Лекция 4

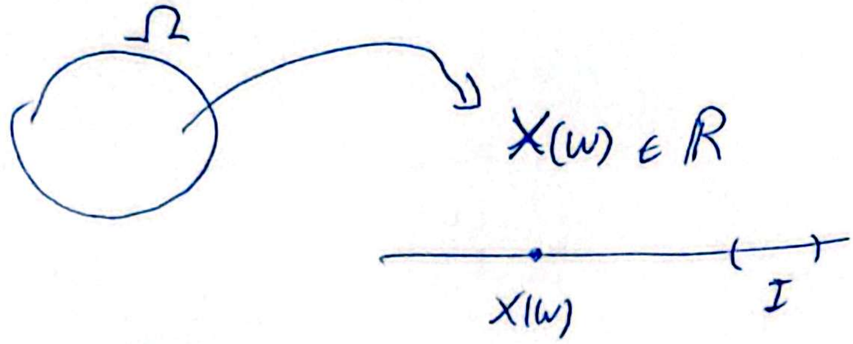
Случайни величини. Свойства.

$V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;

Ω може да е разнородно :

$w \in \Omega$ →
- клиенти
- хора
- молекули
- успех и неуспех
- функции
- шесторки

$X : \Omega \to \mathbb{R}$



$$X^{-1}(I) = \{ w \in \Omega \mid X(w) \in I \}$$

Пример:

$I = (a, b)$

$$X^{-1}(I) = \{ w \in \Omega \mid a < X(w) < b \} = \{ a < X < b \}$$

Деф: 'случайна величина'

V е вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина ако $\forall b \in \mathbb{R}$:

$$X^{-1}((-\infty, b)) = \{ w \in \Omega \mid X(w) < b \} = \{ X < b \} \in \mathcal{A}$$

$$\mathbb{P}(X<b) = \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty,b)))$$

СЛЕДСТВИЕ: Ако X е случайна величина. Тогава $\forall a<b$

$$X^{-1}((a,b)),\ X^{-1}([a,b)),\ X^{-1}((a,b]) \in \mathcal{A}$$

$$X^{-1}((b,\infty)) \in \mathcal{A}$$

Доказателство*:

$$X^{-1}((-\infty,c]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}\left(\left(-\infty, c+\frac{1}{n}\right)\right).$$

1. По деф. всеки $X^{-1}(-\infty, c+\frac{1}{n})$ (отворен) принадлежи на $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ е затворена относно сечение, следва $\bigcap_{n=1} X^{-1}((-\infty, c+\frac{1}{n})) \in \mathcal{A}$.
(изброимо)

Оттам $X^{-1}((-\infty,c]) \in \mathcal{A}$.

2. $[a,\infty) = \mathbb{R}\setminus(-\infty,a) \Rightarrow X^{-1}([a,\infty)) = \Omega \setminus X^{-1}((-\infty,a)) =$

$$= \left(X^{-1}((-\infty,a))\right)^{C} \in \mathcal{A}$$

Понеже $\mathcal{A}$ е затворена относно операцията $\setminus$. $(A\setminus B = A\cap B^{C})$

можем да конструираме всякакви интервали с 1. и 2.

$$(a,b) = (-\infty,b)\setminus(-\infty,a]$$
$$[a,b) = (-\infty,b)\setminus(-\infty,a)$$
$$(a,b] = (-\infty,b]\setminus(-\infty,a]$$
$$[a,b] = (-\infty,b]\setminus(-\infty,a)$$

$\blacksquare$

* Ще изпитва на А-тото за 6.

Теорема: Нека V е вероятностно пространство. Тогава ако X и Y са случайни величини във V, то:

а) $Z = cX$ е случайна величина $\forall c \in \mathbb{R}$

б) $X + Y$ е случайна величина във V

в) $X \cdot Y$ е сл. в.

г) $\frac{X}{Y}$ е сл. в., ако $\mathbb{P}(Y=0) = 0$

Доказателства:

а) 1сл.: $c<0$

$$\{cX < b\} = \{X > \frac{b}{c}\} = X^{-1}\left(\left(\frac{b}{c}, \infty\right)\right) \in \mathcal{U}$$

от следствието

2сл.: директно от деф.

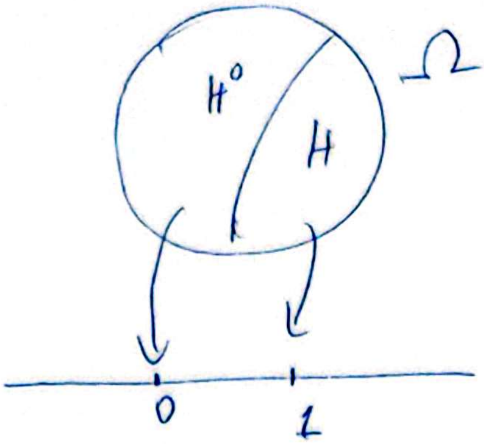
б) $Z = X + Y$

Дискретни случайни величини

Деф: | Ω, $H \subseteq \Omega$. Тогава

$$1_H : \Omega \to \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$1_H(w) = \begin{cases} 1 & w \in H \\ 0 & w \notin H \end{cases}$$



се нарича индикаторна ф-я на H.

Нека $A, B \subseteq \Omega$

Св-ва: 1) $1_{A\cap B} = 1_A . 1_B$

$1_{A\cap B}(w) = 1 \iff 1_A(w) = 1$ и $1_B(w) = 1$

2) $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$

3) $1_{A^c} = 1 - 1_A$

4) $1 - 1_{A\cup B} = 1_{(A\cup B)^c} = 1 - 1_A - 1_B + 1_A 1_B =$

$= (1 - 1_A)(1 - 1_B) = 1_{A^c} 1_{B^c} = 1_{A^c \cap B^c}$

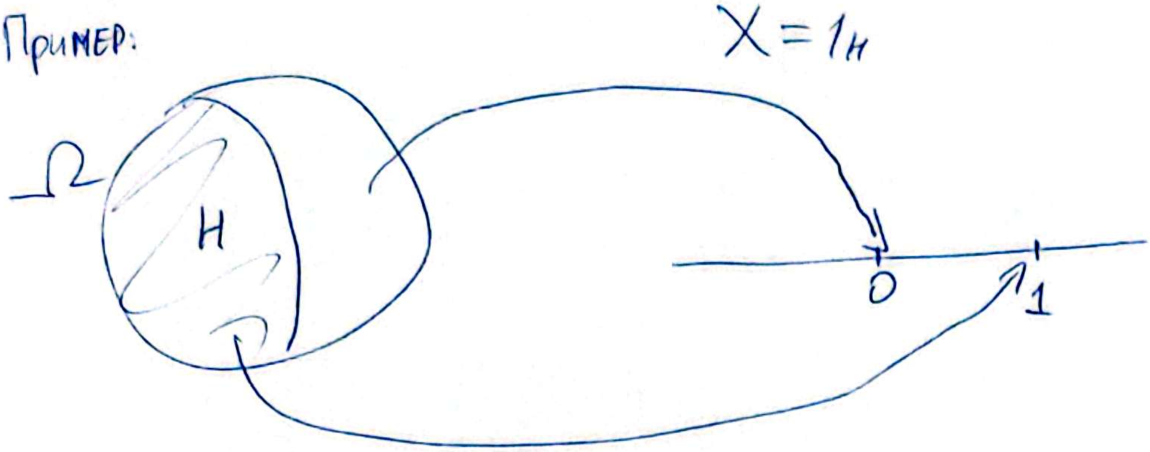
Твърдение: $H \subseteq \Omega$ и V, $H \in \mathcal{A}$. Тогава

$X = 1_H$ е случайна величина

Д-во:

$$\{X<b\} = \{1_H < b\} = \begin{cases} \emptyset & b\le 0 & \in \mathcal{A} \\ H^c & b\in(0,1] & \in\mathcal{A} \\ \Omega = H\cup H^c & b>1 & \in \mathcal{A}\end{cases}$$

Пример:



$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(H) = p$$

Второ пространство $H^* \subseteq \Omega^*$ от V^*, $X^* = 1_{H^*}$

$$p^* = \mathbb{P}(H^*) = \mathbb{P}(X^*=1) \qquad p = p^*$$

Означения:

V – вероятностно пространство $\quad \bar{X} = \begin{cases}(X_1,\dots,X_n)\\(X_1,X_2,\dots)\end{cases}$

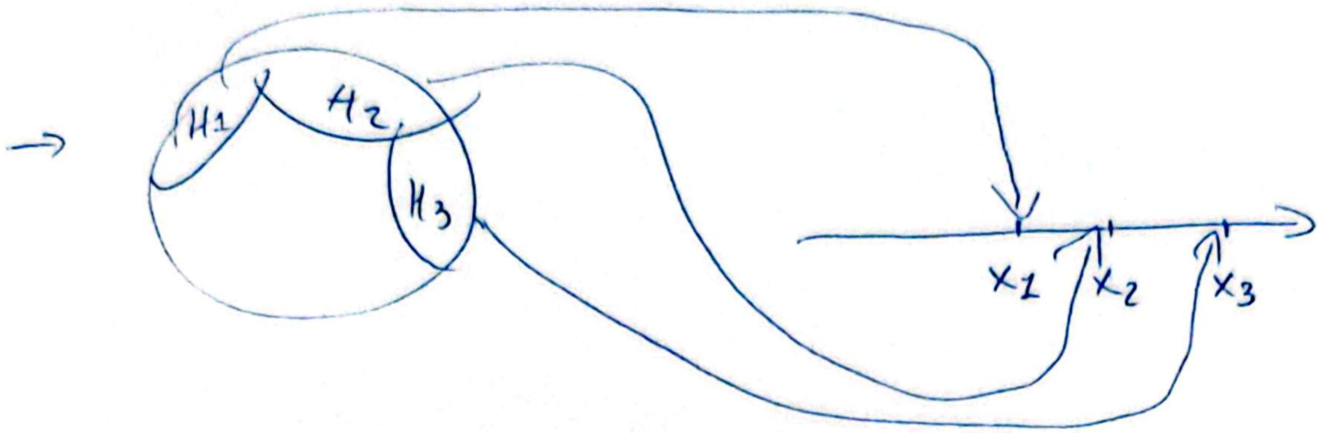
$$H = \begin{cases} H_1,\dots,H_n \\ H_1,H_2,\dots\end{cases}, \text{ където } \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} H_j = \Omega \text{ или } \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} H_j = \Omega \text{ и } H_j\in\mathcal{A}$$

$\boxed{\text{Деф:}}$ 'Дискретна случайна величина'

Нека V е в.п. и $\bar{x}$ и $\mathcal{H}$ са дадени.

Тогава $X(\omega)=\sum_{j=1}^{n} x_j . 1_{H_j}(\omega) \quad \left(X(\omega)=\sum_{j=1}^{\infty} x_j . 1_{H_j}(\omega) \right)$

се нарича дискретна случайна величина.



Всички $1_{H_j}(\omega)$ са нули с изключение на един.

Това е сл. вел., защото е линейна комбинация на сл. вел.

→ $H_j=\{X=x_j\}$, $\mathbb{P}(H_j)=\mathbb{P}(X=x_j)=p_j$

Числата в $\bar{x}$ са различни.

$$X=\sum_j x_j 1_{H_j}$$

$\boxed{\text{Деф:}}$ 'Разпределение на дискретна случайна величина'

Нека X е д.сл.в. $\left(X=\sum_j x_j \cdot 1_{H_j}\right)$. Тогава под <u>разпределение</u> на X разбираме таблицата:

$p_j=\mathbb{P}(X=x_j)=\mathbb{P}(H_j)$ и $p_j \geq 0$ и $\sum_j p_j=1$

X	x_1	x_2	....	x_n	....
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	....	p_n	....

— —

Деф: | 'Равенство по разпределение'

Нека X и Y са дискретни случайни величини. Тогава

$X \stackrel{d}{=} Y$ ако разпределени на X съвпада с това на Y.

$$\mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}(Y = x_j) = p_j \quad \forall j$$

Пример: 1) $X : \Omega \to \mathbb{N}_+ = \{0, 1, \dots\}$

$\{X = k\} = \{$CPU се разваля на ден $k\}$

$Y : \Omega \to \{0, 1, \dots, 4000\}$

X	0	1	2	....
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	

Y	0	1	2	....	4000
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2		$\sum_{j=4000}^{\infty} p_j$

2) Две честни монети X, Y $\qquad X \stackrel{d}{=} Y$

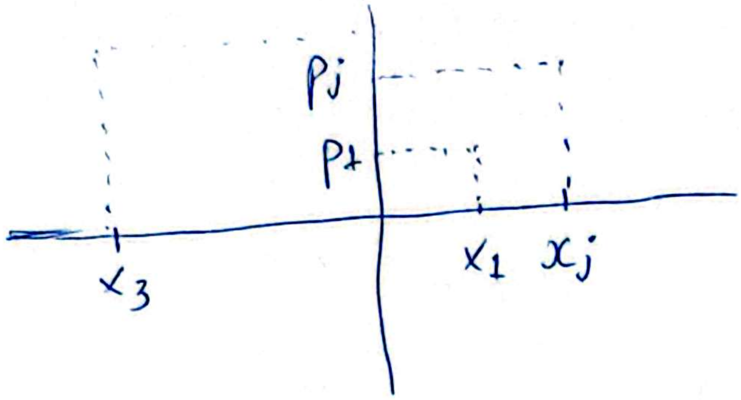
X	0	1
$\mathbb{P}$	1/2	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

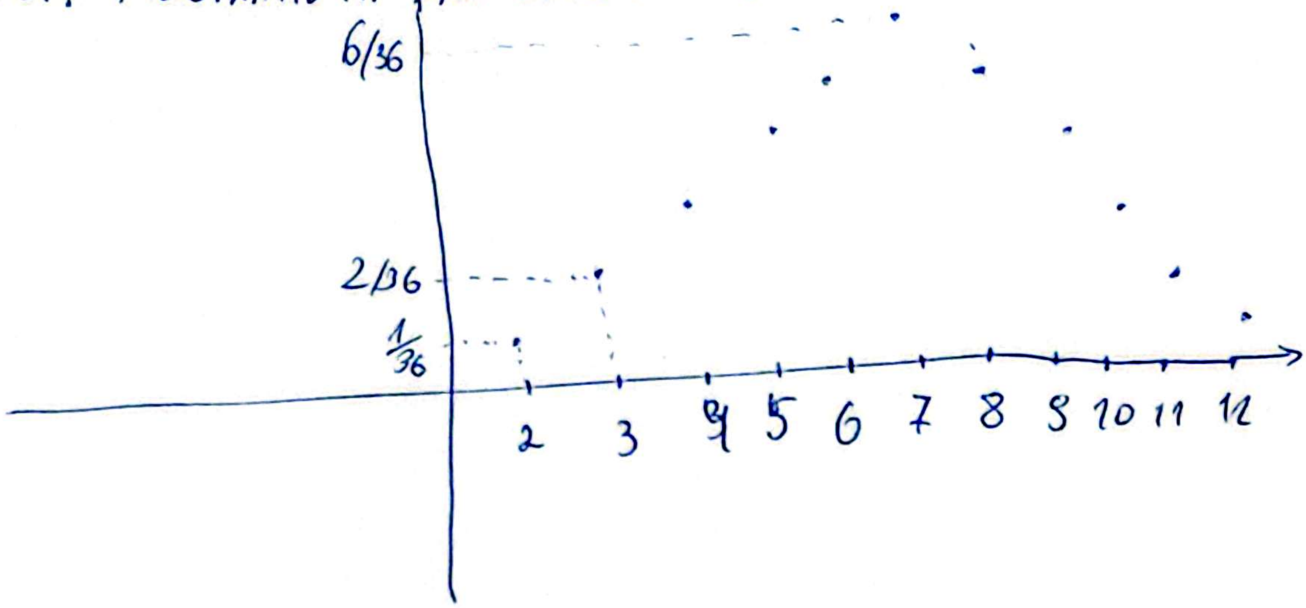
— —

Деф: 'Хистограма'

X	x_1	...	x_n	...
P	p_1	...	p_n	...



Пример: Хвърляне на два зара (сума):



Смяна на променливите на дискретна случайна величина

Твърдение:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и X е дискретна сл. в. . Тогава

$Y = g(X)$ е дискретна сл. в.

Д-во:

$$Y = \sum_j g(x_j) \cdot 1_{H_j} \quad \Big| \quad Y(\omega) = \sum_j g(x_j) \cdot 1_{H_j}(\omega)$$

$$y_j = g(x_j) \text{ , то } \mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{P}(X = g(x_j))$$

Пример:

X	0	1	2	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	$\dots$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(j) = 1 \qquad j \geq 1$

$g(0) = 0$

$Y = g(X)$	0	1
$\mathbb{P}$	p_0	$1 - p_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j$

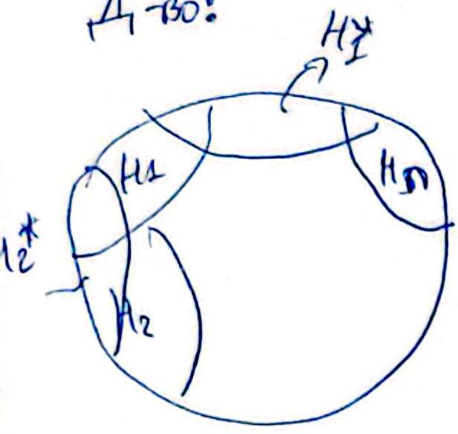
$$Y = 0 \cdot 1\underbrace{\{X=0\}}_{H_0} + 1 \cdot 1\underbrace{\{X \geq 1\}}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j}$$

Твърдение: X, Y са две дискретни случайни величини във V.

$g: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Z = g(X,Y)$ $\quad (g(X,Y) = X+Y)$

е дискр. сл. в.

Д-во:

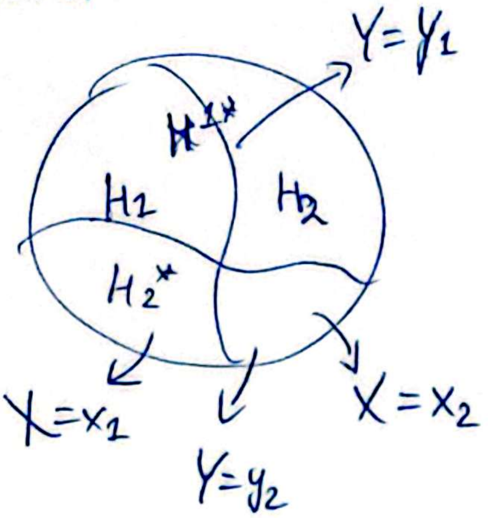


$$Z = g(X,Y) = \sum_{j,k} g(x_j, y_k) \cdot 1_{H_j} \cdot 1_{H_k^*} =$$

$$= \sum_{j,k} g(x_j, y_k) \cdot 1_{H_j \cap H_k^*}$$

$$= \sum_{\ell} z_\ell \cdot 1_{T_\ell}$$

Пример:



$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} g(x_j, y_k) \cdot 1_{H_j \cap H_k^*} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{4} z_\ell \cdot 1_{T_\ell}$$

Независимост на дискретни случайни величини

Деф: 'независимост на д.сл.в.'

Нека X и Y са две д.сл.в. във V. Тогава

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall x_i \forall y_j \quad \mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j) = \mathbb{P}(X=x_i).\mathbb{P}(Y=y_j)$$

Деф: 'независимост в съвкупност'

Нека $X_1, \ldots, X_n$ са д.сл.в. във V. Тогава

те са независими в съвкупност $\iff \forall M \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, $|M| \geq 2$ и нека $M = \{j_1, \ldots, j_m\}$ $m=|M|$

и възможни ст-ти

$(x_{j_1,1}, x_{j_2,2}, \ldots, x_{j_m,m})$

$$\mathbb{P}(X_{j_1}=x_{j_1,1} \cap \ldots \cap X_{j_m}=x_{j_m,m}) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_{j_i}=x_{j_i,i})$$