

## ЛЕКЦИЯ 7

E.] Хипергеометрично разпределение  $X \sim HG(N, M, n)$

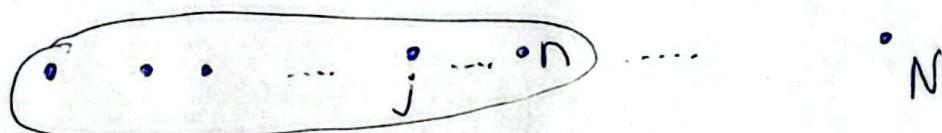
ИМАМЕ  $N$  ЕЛЕМЕНТА, от които  $M$  са МАРКИРАНИ. Правим извадка с РАЗМЕР  $n$  от тях.  $X$  изброява броя МАРКИРАНИ в тази извадка.

ТВЪРДЕНИЕ:

$$a) P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\sigma) E[X] = n \cdot \frac{M}{N}, D[X] = \frac{n \cdot M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Д-ВО:  $\delta)$



$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{АКО НА } j\text{-ТА ПОЗИЦИЯ ИМА МАРКИРАН} \\ 0 & \text{АКО НА } j\text{-ТА ПОЗИЦИЯ НЕ Е МАРКИРАН} \end{cases}$$

$$X = \sum_{j=1}^n X_j \Rightarrow E[X] = \sum_{j=1}^n E[X_j]$$

$$X_j \sim Ber(p_j) \Rightarrow E[X_j] = \sum_{j=1}^n p_j$$

$$p_j = \frac{\binom{N-1}{M-1}}{\binom{N}{M}} = \frac{M}{N} = P(X_j=1)$$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{j=1}^n p_j = n \cdot \frac{M}{N}$$

## СЪВМЕСТИИ ДИСКРЕТНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

ДЕФ: НЕКА  $X$  И  $Y$  СА ДВЕ ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ В ЕДНО ВЕРОЯТНОСТНО ПРОСТРАНСТВО. ТОГАВА ПОД СЪВМЕСТНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА  $X$  И  $Y$  РАЗБИРАМЕ ТАБЛИЦАТА:

$Y \backslash X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$Y \downarrow$
$y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$	$\dots$	$p_{n1}$	$\sum_i p_{i1}$
$y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{n2}$	$\sum_i p_{i2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$	$\sum_i \dots$
$y_k$	$p_{1k}$	$p_{2k}$	$\dots$	$p_{nk}$	$\sum_i p_{ik}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$	$\vdots$
$y_n$	$p_{1n}$	$p_{2n}$	$\dots$	$p_{nn}$	$\sum_i p_{in}$
$X \rightarrow$	$\sum_j p_{ij}$	$\sum_j p_{2j}$	$\dots$	$\sum_j p_{nj}$	← МАРГИНАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

$$p_{ij} = P(X=x_i \cap Y=y_j) = P(X=x_i ; Y=y_j)$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Пример:

$X$  - брой 6-ци при хвърляне на 2 зара

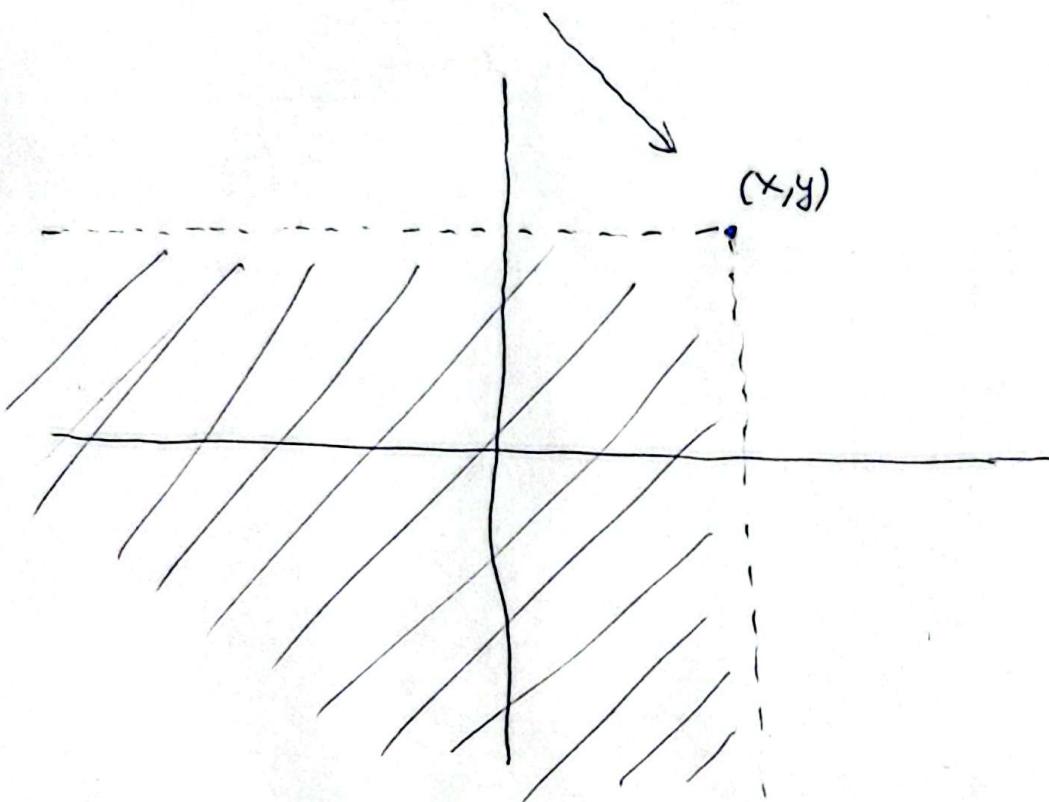
$Y$  - брой 1-ци при хвърляне на 2 зара

$X \backslash Y$	0	1	2	$Y$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$X$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	

## СЪВМЕСТИ ФУНКЦИИ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

ДЕФ: НЕКА  $X$  и  $Y$  са две случаи величини. Тогава съвместна функция на разпределение на  $X$  и  $Y$  е

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X < x; Y < y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$



$$F_{X,Y}(x,\infty) = P(X < x; Y < \infty) = P(X < x) = F_X(x)$$

$$F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y)$$

$$F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$$

$$F_{X,Y}(-\infty, y) = 0 = F_{X,Y}(x, -\infty)$$

Деф: 'НЕЗАВИСИМОСТ'

ДВЕ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНЫ  $X, Y$  ВЪВ  $V$  СА НЕЗАВИСИМИ АКО

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$\downarrow \\ P(X \leq x; Y \leq y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

## КОВАРИАЦИЯ И КОРЕЛАЦИЯ

Деф: 'КОВАРИАЦИЯ'

НЕКА  $X$  И  $Y$  СА ДВЕ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНЫ. ТОГА ВА

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] \text{ СЕ}$$

НАРИЧА КОВАРИАЦИЯ

ПРИМЕР: ЗА 2 ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНЫ

$$\text{Cov}(X,Y) = \sum_{i,j} p_{ij} (x_i - \mathbb{E}X)(y_j - \mathbb{E}Y)$$

ТВЪРДЕНИЕ:  $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

$$\begin{aligned}
 \text{Д-во: } & \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}Y - Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y] = \\
 & = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{E}Y] - \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{E}X] + \mathbb{E}[\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y] = \\
 & = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}Y \cdot \mathbb{E}X - \cancel{\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y} + \cancel{\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y} \quad \square
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{СЛЕДСТВИЕ: } & \text{Cov}(aX, bY) = \mathbb{E}aXbY - \mathbb{E}aX \cdot \mathbb{E}bY = ab(\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y) \\
 & = ab \cdot \text{Cov}(X, Y)
 \end{aligned}$$

ТВЪРДЕНИЕ: АКО  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , ТО  $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Д-ВО:  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y \stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E}X \mathbb{E}Y - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 0$

ДЕФ: 'КОРЕЛАЦИЯ'

НЕКА  $X$  И  $Y$  СА СЛ. ВЕЛ. С  $DX < \infty$  И  $DY < \infty$ .

ТОГА ВА  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$  СЕ НАРИЧА КОРЕЛАЦИЯ.

ТВЪРДЕНИЕ: НЕКА  $X$  И  $Y$  СА СЛ. ВЕЛ. ТАКИВА, ЧЕ  $DX < \infty$  И  $DY < \infty$ .

НЕКА  $\bar{X} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}}$  И  $\bar{Y} = \frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}}$ . ТОГА ВА  $\mathbb{E}\bar{X} = \mathbb{E}\bar{Y} = 0$  И  $D\bar{X} = D\bar{Y} = 1$

И  $\rho(X, Y) = \mathbb{E}\bar{X} \cdot \bar{Y}$

Д-ВО:  $\mathbb{E}\bar{X} = \mathbb{E}\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} = \frac{1}{\sqrt{DX}} \cdot \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) = 0$

$D\bar{X} = D\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} = \frac{1}{DX} \cdot D(X - \mathbb{E}X) = \frac{DX}{DX} = 1$ , ЗАЧОТО

$D(X - c) = DX$

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \mathbb{E} \left( \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} \cdot \frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}} \right) = \\ &= \mathbb{E}\bar{X}\bar{Y} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА:  $X$  и  $Y$  са сн. вел с  $DX < \infty$  и  $DY < \infty$ . Тогава:

a)  $|g(X, Y)| \leq 1$

б)  $|g(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$  за таки  $a, b \in \mathbb{R}$

Д-БО:

a)  $0 \leq \mathbb{E}(\bar{X} \pm \bar{Y})^2 = \mathbb{E}(\bar{X}^2 \pm 2\bar{X}\bar{Y} + \bar{Y}^2) =$   
 $= \mathbb{E}\bar{X}^2 \pm 2\mathbb{E}\bar{X}\bar{Y} + \mathbb{E}\bar{Y}^2 \stackrel{\text{Т.о.}}{=} D\bar{X} \pm 2g(X, Y) + D\bar{Y} =$   
 $= 2 \pm 2g(X, Y) \Rightarrow 1 \pm g(X, Y) \geq 0 \quad \blacksquare$

б) " $\Leftrightarrow$ "  $Y = aX + b \Rightarrow \mathbb{E}Y = a\mathbb{E}X + b$   
 $DY = a^2 DX$

$$g(X, Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\mathbb{E}X(aX + b) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}(aX + b)}{\sqrt{DX} |a| \cdot \sqrt{DY}} =$$
$$= \frac{a \mathbb{E}X^2 + b \mathbb{E}X - a(\mathbb{E}X)^2 - b \mathbb{E}X}{|a| \sqrt{DX}} = \frac{a (\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2)}{|a| \sqrt{DX}} = \pm 1$$

" $\Rightarrow$ "  $|g(X, Y)| = 1$  (сн.) Нека  $g(X, Y) = 1$

$$\mathbb{E}(\bar{X} - \bar{Y})^2 = \mathbb{E}\bar{X}^2 - 2\mathbb{E}\bar{X}\bar{Y} + \mathbb{E}\bar{Y}^2 = 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\mathbb{E}(\bar{X} - \bar{Y})^2 = 0 = \sum_{i,j} p_{ij} (\bar{x}_i - \bar{y}_j)^2 \Rightarrow \bar{X} = \bar{Y}$$

$$\bar{Y} = \frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} \Rightarrow Y - \mathbb{E}Y = \frac{X}{\sqrt{DX}} \cdot \sqrt{DY} - \frac{\mathbb{E}X \sqrt{DY}}{\sqrt{DX}}$$

$$\Rightarrow Y = X \cdot \frac{\sqrt{DY}}{\sqrt{DX}} - \mathbb{E}X \cdot \frac{\sqrt{DY}}{\sqrt{DX}} + \mathbb{E}Y \quad \blacksquare$$

2 сл.) АНАЛОГИЧНО

$$Y = \alpha X + \beta$$

