Statistik

Vorlesung 1 - Wahrscheinlichkeitsbegriff

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

18. März 2024

Hochschule Landshut

Zufallsexperimente und Ereignisse

- Zufallsexperiment: Ein Vorgang mit verschiedenen möglichen Ergebnissen, bei dem man nicht vorhersagen kann, welches konkrete Ergebnis eintritt.
- Ergebnis eines Zufallsexperiments: **ein** konkreter Ausgang
- Ergebnismenge (Bezeichnung: Ω): Die Menge der möglichen Ergebnisse.
- Ereignis $A \subset \Omega$: Eine Teilmenge von möglichen Ergebnissen. Ein Ereignis mit nur einem Ergebnis heißt Elementarereignis.
- $\Omega =$ das sichere Ereignis, $\emptyset =$ das unmögliche Ereignis.
- Die Ereignisse A und B heissen unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Achtung: Ergebnis und Ereignis nicht verwechseln!

Beispiele

- Zufallsexperiment: Würfeln eines Würfels
- Ergebnis: z.B. 1
- Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Beispiel für ein Ereignis: $A = \{2, 4, 6\} =$ "das Ergebnis ist eine gerade Augenzahl", $B = \{1\}$ ist Elementarereignis.
- Das Ereignis $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist sicher, weil immer eine der Zahlen 1-6 das Ergebnis ist. Das Ereignis $\emptyset$ ist unmöglich, weil bei einmal Würfeln immer irgendein Ergebnis herauskommt.
- Die Ereignisse $A = \{2, 4, 6\}=$ "Ergebnis ist gerade Zahl" und $B = \{1, 3, 5\}=$ "Ergebnis ist ungerade Zahl" sind unvereinbar ($A \cap B = \emptyset$).

Weitere Beispiele für Ergebnismengen

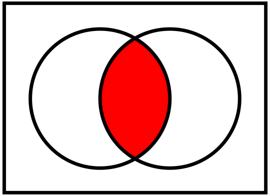
Beispiele

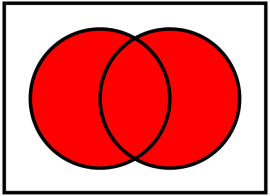
Würfeln:	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Münzwurf:	$\Omega = \{\text{Kopf, Zahl}\}$
Lotto:	$\Omega =$ Menge der 6-Tupel verschiedener Elemente aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 49\}$
Wählerbefragung:	$\Omega = \{\text{CDU/CSU, SPD, Grüne, Linke, FDP, sonstige}\}$
Temperaturmessung:	$\Omega = \mathbb{R}^+$

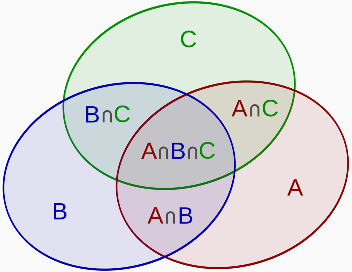
Ereignisse = Mengen

- $A \cap B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ und } \omega \in B\}$: " sowohl A als auch B treten ein."
- $A \cup B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ oder } \omega \in B\}$: "$A$ oder B tritt ein."
- $B \setminus A := \{\omega \in \Omega : \omega \in B \text{ und } \omega \notin A\}$: "$B$ tritt ein, aber A nicht."
- $\overline{A} := \Omega \setminus A$: "$A$ tritt nicht ein"

Erinnerung: Regeln für mengentheoretische Verknüpfungen

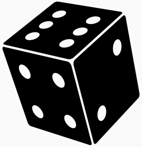






- Kommutativgesetze: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativgesetze: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Distibutivgesetz: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Formeln von De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

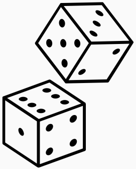
Beispiel



Beispiel (Würfeln):
$A =$ Die Augenzahl ist gerade
$B =$ Die Augenzahl ist größer als 3

$A \cap B = \{4, 6\}$,
$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$,
$B \backslash A = \{5\}$,
$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$
$\overline{B} = \{1, 2, 3\}$

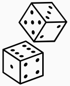
Weiteres Beispiel



Der zweifache Würfelwurf mit der Ergebnismenge $\Omega =?$.

- Wie viele Elemente hat Ω?
- Ereignis "der erste Wurf ergibt eine Fünf": $A =?$
- Ereignis "die Augensumme aus beiden Würfen"
- Ereignis "der zweite Wurf ergibt eine höhere Augenzahl als der erste Wurf": $C =?$
- $A \cap B =?$
- $B \setminus C =?$
- $A \cap C =?$

Ergebnisse



- $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$.
- 36
- $A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$
- $B = \{(i,j) \in \Omega : i+j \leq 5\}$
- $C = \{(i,j) \in \Omega : i < j\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- $B \setminus C = \{(i,j) \in \Omega : i+j \leq 5, i \geq j\} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,2),(2,3)\}$
- $A \cap C = \{(5,6)\}$

Ereignisalgebra - Motivation

- Wahrscheinlichkeiten werden *nicht für Ergebnisse berechnet, sondern für Ereignisse* (z.B. Wahrscheinlichkeit für $\{1\}$ oder "gerade Augenzahl")
- Die Ereignisse, für die wir Wahrscheinlichkeiten berechnen können, sind in der Ereignisalgebra zusammengefasst, die natürliche Regeln erfüllen muss.
- Die Regel, mit der wir einem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnen $=$ Wahrscheinlichkeitsmaß.

Ereignisalgebra

Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω heißt Ereignisalgebra oder σ-Algebra in Ω, wenn gilt:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(A2) Ist $A \in \mathcal{A}$, so gilt auch $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

(A3) Ist $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Die Teilmengen, die zu der Ereignisalgebra $\mathcal{A}$ gehören, heißen Ereignisse.

Es folgt automatisch: $\emptyset$ und beliebige Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{A}$ sind in $\mathcal{A}$.

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Ω sei eine Menge. Eine Funktion P, die auf einer Ereignisalgebra $\mathcal{A}$ in Ω definiert ist und die folgenden Axiome erfüllt, heißt Wahrscheinlichkeit oder Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

(W1) $0 \leq P(A) \leq 1$ für alle Ereignisse $A \in \mathcal{A}$.

(W2) $P(\Omega) = 1$.

(W3) Sind $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Ereignisse, so gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Abgeleitete Rechenregeln für P

Für Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und Ereignisse A, B, $A_1, A_2, \ldots A_n$ gilt:

(a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(b) $P(\emptyset) = 0$.

(c) Aus $A \subseteq B$ folgt $P(A) \leq P(B)$.

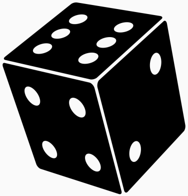
(d) Ist $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, so gilt:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

(e) Insbesondere: $P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad$ falls $A \cap B = \emptyset$, ansonsten gilt:

(f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Beispiel: Wahrscheinlichkeitsraum 1x Würfeln

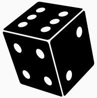


- Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Ereignisalgebra $\mathcal{A} = P(\Omega)$.
- Wahrscheinlichkeitsmaß auf Elementarereignissen: $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

Mit (W3) lässt sich damit für jede Teilmenge von Ω die Wahrscheinlichkeit berechnen:

- $P(\{1, 2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
- Genauso folgt: $P(\{1, 3, 4, 5\}) = \frac{4}{6}$
- Wahrscheinlichkeitsmaß auf allen Ereignissen: Für ein Ereignis A gilt: $P(A) = \frac{|A|}{6}$.

Beispiel: Rechenregeln 1x Würfeln



(a) $P(\overline{2,3}) = P(1,4,5,6) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und $1 - P(2,3) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

(b) $P(\emptyset) = 0$: Die Wahrscheinlichkeit, ein unmögliches Ergebnis zu bekommen (z.B. 7), ist 0.

(c) $A = \{1\} \subseteq B = \{1,2,3\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6} \leq P(B) = \frac{1}{2}$.

(d) Es gilt z.B. $P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{5\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{5\})$

(3) Es gilt z.B. $P(\{1,4\} \cup \{2,5\}) = P(\{1,4\}) + P(\{2,5\}) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

(f) $P(\{1,6\} \cup \{1,4\}) = P(\{1,4,6\}) = \frac{1}{2}$ und
$P(\{1,6\}) + P(\{1,4\}) - P(\{1\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.