ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА З МАТЕМАТИКИ

Основи аналізу функцій. Приклади

Що таке похідна?

Похідною функції $\boldsymbol{f}$ у точці $\boldsymbol{x_0}$ називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції $\boldsymbol{f}$ у точці $\boldsymbol{x_0}$ до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. Похідну функції ***y = f(x)*** у точці $\boldsymbol{x_0}$ позначають так: $f'(x_0)$(читають: «еф штрих від ікс нульового») або $y'(x_0)$. Можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідна функції в точці має **важливе геометричне значення**. Вона визначає кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в цій точці. Іншими словами, значення похідної показує швидкість зміни функції в околі конкретної точки.

Геометрично, якщо провести дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0,))$, то похідна $f'(x_0)$ буде дорівнювати тангенсу кута нахилу цієї дотичної до осі абсцис. Наприклад, якщо похідна додатна, тангенс кута нахилу дотичної додатний і функція на цьому інтервалі зростає. **Якщо похідна від'ємна, тангенс кута нахилу дотичної від'ємний, що вказує на спадання функції. Якщо похідна дорівнює нулю, це означає, що дотична паралельна осі *ox*. Критична точка може бути точкою екстремуму (мінімумом або максимумом), якщо похідна при переході через цю точку змінює знак.**

Таким чином, перша похідна дає змогу досліджувати поведінку функції, її зростання чи спадання, а також знаходити ключові точки на графіку, які є важливими для аналізу функції та її властивостей.

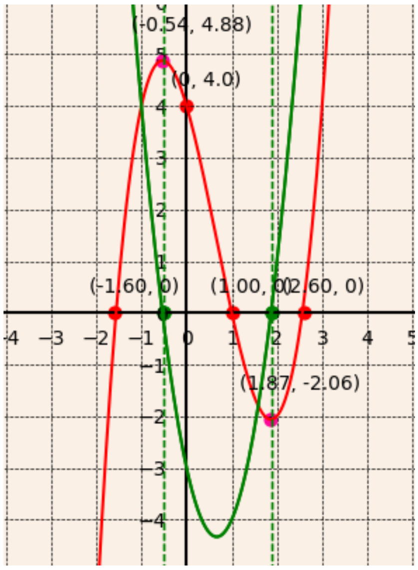
Таблиця похідних

№	Функція	Похідна
1	$y = C, C -$ стала	$y' = 0$
2	$y = x^n, n \in Z$	$y' = nx^{n-1}$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6	$y = tg\ x$	$y' = \frac{1}{\cos x^2}$
7	$y = ctg\ x$	$y' = -\frac{1}{\sin x^2}$
8	$y = e^x$	$y' = e^x$
9	$y = a^x$	$y' = a^x * \ln a$
10	$\boldsymbol{y = \log_a x}$	$y' = \frac{1}{x * \ln a}$
11	$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

Роль першої похідної y' в дослідженні графіків функцій

Роль похідної полягає не лише в обчисленні її значень, а й у вивченні характеру графіка функції. Основними аспектами, що досліджуються за допомогою похідних, є **визначення точок екстремуму (локальних максимумів та локальних мінімумів), дослідження проміжків зростання і спадання**.

1. В першу чергу, похідна функції дає змогу визначити **швидкість її зміни в будь-якій точці графіка.** Якщо похідна функції в точці **є невід'ємною, це означає, що функція зростає, якщо ж недодатною — функція спадає.** Власне, з цих знань і починається вивчення проміжків зростання та спадання функції, що є важливим етапом у побудові її графіка.
2. Похідна також дозволяє виявляти **критичні точки**, де функція може мати екстремуми. При цьому, точка екстремуму є важливою не лише для математичного аналізу, а й для практичних застосувань, де ці точки можуть вказувати на **мінімальні або максимальні значення функцій** у реальних задачах, таких як оптимізація виробництва, фізичні процеси, економічні моделі тощо.

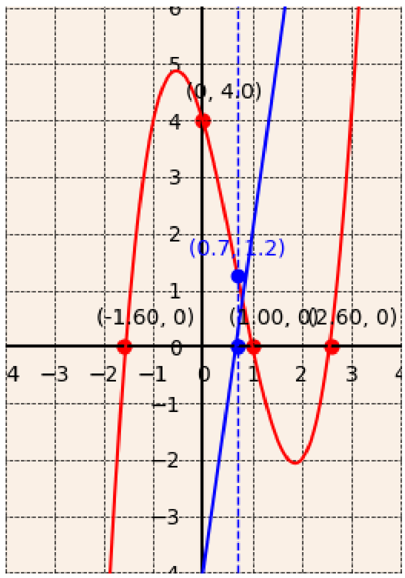


Графіки функцій

$y = f(x)$ і y=f'(x)

Роль другої похідної y'' в дослідженні графіків функцій

1. Друга похідна функції є важливим інструментом для визначення **точок перегину** та **проміжків опуклості** графіка функції. Якщо перша похідна функції дає інформацію про проміжки спадання і зростання функції, то друга похідна вказує на його **кривизну**, тобто, чи є графік опуклим вгору або вниз на певному проміжку.**Точки перегину** визначаються за допомогою другої похідної функції. **Точка перегину** — це точка, в якій функція змінює свою кривизну, тобто з опуклої вгору на опуклу вниз, або навпаки. Формально, точка перегину існує, коли друга похідна функції в цій точці дорівнює нулю і при переході через цю точку змінює знак.



Графіки функцій

$y = f(x)$ і y=f''(x)

Тобто, якщо $f''(x_0) = 0$ і $f''(x)$ змінює знак при наближенні до x_0, то **точка x_0 є точкою перегину.**

2. **Проміжки опуклості вгору та вниз** визначаються залежно від знака другої похідної. Якщо друга похідна функції додатна ($f''(x) > 0$) на певному проміжку, то графік функції на цьому проміжку є **опуклим вниз** (загинається "вгору"). Якщо ж друга похідна функції від'ємна ($f''(x) < 0$), графік на цьому проміжку є **опуклим вгору** (загинається "вниз").

Алгоритм побудови графіку і його дослідження

Побудова графіка функції є ключовим етапом у вивченні її властивостей. Вона дозволяє не лише наочно уявити, як функція змінюється при різних значеннях аргументу, а й виявити її характерні особливості, такі як критичні точки, асимптоти, проміжки зростання та спадання, тощо. Алгоритм побудови графіка включає кілька етапів дослідження функції:

1. Перед побудовою графіка важливо визначити **область визначення функції** — множину усіх допустимих значень змінної ***x*.** Це дозволяє правильно встановити межі, в яких буде здійснюватися побудова графіка, та уникнути непотрібних асимптотичних або обмежених значень.
2. Однією з важливих властивостей функції **є її парність чи непарність**.

   Парна функція – функція, у якої для будь-якого будь-якого $x \in D(f)$ $\exists(-x) \in D(f)$ є правильною рівність ***f(-x) = f(x).***

   Непарна функція – функція, у якої для будь-якого $x \in D(f)$ $\exists(-x) \in D(f)$ є правильною рівність ***f(-x) = -f(x).***

3. Аналізуючи першу похідну функції, можна визначити **проміжки зростання та спадання.** Якщо похідна функції невід’ємна на певному проміжку, функція зростає на цьому проміжку, і навпаки, якщо похідна недодатна — функція спадає.
4. **Локальні максимуми та мінімуми** — це точки, де функція досягає найбільшого або найменшого значення в певному околі. Локальний

максимум або мінімум можна знайти за допомогою критичних точок, де похідна дорівнює нулю або не існує.

5. **Максимальне значення функції** на певному проміжку визначається як найбільше значення функції на цьому проміжку, а **мінімальне** — найменше.
6. **Нулі функції**$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_n})$ **-** значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю. Щоб знайти нулі функції, потрібно розв'язати рівняння:

   $\boldsymbol{y = f(x) = 0}$. Нулі функції належать *D(y).*
7. **Точки перетину функції з осями абсцис і ординат** $\boldsymbol{(x_0; y_o)}$ – це точки, що мають відповідні координати: $(x_0; 0)$ і $(0; y_0)$.
8. **Проміжок знакосталості** – множина значень $\boldsymbol{x}$, на якому функція набуває значень однакового знаку.
9. **Точки перегину** — це абсциси точок, де функція змінює свою кривизну. Визначаються за допомогою другої похідної, а саме: якщо **друга похідна дорівнює нулю** і при переході через цю точку змінює знак, то дана точка є точкою перегину.
10. **Проміжки опуклості** функції визначаються за допомогою **другої похідної**. Якщо друга похідна додатна, графік **опуклий вниз**, якщо від'ємна — **опуклий вгору**. Це дозволяє зрозуміти характер кривизни функції.
11. **Асимптота функції** – це пряма, до якої значення функції наближаються необмежено близько при зростанні абсциси або ординати. Асимптоти можуть бути **вертикальними** або **похилими (горизонтальними)**.

    Вертикальні асимптоти

    Графік функції $y = f(x)$ при $\boldsymbol{x \to a}$ має вертикальну асимптоту, якщо:

    $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \pm\infty$**;**

    Крім цього **точка** $\boldsymbol{x = a}$ **є точкою розриву II роду**, а рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $\boldsymbol{x = a}$.

    Похилі асимптоти

Рівняння похилої асимптоти задається рівнянням прямої: $\boldsymbol{y = kx + b}$,

де кутовий коєфіцієнт $\boldsymbol{k}$ та вільний член $\boldsymbol{b}$ обчислюються за правилом:

$$\boldsymbol{k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x};}$$

$$\boldsymbol{b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx);}$$

Якщо обидві границі існують і скінченні, то функція має похилу асимптоту, інакше – не має. Іноді слід окремо розглядати випадки: $\boldsymbol{x} \to +\infty$ та $\boldsymbol{x} \to -\infty$.

Горизонтальні асимптоти

Функція $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $\boldsymbol{y = b}$, якщо $\boldsymbol{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b}$.

Алгоритм побудови похідних функцій і виконання дослідження

Побудова похідної функції є важливим етапом аналізу поведінки функції. Похідна функції дозволяє дослідити такі характеристики, як швидкість зміни функції, зростання чи спадання, наявність екстремумів, а також інші важливі властивості, що визначають форму графіка.

Алгоритм побудови похідної функції та подальше дослідження включає кілька етапів:

1. **Знаходження похідної функції**

   Першим етапом є безпосереднє обчислення похідної функції $f'(x)$. Це здійснюється за допомогою основних правил диференціювання.

Правила диференціювання

Правило	**Формула**
Правило суми та різниці	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Правило добутку	$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
Правило частки	$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)*g(x) - f(x)*g\prime(x)}{g(x)^2}$
Похідна складеної функції	$(f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$

2. Після того, як похідна функції знайдена, необхідно знайти **критичні точки**, де похідна дорівнює нулю або не існує (якщо такі є). Це важливо для подальшого аналізу екстремумів функції. Точки, де $f'(x) = 0$ або похідна не існує, можуть бути **точками максимуму, мінімуму.**

Інтервали зростання та спадання функції

3. На основі знаків похідної можна визначити проміжки зростання та спадання функції:
   - **Якщо $f^{'}(x) \geq 0$** на певному проміжку, **функція зростає** на цьому проміжку.
   - **Якщо $f^{'}(x) \leq 0$, функція спадає**.

     Це дозволяє зрозуміти, на яких ділянках функція є зростаючою або спадною.

Визначення локальних екстремумів та точок перетину з осями

4. Після того, як ми знайшли критичні точки, необхідно з'ясувати, чи є ці точки екстремумами (максимумами або мінімумами). Для цього використовуємо першу похідну:
   - **Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з мінуса на плюс, то дана точка є точкою локального мінімуму.**

- **Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з плюса на мінус, то дана точка є точкою локального максимуму.**

Визначення точок перегину і проміжків опуклості функції

5. Для визначення **точок перегину та проміжків опуклості** використовують другу похідну:
   - **Якщо $f''(x) > 0$**, функція є опуклою вниз.
   - **Якщо $f''(x) < 0$**, функція є опуклою вгору.

Визначення наявності асимптот функції

6. Після дослідження похідної функції можна також визначити наявність асимптот.

   Вертикальні асимптоти: графік функції $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту при $x \to a$, якщо границя функції нескінченна $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Точка $x = a$ є точкою розриву II роду, і рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x = a$.

   Похилі асимптоти: рівняння похилої асимптоти задається $y = kx + b$, де k і b – границі, що обчислюються за правилом:

   $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$;

   $b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$;

   Якщо обидві границі існують і скінченні, функція має похилу асимптоту. Інакше – не має.

   Горизонтальні асимптоти: крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$, якщо існує скінченна границя функції при $x \to \pm\infty$ і ця границя дорівнює $\boldsymbol{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b}$.

Приклади дослідження функцій за допомогою похідних

1. Дослідити функцію $\boldsymbol{y = \frac{x^2 + x + a}{x}}$;

1) $D \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$

2) $y' = \frac{(2x+1)*x-1*(x^2+x+a)}{x^2} = \frac{2x^2+x-x^2-a}{x^2} = \frac{x^2-a}{x^2} = 0;$

$\begin{cases} u = x^2 + x + a \\ v = x \end{cases}$ $\quad u' = 2x + 1$, $\quad v' = 1$

if $a = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ *крит. точок немає*

ф $\uparrow$ *при* $\forall x \neq 0$

if $a > 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2-a}{x^2} = 0;\ x^2 = a; x = \pm\sqrt{a}$

ф $\uparrow$ *при* $x \in \left(-\infty; -\sqrt{a}\right]$ *і* $x \in \left[\sqrt{a}; \infty\right)$

ф $\downarrow$ *при* $x \in \left[-\sqrt{a}; 0\right)$ *і* $x \in (0; \sqrt{a}]$

$$x_{max} = -\sqrt{a} \Rightarrow y_{max} = \frac{\left(-\sqrt{a}\right)^2 + \left(-\sqrt{a}\right) + a}{-\sqrt{a}} = \frac{a - \sqrt{a} + a}{-\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2a - \sqrt{a}}{-\sqrt{a}} = 1 - 2\sqrt{a}$$

$$x_{min} = \sqrt{a} \Rightarrow y_{min} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \sqrt{a} + a}{\sqrt{a}} = \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2a\sqrt{a} + 1$$

if $a < 0\ y' \Rightarrow 0$

ф$\uparrow$ *при* $\forall x \in (-\infty; 0)$ *і* $(0;\ \infty)$

3) $y'' = \left(\frac{x^2-a}{x^2}\right) = \frac{2x * x^2 - 2x(x^2-a)}{x^4} = \frac{2x(x^2-x^2+a)}{x^4} = \frac{2a}{x^3}$

$u = x^2 - a; \quad u' = 2x;$
$v = x^2; \quad v' = 2x;$

$if\ a = 0 \Rightarrow y'' = 0; \Rightarrow$ т − к перетину не існує.

$if\ a > 0$ *при* $x \in (-\infty; 0)$ *– опукла вниз;*

при $x \in (0; \infty)$ *– опукла вгору;*

4) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+a}{x^2} = 1;$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+a}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+a-x^2}{x} = 1;$$

$y = x + 1$ – *похила асимптота.*

2. Дослідити функцію $y = \frac{a}{x^2} + \frac{x}{a}$;

1) $D \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$

2) $y' = \left(ax^{-2} + \frac{1}{a}x\right)' = -2ax^{-3} + \frac{1}{a} = -\frac{2a}{x^3} + \frac{1}{a} = 0;$

$\frac{2a^2+x^3}{ax^3} = 0;\ x^3 = 2a^2; x = \sqrt[3]{2a^2}$ – *критична точка;*

if a > 0 $\Rightarrow x_{min} = \sqrt[3]{2a^2}$

ф ↑ *при* $x \in (-\infty; 0)$ *і* $x \in \left[\sqrt[3]{2a^2}; \infty\right)$

if a < 0 $\Rightarrow x_{max} = \sqrt[3]{2a^2}$

ф↓ *при* $\forall x \in (-\infty; 0)$ *і* $[\sqrt[3]{2a^2};\ \infty)$

ф↑ *при* $\forall x \in \left(0; \sqrt[3]{2a^2}\right]$

3) $u = x^3 - 2a^2; \qquad u' = 3x^2;$
$v = ax^3; \qquad v' = 3ax^2;$

$y'' = \frac{3x^2 * ax^3 - 3ax^2(x^3 - 2a^2)}{a^2x^4} = \frac{3ax^2(x^3 - x^3 + 2a^2)}{a^2x^6} = \frac{3*2a^2*a}{a^2x^4} = \frac{6a}{x^4} = 0$ –

немає точок перетину;

$if\ a > 0$ *при* $x \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$ – *ф. опукла вниз;*

$if\ a < 0$ *при* $x \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$ – *ф. опукла вгору;*

4) $k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{x^2}+\frac{x}{a}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{a^2 + x^3}{ax^3} = \frac{1}{a};$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2 + x^3}{ax^2} - \frac{1}{a}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2 + x^3}{ax^2} - \frac{x^3}{ax^2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2 + x^3 - x^3}{ax^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2}{ax^2}\right) = 0;$$

$y = \frac{1}{a}x$ – *похила асимптота.*