4 Reihen

Def 4.1: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen.

Die *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$. Falls die Folge s_n gegen a konvergiert, so sagt man, *die Reihe konvergiert* und bezeichnet den Grenzwert a mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Das n-te Folgenglied $\sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt *n-te Partialsumme* der Reihe. Die Elemente a_k heißen die *Reihenglieder* der Reihe.

Bsp:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist die harmonische Reihe. divergent!
  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent mit Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$.
- Für $q \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) definieren wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Sie konvergiert für $|q|<1$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist monoton wachsend.

Wir suchen nach einer oberen Schranke

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} \leq \frac{1}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{k-1 \text{ Faktoren}}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Daher gilt für alle Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \quad ?$$

Def 4.2: Der Grenzwert $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ heißt eulersche Zahl.
($e \approx 2.71828\ldots$)

Satz 4.3: Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist, dann ist a_k eine Nullfolge.

Def. 4.4: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 4.5: Eine absolute konvergente Reihe ist konvergent

Bem: Satz gilt auch für komplexe Zahlen.

Satz 4.6:

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergente Reihen und $c \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann gilt

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$

iii) Sei $z_n = x_n + iy_n$ eine komplexe Folge und $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ die entsprechende Reihe. Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ist konvergent gdw. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$ und $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y$ sind konvergent.

In diesem Fall ist $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = x + iy$

iv) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right)$ absolut konvergent.

In diesem Fall gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) = a \cdot b$

Satz 4.7: Majorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und es gilt $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.

Satz 4.8: Quotientenkriterium

Sei $0 < q < 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, so dass für hinreichend große n gilt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$, dann ist $\sum a_n$

absolut konvergent.

Wenn für hinreichend große n stets $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ gilt, dann ist die Reihe divergent.

Bem: Häufiger Ansatz ist hier z.z., dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$$

Satz 4.9:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent

Bew.:
Wir rechnen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right| = \frac{|z|}{n+1}$

Und wegen $\lim \frac{|z|}{} = 0$ folgt absolute Konvergenz

$n \to \infty \qquad n+1$

nach Quotientenkriterium.

Def. 4.10

Die Fkt. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

heißt **Exponentialfunktion.**

Satz 4.11:

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

i) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

ii) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$

Satz 4.12:

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\exp(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + r_{n+1}(z)$ Rest

Für $|z| \leq 1 + \frac{\pi}{2}$ gilt für den Rest $|r_{n+1}(z)| \leq \frac{[\text{illegible}]}{(n+1)!}$.