Лекция 9

Непрекъснати съвместни разпределения

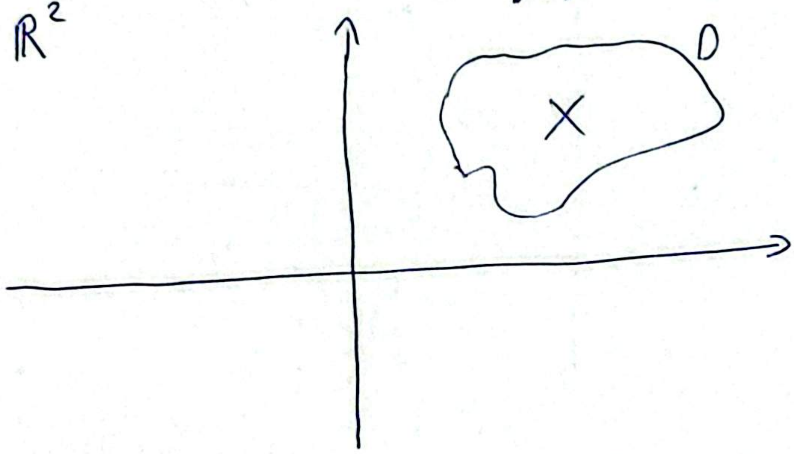
Деф: $X = (X_1, \dots, X_n)$ е непрекъснат вектор от случайни величини, ако

$\exists f_X : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$:

а) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$

в) $\forall D \subseteq \mathbb{R}^n \quad \mathbb{P}(X \in D) = \int\limits_{D \subseteq \mathbb{R}^n} f_X(x)\, dx$



$\mathbb{P}(X \in D) = \int f_X(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$

f_X се нарича съвместна плътност на X.

Деф: Нека f_X е съвместна плътност, тогава

$$D(f_X) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : f_X(\bar{x}) > 0 \}$$

Деф: Нека f_X е съвместна плътност. Тогава

$$f_{X_j}(x_j) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1 \text{ пъти}} f_X(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$$

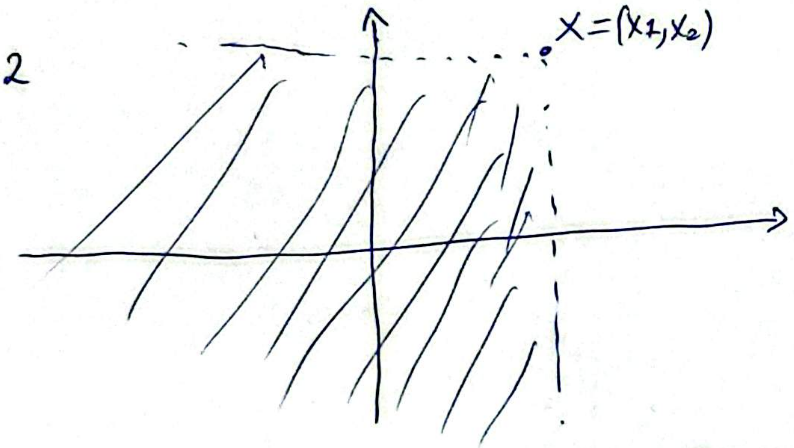
се нарича маргинална плътност на X_j.

Деф: 'съвместна ф-я на разпределение' $X = (X_1, \dots, X_n)$, тогава

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

се нарича съвместна ф-я на разпределение.

$n = 2$



Ако X е в-р от н.с.в то $f_X(x) = \dfrac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$, а

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Деф: 'независимост' $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \iff X = (X_1 X_2)$ и $F_X(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) . F_{X_2}(x_2)$

$$\mathbb{P}(X_1 < x_1 ; X_2 < x_2) = \mathbb{P}(X_1 < x_1) . \mathbb{P}(X_2 < x_2)$$

$$\iff \quad f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) . f_{X_2}(x_2)$$

Деф: 'независими в съвкупност'

Нека $X=(X_1,\dots,X_n)$. Тогава $X_1,\dots,X_n$ са независими в съвкупност ако

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad f_X(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j)$$

Твърдение: Нека $X=(X_1,X_2)$ е непрекъснат в-р със съвместна плътност f_X. Тогава ако съществуват $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$, то $\mathbb{E}(X_1+X_2)=\mathbb{E}X_1+\mathbb{E}X_2$.

В допълнение ако $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ и DX_1 и DX_2 съществуват то и

$$D(X_1+X_2)=DX_1+DX_2.$$

Д-во: $g(X)=X_1+X_2 \Rightarrow \mathbb{E}(X_1+X_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+x_2)f_X(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=$

$$=\int_{x_1=-\infty}^{\infty} x_1\int_{x_2=-\infty}^{\infty} f_X(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1+\int_{x_2=-\infty}^{\infty} x_2\int_{x_1=-\infty}^{\infty} f_X(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x_1\cdot f_{X_1}(x_1)\,dx_1+\int_{-\infty}^{\infty} x_2\, f_{X_2}(x_2)\,dx_2=\mathbb{E}X_1+\mathbb{E}X_2$$

Твърдение: Нека $X=(X_1,X_2)$ е непрекъснат в-р и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Тогава ако $\mathbb{E}X_1$ и $\mathbb{E}X_2$ съществуват $\mathbb{E}X_1X_2=\mathbb{E}X_1\cdot\mathbb{E}X_2$

Смяна на променливите

$X=(X_1,X_2)$ $\quad g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $Y=g(X)$, $f_Y=?$

Кога Y е непрекъснат в-р от сл.в?

<u>Теорема:</u> Нека $X=(X_1,X_2)$ е свс съвместна плътност f_X и $D(f_X)$.

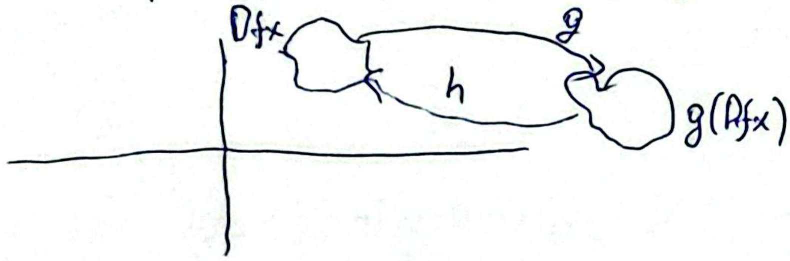
Нека $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ като $g: D(f_X)\to\mathbb{R}^2$ е биективна.

Нека $$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=g(X)=\begin{pmatrix}g_1(X_1,X_2)\\g_2(X_1,X_2)\end{pmatrix}.$$

Нека $h=g^{-1}$ е обратното изображение на g. $X=g^{-1}(Y)=h(Y)$.

$$X=h(Y)=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1(Y_1,Y_2)\\h_2(Y_1,Y_2)\end{pmatrix}$$

Нека g и h са непрекъснати и диференцируеми в $D(f_X)$ и $g(Df_X)$.



Тогава ако за матрицата
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}\end{pmatrix}=J(y)$$

е в сила, че $\det J(Y)\neq 0$ $\quad\forall y\in g(Df_X)$

то Y е непрекъснат в-р от сл.в. и

$$f_Y(y_1,y_2)=f_X(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))\cdot|J(y)|$$

Д-во: $Y = g(X)$ $\quad A \subseteq g(D_{f_X})$

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(g(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in h(A)) =$$

$$= \int_{x \in h(A)} f_X(x)\,dx \overset{x = h(y)}{=\!=} \int_{y \in A} \underbrace{f_X(h(y))\,|J(y)|}_{= f_Y(y)} \cdot dy \qquad \blacksquare$$

Пример: Нека $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $\; i = 1, \dots, n$ и $(X_1, \dots, X_n)$ са независими в съвкупност.

Тогава $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

$$X_i = \mu_i + \sigma_i Z, \quad Z_i \sim N(0,1) \quad i = 1, \dots, n$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i Z_i$$

$n = 2$

Поставяме $V_1 = \sigma_1 Z_1$, $V_2 = \sigma_2 Z_2$, $\quad Y = V_1 + V_2$

$V = (V_1, V_2)$

$$f_V(v_1, v_2) \overset{\text{нез.}}{=} f_{V_1}(v_1) \cdot f_{V_2}(v_2) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v_1^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-v_2^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= V_1 + V_2 \\ Y_2 &= V_1 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g_1(v_1, v_2) \\ g_2(v_1, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = Y$$

$$v_1 = Y_2 \qquad v_2 = Y_1 - Y_2 \qquad J(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |J| = 1$$

$$\Rightarrow f_Y(y_1, y_2) = f_V(y_2, y_1 - y_2) \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \int_{y_2=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{2\sigma_2^2}} dy_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{y_1^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \sim N(0, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$\Rightarrow Y_1 = \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 \sim N(0, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ ОТТАМ И ЗА ОТКЛОНЕНИЯТА

ДЕФ: 'ГАМА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ' КАЗВАМЕ, ЧЕ $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$ АКО

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx., \quad \alpha > 0 \quad \text{(ОЙЛЕРОВА ГАМА Ф-Я)}$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \ \alpha > 0$$

Пример: $\alpha = 1, \beta > 0$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\Gamma(1)} \cdot e^{-\beta x} = \beta \cdot e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$X \sim \Gamma(1, \beta)$ ТО $X \sim Exp(\beta)$

ТВЪРДЕНИЕ: Нека $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i=1,\dots,n$ и $(X_1,\dots,X_n)$ са независими в съвкупност. Тогава

$$Y = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \beta).$$

Теорема: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ тогава $\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\beta}$ и $DX = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Д-во:
$$\mathbb{E}X = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty x \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} dx =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-\beta x} dx =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-\beta x} \cdot dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot x^\alpha \cdot e^{-\beta x} dx}_{\text{плътност на } Y \sim \Gamma(\alpha+1, \beta) = 1} =$$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \quad ;$$

$$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

Деф: 'chi-squared' $X \sim \chi^2(n)$, Ако $X \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n \qquad DX = 2n$$

Теорема: Нека $Z_1, \dots, Z_n$ са стандартни нормални разпределения и са независими в съвкупност. Тогава

$$Y = \sum_{j=1}^{n} (Z_i)^2 \sim \chi^2(n)$$

Мотивация: $H = \text{детер.} + Z_j \qquad (H - \text{детер.})^2 = Z_j^2$

Теорема: Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност и $X_i \sim Exp(\lambda)$

Тогава $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma(n, \lambda)$ от пред. твърдение