

# Лекция 7

Е. | ХИПЕРГЕОМЕТРИЧНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ  $X \sim Hg(N, M, n)$

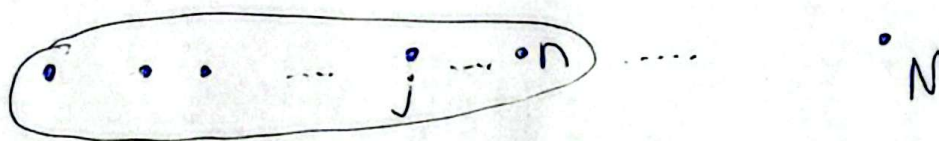
ИМАМЕ  $N$  ЕЛЕМЕНТА, ОТ КОИТО  $M$  СА МАРКИРАНИ. ПРАВИМ ИЗВАДКА С РАЗМЕР  $n$  ОТ ТЯХ.  $X$  ИЗБРОЯВА БРОЯ МАРКИРАНИ В ТАЗИ ИЗВАДКА.

ТВЪРЖДЕНИЕ:

$$a) P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$b) EX = n \cdot \frac{M}{N}, \quad DX = \frac{n \cdot M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Д-во: б)



$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{АКО НА } j\text{-ТА ПОЗИЦИЯ ИМА МАРКИРАН} \\ 0 & \text{АКО НА } j\text{-ТА ПОЗИЦИЯ НЕ Е МАРКИРАН} \end{cases}$$

$$X = \sum_{j=1}^n X_j \Rightarrow EX = \sum_{j=1}^n EX_j$$

$$X_j \sim \text{Ber}(p_j) \Rightarrow EX = \sum_{j=1}^n p_j$$

$$p_j = \frac{\binom{N-1}{M-1}}{\binom{N}{M}} = \frac{M}{N} = P(X_j=1)$$

$$\Rightarrow EX = \sum_{j=1}^n p_j = n \cdot \frac{M}{N}$$

# СЪВМЕСТНИ ДИСКРЕТНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

ДЕФ: Нека  $X$  и  $Y$  са две дискретни случайни величини в едно вероятностно пространство. Тогава под съвместно разпределение на  $X$  и  $Y$  разбираме таблицата:

$Y \backslash X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$Y \downarrow$
$y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$	$\dots$	$p_{n1}$	$\sum_i p_{i1}$
$y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{n2}$	$\sum_i p_{i2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\sum_i \dots$
$y_k$	$p_{1k}$	$p_{2k}$	$\dots$	$p_{nk}$	$\sum_i p_{ik}$
$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
$y_n$	$p_{1n}$	$p_{2n}$	$\dots$	$p_{nn}$	$\sum_i p_{in}$
$X \rightarrow$	$\sum_j p_{1j}$	$\sum_j p_{2j}$	$\dots$	$\sum_j p_{nj}$	$\uparrow$ МАРГИНАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

$$p_{ij} = P(X=x_i \cap Y=y_j) = P(X=x_i ; Y=y_j)$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Пример:

$X$  - брой 6-ци при хвърляне на 2 зара

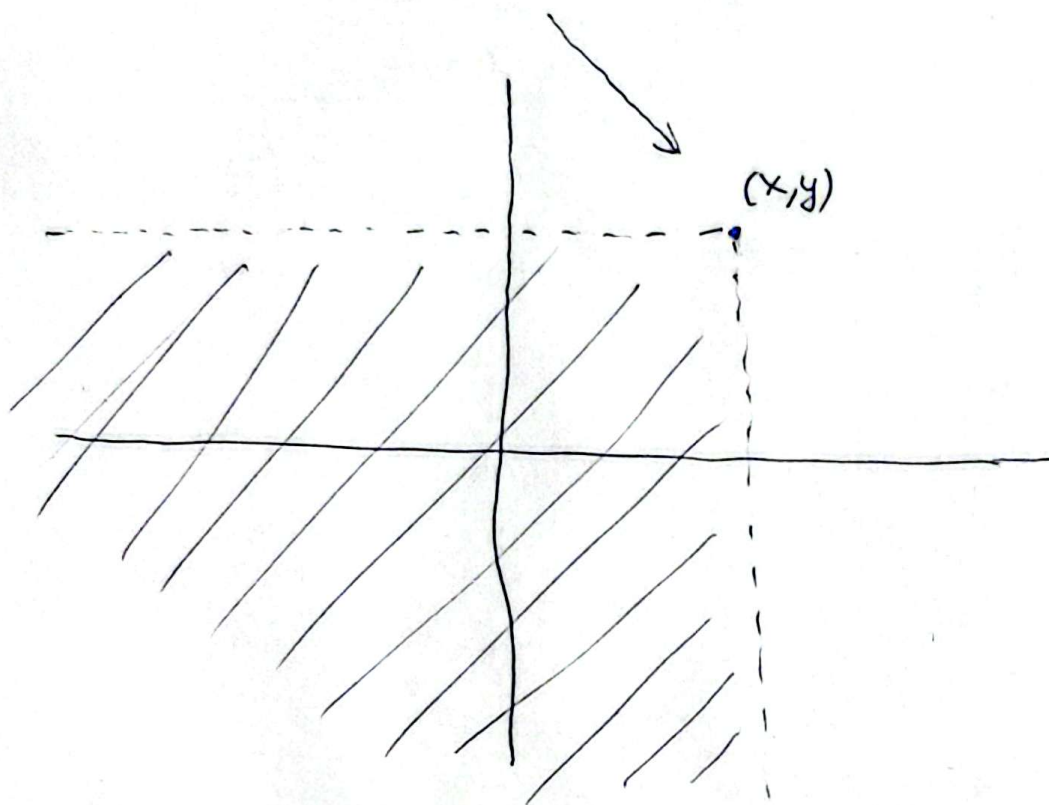
$Y$  - брой 1-ци при хвърляне на 2 зара

$Y \backslash X$	0	1	2	$Y$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$X$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	

## СЪВМЕСТНИ ФУНКЦИИ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

ДЕФ: НЕКА  $X$  И  $Y$  СА ДВЕ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ. ТОГАВА СЪВМЕСТНА ФУНКЦИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА  $X$  И  $Y$  Е

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x; Y \leq y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$



$$F_{X,Y}(x, \infty) = P(X \leq x; Y \leq \infty) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y)$$

$$F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$$

$$F_{X,Y}(-\infty, y) = 0 = F_{X,Y}(x, -\infty)$$

ДЕФ: 'НЕЗАВИСИМОСТ'

ДВЕ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ  $X, Y$  ВЪВ  $V$  СА НЕЗАВИСИМИ АКО

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X < x) \cdot P(Y < y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$\downarrow$$
$$P(X < x; Y < y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

## КОВАРИАЦИЯ И КОРЕЛАЦИЯ

ДЕФ: 'КОВАРИАЦИЯ'

НЕКА  $X$  И  $Y$  СА ДВЕ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ. ТОГАВА

$$\text{Cov}(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] \text{ СЕ}$$

НАРИЧА КОВАРИАЦИЯ

ПРИМЕР: ЗА 2 ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

$$\text{Cov}(X,Y) = \sum_{i,j} p_{ij} (x_i - EX)(y_j - EY)$$

ТВЪРАЕНИЕ:  $\text{Cov}(X,Y) = EXY - EX \cdot EY$

$$\begin{aligned} \text{Д-ВО: } E[(X - EX)(Y - EY)] &= E[XY - XEY - YEY + EX \cdot EY] = \\ &= EXY - E[X \cdot EY] - E[YEX] + E[EX \cdot EY] = \\ &= EXY - EY \cdot EX - \cancel{EX \cdot EY} + \cancel{EX \cdot EY} \quad \square \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ:  $\text{Cov}(aX, bY) = E aX bY - E aX \cdot E bY = ab(EXY - EX \cdot EY) = ab \cdot \text{Cov}(X,Y)$

ТВЪРАЕНИЕ: Ако  $X \perp Y$ , то  $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Д-во:  $\text{Cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY \stackrel{X \perp Y}{=} EXEY - EX \cdot EY = 0$

ДЕФ: 'КОРЕЛАЦИЯ'

НЕКА  $X$  и  $Y$  СА СЛ. БЕЛ. С  $DX < \infty$  и  $DY < \infty$ .

ТОГАВА  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$  СЕ НАРИЧА КОРЕЛАЦИЯ.

ТВЪРАЕНИЕ: НЕКА  $X$  и  $Y$  СА СЛ. БЕЛ. ТАКИВА, ЧЕ  $DX < \infty$  и  $DY < \infty$ .

НЕКА  $\bar{X} = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$  и  $\bar{Y} = \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}$ . ТОГАВА  $E\bar{X} = E\bar{Y} = 0$   
и  $D\bar{X} = D\bar{Y} = 1$

и  $\rho(X, Y) = E\bar{X} \cdot \bar{Y}$

Д-во:  $E\bar{X} = E \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} = \frac{1}{\sqrt{DX}} \cdot E(X - EX) = 0$

$D\bar{X} = D \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} = \frac{1}{DX} \cdot D(X - EX) = \frac{DX}{DX} = 1$ , ЗАЩОТО

$D(X - c) = DX$

$\rho(X, Y) = \frac{E(X - EX)(Y - EY)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = E \left( \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \cdot \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}} \right) =$

$= E\bar{X} \bar{Y}$

ТЕОРЕМА:)  $X$  и  $Y$  са сл. вел с  $DX < \infty$  и  $DY < \infty$ . ТОГОВА:

$$a) |g(X, Y)| \leq 1$$

$$b) |g(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b \text{ за някои } a, b \in \mathbb{R}$$

Д-во:

$$\begin{aligned} a) 0 \leq E(\bar{X} \pm \bar{Y})^2 &= E(\bar{X}^2 \pm 2\bar{X}\bar{Y} + \bar{Y}^2) = \\ &= E\bar{X}^2 \pm 2E\bar{X}\bar{Y} + E\bar{Y}^2 \stackrel{\text{Тб.}}{=} DX \pm 2g(X, Y) + DY = \\ &= 2 \pm 2g(X, Y) \Rightarrow 1 \pm g(X, Y) \geq 0 \quad \square \end{aligned}$$

$$b) " \Leftarrow " \quad Y = aX + b \Rightarrow \begin{aligned} EY &= aEX + b \\ DY &= a^2 DX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= \frac{EXY - EX \cdot EY}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{EX(aX+b) - EX \cdot E(aX+b)}{\sqrt{DX} |a| \sqrt{DX}} = \\ &= \frac{aEX^2 + bEX - a(EX)^2 - bEX}{DX |a|} = \frac{a(EX^2 - (EX)^2)}{|a| DX} = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} " \Rightarrow " \quad |g(X, Y)| = 1 \quad \text{1 сл.)} \quad \text{НЕКА} \quad g(X, Y) = 1 \\ E(\bar{X} - \bar{Y})^2 = E\bar{X}^2 - 2E\bar{X}\bar{Y} + E\bar{Y}^2 = 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$E(\bar{X} - \bar{Y})^2 = 0 = \sum_{i,j} p_{ij} (\bar{x}_i - \bar{y}_j)^2 \Rightarrow \bar{X} = \bar{Y}$$

$$\bar{Y} = \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}} = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \Rightarrow Y - EY = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \cdot \sqrt{DY} = \frac{EX \sqrt{DY}}{\sqrt{DX}}$$

$$\Rightarrow Y = X \cdot \frac{\sqrt{DY}}{\sqrt{DX}} - EX \cdot \frac{\sqrt{DY}}{\sqrt{DX}} + EY \quad \square$$

2 сл.) Аналогично

$$Y = aX + b$$

