Aufgabenblatt 5

Statistik – Sommersemester 2024 – Prof. Dr. Sandra Eisenreich

Aufgabe 1. *

(a) Sie werfen 20 mal mit einer Münze und bekommen 6-mal Kopf, 14-mal Zahl. Was ist das statistische Modell, und was ist der Maximum Likelihood Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p von Zahl?

(b) Sie würfeln 20mal mit einem Würfel und erhalten 3-mal eine 1, 6-mal eine 2, 2-mal eine 3, 3-mal eine 4, 2-mal eine 5, und 4-mal eine 6. Was ist Ihr Schätzwert für den Erwartungswert der Zufallsvariable $X =$ “Augenzahl bei einem Mal Würfeln”?

(c) Wie ist der Schätzer für den Mittelwert definiert, wenn X_i das Ergebnis des i-ten Würfelns ist?

Aufgabe 2.

10-maliges Würfeln mit 2 Würfeln ergibt die Paare (2,4), (5,6), (2,2), (6,2), (2,6), (5,1), (5,6), (6,4), (4,4), (3,1).

- Berechnen Sie Mittelwert und Varianz für die Augensummen dieser Stichprobe.
- Geben Sie einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines “Pasches” an.
- Geben Sie einen Schätzwert für den Erwartungswert der Augensumme ab.
- Geben Sie einen Schätzwert für die Varianz der Augensumme ab.
- Zeigen Sie, dass bei idealen Würfeln die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen 0, 1 oder 2 Pasch vorkommen, bei über 75% liegt.
- Wie lange müssen Sie durchschnittlich auf einen Pasch warten?

Aufgabe 3.

Die Zufallsvariable X sei poissonverteilt mit unbekanntem Parameter λ. Ihnen liegt folgende Stichprobe vor: $x = (3,4,5,7,6)$ Was ist der Maximum Likelihood Schätzwert für den Parameter λ = Erwartete Anzahl der Vorkommnisse? Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Wie ist die Poisson-Verteilung definiert?
- Berechnen Sie aus der Stichprobe x die Loglikelihood Funktion LL_x in Abhängigkeit von λ.
- Leiten Sie die Loglikelihood Funktion $LL_x(\lambda)$ nach zweimal nach λ ab.
- Berechnen Sie die Nullstellen von $LL'_x(\lambda)$ und prüfen Sie nach, welche davon Maxima von LL_x sind.
- Das Maximum ist der Likelihood Schätzwert für λ.

Aufgabe 4.

Die Zufallsvariable X bezeichne die Wartezeit im Wartezimmer Ihres Hausarztes. Wir nehmen an, X ist exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$. Die letzten 5 Mal, als Sie beim Arzt waren, haben Sie 15, 20, 21, 16 und 13 Minuten warten müssen. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzwert für λ anhand dieser Stichprobe. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Wie ist die Dichte der Exponentialverteilung definiert?
- Berechnen Sie aus der Stichprobe x die Loglikelihood Funktion LL_x zur Dichte in Abhängigkeit von λ.
- Leiten Sie die Loglikelihood Funktion $LL_x(\lambda)$ nach zweimal nach λ ab.
- Berechnen Sie die Nullstellen von $LL'_x(\lambda)$ und prüfen Sie nach, welche davon Maxima von LL_x sind.
- Das Maximum ist der Likelihood Schätzwert für λ.

Wie lange müssen Sie im Schnitt bei Ihrem Hausarzt warten?

Aufgabe 5.

Wir führen Lineare Regression an einem einfachen Beispiel aus. Gegeben sei folgende drei Datenpunkte: $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = ((1,1), (2,2), (3,1))$.

- Malen Sie zuerst die Punkte auf und begründen Sie grafisch, warum die "Durschnittsgerade" parallel zur x-Achse sein muss. Hinweis: Symmetrie.
- Beschreiben Sie diese Gerade $f_\theta(x)$ mit nur einem Parameter θ.
- Als zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung nehmen wir dann die Normalverteilung $N(y|f_\theta(x), 1)$ an. Berechnen Sie die Loglikelihood-Funktion zur Stichprobe $\{(1,1), (2,2), (3,1)\}$.
- Berechnen Sie daraus den Maximum Likelihood-Schätzwert für θ.
- *** Angenommen, wir nehmen für θ die a-priori-Verteilung $P(\theta) = \mathcal{N}(0,1)$ an. Was ist dann der Maximum A Posteriori Schätzwert für θ?