Дніпровський науковий ліцей інформаційних технологій
Дніпровської міської ради

КУРСОВА РОБОТА

на тему:

“Побудова графіків функцій за допомогою елементарних перетворень і їх дослідження”

Виконала учениця 10-Д класу,

Кавуненко Юлія Сергіївна

Керівник роботи – Якименко

Наталія Михайлівна

м. Дніпро
2024

ЗМІСТ

Мета роботи

Метою даної курсової роботи є

- Закріплення знань з таких тем, як: «елементарні графіки функцій», «степеневі функції», «тригонометричні функції», «обернені тригонометричні функції»
- Навчитися правильно будувати графіки функцій, виконувати перетворення і дослідження цих графіків функцій на практиці
- Більш детально зануритися у можливості взаємодії із графіками різних функцій, щоб зрозуміти, чим кожне перетворення відрізняється і як залежить перетворення від самої функції
- Освоєння нових додатків, як GeoGebra, для побудови та візуалізації графіків функцій, що дозволить нам краще розуміти властивості функцій
- Навчитися розв'язувати задачі з параметрами графічними методами
- Не тільки вивчення теорії побудови графіків та елементарних перетворень, але й практичне застосування цих знань для аналізу та дослідження реальних функцій

Вступ

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни другої величини (залежної змінної). І виникає потреба створення їх математичних моделей для вивчення цих процесів. Однією з таких найважливіших моделей є функція. Однак, спершу потрібно зрозуміти, як процюють ці моделі для того, щоб правильно, а також ефективно використовуватиь їх. Це включає в себе здатність візуалізувати функції за допомогою графіків, а також розуміння, як перетворення впливають на ці графіки і чим же вони відрізняються.

Тема цієї курсової роботи, "Побудова графіків функції за допомогою елементарних перетворень і їх дослідження", є доволі важливою і актуальною в сучасному житті.

Функція - це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини x можна знайти єдине значення залежної змінної з множини y. Найчастіше її задають у вигляді формули.

Незалежну змінну зазвичай позначають буквою x, а залежну – y, а саму функцію(правило) – буквою f. Змінна y **функціонально залежить** від змінної x.

Також ці змінні мають певні назви. Змінну x називають аргументом функції, а y – значенням функції.

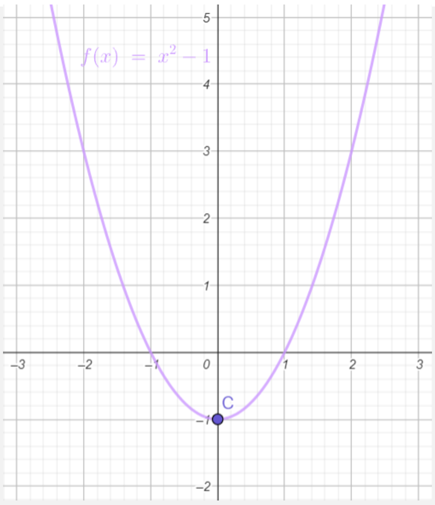
Множину усіх допустимих значень змінної x називають **область визначення** . Позначається $D(y)$.

Знаходження області визначення є в залежності від функції, яка була нам дана. Область визначення може дорівнювати усім дійсним числам, або числам, при яких у знаменнику не буде утворюватися нуль(дробові функції), та числам, які не будуть утворювати від'ємне число(підкореневі функції).

Множину усіх значень, яких набуває функція, тобто значень змінної y називають **область значення** . Позначається $E(y)$.

Знаходження області значення є аналогічним знаходженню області визначення. Тобто, область значення може дорівнювати усім дійсним числам, числам, при яким у знаменнику не буде утворюватися нуль(дробові функції), та числам, які не будуть утворювати від'ємне число(підкореневі функції).

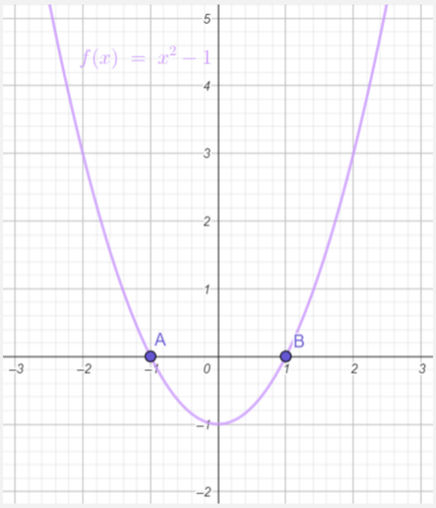
Точки перетину функції із осями абсцис і ординат $(x_0; y_0)$ – це точки, що утворюються у певному місці, тобто при перетині графіку функції із вісю абсцис, або вісю ординат. Такі точки мають певні координати.



Щоб знайти точку перетину графіка функції з віссю ординат, потрібно обчислити значення функції при *x = 0*, тобто знайти *f(0)*.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

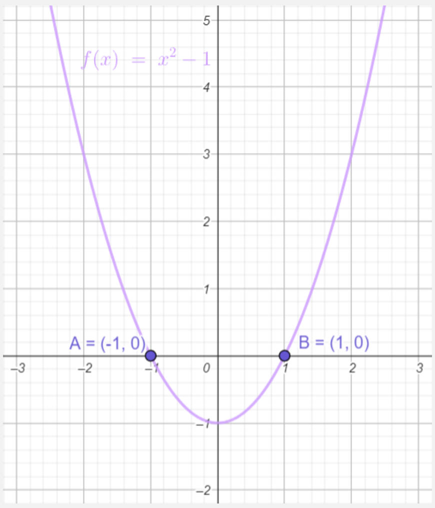
На прикладі функції $y = x^2 - 1$ бачимо, що її точкою перетину з віссю ординат буде **C**



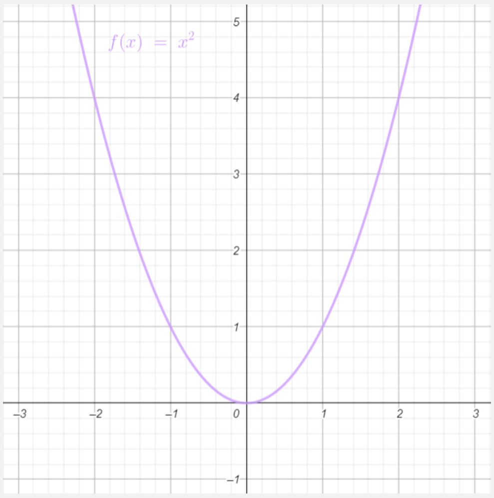
Щоб знайти точку перетину графіка функції з віссю абсцис, потрібно прирівняти функцію до нуля і знайти значення x.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

На прикладі функції $y = x^2 - 1$ бачимо, що її точками перетину з віссю абсцис будуть **A і B**

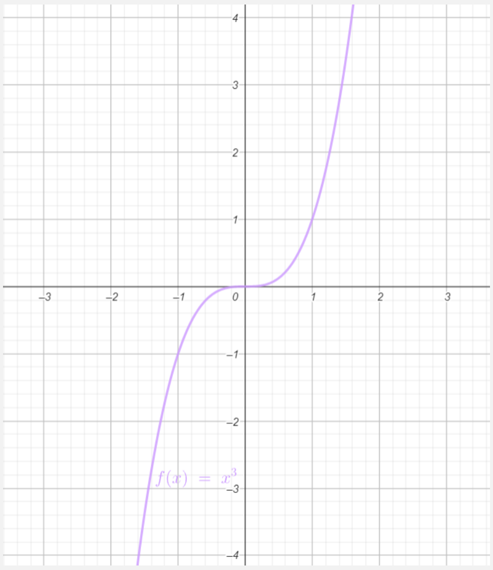


Нулі функції(x_1, x_2, x_n) - значення аргумента, при якому значення функції дорівнює нулю. Щоб знайти значення нуля функції, потрібно розв’язати рівняння: ***y = f(x) = 0***. Нулі функції належать *D(y)*. На прикладі функції $y = x^2 - 1$ бачимо, що **нулі функції:** $\boldsymbol{x_1 = -1; x_2 = 1}$ і відповідно **точки A і B**



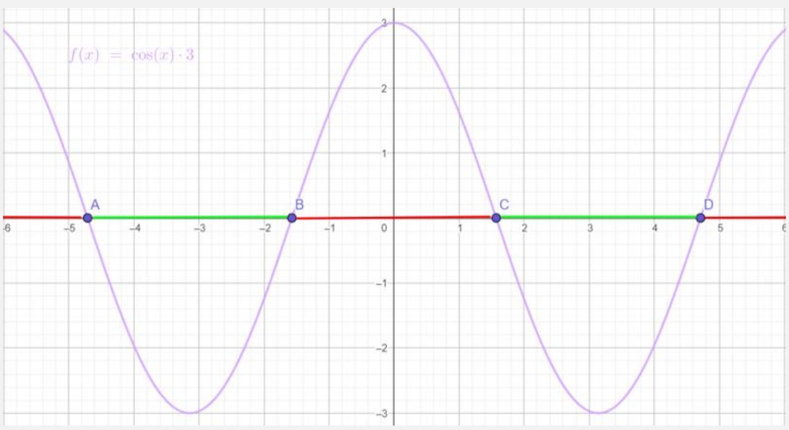
Парна функція – функція, у якої для будь-якого $x \in D(f)$ є правильною рівність $f(-x) = f(x)$. Наприклад функція $y = x^2$ є парною.

f(-x) = f(x)



Непарна функція – функція, у якої для будь-якого $x \in D(f)$ є правильною рівність $f(-x) = -f(x)$. Наприклад функція $y = x^3$ є не парною.

$f(-x) = -f(x)$



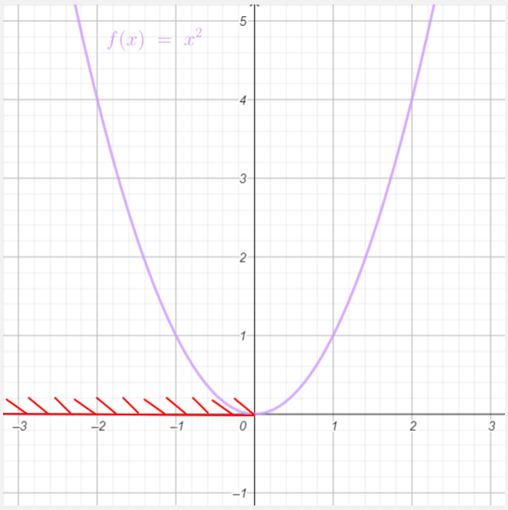
Проміжок знакосталості – проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака(додатний чи від'ємний). ***y > 0 при***

$x \in (-\infty; x_1)$

$x \in (x_2; x_3)$

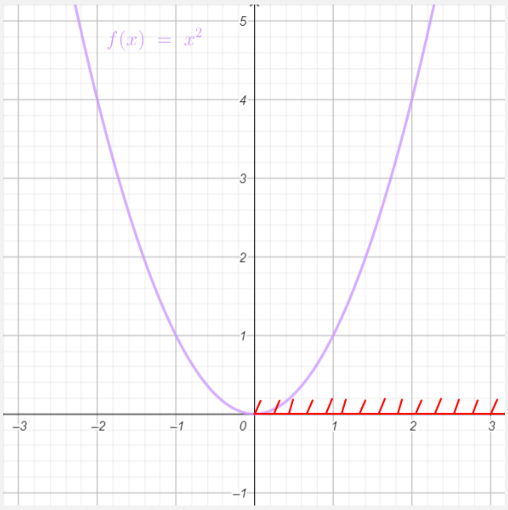
$x \in (x_4; \infty)$

На прикладі функції $y = cos(x) * 3$ бачимо, що **y** > 0 при ***x ∈ (-∞;A)∪(B;C)∪(D; ∞)(червоний проміжок); y < 0*** при ***x ∈ (A;B)∪(C;D)(зелений проміжок).***



Проміжок спадання – проміжок на графіку, при якому на множині $M \subset D(f)$, для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

На прикладі функції $y = x^2$ бачимо, що проміжок спадання в неї при $x \in (-\infty;0)$



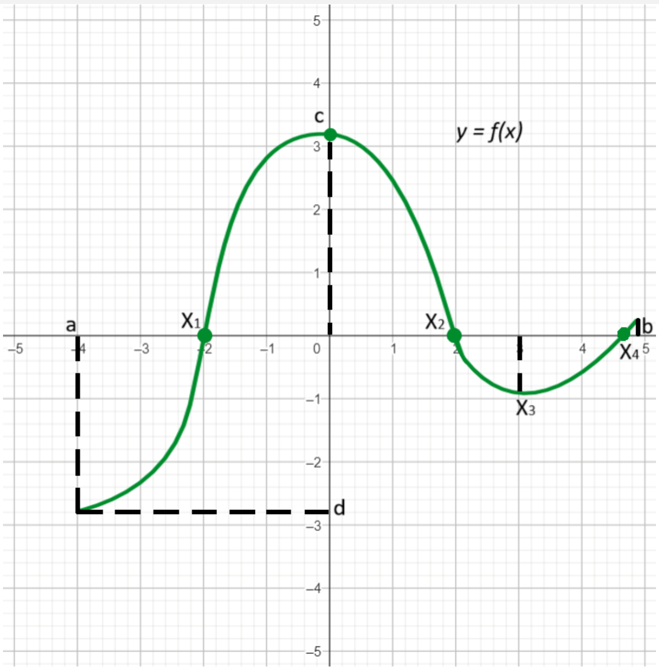
Проміжок зростання – проміжок на графіку, при якому на множині $M \subset D(f)$, для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 які належать множині M, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

На прикладі функції $y = x^2$ бачимо, що проміжок спадання в неї при $x \in (0;\infty)$

Функцію $y = f(x)$ називають **зростаючою** на множині $M \subset D(y)$, якщо для $\forall$ $x_1, x_2 \in$ M, таких, що $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$ виконується нерівність $f(\boldsymbol{x_1}) < f(\boldsymbol{x_2})$. А **спадною** функцію $y = f(x)$ називають тоді, коли на множині $M \subset D(y)$, якщо для $\forall$ $x_1, x_2 \in$ M, таких, що $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$ виконується нерівність $f(\boldsymbol{x_1}) > f(\boldsymbol{x_2})$.

Найбільше значення функції – число $f(x_0)$ на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число x_0, що для всіх $x \in$ M виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$. Його записують, як: **max** $f(x) = f(x_0)$.

Найменше значення функції – число $f(x_0)$ на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число x_0, що для всіх $x \in$ M виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$. Його записують, як: **min** $f(x) = f(x_0)$.



Розглянемо функцію *y = f(x)*

D(y) = [a;b],

E(y) = [d;c].

Точки перетину з віссю ох (-x_1;0);(x_2;0),

з віссю оу – (0;c)

Нулі функції $x_1 =$ **c**.

Проміжки знакосталості *y > 0* при *x* ∈ [a;x_1]∪[x_2; x_4],

y < 0 при *x* ∈ $[x_1; x_2] \cup [x_4; b]$

↑ при $x \in [a; c] \cup [x_3; b]$,

↓ при $x \in [c; x_3]$.

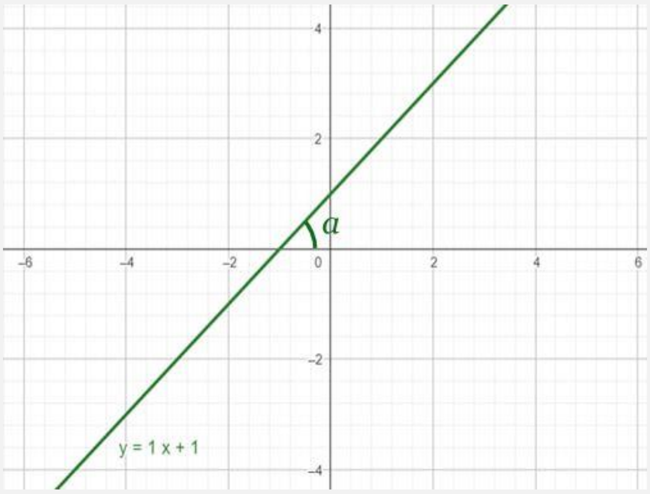
$y_{min} = y(a) = d$;

$y_{max} = y(0) = c$

Основні види елементарних функцій

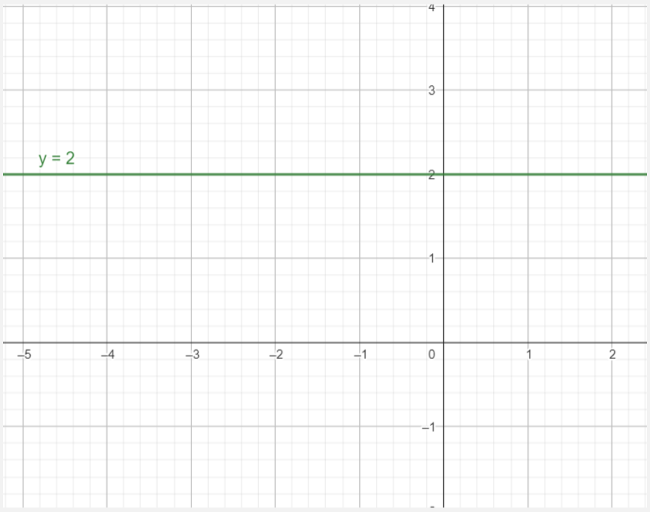
Основними видами елементарних функцій є:

- Лінійна функція: $y = kx + b$, $k = tg\ a$



$E(y) = (-\infty;\infty)$

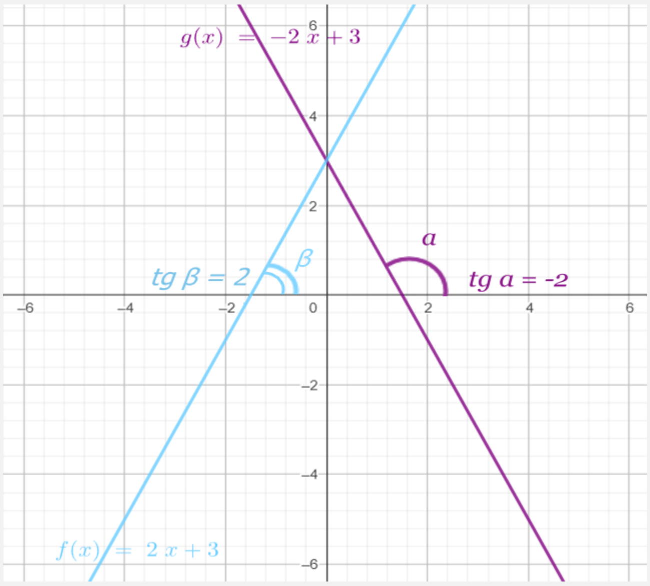
$D(y) = (-\infty;\infty)$



Якщо $k = 0$, то $y = b$: $y = 2$

$E(y) = \{b\}$

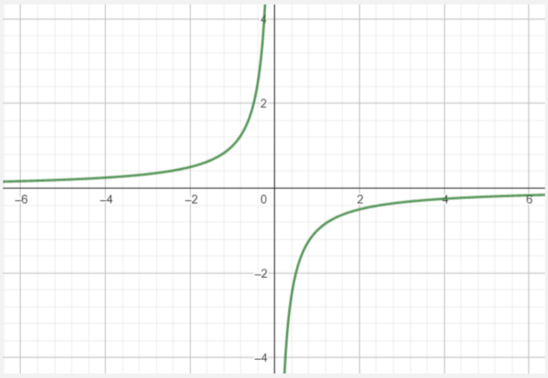
$D(y) = (-\infty;\infty)$



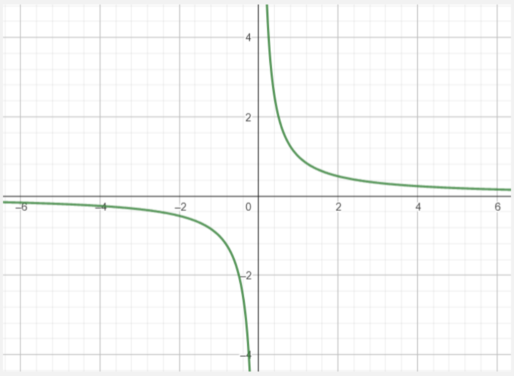
Якщо $k > 0 \Rightarrow$ I, III чверті

Якщо $k < 0 \Rightarrow$ II, IV чверті

- Обернена пропорційність: $y = \frac{k}{x}$



Пр.1



Пр.2

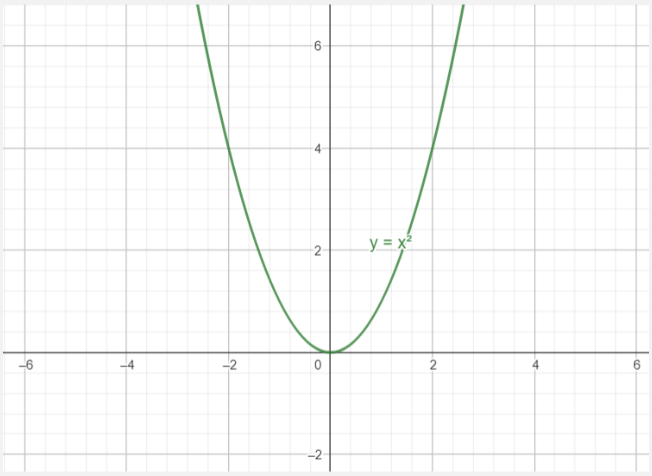
де $\boldsymbol{k \neq 0}$

D(y) = $x \neq 0$

E(y) = $y \neq 0$

Також від значення числа k залежить на яких частинах ДСК буде лежати графік функції. Тобто при $\boldsymbol{k > 0}$ графік буде лежати у **I і III** частинах ДСК (Пр.1), а при $\boldsymbol{k < 0}$ **у II і IV** частинах (Пр.2).

- Квадратична функція: $y = x^2$



D(y) = (-∞;∞)

E(y) = [0;+∞)

У цій функції від значення **а** залежить напрям гілок при побудові графіку функції.

Тобто **при** $\boldsymbol{a > 0}$ гілки параболи будуть напрямлені **вгору**, а **при** $\boldsymbol{a < 0}$ **– вниз**.

Квадратичну функцію можна також записати, як $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, де **b, c – дійсні числа,** $\boldsymbol{a \neq 0}$**.** Число $\boldsymbol{a}$ називають **першим (старшим) коефіцієнтом**, $\boldsymbol{b}$ – **другим коефіцієнтом**, а $\boldsymbol{c}$ – **вільний член**.

Областю визначення цієї функції завжди буде D(y) = $x \in$ R. Також функція є парною, якщо $x_в = 0$. При $\boldsymbol{a > 0}$ гілки параболи будуть напрямлені **вгору**, а при $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ **– вниз**. При а > 0 функція зростає при $x \in [x_0; \infty)$, а спадає при $x \in (-\infty; x_0]$. При а < 0 функція зростає при $x \in (-\infty; x_0]$, а спадає при $x \in [x_0; \infty)$. Знайти координати точки вершини можна таким чином, що $x_в = -\frac{b}{2a}$, і потім значення $x_в$ підставляємо в рівняння функції для знаходження $y_в$. Для знаходження точок перетину з осями:

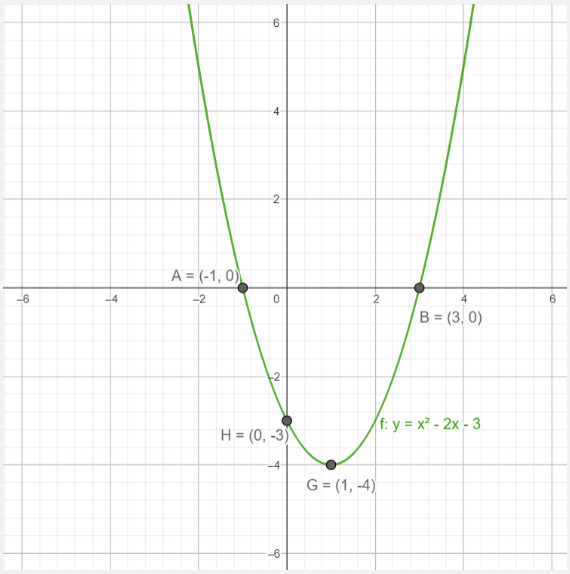
Точки перетину з ох:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Точки перетину з оу:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Для прикладу побудуємо графік функції $y = x^2 - 2x - 3$



Спочатку визначимо значення коефіцієнтів, тобто *a* = 1, *b* = -2*, c* = -3. Так як *a* > 0, то гілки параболи напрямлені вгору і проміжком зростання буде $x \in [x_в; \infty)$, а проміжком спадання $x \in (-\infty; x_в]$. Відповідно D(y) x ∈ R. На цьому графіку точка G – вершина з координатами (1;-4), яку ми обчислили наступним чином:

Для знаходження $x_в$ використовуємо формулу $x_в = -\frac{b}{2a}$, тоді $x_в = \frac{-2}{2 \times 1} = 1$;

Для знаходження $y_в$ підставляємо значення $x_в$ у наше квадратне рівняння, тоді $y_в = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = -4$;

Точки A і B є точками перетину з вісю абсцис, а точка H точка перетину з вісю ординат. Для їх знаходження ми виконали наступні кроки:

Для знаходження точок A і B ми використали:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}, \text{тоді} \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

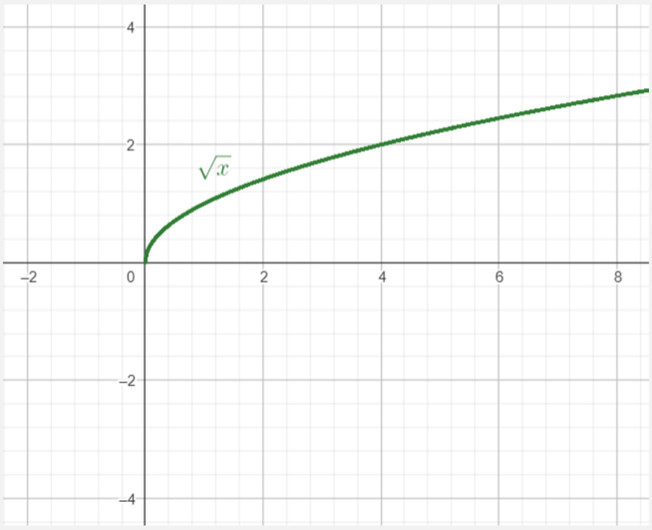
За т. Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases}; \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 3$$

Для знаходження точки H ми використали:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}, \text{тоді} \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y \ = 0^2 - 2 \times 0 - 3 = -3;$$

- Функція $y \ = \sqrt{x}$



D(y) = [0;∞)

E(y) = [0;∞)

- Степенева функція:

  Степеневою функцією називається функція виду $y = x^p$, де р – стале дійсне число, а х (основа) – змінна.

  При знаходженні області визначення слід памятати, якщо функція має вигляд $y = x^p$, то:

  1) якщо α – натуральне число, то D(y)=R;
  2) якщо α – ціле від'ємне число або нуль, то D(y)=(−∞;0)∪(0;+∞)
  3) якщо α – додатне неціле число, то D(y)=[0;+∞);
  4) якщо α – від'ємне неціле число, то D(y)=(0;+∞)

     1) $\boldsymbol{y = x^n}$**,** де **n** – дійсне число, а $\boldsymbol{x}$ – змінна. У цій функції відповідно n ∈ N, $n > 0$.

        1. Якщо **n = 2k, k = N**, то n – **парне натуральне число**. Тоді:

        $\boldsymbol{D(y) \in R}$

        Якщо $x \neq 0$, то $\boldsymbol{x^{2k} > 0}$

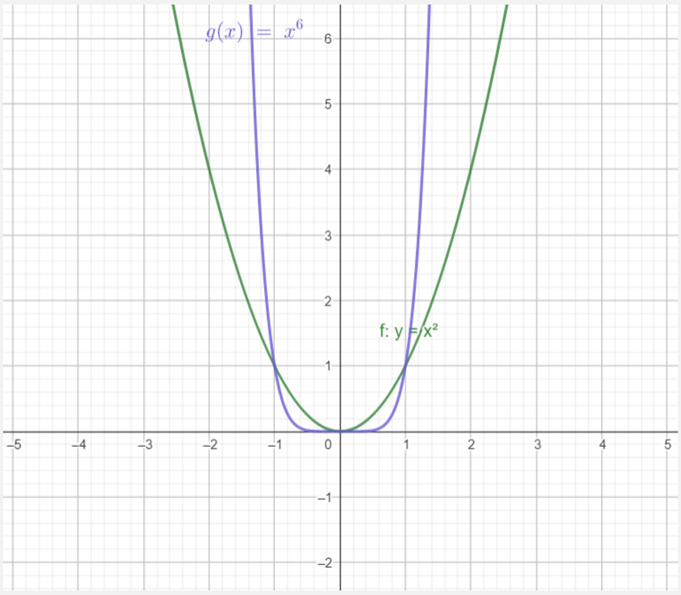
        Проміжки знакосталості: **(-∞;0) і (0;∞)**

        Функція $\boldsymbol{y = x^n}$**,** де n – парне натуральне число є **парною**,

        $(-x)^{2k} = x^{2k}$

        Проміжком спадання даної функції є (-∞;0], а зростання – [0;∞).

        Приклад побудови графіка $y = x^6$, де n - парне натуральне число



2. Якщо $\mathbf{n = 2k + 1, k = N}$, то n – **не парне натуральне число**, $n > 0$.

Тоді:

$\boldsymbol{D(y) \in R}$

Якщо $x < 0$, то $\boldsymbol{x^{2k+1} < 0}$

Якщо $x > 0$, то $\boldsymbol{x^{2k+1} > 0}$

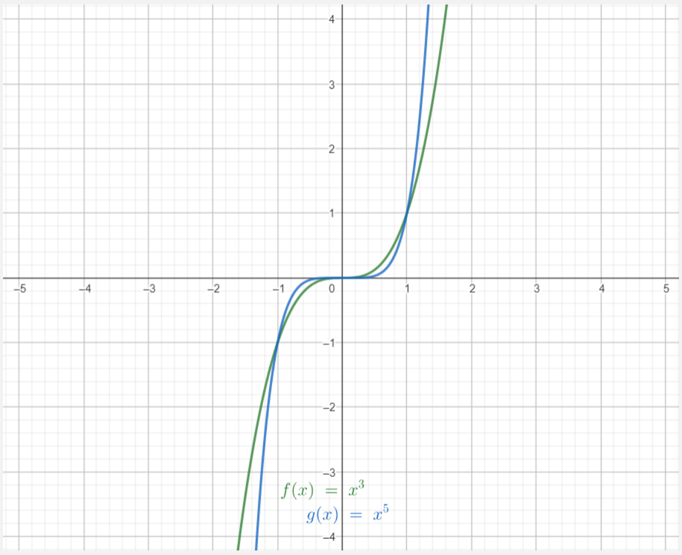
Проміжки знакосталості: **(-∞;0) і (0;∞)**

Функція $\boldsymbol{y = x^n}$**,** де n – не парне натуральне число є **не парною**,

$(-x)^{2k} = x^{2k}$

Функція є зростаючою

Приклад побудови графіка $y = x^5$, де n – не парне натуральне число



3. $\boldsymbol{y = x^n}$, де **n** – дійсне число, а $\boldsymbol{x}$ – змінна. У цій функції відповідно $\mathrm{n} \in \mathrm{N}, n < 0$.

Якщо **n = -2k, k = N**, то n – **парне натуральне число**. Тоді маємо

$\boldsymbol{x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}},$

E(y) ∈ (0;∞)

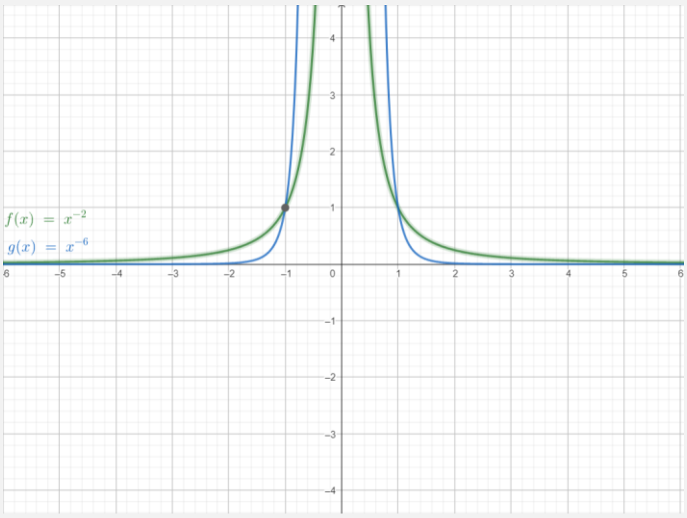
$\boldsymbol{D(y)}$ ∈ **(-∞;0) ∪ (0;∞)**

Проміжки знакосталості: **(-∞;0) і (0;∞)**

Функція $\boldsymbol{y = x^{-n}}$, де n – парне натуральне число є **парною**,

Проміжком спадання даної функції є (0;∞), а зростання – (-∞;0).

Приклад побудови графіка $y = x^{-6}$, де n - парне натуральне число



4. Якщо **n = 2k - 1, k = N**, то n – **не парне натуральне число**, $n < 0$.

Тоді:

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}) = (-\infty; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}; \infty)$

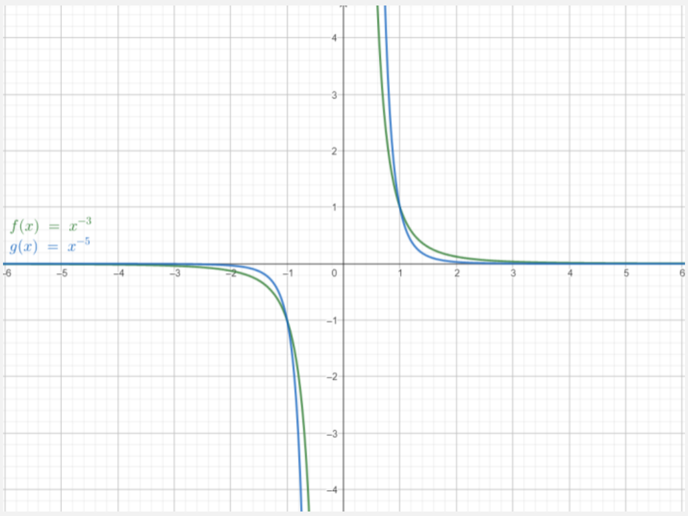
E(y) ∈ (-∞;0) ∪ (0;∞)

Проміжки знакосталості: **(-∞;0) і (0;∞)**

Функція $\boldsymbol{y = x^{-n}}$**,** де n – не парне натуральне число є **не парною**,

Функція спадає на кожному з проміжків **(-∞;0) і (0;∞)**

Приклад побудови графіка $y = x^{-5}$, де n – не парне натуральне число



5. $\boldsymbol{y = x^{\frac{m}{n}}}$**,** де **m ∈ Z, n ∈ N**, а $\boldsymbol{x}$ – змінна.

E(y) ∈ (0;∞)

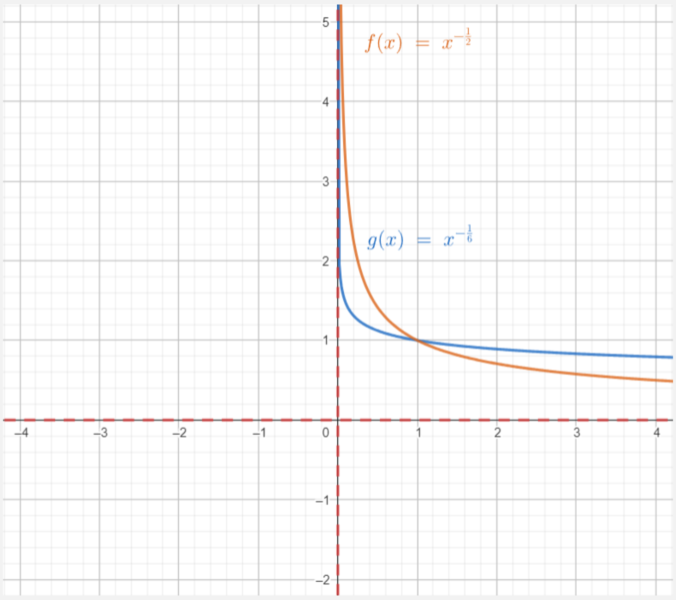
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}) \in$ **(0;∞)**

Проміжок знакосталості: **(0;∞)**

Функція є функцією загального вигляду.

Являє собою зростаючу функцію

Приклад побудови графіка$y = x^{-\frac{1}{6}}$, де **m ∈ Z, n ∈ N**



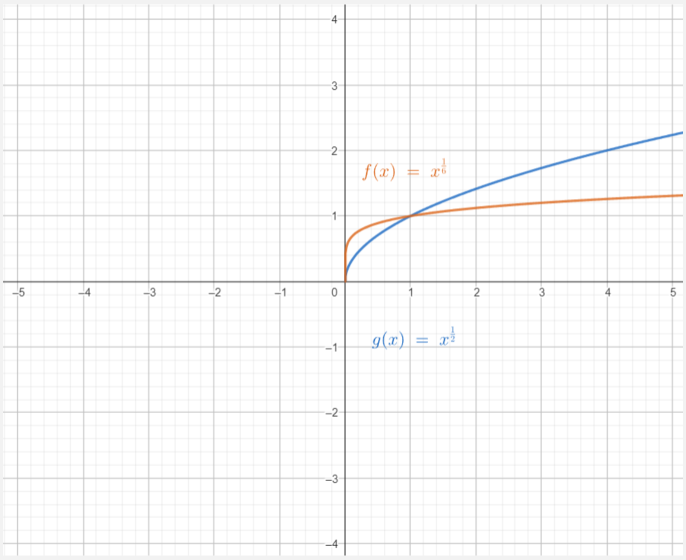
6. $\boldsymbol{y = x^{\frac{m}{n}}}$, де **m ∈ N, n ∈ N**, а **x** – змінна.

E(y) ∈ [0;∞)

$\boldsymbol{D(y)} \in$ **[0;∞)**

Проміжок знакосталості: **[0;∞)**

Приклад побудови графіка $y = x^{\frac{1}{6}}$, де **m ∈ N, n ∈ N**



7. $\boldsymbol{y = x^{\frac{m}{n}}}$, де **m ∈ N, n ∈ N**, а $\boldsymbol{x}$ – змінна. У цій функції відповідно $n > 0$.

E(y) ∈ [0;∞)

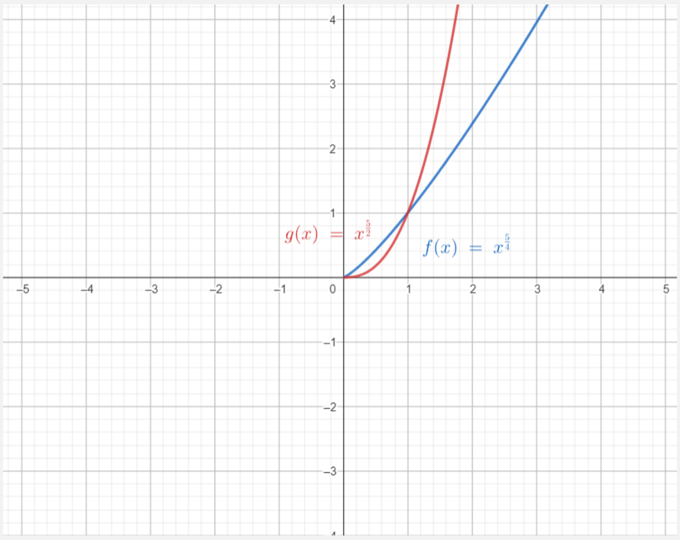
$\boldsymbol{D(y)} \in$ **[0;∞)**

Проміжок знакосталості: **[0;∞)**

Функція є функцією загального вигляду.

Являє собою зростаючу функцію

Приклад побудови графіка $y = x^{\frac{5}{4}}$, де $\mathbf{m \in N, n \in N}$



8. $\boldsymbol{y = x^{\frac{m}{n}}}$**,** де $\mathbf{m \in Z, n \in N,}$ а $\boldsymbol{x}$ – змінна.

E(y) ∈ [0;∞)

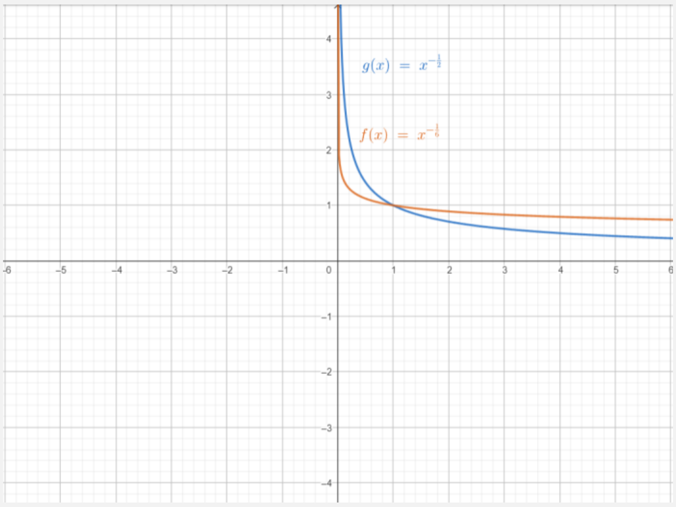
$\boldsymbol{D(y)} \in$ **[0;∞)**

Проміжок знакосталості: **[0;∞)**

Функція є функцією загального вигляду.

Являє собою спадаючою функцією

Приклад побудови графіка $y = x^{-\frac{1}{6}}$, де $\mathbf{m \in Z, n \in N}$



2) $\boldsymbol{y} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x}}$, де n – дійсне число, $n > 1$ і n ∈ N.

1. Якщо **n** = **2k** і k ∈ N, то відповідно:

D(y) = [0;∞)

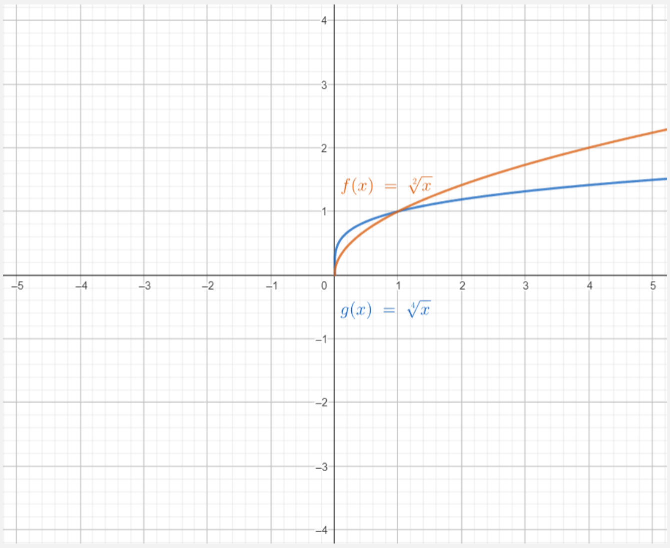
E(y) = [0;∞)

Проміжок знакосталості: [0;∞)

Функція є функцією загального вигляду

Зростає на проміжку [0;∞)

Приклад побудови графіку функції $y = \sqrt[4]{x}$



2. Якщо **n = 2k+1** і k ∈ N, то відповідно:

D(y) = R

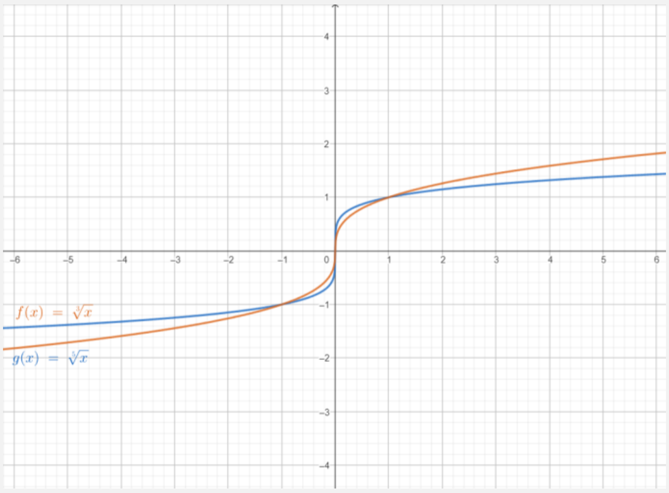
E(y) = R

Проміжок знакосталості: [0;∞)

Функція є непарною

Зростає на усьому проміжку

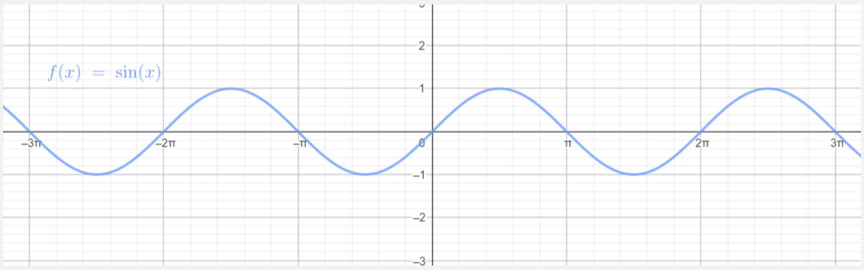
Приклад побудови графіку функції $y = \sqrt[5]{x}$



- Тригонометричні функції:

Слід зазначити, що тригонометричні функції $y = sin\ x$ і $y = cos\ x$ є періодичними з періодом 2π, $y = tg\ x$ і $y = ctg\ x$ є періодичними з періодом π.

1) $y = sin\,x$



Властивості функції $y = \sin x$:

D(y) = R

E(y) = [-1;1]

Функція є непарною

T = 2π

Точки перетину з віссю ох $\begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ y = 0 \end{cases}$

Точки перетину з віссю оу (0;0)

Нулями функції є x = $\pi n, n \in Z$

Проміжки знакосталості функції:

$y > 0$, при x $\in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, n ∈ Z

$y < 0$, при x $\in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, n ∈ Z

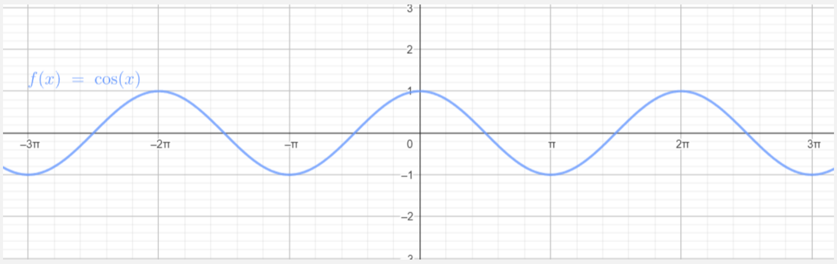
Проміжок зростання $y = sin\ x$: при x $\in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, n ∈ Z

Проміжок спадання $y = sin\ x$: при x $\in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, n ∈ Z

$y_{max} = 1$, при x $= \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n ∈ Z

$y_{min} = -1$, при x = -$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n ∈ Z

2) $y = cos\,x$



Властивості функції $y = cos\,x$:

D(y) = R

E(y) = [-1;1]

Функція є парною

T = 2π

Точки перетину з віссю ох $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ y = 0 \end{cases}$

Точки перетину з віссю оу (0;1)

Нулями функції є x = $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Проміжки знакосталості функції:

$y > 0$, при x ∈ $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, n ∈ Z

$y < 0$, при x ∈ $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, n ∈ Z

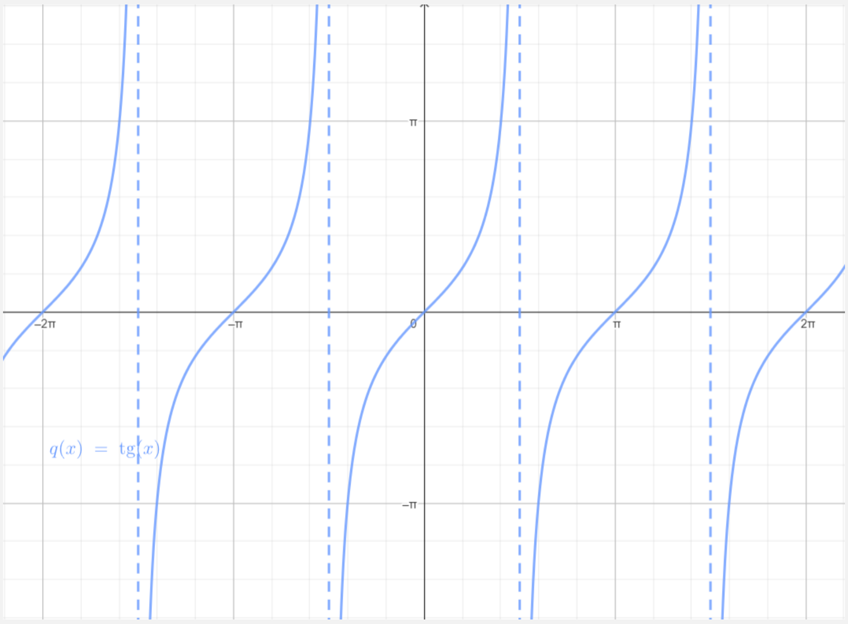
Проміжок зростання $y = cos\,x$: при x ∈ $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, n ∈ Z

Проміжок спадання $y = cos\,x$: при x ∈ $[0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, n ∈ Z

$y_{max} = 1$, при x = $2\pi n$, n ∈ Z

$y_{min} = -1$, при x = $\pi + 2\pi n$, n ∈ Z

3) $y = tg\,x$



Властивості функції $y = tg\,x$:

D(y) = $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, n ∈ Z

E(y) = R

Функція є непарною

T = π

Точки перетину з віссю ох $\begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ y = 0 \end{cases}$

Точки перетину з віссю оу (0;0)

Нулями функції є х = $\pi n, n \in Z$

Проміжки знакосталості функції:

$y > 0$, при х ∈ $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, n ∈ Z

$y < 0$, при х ∈ $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, n ∈ Z

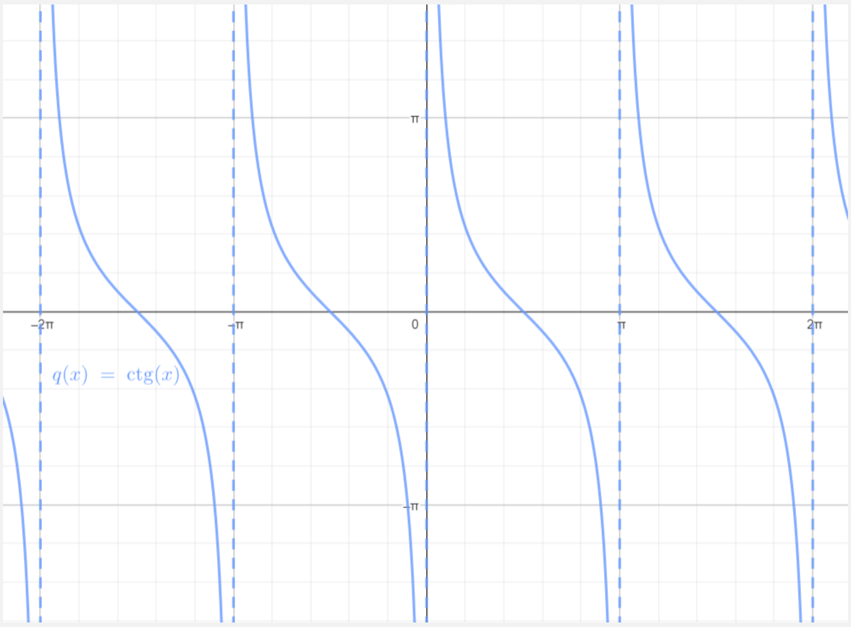
Функція є зростаючою

Проміжок зростання $y = tg\,x$: при ∀ x ∈ D(y)

$y_{max} \nexists$

$y_{min} \nexists$

4) $y = ctg\, x$



Властивості функції $y = ctg\ x$:

D(y) = $(\pi n; \pi + \pi n)$, n ∈ Z

E(y) = R

Функція є непарною

T = π

Точки перетину з віссю ox $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ y = 0 \end{cases}$

Точки перетину з віссю oy ∄

Нулями функції є x = $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Проміжки знакосталості функції:

$y > 0$, при x ∈ $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, n ∈ Z

$y < 0$, при x ∈ $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, n ∈ Z

Функція є спадною

Проміжок спадання $y = ctg\ x$: при x ∈ $(\pi n; \pi + \pi n)$, n ∈ Z

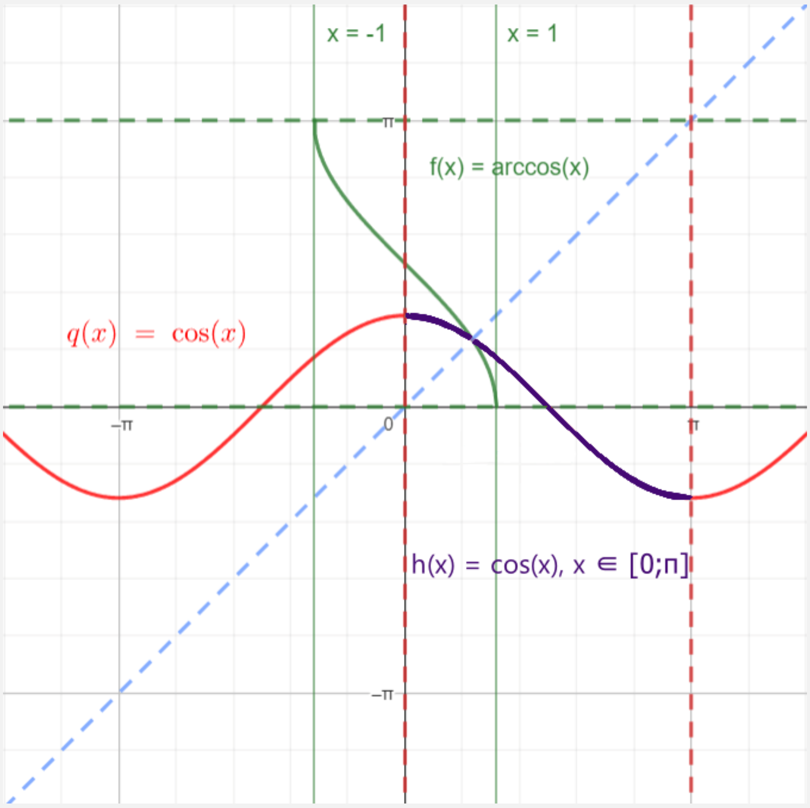
y_{max} ∄

y_{min} ∄

- Обернені тригонометричні функції:

1) $y = arccos\, x$

Функції y = arccos x і y = cos x є взаємно оберненими.



Властивості функції $y = arccos\, x$:

D(y) = $x \in [-1; 1]$

E(y) = $y \in [0;\pi]$

$y \geq 0$

Функція загального вигляду

для будь-якого x ∈ [-1;1] виконується рівність:

arccos(-x) = π – arccos x

Точки перетину з віссю *ox* (1;0)

Точки перетину з віссю *oy* $(0;\frac{\pi}{2})$

Нулями функції є x = 1

Проміжок знакосталості функції:

$y > 0$, при x ∈ [-1;1)

функція є спадною

Проміжок спадання $y = arccos\, x$: при $x \in [-1; 1]$

$y_{max} = y(-1) = \pi$

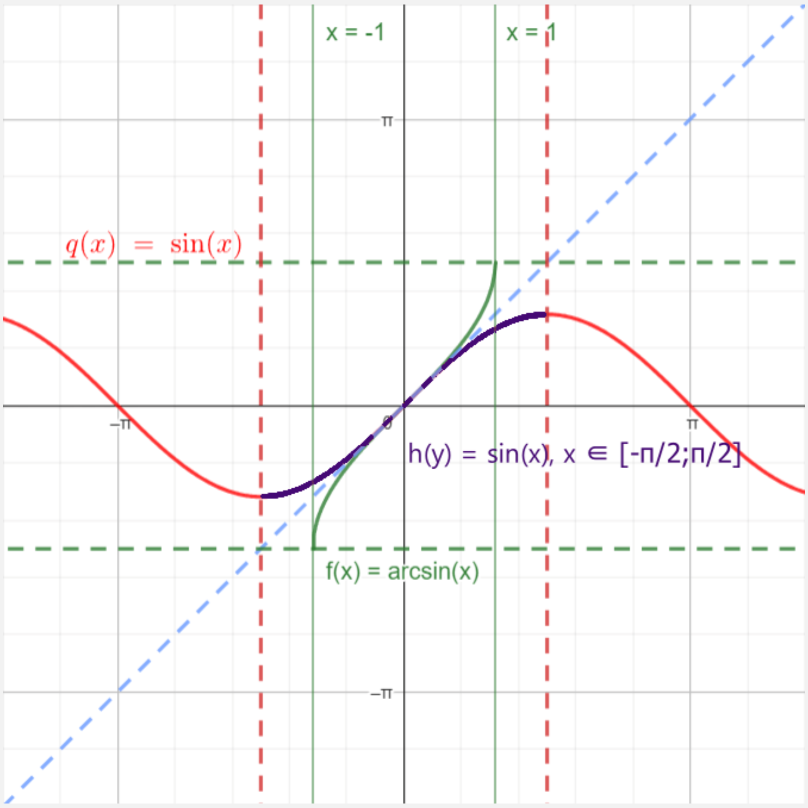
$y_{min} = y(1) = 0$

$cos(arccosa) = a \in [-1; 1]$

$arccos(cosa) = a \in [0; \pi]$

2) $y = arcsin\, x$

Функції y = arcsin x і y = sin x є взаємно оберненими.



Властивості функції $y = arcsin\, x$:

D(y) = $x \in [-1; 1]$

E(y) = $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Функція непарна

$arcsin(-x) = -arcsinx$

Точки перетину з віссю *ox* (0;0)

Точки перетину з віссю *oy* (0;0)

Нулями функції є x = 0

Проміжки знакосталості функції:

$y > 0$, при $x \in (0;1]$

$y < 0$, при $x \in$ [-1;0)

функція є зростаючою

Проміжок зростання $y = arcsin\, x$: при $x \in [-1; 1]$

$y_{max} = y(1) = \frac{\pi}{2}$

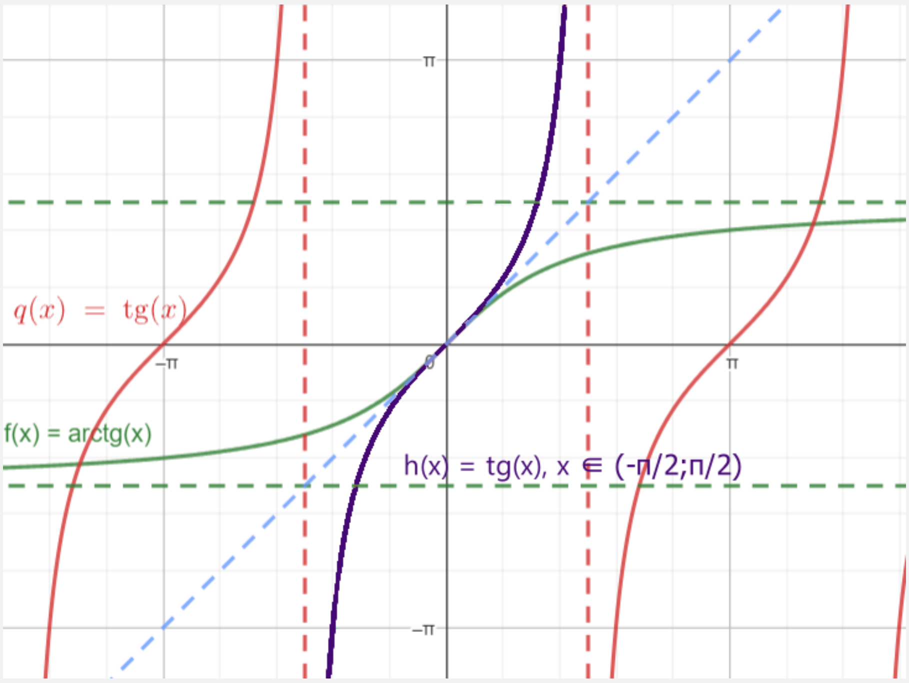
$y_{min} = y(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$sin(arcsina) = a \in [-1; 1]$

$arcsin(sina) = a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $y = arctg\, x$

Функції y = arctg x і y = tg x є взаємно оберненими.



Властивості функції $y = arctg\, x$:

D(y) = $x \in R$

E(y) = $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Функція непарна

$arctg(-x) = -arctgx$

Точки перетину з віссю ox (0;0)

Точки перетину з віссю oy (0;0)

Нулями функції є $x = 0$

Проміжки знакосталості функції:

$y > 0$, при $x \in$ (-∞;0)

$y < 0$, при $x \in$ (0;∞)

функція є зростаючою

Проміжок зростання $y = arctg\,x$: при $x \in (-\infty; \infty)$

$y_{max} = \nexists$

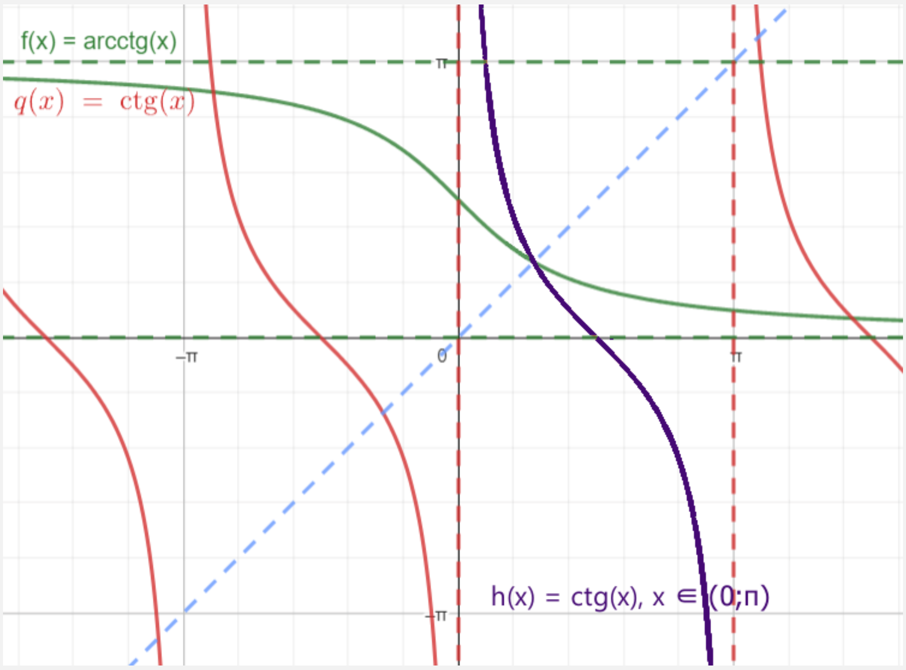
$y_{min} = \nexists$

$tg(arctga) = a \in R$

$arctg(tga) = a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

4) $y = arcctg\,x$

Функції y = arcctg x і y = ctg x є взаємно оберненими.



Властивості функції $y = arctg\,x$:

D(y) = $x \in R$

E(y) = $y \in (0; \pi)$

Функція загального вигляду

для будь-якого x ∈ R виконується рівність:

$\boldsymbol{arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x}$

Точки перетину з віссю ox ∄

Точки перетину з віссю oy $(0;\frac{\pi}{2})$

Нулів функції не існує

Проміжок знакосталості функції:

$y > 0$, при $x \in (-\infty;\infty)$

функція є спадною

Проміжок спадання $y = arcctg\, x$: при $x \in (-\infty; \infty)$

$y_{max} = \nexists$

$y_{min} = \nexists$

$ctg(arcctga) = a \in R$

$arcctg(ctga) = a \in (0; \pi)$

Перетворення графіків елементарних функцій

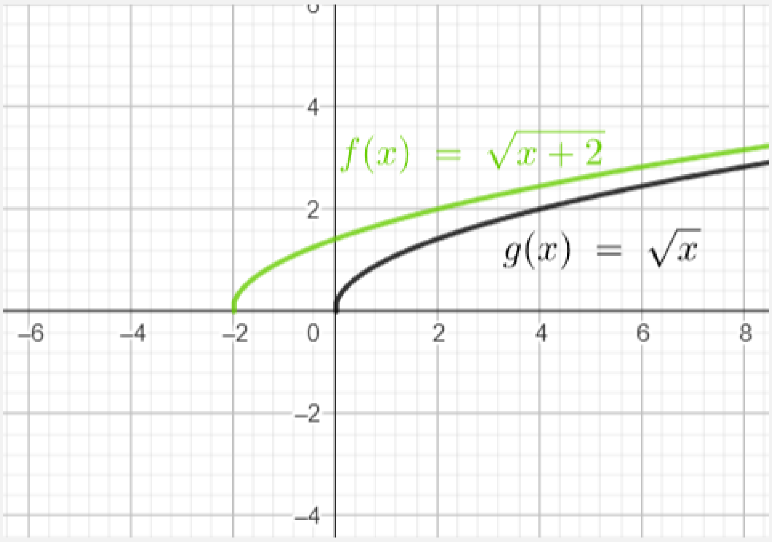
Функції дозволяють моделювати та аналізувати різні явища, вирішувати рівняння. Також з ними можно взаємодіяти у вигляді елементарних перетворень, які бувають як звичайні, так і більш складні. У даній курсовій роботі ми розглянемо різні види перетворень графіків функцій та методи їх побудови.

Спершу розглянемо менш складні перетворення на прикладі графіка функції

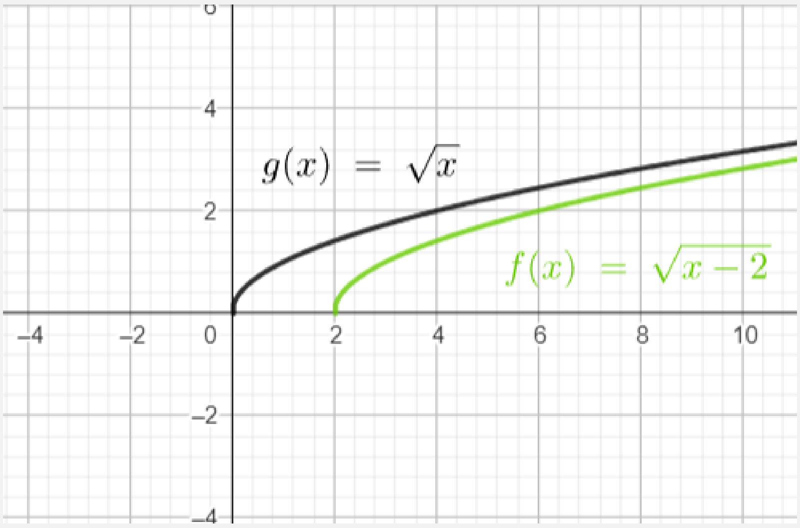
у =$\sqrt{x}$, такі, як додавання числа до аргументу, додавання числа до функції. Далі множення аргументу та множення функції, «одягання» модуля на функцію та на аргумент.

I. Додавання(або віднімання) числа до аргументу.

y = $\sqrt{x+2}$



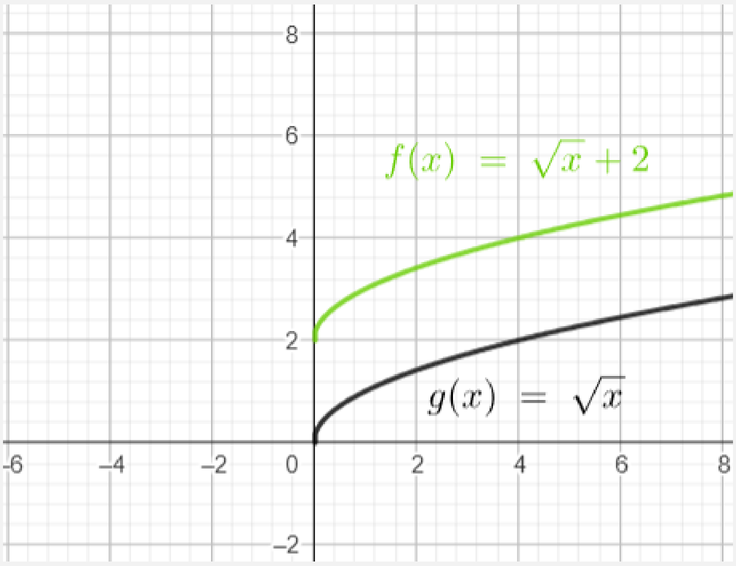
y = $\sqrt{x-2}$



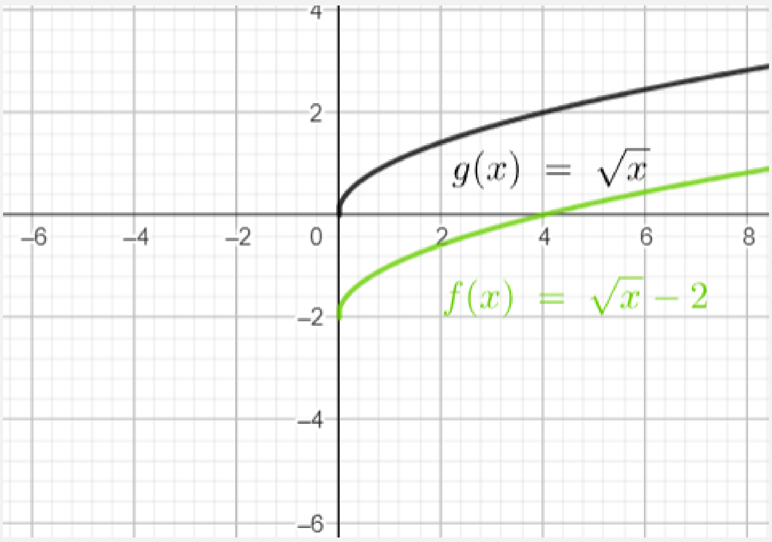
При додаванні числа *n* до аргументу ми пересуваємо графік по осі *ox* вліво на *n* одиниць. При відніманні ми робимо аналогічну дію, але пересуваємо по осі *ox* вправо.

II. Додавання(або віднімання) числа до функції.

y = $\sqrt{x} + 2$



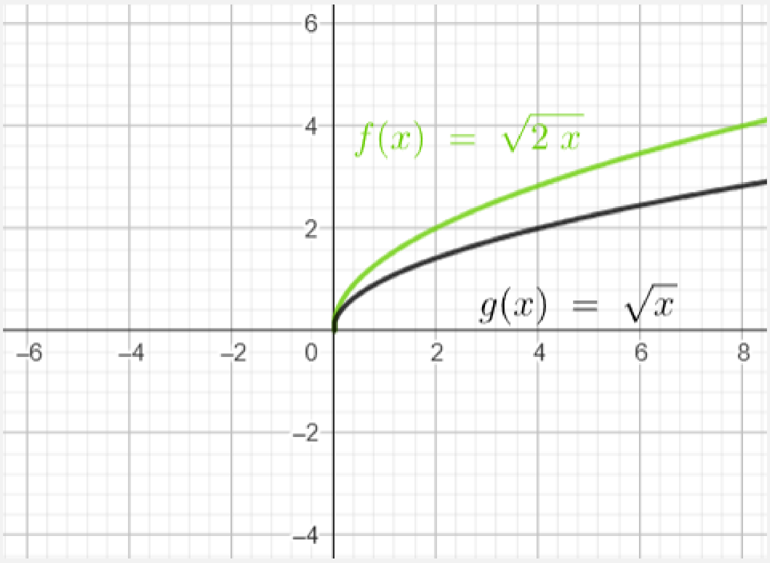
y = $\sqrt{x} - 2$



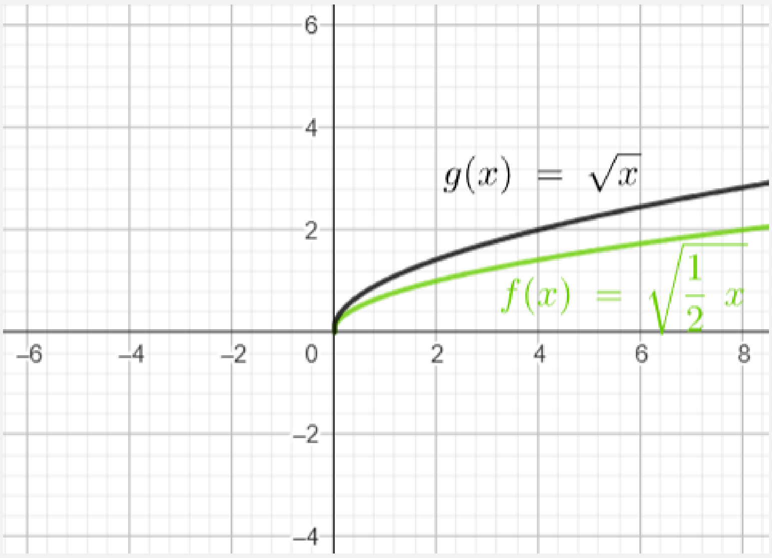
При додаванні числа n до функції ми переносимо графік по осі *oy* вгору на *n* одиниць. При відніманні переносимо графік по осі *oy* вниз на *n* одиниць.

III. Множення аргументу на число.

y = $\sqrt{2x}$



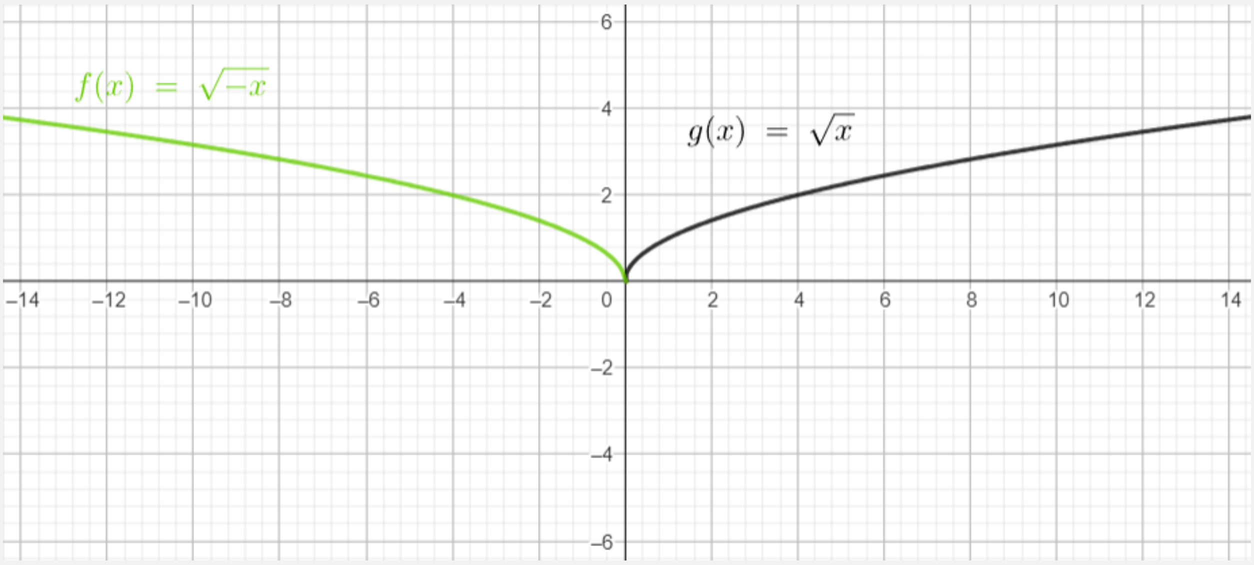
y = $\sqrt{\frac{1}{2}x}$



При множенні аргументу на ціле число *n*, то графік стискається до осі *oy* у *n* разів. При множенні числа на дробове число($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,…, $\frac{1}{n}$) виконується розтяг графіку у $\frac{1}{n}$ разів відносно осі *oy*.

IV. Множення аргументу на число (-1).

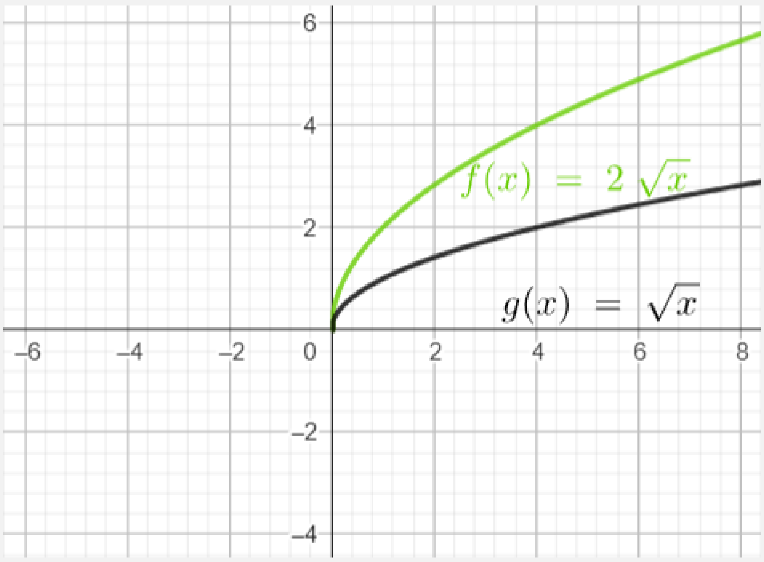
y = $\sqrt{-x}$



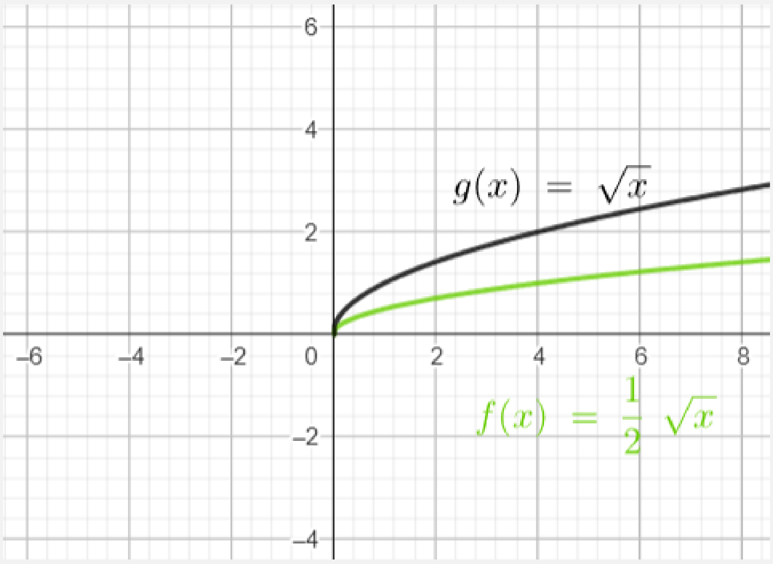
Таке перетворення називають симетрією відносно осі ординат, бо при побудові ми симетрично відображаємо графік відносно осі *oy*.

V. Множення функції на число.

y = $2\sqrt{x}$



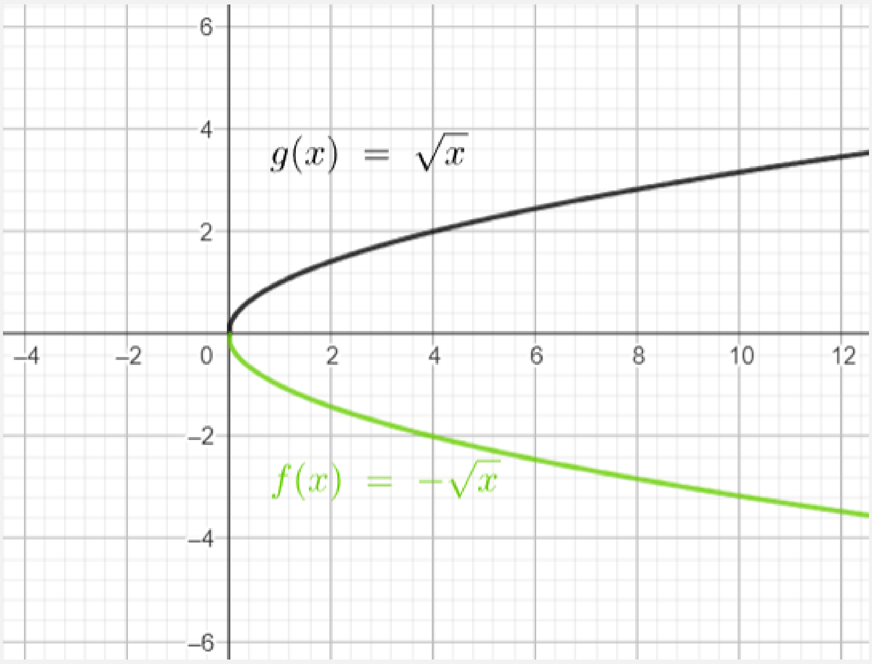
y = $\frac{1}{2}\sqrt{x}$



При множенні функції на ціле число *n* відбувається розтяг у *n* разів вздовж осі *oy*. При множенні функції на дробове число($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$,…, $\frac{1}{n}$), то графік стискається у $\frac{1}{2}$ разів відносно *ox*.

VI. Множення функції на число (-1).

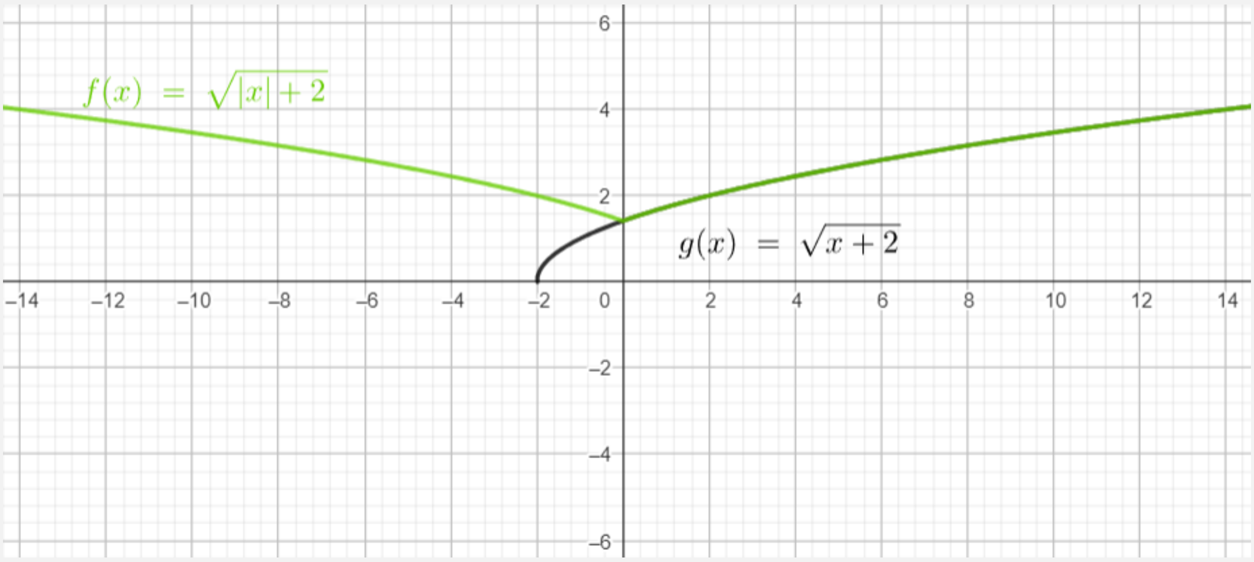
y = -$\sqrt{x}$



Таке перетворення називають симетрією відносно осі абсцис, бо при побудові ми симетрично відображаємо графік відносно осі *ox*.

VII. «Одягання» модуля на аргумент.

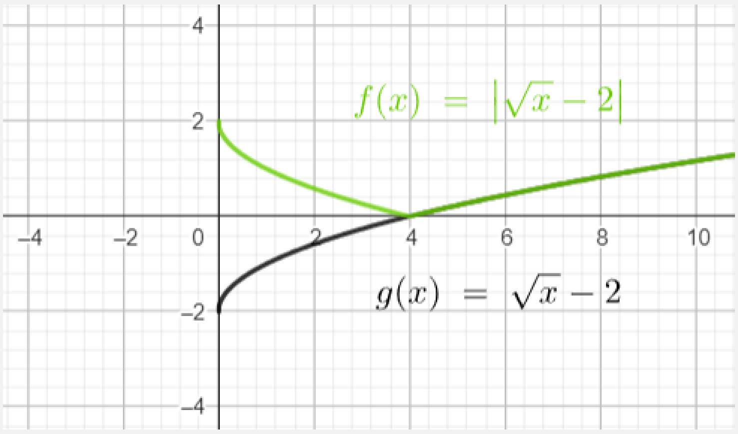
y = $\sqrt{|x| + 2}$



При «одяганні» модуля на аргумент частина графіка, яка була розташована у правій півплощині зберігається і симетрично відображається відносно *оу*. В той час, як частина графіка, яка знаходилась у лівій півплощині знищується.

VIII. «Одягання» модуля на функцію.

y = $|\sqrt{x} - 2|$

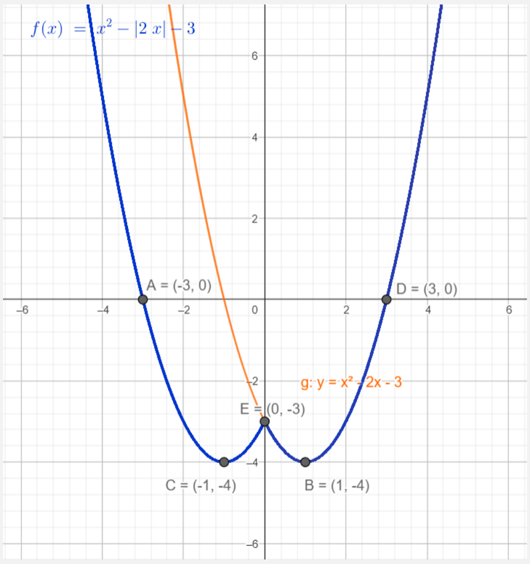


При «одяганні» модуля на функцію частина графіка у верхній півплощині залишається без змін, а частина графіка у нижній півплощині знищується і симетрично відображається відносно осі *ох*.

Також розглянемо «одягання» модуля на функцію та аргумент графіку функції, яка задається квадратним рівнянням. Візьмемо для зразку функцію $y = x^2 - x - 3$.

Спочатку розглянемо «одягання» модуля на аргумент, тобто

$y = x^2 - |2x| - 3$, тоді частина графіка, яка була розташована у правій півплощині зберігається і симетрично відображається відносно *оу*.



Виконаємо дослідження графіку квадратичної функції:

1)$a > 0$, тоді гілки ↑

2)$D(y)$: $x \in R$

3)$E(y)$: $y \in [-4;\infty)$

4)Точки перетину з *ох*: D(3;0), A(-3;0)

5) Точка перетину з *оу*: E(0;-3)

6)Вершинами графіку є точки C(-1;-4) і B(1;-4)

7) Графік є симетричним відносно осі y (парна функція)

8) y > 0, x ∈ (-∞;-3)∪ (3;+∞)

   y < 0, x ∈ (-3;3)

9) Проміжок зростання при x ∈ (-1;0) ∪ (1; ∞)

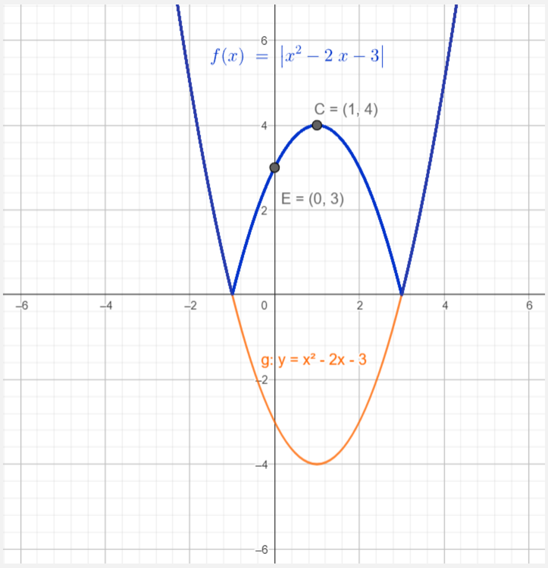
   Проміжок спадання при x ∈ (-∞; -1) ∪ (0;1)

10) y_{max}= ∄

   y_{min}= y(±1) = -4

Далі розглянемо «одягання» модулю на саму функцію, тобто

$y = |x^2 - 2x - 3|$, тоді частина графіка у верхній півплощині залишається без змін, а частина графіка у нижній півплощині знищується і симетрично відображається відносно осі ох.



Виконаємо дослідження графіку квадратичної функції:

1) $D(y)$: $x \in R$
2) $E(y)$: $y \in [0;\infty)$
3) Точки перетину з *ox*: (-1;0), (3;0)
4) Точка перетину з *oy*: E(0;3)
5) Функція загального вигляду
6) $y > 0$, $x \in (-\infty;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)$

$y < 0$, $x \in \emptyset$

7) Проміжок зростання при $x \in [-1;1] \cup [3;\infty)$

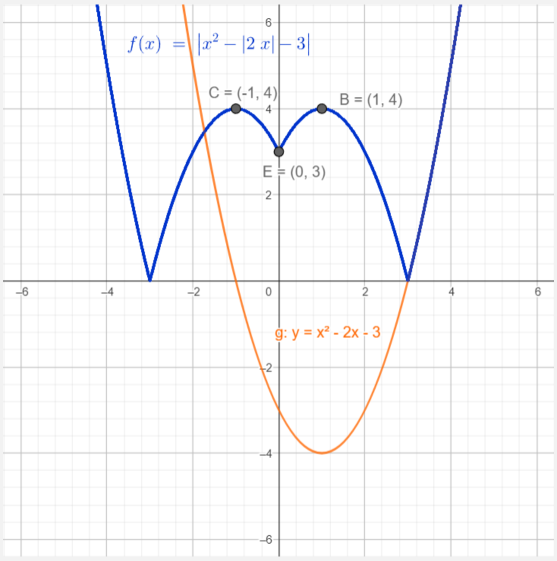
   Проміжок спадання при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;3]$

8) $y_{max} = \nexists$

   $y_{min} = y(-1) = y(3) = 0$

І розглянемо «одягання» модулю на функцію і аргумент, тобто

$y = |x^2 - |2x| - 3|$, тоді частина графіка у верхній півплощині залишається без змін, а частина графіка у нижній півплощині знищується і симетрично відображається відносно осі ох, а також частина графіка, яка була розташована у правій півплощині зберігається і симетрично відображається відносно оу.



Виконаємо дослідження графіку квадратичної функції:

1) $D(y)$: $x \in R$
2) $E(y)$: $y \in [0;\infty)$
3) Точки перетину з *ox*: (-3;0), (3;0)
4) Точка перетину з *oy*: E(0;3)
5) Графік є симетричним відносно осі оу (функція парна)
6) $y > 0$, $x \in (-\infty;-3) \cup (-3;3) \cup (3;+\infty)$

   $y < 0$, $x \in \emptyset$

7) Проміжок зростання при x ∈ [-3;-1] ∪ [0; 1] ∪ [3; ∞)

Проміжок спадання при x ∈ (-∞; -3] ∪ [-1;0] ∪ [1; 3]

8) $y_{max}= \nexists$

$y_{min}=$ y(±3) = 0

Побудова графіків більш складних функцій та процес їх дослідження

Зараз ми розглянемо перетворення складних графіків функцій. Складними вони є через те, що з одною функцією виконується декілька перетворень. Їх перетворення виконується за правилами, що ми розглянули раніше.

Після побудови графіка ми можемо його дослідити. Дослідження виконується за такою схемою:

1) D(y) – область визначення (проекція графіку ф-ції на *ox*).

2) E(y) – область значень функції (проекція графіку ф-ції на *oy*).

3) Точки перетину функції з осями абсцис і ординат.

4) Нулі функції.

5) Парність (непарність).

6) Проміжки знакосталості ($y < 0$, $x \in ..$; $y > 0$, $x \in ..$)

7) Проміжки спадання та зростання.

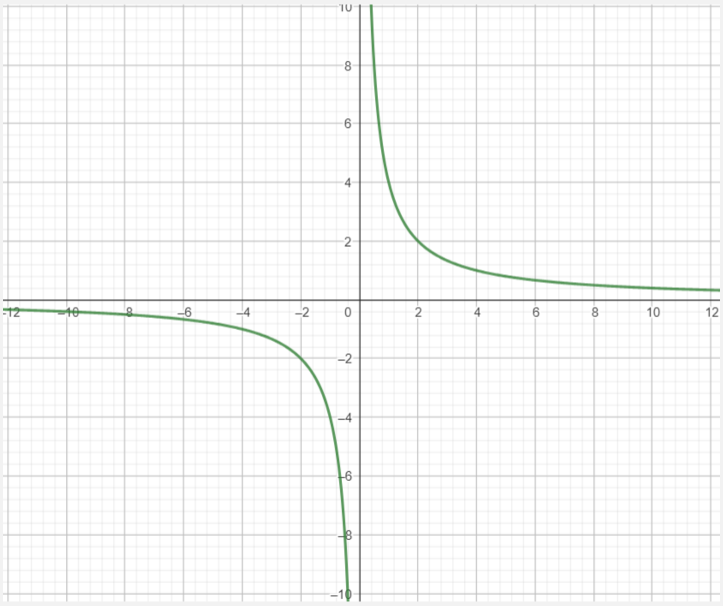
8) Найменше і найбільше значення функції.

Приклад 1.

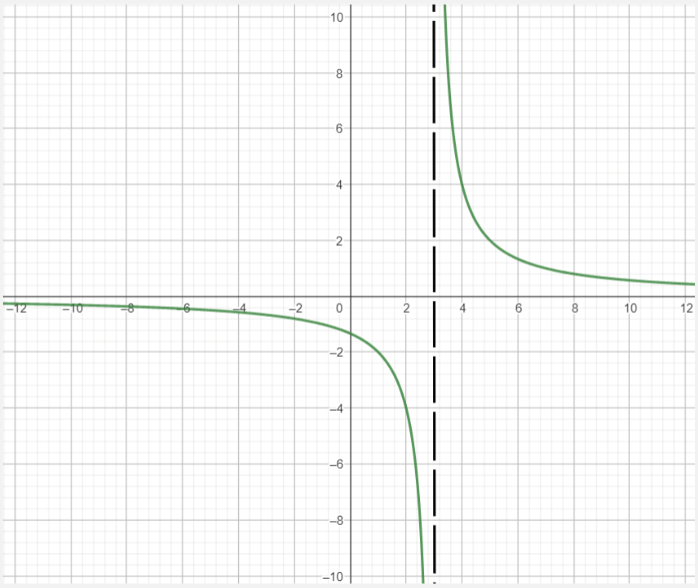
$$y = \left|\frac{4}{(x-3)} + 2\right|$$

Кроки побудови графіку:

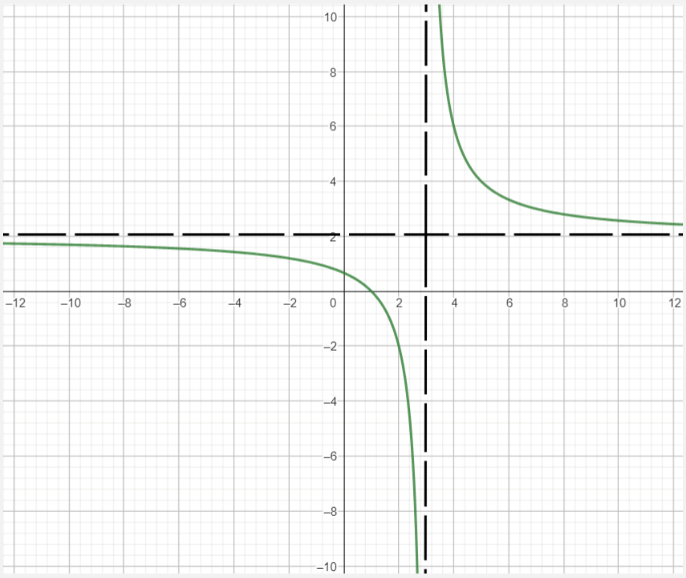
1) Будуємо графік $y = \frac{4}{x}$



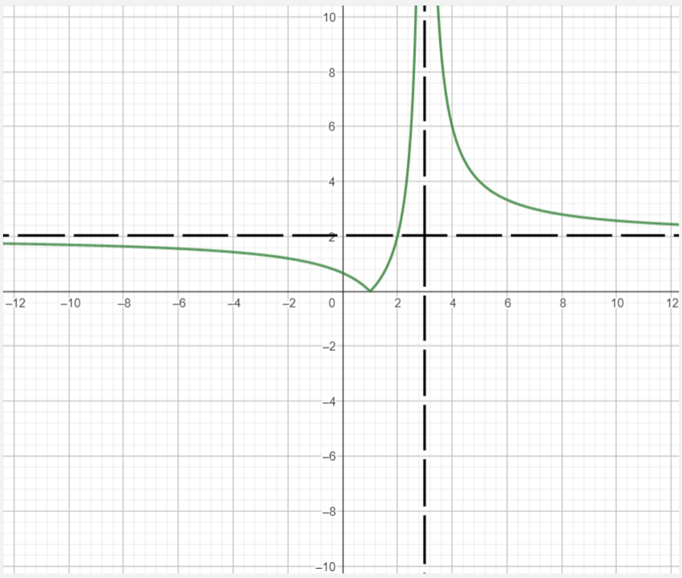
2) Переносимо графік на 3 од. вправо по осі ох, $y = \frac{4}{(x-3)}$



3) Переносимо графік на 2 од. вгору по осі оу, $y = \frac{4}{(x-3)} + 2$



4) Симетрично відображаємо нижню півплощину на верхню відносно осі OX, $y = |\frac{4}{(x-3)} + 2|$



Дослідження графіка:

1) D(y) = (-∞; +∞)\ {3}
2) E(y) = [0; +∞)
3) (1;0) – точка перетину з *ox*

   $(0;2/3\ )$ – точка перетину з *oy*
4) Нулі функції:

   $x_1 = 1$
5) Функція загального вигляду.

6) y > 0, x ∈ (-∞;1)∪ (1;3)∪(3;+∞)

   $y < 0, x \in \emptyset$

7) Проміжок зростання при x ∈ [1;3)

   Проміжок спадання при $x \in$ (-∞; 1] і $x \in (3;\infty)$

8) $y_{max} = \nexists$

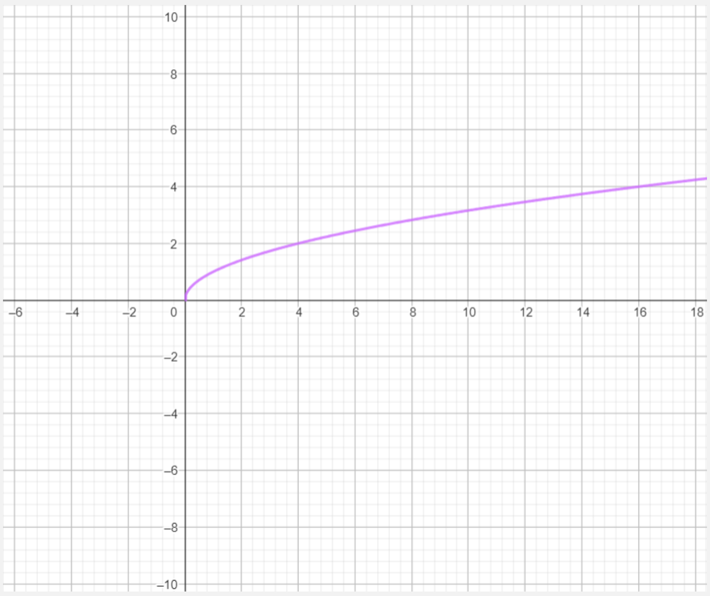
   $y_{min} = y(1) = 0$

Приклад 2.

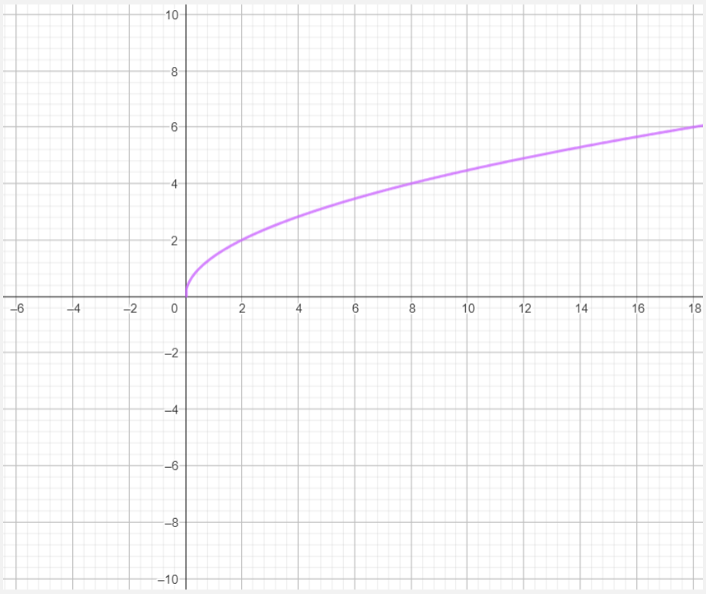
$$y = \sqrt{3 - 2|x|} = \sqrt{-2(|x| - 1{,}5)}$$

Кроки побудови графіку:

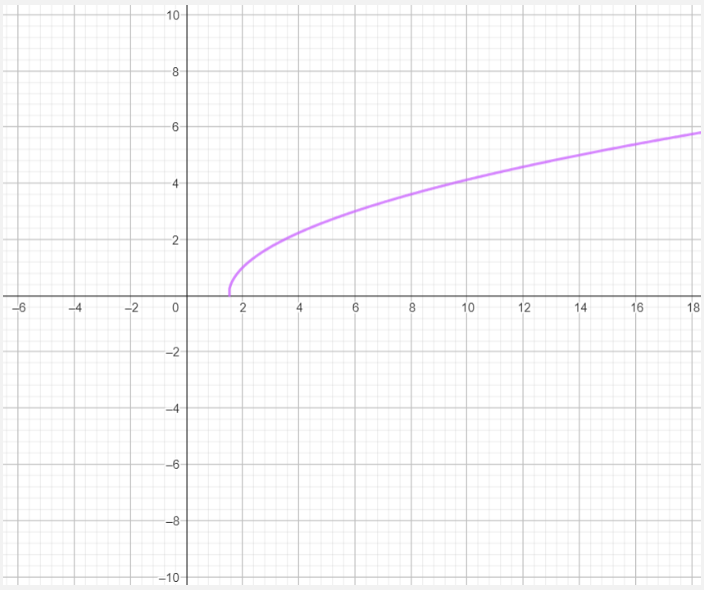
1) Побудуємо графік $y = \sqrt{x}$



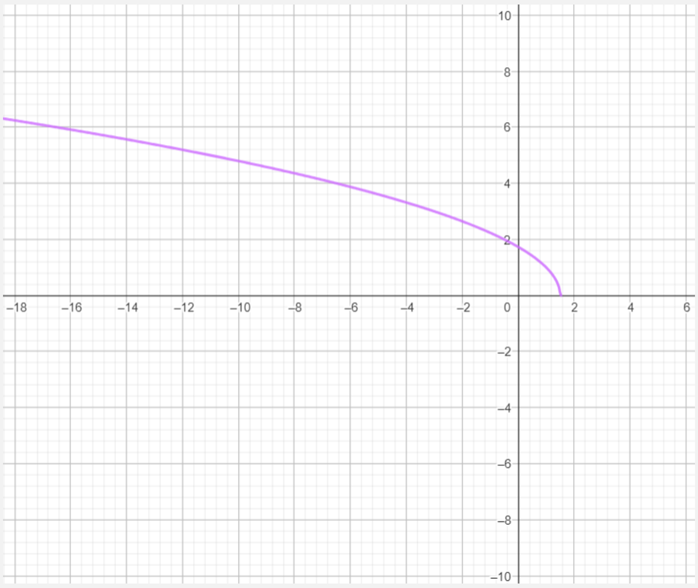
2) Стискаємо графік ф-ції у 2р. до осі ox, $y = \sqrt{2x}$



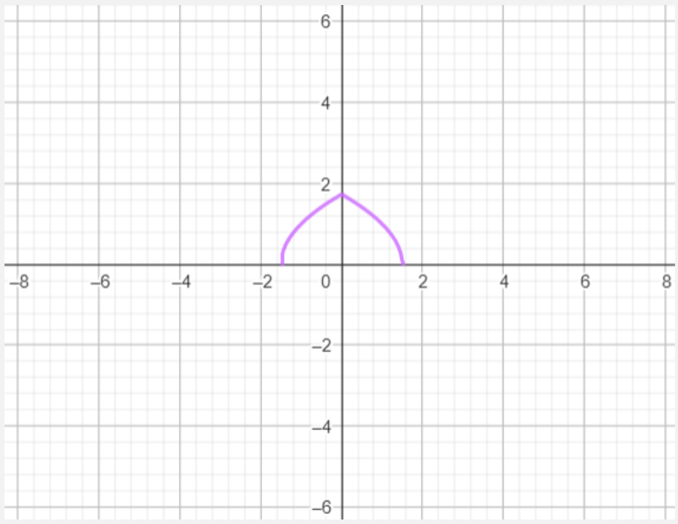
3) Пересуваємо графік вправо на 1,5 од., $y = \sqrt{2(x - 1{,}5)}$



4) Симетрично відображаємо графік відносно осі *oy*, $y \ \sqrt{-2(x - 1{,}5)}$



5) Частину графіку, яка була у правій площині зберігаємо і симетрично відображаємо відносно *oy*. Частину графіку, яка знаходилась в лівій площині – знищуємо, $y = \sqrt{-2(|x| - 1{,}5)}$



Дослідження графіка:

1) D(y) = [-1,5; 1,5]
2) E(y) = [0; $\sqrt{3}$)
3) (-1,5; 0) ; (1,5; 0) – точки перетину з *ox*

   (0; $\sqrt{3}$) – точка перетину з *oy*
4) Нулі функції:

x_1 = -1,5

x_2 = 1,5

5) $f(-x) = f(x)$
6) y > 0, x ∈ (-1,5; 1,5)

   $y < 0, x \in \emptyset$
7) Проміжок зростання при x ∈ [-1,5; 0]

   Проміжок спадання при x ∈ [0; 1,5]
8) y_{max}= y(0) = $\sqrt{3}$

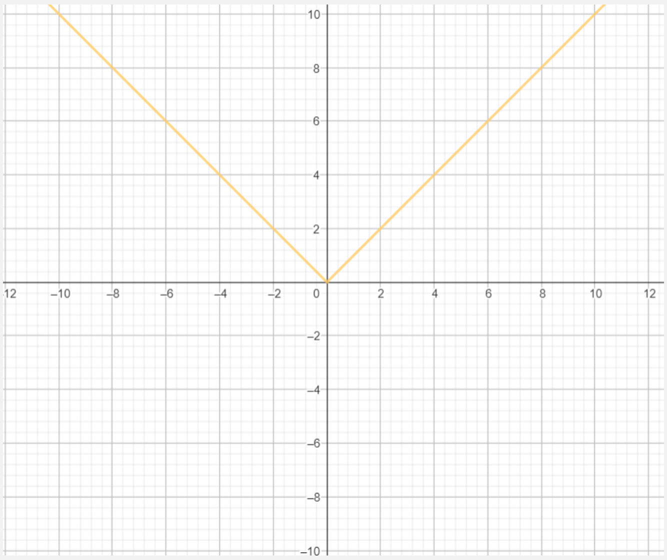
   y_{min}= y(±1,5) = 0

Приклад 3.

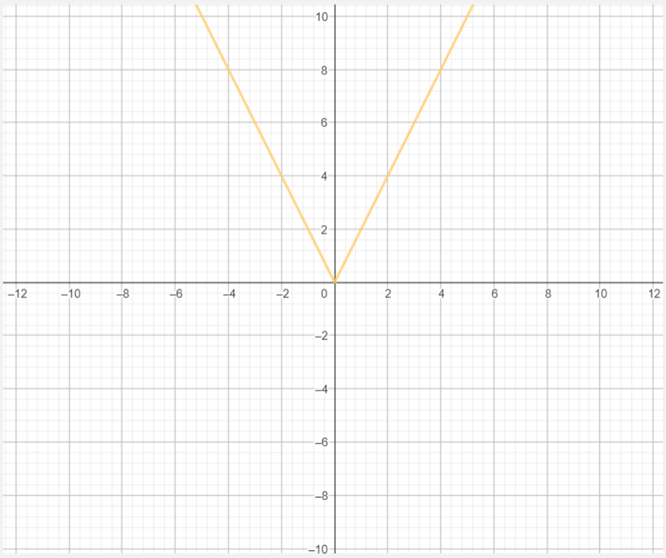
$y = |2|x| - 4|$

Кроки побудови графіку:

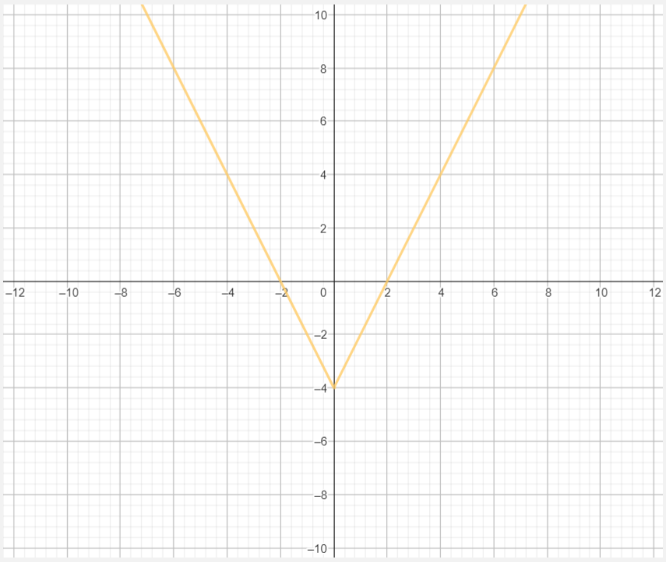
1) Побудуємо графік y = |x|



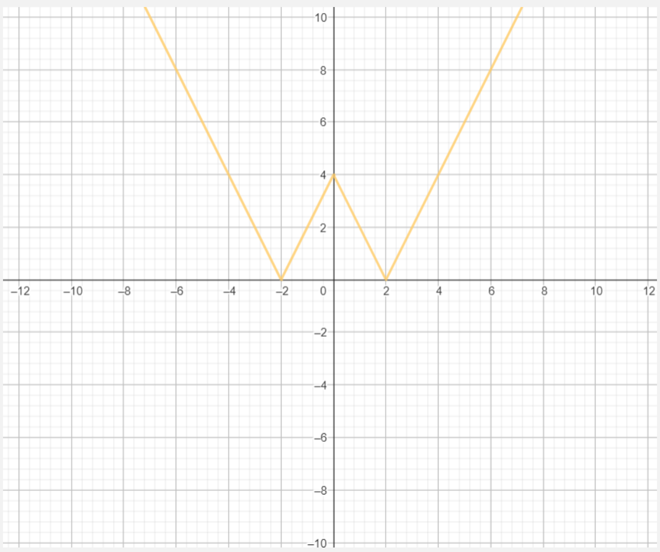
2) Відбувається розтяг у 2р. відносно *ox*, y = 2|x|



3) Пересуваємо графік на 4 од. вниз, y = 2|x| - 4



4) Графік, який знаходиться у нижній площині знищується і симетрично відображається у верхню півплощину, y = |2|x| - 4|



Дослідження графіка:

1) $D(y) = x \in \mathbb{R}$
2) $E(y) = [0;+\infty)$
3) (-2; 0) ; (0; 0) ; (2; 0) – точки перетину з *ox*

   (0; 4) – точка перетину з *oy*
4) Нулі функції:

   $x = -2$

   $x = 2$
5) $f(-x) = f(x)$
6) $y > 0, x \in \mathbb{R}$

   $y < 0, x \in \emptyset$
7) Проміжок зростання при $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$

   Проміжок спадання при $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 2]$
8) $y_{max} = \nexists$
9) $y_{min} = y(\pm 2) = 0;$

Перетворення графіків тригонометричних функцій

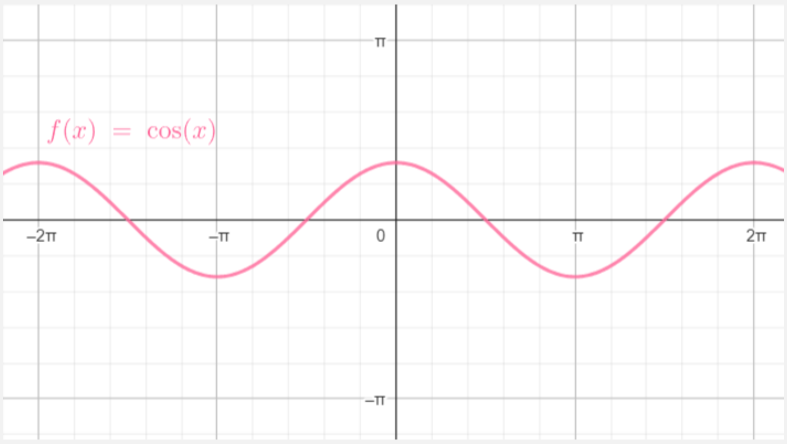
Також розглянемо складні перетворення тригонометричних функцій і їх дослідження.

Приклад 1.

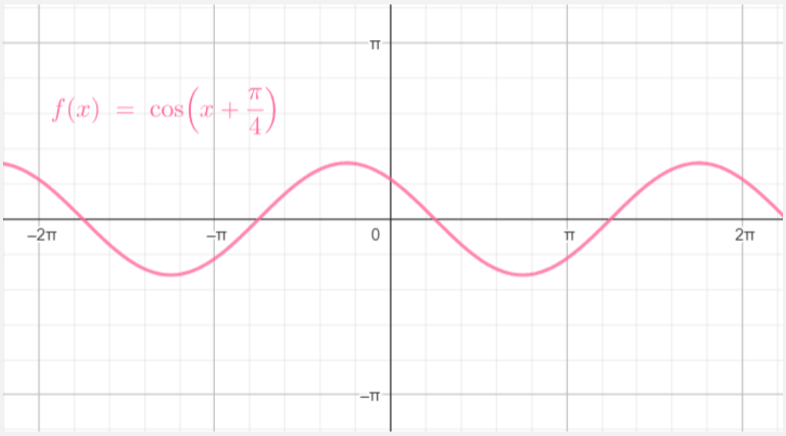
$y = 2cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

Кроки побудови графіку:

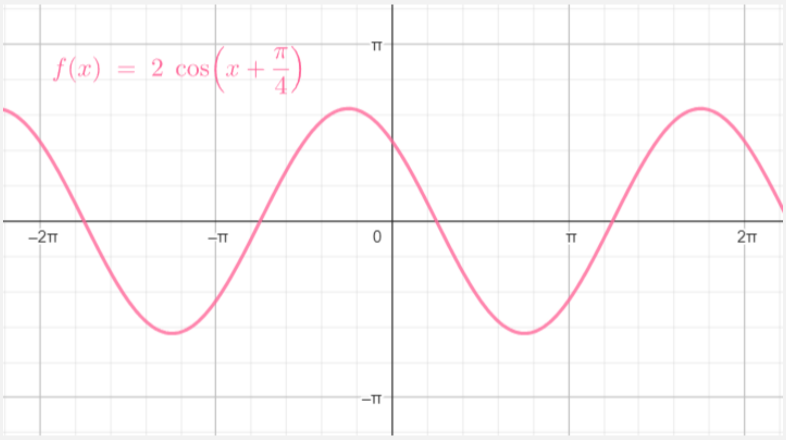
1) Побудуємо графік $y\ = \ cosx$



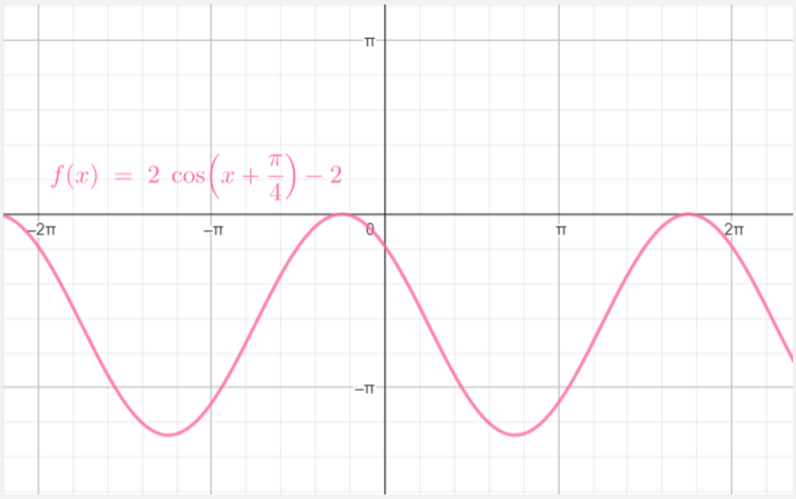
2) Переносимо графік на $\frac{\pi}{4}$ од. вліво, $y\ = \ cos(x + \frac{\pi}{4})$



3) Відбувається розтяг графіку у 2р. вздовж оу, $y = 2cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



4) Переносимо графік на 2 од. вниз, $y = 2cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$



Дослідження графіка:

1) D(y) = x ∈ ℝ
2) E(y) = [-4;0]
3) $(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi; 0), k \in Z$ – точка перетину з *ох*

   $(0, \sqrt{2} - 2)$ – точка перетину з *оу*
4) Нулі функції:

   x = $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$
5) Функція загального вигляду
6) y > 0, x ∈ ∅

   y < 0, x ∈ ℝ
7) T = 2π

8) Проміжок зростання при $x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$, $k \in Z$

Проміжок спадання при x $\in (\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k)$, $k \in Z$

9) $y_{max} = y\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) = 0, k \in Z$

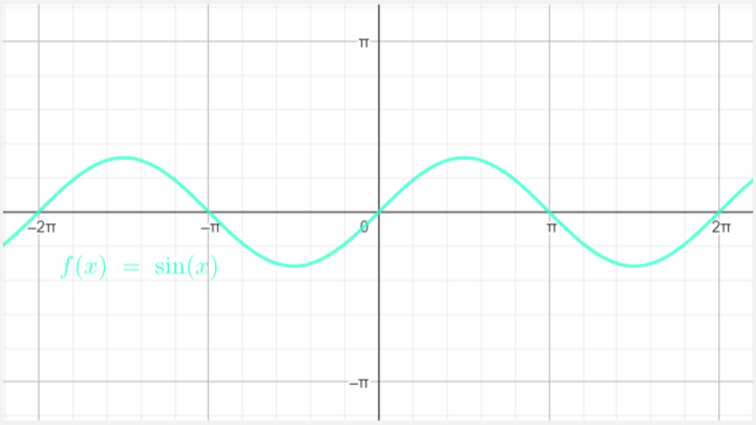
$y_{min} = y(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) = -4, k \in Z$

Приклад 2.

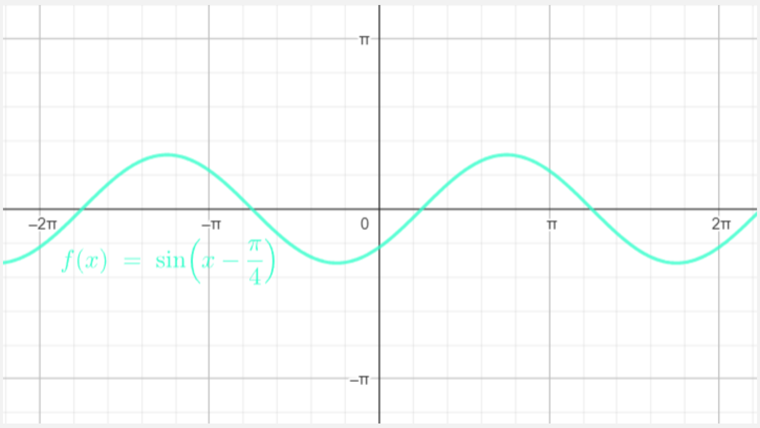
$$y = \frac{1}{2} sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

Кроки побудови графіку:

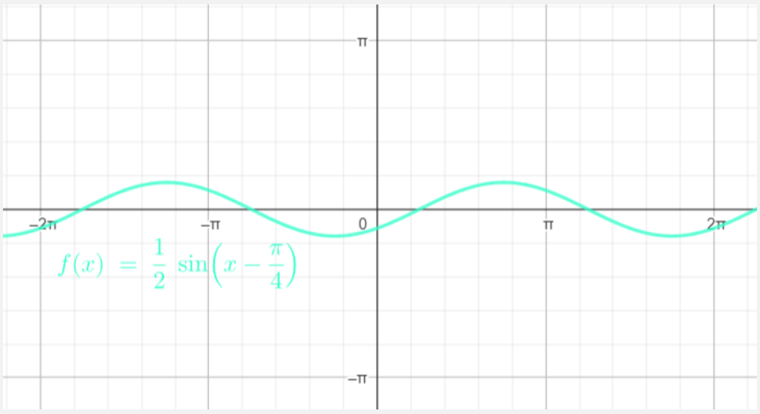
1) Побудуємо графік $y = sinx$



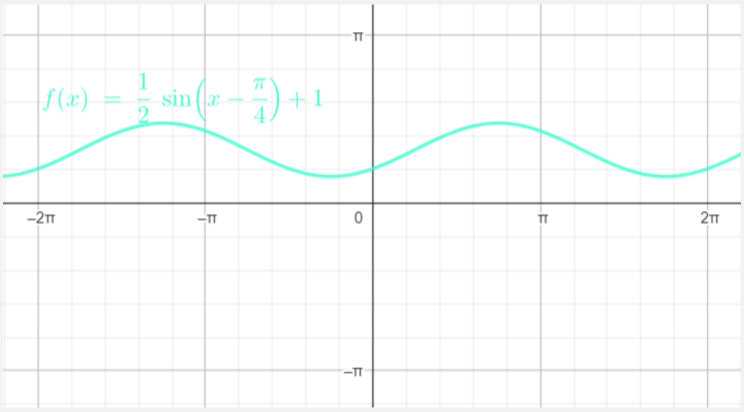
2) Переносимо графік на $\frac{\pi}{4}$ од. вправо, $y = sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



3) Відбувається стискання графіку у 2 р. відносно ох, $y = \frac{1}{2} sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



4) Переносимо графік на 1 од. вверх, $y = \frac{1}{2} sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$



Дослідження графіка:

1) D(y) = x ∈ ℝ
2) E(y) = $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$
3) ∄ – точка перетину з *ох*

   $(0, -\frac{\sqrt{2}}{4} + 1)$ – точка перетину з *оу*
4) Нулів функції не існує
5) Функція загального вигляду
6) y > 0, x ∈ ℝ

   $y < 0, x \in \emptyset$
7) T = 2π
8) Проміжок зростання при $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in Z$

   Проміжок спадання при x ∈ $(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k)$, $k \in Z$

9) $y_{max} = y\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{3}{2}, k \in Z$

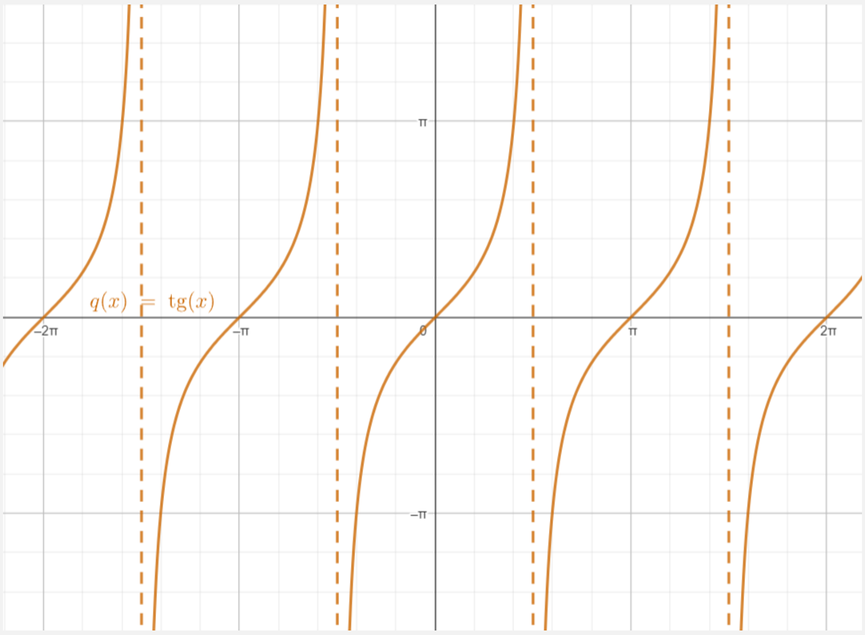
$$y_{min} = y\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}, k \in Z$$

Приклад 3.

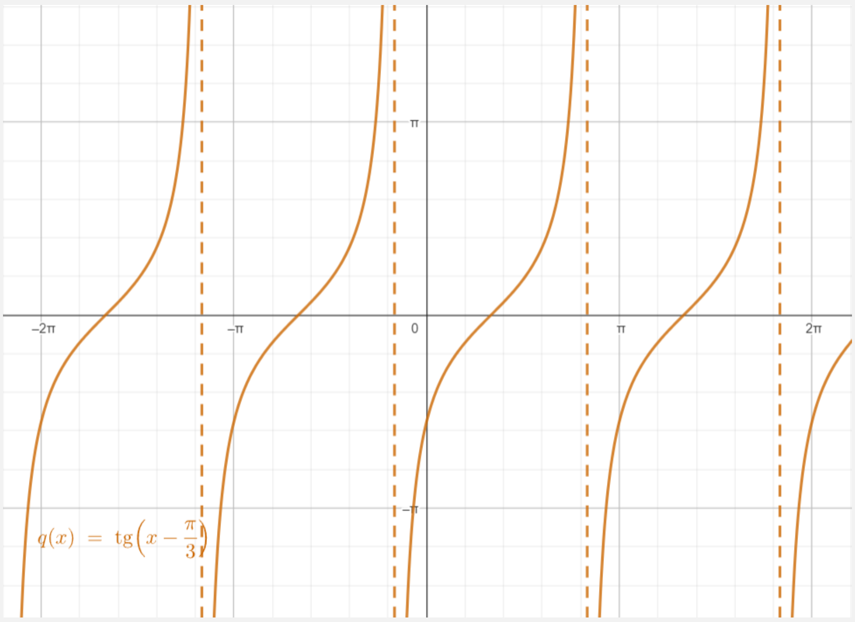
$$y = \left|tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$$

Кроки побудови графіку:

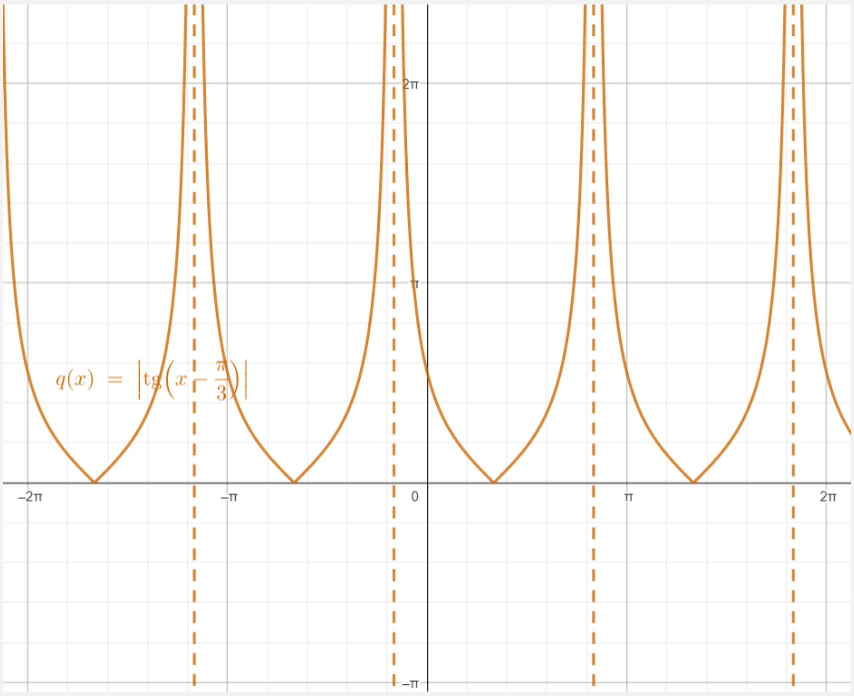
1) Побудуємо графік $y = tgx$



2) Переносимо графік вправо на $\frac{\pi}{3}$ од., $y = tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$



3) Частина графіку у нижній півплощині знищується і симетрично відображається відносно осі ox, $y = \left|tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$



Дослідження графіка:

1) D(y) = x ∈ $\mathbb{R} \backslash \{\frac{5\pi}{6} + k\pi\}, k \in Z$
2) E(y) = $y \geq 0$
3) $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; 0\right)$ – точка перетину з ox де $k \in Z$

   (0;$\sqrt{3}$) – точка перетину з oy
4) Нулі функції:

   x = $\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$
5) Функція загального вигляду
6) y > 0, x ∈ D(y)

   y < 0, x ∈ ∅
7) T = π
8) Проміжок зростання при $x \in (-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + k\pi)$, $k \in Z$

   Проміжок спадання при x ∈ $(\frac{5\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \pi k)$, $k \in Z$
9) $y_{max} = \nexists$

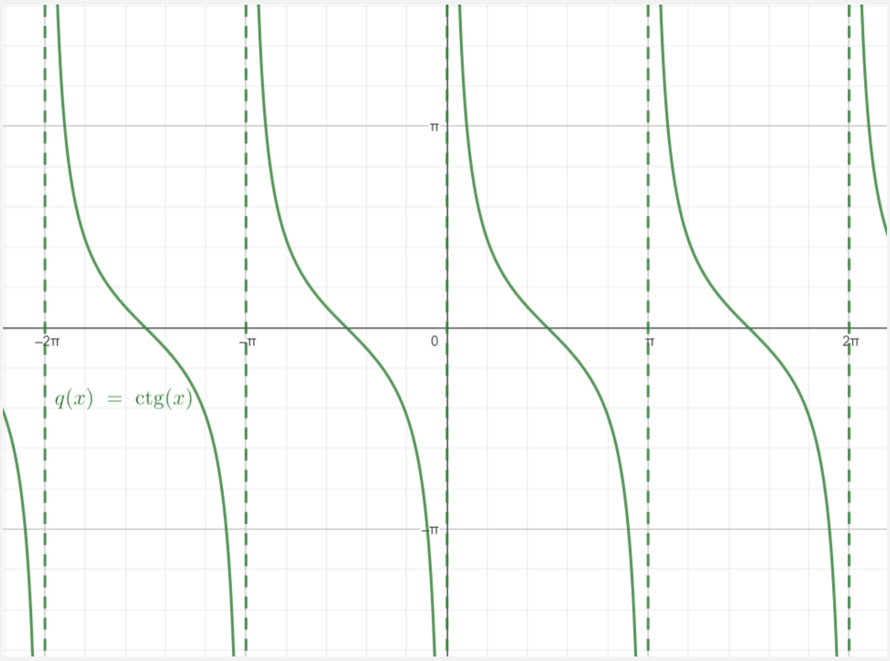
$$y_{min} = y\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = 0$$

Приклад 4.

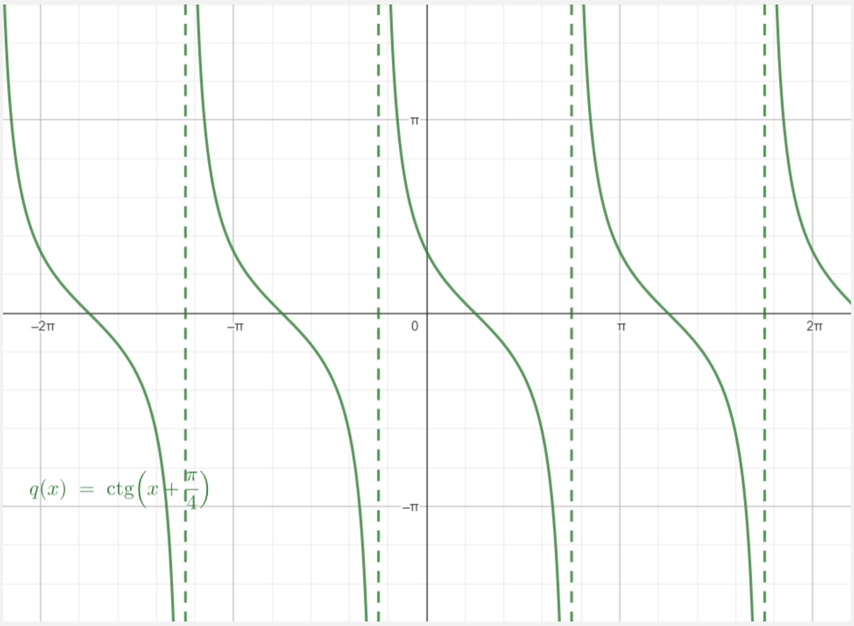
$$y = ctg\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$$

Кроки побудови графіку:

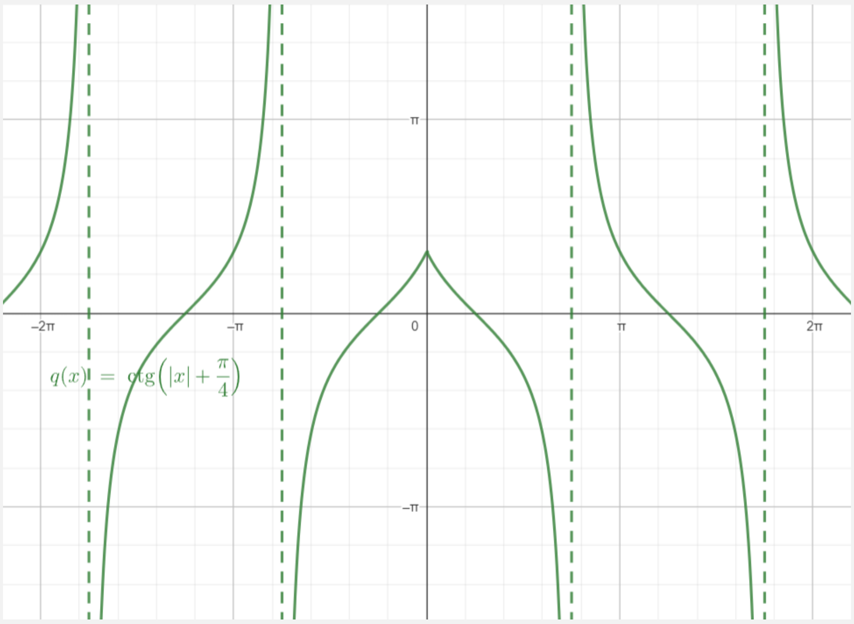
1) Побудуємо графік $y = ctgx$



2) Переносимо графік на $\frac{\pi}{4}$ од. вліво, $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



3) Частина графіку у лівій частині знищується, а частина графіку у правій півплощині зберігається і симетрично відображається відносно oy, $y = ctg\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$



Дослідження графіка:

1) D(y) = $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \frac{\pi}{4}\}, k \in Z$

2) E(y) = $y \in \mathbb{R}$

3) $\pm\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; 0\right)$ – точка перетину з ox, $k \in N \cup \{0\}$

   (0;1) – точка перетину з oy

4) Нулі функції:

   $$x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in N \cup \{0\}$$

5) Функція парна

6) y > 0, $x \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4} + \pi k; \frac{5\pi}{4} + \pi k) \cup (-\frac{5\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k), k \in Z$

   $y < 0$, $x \in (-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4} + \pi k; \frac{7\pi}{4} + \pi k) \cup (-\frac{7\pi}{4} + \pi k; -\frac{5\pi}{4} + \pi k), k \in Z$

7) T = π

8) Проміжок зростання при $x \in (-\frac{7\pi}{4} + \pi k; -\frac{3\pi}{4} + \pi k) \cup (-\frac{3\pi}{4}; 0], k \in Z$

Проміжок спадання при $x \in [0; \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4} + \pi k; \frac{7\pi}{4} + \pi k)$, $k \in N \cup \{0\}$

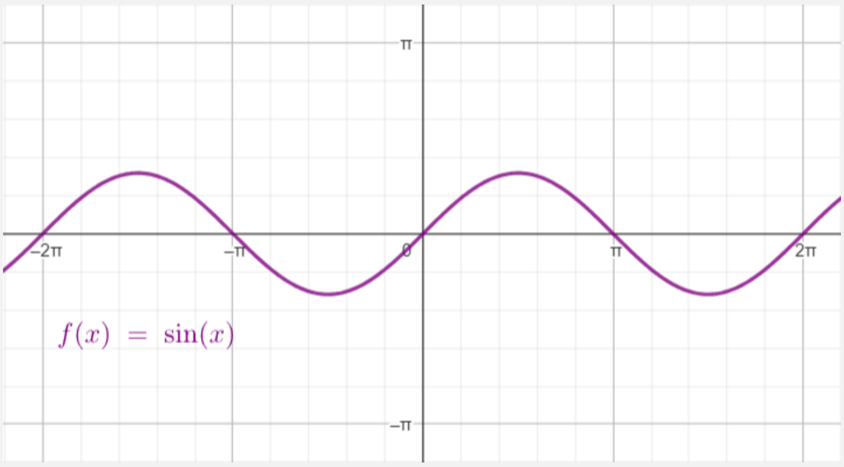
9) $y_{max} = \nexists$

$y_{min} = \nexists$

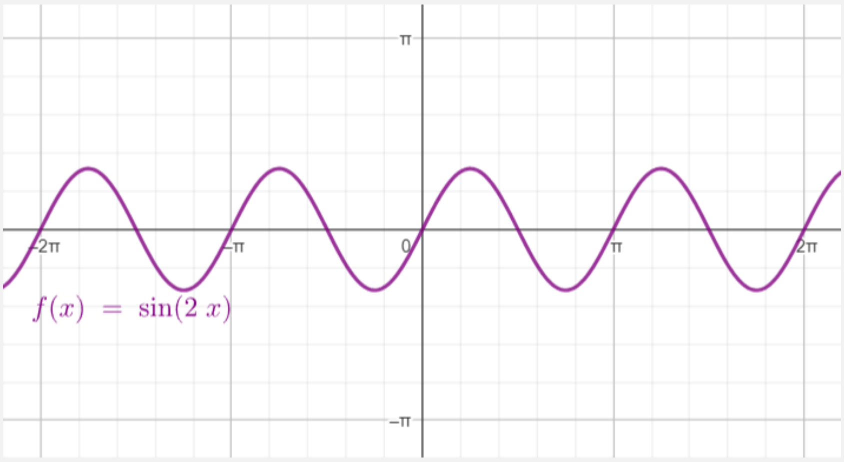
Приклад 5.

Також для того, щоб побачити, як саме впливає період на тригонометричну функцію розглянемо графік функції $y = 3sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

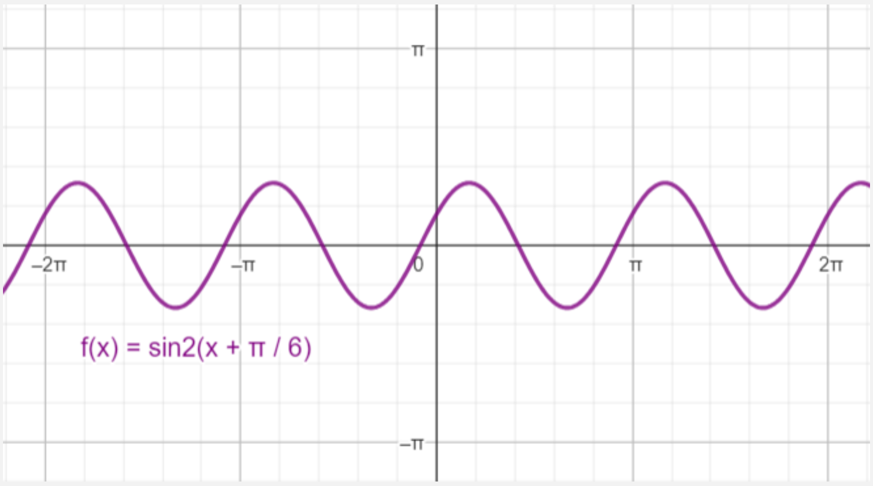
1) Побудуємо графік функції $y = sinx$



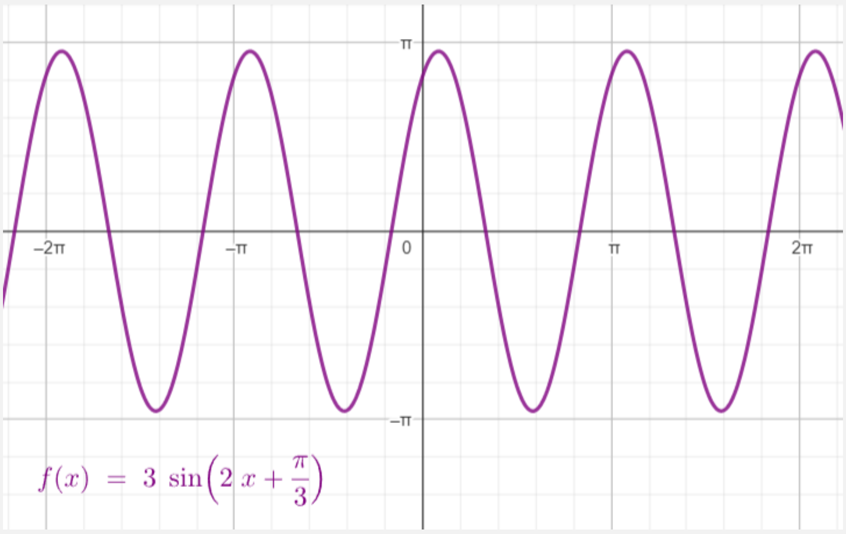
2) Відбувається стискання графіку до осі *ox* у 2р., $y = sin(2x)$



3) Переносимо графік вліво на $\frac{\pi}{6}$ од., $y = sin2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$



4) Відбувається розтяг графіку у 3р. вздовж $oy, y = 3sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$



Дослідження графіка:

1) D(y) = x ∈ ℝ
2) E(y) = [-3;3]
3) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}; 0\right), k \in Z$ – точка перетину з *ox*

   $(0,\frac{3\sqrt{3}}{2})$ – точка перетину з *oy*
4) Нулі функції

   $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$
5) Функція загального вигляду

6) $y > 0, x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k)$, де k — парне ціле число

$y < 0, x \in (\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi)$, де k — непарне ціле число

7) $T = \pi$

8) Проміжок зростання при:

$x \in (2\pi k - \frac{\pi}{3}; 2\pi k + \frac{\pi}{3})$, де k — парне ціле число

Проміжок спадання при:

$x \in (2\pi k + \frac{\pi}{3}; 2\pi k + \frac{5\pi}{3})$, де k — непарне ціле число

9) $y_{max} = y\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right) = 3, k \in Z$

$y_{min} = y\left(\frac{7\pi}{12} + k\pi\right) = -3, k \in Z$

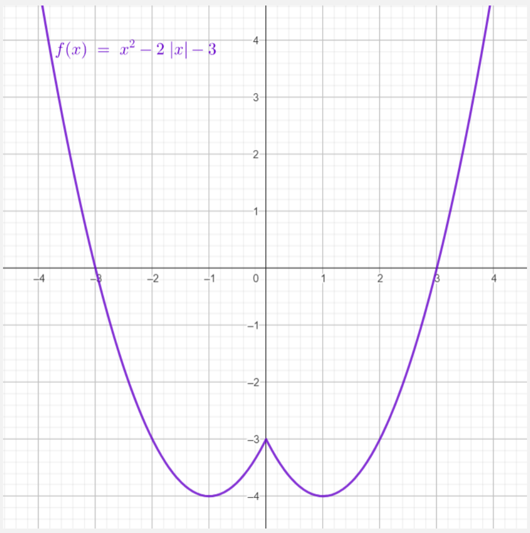
Розв'язування задач з параметрами графічним методом

Пригадаємо, що розв'язати рівняння з параметром — означає знайти всі значення параметрів, за яких дане рівняння має розв'язок.

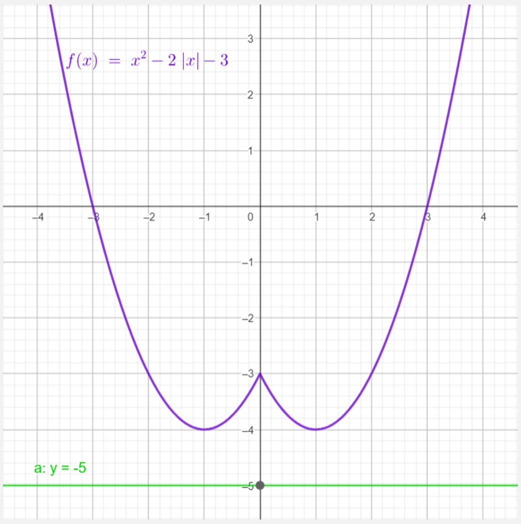
У цьому розділі розглянемо розв'язок задач з параметром саме **графічним методом.**

I. Дослідити кількість розв'язків рівняння $x^2 - 2|x| - 3 = a$.

1) Побудуємо графік $y = x^2 - 2|x| - 3$:

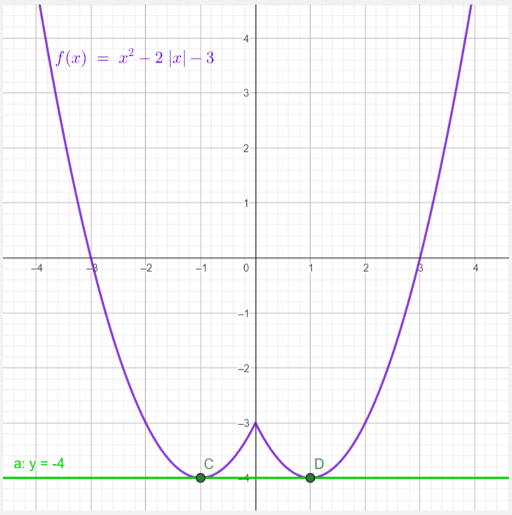


2) Знайдемо кількість розв’язків при а < -4. Для цього проведемо пряму, де у < -4:



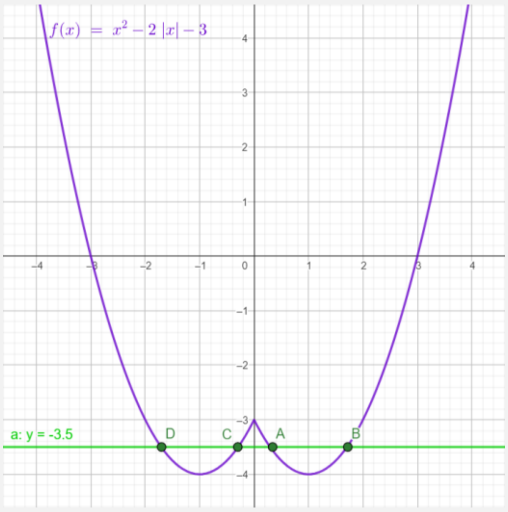
Кількість розв’язків залежить від точок перетину прямої з нашим графіком, тобто скільки точок перетину – стільки й розв’язків. Бачимо, що в цьому випадку розв’язок при а < -4 х ∈ ∅.

3) При а = -4:



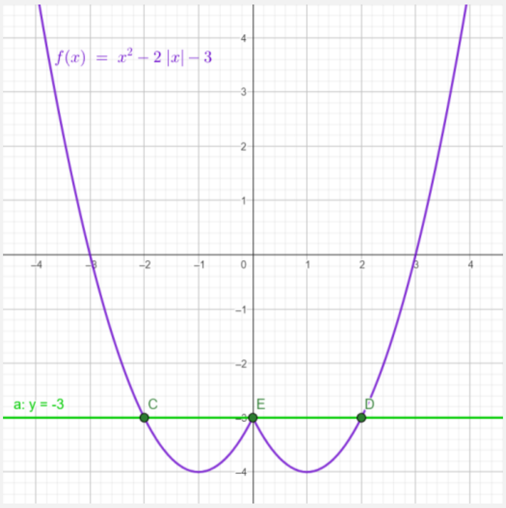
При а = -4 маємо 2 точки перетину з графіком, тож і 2 розв’язки.

4) При а ∈ (−3; −4)



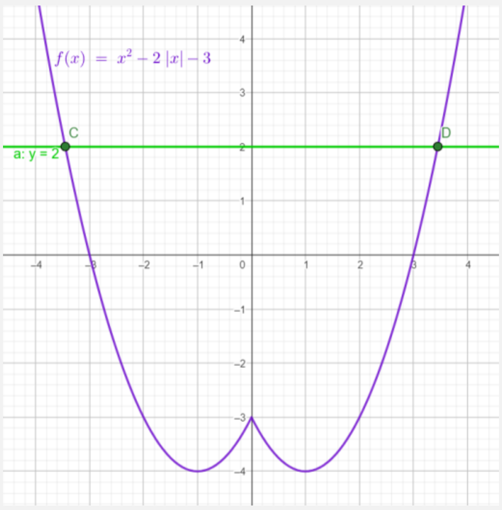
При а ∈ (−3; −4) маємо 4 розв'язки.

5) При а = -3:



При а = -3 маємо 3 розв'язки.

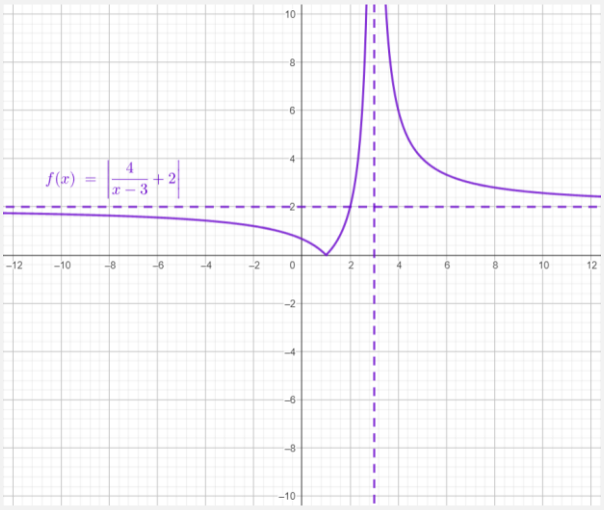
6) При а ∈ (-3;∞):



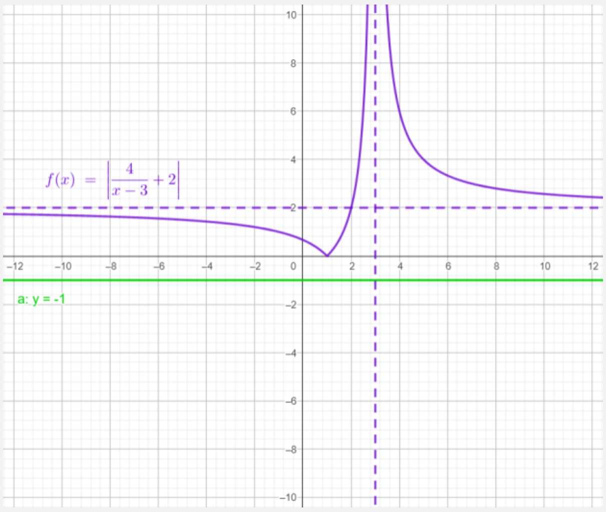
При а ∈ (-3;∞) маємо 2 розв'язки.

II. Дослідити кількість розв'язків рівняння $\left|\frac{4}{(x-3)}+2\right| = a$

1) Побудуємо графік функції $y = \left|\frac{4}{(x-3)}+2\right|$:

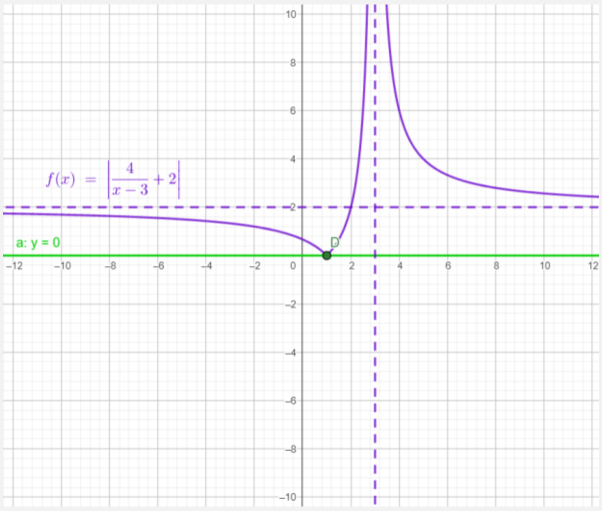


2) При $a < 0$:



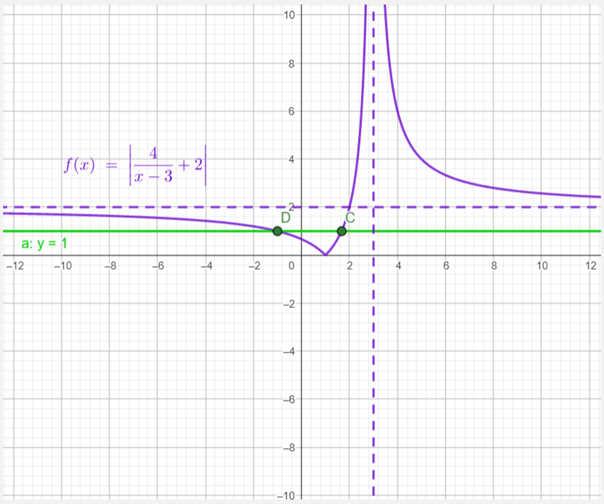
При $a < 0$ $x \in \emptyset$.

3) При a = 0:



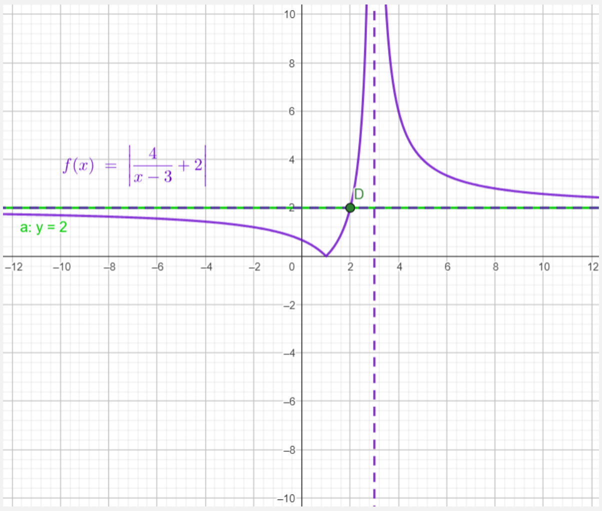
При a = 0 маємо 1 розв’язок.

4) При a ∈ (0;2):



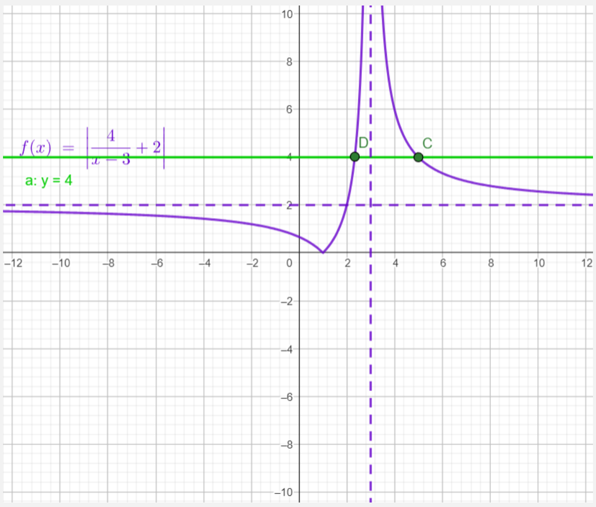
При a ∈ (0;2) маємо 2 розв’язки.

5) При $a = 2$:



При $a = 2$ маємо тільки 1 розв’язок.

6) При $a \in (2;\infty)$:

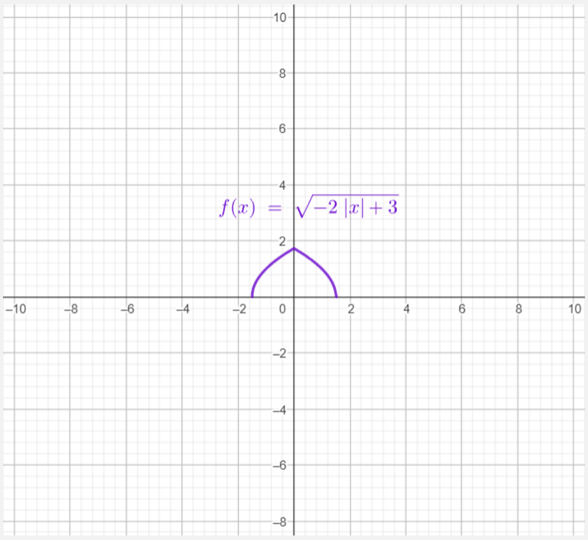


При $a \in (2;\infty)$ маємо 2 розв’язки.

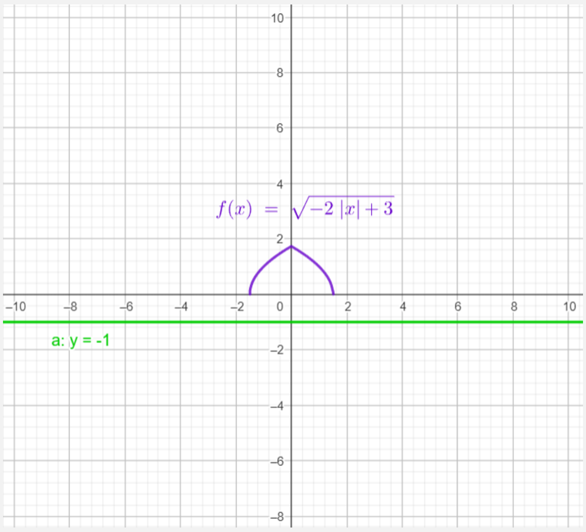
III. Дослідити кількість розв'язків рівняння $\sqrt{-2(|x|-1,5)}=a$.

$$\sqrt{-2(|x|-1,5)} \to \sqrt{-2|x|+3}$$

1) Побудуємо графік функції $y=\sqrt{-2|x|+3}$:

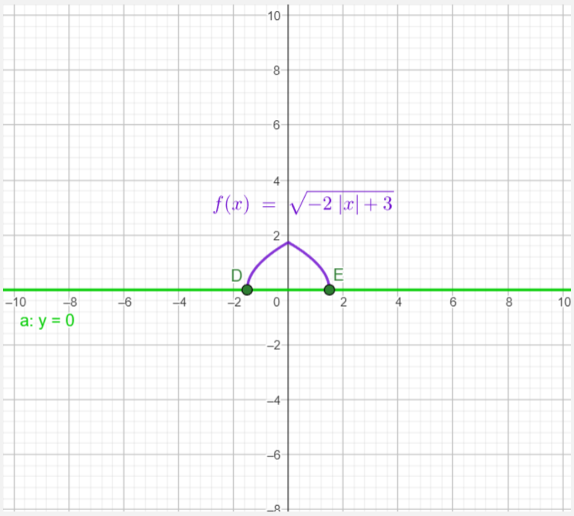


При a < 0:



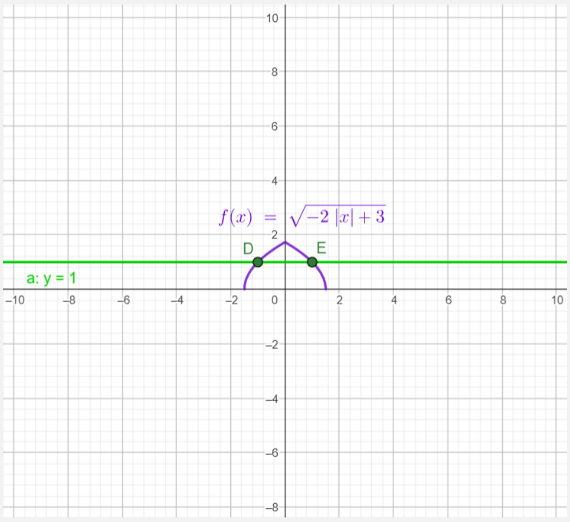
При a < 0 x ∈ ∅.

2) При $a = 0$:



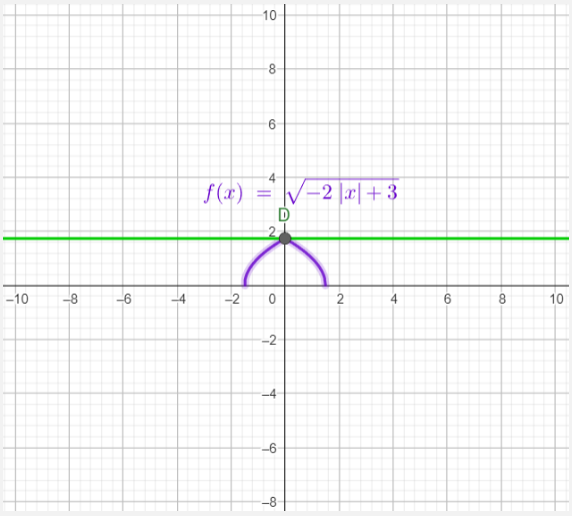
При $a = 0$ маємо 2 розв'язки.

3) При $a \in (0;\sqrt{3})$:



При $a \in (0;\sqrt{3})$ маємо 2 розв′язки.

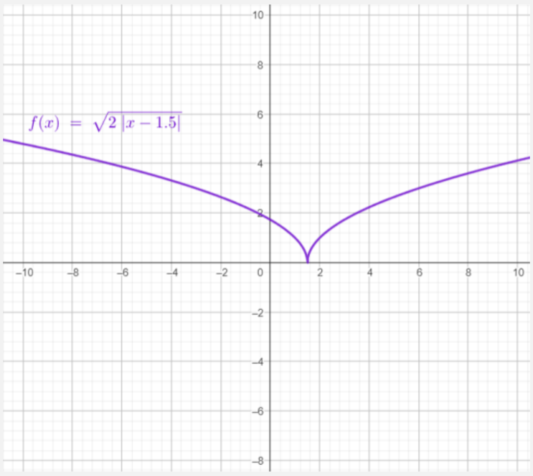
4) При а $= \sqrt{3}$:



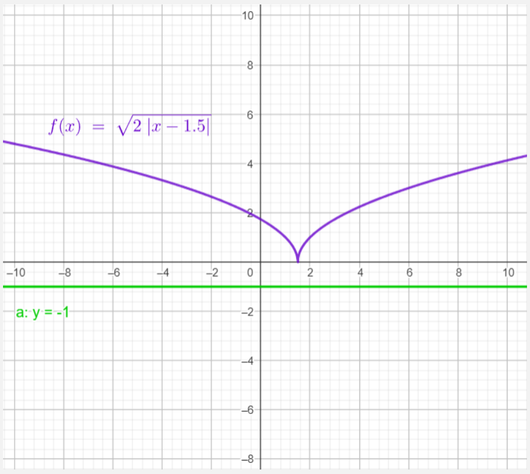
При а $= \sqrt{3}$ маємо 1 розв′язок.

IV. Дослідити кількість розв'язків рівняння $\sqrt{2|x-1,5|} = a$.

1) Побудуємо графік функції $y = \sqrt{2|x-1,5|}$:

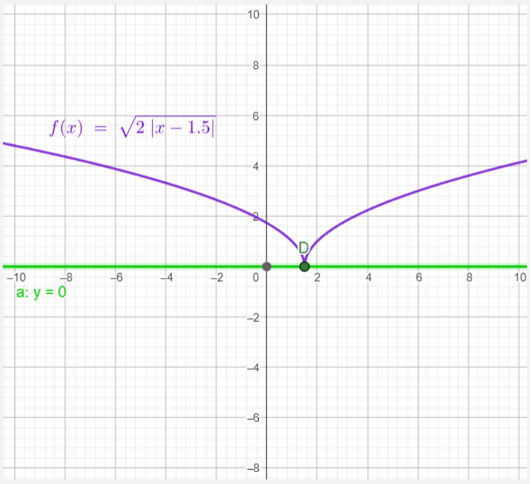


2) При a < 0:



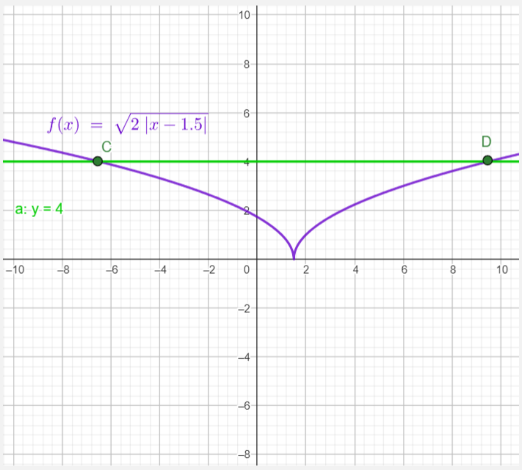
При a < 0 x ∈ ∅.

3) При a = 0:



При a = 0 маємо 1 розв’язок.

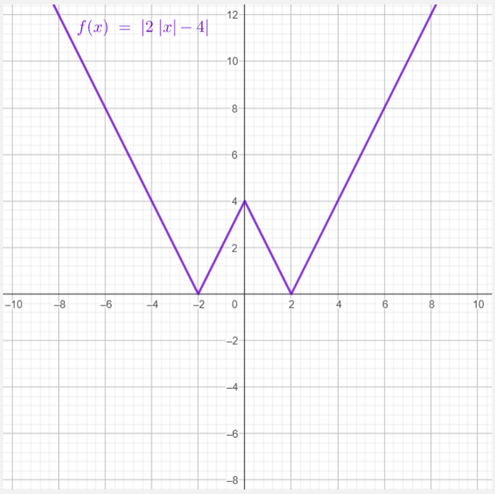
4) При a ∈ (0;∞):



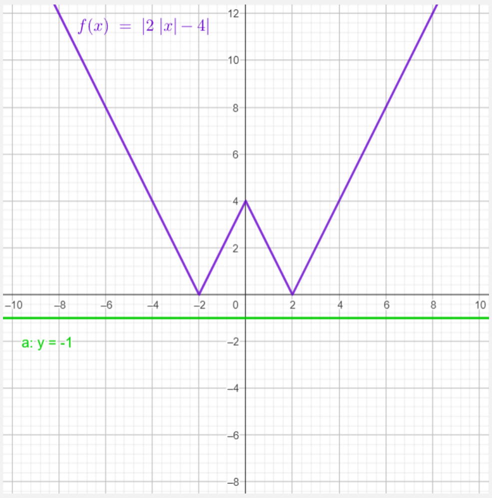
При a ∈ (0;∞) маємо 2 розв’язки.

V. Дослідити кількість розв'язків рівняння $|2|x| - 4| = a$.

1) Побудуємо графік функції $y = |2|x| - 4|$:

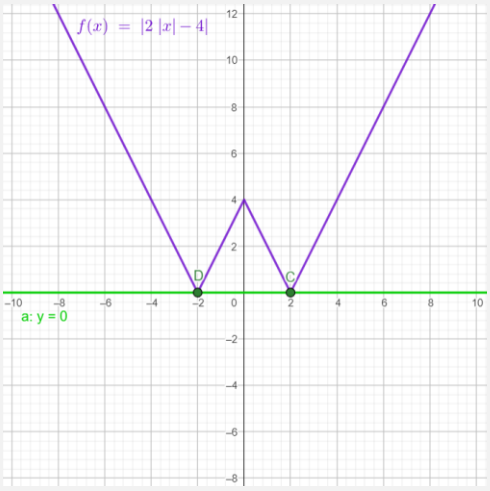


2) При $a < 0$:



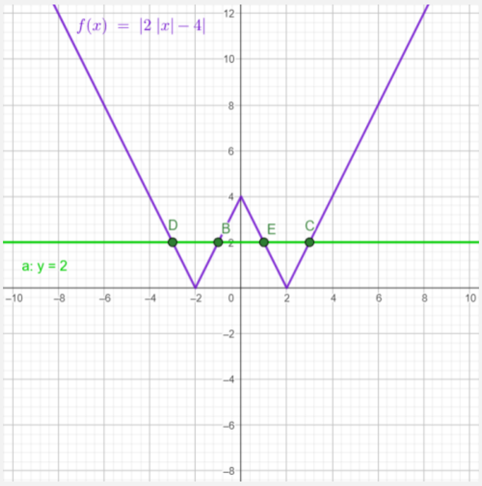
При $a < 0$ $x \in \emptyset$.

3) При a = 0:



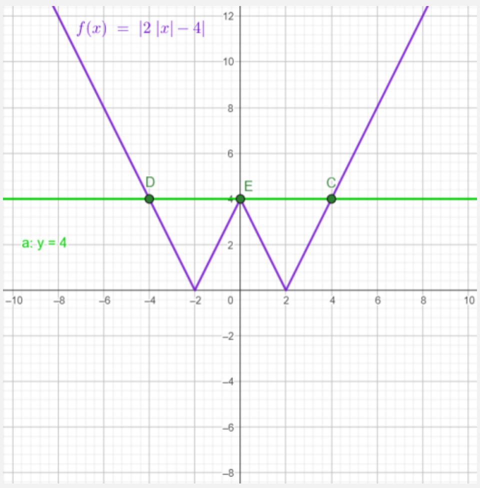
При a = 0 маємо 2 розв'язки.

4) При a ∈ (0;4):



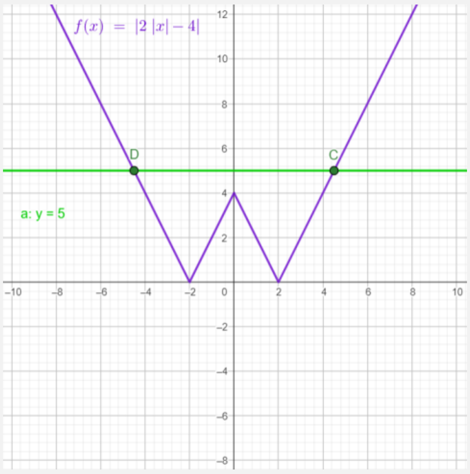
При a ∈ (0;4) маємо 4 розв'язки.

5) При a = 4:



При a = 4 маємо 3 розв'язки.

6) При а ∈ (4;∞):



При а ∈ (4;∞) маємо 2 розв’язки

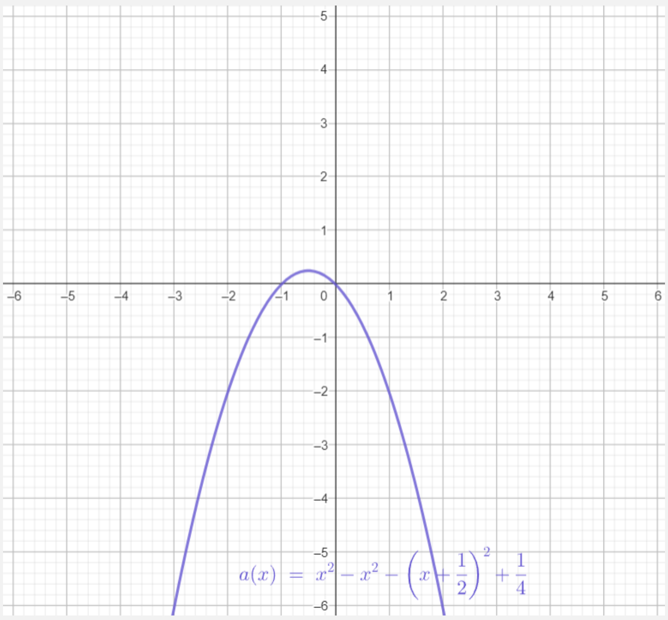
VI. При яких значеннях параметра а система має хоча б один розв’язок?

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + x + a = 0} \\ \boldsymbol{x > a} \end{cases}$$

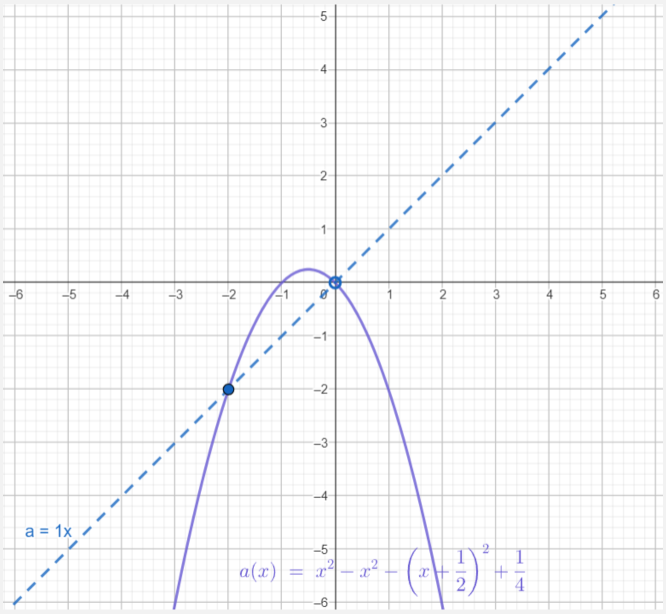
1. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = -x^2 - x^2 - (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{a < x} \end{cases}$$

2. Побудуємо графік функції $a = \boldsymbol{-x^2 - x^2 - (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$:



3. Проведемо пряму a = 1x:



При $a < 0$ маємо хоча б один розв'язок.

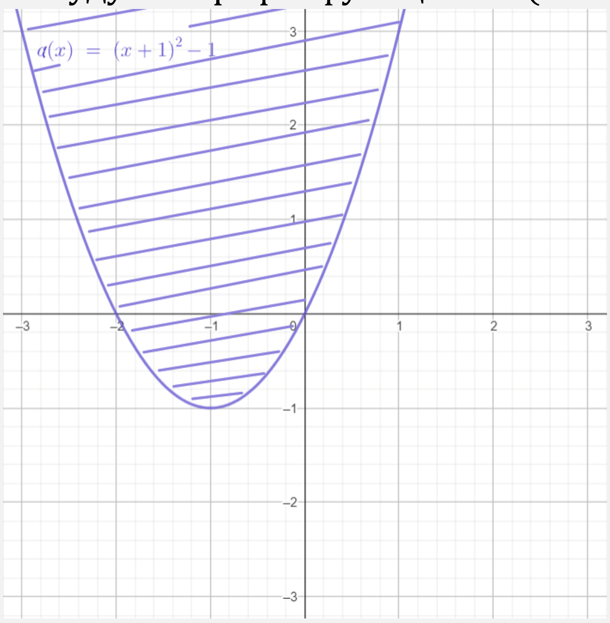
VII. При яких значеннях параметра a система нерівностей має єдиний розв'язок?

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 2x - a \le 0} \\ \boldsymbol{x^2 - 2x - 5a \le 0} \end{cases}$$

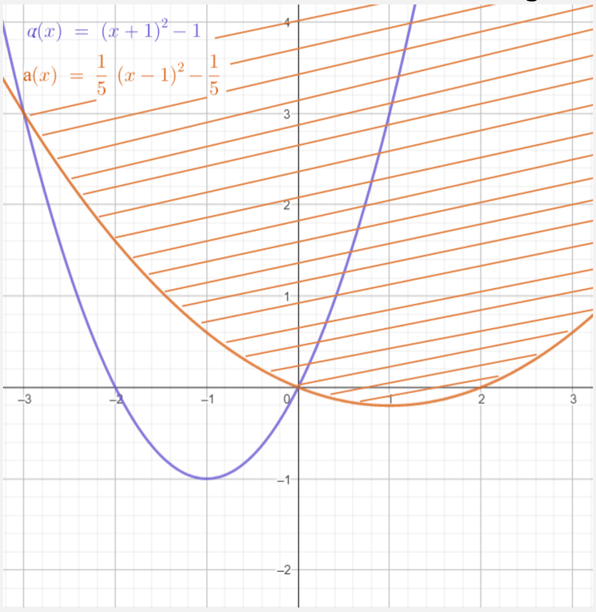
1. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \ge (x^2 + 2x + 1) - 1} \\ \boldsymbol{a \ge \frac{1}{5}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a \ge (x + 1)^2 - 1} \\ \boldsymbol{a \ge \frac{1}{5}(x - 1)^2 - \frac{1}{5}} \end{cases}$$

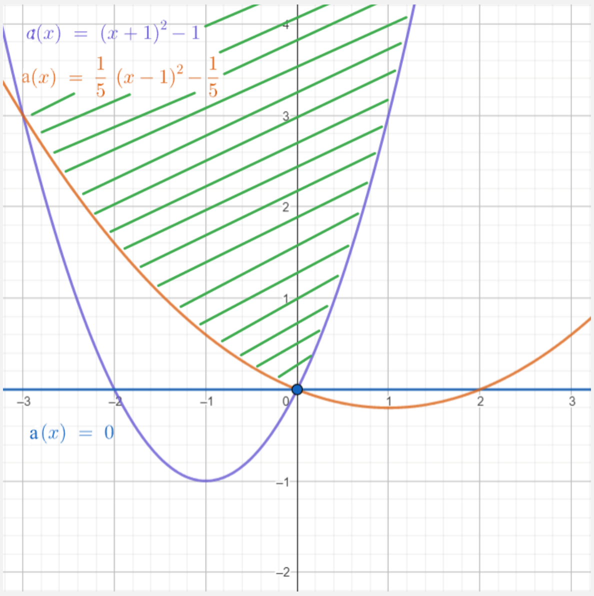
2. Побудуємо графік функції $\boldsymbol{a = (x + 1)^2 - 1}$:



3. Побудуємо графік функції $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$:



4. Проведемо пряму $a = 0$:



При $a = 0$ маємо єдиний розв'язок.

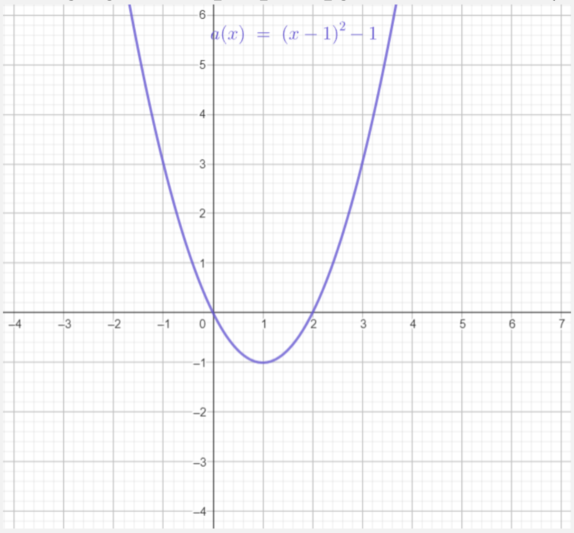
VIII. При яких значеннях параметра а рівняння має рівно 3 розв'язки?

$$(a + 2x - x^2)(9 + |x - 1| - 1) = 0$$

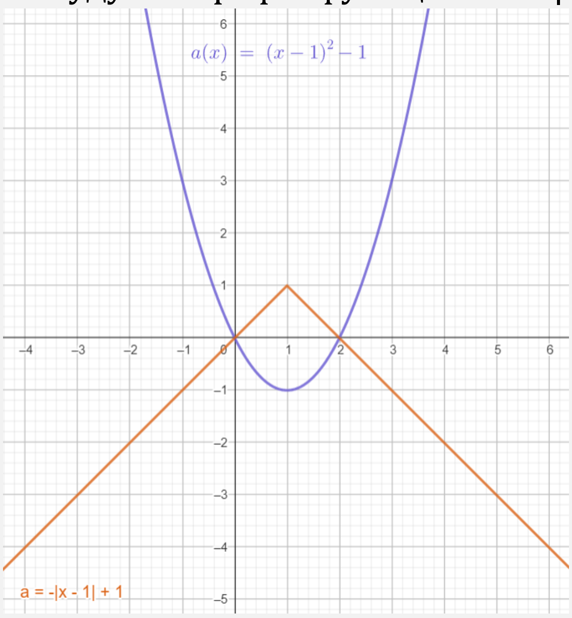
1. Розглянемо рівняння:

$\left[\begin{array}{l} a+2x-x^2=0 \\ a+|x-1|-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=a \\ a=-|x-1|+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=(x-1)^2-1 \\ a=-|x-1|+1 \end{array}\right.$

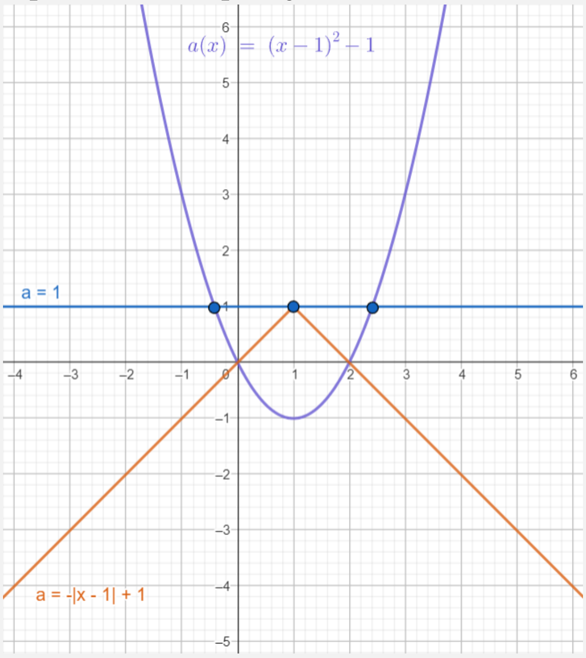
2. Побудуємо графік функції $a = (x-1)^2 - 1$:



3. Побудуємо графік функції $a = -|x-1| + 1$:

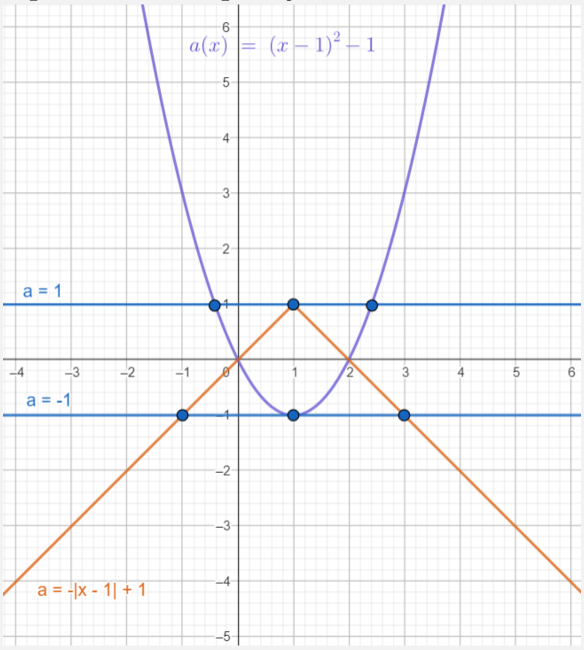


4. Проведемо пряму а = 1:



При а = 1 маємо 3 розв'язки.

5. Проведемо пряму а = -1:



При а = -1 маємо 3 розв'язки.

IX. Знайти всі значення параметра а, при яких рівняння має 1 розв'язок.

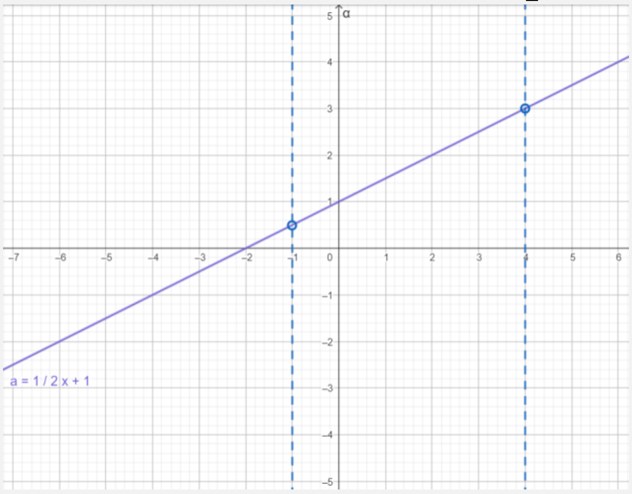
$$\frac{x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

1. Розглянемо рівняння:

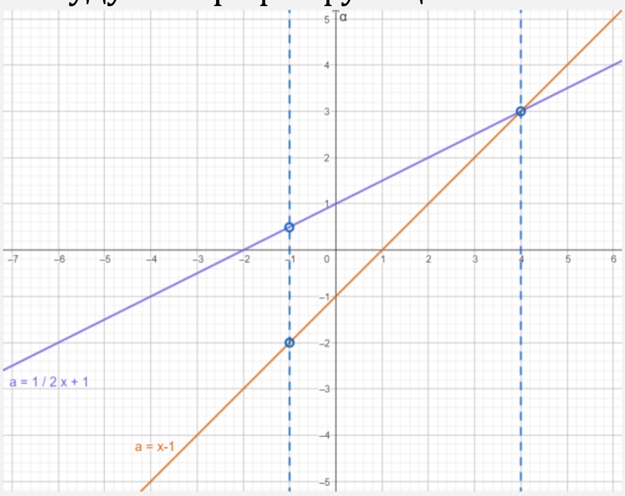
$$\begin{cases} x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 2 = 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2a - 2 \\ x = a + 1 \end{array}\right. \\ x \neq 4;\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{2}x + 1 \\ a = x - 1 \end{array}\right. \\ x \neq 4;\ x \neq -1 \end{cases}$$

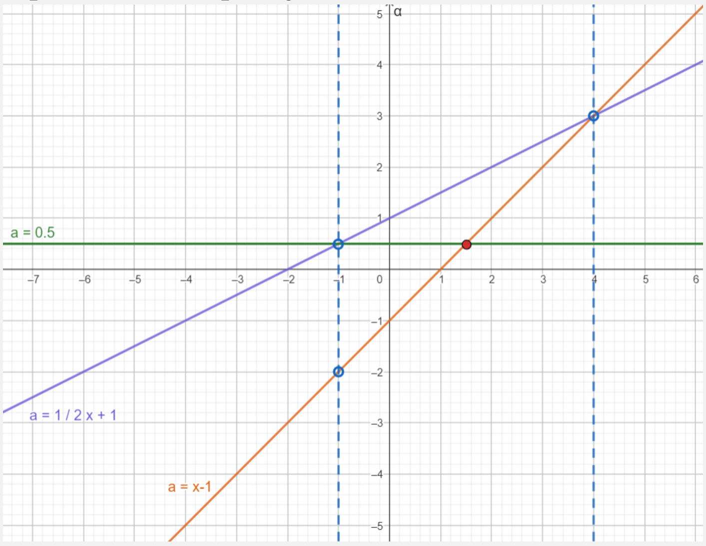
2. Побудуємо графік функції $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}x + 1}$:



3. Побудуємо графік функції $\boldsymbol{a = x - 1}$:

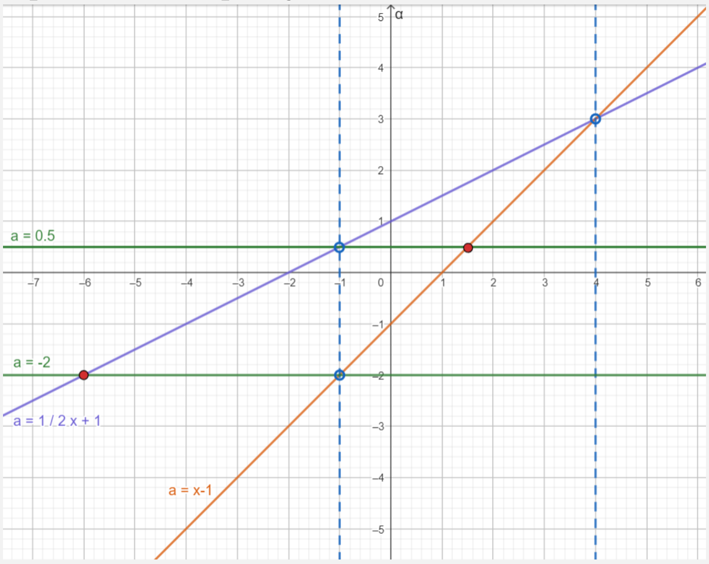


4. Проведемо пряму а = 0.5:



При а = 0.5 маємо 1 розв'язок.

5. Проведемо пряму а = -2:



При а = -2 маємо один розв'язок.

Висновок

В ході виконання курсової роботи було:

- Закріплено знання з таких тем, як: «елементарні графіки функцій», «степеневі функції», «тригонометричні функції», «обернені тригонометричні функції»
- Засвоєні такі знання, як правильно будувати, виконувати перетворення і дослідження графіків функцій на практиці, а не тільки в теорії
- Зроблено детальне занурення у можливості взаємодії із графіками різноманітних функцій
- Освоєно використання нового додатку, тобто GeoGebra та вивчення усіх можливих властивостей цього додатку для роботи з функціями
- Отримано важливий досвід, який допоможе у подальшому навчанні та вивченні функцій

Також під час виконання:

- Навчилися працювати з параметрами, а саме завдяки ним знаходити кількість розв'язків у графіках функцій, з якими відбулися перетворення
- Зрозуміли, чим кожне перетворення відрізняється і як залежить перетворення графіку від самої функції

Під час виконання курсової роботи усвідомили, що у математиці можна працювати з цікавими графіками, які допомагають краще зрозуміти суть функцій та їх властивостей і стало більш зрозуміло, як саме використовувати математичні моделі для вивчення різних процесів.

Сподіваюсь, що робота буде корисною ліцеїстам і учням шкіл під час вивчення відповідної теми в курсі математики!

Джерела:

- Алгебра поглиблене вивчення (Мерзляк, Полонський, Якір) 9 клас 2009
- Алгебра (Мерзляк) 9 клас 2017 Поглиблене
- Підручник Алгебра і початки аналізу 10 клас (профільний рівень) - О. С. Істер - Генеза 2018 рік
- http://zno.academia.in.ua/