Thema 3: Mengenlehre

Mittwoch, 27. Dezember 2023 12:43

Definition:

$|A|$:

Die Mächtigkeit oder Kardinalität $|A|$ der Menge A sagt dir, wie viele Elemente die Menge A enthält

Bsp:

$A = \{$Hase, Katze, Igel, Vogel, Hund$\}$ und $B = \{2,4,6,8,10\}$

$|A| = |B| = 5$

$A = B$:

A und B sind gleich, wenn jedes Element von A auch in B liegt und umgekehrt

Bsp:

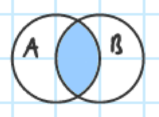
$A = \{1,2,3,4,5\}$ und $B = \{5,4,3,2,1\}$ gleich?
$C = \{1,2,3,4\}$ und $D = \{1,2,3\}$ gleich?

$A = B$
$C \neq D$

Schnittmenge:

$A \cap B$ („A geschnitten B")

Der Durchschnitt von A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch B liegen.



Bsp:

Durschnitt von $A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{2,4,6,8\}$?

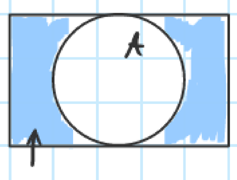
$A \cap B = \{2,4\}$

bei keinen gemeinsamen Elementen:

$A \cap B = \emptyset$

Komplement:

A^c oder $\bar{A}$ („Komplement von A")



Komplement von $A = \{1,2,3,4\}$ = alles außer 1,2,3,4

Komplement von A bezüglich $B = B \setminus A$

$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$B \setminus A = \{5,6,7,8\}$

Kreuzprodukt:

A, B Menge
$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$
$A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b\}$

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$\underbrace{(1,a)}_{\text{ist keine Menge}} \neq (a,1)$ $\underbrace{\{1,a\}}_{\text{ist eine Menge}} = \{a,1\}$

Äquivalenzklasse:

A Menge R
$[1] = \{1,2,4\}$
$[2] = \{1,2,4\}$
$[4] = \{1,2,4\}$
$[3] = \{3\}$

$[a] = \{b \in a : \begin{pmatrix} b \, R \, a \\ b \sim a \end{pmatrix} \subset A$ (ist das gleiche)

$a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$
$a \nsim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

„nicht in Relation zu"

Abbildungen:

A, B Mengen

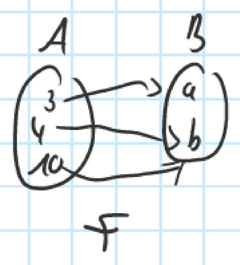
$f: A \to B$ $a \mapsto b$

„Quelle von f" „Ziel von f"

$A = \{3,4,10\}$ $B = \{a,b\}$

$f: A \to B$

$3 \mapsto a$
$4 \mapsto b$
$10 \mapsto b$

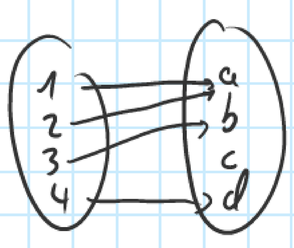


Urbild:

$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{a,b,c,d\}$

$f: A \to B$

$1 \mapsto a$
$2 \mapsto a$
$3 \mapsto b$
$4 \mapsto d$



$f^{-1}(a) = \{1,2\}$
$f^{-1}(b) = \{3\}$
$f^{-1}(c) = \{\ \} = \emptyset$
$f^{-1}(d) = \{4\}$

Standartmengen:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4 \ldots\}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots -4,-3,-2,-1,0,1,2,3 \ldots\}$
$\mathbb{R} = \{3{,}2,\ 10{,}9857, \pi, e\}$

$\mathbb{C} = \{\mathbb{R} \cup \{i\}$

Identische Abbildungen:

(Eine Menge die auf sich selbst abgebildet wird)

A Menge

$f: A \to A$
$a \mapsto a$

$f(x) = x$
$x = 1$

$f(1) = 1$

$\emptyset$ = leere Menge

Sie ist Teilmenge jeder Menge

Potenzmengen:

Potenzmenge einer Menge A: $P(A)$ ist die Menge alle Teilmengen von A

Bsp:
Potenzmenge von $A = \{1,2,3\}$?

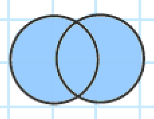
- $\emptyset \subset A$
- $\{1\} \subset A$, $\{2\} \subset A$, $\{3\} \subset A$
- $\{1,2\} \subset A$, $\{1,3\} \subset A$, $\{2,3\} \subset A$, $\{1,2,3\} \subset A$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Vereinigungsmenge:

$A \cup B$ („A vereinigt B")

Die Vereinigung von A und B ist die Menge aller Elemente, die in A oder in B oder in beiden Mengen liegen



Vereinigungsmenge von $A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{2,4,6,8\}$?

$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$

(jedes Element nur einmal, auch wenn es in beiden Mengen vorkommt)

Differenzmenge:

$A \setminus B$ („A ohne B")

Die Differenzmenge von A und B ist die Menge aller Elemente, die zwar in A, aber nicht in B liegen

Bsp:

$A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{2,4,6,8\}$. Was ist $A \setminus B$ und $B \setminus A$

$A \setminus B = \{1,3\}$
$B \setminus A = \{6,8\}$

Element:

$7 \in M$: 7 ist ein element von M
$7 \notin M$: 7 ist kein element von M

Relation:

A, B Mengen $A = \{1,2,3\}$ $B = \{x,y\}$
$A \times B$ $A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$

$R \subset A \times B$ $R = \{(1,x),(1,y),(2,y)\}$

$(a,b) \in R \Rightarrow aRb$

Äquivaenzrelation:

A Menge
$R \subset A \times A$

Reflexiv
Symmetrie
Transitiv

1. $a \, R \, a$ $\forall a \in A$
2. $a \, R \, b \Rightarrow b \, R \, a$ $\forall a b \in A$
3. $a \, R \, b \wedge b \, R \, c = a \, R \, c$

Bsp: $A = \{1,2,3,4\}$
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(4,2),(2,1),(2,4),(4,1),(1,4)\}$

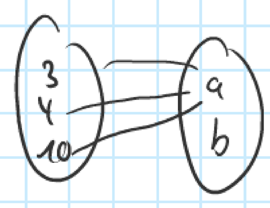
Surjektiv:

jedes Element von B (Zielmenge) wird immer getroffen.

$A = \{3,4,10\}$ $B = \{a,b\}$

$f: A \to B$
$3 \mapsto a$
$4 \mapsto b$
$10 \mapsto b$

$g: A \to B$
$3 \mapsto a$
$4 \mapsto a$
$10 \mapsto a$



Injektiv:

zu jedem Element der Zielmenge gibt es höchstens 1 element

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c\}$

$f: A \to B$

$1 \mapsto a$
$2 \mapsto c$
$3 \mapsto b$

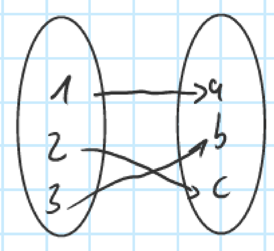


Bild:

$A = \{1,2\}$ $B = \{a,b,c\}$

$f: A \to B$ $f(A) = \{b,c\}$
$1 \mapsto b$
$2 \mapsto c$

Sätze 1-5:

A, B Mengen $f: A \to B$

1. $f^{-1}(B) = A$
2. f surjektiv $\Leftrightarrow f(A) = B$
3. f injektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ hat $f^{-1}(b)$ höchstens 1 Element
4. f bijektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B$ hat $f^{-1}(b)$ genau 1 Element
5. f injektiv $\Rightarrow f: A \to f(A)$ bijektiv

$A = \{1,2,3\}$ $B = a,b$

Komposition:

f, g Abbildungen

$f \cdot g(x) = f(g(x))$

Umkehr Abbildungen:

A, B Mengen

$f: A \to B$ bijektiv
$g: B \to A$

$g \cdot f(x) = g(f(x)) = x$

$g \cdot f = id\,A$
$f \cdot g = id\,B$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$ bijektiv

$g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \log(x)$