Praktikum V Sommer 2024

Mathematik II

1. **Bisektionsverfahren**
   Verwenden Sie das Bisektionsverfahren, um alle reelle Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 5x + 1$ mit einer Genauigkeit von 2 hinter dem Komma zu berechnen.

2. **Newton-Iteration**
   Für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die folgende rekursiv definierte Folge:

   - $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.
   - x_{k+1} ist der Schnittpunkt der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x_n, f(x_n))$.

   (a) Geben Sie eine Formel für x_{n+1} in Abhängigkeit von x_n, $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ an.

   (b) Betrachten Sie erneut die Funktion $f(x) = x^3 + -5x + 1$ aus Aufgabe 1 und berechnen Sie jeweils 10 Folgeglieder für die Startwerte $x_0 = -3$, $x_0 = 0$ und $x_0 = +3$. Was stellen Sie fest? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 1.

3. **Differentiation I**
   Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion (wo definiert).

   (a) $a(x) = x^2 \cdot \cos(\ln(x^2))$

   (b) $b(x) = e^{\sqrt{x}}$

   (c) $c(x) = 2^{2^x}$

   (d) $d(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

   (e) $e(x) = x^{m/n}$

4. **Differentiation II**

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ die Menge $]-\pi/2, \pi/2[$ bijektiv auf $]-\infty, \infty[$ abbildet. Zeigen Sie dann, dass

   $$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{1}$$

   und somit $\tan x$ auf $]-\pi/2, \pi/2[$ streng monoton wachsend ist. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan x$.

   (b) Bestimmen Sie die Ableitung von arcsin und arccos.

Version: 2024-06-13 04:28:44+02:00