试题讲评

n+*e*

Tsinghua University

2017 年 7 月 20 日

1. 信用卡凸包
   - 题目大意
   - 算法设计
2. 面积和
3. 平行四边形

1. 信用卡凸包
   - 题目大意
   - 算法设计
2. 面积和
3. 平行四边形

- 求若干个旋转之后的信用卡的凸包

1. 信用卡凸包
   - 题目大意
   - 算法设计
2. 面积和
3. 平行四边形

- 它们凸包的周长为每个矩形 4 个角上圆弧的圆心所形成的凸包的周长 + 半径为 r 的一个圆的周长
- 拿圆心做凸包，最后再加上一个圆。

1. 信用卡凸包
2. **面积和**
   - 题目大意
   - 算法设计
3. 平行四边形

1 信用卡凸包

2 面积和

- 题目大意
- 算法设计

3 平行四边形

- 给出平面上的 n 个点，求出所有以这 n 个点为顶点的三角形的面积和。

1. 信用卡凸包
2. 面积和
   - 题目大意
   - 算法设计
3. 平行四边形

- 首先我们枚举每一个点，以这个点为原点建立平面直角坐标系
- 然后将第一、四象限和 x、y 轴正半轴上的点按照斜率排序，枚举第二个和第三个点
- 这样做是 $O(n^3)$ 的肯定超时但是我们发现了什么？

- 首先我们枚举每一个点，以这个点为原点建立平面直角坐标系
- 然后将第一、四象限和 x、y 轴正半轴上的点按照斜率排序，枚举第二个和第三个点
- 这样做是 $O(n^3)$ 的肯定超时但是我们发现了什么？
- 对于每个点 k，它对答案的贡献为：

$$(x_1 y_k - y_1 x_k) + (x_2 y_k - y_2 x_k) + \cdots + (x_{k-1} y_k - y_{k-1} x_k)$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}) y_k - (y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1}) x_k$$

- 于是只要维护一个前缀和即可，时间复杂度 $O(n^2 \log n)$

1. 信用卡凸包
2. 面积和
3. 平行四边形
   - 题目大意
   - 算法分析

- 假设直线 L 和 L' 相交于原点 O。假设 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ 是平面上的 n 个点。
- 你打算找四个点 A, B, A', B' 满足如下条件：
  1. $A \in L$ 而 $A' \in L'$。
  2. B, B' 都属于 S；即 $B \in S$ 且 $B' \in S$。
  3. A, A' 的中点与 B, B' 的中点重叠。这意味着 $ABA'B'$ 是一个平行四边形（或者退化的平行四边形）。
  4. 平行四边形 $ABA'B'$ 的面积最大。
- 直线方程为 $L: ax + by = 0, L': a'x + b'y = 0$，$n \leq 10^6$

$O(n^2)$ ：固定 B 和 B'，$O(1)$ 求解

- 也就是说，当 B 和 B' 确定，A 和 A' 也随之确定。
- 怎么优化？

- 定义有向距离：

$$dist_L(P) = \frac{ax_P + by_P}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$dist_{L'}(P) = \frac{a'x_P + b'y_P}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

- 设 L 和 L' 的夹角为 θ

$$Area(\Diamond(B, B')) = \frac{|dist_L(B) \cdot dist_{L'}(B) - dist_L(B') \cdot dist_{L'}(B')|}{\sin\theta}$$

- for 一遍就没了。就没了。
- 还有这种操作.jpg

- 定义有向距离：

$$dist_L(P) = \frac{ax_P + by_P}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$dist_{L'}(P) = \frac{a' x_P + b' y_P}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

- 设 L 和 L' 的夹角为 θ

$$Area(\Diamond(B, B')) = \frac{|dist_L(B) \cdot dist_{L'}(B) - dist_L(B') \cdot dist_{L'}(B')|}{\sin\theta}$$

- for 一遍就没了。就没了。
- 还有这种操作.jpg
- 考虑特殊情况：x 轴和 y 轴

- 推导一般情况：设 $l_1 : y = k_1 x, l_2 : y = k_2 x,$
  $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), A_1(t_1, k_1 t_1), A_2(t_2, k_2 t_2)$
- 由平行四边形的性质：$B_1 + B_2 = A_1 + A_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 + t_2 \\ y_1 + y_2 = k_1 t_1 + k_2 t_2 \end{cases}$$

可解得 t_1, t_2

$$S = |(B_1 - A_1) \times (B_2 - A_1)|$$

强行展开，带入 t_1, t_2 的表达式，化简得到：

$$S = \left|\frac{(y_2^2 - (k_1 + k_2)x_2y_2 + k_1k_2x_2^2) - (y_1^2 - (k_1 + k_2)x_1^2 + k_1k_2x_1^2)}{k_2 - k_1}\right|$$

贡献独立，跟刚才那个式子一样。