Statistik

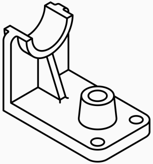
Vorlesung 3 - Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

08. April 2024

Hochschule Landshut

Motivation



Angenommen, wir wissen:

- $1 =$niO; $P(1) = 0.2\%$.
- Das BT wird auf 10 Maschinen mit gleichem Output produziert,der Defekt tritt nur bei Maschine 1 auf.

Wahrscheinlichkeit, dass ein BT defekt ist, wenn es auf Maschine 1 produziert wurde $= P(\text{“defekt”}|\text{produziert auf Maschine 1}) = 2\%$

$\Rightarrow$ Wissen, dass ein Ereignis eingetreten ist, kann die Wahrscheinlichkeit ändern, dass ein anderes eintritt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A) =$ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B, wenn ein anderes Ereignis A schon eingetreten ist?

		
	5	4
	2	1

- Kindergeburtstag mit 12 Kindern
- A = ein zufällig ausgewähltes Kind mag Süßes
- B = ein zufällig ausgewähltes Kind mag Saures

- Was sind $P(A)$ und $P(B)$?
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind Süßes mag?
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind Saures mag?
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind, das Süßes mag, auch Saures mag?

Antwort: Süßes oder Saures

			Σ
	5	4	9
	2	1	3
Σ	7	5	

- $|A| = 9, |B| = 7$
- $|\overline{A}| = 3, |\overline{B}| = 5$

- $P(A) = \frac{9}{12}, P(B) = \frac{7}{12}$
- $P(A \cap B) = \frac{5}{12}$
- Unter den 9 Kindern (A) mögen 5 auch Saures ($A \cup B$). Deswegen: $P(B|A) = \frac{A \cap B}{P(A)} = \frac{5}{9}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es seien (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \subset \Omega$ ein Ereignis mit $P(A) > 0$. Dann heißt

$$P_A(B) := P(B|A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad B \subset \Omega$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse

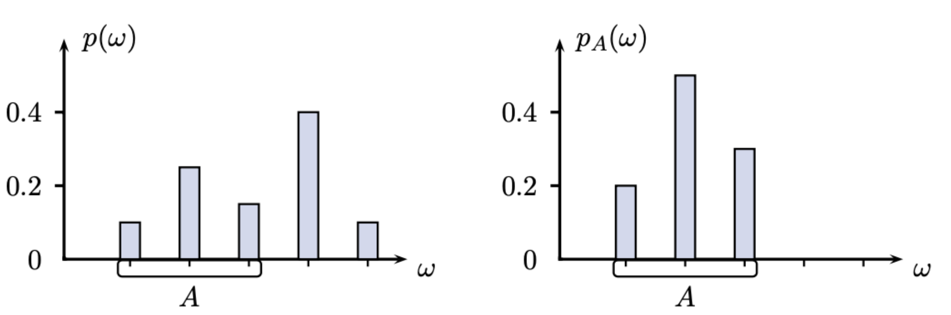


Abbildung 1: Übergang von P zu P_A

Ursprüngliche Verteilung $P(\omega)$

Ereignis A tritt ein $\Rightarrow$:

- für $\omega \notin A$ ist $P(\omega|A) = 0$,
- für $\omega \in A$ wird die Wahrsch. um Faktor $\frac{1}{P(A)}$ größer.

Aufgabe: Totale Wahrscheinlichkeit

4 Jahre	5 Jahre	6 Jahre
2	4	3
0	1	2

Kindergeburtstag mit 12 Kindern. Ereignisse:

- A = ein zufällig ausgewähltes Kind mag Süßes
- $B_1/B_2/B_3$ = ein zufällig ausgewähltes Kind ist 4/5/6 Jahre alt

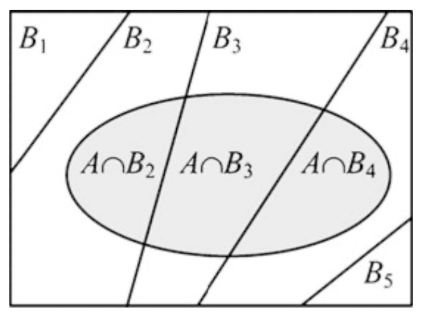
- Was sind $P(A \cap B_1), P(A \cap B_2), P(A \cap B_3)$?
- Berechne $P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$
- Was sind $P(A|B_1), P(A|B_2), P(A|B_3)$?
- Berechne $P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$?

Ergebnis: Totale Wahrscheinlichkeit

4 Jahre	5 Jahre	6 Jahre
2	4	3
0	1	2

- $P(A \cap B_1) = \frac{1}{6}, P(A \cap B_2) = \frac{1}{3}, P(A \cap B_3) = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \frac{3}{4} = P(A)$
- $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = 1, P(A|B_2) = \frac{4}{5}, P(A|B_3) = \frac{3}{5}$
- $P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = \frac{3}{4} = P(A)$

Mehrere Bedingungen



Man bekommt die Wahrscheinlichkeit von A als Summe der Stücke: Es ist $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \cdots (A \cap B_n)$ und damit gilt

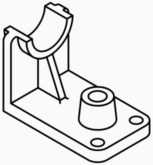
$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n).$$

Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ seien paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(B_i) > 0$ für alle i und $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. Dann gilt für alle Ereignisse $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i).$$

Beispiel: Bauteile

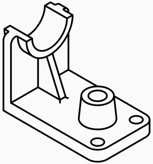


Ein Bauteil wird auf 2 verschiedenen Maschinen gefertigt (B_i=“Fertigung auf der i-ten”). $A =$ “defektes Bauteil”

- Maschine 1: 60% Prozent der Gesamtstückzahl, 0.4% davon defekt
- Maschine 2: 40% Prozent der Gesamtstückzahl, 0.2% davon defekt

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines defekten Bauteils insgesamt?

Antwort: Bauteile

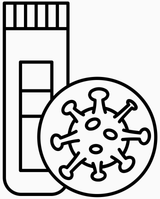


$P(B_1) = 0.6, P(A|B_1) = 0.004, P(B_2) = 0.4,$
$P(A|B_2) = 0.002.$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = p(B_1)p(A|B_1) + p(B_2)p(A|B_2) = 0.0032$$

Beispiel: Corona-Test



- Ereignis A: Der Corona-Test einer zufällig ausgewählten Person ist positiv.
- Ereignis B: Eine zufällig ausgewählte Person hat Corona.

- 1% der Bevölkerung sind erkrankt ($P(B) = 0.01$).
- Sie wissen von der Herstellerseite, dass der Corona-Test
  - bei einer tatsächlichen Erkrankung (B) mit 85% Wahrscheinlichkeit positiv ist (Ereignis A), also $P(A|B) = 0.85$.
  - in 1% bei gesunden Menschen positiv ausfällt, also $p(A|\overline{B}) = 0.01$.
- Sie fragen sich: Sind sie wirklich krank ($=$ Ereignis B) mit positivem Test? Sie fragen also nach $P(B|A)$.

Antwort: Corona-Test

- Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit:
  $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = 0.85 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot (1 - 0.01) = 0.0184.$

$$\Rightarrow \text{Satz von Bayes} P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.85 \cdot 0.01}{0.0184} \simeq 46\%$$

Zusammenfassung: Formel von Bayes

Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ seien paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(B_i) > 0$ für alle i und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. A sei ein Ereignis mit $P(A) > 0$. Dann gilt für alle $k = 1, \ldots, n$:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}.$$

Beispiel: Ziegenproblem

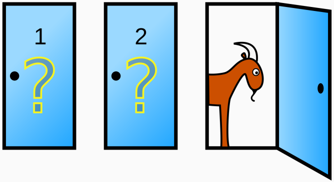


Abbildung 2: Ziegenproblem

Spielshow

- Hauptpreis hinter einer von drei Türen, Ziegen hinter den anderen beiden
- Kandidat wählt eine Tür; diese bleibt vorerst verschlossen
- Spielleiter öffnet eine der beiden restlichen Türen und es zeigt sich eine Ziege
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Kandidat den Hauptpreis, wenn er die ursprünglich gewählte Tür wechselt?

Bestimmten Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Ziegenproblem.

Lösung - Ziegenproblem

Ereignis $A = j$: Der Spielleiter öffnet Tür j.

Ereignis B_i: Der Preis ist hinter Tür i.

- A priori ist die Wahrscheinlichkeit für alle Türen gleich, also $P(B_i) = 0.3$.
- Nachdem der Kandidat Tür 1 gewählt hat, gibt es zwei Möglichkeiten:
  - Der Preis ist hinter Tür 1, also B_1. Dann hat der Spielleiter die Wahl, 2 oder 3 zu öffnen: $P(A = 2|B_1) = 0.5, P(A = 3|B_1) = 0.5$.
  - Der Preis ist nicht hinter Tür 1, sondern hinter Tür 2 (B_2). Dann hat der Spielleiter keine andere Wahl, als Tür 3 zu öffnen: $P(A = 2|B_2) = 0, P(A = 3|B_2) = 1$.

- $P(A = 3) = P(B_1)P(A = 3|B_1) + P(B_2)P(A = 3|B_2) = \frac{1}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
- $P(B_2|A = 3) = P(B_2) \cdot B(A = 3|B_2)/P(A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$
- $P(B_1|A = 3) = P(B_1) \cdot B(A = 3|B_1)/P(A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.5}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Wenn der Kandidat die Tür wechselt, ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit doppelt so groß!

Beispiele - Fehlerhafte Teile

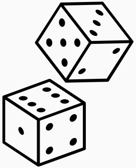
Ein Autohersteller bekommt Teile von 3 Lieferanten in unterschiedlichen Qualitäten

	Lieferant 1	Lieferant 2	Lieferant 3
Anteil	45%	35%	20%
Ausschuss	2%	3%	1%

Fragen

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil defekt ist?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Teil von Lieferant 1, 2, oder 3 kommt?

Beispiel: 2x Würfeln im Nebenraum



Im Nachbarraum werden zwei echte Würfel geworfen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt mindestens ein Würfel eine 6?
- Wir erhalten die Information, dass die Augensumme mindestens acht beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt nun mindestens einer der Würfel eine Sechs?

Beispiele - Diagnose einer Krankheit

Eine Krankheit tritt bei 0.5% der Bevölkerung auf. Ein Test spricht bei 99% der Kranken an. Bei 2% der Gesunden spricht der Test ebenfalls an.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem positiven Test krank ist?

Literatur

- Hartmann, Peter; Mathematik für Informatiker, Springer-Vieweg; 7. Auflage; 2019
- Henze, Norbert; Stochastik für Einsteiger; Springer; 10. Auflage; 2013