Aufgabenblatt 3

Statistik – Sommersemester 2024 – Prof. Dr. Sandra Eisenreich

Aufgabe 1. *

- Es sei X die Zufallsvariable “Ergebnis beim einmaligen Würfeln mit einem Würfel”. Beschreiben Sie die Zufallsvariable als Funktion, berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X, und geben Sie die Verteilung und Verteilungsfunktion von X an.
- Wir werfen zweimal mit einem Würfel. Es seien X_1, X_2 die Zufallsvariablen “Ergebnis des ersten Wurfs” bzw. “Ergebnis des zweiten Wurfs”, und $S_2 = X_1 + X_2$ sei die Augensumme. Geben Sie die Verteilung und Verteilungsfunktion von S_2 an und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz. Plotten Sie beide Funktionen als Histogramm.

Aufgabe 2.

In einem Experiment würfeln Sie mit drei Würfeln. Es sei X die Zufallsvariable “Anzahl der 6er bei drei Würfen”.

(a) Geben Sie die Verteilung und die Verteilungsfunktion von X an.

(b) Wie sind der Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariable X allgemein definiert?

(c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

Aufgabe 3.

Ein Hellseher sagt das Geschlecht von Kindern voraus, indem er eine echte Münze wirft und bei Kopf die Geburt eines Mädchens vorhersagt. Die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt ist 0.486.

(a) Wir nennen es einen “Treffer”, wenn der Hellseher recht hat, und betrachten eine Vorhersage als Zufallsexperiment. Die Zufallsvariable X bezeichne den Ausgang dieses Zufallsexperiments. Was ist die Verteilung von X?

(b) Eine Vorhersage kostet 100 Euro und der Kunde erhält das Geld zurück, falls die Vorhersage nicht eintritt. Es sei Y die Zufallsvariable “Gewinn bei einer Vorhersage”. Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

(c) Berechnen Sie das Jahreseinkommen des Hellsehers bei 100 Anfragen pro Monat. Wie kann er sein Einkommen (bei gleichem Tarif) verbessern?

Aufgabe 4.

Unter 50 Glühbirnen in einem Karton befinden sich 5 defekte. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Birnen getestet.

(a) Beschreiben Sie die Verteilung der Zufallsvariable X= “Anzahl defekter Glühbirnen unter den 3 getesteten”

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 defekt sind?

(c) Wieviele defekte Birnen sind bei dieser Stichprobe im Mittel zu erwarten, und was ist die Standardabweichung von diesem Wert?

Aufgabe 5.

Ein altes Auto springt ungern an, durchschnittlich bei jedem 5. Versuch. Wir interessieren uns dafür, beim wievielten Versuch das Auto anspringt.

(a) Was ist die entsprechende Zufallsvariable und was ist ihre Verteilung?

(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es beim 1. oder 2. Versuch anspringt?

(c) Nach 5 Versuchen ist die Batterie leer. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es gar nicht anspringt?

Aufgabe 6.

Auf Bildern sind fünf verschiedene Tierarten zu sehen: Alpacas (Kategorie 1), Rotpandas (Kategorie 2), Vögel (Kategorie 3), Erdmännchen (Kategorie 4) und Katzen (Kategorie 5). Wir haben ein Machine Learning Modell trainiert, das für solche Bilder vorhersagt, was darauf zu sehen ist (Kategorie 1-5). Ein sehr sehr großer Datensatz besteht zu 20% aus Alpaca-, zu 10% aus Rotpanda- zu 30% aus Vogel-, zu 10% aus Erdmännchen und 30% aus Katzen-Bildern, und wir wählen zum Testen unseres Modells zufällig 100 Bilder aus diesem Datensatz aus. $(X_1,\ldots,X_5)$ sei der Zufallsvektor, der angibt, wie viele Bilder von jeder Klasse ausgewählt wurden. Was ist die Verteilung dieser Zufallsvariable, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 100 Bilder gleich viele von jeder Tierart sind?

Aufgabe 7.

Bei einem leichten Nieselregen fallen auf einen Gitterrost auf dem Boden 100.000 Wassertropfen. Der Gitterrost hat $1m^2$ Größe, die Löcher im Gitter sind $1cm^2$ groß. Gehen Sie davon aus, dass die Anzahlen der Tropfen, die auf verschiedene Löcher des Gitters fallen, voneinander unabhängig sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in ein bestimmtes Gitterloch genau 10 Regentropfen fallen und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in jedes Loch mindestens 1 Tropfen fällt.

Aufgabe 8. ***

(a) Wir würfeln zweimal mit einem echten Würfel, und X_i sei das Ergebnis des i-ten Wurfs. Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors (X_1, X_1+X_2).

(b) Ein Glücksspiel funktioniert folgendermaßen: Sie werfen mit einer echten Münze so oft, bis zum ersten Mal “Kopf“” erscheint. Falls Kopf zum ersten Mal beim k-ten Wurf auftaucht, gewinnen Sie 2^k Euro. Welchen Einsatz würden Sie höchstens zahlen, um an diesem Spiel teilnehmen zu können?