Лекция 2

Деф: 'Вероятност', 'вероятностна ф-я'

Нека Ω е мн-во от ел. събития и $\mathcal{A}$ е σ-алгебра над Ω.

Тогава $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност ако:

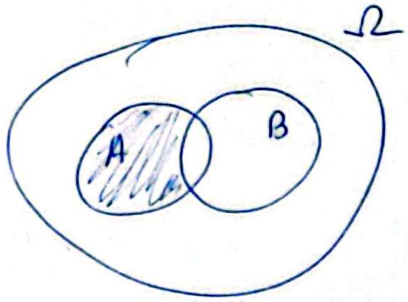
1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3) Ако $A_i, i \geq 1 \in \mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, то

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i\Big) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-адитивност})$$

Коментар: $A \setminus B = A \cap B^c$



Следствия: Нека $\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ е вероятност. Тогава:

а) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

б) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$

в) Ако $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (монотонност)

г) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

д) Ако $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots \supseteq A_n \ldots$ $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$

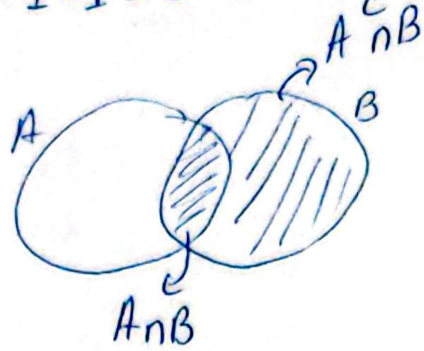
$$\lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j) = 0$$

е) Ако $A_j, j \geq 1$ са събития, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$

Доказателства:

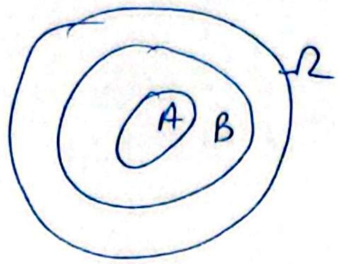
а) $\emptyset = \Omega^c \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$

б) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$

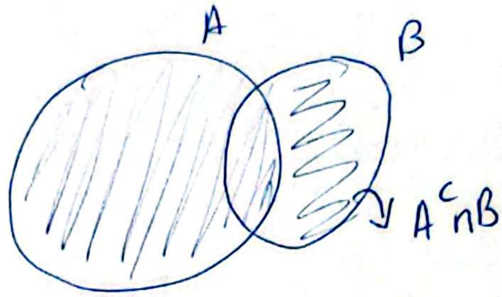


в) $A \subseteq B$

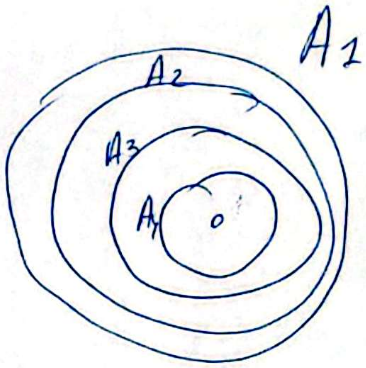
от б): $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \geq \mathbb{P}(A)$



г) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \overset{б)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

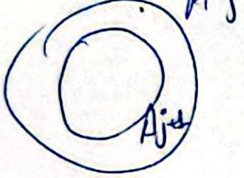


$A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$



д) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$

$\mathbb{P}(A_j)$



$A_j = A_j \setminus A_{j+1} \cup A_{j+1} = A_j \setminus A_{j+1} \cup A_{j+1} \setminus A_{j+2} \cup A_{j+2} = \ldots$

CamScanner

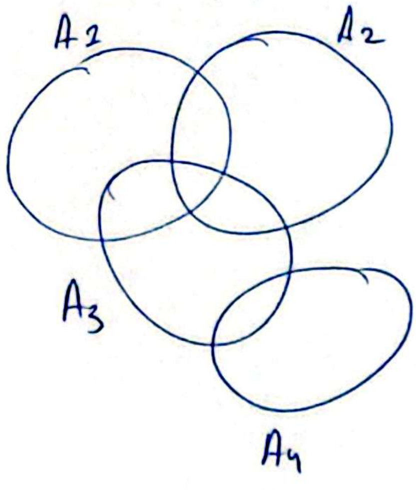
$$= \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n \setminus A_{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_j) = \sum_{n=j}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n+1}) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n+1}) \leq 1 \quad \rightarrow \text{сходящ}$$

Остатъчна сума на $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j \setminus B_{j+1})$ и следва че клони към 0.

е) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$ Е ЕКВИВ. НА 3)



$A_1 = C_1$

$A_2 \setminus A_1 = C_2 \quad \subseteq A_2$

$A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) = C_3 \quad \subseteq A_3$ → непресичащи се

$\vdots$

$A_n / (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) = C_n \quad \subseteq A_n$

$\mathbb{P}$ $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_j)$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

CS CamScanner

Пример: $\Omega = \{0,1\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\Omega, \emptyset, \{0\}, \{1\}\}$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = p \in [0,1]$$

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 1-p = q \in [0,1]$$

Дискретна вероятност

A) $\Omega = \{w_1, \dots, w_N\} = \{1, 2, \dots, N\}$

$(p_1, \dots, p_N)$ $\quad p_i \geq 0,\ i \in \{1 \dots N\},\ \sum_{j=1}^{N} p_j = 1;$

$A \subseteq \Omega$ $\quad \mathbb{P}(A) := \sum_{i \in A} p_i \quad A = \{1, 3, 5\}$

1) $\mathbb{P} : \mathcal{A} = 2^{\Omega} \to [0,1]$

2) $A \subseteq \Omega$, то A^c

$$\mathbb{P}(A^c) = \sum_{i \in A^c} p_i \overset{?\,8a}{=} 1 - \sum_{i \in A} p_i = 1 - \mathbb{P}(A)$$

3) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i \leq i, j \leq k$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i \in A_1 \cup \dots A_k} p_i \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)$$

CS CamScanner

$\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ $(p_1, \dots, p_N)$: $\sum_{i=1}^{N} p_i$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i \; ; \; \mathbb{P}(\{i\}) = p_i \; ; \; 1 \leq i \leq N$$

Равномерна вероятност е частният случай, при който

$$p_i = \frac{1}{N}, \quad 1 \leq i \leq N$$

$A \in 2^{\Omega} \Rightarrow \mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{N}$, Тази вер. ф-я наричаме равн. вероятност.

Пример:

1) $N = 13\,983\,816$; $P(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{13\,983\,816}$;

2) $\Omega = \{1, \dots, N\}$ равномерна вероятност

$A = \{$пада се четно$\}$; $A^c = B$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N}, \quad \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{N - |A|}{N}$$

$\Omega^* = \{0, 1\}$ $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ $p_i \geq 0$
$= \{1, 2, \dots$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

$$\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i \quad \forall A \subseteq \Omega$$

4) $p_i = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{i^2}$; $i \geq 1$ $\qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1;$

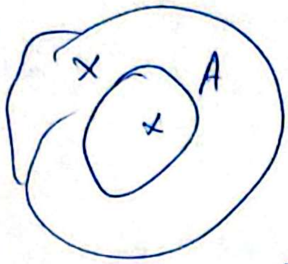
(Разпределение с тежки опашки) $\qquad \frac{6}{\pi^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}}_{= \frac{\pi^2}{6}} = 1$

5) $p_i = q \cdot p^i \qquad p \in (0,1) \qquad q = 1-p$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q p^i = \frac{q}{1-p} = 1$$ (геом. разпределение)

Б. Геометрична вероятност:

$Vol(\Omega) = |\Omega| = \int_{\Omega} dx$

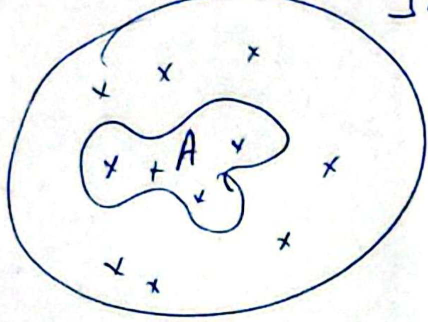


$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$ - обем $= P($да изберем точка от $A)$

$$\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{|\{x\}|}{|\Omega|} = \frac{0}{|\Omega|} = 0$$

Пример:



$\Omega \quad |\Omega| = 1$ $\qquad$ Хвърляме точки

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{1} = \frac{\text{броят точки в } A}{\text{всички}}$$

(Монте-Карло)

Деф: 'Вероятностно пространство'

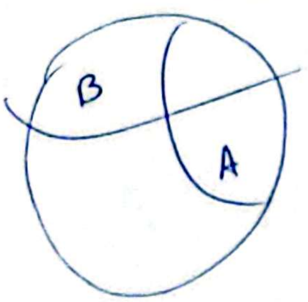
Нека Ω е мн-во от ел. събития. $\mathcal{A}$ е σ-алгебра и $\mathbb{P}$ е вероятностна ф-я. Тогава $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ наричаме вероятностно пространство.

Пример: $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ и $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{N}$; $1 \le i \le N$

Деф: 'Условна вероятност' Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство и $A \in \Omega$: $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогава под условна вероятност при настъпване на A разбираме $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (A, \mathcal{A} \cap A, \mathbb{P}_A)$$

Пример:

1) 

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} \rightarrow \frac{|A \cap B|}{|A|} = P(B|A)$$

2) Тото 6 от 49

$w_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$ $\quad B = \{w_1\}$ - вер. за печалба

$A = \{w \in \Omega : 1 \in w \text{ и } 2 \in w\}$ $\quad$ Знаем че съдържат 1 и 2.

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{\binom{47}{4}}{N}} = \frac{1}{\binom{47}{4}}$$