Aufgabenblatt 2

Statistik – Sommersemester 2024 – Prof. Dr. Sandra Eisenreich

Aufgabe 1. *

(a) Was zeichnet ein Bernoulli-Experiment aus?

(b) Sind folgende Situationen Bernoulli-Experimente? Beschreiben Sie in diesem Fall jeweils den Wahrscheinlichkeitsraum Ω!

- In einem Forum wird eine Frage gestellt, woraufhin 6 Personen eine Antwort formulieren ohne die Antwort der anderen gesehen zu haben. Hierbei gibt jeder mit einer 70%igen Wahrscheinlichkeit die richtige Antwort.
- In einem Forum wird eine Frage gestellt, wobei die Antworten von 6 Personen nacheinander vorgetragen und im Forum diskutiert werden.

(c) Finden Sie ein Beispiel für Ereignisse A, B, so dass $P(A|B) \neq P(A)$.

Aufgabe 2.

(a) Sie würfeln fünf mal mit einem Würfel mit 6 Seiten. Jede Fläche liegt nach einem Wurf mit gleicher Wahrscheinlichkeit oben. Beschreiben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei A_i das Ereignis, dass beim i-ten Wurf die Zahl 6 erscheint. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) Mindestens eines der Ereignisse A_1 und A_2 eintritt.

(ii) Das Ereignis A_3 eintritt unter der Bedingung, dass A_1 und A_2 schon eingetreten sind.

(b) Wir interessieren uns in dem Setting von oben nun ausschließlich dafür, ob beim Würfeln ein 6-er gewürfelt wird oder nicht. $X = k$ ist das Ereignis "von den 5 Würfen sind k 6-er" für $k = 0, \ldots, 5$ (das heißt X ist eine Zufallsvariable). Beschreiben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal die 6 gewürfelt wird.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim 4. Wurf das erste Mal eine 6 gewürfelt wird?

Aufgabe 3.

Ein Bäcker bäckt 100 Olivenbrote. In den Teig wirft er 400 Oliven. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,

- dass Sie ein Brot ohne Oliven erwischen,
- dass drei Oliven in einem Brot sind.

Aufgabe 4.

In der Statistik Klausur am Semesterende wird (vielleicht) ein Multiple Choice Test durchgeführt. Auf eine Frage sind 5 Antworten möglich, genau eine ist richtig. Gut vorbereitete Studenten kreuzen die richtige Antwort an, schlecht vorbereitete kreuzen zufällig an. Wir nehmen an, 90% (ich hoffe allerdings mehr) der Studenten sind gut vorbereitet. Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit stammt ein richtiges Ergebnis von einem gut vorbereiteten Studenten?

Aufgabe 5.

An einer Schießbude schießen 3 Leute. Der erste trifft mit Wahrscheinlichkeit 0.3, der zweite mit 0.6, der dritte mit 0.8. Zum Ausgleich darf der erste doppelt so oft schießen wie die anderen beiden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Treffer vom 1. Schützen stammt?

Aufgabe 6.

90% der in einer Radarstation eintreffenden Signale sind mit einer Störung überlagerte Nutzsignale, und 10% sind reine Störungen. Wird ein gestörtes Nutzsignal empfangen, so zeigt die Anlage mit Wahrscheinlichkeit 0.98 die Ankunft eines Nutzsignals an. Beim Empfang einer reinen Störung wird mit Wahrscheinlichkeit 0.1 fälschlicherweise die Ankunft eines Nutzsignals angezeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als Nutzsignal angezeigtes Signal wirklich ein (störungsüberlagertes) Nutzsignal?

Aufgabe 7.

Beim Würfeln mit 2 Würfeln soll die Zufallsvariable X_i das Ergebnis des i-ten Würfels sein.

- Beschreiben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum Ω und die Zufallsvariable $Y = X_1 + X_2$.
- Zwei Zufallsvariablen heißen unabhängig, wenn für alle möglichen Wertepaare (x, y) von (X_1, X_2) gilt:

  $$P(X_1 = x, X_2 = y) = P(X_1 = x)P(X_2 = y).$$

  Sind die Zufallsvariablen X_1 und $Y = X_1 + X_2$ voneinander unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 8. ***

k sei die Anzahl von Treffern in einem n-fachen Bernoulli-Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $p_n = \frac{\lambda}{n}$ für eine feste Zahl $\lambda \in (0, \infty)$. Was ist der Grenzwert von $b_{n,p_n}(k)$ für $n \to \infty$? (Salopp gesagt bedeutet dies: hat man in einem Bernoulli Experiment eine sehr große Anzahl von Experimenten n, und eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit p, kann man die Wahrscheinlichkeit von k Treffern durch diese Funktion annähern.) Dabei dürfen Sie verwenden, dass $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$.