

1.

因為題目只給了 4 個點，所以 Degree4 做不出來(他需要 5 個點)

```
PS C:\Users\yunyu\Documents\大學\三下\數值方法\Numerical_class\HW3> g++ .\3-1.cpp -o 3-1
PS C:\Users\yunyu\Documents\大學\三下\數值方法\Numerical_class\HW3> ./3-1
Degree: 1, Lagrange Approximation: 0.732077
Error Bound: 0.0003386291

Degree: 2, Lagrange Approximation: 0.731716
Error Bound: 0.000018423

Degree: 3, Lagrange Approximation: 0.731704
Error Bound: 0.000000269
```

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \text{ interval } (C, x)$$

(\bullet for C is the centre of approximation)

\bullet where the max value of all derivatives of the function is:

$$M = f^{(n+1)}(z)$$

(\bullet for z is any value between C and x makes the derivative to the max)
(\bullet and note that: the input has to be $n+1$)

\bullet then the function's Remainder MUST satisfy this theorem:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{M \cdot (x-C)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0) \dots (x-x_n)$$

網路上找到的拉格朗日 error bound 的公式如左圖所示，但是因為不知道這題的 center 是什麼，所以參考第四章看到感覺類似 error bound 的公式 $(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$ 的方式來做

2.

用題目提供的 4 點來建立拉格朗日插值多項式，然後用 Secant Method 的方式求解，得到 $x=0.567145$ 時， $x-e^{-x}=0$

```
PS C:\Users\yunyu\Documents\大學\三下\數值方法\Numerical_class\HW3> g++ .\3-2.cpp -o 3-2
PS C:\Users\yunyu\Documents\大學\三下\數值方法\Numerical_class\HW3> ./3-2
Inverse Interpolation using Secant
Secant Method (Initial guesses 0, 1):
Converged to root: 0.567145 in 5 iterations
```

3.

```
PS C:\Users\yunyu\Documents\大學\三下\數值方法\Numerical_class\HW3> g++ .\3-3.cpp -o 3-3
PS C:\Users\yunyu\Documents\大學\三下\數值方法\Numerical_class\HW3> ./3-3
The position at t = 10: 596.316 feet
The velocity at t = 10: -100.718 feet/sec
Speed exceeds 55 mi/h at t = 0.03246 seconds
Speed at that moment: 80.6707 ft/s
The predicted maximum speed is: 398.204 ft/s at t = 12.4111 seconds
```

a.

使用程式建立 divided differences 的表格，用來計算 $H(10)$, $H'(10)$ 的值

position = 596.32 feet

speed = -100.718 feet/sec

b.

55mi/h = 80.67 feet/s

使用間隔為 $h = 0.00001$ ，從 0-13 秒計算 $H'(t)$ 的值，找到第一次超速的時間點

第一次超速的時間點為 0.03246

c.

使用間隔為 $h = 0.00001$ ，從 0-13 計算 $H'(t)$ 的值，找到最大的速度值
最大的速度為 398.204 feet/s，在 $t=12.4111$ 時