Лекция 3

Пример: Условна вероятност

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad i \in \{1,\dots,6\}$$

Ако имаме допълнителна информация, че се е паднало нечетно: $A = \{1,3,5\}$

$$\mathbb{P}(\{i\}|A) = \begin{cases} \frac{1}{3} & i \text{ е нечетно} \\ 0 & i \text{ е четно} \end{cases} = \frac{\mathbb{P}(\{i\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Пример:

	дъжд	слънце
дъжд	p_1	$1-p_1$
слънце	$1-p_2$	p_2

днес $\Omega_1 = \{\text{дъжд}, \text{слънце}\} = \{0,1\}$

утре $\Omega_2 = \{0,1\}$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$p_1 = \mathbb{P}\big((0,0) \mid (0,0) \cup (0,1)\big)$$

$$p_2 = \mathbb{P}\big((1,1) \mid (1,0) \cup (1,1)\big)$$

Пример: <u>Избори</u>

		млади
Партия 1	N_1	m_1
Партия 2	N_2	m_2

$A_1 = \{\text{гласувал за партия 1}\}$

$M_1 = \{\text{млад, гласувал за 1}\}$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{N_1}{N_1+N_2}$$

$M = \{\text{пада се млад}\}$ $\quad M_1 = A_1 \cap M$

$$\mathbb{P}(M_1) = \frac{m_1}{N_1+N_2}$$

$$\mathbb{P}(M_1|M) = \frac{\mathbb{P}(M_1 \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\frac{m_1}{N_1+N_2}}{\frac{m_1+m_2}{N_1+N_2}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

<u>Деф:</u> 'независимост' Нека A и B са две събития в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,

т.е $A, B \in \mathcal{A}$. Тогава A и B са независими $(A \perp\!\!\!\perp B)$,

Ако $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

Пример: 1) $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$, защото $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$

2) $\mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B) \quad (A \perp\!\!\!\perp B)$

<u>Деф:</u> 'независимост в съвкупност'

Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са събития. Тогава $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими в съвкупност ако за

$$\forall \; M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \text{ и } |M| \geq 2 :$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in M} A_i\right) = \prod_{i \in M} \mathbb{P}(A_i)$$

Пример: $n = 3$

$M_1 = \{1,2\} \quad M_2 = \{1,3\} \quad M_3 = \{2,3\} \quad M_4 = \{1,2,3\}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2)$, $\quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \prod_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)$

Пример за тотото:

$A = \{$ паднали са се 2 последователни еднакви тиража от 10 001 тиража на 6 от 49 $\} =$

$$= \bigcup_{i=1}^{10000} A_i \quad , \quad A_i = \{ w^{(i)} = w^{(i+1)} \}$$

$$A_i^c = \{ w^{(i)} \neq w^{(i+1)} \}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10000} A_i \right)$$

. Ако знаете, че A_i са независими в съвкупност, то и A_i^c са нез. в съвк.

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{10000} A_i \right)^c \right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10000} A_i^c \right) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{10000} \mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \left(\mathbb{P}(A_1^c) \right)^{10000} =$$

$$= 1 - \left(1 - \mathbb{P}(A_1) \right)^{10000} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}} \right)^{10000} \approx \frac{1}{1400}$$

<u>Теорема:</u> Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са събития в $\mathcal{A}$. Нека $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j \right) > 0$.

Тогава $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j \right) = \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j \right) \cdot \mathbb{P}\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{j=1}^{n-2} A_j \right) \cdot \dots \cdot$

$\dots \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)$

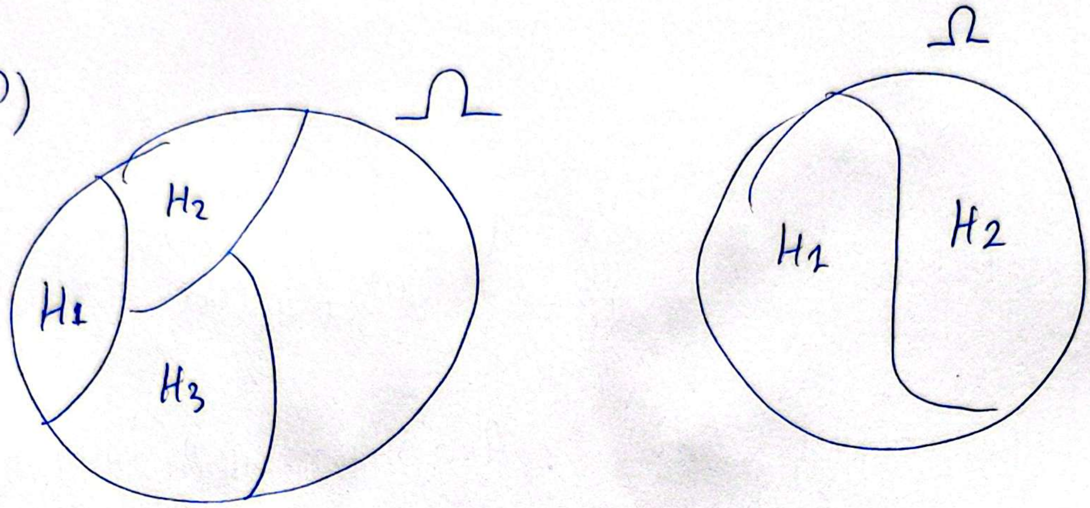
Д-во: по индукция. База $n=1$: $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$

Допускаме, че е вярно за $n=k$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \right) \overset{\text{усл. вер.}}{=} \mathbb{P}\left(A_{k+1} \middle| \bigcap_{j=1}^{k} A_j \right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j \right) \text{ от ИП } \checkmark$$

Формула на Бейс. Формула за пълната вероятност.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$



Деф: 'пълна група от събития'

Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство.
Тогава $H_1, \dots, H_n$ $(H_1, H_2, \dots)$ образуват пълна група от събития ако:

1) $H_i \in \mathcal{A}$, $i \leq n$ $\quad (H_i \in \mathcal{A}, i \geq 1)$

2) $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} H_i = \Omega \quad \left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega\right)$

$\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow A_i$ са непресичащи се

Теорема: 'пълна вероятност' Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вер. пр-во. Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ $(H_1, H_2, \dots)$ е пълна група от събития. Нека $A \in \mathcal{A}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) . \mathbb{P}(A | H_j)$$

Ползваме конвенцията, че ако $\mathbb{P}(H_i)=0$, то $\mathbb{P}(A|H_i)=0$.

Д-во:

$$A = A\cap\Omega = A\cap \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} H_i = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A\cap H_i$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap H_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(H_i)\cdot\mathbb{P}(A|H_i)$$

Непресичащи са

ф-ла за условна вероятност

$\blacksquare$

Пример:

$A=\{\text{смърт}\}$ $\qquad H_i=\{\text{болест } i\}$

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(H_i)\cdot\mathbb{P}(A|H_i) \longrightarrow \text{вероятност за смърт при болест } i$$

честота на болестта

Теорема на Бейс:

Имаме $H_1,\dots,H_n$ $(H_1,H_2,\dots)$, които са пълна група от събития в $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Нека $A\in\mathcal{A}$ и $\mathbb{P}(A)>0$. Тогава

$$\mathbb{P}(H_k|A)=\frac{\mathbb{P}(A|H_k)\cdot\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)}=$$

$$=\frac{\mathbb{P}(A|H_k)\cdot\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(H_i)\cdot\mathbb{P}(A|H_i)}$$

Д-во:

$$\mathbb{P}(H_k|A) \overset{\text{деф.}}{=} \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_k).\mathbb{P}(A|H_k)}{\mathbb{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H_k).\mathbb{P}(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i).\mathbb{P}(A|H_i)}$$

Забележка: H_k, H_e

$$\frac{\mathbb{P}(H_k|A)}{\mathbb{P}(H_e|A)} = \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_e)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A|H_k)}{\mathbb{P}(A|H_e)}$$

Пример: Идва човек с монета и ни казва, че е честна. $(\mathbb{P}(\{\text{ези}\}) = \frac{1}{2})$

$H_1 = \{$монетата е честна$\}$

$H_2 = \{$монетата е нечестна, а $\mathbb{P}(\{\text{ези}\}) = \frac{1}{3}\}$

$\mathbb{P}(H_1) = 0{,}99$; $\mathbb{P}(H_2) = 0{,}01$ $\qquad \frac{\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(H_2)} = 99$

$D = \{$30 пъти ези при 100 хвърляния$\}$

$$\frac{\mathbb{P}(H_1|D)}{\mathbb{P}(H_2|D)} = \frac{\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(H_2)} \cdot \frac{\mathbb{P}(D|H_1)}{\mathbb{P}(D|H_2)} = \frac{99.\binom{100}{30}.\left(\frac{1}{2}\right)^{30}.\left(\frac{1}{2}\right)^{70}}{\binom{100}{30}\left(\frac{1}{3}\right)^{30}.\left(\frac{2}{3}\right)^{70}}$$

$\approx 0{,}0356 \qquad \mathbb{P}(H_1|D) + \mathbb{P}(H_2|D) = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_2|D) = \frac{1}{1{,}0356} \approx 1$$

Пример:

Тест на летище, който идентифицира заразени/здрави хора.

I с вероятност 0,99

H с вероятност 0,80

B – включва се алармата

Болните в популацията са 0,01.

Каква е вероятността ако звъни алармата, човекът да е болен?

$$\mathbb{P}(I|B) = \frac{\mathbb{P}(I).\mathbb{P}(B|I)}{\mathbb{P}(I).\mathbb{P}(B|I) + \mathbb{P}(H).\mathbb{P}(B|H)} =$$

$$= \cancel{0,99.}\ \frac{0,01.0,99}{0,01.0,99 + 0,99.0,2} = \frac{1}{21}$$