Def 5.1:

- Sei $b > 1$ natürliche Zahl. Wir nennen b Basis und $\{0, 1, \dots, b-1\}\ \mathbb{Z}_b$ die Ziffern des b-adischen Systems.

- Sei $r \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $(a_n)_{n \geq r}$ in $\mathbb{Z}_b$ mit $a_r \neq 0$ gegeben. Die Reihe $\sum_{n=r}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ heißt b-adischer Bruch und wir schreiben dafür

$$(a_r . a_{r+1}\ a_{r+2} \dots E{-r})_b$$

- Der b-adische Bruch heißt
  - endlich, wenn $a_n = 0$ für alle hinreichend große Indizes und wir schreiben dann $(a_r . a_{r+1} \dots a_{n_0}\ E{-r})_b$

  - periodisch, wenn sich für hinreichend große Indizes die Ziffern $p_1, p_2, \dots p_m$ nur noch wiederholen und wir schreiben .

$$(a_r . a_{r+1} \ldots a_{n_0} \overline{p_1 \ldots . p_m} \, E{-r})_b$$

Bem.: • Der Startindex r kann negativ sein und wir haben für $r < 0$

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = a_r \, b^{-r} + a_{r+1} \, b^{-r-1} + \ldots .$$

$$\ldots . + a_{-1} \, b^{1} + a_0 \, b^{0} + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \ldots$$

• Man schreibt häufig

$$(a_r \, a_{r+1} \ldots a_0 \;\; a_1 \, a_2 \ldots)_b \quad \text{für } r \leq 0$$

$$(\underbrace{0, 0 \ldots 0}_{r-1 \text{ mal}} \; a_r \;\; a_{r+1} \ldots)_b \quad \text{für } r > 0$$

Bsp: • $(1.2345 \, E{+2})_{10}$ $\qquad (r = -2)$

$= (123.45)_{10}$

$$= 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2}$$

$$= 123 + \frac{45}{100}$$

- $(6.789\,E-3)_{10}$

$$= (0{,}006789)_{10} = \frac{6}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{9}{10^6} = \frac{6789}{10^6}$$

- $(1.2345\,E+2)_{7}$

$$= (123.45)_7$$

$$= 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^2}$$

$$= 49 + 14 + 3 + \frac{28+5}{7^2} = 66 + \frac{33}{7^2}$$

• $(3.333\ldots)_{10}$

$$= 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots$$

$$= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{10^n}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = 3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{3}$$

• $(0.12\overline{34})_{10} = x$

Idee: Perioden wegsubtrahieren

$$10^4 \cdot x = 1234.\overline{34}$$ (1 Periode vor Komma)

$$-\ 10^2 \cdot x = 12.\overline{34}$$ (Periode genau nach Komma)

$$(10^4 - 10^2) \cdot x = 1222$$

$$9900 \cdot x = 1222$$

$$x = \frac{1222}{9900}$$

Satz 5.2:

Jeder k-adische Bruch konvergiert.

Bew. (Idee):

streng monoton wachsend und nach oben beschränkt. $\square$

Satz 5.3:

Sei $b>1$ natürliche Zahl. Dann gilt

$\mathbb{R}$ a) Die b-adischen Brüche sind genau die reellen Zahlen.

$\mathbb{Q}$ b) Die periodischen (inkl. endlichen) b-adischen Brüche sind genau die rationalen Zahlen

Bew.:

a) $\Rightarrow$ Satz 5.2

$\Leftarrow$ induktive Konstruktion

b) -> s. letztes Bsp. mit Kommaverschieblich
<- Divisionsalgorithmus

INPUT: $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p/q < 1$

OUTPUT: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ so dass

$$p/q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

$n = 1$

$r_0 = p$

REPEAT

q_{n_c} rem

wähle a_n und r_n mit $0 \leq r_n < q$ so dass

$$b \cdot r_{n-1} = a_n \cdot q + r_n$$

$n \mathrel{+}= 1$

RETURN $a_1, a_2, \ldots$

Endet praktisch, wenn Rest $r_n = 0$, weil dann alle weiteren a_{n+1} gleich Null. oder Rest $r_n = r_{n-p}$ sich wiederholt und dann alle Folgeglieder a_n sich wiederholen.
Einer der beiden Fälle muss eintreten, weil nur bei q verschiedene Reste möglich sind.