

模糊综合评价

一、概述

1. 数学中的模糊概念

“压死骆驼的最后一根稻草”“量变引起质变”

2. 数学中研究量的划分

确定性：经典数学

不确定性：随机性——概率论

灰性——灰色系统

模糊性——模糊数学

3. 生活中的模糊性（与确定性对立）：帅、年轻、白、有钱

二、经典集合和模糊集合

1. 经典集合 classical set：具有相同属性事物的集体，

经典集合一个元素在或不在某一集合中，只有一个成立

2. 经典集合的特征函数

在，值为1；不在，值为0

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad \forall x \in U$$

3. 模糊集合 fuzzy set：用于描述模糊性概念的集合

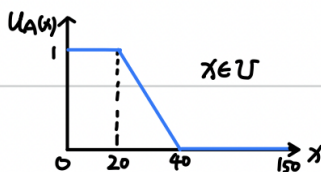
模糊集合承认“亦此亦彼”

4. 模糊集合的隶属函数 membership function

性质：U中每一个元素，都有一个A集合中的隶属度，隶属度介于[0,1]，越大表示越属于这个集合

$A = \text{"年轻"}$ (年轻是一个模糊概念)、 $U = (0, 150)$ 表示年龄的集合

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 20 \\ \frac{40-x}{20}, & 20 \leq x \leq 40 \\ 0, & 40 < x < 150 \end{cases}$$



注： $\mu_A(x)$ 不唯一哦！

隶属函数举例

5. 模糊集合的三种表示方法

论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，模糊集合为A，隶属度为 $A(x_i)$, $i=1, 2, \dots, n$

① Zadeh表示法 (扎德表示法) $A = \frac{A(x_1)}{x_1} + \frac{A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{A(x_n)}{x_n}$

② 序偶表示法 $A = \{(x_1, A(x_1)), (x_2, A(x_2)), \dots, (x_n, A(x_n))\}$

③ 向量表示法 $A = \{A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_n)\}$

$$A = \int_{x \in (0, 20)} \frac{1}{x} + \int_{x \in [20, 40]} \frac{40-x}{20} + \int_{x \in (40, 150)} \frac{0}{x}$$

连续型举例

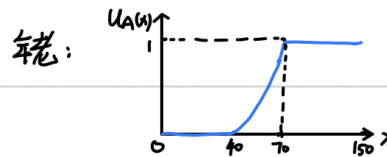
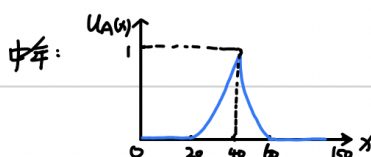
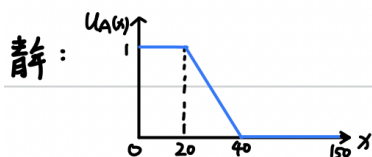
$$(1) A = \frac{0.9}{\text{清风}} + \frac{0.6}{\text{小明}} + \frac{0.7}{\text{小王}} + \frac{0.8}{\text{小红}}$$

$$(2) A = \{(\text{清风}, 0.9), (\text{小明}, 0.6), (\text{小王}, 0.7), (\text{小红}, 0.8)\}$$

$$(3) A = \{0.9, 0.6, 0.7, 0.8\}$$

离散型举例

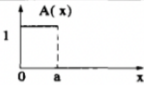
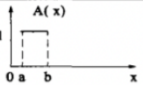
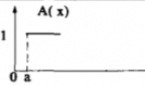
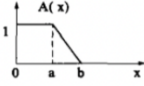
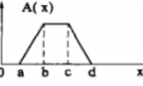
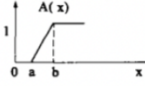
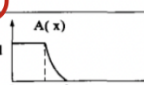
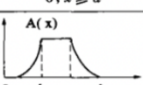
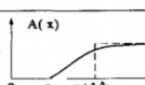
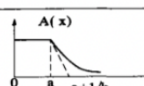
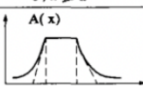
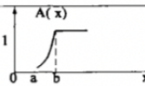
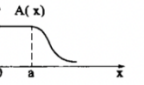
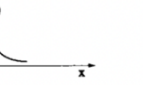
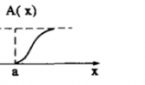
6. 模糊集合的分类：偏小型、中间型、偏大型

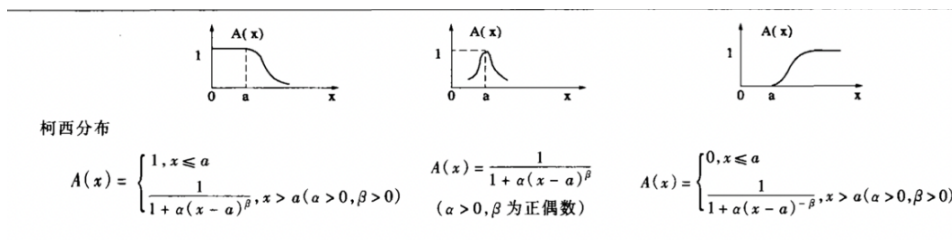


三、隶属函数的三种确定方法

1. 模糊统计法（数模很少用，发问卷，统计频次，计算函数）
2. 借助已有客观尺度（前提：已有指标，有数据集，数据归一化。eg：恩格尔系数用于计算小康家庭）
3. 指派法

表 1 常用的模糊函数分布表

模糊分布	偏小型	中间型	偏大型
矩形分布	 $A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ 或 } x > b \\ 1, & a \leq x \leq b \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$
梯形分布	 $A(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x < d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$
k 次抛物线型分布	 $A(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^k, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x < c \\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right)^k, & c \leq x < d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$
Γ 形分布	 $A(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ e^{-k(x-a)}, & x \geq a, (k > 0) \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} e^{k(x-a)}, & x < a \\ 1, & a \leq x < b, (k > 0) \\ e^{-k(x-b)}, & x \geq b \end{cases}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x < a, (k > 0) \\ 1 - e^{-k(x-a)}, & x \geq a \end{cases}$
正态分布	 $A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x > a \end{cases}$	 $A(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$	 $A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x > a \end{cases}$



例1:

✗ 例2. 已知某一天 SO_2 的浓度为 0.07 mg/m^3 , 大气污染物中关于 SO_2 的评价标准为:

I级	II级	III级	IV级
0.05	0.15	0.25	0.50

, 试确定 SO_2 在每个等级中的隶属度。

解: I级为偏小型, II级和III级为中间型, IV级为偏大型

$$A_1 = \begin{cases} 1, & x \leq 0.05 \\ \frac{0.15-x}{0.15-0.05}, & 0.05 < x < 0.15 \\ 0, & x \geq 0.15 \end{cases} \quad A_2 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.05 \\ \frac{x-0.05}{0.15-0.05}, & 0.05 < x \leq 0.15 \\ \frac{0.25-x}{0.25-0.15}, & 0.15 < x < 0.25 \\ 0, & x \geq 0.25 \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.15 \\ \frac{x-0.15}{0.25-0.15}, & 0.15 < x \leq 0.25 \\ \frac{0.5-x}{0.5-0.25}, & 0.25 < x < 0.5 \\ 0, & x \geq 0.5 \end{cases} \quad A_4 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.25 \\ \frac{x-0.25}{0.5-0.25}, & 0.25 < x < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5 \end{cases}$$

(等号在哪一边无所谓, 一般使用梯形分布最为简单)

则 $A_1(0.07) = \frac{0.15-0.07}{0.15-0.05} = 0.8$ $A_2(0.07) = \frac{0.07-0.05}{0.15-0.05} = 0.2$

$A_3(0.07) = A_4(0.07) = 0$

四、应用：模糊综合评价

1. 评价问题概述

a. 把对象对应到一个评语

b. 作出评语方案集, 并选出最优方案

三个集合：因素集（评价指标）、评语集（评价结果）、权重集（指标权重）

2. 一级模糊综合评价模型

特点：指标个数较少

步骤：(1) 确定因素集U, 即评价指标, n个, 通常 ≤ 5

(2) 确定评语集V, 即评价结果, m个。

- (3) 确定权重集A，指标权重，n个。层次分析法、熵权法。
- (4) 确定模糊综合判断矩阵R，n行m列。竖列，各个因素对于评语1，2，3的隶属度。
- (5) 综合评价，得到综合评判结果B。B=A*R（矩阵乘法）。取评价得分最高的，为最终评语类型

举例：

例 4 设评定科研成果等级的指标集为 $U = (x_1, x_2, \dots, x_5)$ ， x_1 表示为科研成果发明或创造、革新的程度， x_2 表示安全性能， x_3 表示经济效益， x_4 表示推广前景， x_5 表示成熟性； V 表示定性评价的评语论域， $V = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ， y_1, y_2, y_3, y_4 分别表示很好、较好、一般、不好。通过专家评审打分，按下表给出 $U \times V$ 上每个有序对 (x_i, y_j) 指定的隶属度。

表 2 有序对 (x_i, y_j) 指定的隶属度

		V			
		y_1 很好	y_2 较好	y_3 一般	y_4 不好
U	x_1	0.45	0.35	0.15	0.05
	x_2	0.30	0.34	0.10	0.26
	x_3	0.50	0.30	0.10	0.10
	x_4	0.60	0.30	0.05	0.05
	x_5	0.56	0.10	0.20	0.14

3. 多级模糊综合评价模型

引入多级的原因：指标个数较多，归类可以简化计算

步骤：（1）划分因素集U，为U（第一级因素级）， U_i （第二级因素集）。依据：不同子集中元素互不相同

（2）确定评语集V，得到第二集因素集的模糊综合判断矩阵 R_i ，求出其综合评判结果 B_i

（3）对第一级因素U进行综合评判，求得综合评判结果B

（4）按最大隶属度原则，确定相应评语。

总结：一分为二，求出所有B的分量，组成R，最后再做一次 $B=A*R$ ，听最大的。