Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки Дніпропетровської облдержадміністрації
Комунальний позашкільний навчальний заклад «Мала академія наук учнівської молоді» Дніпропетровської обласної ради

Відділення Інформаційних технологій
Секція: Навчальні, ігрові програми та віртуальна реальність

ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ

Роботу виконала:
Кавуненко Юлія Сергіївна,
учениця 11-Г класу Дніпровського наукового ліцею інформаційних технологій Дніпровської міської ради

Наукові керівники:
Боровик Людмила Іванівна, вчитель інформатики, вчитель вищої категорії, вчитель-методист.

Якименко Наталія Михайлівна, вчитель математики, вчитель вищої категорії, вчитель-методист.

Дніпро - 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасному світі графіки функцій використовуються не лише як інструмент для розв’язання математичних задач, але й як потужний засоб аналізу різноманітних явищ у фізиці, економіці, інженерії та інших науках. Використання похідної дозволяє більше зрозуміти, як змінюється функція, та визначити ключові характеристики її графіка, зокрема екстремуми, точки перетину з координатними осями та інші його особливості. Це робить аналіз графіків за допомогою похідних доволі важливим і актуальним завданням.

Мета проєкту полягає в дослідженні особливостей графіків квадратичних і дробових функцій, з’ясуванні залежності між їх параметрами та характером графіка. Такий підхід дозволяє краще зрозуміти саму поведінку функцій, визначити проміжки зростання і спадання, положення екстремумів, а також побачити вплив коефіцієнтів на вигляд графіка.

Актуальність дослідження полягає в тому, що побудова та аналіз графіків функцій за допомогою похідних є невід'ємною частиною вивчення математики та інших природничих наук. Знання про властивості функцій допомагають не лише у навчанні, але й у практичних сферах, таких як прогнозування, оптимізація та моделювання.

Розробка алгоритмів для аналізу функцій стала основою для реалізації програмного забезпечення, яке демонструє прикладне значення похідних у реальних задачах. Зокрема, користувач може досліджувати, як зміна параметрів функції впливає на її графік, бачити залежність між коефіцієнтами рівнянь і особливостями графіка (екстремуми, симетрія, проміжки спадання).

У рамках проєкту було створено програму на мові Python, яка поєднує в собі зручність інтерфейсу та потужні математичні можливості. Програма використовує такі бібліотеки:

- **NumPy**, **SymPy** – для виконання математичних розрахунків;
- **Matplotlib**, **pyplot** – для побудови графіків;
- **Customtkinter, Tkinter** – для створення графічного інтерфейсу;

- **PIL** – для роботи із зображеннями.

Програма дозволяє користувачеві не лише будувати графіки функцій, а й виконувати їх аналіз. Наприклад, можна повністю дослідити запропонований графік функції, а саме визначити:

- область визначення функції;
- парність функції;
- проміжки спадання і зростання функції;
- локальні максимум і мінімум функції;
- мінімальне і максимальне значення функції;
- точки перетину з осями;
- нулі функції;
- проміжки знакосталості;
- точки перегину;
- проміжки опуклості;
- асимптоти;

Окрім цього, користувач може спокійно вибирати різні функції у спеціальному вікні та навіть приховувати або відображати певні елементи графіка, використовуючи Checkbox:

- відображення похідної y '
- відображення похідної y ' '

Проєкт має прикладну цінність, оскільки може використовуватись як навчальний інструмент для вивчення властивостей функцій. Завдяки його застосуванню учні або студенти можуть швидко побачити, як змінюються графіки при зміні параметрів, що робить процес навчання більш наочним і зрозумілим.

У дослідженні було застосовано інтеграцію теоретичних знань із практичною реалізацією. Це дозволило отримати універсальний інструмент для дослідження функцій, який є корисним у навчальному процесі та може знайти застосування у реальних задачах.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

1.1. Похідна функції

Похідною функції $\boldsymbol{f}$ у точці $\boldsymbol{x_0}$ називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції $\boldsymbol{f}$ у точці $\boldsymbol{x_0}$ до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.
Похідну функції ***y = f(x)*** у точці $\boldsymbol{x_0}$ позначають так: $f'(x_0)$(читають: «еф штрих від ікс нульового») або $y'(x_0)$. Можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідна функції в точці має **важливе геометричне значення**. Вона визначає кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в цій точці. Іншими словами, значення похідної показує швидкість зміни функції в околі конкретної точки.

Геометрично, якщо провести дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0,))$, то похідна $f'(x_0)$ буде дорівнювати тангенсу кута нахилу цієї дотичної до осі абсцис. Наприклад, якщо похідна додатна, тангенс кута нахилу дотичної додатний і функція на цьому інтервалі зростає. **Якщо похідна від'ємна, тангенс кута нахилу дотичної від'ємний, що вказує на спадання функції. Якщо похідна дорівнює нулю, це означає, що дотична паралельна осі *ox*. Критична точка може бути точкою екстремуму (мінімумом або максимумом), якщо похідна при переході через цю точку змінює знак.**

Таким чином, перша похідна дає змогу досліджувати поведінку функції, її зростання чи спадання, а також знаходити ключові точки на графіку, які є важливими для аналізу функції та її властивостей.

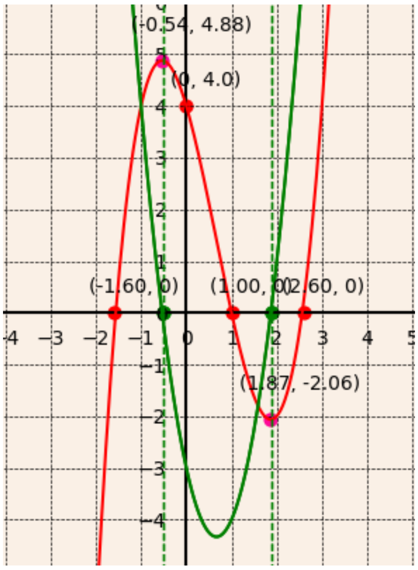
Таблиця похідних

№	Функція	Похідна
1	$y = C, C -$ стала	$y' = 0$
2	$y = x^n, n \in Z$	$y' = nx^{n-1}$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6	$y = tg\ x$	$y' = \frac{1}{\cos x^2}$
7	$y = ctg\ x$	$y' = -\frac{1}{\sin x^2}$
8	$y = e^x$	$y' = e^x$
9	$y = a^x$	$y' = a^x * \ln a$
10	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x * \ln a}$
11	$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$

1.1.1. Роль першої похідної y' в дослідженні графіків функцій

Роль похідної полягає не лише в обчисленні її значень, а й у вивченні характеру графіка функції. Основними аспектами, що досліджуються за допомогою похідних, є **визначення точок екстремуму (локальних максимумів та локальних мінімумів), дослідження проміжків зростання і спадання**.

В першу чергу, похідна функції дає змогу визначити **швидкість її зміни в будь-якій точці графіка.** Якщо похідна функції в точці **є невід’ємною, це означає, що функція зростає, якщо ж недодатною — функція спадає.** Власне, з цих знань і починається вивчення проміжків зростання та спадання функції, що є важливим етапом у побудові її графіка. Похідна також дозволяє виявляти **критичні точки**, де функція може мати екстремуми. При цьому, точка екстремуму є важливою не лише для математичного аналізу, а й для практичних застосувань, де ці точки можуть вказувати на **мінімальні або максимальні значення функцій** у реальних задачах, таких як оптимізація виробництва, фізичні процеси, економічні моделі тощо.



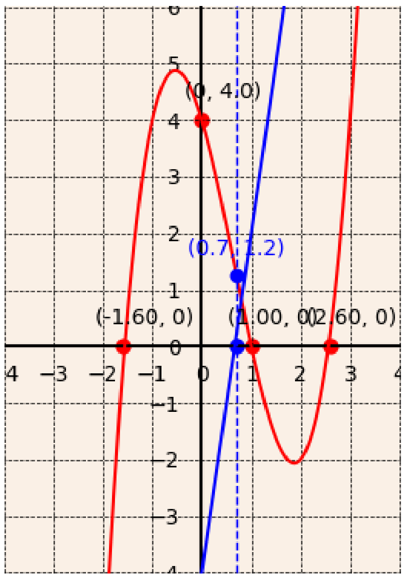
Графіки функцій

$y = f(x)$ *і* $y=f'(x)$

1.1.2. Роль другої похідної y'' в дослідженні графіків функцій

Друга похідна функції є важливим інструментом для визначення **точок перегину** та **проміжків опуклості** графіка функції. Якщо перша похідна функції дає інформацію про проміжки спадання і зростання функції, то друга похідна вказує на його **кривизну**, тобто, чи є графік опуклим вгору або вниз на певному проміжку.

1. **Точки перегину** визначаються за допомогою другої похідної функції. **Точка перегину** — це точка, в якій функція змінює свою кривизну, тобто з опуклої вгору на опуклу вниз, або навпаки. Формально, точка перегину існує, коли друга похідна функції в цій точці дорівнює нулю і при переході через цю точку змінює знак. Тобто, якщо $f''(x_0) = 0$ і $f''(x)$ змінює знак при наближенні до x_0, то **точка $\boldsymbol{x_0}$ є точкою перегину.**



Графіки функцій

$y = f(x)$ *і y=f''(x)*

2. **Проміжки опуклості вгору та вниз** визначаються залежно від знака другої похідної. Якщо друга похідна функції додатна ($f''(x) > 0$) на певному проміжку, то графік функції на цьому проміжку є **опуклим вниз** (загинається "вгору"). Якщо ж друга похідна функції від'ємна ($f''(x) < 0$), графік на цьому проміжку є **опуклим вгору** (загинається "вниз").

Підсумки розділу

У даному розділі було розглянуто теоретичні основи дослідження графіків функцій за допомогою похідних. Похідна функції є важливим інструментом для аналізу її поведінки, оскільки дає змогу визначити швидкість зміни функції в кожній точці, а також допомагає виявити точки екстремуму та проміжки зростання і спадання. Особливу увагу було приділено геометричному значенню похідної: вона визначає кут нахилу дотичної до графіка функції в точці, що дає змогу досліджувати функцію на предмет її зростання або спадання. Аналіз функцій за допомогою похідних дає точні результати, що є корисними для вирішення практичних задач в економіці, фізиці, техніці та інших сферах.

Друга похідна функції дозволяє досліджувати кривизну графіка, визначати точки перегину та проміжки опуклості. Це дає змогу точно визначити, в яких ділянках графік функції «загинається» вгору або вниз, що є важливим для детального аналізу функції.

Також було продемонстровано приклади аналізу деяких функцій. На прикладах були розглянуті основні етапи дослідження функцій, а саме: знаходження області визначення, аналіз проміжків зростання та спадання, пошук точок екстремуму, визначення точок перетину з осями, аналіз знакосталості та точок перегину, а також побудова асимптот.

Завдяки похідним, можна не лише отримати точну інформацію про поведінку функцій, а й здійснити якісне дослідження їх графіків, що є незамінним інструментом у багатьох галузях науки і техніки.

РОЗДІЛ 2
ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ В АНАЛІЗІ ГРАФІКІВ

2.1. Алгоритм побудови графіку і його дослідження

Побудова графіка функції є ключовим етапом у вивченні її властивостей. Вона дозволяє не лише наочно уявити, як функція змінюється при різних значеннях аргументу, а й виявити її характерні особливості, такі як критичні точки, асимптоти, проміжки зростання та спадання, тощо. Алгоритм побудови графіка включає кілька етапів дослідження функції:

1. Перед побудовою графіка важливо визначити **область визначення функції** — множину усіх допустимих значень змінної $\boldsymbol{x}$. Це дозволяє правильно встановити межі, в яких буде здійснюватися побудова графіка, та уникнути непотрібних асимптотичних або обмежених значень.
2. Однією з важливих властивостей функції **є її парність чи непарність**.

   Парна функція – функція, у якої для будь-якого будь-якого $x \in D(f)$ $\exists(-x) \in D(f)$ є правильною рівність $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

   Непарна функція – функція, у якої для будь-якого $x \in D(f)$ $\exists(-x) \in D(f)$ є правильною рівність $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

3. Аналізуючи першу похідну функції, можна визначити **проміжки зростання та спадання.** Якщо похідна функції невід’ємна на певному проміжку, функція зростає на цьому проміжку, і навпаки, якщо похідна недодатна — функція спадає.
4. **Локальні максимуми та мінімуми** — це точки, де функція досягає найбільшого або найменшого значення в певному околі. Локальний максимум або мінімум можна знайти за допомогою критичних точок, де похідна дорівнює нулю або не існує.

5. **Максимальне значення функції** на певному проміжку визначається як найбільше значення функції на цьому проміжку, а **мінімальне** — найменше.
6. **Нулі функції**$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_n})$ **-** значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю. Щоб знайти нулі функції, потрібно розв'язати рівняння: ***y = f(x) = 0***. Нулі функції належать *D(y)*.
7. **Точки перетину функції з осями абсцис і ординат** $(\mathbf{x_0}; \mathbf{y_o})$ – це точки, що мають відповідні координати: $(\mathrm{x_0}; 0)$ і $(0; \mathrm{y_0})$.
8. **Проміжок знакосталості** – множина значень $\boldsymbol{x}$, на якому функція набуває значень однакового знаку.
9. **Точки перегину** — це абсциси точок, де функція змінює свою кривизну. Визначаються за допомогою другої похідної, а саме: якщо **друга похідна дорівнює нулю** і при переході через цю точку змінює знак, то дана точка є точкою перегину.
10. **Проміжки опуклості** функції визначаються за допомогою **другої похідної**. Якщо друга похідна додатна, графік **опуклий вниз**, якщо від'ємна — **опуклий вгору**. Це дозволяє зрозуміти характер кривизни функції.
11. **Асимптота функції** – це пряма, до якої значення функції наближаються необмежено близько при зростанні абсциси або ординати. Асимптоти можуть бути **вертикальними** або **похилими (горизонтальними)**.

    Вертикальні асимптоти

    Графік функції $y = f(x)$ при $\boldsymbol{x \to a}$ має вертикальну асимптоту, якщо:

    $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{f(x)} = \pm\infty$**;**

    Крім цього **точка** $\boldsymbol{x = a}$ **є точкою розриву II роду**, а рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $\boldsymbol{x = a}$.

Похилі асимптоти

Рівняння похилої асимптоти задається рівнянням прямої: $\boldsymbol{y = kx + b}$.

де кутовий коефіцієнт $\boldsymbol{k}$ та вільний член $\boldsymbol{b}$ обчислюються за правилом:

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$;

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$;

Якщо обидві границі існують і скінченні, то функція має похилу асимптоту, інакше – не має. Іноді слід окремо розглядати випадки:

$\boldsymbol{x} \to +\infty$ та $\boldsymbol{x} \to -\infty$.

Горизонтальні асимптоти

Функція $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $\boldsymbol{y = b}$, якщо $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b}$.

2.2. Алгоритм побудови похідних функцій і виконання дослідження

Побудова похідної функції є важливим етапом аналізу поведінки функції. Похідна функції дозволяє дослідити такі характеристики, як швидкість зміни функції, зростання чи спадання, наявність екстремумів, а також інші важливі властивості, що визначають форму графіка.

Алгоритм побудови похідної функції та подальше дослідження включає кілька етапів

1. **Знаходження похідної функції**

   Першим етапом є безпосереднє обчислення похідної функції $f'(x)$. Це здійснюється за допомогою основних правил диференціювання.

Правила диференціювання

Правило	Формула
Правило суми та різниці	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Правило добутку	$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
Правило частки	$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2}$
Похідна складеної функції	$(f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$

2. Після того, як похідна функції знайдена, необхідно знайти **критичні точки**, де похідна дорівнює нулю або не існує (якщо такі є). Це важливо для подальшого аналізу екстремумів функції. Точки, де $f'(x) = 0$ або похідна не існує, можуть бути **точками максимуму, мінімуму.**

2.2.1. Інтервали зростання та спадання функції

3. На основі знаків похідної можна визначити проміжки зростання та спадання функції:
   - **Якщо $f'(x) \geq 0$** на певному проміжку, **функція зростає** на цьому проміжку.
   - **Якщо $f'(x) \leq 0$, функція спадає**.

   Це дозволяє зрозуміти, на яких ділянках функція є зростаючою або спадною.

2.2.2. Визначення локальних екстремумів та точок перетину з осями

4. Після того, як ми знайшли критичні точки, необхідно з'ясувати, чи є ці точки екстремумами (максимумами або мінімумами). Для цього використовуємо першу похідну:
   - **Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з мінуса на плюс, то дана точка є точкою локального мінімуму.**
   - **Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з плюса на мінус, то дана точка є точкою локального максимуму.**

2.2.3. Визначення точок перегину і проміжків опуклості функції

5. Для визначення **точок перегину та проміжків опуклості** використовують другу похідну:
   - **Якщо $\boldsymbol{f''(x) > 0}$**, функція є опуклою вниз.
   - **Якщо $\boldsymbol{f''(x) < 0}$**, функція є опуклою вгору.

2.2.4. Визначення наявності асимптот функції

6. Після дослідження похідної функції можна також визначити наявність асимптот.

   Вертикальні асимптоти: графік функції $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту при $x \to a$, якщо границя функції нескінченна $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Точка $x = a$ є точкою розриву ІІ роду, і рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x = a$.

   Похилі асимптоти: рівняння похилої асимптоти задається $y = kx + b$, де k і b – границі, що обчислюються за правилом:

   $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$;

   $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$;

   Якщо обидві границі існують і скінченні, функція має похилу асимптоту. Інакше – не має.

   Горизонтальні асимптоти: крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$, якщо існує скінченна границя функції при $x \to \pm\infty$ і ця границя дорівнює $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b}$.

2.2.5. Дослідження наданих графіків функцій за допомогою похідних

1. Дослідити функцію $\boldsymbol{y = \frac{x^2 + x + a}{x}}$;

1) $D \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$

2) $y' = \frac{(2x+1)*x-1*(x^2 + x + a)}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2} = 0;$

$$\begin{cases} u = x^2 + x + a \\ v = x \end{cases} \qquad \begin{matrix} u' = 2x + 1 \\ v' = 1 \end{matrix}$$

if $a = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ *крит. точок немає*

ф ↑ *при* $\forall x \neq 0$

if $a > 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - a}{x^2} = 0;\ x^2 = a; x = \pm\sqrt{a}$

ф ↑ *при* $x \in \left(-\infty; -\sqrt{a}\right]$ *і* $x \in \left[\sqrt{a}; \infty\right)$

ф ↓ *при* $x \in \left[-\sqrt{a}; 0\right)$ *і* $x \in (0; \sqrt{a}]$

$$x_{max} = -\sqrt{a} \Rightarrow y_{max} = \frac{\left(-\sqrt{a}\right)^2 + \left(-\sqrt{a}\right) + a}{-\sqrt{a}} = \frac{a - \sqrt{a} + a}{-\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2a - \sqrt{a}}{-\sqrt{a}} = 1 - 2\sqrt{a}$$

$$x_{min} = \sqrt{a} \Rightarrow y_{min} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \sqrt{a} + a}{\sqrt{a}} = \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2a\sqrt{a} + 1$$

if $a < 0\ y' \Rightarrow 0$

ф↑ *при* $\forall x \in (-\infty; 0)$ *і* $(0;\ \infty)$

3) $y'' = \left(\frac{x^2 - a}{x^2}\right) = \frac{2x * x^2 - 2x(x^2 - a)}{x^4} = \frac{2x(x^2 - x^2 + a)}{x^4} = \frac{2a}{x^3}$

$u = x^2 - a; \quad u' = 2x;$
$v = x^2; \quad v' = 2x;$

$if\ a = 0 \Rightarrow y'' = 0; \Rightarrow$ т − к перетину не існує.

$if\ a > 0$ *при* $x \in (-\infty; 0)$ *– опукла вниз;*

при $x \in (0; \infty)$ *– опукла вгору;*

4) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + a}{x^2} = 1;$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+a}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+a-x^2}{x} = 1;$$

$y = x + 1$ – *похила асимптота.*

2. Дослідити функцію $\boldsymbol{y = \frac{a}{x^2} + \frac{x}{a}}$;

1) $D \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$

2) $y' = \left(ax^{-2} + \frac{1}{a}x\right)' = -2ax^{-3} + \frac{1}{a} = -\frac{2a}{x^3} + \frac{1}{a} = 0;$

$\frac{2a^2+x^3}{ax^3} = 0;\ x^3 = 2a^2; x = \sqrt[3]{2a^2}$ – *критична точка;*

if $a > 0 \Rightarrow x_{min} = \sqrt[3]{2a^2}$

ф ↑ *при* $x \in (-\infty; 0)$ *і* $x \in \left[\sqrt[3]{2a^2}; \infty\right)$

if $a < 0 \Rightarrow x_{max} = \sqrt[3]{2a^2}$

ф↓ *при* $\forall x \in (-\infty; 0)$ *і* $[\sqrt[3]{2a^2};\ \infty)$

ф↑ *при* $\forall x \in \left(0; \sqrt[3]{2a^2}\right]$

3) $u = x^3 - 2a^2;\quad u' = 3x^2;$
$v = ax^3;\quad v' = 3ax^2;$

$y'' = \frac{3x^2 * ax^3 - 3ax^2(x^3-2a^2)}{a^2x^4} = \frac{3ax^2(x^3-x^3+2a^2)}{a^2x^6} = \frac{3*2a^2*a}{a^2x^4} = \frac{6a}{x^4} = 0$ –

немає точок перетину;

$if\ a > 0$ *при* $x \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$ – *ф. опукла вниз;*

$if\ a < 0$ *при* $x \in (-\infty; 0)U(0; \infty)$ – *ф. опукла вгору;*

4) $k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{x^2}+\frac{x}{a}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{a^2+x^3}{ax^3} = \frac{1}{a};$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2+x^3}{ax^2} - \frac{1}{a}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2+x^3}{ax^2} - \frac{x^3}{ax^2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2+x^3-x^3}{ax^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^2}{ax^2}\right) = 0;$$

$y = \frac{1}{a}x$ – *похила асимптота.*

Підсумки розділу

У розділі розглянуті основні етапи побудови графіків функції та аналізу похідних. Побудова графіка допомагає виявити ключові властивості функції: проміжки зростання та спадання, екстремуми, точки перегину та асимптоти.

Аналіз похідних дозволяє визначити ділянки зростання та спадання, а також знайти критичні точки для виявлення екстремумів. Друга похідна допомагає визначити точки перегину та проміжки опуклості функції. Крім того, похідні важливі для знаходження асимптот графіків функцій. Ці методи дозволяють побудувати точний графік та детально вивчити її поведінку.

Даний розділ містить детальне дослідження графіків деяких функцій, представлених в програмі. А програма в свою чергу дає можливість дослідити поведінку графіків даних функцій в залежності від зміни параметрів.

РОЗДІЛ 3
РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАСТОСУНКУ

3.1. Вибір технологій для реалізації

У процесі розробки програмного забезпечення для вирішення поставленої задачі було обрано кілька ключових технологій, що дозволяють ефективно реалізувати необхідний функціонал. Оскільки задача включає як математичні обчислення, так і розробку графічного інтерфейсу користувача, вибір технологій базувався на потребі в швидкості обчислень, зручності для користувача та інтеграції між компонентами.

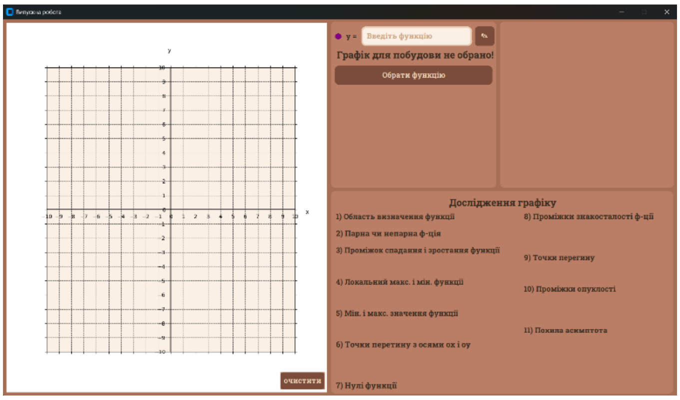
Мова програмування Python

Python є основною мовою для розробки цього програмного продукту. Вибір Python був зумовлений його простотою, високою швидкістю розробки, великою кількістю бібліотек для наукових обчислень, а також високою популярністю в наукових та інженерних сферах. Python надає потужні інструменти для обчислень і візуалізації, що є критичними для задачі.

NumPy для математичних обчислень

Для виконання математичних обчислень, таких як обчислення похідних, інтегралів, перевірка монотонності функцій, було обрано бібліотеку **NumPy**. Ця бібліотека є стандартом для роботи з масивами та матрицями в Python. **NumPy** дозволяє виконувати швидкі і точні обчислення, а також підтримує операції над великими наборами даних, що важливо для складних математичних задач.

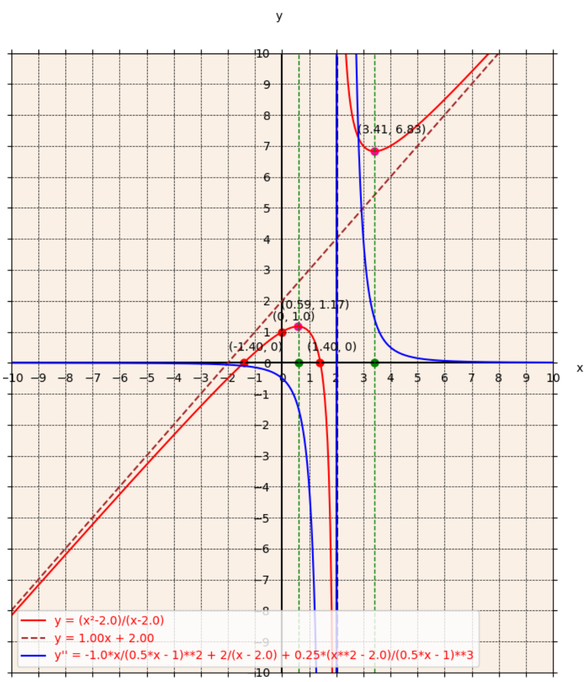
CustomTkinter та Tkinter для графічного інтерфейсу



Розроблений інтерфейс головного додатку програми через customtkinter

Оскільки **Tkinter** має досить обмежені можливості щодо візуального оформлення інтерфейсу, було використано її розширену версію **CustomTkinter** для розробки графічного інтерфейсу користувача, яка є стандартною для Python і дозволяє швидко створювати вікна, кнопки, текстові поля та інші елементи GUI. Ця бібліотека дозволяє створювати більш сучасний і естетично приємний інтерфейс. **CustomTkinter** надає більший контроль над стилями елементів, такими як кнопки, поля введення, чекбокси та панелі.

Matplotlib для візуалізації даних

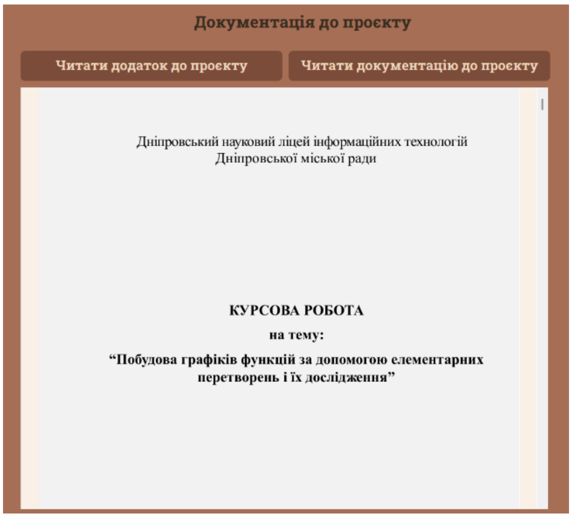


Візуалізація графіку з похідними через matplotlib

Для побудови графіків функцій та результатів обчислень була обрана бібліотека **Matplotlib**. Вона є однією з найбільш потужних бібліотек для візуалізації даних у Python, дозволяючи створювати статичні, анімаційні та інтерактивні графіки. **Matplotlib** забезпечує зручний інтерфейс для побудови графіків, що є важливим для відображення функцій, їх похідних та інших математичних залежностей.

Tkinter

Інтерфейс програми активно взаємодіє з користувачем через елементи управління, такі як кнопки, слайдери та текстові поля. Для обробки подій, що виникають при взаємодії користувача з інтерфейсом, використовуються вбудовані механізми обробки подій **Tkinter**. У нашому випадку **customTkinter** є основною бібліотекою для інтерфейсу додатку, але **Tkinter** активно працює для відображення документації на відповідній сторінці.



Відображення документації через tkinter

Інтеграція між компонентами

Оскільки задача включає в себе кілька різних компонентів, таких як інтерфейс користувача, математичні обчислення і візуалізація даних, важливою є інтеграція між ними. Вибрані технології — **Python, Tkinter, NumPy та Matplotlib** — добре інтегруються між собою, що дозволяє безперешкодно передавати дані між компонентами програми. Зокрема, результати математичних обчислень, отримані за допомогою **NumPy**, передаються на побудову графіків у **Matplotlib**, а також можуть бути виведені на екран через елементи інтерфейсу користувача в **customTkinter**.

Підсумки розділу

У цьому розділі було розглянуто вибір основних технологій для реалізації програмного забезпечення. Використання мови програмування Python забезпечує швидку розробку та ефективне виконання математичних обчислень, завдяки чому програма працює з великими масивами даних та складними обчисленнями.

Бібліотека **NumPy** дозволяє ефективно виконувати необхідні математичні операції, а **Matplotlib** забезпечує високу якість візуалізації результатів. Для створення зручного та сучасного інтерфейсу користувача використано бібліотеку **customTkinter**, яка доповнює можливості стандартного **Tkinter** і забезпечує кращу взаємодію користувача з програмою. Інтеграція між компонентами, такими як обчислення, візуалізація та інтерфейс, здійснюється безперешкодно, завдяки зручним інструментам Python та його бібліотекам.

Загалом, вибір цих технологій забезпечує зручність, продуктивність і високу функціональність програми.

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження була розроблена програма для аналізу графіків функцій за допомогою похідних. Програма дозволяє автоматично визначати та відображати основні властивості функцій, такі як екстремуми, точки перегину, проміжки зростання та спадання, а також області розривів. Це дає можливість ефективно досліджувати математичні функції та отримувати точні результати для різних типів функцій.

Теоретичне значення роботи полягає у кращому розумінні того, як похідні функції допомагають виявляти ключові характеристики графіків. Зокрема, завдяки похідним, можна не лише знайти критичні точки, але й визначити точки перегину та проміжки опуклості, що є важливими для глибшого аналізу поведінки функцій. Прикладне значення роботи полягає в тому, що розроблена програма може бути корисною як для навчальних цілей, так і для практичного використання в різних сферах, таких як фізика, економіка та інженерія. Це дозволяє швидко отримувати графічне представлення функцій і їх похідних, що є важливим у процесі моделювання реальних процесів. Результати дослідження є достовірними, оскільки вони були перевірені шляхом порівняння теоретичних розрахунків і результатів, отриманих програмою. Всі функції працюють коректно, а побудовані графіки відповідають математичним стандартам.

Для подальшого вдосконалення можна додати можливість аналізу складніших функцій, а також покращити інтерфейс програми для зручнішої роботи користувачів. На мою думку робота має великий потенціал для застосування у навчанні та наукових дослідженнях, і може стати доволі корисним інструментом для більш глибокого вивчення математичних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Алгебра 10 клас: Поглиблений рівень вивчення** / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 256 с.
2. **Алгебра 9 клас: Поглиблений рівень вивчення** / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 240 с.
3. **Математика 10 клас: Поглиблений рівень вивчення** / М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований. – Київ: Оріон, 2018. – 264 с.
4. Customtkinter Documentation
5. Matplotlib 3.10.0 documentation
6. Zno Academia
7. YukhymCommunity

ДОДАТОК

Аналіз функцій за допомогою похідних. Приклади з використанням програми.

Аналіз функцій за допомогою похідних є **основним інструментом для дослідження їхніх властивостей**, особливо в контексті математичних і реальних застосувань. Похідні дозволяють глибше зрозуміти, як змінюється функція в кожній точці її області визначення. Завдяки похідним можна досліджувати ключові характеристики графіка і тому використання похідних значно спростило дослідження графіків функцій у проєкті. Проєкт має декілька варіантів для вибору функцій і в кожному з цих варіантів цікаво спостерігати за поведінкою першої і другої похідних. Це можна побачити на практиці при дослідженні графіків функцій, що запропоновані в програмі.

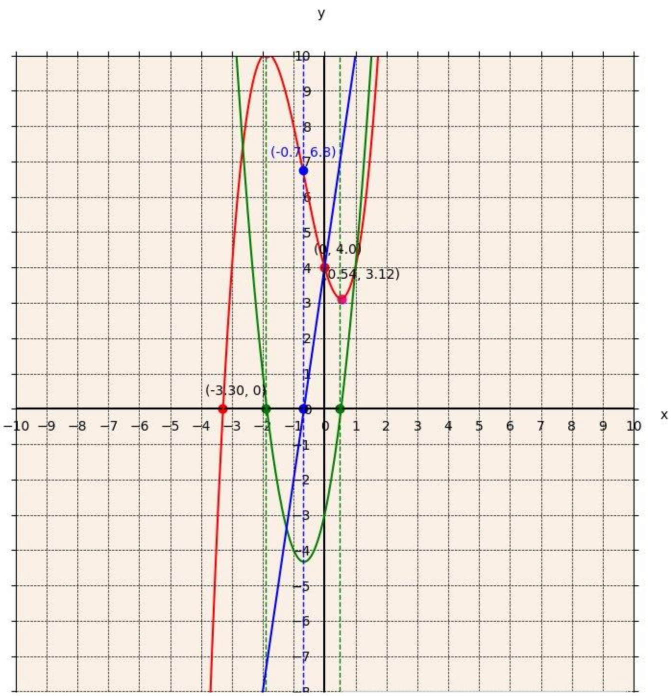
Аналіз функцій, заданих многочленом, за допомогою похідних

Розглянемо функцію $\boldsymbol{y = ax^3 + bx^2 - cx + d}$. Для дослідження данного графіка функції введемо наступні коефіцієнти: **a = 1, b = 2, c = -3, d = 4**; тоді отримуємо функцію $\boldsymbol{y = 1x^3 + 2x^2 - 3x + 4}$ і наступні похідні:

$\boldsymbol{y' = 3x^2 - 4x - 3}$

$\boldsymbol{y'' = 6x + 4}$

Після успішного відображення графіку функції і його похідних виконується і виводиться виконане дослідження:



Побудова графіків функцій

$$y = f(x) = 1x^3 + 2x^2 - 3x + 4,$$

$$y = f'(x), \qquad y = f''(x)$$

1) D(y) = R

2) Функція загального вигляду

3) (-∞; -1.87) **- проміжок зростання**

(-1.87; 0.54) **- проміжок спадання**

(0.54; ∞) **- проміжок зростання**

4) Локальний максимум: x = - 1.87 y = 10.06

Локальний мінімум: x = 0.54 y = 3.12

5) Макс. значення ф-ції: не існує

Мін. значення ф-ції: не існує

6) Точки перетину з Ох: (-3.30; 0)

Точка перетину з Оу: (0; 4.00)

7) Нулі функції: x_1 = - 3.3

8) Проміжки знакосталості:

y < 0 при x ∈ (-∞; -3.3)

y > 0 при x ∈ (-3.3; +∞)

9) Точки перегину: x_1 = - 0.7

10) Проміжки опуклості графіка:

опуклість ↑ при x ∈ (-∞; -0.67)

опуклість ↓ при x ∈ (-0.67; +∞)

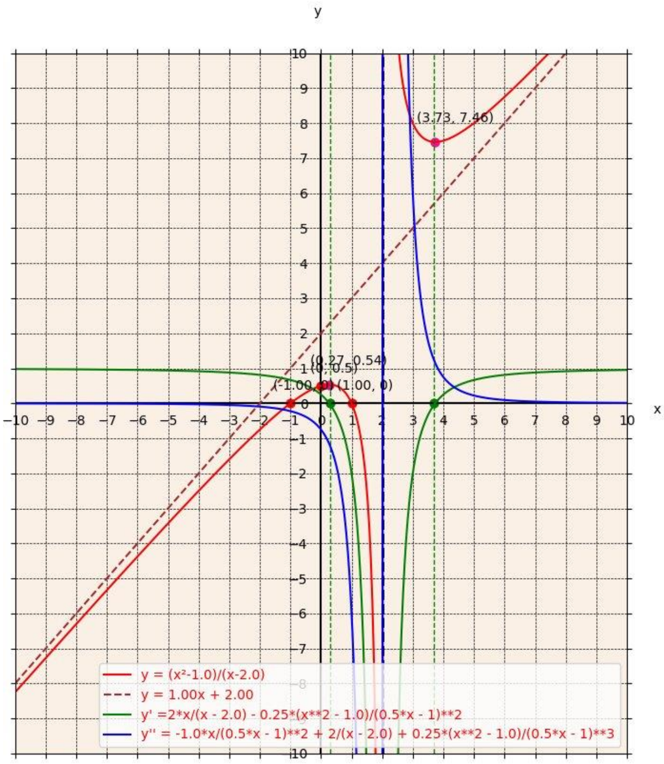
11) Похила асимптота: не існує

Аналіз дробово-раціональних функцій та їх властивостей

Розглянемо дробово-раціональних функцію $\boldsymbol{y = \frac{x^2-a}{x-b}}$. Для дослідження данного графіка функції введемо наступні коєфіцієнти: **a = 1, b = 2**; тоді отримуємо функцію $\boldsymbol{y = \frac{x^2-1}{x-2}}$ і наступні похідні:

$$\boldsymbol{y' = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}}$$

$$\boldsymbol{y'' = \frac{6}{(x-2)^3}}$$



Побудова графіків функцій

$$y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-2},$$

$$y = f'(x), y = f''(x)$$

Після успішного відображення графіку функції і його похідних виконується і виводиться виконане дослідження:

1) D(y) = (-∞; 2) U (2; ∞)

2) Функція загального вигляду

3) (-∞; 0.27) **- проміжок зростання**

(0.27; 2) і (2; 3.73) **– проміжок спадання**

(3.73;∞) **- проміжок зростання**

4) Локальний максимум: x = 0.27 y = 0.54

Локальний мінімум: x = 3.73 y = 7.46

5) Макс. значення ф-ції: не існує

Мін. значення ф-ції: не існує

7) Нулі функції: x_1 = -1; x_2 = 1

6) Точки перетину з Ox: (-1.00, 0); (1.00, 0)

Точка перетину з Oy: (0, 0.50)

8) Проміжки знакосталості:

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2)$

$y > 0$ при $x \in (-1; 1) \cup (2; \infty)$

9) Точки перегину: не існує

10) Проміжки опуклості:

опуклість ↑ при $x \in (-\infty; 2)$

опуклість ↓ при $x \in (2; \infty)$

11) Похила асимптота: $y = 1x + 2$