Método dos Mínimos Quadrados

(Caso Discreto)

Rafael Renó Corrêa

4 de dezembro de 2023

Teoria:

Dados valores observados:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
...	...
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$

Para n tuplas medidas, é o polinômio: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.g_i(x)$.

Onde temos $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k).g_k(x_k)$ e $\beta_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k).g_i(x_k)$.

Para a **regressão linear**, por exemplo, é a resolução do sistema:

$\alpha_{11}.a_1 + \alpha_{12}.a_2 = \beta_1$;

$\alpha_{21}.a_1 + \alpha_{22}.a_2 = \beta_2$.

Que resultará na função $P(x) = a_1.g_1(x) + a_2.g_2(x)$ que mais se aproxima dos pontos observados.

Onde $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = x^0$ (ou constante).

Se fosse aproximar em uma parábola, seria $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^0$.

Isto é, de forma genérica, $g_1(x) = x^k, g_2(x) = x^{k-1}, ..., g_{k-1}(x) = x^0$ para o maior expoente k escolhido.

Assim, diferentemente de outros métodos, o maior expoente somos nós que ditamos. Assim sendo, é possível inferir uma reta que melhor se aproxima aos pontos de uma parábola, por exemplo.

Exemplo:

x	$f(x)$
1	4
2	8
3	12

Note que $f(3) - f(2) = f(2) - f(1) \to 12 - 8 = 8 - 4 \to 4 = 4$. Ou seja, provavelmente descreve uma reta. Assim, vou escolher $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = 1$.

Temos, assim, a matriz:

α_{11}	α_{12}
α_{21}	α_{22}

Assim,

$\alpha_{11} = g_1(x_1)g_1(x_1) + g_1(x_2)g_1(x_2) + g_1(x_3)g_1(x_3)$

$\alpha_{11} = g_1(1)g_1(1) + g_1(2)g_1(2) + g_1(3)g_1(3)$

$\alpha_{11} = 1.1 + 2.2 + 3.3 = 14.$

$\alpha_{12} = \alpha_{21} = g_1(x_1)g_2(x_1) + g_1(x_2)g_2(x_2) + g_1(x_3)g_2(x_3)$

$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1.1 + 2.1 + 3.1 = 6.$

$\alpha_{22} = g_2(1)g_2(1) + g_2(2)g_2(2) + g_2(3)g_2(3)$

$\alpha_{22} = 1.1 + 1.1 + 1.1 = 3.$

Ademais, dois outros termos serão necessários:

$b_1 = f(x_1)g_1(x_1) + f(x_2)g_1(x_2) + f(x_3)g_1(x_3)$

$b_1 = f(1)g_1(1) + f(2)g_1(2) + f(3)g_1(3)$

$b_1 = 4.1 + 8.2 + 12.3 = 56.$

$b_2 = f(x_1)g_2(x_1) + f(x_2)g_2(x_2) + f(x_3)g_2(x_3)$

$b_2 = 4.1 + 8.1 + 12.1 = 24.$

Por fim, montamos o sistema:

$\alpha_{11}.a_1 + \alpha_{12}.a_2 = b_1$

$\alpha_{21}.a_1 + \alpha_{22}.a_2 = b_2$

Resolvendo:

$14a_1 + 6a_2 = 56 \to a_1 = \frac{56-6a_2}{14}$

$6a_1 + 3a_2 = 24$

$6(\frac{56-6a_2}{14}) + 3a_2 = 24$

$\frac{336-36a_2}{14} + \frac{42a_2}{14} = \frac{336}{14}$

$336 - 36a_2 + 42a_2 = 336$

$6a_2 = 0 \to a_2 = 0.$

$a_1 = \frac{56-6.0}{14} = \frac{56}{14} = 4.$

Portanto,

$P(x) = a_1.g_1(x) + a_2.g_2(x) = 4x.$