6 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sowie $D \subseteq K$

Def. 6.1: Sei $f: D \to K$ Funktion und x^* Berührpunkt von D. Wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y^*,$$

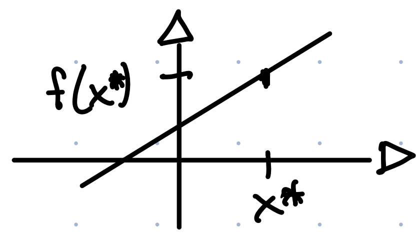
dann sagt man „f hat in x^* den Grenzwert y^*" und schreibt $\lim_{x\to x^*} f(x) = y^*$.

Bem.:
- Für $x^* \in D$ gilt,
  Wenn $\lim_{x\to x^*} f(x)$ existiert, dann muß er gleich $f(x^*)$ sein
- Wenn $K = \mathbb{R}$ und D nach oben unbeschränkt ist, dann schreiben wir $\lim_{x\to +\infty} f(x) = y^*$,

wenn für alle Folgen mit $\lim_{x \to \infty} x_n = +\infty$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y^*$$

In diesem Fall ist auch $\pm\infty$ für y^* zugelassen.
Analog für $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y^*$, wenn D nach unten unbeschränkt ist.



Bsp: (i) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax+b$
In jedem $x^* \in \mathbb{R}$ existiert ein Grenzwert von f und er ist gleich $f(x^*)$.

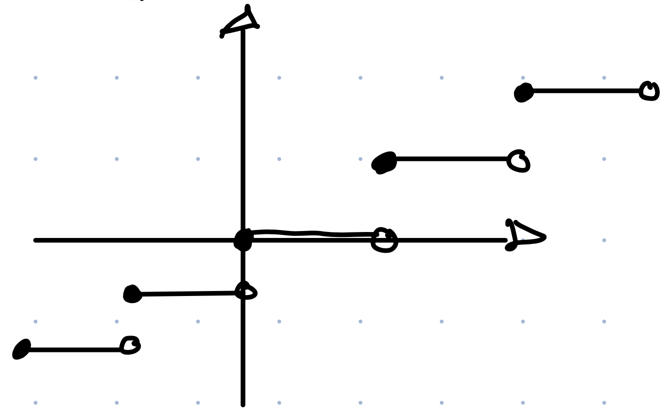
Bew.: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$.
Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (a x_n + b) \overset{\text{Kap. 4}}{=} a \cdot \lim_{n \to \infty} x_n + b$$

$$= a x^* + b = f(x^*)$$

(ii) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (Floor / „Größte ganze Zahl.")

In Punkt $x^* = 1$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ nicht.



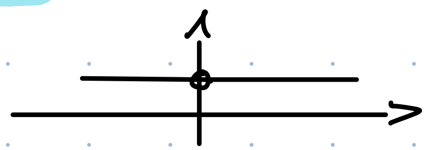
Bew: Wähle Testfolge $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$

und $\tilde{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{x}_n = 1$

Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$

und $\lim\limits_{n \to \infty} f(\tilde{x}_n) = 1$

(iii) Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$



Der Punkt $x^* = 0$ ist Berührpunkt des Definitionsbereiches und somit finden wir

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

(iv) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty$ und $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht

Satz 6.2:

Seien von $f, g : D \to K$ Funktionen, x^* Berührpunkt von D und $\lim_{x \to x^*} f(x) = a$, $\lim_{x \to x^*} g(x) = b$. Dann gilt

(i) $\lim_{x \to x^*} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$

(ii) $\lim_{x \to x^*} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$

(iii) $\lim_{x \to x^*} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot a$ für $\lambda \in K$

(iv) $\lim_{x \to x^*} (f(x) / g(x)) = \frac{a}{b}$ für $b \neq 0$

(v) $\lim\limits_{x \to x^*} |f(x)| = |a|$

(vi) Wenn $K = \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = a = u \pm iv$$

gdw. $\lim\limits_{x \to x^*} \mathrm{Re}(f(x)) = u$, $\lim\limits_{x \to x^*} \mathrm{Im}(f(x)) = v$.

Satz 6.3:

Sei $f: D \to K$, $g: E \to K$ mit $f(D) \subseteq E$. Dann gilt

Wenn $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = y^*$ und $\lim\limits_{y \to y^*} g(y) = z^*$,

dann $\lim\limits_{x \to x^*} \underbrace{g(f(x))}_{(g \circ f)(x)} = z^*$.

Def. 6.4:

Sei $D \subseteq K$ und $f: D \to K$

- f heißt stetig in $x^* \in D$, wenn $\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$,
- f heißt stetig, falls f in allen Punkten $x^* \in D$ stetig ist

Bsp.: (fortgesetzt)

(i) ... ist in jedem Punkt $x^* \in \mathbb{R}$ stetig, also f ist stetig

(ii) ... ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und unstetig auf $\mathbb{Z}$, also f ist nicht stetig

(iii) ... ist stetig auf ihrem Definitionsbereich, also stetig

Def. 6.5:

Sei $f: D \to K$ stetig und x^* Berührpunkt, aber nicht Element von D.

Wenn $\lim_{x \to x^*} f(x) = y^*$ existiert, so ist die Funktion

$$\tilde{f} : D \cup \{x^*\} \to K, \; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ y^* & \text{für } x = x^* \end{cases}$$

stetig und wir sagen „f lässt sich stetig auf x^* fortsetzen".

Satz 6.6:

Seien $f, g : D \mapsto K$ stetig in $x^* \in D$. Dann gilt $f \pm g, f \cdot g$, $\lambda \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ stetig in x^*.

für $\lambda \in K$

für $g(x^*) \neq 0$

Und f stetig in $z \in D$ genau dann wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ stetig in z.

Satz 6.7:

Sei $f: D \to K$ und $g: E \to K$ mit $f(D) \subseteq E$.

Dann gilt für $g \circ f : D \to K$, $x \mapsto g(f(x))$:
Wenn f stetig in x^* und g stetig in $f(x^*)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x^*.

Folgerung:

$\boxed{\text{Alle Polynomfunktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig}}$