Лекция 10

Видове сходимост

Нека $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ са случайни величини във $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и нека X е случайна величина във V.

$$L_X = \{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\} = \{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}$$

<u>Деф:</u> 'сходимост почти сигурно'

Казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} X$ ако $\mathbb{P}(L_X) = 1$

$$A_{n,\varepsilon} = \{w \in \Omega : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

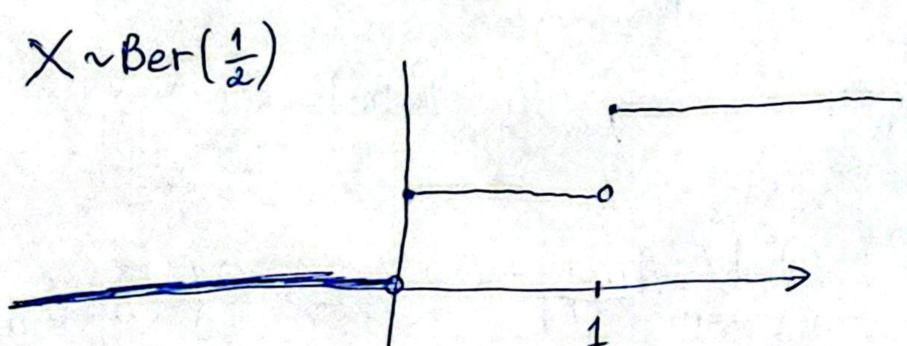
<u>Деф:</u> 'сходимост по вероятност'

Казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$ ако $\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) = 0$

Нека F_X е ф-я на разпределение, тогава

$$C_{F_X} = \{x \in \mathbb{R} : F_X \text{ е непрекъсната в } x\}.$$

Пример: $X \sim Ber(\frac{1}{2})$



$C_{F_X} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Деф: 'сходимост по разпределение'

Нека X_n е сл. вел. в $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ и X е сл. вел. в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Тогава $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ ако за всяко $x \in C_{F_X}$ е вярно, че

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) .$$

$$\oplus \qquad \mathbb{P}(X_n < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X < x)$$

Теорема:

а) Ако $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.с} X$, то $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$.

б) Ако $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$, то $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Д-во: а)

$$L_X = \left\{ \lim_{n\to\infty} X_n = X \right\} \quad \text{знаем, че } \mathbb{P}(L_X) = 1$$

$$L_X = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A^c_{k,\frac{1}{r}} , \quad A^c_{k,\frac{1}{r}} = \left\{ |X_k - X| \le \frac{1}{r} \right\}$$

Тълкуване — $\forall r \ge 1 \; \exists n$, така че ако $k \ge n$ настъпва всяко $A^c_{k,\frac{1}{r}}$.

$$L^c_X = \bigcup_{r=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_{k,\frac{1}{r}}}_{B_r} , \quad \mathbb{P}(L^c_X) = 0$$

$$= \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r \quad \Rightarrow \quad \forall r \;\; \mathbb{P}(B_r) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_{k,\frac{1}{r}}}_{C_{n,r}} \Big) = 0 \quad \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{n,r} \Big) = 0$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{n,r}\Big) = 0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_{n,r}) \quad \text{защото} \quad C_{n,r} \supseteq C_{n+1,r} \supseteq \dots$$

$$C_{n,r} = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_{k,\frac{1}{r}} \supseteq A_{n,\frac{1}{r}} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{\mathbb{P}(C_{n,r})} = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_{k,\frac{1}{r}}\Big) \geq \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{\mathbb{P}(A_{n,\frac{1}{r}})}$$

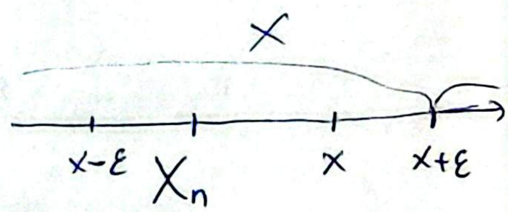
$\boxtimes$

б) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$, то $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

Нека $x \in C_{F_X}$. Трябва да покажем, че $\mathbb{P}(X_n < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X < x)$.

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\{X_n < x\} = \{X_n < x\} \cap \underbrace{A_{n,\varepsilon} \cup A_{n,\varepsilon}^c}_{\Omega}$$



$$\subseteq \{X < x + \varepsilon\} \cup A_{n,\varepsilon}$$

и $\{X_n < x\} \cap A_{n,\varepsilon}^c \subseteq \{X_n < x\} \subseteq \{X < x+\varepsilon\} \cup A_{n,\varepsilon}$

$\{X_n < x\} \cap A_{n,\varepsilon}^c \subseteq \{X_n < x - \varepsilon\} \cap A_{n,\varepsilon}^c$

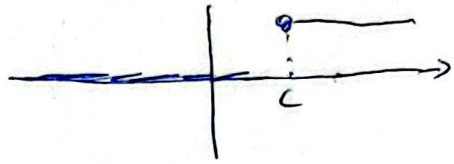
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X < x - \varepsilon; A_{n,\varepsilon}^c) \leq \mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x+\varepsilon) + \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon})$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} F_X(x)$$

$\boxtimes$

Твърдение: Нека $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} C$, тогава $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} C$.

Д-во:
$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & x \le C \\ 1 & x > C \end{cases} \qquad C_{F_c} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$$



$$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_c(x) \quad \text{за } x \neq C$$

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - C| > \varepsilon) \overset{?}{=} 0$$

$$\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > c+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c-\varepsilon) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_n \le c+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c+\varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(X_n < c-\varepsilon) = F_{X_n}(c-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\mathbb{P}(X_n \le c+\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$ $\Rightarrow$ цялото клони към 0 ■

Неравенство на Чебишёв

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \le \frac{DX}{a^2}$$

Теорема на Чебишёв: Нека X е сл. вел. с дисперсия DX. Тогава

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \le \frac{DX}{a^2}.$$

Д-во: $Y = X - \mathbb{E}X$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) = \mathbb{P}(|Y| > a) = \mathbb{E}\, 1_{\{|Y| > a\}}$$

$DX = DY = \mathbb{E}Y^2 =$

$= \mathbb{E}[Y^2 . 1] = \mathbb{E}[Y^2 . (1\{|Y| \le a\} + 1\{|Y| > a\})] \ge \mathbb{E}[Y^2 . 1\{|Y|>a\}] \ge$

$\ge a^2 \mathbb{E} 1\{|Y|>a\} = a^2 \mathbb{P}(|Y| > a)$

$\Rightarrow \quad DX \ge a^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a)$ ☐

Твърдение: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \le \dfrac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^n}{a^n}, \forall n \ge 1$

При $\mathbb{E}X = 0$ $\quad \mathbb{P}(|X| > a) \le \dfrac{\mathbb{E}|X|^n}{a^n}, \forall n \ge 1$

Пример: $X, DX \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > b\sqrt{DX}) \le \dfrac{\cancel{DX}}{b^2 \cancel{DX}} = \dfrac{1}{b^2}$

$\rightarrow \mathbb{E}X = 0, b = 10 \quad \mathbb{P}(|X| > 10\sqrt{DX}) \le \dfrac{1}{100}$

Закони за големите числа

Деф: 'слаб ЗГЧ' Нека $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ е редица от случайни величини с очакване $(\mathbb{E}X_i)_{i=1}^{\infty}$. Тогава за редицата е в сила ЗГЧ

Ако $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Когато $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ са i.i.d, тогава

$$\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_i \Longrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$$

Теорема: 'ЗГЧ' Нека $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ са i.i.d с $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}|X_1|<\infty$.

Тогава $$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$$

Д-во: Ще докажем, когато $DX<\infty$.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mathbb{E}X_1\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n}\right| > \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > n.\varepsilon\right)$$

От неравенството на Чебишёв

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > n.\varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right)}{\varepsilon^2.n^2} \overset{i.i.d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}{\varepsilon^2.n^2} =$$

$$= \frac{\cancel{n}.DX_1}{n^{\cancel{2}}.\varepsilon^2} = \frac{DX_1}{\varepsilon^2.n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \blacksquare$$

Деф: 'Усилен ЗГЧ' Нека $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ е редица от случайни величини с очаквания $(\mathbb{E}X_i)_{i=1}^{\infty}$. Тогава за редицата е в сила УЗГЧ, ако

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} 0.$$

Ако $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1 \ \forall i \geq 1$, то $$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}X_1$$

Теорема: 'УЗГЧ' Нека $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ са $i.i.d$, такива че $\mathbb{E}|X_1|<\infty$. Тогава

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} \mathbb{E}X_1$$

Пример: $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ $X_i \sim Ber(p)$, $p \in (0,1)$

УЗГЧ $\rightarrow$ $$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} p = \mathbb{E}X_1$$

Пример: Хвърляме монета. $X_i \sim Ber(\frac{1}{2})$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} \frac{1}{2}$$

Пример: Количество шунка в даден сандвич $(X_i)_{i=1}^{\infty}$.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} 50\text{гр.}$$

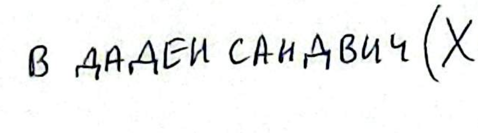
Пример: Игра на рулетка черно-червено.

X	-1	1
P	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$\mathbb{E}X_1 = -\frac{1}{37}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} -\frac{1}{37}$$

Пример: Игра на въже



N, $X_i = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases}$

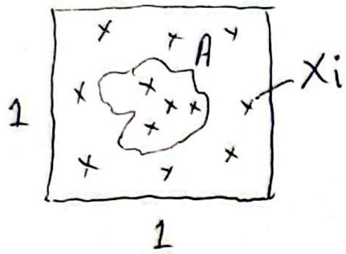
$\mathbb{E}X_i = 0$

$$S_N = \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{Д}_N - \text{Л}_N$$

$$\frac{S_N}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с}} 0 \qquad \mathbb{P}(S_N > 0) = \mathbb{P}(\text{Д}_N > \text{Л}_N) \approx \frac{1}{2}$$

!!! $\cancel{\mathbb{P}(S_N = 0) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1}$

Пример: Монте Карло



$$X_i \longrightarrow Y_i = g(X_i) = \begin{cases} 1 & X_i \in A \\ 0 & X_i \notin A \end{cases}$$

$$(Y_i)_{i=1}^{\infty} \text{ СА } i.i.d \quad Y_i \sim Ber(|A|)$$

$$\frac{|A|}{1} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} |A| = \int_A dx \ .$$