували за $X\}$, $B = \{$хора м/у 19-21 год.$\}$

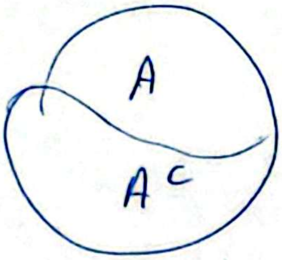
$A \cup B$

"Деф": 'и' $A, B \subseteq \Omega$, то $C = A \cap B$ е събитието, така че

$w \in C$, то $w \in A$ и $w \in B$. $\quad A \cap B = \left\{ \begin{matrix} \text{гласували за } X \\ \text{м/у } 19\text{-}21 \text{ год.} \end{matrix} \right\}$

"Деф": 'допълнение' $A \subseteq \Omega$, то $A^c = \Omega \setminus A$ или събитието

Ако $w \in A^c$, то $w \in A$.



$\Omega = A \cup A^c$

Пример: 1) $A^c = \{$жени клиенти$\}$

2) $A^c = \{2, 4, 6\}$

3) $A^c = \{$не гласували за $X\}$

Свойства:

1) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ комутативност

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ асоциативност

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ дистрибутивност

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) Ако $A_i, i \geq 1$ са събития то

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

закони на Де Морган

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

5) $(A^c)^c = A$

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{ w \in \Omega \mid w$ принадлежи на <u>някое</u> $A_i \}$

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{ w \in \Omega \mid w$ принадлежи на <u>всяко</u> $A_i \}$

Деф: (σ-алгебра) Нека Ω е мн-во от елементарни събития и $\mathcal{A}$ е колекция от подмножества на Ω. Тогава $\mathcal{A}$ се нарича σ-алгебра, ако:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A}$, то $A^c \in \mathcal{A}$
3) ако $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$
   - ако, A_i, $i \geq 1$, $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \geq 1$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Следствие: Нека $\mathcal{A}$ е σ-алгебра и $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \geq 1$. Тогава
$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Д-во:
$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \overset{?}{\in} \mathcal{A} \iff B^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c \overset{?}{\in} \mathcal{A}$$
$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \quad \text{Де Морган}$$

Ако $B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow B = (B^c)^c \in \mathcal{A}$ (2)

$$\Rightarrow \forall i \geq 1 \; A_i \in \mathcal{A} \overset{2)}{\Longrightarrow} \forall i \geq 1 \; A_i^c \in \mathcal{A} \overset{3)}{\Longrightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A} \overset{2)}{\Longrightarrow} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{A} \overset{Д.М.}{\Longrightarrow} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \quad \blacksquare$$

Примери:

1) $\Omega = \{0,1\}$ $\nearrow$ $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\searrow$ $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\} = 2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega)$

2) $\Omega = \{1, 2, \dots n\} \longrightarrow \mathcal{A} = 2^{\Omega}$ - мн-во от всички подмн-ва

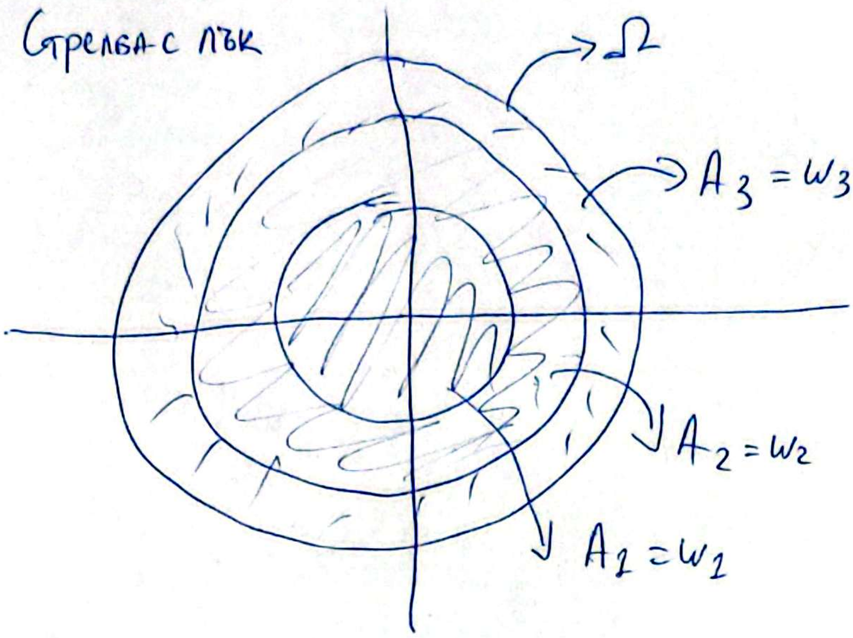
$|\mathcal{A}| = 2^n$

3) $\Omega = \{w_1, \dots, w_N\}$ $N = \binom{49}{6}$ $|2^{\Omega}| = 2^{13\,883\,816}$

4) $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$

$A = (a, b)$ (след. деф.)

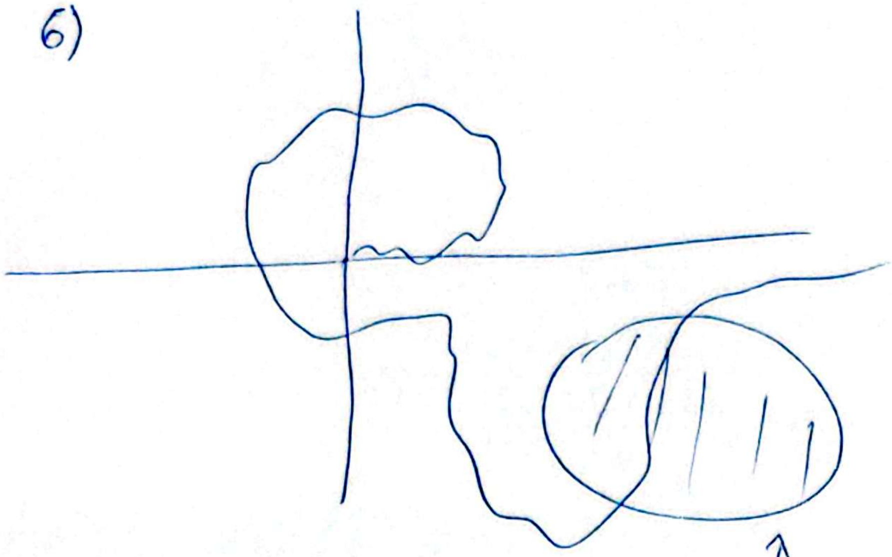
5) Стрелба с лък



$\Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega} =$

$= \{\emptyset, \Omega, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}\}$

6)



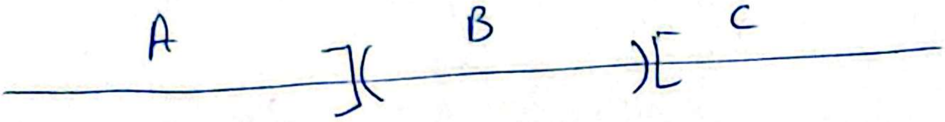
Минало ли е Брауновото движение през .

Деф: 1 Нека Ω е мн-во от ел. събития и $\mathcal{G}$ е колекция от подмн-ва. Тогава $\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap\limits_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}} \mathcal{A}$ е

най-малката σ-алгебра, съдържаща $\mathcal{G}$.

Пример: $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{I} = \{$всички интервали$\}$

$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ → Борелови σ-алгебри



$\{\emptyset, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$ $\quad \mathcal{G} = \{A, B, C\}$

Пример:

$\Omega = \{w_1, \dots, w_N\} \to$ едни тираж от 6 от 49

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

Нека допуснем, че до 06.09.2009г. е имало 10 001 тиража.

$\Omega_i = \{w_1, \dots, w_N\} \quad i = 1, \dots, 10\,001$

$$\Omega = \{(\underbrace{w^{(1)}, \dots, w^{(10\,001)}}_{\text{история на играта}}) \mid w^{(i)} \in \Omega_i\} = \underbrace{\bigotimes_{i=1}^{10\,001}}_{\text{тензорно произведение}} \Omega_i$$

$$A = \{\exists i \leq 10\,000 \mid w^{(i)} = w^{(i+1)}\} = \{w \in \Omega \mid \exists i \leq 10000 \mid w^{(i)} = w^{(i+1)}\}$$

$= \{$ в историята на играта е имало две последователни тегления с едни и същи числа $\} =$

$$= \bigcup_{i=1}^{10000} A_i \text{, където } A_i = \{w \in \Omega_i \mid w^{(i)} = w^{(i+1)}\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10000} A_i\right) \approx ?$$