

# 小波分析

赖莹

June 2022

edit with L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## 摘要

小波 (Wavelet) 这一术语, 顾名思义, “小波”就是小的波形。所谓“小”是指它具有衰减性; 而称之为“波”则是指它的波动性, 其振幅正负相间的震荡形式。与 Fourier 变换相比, 小波变换是时间(空间)和频率的局部化分析, 它通过伸缩平移运算对信号(函数)逐步进行多尺度细化, 最终达到高频处时间细分, 低频处频率细分, 能自动适应时频信号分析的要求, 从而可聚焦到信号的任意细节。本文从泛函分析出发, 对比傅里叶变换的缺点引出了小波变换, 并介绍了三种常用的小波函数: Haar 小波、Daubechies 小波和样条小波。此外还介绍了小波变换里重要的多分辨分析, 最后给出了常用的二维小波 matlab 函数以及小波在实际应用中的两个例子。

## 1 小波分析的介绍

小波分析应用数学中相对较新的发展, 最初的概念由法国从事石油信号处理的工程师 J. Morlet 在 1974 年首先提出。小波分析应用范围广泛, 包括信号分析、图像处理、医学影像与诊断等。

### 1.1 泛函分析

泛函分析是现代数学分析的一个分支, 隶属于分析学, 其研究的主要对象是函数构成的函数空间。常用的函数空间有线性空间、赋范线性空间、巴拿赫 (Banach) 空间和希尔伯特空间 (Hilbert) 空间。其中线性空间中的平方可积函数空间为公式 (1), 它是非周期的能量有限的信号全体。

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right. \right\} \quad (1)$$

在这里, 给出以下定义为后续的研究做好铺垫。

定义 设  $\{e_k(t)\}$  为函数序列, 令集合  $X$  为

$$X = \left\{ \sum_k a_k e_k(t), a_k \in R, k \in Z \right\} \quad (2)$$

则称  $X$  为序列  $\{e_k(t)\}$  张成的线性空间, 简记为  $X = \text{span}\{e_k\}$ 。

定义 若序列  $\{e_k(t)\}$  线性无关,  $\forall g \in X$ ,  $g$  都可由  $e_k(t)$   $k = 1, 2, \dots, n$  线性表示, 此时,  $\{e_k(t)\}$  为空间  $X$  的一组基底。

定义 设  $x, y$  为内积空间中的两个元素, 若内积  $\langle x, y \rangle = 0$ , 则称  $x, y$  相互正交, 简记为  $x \perp y$ 。

定义 若内积空间  $X$  中的基底  $\{e_n\}$  满足

$$\langle e_m, e_n \rangle = \delta(m - n) = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases}$$

则称  $\{e_n\}$  为  $X$  中的规范正交基。故  $\forall x \in X$  都可以展开成为  $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ , 并且有 Parseval 等式, 即  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ 。

定义 对于不满足规范正交条件的基底  $\{e_k\}$  来说, 如果存在另一组对偶基底  $\{\tilde{e}_n\}$  使得

$$\langle e_m, \tilde{e}_n \rangle = \delta(m - n) = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases}$$

对应的傅里叶展开式为  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \tilde{e}_n \rangle e_n$ 。规范正交性存在于原基底与对偶基底之间, 展开式也相应的由原基底和对偶基底构成, 这种基称为双正交基, 其互为对偶基底。

## 1.2 傅里叶分析

傅里叶分析, 是数学的一个分支领域。它研究如何将一个函数或者信号表达为基本波形的叠加。它研究并扩展傅里叶级数和傅里叶变换的概念。结合上面泛函内容, 首先从泛函角度描述傅里叶变换:

- 用内积表示傅里叶变换

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \langle f(t), e^{i\omega t} \rangle \quad (3)$$

- 用基底表示函数的展开

$$f = \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n \quad (4)$$

下面给出连续型傅里叶变换 (5) 和傅里叶反变换 (6) 的公式:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (6)$$

其中  $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ 。

1807 年, 法国数学家约瑟夫·傅里叶提出任何函数都可以展开为三角级数。傅里叶级数就是把类似波的函数表示成简单正弦波的方式。更正式地说, 一个信号可以表示成一系列正弦和余弦函数之和, 叫做傅立叶展开式 (7)。傅里叶级数多用于去噪、压缩 (将系数值小的项去掉) 等。图 (1) 是以傅里

叶级数模拟非正弦曲线的方波，经常运用于电子信号的处理。

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (7)$$

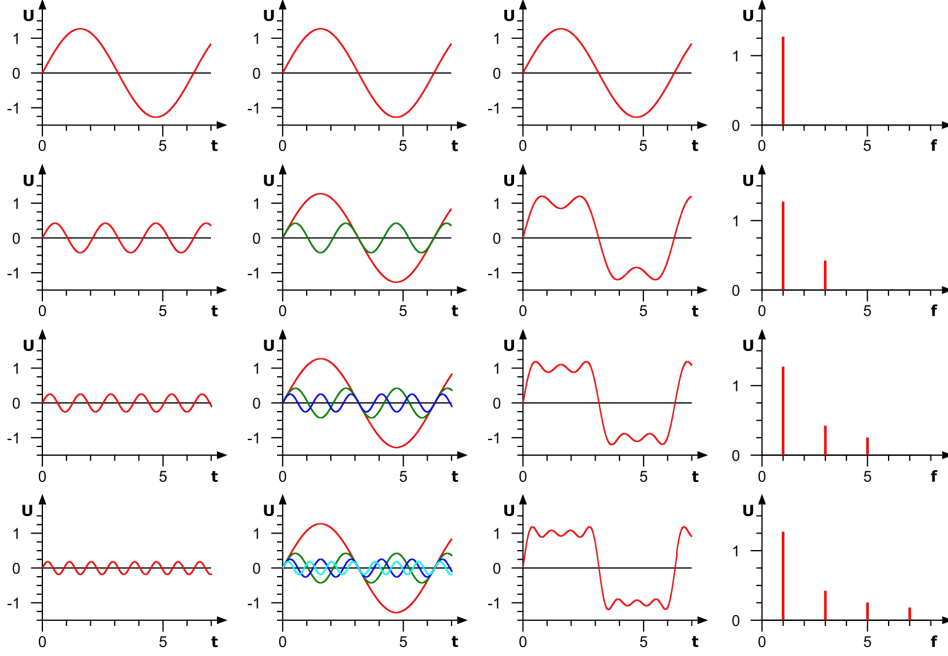


图 1: 傅里叶级数模拟非正弦曲线的方波

在压缩和去噪中最重要的就是进行频域变化，能够揭示在时域中看不到的信息。然而傅里叶变化只能揭示只能揭示在信号中有哪些频率存在，时间信息和频率信息不能同时得到，而实际中需要对时间信息和频率信息同时获得。在 1946 年，Dennis Gabor 提出了窗口傅里叶变换，即仅分析某时间段的一个切片。窗口傅里叶变换的频域为公式 (8) 所示，它表示若  $\hat{w}(\omega)$  的有效窗口宽度为  $2\Delta\omega$ ，则  $Gf(\omega, b)$  给出的是  $\hat{f}(\omega)$  在局部频率范围  $[\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega]$  内的频谱信息，和随着有效窗口宽度  $\Delta\omega$  越小，对信号的频率定位能力越强的物理意义。

$$(Gf)(\omega, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t-b)e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega) \times (\hat{w}(\omega)e^{-i\omega b}) \quad (8)$$

然而窗口傅里叶变换仍有局限性，当窗函数对应的时频窗面积大于等于 2，无法再细化；且无法满足低频信号需要时窗宽、频窗窄，高频信号需要时窗窄、频窗宽的要求。因此引入了能够“自适应变化”的时频窗结构，也就是小波变换理论。

### 1.3 小波分析

小波指在有限时间范围内变化且其平均值为零的数学函数。它具有有限的持续时间和突变的频率和振幅，在有限的时间范围内，它的平均值等于零两个性质。

定义 小波指小的波，即  $\psi(t)$  是小波，满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ 。

由于在整个实直线  $R$  上是可积的, 所以  $\psi(t)$  在无穷远点一定等于 0, 也就是说, 当  $t \rightarrow \pm\infty$  时, 衰减到 0。由  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$ , 可看出  $\psi(t)$  的图像与  $X$  轴所夹的上半平面中的面积和下半平面积是相等的也就是说  $t$  变动时候, 它是上下波动的, 这就是小波的来源。此外, 小波也满足  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|dt < \infty$ 。

小波变换与傅立叶变换比较, 它们的变换核不同: 傅立叶变换的变换核为固定的虚指数函数 (复三角函数), 而小波变换的变换核为任意的母小波。前者是固定的, 而后者是可选的, 实际上母小波有无穷多种, 只要满足下列条件即可。

- 正负部分相抵, 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$  ( $\hat{\psi}(0) = 0$ )。
- 绝对可积切平方可积, 即  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 。
- 满足允许条件, 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$ 。

其中  $\hat{\psi}(x)$  为  $\psi(x)$  的傅里叶变换。

给出三个常用的母小波如图 (2) 所示。

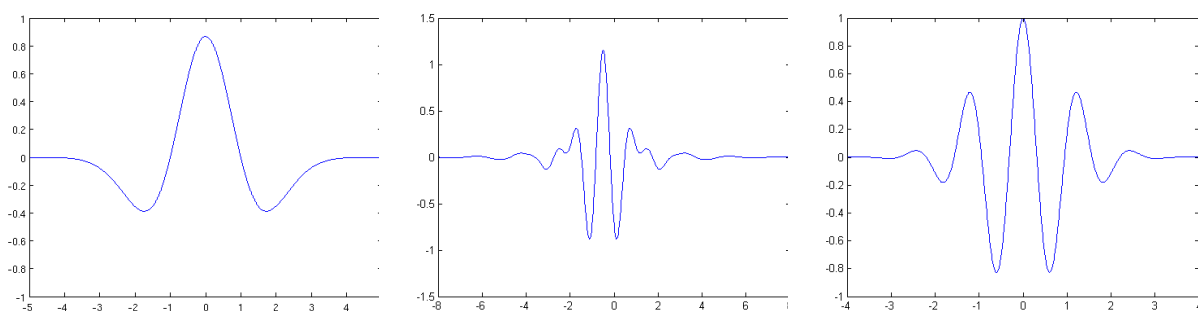


图 2: Mex-Hat, Meyer 和 Morlet 小波

将小波输入输出不同分类, 其中输入为连续, 输出为连续, 则称之为连续小波变化, 其公式为 (9)。

$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (9)$$

其中,  $\tau$  为平移位置,  $s$  为缩放因子,  $\psi$  表示母小波。 $\tau$  的区间在  $(-\infty, +\infty)$ ,  $b$  的区间为  $(0, +\infty)$ 。以时频分析的角度分析, 当  $b$  值越大, 频率的变化越小; 以时频分析的角度分析, 当  $b$  值越小, 频率的变化越大。

事实上, 凡能用傅立叶分析的函数都可用小波分析。因为相比傅里叶分析对一系列不同频率的正弦波变换, 小波变换小波变换可理解为用经过缩放和平移的一系列母小波函数代替傅立叶变换用的正弦波。并且用不规则的小波分析变化激烈的信号比用平滑的正弦波更有效, 或者说对信号的基本特性描述得更好。

## 2 Haar 小波

Haar 小波变换是由数学家阿尔弗雷德·哈尔于 1909 年所提出的函数变换, 是小波分析中最简单的一种变换, 也是最早提出的小波函数。

## 2.1 Haar 尺度函数

尺度函数又称为小波父函数. 根据双尺度方程, 可以由尺度函数生成小波. 这里首先给出 Haar 小波的尺度函数定义:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

函数图像如图 (3) 所示. 由于  $\varphi(x)$  只在区间  $[0, 1]$  上为 1, 在  $[0, 1]$  外恒为 0, 称  $\varphi(x)$  的支集为  $[0, 1]$ .

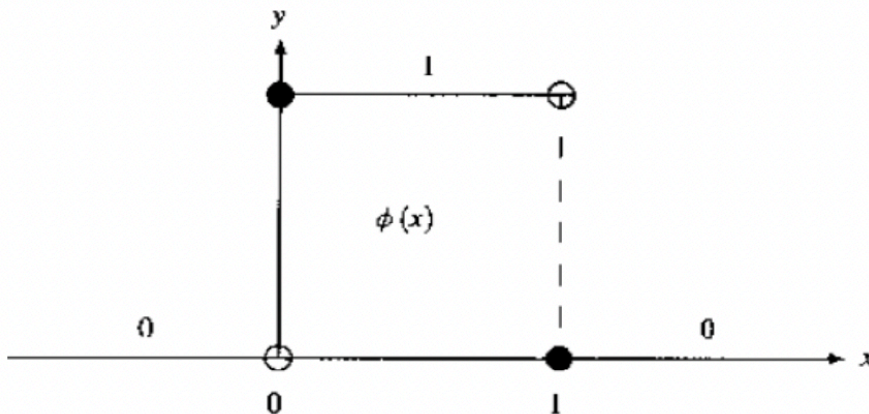


图 3: Haar 尺度函数

现在考虑函数  $\varphi(x - k)$ ,  $k$  为任意整数, 即  $k \in \mathbb{Z}$ , 可以看出  $\varphi(x - k)$  的支集为  $[k, k + 1]$ , 即  $\varphi(x - k)$  在  $[k, k + 1]$  外恒为零, 并且  $\varphi(x - k)$  的图形是  $\varphi(x)$  的图形向右 ( $k > 0$ ) 或向左 ( $k < 0$ ) 移动  $|k|$  个单位, 令  $l^2$  是由所有满足条件  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$  的数列  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$  组成的空间. 从而定义  $V_0$  空间为如下函数所组成的空间:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x - k), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

其中  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$ . 换句话说,  $V_0$  是所有不连续点仅在整数集汇总的分段常量函数所组成的空间. 因为  $k$  的取值范围有限, 所以在某个有界集外  $V_0$  的值为 0. 这样的函数称为具有有限支撑或紧支撑的.

下面再考虑函数  $\varphi(2x)$ , 其支集为  $[0, 1/2]$ , 而函数  $\varphi(2x - k) = \varphi(2(x - k/2))$  的支集是  $[k/2, (k + 1)/2]$ , 其图形是  $\varphi(2x)$  向右 ( $k > 0$ ) 或向左 ( $k < 0$ ) 移动  $|k/2|$  个单位, 则令  $V_1$  空间为如下函数所组成的空间:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2x - k), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

从几何上看,  $V_1$  是由紧支撑的分段常量函数构成的空间, 其可能的间断点在半整数处  $\{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots\}$ . 此外, 也可以看出  $V_0 \subset V_1$ .

定义 设  $j$  是任意非负整数, 即  $j \in \mathbb{Z}^+$ , 令  $V_j$  是由函数集

$$\varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

所张成的空间，即  $V_j$  是由所有分段常函数组成的空间，且该空间中的任意函数具有紧支集，其不连续点只能是某些  $k/2^j$  点， $k \in \mathbb{Z}$ 。一般地，有  $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$ ，且这种包含关系是严格的。

下面给出 Haar 尺度函数的一些基本性质：

- (1)  $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$
- (2)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j} x) \in V_0$
- 函数集  $\{2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_j$  的标准正交基。

前面讨论了由 Haar 尺度函数  $\varphi(x)$  所生成的空间  $V_j$ ，注意到随着  $j$  的增大，对应空间也就越精细，包含的信息就越多。 $f(x)$  可以看作是实际信号的一个近似表示，设  $f(x) \in V_{j+1}$ ，如果  $f(x)$  含有噪声，想把噪声滤掉，由于一般噪声频率比有用信号的频率高，要把  $f(x)$  中属于  $V_{j+1}$  但不属于  $V_j$  的部分去掉（滤波），这就引出了小波函数  $\psi$ 。因此，目标就是找到满足  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  的  $W_j$ ，即  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补。

下面是构造小波函数  $\psi$  的两个关键点：

- $\psi \in V_1$ ，从而有  $\psi(x) = \sum_l c_l \varphi(2x - l)$ ， $c_l \in \mathbb{R}$ ，且只有有限个  $c_l$  不为零；
- $\psi \perp V_0$ ，即  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \varphi(x - k) dx = 0$ ，对任意  $k \in \mathbb{Z}$ 。

从上面两点可以得到：当  $k = 0$  时，有  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) f(x) dx = 0$ 。并且  $\psi(x)$  可由  $\varphi(2x)$  及其平移线表示，而  $\varphi(2x)$  的紧支集为  $[0, 1/2]$ ，从而可知如下函数：

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \end{cases}$$

满足上述要求的公式如下：

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1). \quad (12)$$

该公式函数就是 Haar 小波函数。

为了说明  $W_0$  就是由  $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的空间，先给出以下结论：

引理 1 对任意  $f_1(x) = \sum_k c_k \varphi(2x - k) \in V_1$ ，有  $f_1 \perp V_0$ ，即  $f_1(x) \perp \varphi(x - l)$ ， $l \in \mathbb{Z}$ 。

上述结论可等价叙述为：

引理 2 对任意  $f_1(x) \in V_1$ ，则  $f_1$  与  $V_0$  正交（记为  $f_1(x) \perp V_0$ ）当且仅当

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2x - k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{2n} (\varphi(2x - 2n) - \varphi(2x - 2n - 1)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{2n} \psi(x - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \psi(x - n), \quad d_n = c_{2n}. \end{aligned}$$

至此，证明了  $W_0$  就是由  $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的空间，形如

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \psi(x - k), \quad d_k \in \mathbb{R} \quad (13)$$

的函数所组成的空间，其中只有有限个  $d_k$  非零。一般地，有以下结论：

**定理 1** 令  $W_j$  是由如下形式的所有函数

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \psi(2^j x - k), \quad d_k \in \mathbb{R} \quad (14)$$

所组成的空间，且只有有限个  $d_k$  非零，则  $W_j$  是  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补空间，即  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ 。进一步推理得到：

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_{j-1}. \quad (15)$$

所以  $V_j$  中任意函数  $f$  都可唯一分解为：

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + \cdots + w_{j-1}. \quad (16)$$

其中  $f_0 \in V_0$ ,  $w_j \in W_j$ ,  $0 \leq l < j$ 。

当  $j$  趋于无穷大时，公式 (16) 有如下结论：

**定理 2** 空间  $L^2(\mathbb{R})$  可分解为无限正交和

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots, \quad (17)$$

并对任意函数  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ，有唯一解：

$$f = f_0 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^N w_j, \quad (18)$$

其中  $f_0 \in V_0$ ,  $w_j \in W_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}^+$ 。

## 2.2 Haar 小波分析与重构算法

在信号处理中，若对某信号  $f$  进行去噪处理（滤波），首先对  $f$  用一个阶梯函数  $f_j \in V_j$  ( $j$  取适当的正整数) 来逼近。由公式 (16)， $f_j$  可分解为各分量之和：

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + \cdots + w_{j-1}. \quad (19)$$

其中  $f_0 \in V_0$ ,  $w_l \in W_l$ ,  $0 \leq l < j$ ，分量  $w_l$  表示宽度为  $1/2^{l+1}$  的信号。对于充分大的  $l$ ，这些信号就会变得很窄，这样就可以表示噪音（噪音的频率一般很高）。为把噪音去掉，就要将这些表示噪音的分量设置为零，此时剩下的分量之和所表示的信号仍接近  $f$ ，但是噪音已经被消除。

为了实现该目标，首先对原始信号  $f$  用下面的阶梯信号逼近：

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2^j x - k). \quad (20)$$

该公式中的系数  $c_k$  可对原始信号  $f$  在点  $x = k/2^j$  进行采样求的。此外  $j$  应该取充分大，以保证采样信号  $f_j$  充分接近  $f$ 。

对于给定的信号  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 首先通过采样, 用  $f_j \in V_j$  近似表示  $f$ , 再用下述分解定理把  $f_j$  分解成各个不同频率的成分之和。

**定理 3** (*Haar* 小波分解算法) 设  $f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k) \in V_j$ , 则  $f_j$  可分解为:

$$f_j = w_{j-1} + f_{j-1}$$

其中

$$\begin{aligned} w_{j-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} \varphi(2^j x - k) \in W_{j-1}, \\ f_{j-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{j-1} \varphi(2^j x - k) \in V_{j-1}. \end{aligned}$$

且  $d_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j - c_{2k+1}^j}{2}$ ,  $c_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j + c_{2k+1}^j}{2}$ 。

对信号去噪处理后, 分解式中的小波系数  $d_k^l$  都要发生变化, 于是需要一个重构算法, 使去噪后的信号  $\tilde{f}$  能用  $V_j$  中的基底表示出来, 即

$$\tilde{f} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^j \varphi(2^j x - l). \quad (21)$$

信号  $\tilde{f}$  的图形是一个阶梯函数, 在区间  $[l/2^j, (l+1)/2^j]$  上的值为  $c_l^j$ 。下面给出 Haar 小波的重构算法。

**定理 4** (*Haar* 小波重构算法) 设

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + \cdots + w_{j-1},$$

其中

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^0 \varphi(x - k) \in V_0, \\ \omega_n(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^n \varphi(2^n x - k) \in W_n, \quad 0 \leq n < j. \end{aligned}$$

则

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^j \varphi(2^j x - l) \in V_j,$$

其中

$$c_l^n = \begin{cases} c_k^{n-1} + d_k^{n-1}, & l = 2k, \\ c_k^{n-1} - d_k^{n-1}, & l = 2k + 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, j,$$

即先由  $c_k^0$  和  $d_k^0$  求得  $c_l^1$ , 再由  $c_k^1$  和  $d_k^1$  求得  $c_l^2$ ,  $\dots$ , 直到最后由  $c_k^{j-1}$  和  $d_k^{j-1}$  求得  $c_l^j$ 。

### 3 多分辨分析

上面所叙述的 Haar 尺度函数  $\varphi$  和小波函数  $\psi$  是不连续的, 在处理信号时误差会较大, 下面将介绍由 Mallat 所提出的多分辨分析 (multiresolution analysis), 构造的连续的  $\varphi$  和  $\psi$  来解决问题。



### 3.1 多分辨分析的主要理论

多分辨分析的基本思想是先在  $L^2(\mathbb{R})$  的某个子空间中建立基底，然后利用简单的伸缩和平移变换，把子空间的基底扩充到  $L^2(\mathbb{R})$  上。首先，给出多分辨分析的概念。定义 设  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是空间  $L^2(\mathbb{R})$  的一个闭子空间列， $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  被称为  $L^2(\mathbb{R})$  的一个多分辨分析，如果  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  满足下面四个条件：

- 一致单调性  $V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$ ;
- 渐进完全性  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$ ;
- 伸缩规则性  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$ ;
- 正交基存在性 存在  $\psi(x) \in V_0$ ，使得  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_0$  的标准正交基，

其中  $\varphi$  称为尺度函数， $V_j$  称为逼近空间。

多分辨分析也称为多尺度分析或多分辨逼近，满足上面条件的多分辨分析，称为由尺度函数  $\varphi$  生成的多分辨分析。

**定理 5** 设  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是由尺度函数  $\varphi$  生成的多分辨分析，则对任意  $j \in \mathbb{Z}$ ，函数集  $\{\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_j$  的标准正交基。

下面介绍多分辨分析的平移不变性。

**定理 6** 多分辨分析的逼近空间中的任意函数平移后仍在此空间中，即

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x + n/2^j) \in V_j, \quad n \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}.$$

下面再给出在多分辨分析中的一个重要公式—两尺度方程。

**定理 7** 设  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是由尺度函数  $\varphi$  生成的多分辨分析，则下述两尺度方程成立：

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k), \quad (22)$$

其中

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx. \quad (23)$$

在实际应用中，常把两尺度方程 (22) 中的系数  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  称为滤波器系数，在信号滤波中， $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是一个低通滤波器系数，即让低频信号通过。

下面定理是滤波器系数  $h_k$  的一些常用性质。

**定理 8** 设  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是由尺度函数  $\varphi$  生成的多分辨率分析，则滤波器系数满足下述等式：

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \overline{h_k} &= \delta_{n0}, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 &= 1, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k &= \sqrt{2}, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

在多分辨率分析  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  中，尺度函数  $\varphi$  生成每个逼近空间  $V_j$  的一组标准正交基  $\{\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ，由于  $V_j \subset V_{j+1}$ ，即这些空间  $V_j$  不是彼此正交的，它们的基底  $\{\varphi_{jk}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$  不能作为  $L^2(\mathbb{R})$  空间的正交基，为了寻找  $L^2(\mathbb{R})$  的一组正交基，采用  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补空间  $W_j$  以及小波函数  $\psi$  来构造，即

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k), \quad (24)$$

其中  $h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx$ 。定义小波函数为：

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k), \quad (25)$$

其中

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}}. \quad (26)$$

在实际应用中，常把  $g_k$  称为高通滤波器系数，在信号处理中，一般不使用尺度函数  $\varphi$  和小波函数  $\psi$ ，而使用滤波器函数  $h_k$  和  $g_k$ ，记：

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

令  $W_j$  是  $\{\psi_{jk}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的线性空间，则有如下结论：

**定理 9**  $W_j$  是  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补空间，即

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \perp W_j,$$

且  $W_j$  是由  $\{\psi_{jk}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的线性空间。

我们把  $\{\psi_{jk}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  称为小波基， $W_j$  称为小波空间，对于  $j$  较大的情形，小波空间  $W_j$  中的函数就是以高的频率变化，这是由于  $W_j$  是由  $\psi(2^j x)$  经过平移生成的。

### 3.2 分析与重构算法

假设  $f$  是要处理的实际信号，可看作  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ，但是测得的信号  $f$  只是实际信号  $f$  的一个近似，设  $f_j \in V_j$ ，由于  $\{\varphi_{jk}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_j$  的标准正交基，故有

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \varphi_{jk}(x). \quad (28)$$

用  $\varphi_{jk}$  与公式 (28) 两端作内积，得

$$c_{jk} = \langle f_j, \varphi_{jk} \rangle. \quad (29)$$

由于  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ ，所以  $\{\varphi_{j-1,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j-1,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  也是  $V_j$  的标准正交基，故有：

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x). \quad (30)$$

再分别用  $\varphi_{j-1,k}$  和  $\psi_{j-1,k}$  与上式两端作内积，得：

$$c_{j-1,k} = \langle f_j, \varphi_{j-1,k} \rangle, \quad (31)$$

及

$$d_{j-1,k} = \langle f_j, \psi_{j-1,k} \rangle. \quad (32)$$

一般称  $c_{jk}$  为尺度系数，称  $d_{jk}$  为小波系数。

下面给出求尺度系数  $c_{jk}$  和小波系数  $d_{jk}$  关系的过程。

将两尺度方程(24)式写成一般形式：

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \varphi_{jn}(x), \quad (33)$$

将(33)代入(31)得：

$$c_{j-1,k} = \langle f_j, \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \varphi_{jn} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{n-2k} \langle f_j, \varphi_{jn} \rangle, \quad (34)$$

由(29)式，得

$$c_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{n-2k} c_{jn}. \quad (35)$$

类似地，将公式(25)写成一般形式：

$$\psi_{j-1,k}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \varphi_{jn}(x), \quad (36)$$

代入(32)式，并利用(29)可得

$$d_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{n-2k} c_{jn}. \quad (37)$$

公式(35)和(37)就是 Mallat 分解算法（简称为分解算法）。

下面是重构过程，即考虑相反的过程。将两尺度方程的一般形式(33)式和(36)式代入(30)式，得：

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \varphi_{jn}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \varphi_{jn}(x). \quad (38)$$

将上式两端与  $\varphi_{jn}(x)$  作内积，并注意  $\{\varphi_{jk}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是标准正交的以及(29)式，得：

$$c_{jn} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} d_{j-1,k}. \quad (39)$$

(39)式就是 Mallat 重构算法（简称重构算法）。

在实际的信号处理中，对给定信号  $f$  得分解分为三步，即初始化、迭代和终止。已知  $\phi$  和  $\psi$  式正交尺度函数与小波，则用小波处理函数  $f(t)$  得基本过程为：

- 初始化

设信号  $f(t)$  在最高初始分辨率级  $J$  下的光滑逼近为  $P_J f(t) \in V_J$ ，记  $P_J f(t) = f_J(t)$ ，则有  $f_J(t) = \sum_k c_k^J \phi_{J,k}(t)$ 。其中，

$$c_k^J \approx 2^{-J/2} f(k/2^J)$$

- 小波分解

$$c^J \longrightarrow \{c^0, d^0, d^1, \dots, d^{J-1}\}$$

- 小波系数处理

$$\{c^0, d^0, d^1, \dots, d^{J-1}\} \longrightarrow \{\tilde{c}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \dots, \tilde{d}^{J-1}\}$$

- 小波重构

$$\{\tilde{c}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \dots, \tilde{d}^{J-1}\} \longrightarrow \tilde{c}^J \longrightarrow \tilde{f}_J t$$

### 3.3 尺度函数

从上面的描述中知道一个尺度函数确定一个多分辨率分析，从而也就确定了对应的小波函数。那么构造出性质良好的尺度函数也非常重要，首先给出尺度函数的一些性质，这里用  $\overline{\text{span}\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$  表示由函数集  $\text{span}\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的线性子空间的闭包。

引理3 设  $\varphi$  是一个具有紧支集连续函数并满足正交性条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k) \overline{\varphi(x-l)} dx = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

其中  $\overline{\text{span}\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$  表示由函数集  $\text{span}\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的线性子空间的闭包。

**定理 10** 设  $\varphi$  是一个具有紧支集连续函数并满足如下条件：

- 标准正交性条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k) \overline{\varphi(x-l)} dx = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{Z};$

- 标准化条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ ;
- 两尺度方程  $\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k)$ , 只有有限个  $h_k$  非零。

令  $V_j = \overline{\text{span}\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$ , 则  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  构成一个多分辨分析。

下面给出关于尺度函数正交性条件的 Fourier 形式。

**定理 11** 下面两个结论成立:

- 设  $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是一组标准正交系, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - m) \overline{\varphi(x - n)} dx = \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

当且仅当

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

- 设  $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  和  $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是两组正交的函数系, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - m) \overline{\psi(x - n)} dx = 0, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

当且仅当

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\omega + 2k\pi) \hat{\psi}(\omega + 2k\pi) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

**定理 12** 设函数  $\varphi$  满足正交性条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - k) \overline{\varphi(x - l)} dx = \delta_{kl}$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$  和两尺度方程(24), 则  $H(\omega) = (\sqrt{2}/2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$  满足:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (40)$$

同上面定理类似, 得到以下结论:

**定理 13** 设函数  $\varphi$  满足正交性条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - k) \overline{\varphi(x - l)} dx = \delta_{kl}$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$  和两尺度方程(24), 又设  $\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k)$ , 其中  $g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$ , 则以下两个结论成立:

- 记  $G(\omega) = (\sqrt{2}/2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\omega}$ , 则有

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (41)$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - m) \overline{\psi(x - n)} dx = \delta_{kl}$ , 对所有  $m, n \in \mathbb{Z}$  成立, 当且仅当

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

在信号处理中, 常把  $H(\omega)$  和  $G(\omega)$  看作滤波器, 而把  $\{h_k\}$  和  $\{g_k\}$  称为滤波器系数。实际上由公式(23)和  $H(\omega) = (\sqrt{2}/2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$  知  $H(0) = 1$ 。此性质说明  $H(\omega)$  是一个低通滤波器, 对应于尺度函数  $\varphi$  的低通性。同样能知道  $G(0) = 0$ 。此性质说明  $G(\omega)$  是一个高通滤波器, 对应于小波函数  $\psi$  的高通性。

## 4 Daubechies 小波

这章主要描述由 Daubechies 小波所构造的紧支集正交小波 (Daubechies 小波)。对比前面的不连续的 Haar 小波, Daubechies 小波则满足连续条件。

### 4.1 Daubechies 小波的构造

如果  $\varphi$  满足是生成一个多分辨分析的尺度函数, 则  $\varphi$  满足两尺度方程(24), 并且如果  $\varphi$  具有紧支集的, 则其两尺度方程中的系数  $\{h_k\}$  只有有限个非零, 并且有定理 8。记  $H(\omega) = (\sqrt{2}/2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$ , 则由定理 12,  $H(\omega)$  必满足公式

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (43)$$

下面讨论如何构造两尺度方程中的系数  $\{h_k\}$  (设为有限项), 以及在上面样的条件下由两尺度方程所确定的解生成一个多分辨分析。首先, 将  $H(\omega) = (\sqrt{2}/2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$  记为

$$\tilde{H}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^L h_k z^k, \quad z = e^{-i\omega}, \quad (44)$$

可知  $\tilde{H}(z)$  为  $L$  次多项式, 则要构造  $\{h_k\}$  所要满足的条件可归结为多项式  $\tilde{H}(z)$  需要满足的条件。一般情况下, 考虑如下形式:

$$\tilde{H}(z) = \left( \frac{1+z}{2} \right)^N Q(z), \quad (45)$$

其中  $Q(z)$  为  $S = L - N$  次的实系数多项式。记

$$Q(z) = \sum_{k=1}^S q_k z^k, \quad (46)$$

得到下面定理:

**定理 14** 若满足条件

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^S q_j &= 1, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \bar{h}_k &= \delta_{n0}, \\ \sup |Q(z)| &< 2^{N-1}, \end{aligned} \quad (47)$$

则两尺度方程  $\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^L h_k \varphi(2x - k)$  迭代可解, 且其解  $\varphi$  生成一个多分辨分析。

**定理 15** (Riesz 引理) 设  $A$  是一个实系数的余弦多项式

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^N a_k \cos(k\omega),$$

其中  $a_N \neq 0$ , 且满足  $A(\omega) \geq 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , 则存在实系数  $N$  次三角多项式

$$B(\omega) = \sum_{k=1}^N b_k e^{ik\omega},$$

满足  $|B(\omega)|^2 = A(\omega)$ 。

根据上述已有条件, 构造 Daubechies 小波 (即紧支集正交小波) 的两尺度方程(24)中的系数  $\{h_k\}$  的步骤如下:

1. 选定一个正整数  $N \geq 2$
2. 选定一个多项式  $P(y)$  满足条件

$$P(y) = P_N(y) + y^N R\left(\frac{1}{2} - y\right) \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (48)$$

其中  $P_N(y)$  满足

$$P_N(y) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (49)$$

$R(y)$  满足  $R(y) = \tilde{P}(\frac{1}{2} - y)$ , 其中  $y^N \tilde{P}(y) = P(y) - P_N(y)$ , 且有  $R(-y) = -R(y)$ , 且

$$\sup P(y) < 2^{2(N-1)}; \quad (50)$$

3. 选定一个实系数三角多项式  $Q(z)$ , 使

$$P\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right) = |Q(e^{i\omega})|^2; \quad (51)$$

4. 取

$$\tilde{H}(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N Q(z), \quad (52)$$

$\tilde{H}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^L h_k z^k$  中的  $\{h_k\}$  即为所求。

图 (4) 是一些 Daubechies 尺度函数  $\varphi_{D_N}$  和小波函数  $\psi_{D_N}$ 。

## 4.2 Daubechies 小波的性质

首先探讨 Daubechies 小波的支集。对于给定的正整数  $N \geq 2$ , 由前面的方法可得两尺度方程

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L h_k \varphi(2x - k), \quad (53)$$

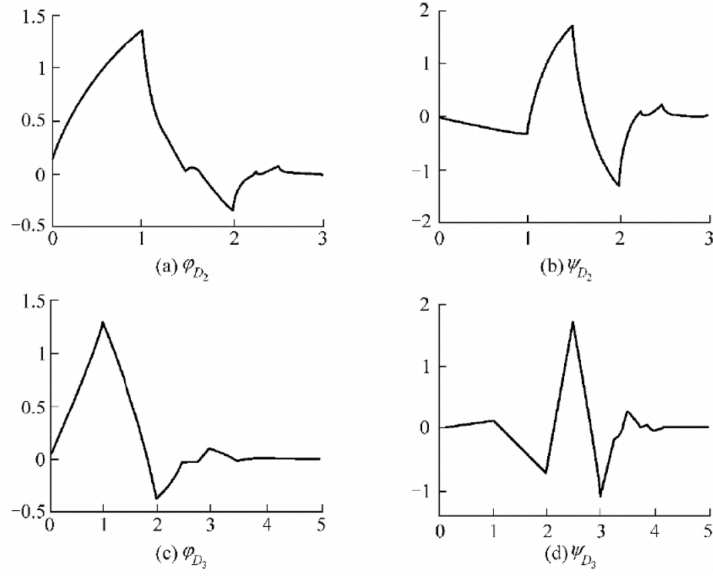


图 4: Daubechies 尺度函数  $\varphi_{D_N}$  和小波函数  $\psi_{D_N}$

其中  $L = 2N - 1$ 。  $\varphi$  可由迭代过程

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L h_k \varphi_{n-1}(2x - k), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

求解。由于  $\varphi_0(x)$  的支集为  $[0, 2]$ ，记为  $\text{supp}\varphi_0 = [0, 2]$ ，则由迭代公式可知

$$\begin{aligned} \text{supp}\varphi_1 &= \left[0, \frac{1}{2}(2 + L)\right] = \left[0, \frac{2 + L}{2}\right], \\ \text{supp}\varphi_2 &= \left[0, \frac{1}{2}\left(\frac{2 + L}{2} + L\right)\right] = \left[0, \frac{2 + (2^2 - 1)L}{2^2}\right], \\ &\vdots \\ \text{supp}\varphi_n &= \left[0, \frac{2 + (2^n - 1)L}{2^n}\right] = \left[0, L + \frac{2 - L}{2^n}\right]. \end{aligned}$$

由于  $L = 2N - 1 \geq 3$ ，所以  $\text{supp}\varphi_n \subseteq [0, L]$ ，并且

$$\text{supp}\varphi = \text{supp}_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = [0, L] = [0, 2N - 1].$$



对于小波函数  $\psi$ ，由

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1-L}^1 g_k \varphi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}, \quad (54)$$

可得出

$$\text{supp}\psi(x) = [-(N-1), N].$$

此外，Daubechies 小波具有消失矩的特性。消失矩指给定小波函数  $\psi$ ，如果满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (55)$$

但  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^M \psi(x) dx \neq 0$ ，则称小波  $\psi$  具有  $M$  阶消失矩。。对于 Daubechies 小波，有如下定理。

**定理 16** 对应于  $N \geq 2$  的 Daubechies 小波  $\psi$ ，具有  $N$  阶消失矩。

虽然 Daubechies 小波是连续的，但光滑性比较差，而随着  $N$  的增大，尺度函数  $\varphi$  和小波函数  $\psi$  的光滑性也越来越好。为了较好的描述光滑度的大小，这里采用光滑度阶数  $\alpha$  来形容光滑度。若  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|(1+|\omega|)^\alpha d\omega < +\infty$  成立，其中  $\omega \in \mathbb{R}$ ， $\alpha \geq 0$ ，则称  $f(x)$  具有  $\alpha$  阶光滑度。由光滑度阶数的定义可知，若光滑度阶数  $\alpha$  越大，则当  $|\omega| \rightarrow +\infty$  时， $\hat{f}(\omega)$  的衰减速度就越快，也就是指频域的局部性就越好。图 (5) 给出了 Daubechies 尺度函数和小波函数的光滑度阶数  $\alpha$  与  $N$  的关系。

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha$	0.5	0.915	1.275	1.596	1.888	2.158	2.415	2.611	2.902

图 5: 光滑度阶数  $\alpha$  与  $N$  的关系

### 4.3 Daubechies 小波的计算方法

首先，在两尺度方程(53)中，依次令  $x = \frac{n}{2}, \frac{n}{2^2}, \dots, \frac{n}{2^m}, \dots$ ，则得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi\left(\frac{n}{2^2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi\left(\frac{n}{2} - k\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \vdots \\ \varphi\left(\frac{n}{2^m}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi\left(\frac{n}{2^{m-1}} - k\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (56)$$

另外, 由于  $\varphi$  是连续函数, 且  $\text{supp}\varphi = [0, 2N-1]$ , 所以当  $k \leq 0$  或  $k \geq 2N-1$  时,  $\varphi(k) = 0$ 。因此求得  $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(2N-2)$  就可以通过(56)式算出  $\varphi(x)$  在所有二分点  $k/2^m$  上的值。

下面探讨如何计算  $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(2N-2)$ 。由两尺度方程(56)可得

$$\begin{aligned}\varphi(j) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi(2j-k) = \sqrt{2} \sum_{l=2j}^{2j-(2N-1)} h_{2j-l} \varphi(l) \\ &= \sqrt{2} \sum_{l=2j-(2N-1)}^{2j} h_{2j-l} \varphi(l),\end{aligned}\tag{57}$$

其中  $j = 1, 2, \dots, 2N-2$ 。若记

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{m}} &= (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(2N-2))^T, \\ \mathbf{M} &= (\sqrt{2}h_{2j-l})_{1 \leq j, l \leq 2N-2},\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{M}$  是  $(2N-2) \times (2N-2)$  方阵, 方程组(57)可写成

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{m}}\tag{58}$$

这是求矩阵  $\mathbf{M}$  对应于特征值 1 的特征向量, 若补充标准化约束条件

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(2N-2) = 1\tag{59}$$

则(58)式和(59)式联立苛唯一求解  $\tilde{\mathbf{m}}$ 。因此由  $\varphi(x)$  在二分点的值就可以求出  $\psi(x)$  在二分点的值。

## 5 样条小波

前面提到的 Haar 小波函数是对称的, 但不满足连续, 而 Daubechies 小波函数与 Haar 小波恰恰相反。下面探讨的样条小波则是同时满足连续和对称性质。

### 5.1 B 样条及其基本性质

首先给出 B 样条的定义:

定义 设  $m$  为自然数, 则定义  $m$  阶 B 样条  $N_m(x)$  如下:

$$\begin{aligned}N_1(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ N_m(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(x-t)N_1(t)dt = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, \quad m > 1.\end{aligned}\tag{60}$$

从定义能看出 B 样条是通过递推的方法定义的。  $N_1(x)$  为 Haar 尺度函数, 然后用卷积的方式定义  $N_m(x)$ 。  $m$  阶 B 样条的图形如图 () 所示。

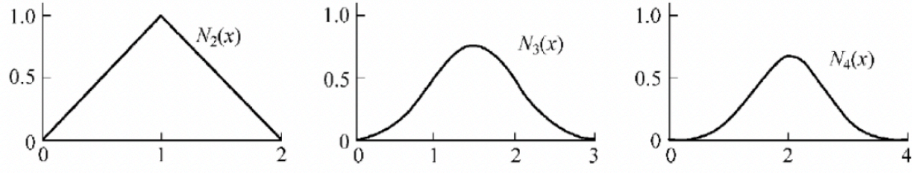


图 6:  $m = 2, 3, 4$  时  $N_m(x)$  的图形

若是在(60)中取

$$M_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (61)$$

并定义  $M_m(X) = \int_{-1/2}^{1/2} M_{m-1}(x-t)dt, m > 1$ 。这时称  $M_m(x)$  为  $m$  阶中心 B 样条, 而把前面定义的  $N_m(x)$  称为  $m$  阶向前 B 样条。

下面给出 B 样条的性质。

**定理 17**  $m$  阶 B 样条  $N_m(x)$  满足下述性质:

1. 对任意  $f(X) \in C(\mathbb{R})$ , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)N_m(x)dx = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 + \cdots + x_m)dx_1 \cdots dx_m; \quad (62)$$

2. 对任意  $g(X) \in C^m(\mathbb{R})$ , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(m)}(x)N_m(x)dx = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k), \quad (63)$$

其中

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!};$$

3.

$$N_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_k = 0^m (-1)^k \binom{m}{k} (x-k)_+^{m-1}; \quad (64)$$

4.  $\text{supp} N_m = [0, m]$ ;

5.  $N_m(x) > 0$ , 对于  $0 < x < m$ ;

6.  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} N_m(x-k) = 1$ , 对所有  $x \in \mathbb{R}$ ;

7.  $N'_m(x) = (\Delta N_{m-1})(x) = N_{m-1}(x) - N_{m-1}(x-1)$ ;

8. 递推关系

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1);$$

9.  $N_m$  关于它的支集中心是对称的, 即

$$N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$10. \int_{-\infty}^{+\infty} N_m(x) dx = 1.$$

## 5.2 样条多分辨分析

前面已经给出了多分辨分析的定义, 这里讲标准正交基改为一般的基底, 再重新给出定义:

定义 设  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是空间  $L^2(\mathbb{R})$  闭子空间列,  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  被称为  $L^2(\mathbb{R})$  的一个多分辨分析, 如果  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  满足下面 4 个条件:

- 一致单调性  $V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z};$
- 渐进完全性  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R});$
- 伸缩规则性  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$
- Riesz 基存在性 存在  $g \in V_0$ , 使得  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_0$  的 Riesz 基, 即  $V_0 = \overline{\text{span}\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$ , 存在正常数  $A$  和  $B$ , 使得对任意  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$ , 即  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$ , 有

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k g(x-k) \right\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad (65)$$

其中  $g(x)$  称为尺度函数,  $V_j$  称为逼近空间。

下面讨论由 B 样条生产的多分辨分析。从定理 (17) 中的性质 9, 知向前 B 样条  $N_m(x)$  的兑成点在  $x = m/2$ 。如果利用  $N_m(x)$  构造尺度函数  $\varphi_m(x)$ , 则当  $m$  为偶数时,  $\varphi_m(x)$  关于原点 ( $x = 0$ ) 对称, 而当  $m$  为奇数时, 关于  $x = 1/2$  对称。如果利用中心 B 样条  $M_m(x)$ , 则构造的尺度函数  $\varphi_m(x)$  都是关于原点对称的。实际应用中也更常使用中心 B 样条  $M_m(x)$ , 显然有关系式

$$M_m(x) = N_m(x + m/2), \quad (66)$$

从而定理 (17) 中的性质 3 变为:

$$M_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{k} \left(x + \frac{m}{2} - k\right)^{m-1}, \quad (67)$$

并且  $\text{supp} M_m = [-m/2, m/2]$ 。

下面考虑由 B 样条  $M_m(x)$  的整平移做基底所生成的空间  $V_0^m$ , 即

$$V_0^m = \overline{\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k M_m(x-k) \right\}}_{(c_k) \in l^2},$$

并令

$$V_j^m = \overline{\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot 2^{j/2} M_m(2^j x - k) \right\}}_{(c_k) \in l^2}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (68)$$

为了说明  $\{M_m(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_0^m$  的 Riesz 基, 先证明下面两个引理。

引理4 对于中心 B 样条  $M_m(x)$  的 Fourier 变换有如下表达式成立:

$$\hat{M}_m(\omega) = \left( \frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i\omega} \right)^m = \left[ \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} \right]^2. \quad (69)$$

引理5 如果记

$$\Omega_m(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{M}_m(\omega + 2k\pi) \right|^2, \quad (70)$$

则存在正常数  $A_m$  和  $B_m$ , 使得对任意  $\omega \in \mathbb{R}$  均有

$$A_m \leq \Omega_m(\omega) \leq B_m, \quad (71)$$

并且有

$$\Omega_m(\omega) = M_{2m}(0) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} M_{2m}(k) \cos(k\omega). \quad (72)$$

**定理 18**  $\{M_m(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_0^m$  的 Riesz 基。

注意尺度函数  $M_m(s)$  不是正交的, 对应的小波函数也不是正交的, 由  $M_m(s)$  用

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2]^{1/2}} \quad (73)$$

来构造正交尺度函数  $\varphi_m(x)$ 。令

$$\hat{\varphi}_m(\omega) = \Omega_m^{-1/2}(\omega) \hat{M}_m(\omega), \quad (74)$$

其中  $\Omega_m(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2$ , 则由(74)式所确定的

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_m(\omega) e^{ix\omega} d\omega \quad (75)$$

称为  $m$  阶样条正交尺度函数。当  $m = 2, 3, 4, 6$  时,  $\varphi_m(x)$  的图形见图 (7)

下面讨论  $\varphi_m(x)$  的一些主要性质。

1.  $\varphi_m(x)$  有如下表达式

$$\varphi_m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{mk} M_m(x - k), \quad (76)$$

其中  $\alpha_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Omega_m^{-1/2}(\omega) \cos(k\omega) d\omega$ .

2.  $\varphi_m(x)$  是关于原点对称的函数, 即有  $\varphi_m(-x) = \varphi_m(x)$ .

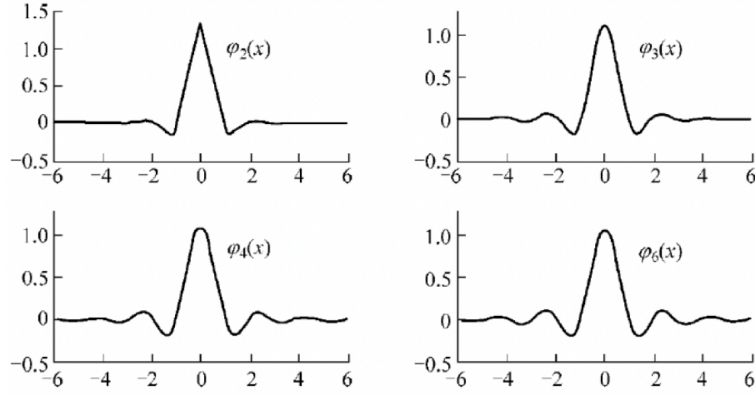


图 7:  $m = 2, 3, 4, 6$  时  $\varphi_m(x)$  的图形

3.  $\varphi_m(x)$  满足

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) dx &= 1; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_m(x) dx &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2m-1; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \varphi_m(x) dx &\neq 0. \end{aligned}$$

4.  $\varphi_m(x)$  具有  $m-2$  阶连续导数.

5.  $\varphi_m(x)$  具有指数衰减性, 即存在  $C > 0, M > 0$  使  $|\varphi_m(x)| \leq M e^{-C|x|}$ .

有了尺度函数  $\varphi_m(x)$  就可以构造对于的  $m$  阶样条正交小波函数  $\psi_m(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{mk} \varphi_m(2x-k)$ , 其中  $g_{mk} = (-1)^k h_{m,1-k}$ . 当  $m = 2, 3, 4, 6$  时,  $\psi_m(x)$  的图形见图 (8)

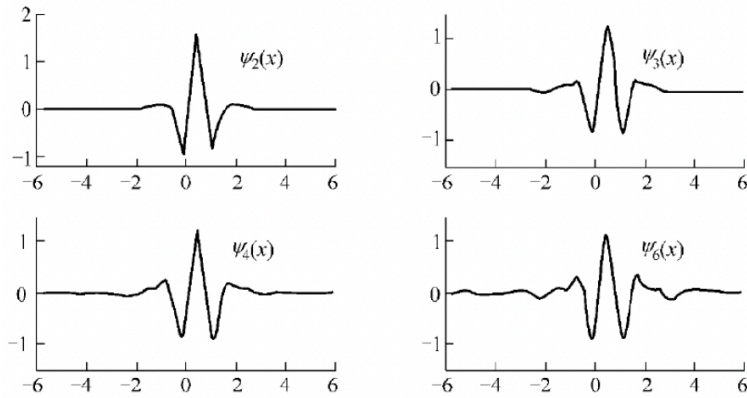


图 8:  $m = 2, 3, 4, 6$  时  $\psi_m(x)$  的图形

$\psi_m(x)$  有如下性质:

1.  $\psi_m(x)$  关于  $x = 1/2$  对称;
2.  $\psi_m(x)$  具有  $m$  阶消失矩, 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^p \psi_m(x) dx = 0, 0, 1, 2, \dots, m-1$ ;

3.  $\psi_m(x)$  具有  $m - 2$  阶连续导数;

4.  $\psi_m(x)$  具有指数衰减性.

### 5.3 线性相位与对称性

在应用中, 对信号进行滤波处理时, 如果滤波器具有线性相位, 或者至少具有广义线性相位, 失真就可以避免。下面给出相位的一些概念。

定义 设  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 如果  $f$  的 Fourier 变换满足

$$\hat{f}(\omega) = \pm |\hat{f}(\omega)| e^{-ia\omega}, \quad (77)$$

其中  $a$  是实常数,  $\pm$  号与  $\omega$  无关, 则称  $f$  具有线性相位。如果,

$$\hat{f}(\omega) = F(\omega) e^{-i(a\omega+b)}, \quad (78)$$

其中  $F(\omega)$  是一个实值函数,  $a, b$  是实常数, 则称  $f$  具有广义线性相位。上面的  $a$  称为  $\hat{f}(\omega)$  的相位。

定义 设序列  $\{a_k\} \in l^1$ ,  $A(e^{-i\omega})$  是它的离散 Fourier 变换, 如果

$$A(e^{-i\omega}) = \pm |A(e^{-i\omega})| e^{-ik_0\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (79)$$

其中  $k_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , 而  $\pm$  号与  $\omega$  无关, 则称  $\{a_k\}$  具有线性相位。如果

$$A(e^{-i\omega}) = F(\omega) e^{-i(k_0\omega+b)}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (80)$$

其中  $F(\omega)$  是一个实值函数,  $k_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, b \in \mathbb{R}$ , 则称  $\{a_k\}$  具有广义线性相位。上面的  $k_0$  称为  $\{a_k\}$  的符号的相位。

下面是具有广义线性相位的函数与序列的特征。

**定理 19** (1) 函数  $f \in L^2(\mathbb{R})$  具有广义线性相位, 其中  $a, b \in \mathbb{R}$ , 当且仅当  $e^{ib}f(x)$  在

$$e^{ib}f(a+x) = \overline{e^{ib}f(a-x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (81)$$

意义上是关于  $a$  斜对称的;

(2) 序列  $\{a_k\} \in l^1$  具有广义线性相位, 其中  $k_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, b \in \mathbb{R}$ , 当且仅当  $\{e^{ib}a_k\}$  在

$$e^{ib}a_k = \overline{e^{ib}a_{2k_0-k}} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (82)$$

意义上是关于  $k_0$  斜对称的。

## 6 小波函数的应用和 MATLAB 小波工具函数

### 6.1 应用总结

小波分析的应用十分广泛，例如在信号处理、图像处理、量子力学、理论物理、音乐与语音的人工合成、医学成像与诊断、数值计算等。离散小波变换通常被用于信号编码，比如在工程和计算机科学，而连续小波变换通常被用于信号分析，即科学研究类。所有小波适用的运用中，大致上有下列两项特点：

1. 信号的频率分布，会随著不同的时间（或地点）有较大变异；
2. 多尺度的分析扮演重要的角色。

通常在做讯号或影像处理的过程中，会面临到取样点的取舍：

1. 较长的采样间隔会忽略部分细节；
2. 较短的采样间隔会产生大量的数据。

而小波变换折中了这两个问题。

下面介绍小波分析分别在信号处理、图像压缩和奇异性分析方面的应用。

#### 6.1.1 信号处理

前面提到的小波都是在无穷区间（即实数集  $\mathbb{R}$ ）上的小波，而要处理信号的数据则是在有限区间的，因此在用分解与重构公式进行计算时，就需要对数据延拓。下面是 5 种常用的延拓方法：

1. 零延拓 在边界之外都取零，如  $\cdots, 0, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, 0, \cdots$ 。这种方法虽然简单，都是在边界附近产生的误差比较大。
2. 连续延拓 此种延拓有多种形式，最简单的一种就是在边界点之外都取边界点的值，例如  $\cdots, c_0, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_{n-1}, \cdots$ 。
3. 光滑延拓 在边界点用插值的方法构造多项式，然后计算边界之外的多项式上的点作为延拓的数据。
4. 对称延拓 在边界点用对称的方法将数据延拓，如  $\cdots, c_2, c_1, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_{n-2}, c_{n-3}, \cdots$ 。
5. 周期延拓 将已知数据看作是周期数据，如  $\cdots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_0, c_1, \cdots$ 。

在应用中，针对不同的数据以及精度要求，可以选择不同的延拓方法。对于周期信号可选择周期延拓；对于在边界处理中要求高精度的，可采用光滑延拓。

一般来说信号中都是带有信号的，特别是信号的采集过程中，在接收端除了获取目标信号外还会引入噪声。常见的噪声包括高斯白噪声，通常我们在处理噪声时都将噪声假设为高斯白噪声。因此在信号做进一步处理之前需要将有效的信号提取出来。小波变换去噪可以很好的保护有用的信号尖峰和突变信号。因此小波变换适合用于暂态信号和瞬态信号的噪声去除方面，以及抑制高频噪声的干扰，有效将高频信息和高频噪声区分开来。

信号消噪实际上是信号滤波处理，小波变换进行信号滤波的原理如下：



设  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一个多分辨分析,  $W_j$  是  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补空间。令  $P_j$  和  $Q_j$  分别是  $L^2(\mathbb{R})$  到  $V_j$  和  $W_j$  的正交投影。设有信号  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 经仪器测得的含有噪声的信号为  $P_j f \in V_j$ , 则有

$$P_j f = P_{j-n} f + \sum_{j=j-n}^{j-1} Q_j f. \quad (83)$$

用小波变换对信号进行分解的过程, 就是将信号中的各种频率成分从高向低逐步分离为不同的频带的过程。对于 B 样条尺度函数  $\varphi$  和小波函数  $\psi$ , 其频带分别近似为  $[-\pi, \pi]$  和  $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ , 因此  $Q_j f$  的频带范围近似为  $[-2^{j+1}\pi, -2^j\pi] \cup [2^j\pi, 2^{j+1}\pi]$ 。如果要滤掉的噪声的频率位于  $Q_j f$  频带范围, 则只需要在信号重构过程中令  $Q_j f$  为零。

比较前面所提到的 Daubechies 小波和 B 样条小波, 发现样条小波去噪效果更好, 这是因为样条小波具有对称型, 且光滑性更好。

此外, 小波在信号的奇异性检测中也有着重要应用。信号中常有奇异点或者不规则的突变部分, 这些部分的有时仍包含重要的信息。过去常用 Fourier 变换来处理这些信号奇异的部分, 但是鉴于 Fourier 变换缺乏时域局部性, 它只能确定一个信号奇异性的整体性质, 不能找到奇异点在空间上的具体位置和分布。由于小波具有空间局部化的性质, 现在则更多使用小波变换来解决该问题。

通常情况下, 信号的奇异性分为两种情况: 一种是信号在某个时刻内, 其增幅发生突变, 引起信号的不连续, 将突变处称为第一类间断点, 这种情况下, 一般用小波将信号分解一层来检验奇异点, 在奇异点处, 小波系数的绝对值很大; 另一种是信号是连续的, 增幅没有突变, 但信号的一阶导数有突变产生, 即一阶导数是不连续的, 称这类间断点为第二类间断点, 这种情况下, 相比第一类间断点, 还需要对原始信号进行一次数值微分, 对微分后的数据用小波分解一层。

### 6.1.2 图像压缩

对图像来说, 如果要进行快速或实时传输以及大量存储, 就需要对图像数据进行压缩。在同样的通信容量下, 如果图像数据压缩后在传输, 就可以查到更多的图像信息。

图像编码压缩分为两种类型, 一种是无损压缩, 这种压缩能精确重构, 即解压缩之后图像与原图像没有误差; 另一种则是有损压缩, 这种压缩不能准确还原图像, 但压缩比远远大于无损压缩。这里所讲到的小波压缩就是属于有损压缩。有损压缩常用峰值信噪比 (PSNR), 其定义如下:

对于一副像素为  $M \times N$  的图像, 定义其峰值信噪比为

$$\text{PSNR} = 10 \lg \left\{ \frac{f_{\max}^2}{\frac{1}{M \times N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\tilde{f}(x, y) - f(x, y)]^2} \right\} \quad (84)$$

其中  $f_{\max} = \max f(x, y); x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $f(x, y)$  和  $\tilde{f}(x, y)$  分别是图像在  $(x, y)$  位置上的像素的灰度值和经压缩解压后的灰度值。PSNR 值越大, 失真越小。对于原始图像  $f(m, n), m, n = 0, 1, \dots, N-1$ , 取  $C_{j+1, m, n} = f(m, n)$ , 可用张量积小波对图像进行分解。图 (9) 为使用双正交小波 ( $N = 3, \tilde{N} = 7$ ) 对像素为  $256 \times 256$  的图像进行分解三层的结果。其中 (a) 为原图像, (b)、(c)、(d) 分别为分解一、二、三层后得到的图像。

从图 (9) 可以看出, 图像分解后的高频部分都接近于零。故利用小波分解去掉图像高频部分而保留低频部分即能压缩图像。将图像分解一层, 只保留低频部分, 可以达到压缩比 4:1。重构 (即解压缩) 时将高频部分设为零, 得到从图 (10:a), 以此类推分解多层。此外, 利用小波压缩图像, 可以将图像分

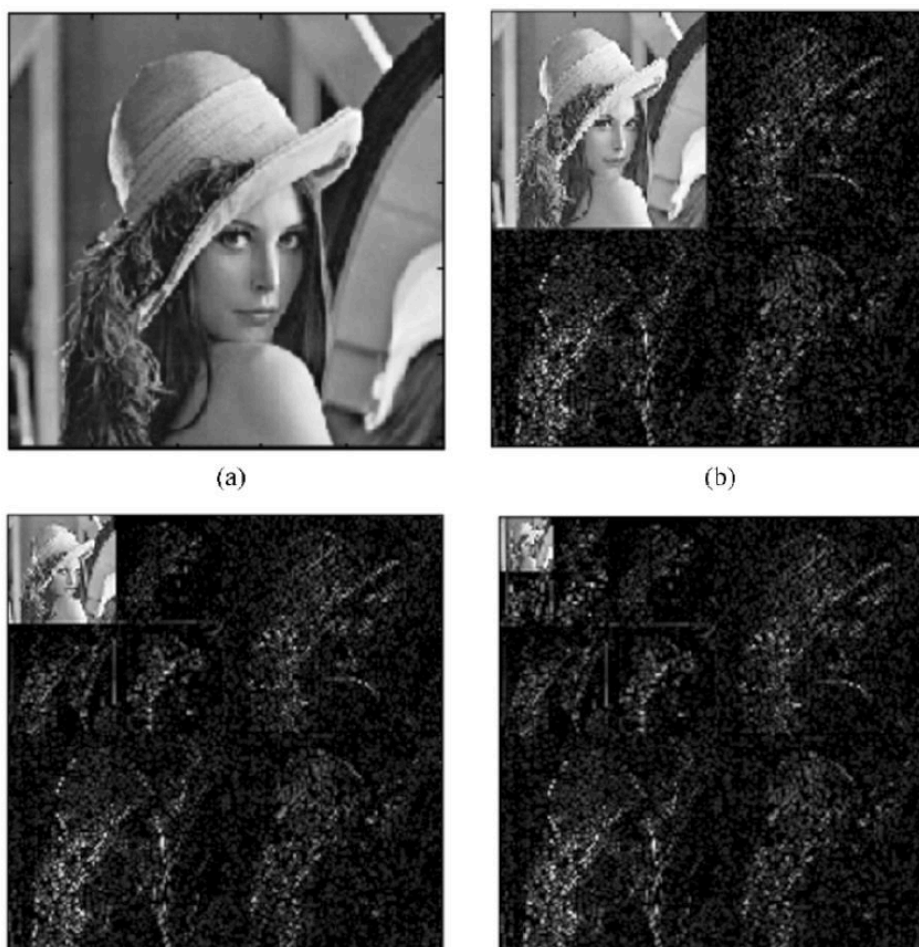


图 9: 双正交小波对图像的分解

解的各层中的次高频和低频中的重要数据保留，重要在保证图像质量的前提下，可以提高压缩比，如图(11)所示。

## 6.2 MATLAB 小波工具函数

### waveinfo 函数

该语法的功能是提供工具箱中所有小波的信息查询，使用格式：

```
waveinfo('wname')
```

wname 指代的小波有 'haar': Haar 小波、'dbN': 紧支集正交小波、'morl': Morlet 小波、'mexh': 墨西哥草帽小波、'meyr': Meyer 小波、'bioNr.Nd': 双正交样条小波等。

下面是一些常用的二维小波变换函数。

### 1.dwt2

dwt2 函数是单层二维离散小波变换函数，其调用格式为

```
[CA,CH,CV,CD]=dwt2(X,'wname')
```

```
[CA,CH,CV,CD]=dwt2(X,LD,HD)
```



(a) 只有第一层低频部分的重构图，  
压缩比为 4:1, PSNR=29.2452



(b) 只有第二层低频部分的重构图，  
压缩比为 16:1, PSNR=24.4051

图 10: 保留部分低频层数的重构图



(a) 压缩比为 14.4:1, PSNR=29.2506



(b) 压缩比为 35.8:1, PSNR=24.6282

图 11: 保留重要数据的重构图

其中  $X$  是被分解的二维信号 (数据矩阵),  $wname$  是小波函数名,  $LD$  和  $HD$  是低通和高通分解滤波器组 ( $LD$  和  $HD$  的长度要求相等),  $CA$  是返回的低频系数,  $CH$ ,  $CV$  和  $CD$  分别是返回水平、垂直和斜线上的高频系数矩阵。

## 2.idwt2

$idwt2$  函数是单层逆二维离散小波变换函数, 其调用格式为

$X=idwt2(CA,CH,CV,CD,'wname')$

$X=idwt2(CA,CH,CV,CD,LR,HR)$

其中  $LR$  和  $HR$  是低通和高通重构滤波器组 ( $LD$  和  $HD$  的长度要求相等), 其他参数含义同  $dwt2$  函数中的参数相同, 该函数通常和  $dwt2$  函数配套使用。

## 3.wavedec2

$wavedec2$  函数是多层二维小波函数, 其调用格式为

$[C,S]=wavedec2(X,N,'wname')$

$$[C,S]=\text{wavedec2}(X,N,LD,HD)$$

其功能是对数据矩阵  $X$  用 'wname' 小波函数 (或用低通和高通分解滤波器组  $LD$  和  $HD$ ) 实现  $N$  层分解。

返回参数  $C$  为各层分解系数组成的行向量 (即将系数矩阵按列存放组成的向量, 再转置), 其结构如下:

$$C=[A(N)|H(N)|V(N)|D(N)|H(N-1)|V(N-1)|D(N-1)|\cdots|H(1)|V(1)|D(1)]$$

其中  $A(N)$  代表第  $N$  层低频系数,  $H(N)|V(N)|D(N)$  代表第  $N$  层高频系数 (分别是水平、垂直、斜线高频系数), 以此类推到  $H(1)|V(1)|D(1)$ .

返回参数  $S$  为  $N+2$  行 2 列矩阵, 各行的意义分别为: 第一行  $S(1,:)$  为第  $N$  层低频系数的长度; 第  $i$  行  $S(i,:)$  为第  $N-i+2$  ( $i=2,\cdots,N+1$ ) 层的各高频系数的长度; 最后一行  $S(N+2,:)$  为  $X$  的长度, 即  $\text{size}(X)$ 。

$\text{wavedec3}$  函数鲳鱼下面几个函数配套使用。

#### 4.waverec2

$\text{waverec2}$  函数为多层二维小波重构函数, 其调用格式为

$$X=\text{waverec2}(C,S,\text{'wname'})$$

$$X=\text{waverec2}(C,S,LR,HR)$$

其中  $LR$  和  $HR$  是低通和高通重构滤波器组, 其他参数和  $\text{wavedec2}$  函数相同。

#### 5.appcoef2

$\text{apprcoef2}$  函数是提取二维小波分解的低频系数, 其调用格式为

$$A=\text{appcoef2}(C,S,\text{'wname'},N)$$

$$A=\text{appcoef2}(C,S,LR,HR,N)$$

其中  $A$  是从由  $\text{wavedec2}$  函数分解所获得的  $C$  和  $S$  中提取的第  $N$  层的低频系数,  $LR$  和  $HR$  是低通和高通重构滤波器组。

#### 6.detcoef2

$\text{detcoef2}$  函数是提取二维小波分解的高频系数, 其调用格式为

$$D=\text{detcoef2}(O,C,S,N)$$

其中  $D$  是从由  $\text{wavedec2}$  函数分解所获得的  $C$  和  $S$  中提取的第  $N$  层的高频系数, 关于  $O$  的取值为: 当  $O$  为 'h' 时,  $D$  为水平系数; 当  $O$  为 'v' 时,  $D$  为垂直系数; 当  $O$  为 'd' 时,  $D$  为斜线系数。

#### 7.wrcoef2

$\text{wrcoef2}$  函数是对二维小波系数进行单支重构的函数, 其调用格式为

$$X=\text{wrtcoef2}(\text{'type'},C,S,\text{'wname'},N)$$

$$X=\text{wrtcoef2}(\text{'type'},C,S,LR,HR,N)$$

其中  $X$  是对由  $\text{wavedec2}$  函数分解所获得的  $C$  和  $S$ , 用制定的小波函数或重构滤波器组进行  $N$  层重构, 关于 'type' 取值为: 当 'type' 为 'a' 时,  $D$  为低频部分重构; 当 'type' 为 'h' 时,  $D$  为水平高频部分重构; 当 'type' 为 'v' 时,  $D$  为垂直高频部分重构; 当 'type' 为 'd' 时,  $D$  为斜线高频部分重构。

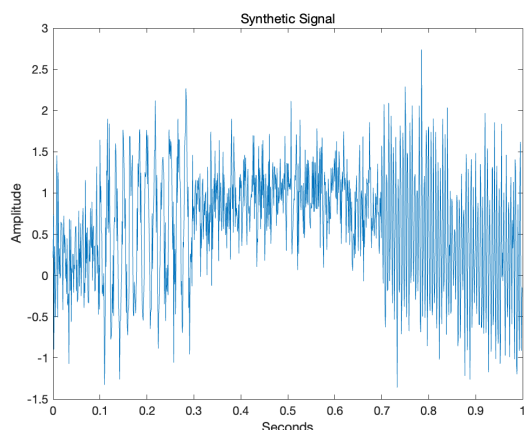


图 12: 合成信号

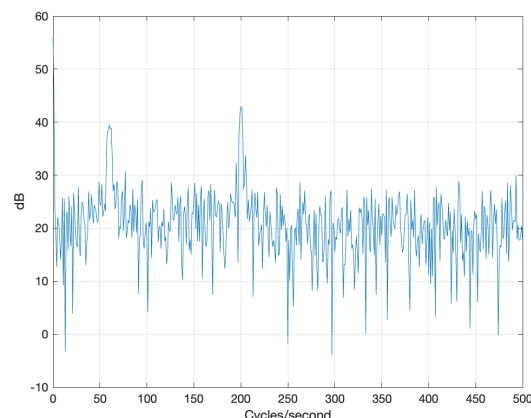


图 13: 信号的频率

## 7 应用实例

### 7.1 信号的多分辨率分析

信号通常由多个具有物理意义的组件组成。多分辨率分析是指将信号分解为多个分量，这些分量在重新加在一起时会准确地产生原始信号。为了对数据分析有用，如何分解信号很重要。理想情况下，这些组件将数据的可变性分解为物理上有意义且可解释的部分。这里给出以 1000 Hz 的频率采样一秒钟的信号如图 12 所示。

该信号由三个主要部分组成：频率为 60 周期/秒的时间局部振荡、频率为 200 周期/秒的时间局部振荡和趋势项。此处的趋势项也是正弦曲线，但频率为每秒 1/2 个周期，因此在一秒间隔内仅完成 1/2 个周期。60 个周期/秒或 60 Hz 的振荡发生在 0.1 到 0.3 秒之间，而 200 Hz 的振荡发生在 0.7 到 1 秒之间。从频率的角度绘制信号如图 13 所示。

从频率分析中，更容易辨别振荡分量的频率，但我们失去了它们的时间局部性。在此视图中也很难可视化趋势。为了获得一些同时的时间和频率信息，可以使用像连续小波变换这样的时频分析技术 (cwt) 得到图 14。从该图可以看到 60 Hz 和 200 Hz 分量的时间范围。但是，仍然没有任何有用的趋势可视化。时频视图提供了有用的信息，但在许多情况下，希望及时分离出信号的分量并单独检查它们。多分辨率分析实现信息在与原始数据相同的时间尺度上可用。事实上，多分辨率分析提供了一种避免时频分析需求的方法，同时可直接在时域中工作。

提取不同分辨率的信号分量相当于分解数据在不同时间尺度上的变化，或者等效地在不同频带（不同的振荡率）。使用小波多分辨率分析和绘制合成信号。以八种分辨率或级别分析信号。

将信号分离成分量的目的通常是去除某些分量或减轻它们对信号的影响。然后通过多分辨技术重建原始信号。使用小波多分辨率分析来分析和绘制合成信号得到图 15。知该信号由八种分辨率的分析信号合成。

接下来是重构的部分，由于多分辨分量的总和重构了原始信号，因此包含或排除分量子集可以产生有用的近似值是显然的。由于趋势项位于最后一个多分辨分子中，这里将该组件从重构中除去。最后得到重构的结果图 16。

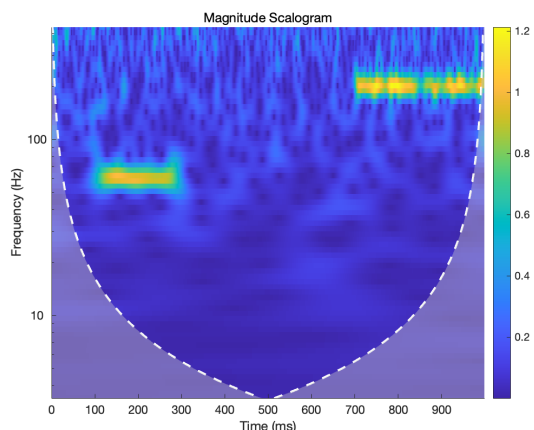


图 14: 时频分析结果

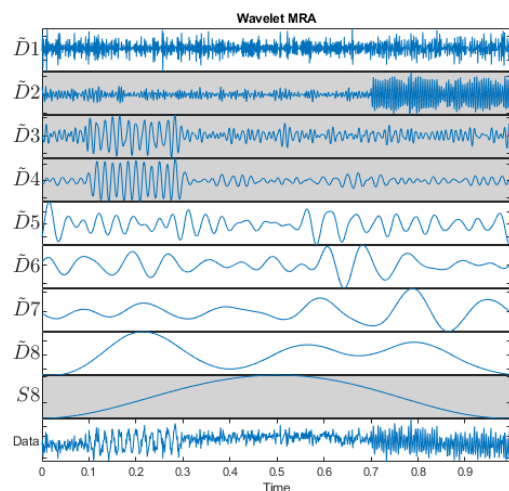


图 15: 八种分辨率的信号

## 7.2 去噪

下面的例子讨论了从噪声数据中恢复信号的问题。一般的去噪过程包括三个步骤。该过程的基本遵循以下步骤:

1. 分解: 选择一个小波, 选择一个  $N$  级。计算信号在  $N$  级的小波分解。
2. 阈值系数: 对于从 1 到  $N$  的每个级别, 选择一个阈值并对细节系数应用软阈值。
3. 重构: 使用  $N$  级的原始近似系数和 1 到  $N$  级的修改细节系数计算小波重构。

硬阈值是指将绝对值低于阈值的元素设置为零的操作。软阈值是硬阈值的扩展, 首先将绝对值低于阈值的元素设置为零, 然后将非零系数向 0 收敛。当软阈值满足  $x > \text{thr}$  时, 信号为  $\text{sign}(x)(x - \text{thr})$ ; 若  $x \leq \text{thr}$ , 则信号为 0。第二步可以使用 `wthcoeff` 函数来完成, 直接处理原始信号的小波分解结构。在函数 `thselect` 中实现了四个阈值选择规则。

### 7.2.1 一维的情况

这里生成包含标准高斯白噪音的信号。首先使用默认设置的 `wdenoise` 对信号进行降噪。将结果与原始信号和噪声信号进行比较。(结果如图 17所示)

然后再去降噪后的噪声信号进一步去噪, 这里在 3 级用 `sym8` 小波和 `soft heuristic SURE` 阈值处理从  $x$  分解获得的细节系数 (detailed coefficient)。与之前的去噪信号进行比较。(结果如图 18所示)

### 7.2.2 二维的情况

针对一维情况描述的去噪方法也适用于图像, 并且很好地适用于几何图像。二维去噪过程具有相同的三个步骤, 并且使用二维小波工具而不是一维小波工具。对于阈值选择, 如果使用固定形式的阈值, 则使用 `prod(size(y))`, 而不是 `length(y)`。在这种情况下, 固定形式的阈值与电平噪声的估计一起使用, 阈值模式是软的, 并且保持近似系数。最后使用全局阈值选项对图像进行降噪。结果如图 19所示。



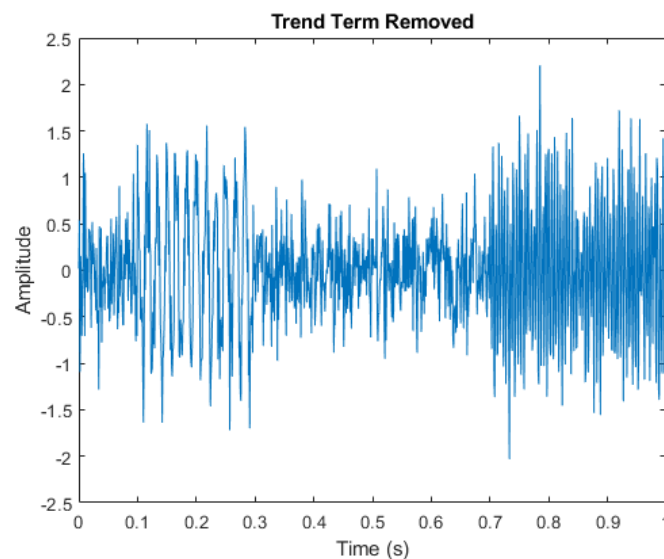


图 16: 多分辨分析后的结果

## 8 总结

小波分析是当前应用数学和工程学科中一个迅速发展的新领域，经过近 30 年的探索研究，重要的数学形式化体系已经建立，理论基础更加扎实。与 Fourier 变换相比，小波变换是空间 (时间) 和频率的局部变换，因而能有效地从信号中提取信息。通过伸缩和平移等运算功能可对函数或信号进行多尺度的细化分析，解决了 Fourier 变换不能解决的许多困难问题。小波变换联系了应用数学、物理学、计算机科学、信号与信息处理、图像处理、地震勘探等多个学科。数学家认为，小波分析是一个新的数学分支，它是泛函分析、Fourier 分析、样条分析、数值分析的结合；信号和信息处理专家认为，小波分析是时间—尺度分析和多分辨分析的一种新技术，它在信号分析、语音合成、图像识别、计算机视觉、数据压缩、地震勘探、大气与海洋波分析等方面的研究都取得了有科学意义和应用价值的成果。

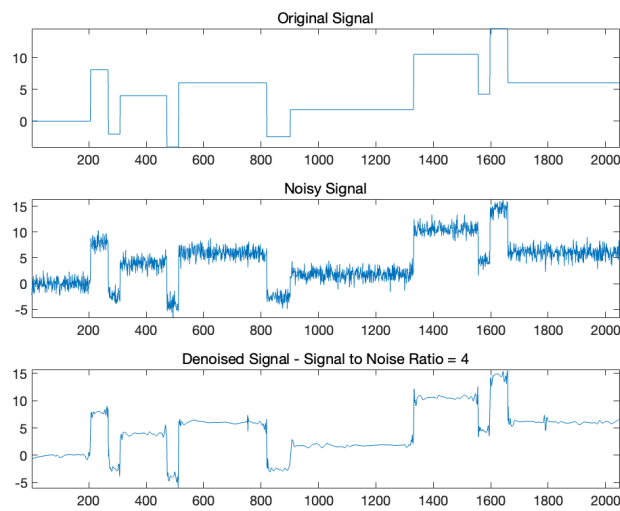


图 17: 原始、加入噪音和初步降噪的信号

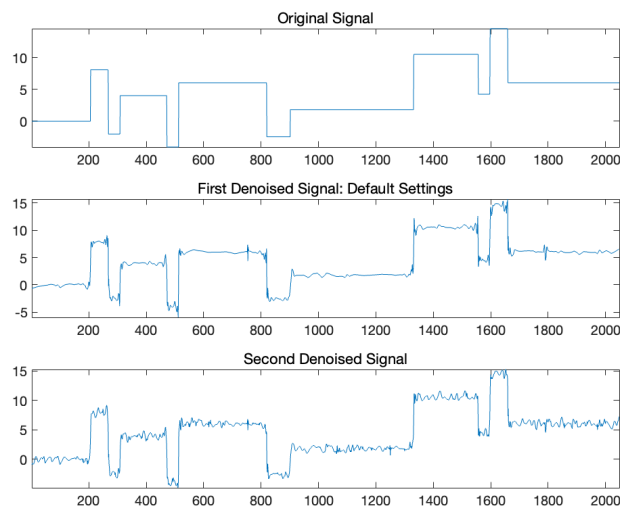


图 18: 原始、初步降噪和二次降噪的信号

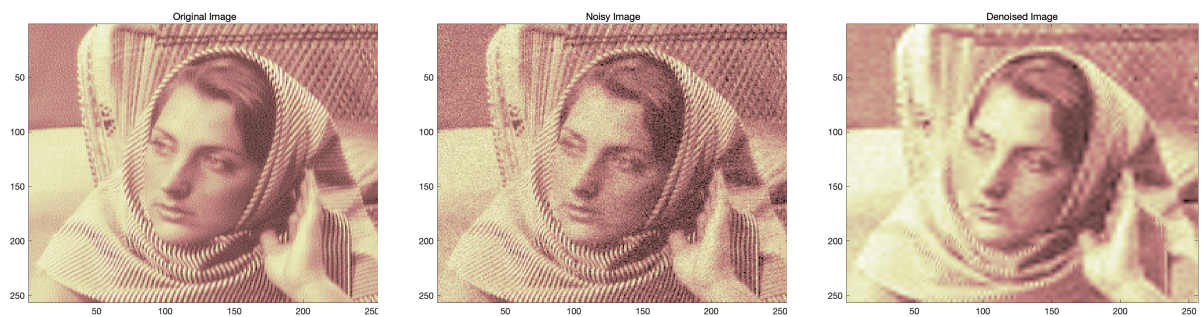


图 19: 图像去噪



## 参考文献

- [1] A. Boggess, F. J. Narcowich 著, 芮国胜等译, 小波与傅里叶分析基础, 电子工业出版社.
- [2] 程正兴. 小波分析算法与应用, 西安交通大学出版社, 1998.
- [3] I. Daubechies, Ten Lecture on Wavelets, Philadelphia SIAM Publ. 1992.
- [4] S. Mallat. 信号处理的小波导引, 机械工业出版社, 1998.
- [5] Percival, Donald B., and Andrew T. Walden. Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2000.

## 附录

Listing 1: 信号的分解与重构.m

```
1 close all ;
2 clear all ;
3
4 %生成信号
5 Fs = 1e3;
6 t = 0:1/Fs:1-1/Fs;
7 comp1 = cos(2*pi*200*t).*(t>0.7);
8 comp2 = cos(2*pi*60*t).*(t>=0.1 & t<0.3);
9 trend = sin(2*pi*1/2*t);
10 rng default
11 wgnNoise = 0.4*randn(size(t));
12 x = comp1+comp2+trend+wgnNoise;
13 figure
14 plot(t,x)
15 xlabel('Seconds')
16 ylabel('Amplitude')
17 title('Synthetic Signal')
18
19 %频率
20 xdft = fft(x);
21 N = numel(x);
22 xdft = xdft(1:numel(xdft)/2+1);
23 freq = 0:Fs/N:Fs/2;
24 figure
25 plot(freq,20*log10(abs(xdft)))
26 xlabel('Cycles/second')
```

```

27 ylabel('dB')
28 grid on
29
30 %时频分析
31 figure
32 cwt(x,Fs)
33
34 %分解
35 figure
36 mra = modwtmra(modwt(x,8));
37 helperMRAPlot(x,mra,t,'wavelet ',' Wavelet MRA',[2 3 4 9])
38
39 %重构
40 sigWOtrend = sum(mra(1:end-1,:));
41 figure
42 plot(t,sigWOtrend)
43 xlabel('Time (s)')
44 ylabel('Amplitude')
45 title('Trend Term Removed')

```

Listing 2: 一维数据的去噪.m

```

1 sqrt_snr = 4;      % Set signal to noise ratio
2 init = 2055615866; % Set rand seed
3 [xref,x] = wnoise(1,11,sqrt_snr, init );
4
5 xd = wdnoise(x);
6 subplot(3,1,1)
7 plot(xref)
8 axis tight
9 title('Original Signal')
10 subplot(3,1,2)
11 plot(x)
12 axis tight
13 title('Noisy Signal')
14 subplot(3,1,3)
15 plot(xd)
16 axis tight
17 title('Denoised Signal — Signal to Noise Ratio = 4')
18

```

```

19 xd2 = wdenoise(x,3,'Wavelet','sym8',...
20     'DenoisingMethod','SURE',...
21     'ThresholdRule','Soft');
22 figure
23 subplot(3,1,1)
24 plot(xref)
25 axis tight
26 title('Original Signal')
27 subplot(3,1,2)
28 plot(xd)
29 axis tight
30 title('First Denoised Signal: Default Settings')
31 subplot(3,1,3)
32 plot(xd2)
33 axis tight
34 title('Second Denoised Signal')

```

Listing 3: 二维图像的去噪.m

```

1 close all;
2 clear all;
3 %Generate a noisy image.
4 load woman
5 init = 2055615866;
6 rng( init );
7 x = X + 15*randn(size(X));
8
9 %閾值
10 [thr,sorh,keepapp] = ddencmp('den','wv',x);
11
12 %去噪
13 xd = wdenomp('gbl',x,'sym4',2,thr,sorh,keepapp);
14 figure('Color','white')
15 colormap(pink(255))
16 sm = size(map,1);
17 image(wcodemat(X,sm))
18 title('Original Image')
19
20 figure('Color','white')
21 colormap(pink(255))

```

```
22 image(wcodemat(x,sm))
23 title (' Noisy Image')
24
25 figure (' Color ',' white')
26 colormap(pink(255))
27 image(wcodemat(xd,sm))
28 title (' Denoised Image')
```