Statistik

Vorlesung 6 - Diskrete Verteilungen

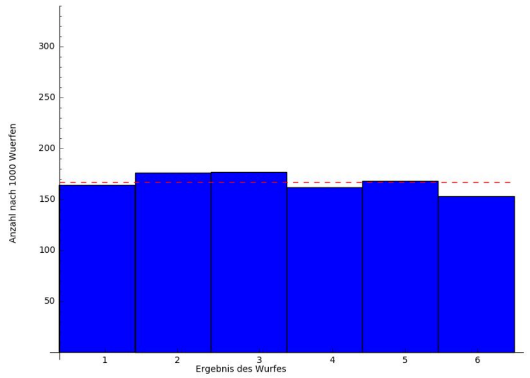
Prof. Dr. Sandra Eisenreich

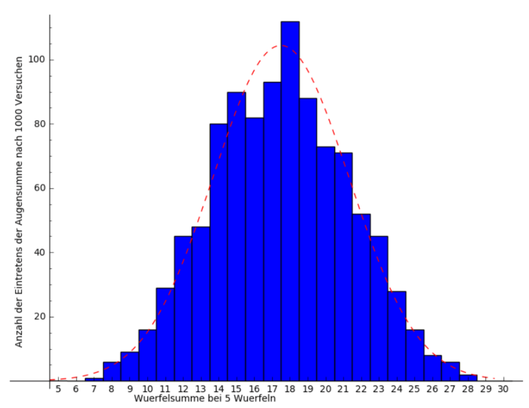
22./29. April 2024

Hochschule Landshut

Motivation

Daten haben gewisse Strukturen, genannt "Verteilungen".





Wenn man wissen will, welche Informationen in Daten stecken, muss man die richtige Verteilung finden.

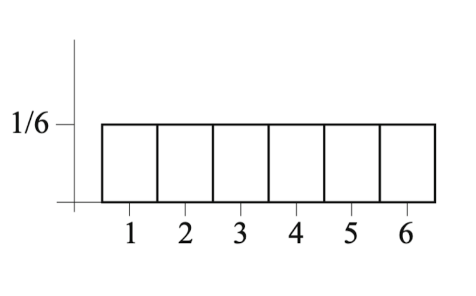
Agenda

1. Laplace-Experiment: Gleichverteilung
2. Bernoulli-Experiment: Binomialverteilung
3. Erster Treffer beim Bernoulli-Experiment: Geometrische Verteilung
4. Unabhängige Experimente mit mehreren Ausgängen: Kategoriale Verteilung und Multinomialverteilung
5. Ziehen ohne Zurücklegen: Hypergeometrische Verteilung
6. Poissonverteilung: Bernoulli-Experimente mit großem n und kleinem p
7. Zusammenfassung

Überblick: Verteilung von Laplace-Experimenten

Gleichverteilung

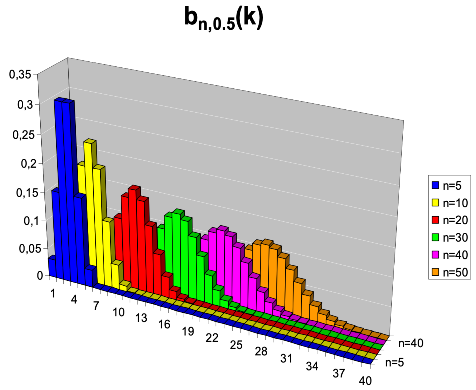
Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen
in einem Laplace-Experiment



Überblick: Verteilungen für Bernoulli-Experimente

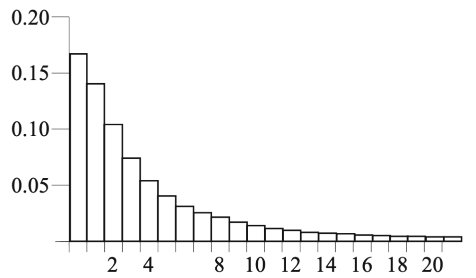
Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeit für k Treffer in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment



geometrische Verteilung

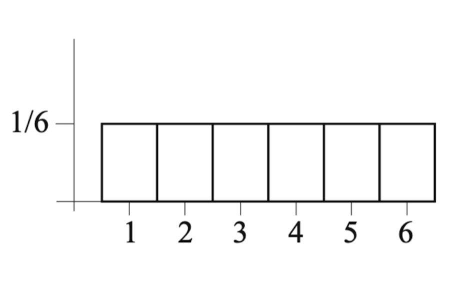
Wahrscheinlichkeit, dass beim k-ten von n Bernoulli Experimenten das erste Mal ein Treffer auftritt.



Überblick: Vertilung von Laplace-Experimenten

Gleichverteilung

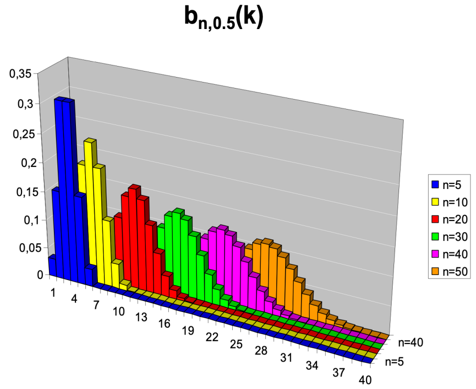
Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen
in einem Laplace-Experiment



Überblick: Verteilungen für Bernoulli-Experimente

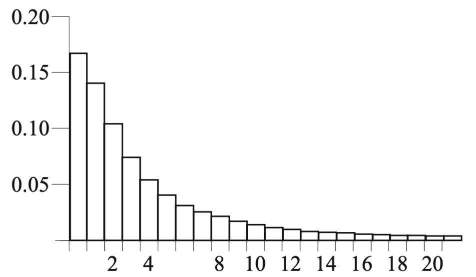
Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeit für k Treffer in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment



geometrische Verteilung

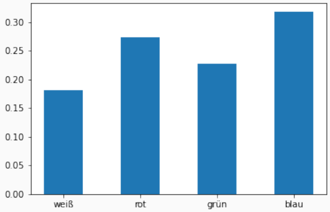
Wahrscheinlichkeit, dass beim k-ten von n Bernoulli Experimenten das erste Mal ein Treffer auftritt.



Überblick: Mehrere Kategorien als mögliche Ausgänge

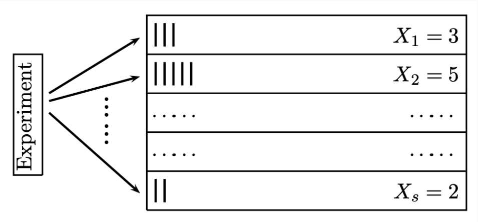
Kategoriale Verteilung

Ergebnis eines Experiments mit endlich vielen Ausgängen



Multinomialverteilung

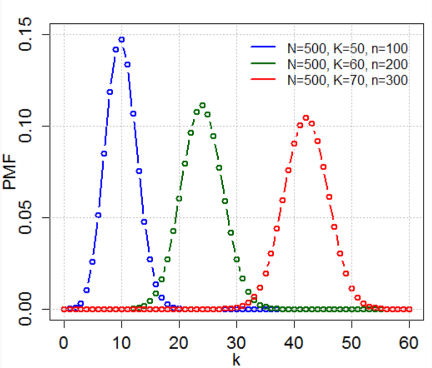
Wird ein Experiment mit endlich vielen Ausgängen n-mal unabhängig wiederholt, wie oft wird jeder Ausgang angenommen?



Überblick: Verteilungen mit Grenzwert Binomialverteilung

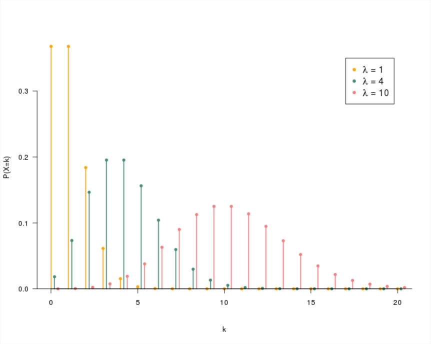
hypergeometrische Verteilung

Anzahl von schwarzen Kugeln beim Ziehen von N Kugeln ohne Zurücklegen von Schwarzen/Weißen Kugeln. Für große $N \simeq$ Binomialverteilung



Poisson-Verteilung

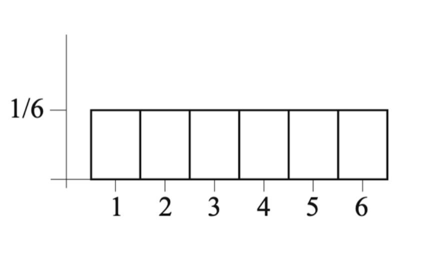
Für große n und kleine p nähert sich die Binomialverteilung der Poisson-Verteilung an.



Laplace-Experiment: Gleichverteilung

Die Gleichverteilung

X: Zufallsvariable, die den Ausgang eines Laplace-Experiments beschreibt. Dann sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich.



Definition (Gleichverteilung)

Sei X wie oben. Dann heißt X gleichverteilt, und

$$P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Erwartungswert und Varianz der Gleichverteilung

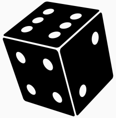
Für den Erwartungswert gilt dann:

$$E(X) = \sum_{x_i \in W(X)} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

und für die Varianz erhalten wir

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{1}{n} - E(X)^2$$

Beispiel: 1x Würfeln



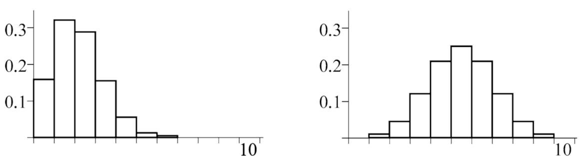
$$E(X) = \tfrac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5 \text{ und}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)-3.5^2 = 2.917 \Rightarrow \sigma = 1.7$$

Bernoulli-Experiment: Binomialverteilung

Anzahl von Treffern in n Bernoulli-Experimenten: Binomialverteilung

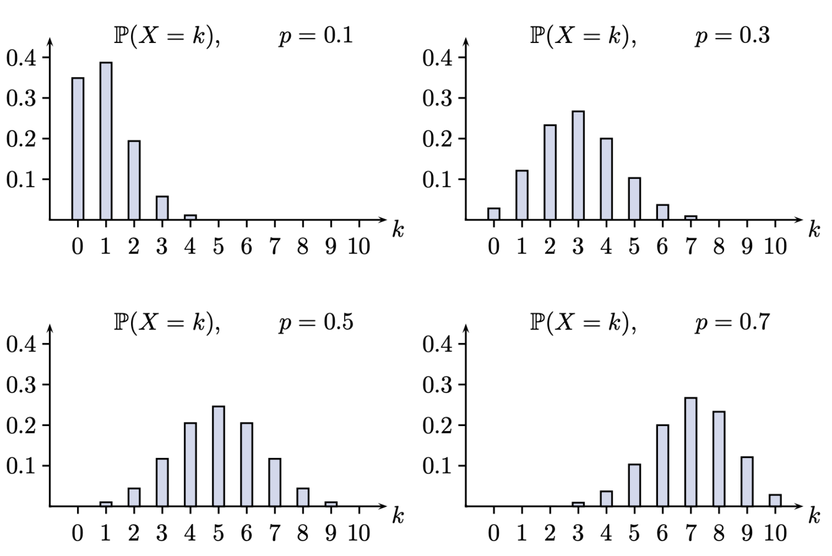
Wir betrachten nun ein n-stufiges Bernoulli-Experiment (z.B. Werfen einer Münze) mit Trefferwahrscheinlichkeit p; X = die Anzahl von "Treffern".

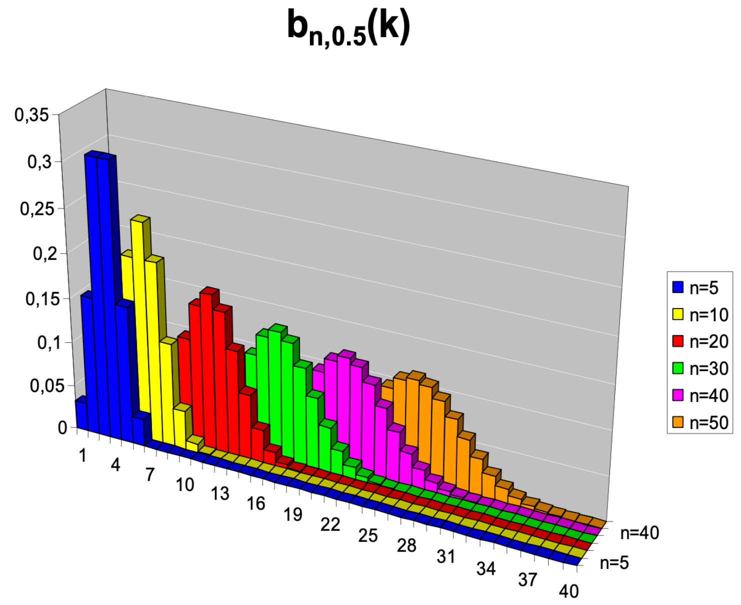


Eine Zufallsvariable X wie oben besitzt eine Binomialverteilung mit Parametern n und p, kurz $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ oder $b_{n,p}$-verteilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Binomialverteilung




$b_{n,0.5}(k)$
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
31
34
37
40
n=40
n=5
n=5
n=10
n=20
n=30
n=40
n=50

Rechengesetze zur Binomialverteilung

Additionsgesetz für die Binomialverteilung: Sind X und Y **unabhängige** Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit den Binomialverteilungen $X \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, so gilt

$$X + Y \sim \mathrm{Bin}(m + n, p)$$

Beispiel für Additionsgesetz: Ob man erst 2x würfelt und dann 3x, oder gleich 5x, ist für das Ergebnis egal!

Beispiel: Bitfolgen

In Kommunikationssystemen werden Nachrichten in eine Bitfolge umgewandelt, die an den Empfänger übertragen werden soll. Diese können jedoch durch Rauschen oder Überlagerung gestört werden. Angenommen, jedes Bit wird unabhängig von allen anderen mit Wahrscheinlichkeit p gestört wird, h.h. 0 wird in 1 und 1 in 0 umgewandelt. Die zu übertragenden Codewörter mögen jeweils aus k Bits bestehen.

Es werden n Wörter übertragen. Welche Verteilung besitzt die Anzahl X der nicht (d.h. in keinem Bit) gestörten Wörter?

Ergebnis: Bitfolgen

- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit ungestört ist, ist $1 - p$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass k Bits eines Worts ungestört sind, ist also $(1 - p)^k$.
- Wir überprügen n Wörter, das entspricht einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit gleicher Trefferwahrscheinlichkeit $(1 - p)^k$.
- Dadurch ist die Verteilung die Bernoulli-Verteilung

$$b_{n,(1-p)^k}(l) = \binom{n}{l}((1-p)^k)^l(1-((1-p)^k))^{1-l}$$

Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Erwartungswert und Varianz eines einzelnen Bernoulli-Experiments X mit Trefferwahrscheinlichkeit $P(X=1)=p$:

$$E(X)=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0=p, E(X^2)=p\cdot 1^2+(1-p)\cdot 0^2=p$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=p-p^2=p(p-1)$$

Rechenregel für n unabhängige Bernoulli-Experimente:

$$E(nX)=nE(X)=np; Var(nX)=n^2Var(X)=n^2p(p-1).$$

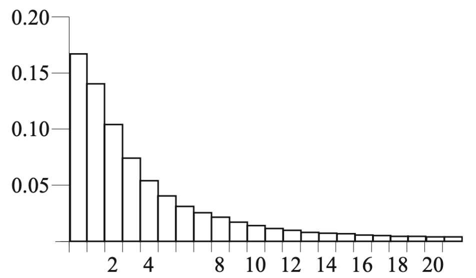
Für eine $b_{n,p}$-verteilte Zufallsvariable X gilt

- $E(X)=np$
- $Var(X)=np(1-p)$.

Erster Treffer beim Bernoulli-Experiment: Geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung beschreibt in einem Bernoulliexperiment die Wartezeit auf das erste Eintreten eines Treffers.



[1]

Eine Zufallsvariable X, die in einem Bernoulliexperiment angibt, beim wievielten Versuch das Ereignis A mit $P(A) = p$ zum ersten Mal eintritt, heißt geometrisch verteilt mit Parameter p. Es gilt

$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

[1] AdamSmithee at the English-language Wikipedia, CC BY-SA 3.0 http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/, via Wikimedia Commons

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung

Die geometrische Verteilung hat eine interessante Eigenschaft, die als Gedächtnislosigkeit bezeichnet wird:

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln die 6 zum ersten Mal nach k Versuchen eintritt ist unabhängig davon, ob ich gerade angefangen habe zu würfeln, oder ob ich bereits s vergebliche Versuche hinter mir habe.

$$P(\underbrace{X = s + k}_{\substack{\text{tritt bei Versuch } s+k \\ \text{zum ersten Mal ein}}} \mid \underbrace{X > s}_{\substack{\text{ist bei den ersten } s \\ \text{Versuchen nicht eingetreten}}}) = P(\underbrace{X = k}_{\substack{\text{tritt bei Versuch } k \\ \text{zum ersten Mal ein}}})$$

Damit:

$$\begin{aligned}
P(X = s + k | X > s) &= \frac{P(\{X = s + k\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)} = \frac{P(\{X = s + k\})}{P(X > s)} \\
&= \frac{p(1-p)^{s+k-1}}{(1-p)^s} = p(1-p)^{k-1} \\
&= P(X = k)
\end{aligned}$$

Wegen der Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung ist es sinnlos etwa im Roulette auf eine Zahl zu setzen, die lange nicht mehr gefallen ist. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Zahl ist immer $1/37$, auch wenn sie schon lange überfällig ist.

Erwartungswert und Varianz der geometrischen Verteilung

Theorem

Der Erwartungswert der geometrischen Verteilung ist

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

und die Varianz ist gegeben durch

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Herleitung

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^k \\
&= p \cdot (1-p) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Bekannt aus der Analysis:

- Für $|x| < 1$, ist $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe).

Leiten wir $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ links und rechts ab, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ (Quotientenregel)}$$

Ersetze x durch $1-p$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2},$$

also

$$E(X) = p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

Mit einem ähnlichen Trick erhält man die Varianz:

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Unabhängige Experimente mit mehreren Ausgängen: Kategoriale Verteilung und Multinomialverteilung

Kategoriale Verteilung: Beispiel

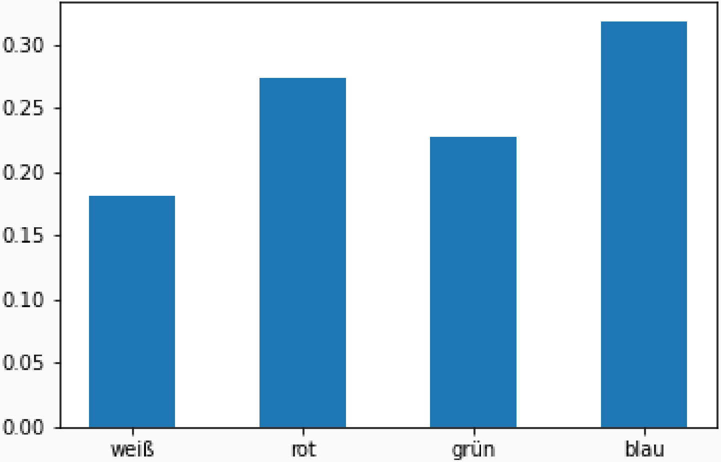
Zufallsexperiment mit $K \geq 2$ verschiedenen Ausgängen (= Kategorien). Einen Ausgang $k \in \{1, \ldots, K\}$ wird Treffer k-ter Art genannt.

Beispiel: In einer Urne sind 4 weiße, 6 rote, 5 grüne, 7 blaue Kugeln, wir ziehen einmal. Die Zufallsvariable X beschreibe die gezogene Farbe.

$$p_1 := p(\text{weiß}) = \frac{4}{22}, p_2 := p(\text{rot}) = \frac{6}{22}, p_3 := p(\text{grün}) = \frac{5}{22}, p_4 := p(\text{blau}) = \frac{7}{22}.$$

$$P(X = k) = \begin{cases} p_1 & k = 1 \\ p_2 & k = 2 \\ p_3 & k = 3 \\ p_4 & k = 4 \end{cases}$$

Kategoriale Verteilung



Kategoriale Verteilung

Definition (Kategoriale Verteilung)

Eine Zufallsvariable X beschreibe den Ausgang eines Zufallsexperiments mit endlich vielen möglichen Ergebnissen, die wir mit $\{1, \ldots, K\}$ bezeichnen. Es ist also

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_j \in \{1, 2, \ldots, K\} \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

Sei $P(X = i) = p_i$ und $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$. Dann besitzt X die Kategoriale Verteilung

$$P(X = k) = \mathrm{Cat}_p(k) = \begin{cases} p_1 & k = 1 \\ \vdots & \\ p_K & k = K \end{cases}$$

Multinomialverteilung

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_j \in \{1, 2, \ldots, s\} \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

und es zählen alle Tupel, in denen i_1-mal 1 vorkommt, i_2-mal 2, etc.

Die Anzahl solcher Tupel $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ lässt sich bestimmen, indem

- zunächst i_1 aller n Stellen für die 1
- danach i_2 der restlichen $n - i_1$ Stellen für die 2
- usw.

ausgewählt werden. So erhalten wir mit der Multiplikationsregel

$$\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\cdots\binom{n-i_1-i_2-\cdots-i_{s-1}}{i_s} = \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_s!}$$

Dies ist der Multinomialkoeffizient für $i_1, \ldots, i_s \in \mathbb{N}_0$, $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$.

Definition (Multinomialverteilung)

Der Zufallsvektor $(X_1, \ldots, X_s)$ besitzt eine Multinomialverteilung mit Parametern n und $p_1, \ldots, p_s$, falls für $i_1, \ldots, i_s \in \mathbb{N}_0$ mit $i_1 + \cdots + i_s = n$ die Identität

$$P(X_1 = i_1, \ldots, X_s = i_s) = \frac{n!}{i_1! i_2! \cdots i_s!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_s^{i_s}$$

gilt. Für einen multinomialverteilten Zufallsvektor schreiben wir

$$(X_1, \ldots, X_s) \sim \mathrm{Mult}(n; p_1, \ldots, p_s)$$

Übung

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k verschiedene Teilchen so auf m Fächer zu verteilen, dass im j-ten Fach k_j Teilchen liegen?

Antwort: m Fächer = Kategorien, k = Anzahl von Experimenten, gesucht: $P(X = (k_1, \ldots, k_m))$

$$P(X = (k_1, \ldots, k_m)) = \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

Erwartungswert und Varianz der Multinomialverteilung

Der Erwartungswert eines multinomialverteilten Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_K)$ ist gegeben durch

$$E((X_1, \dots, X_K)) = n(p_1, \dots, p_K)$$

und seine Kovarianzmatrix ist gegeben durch

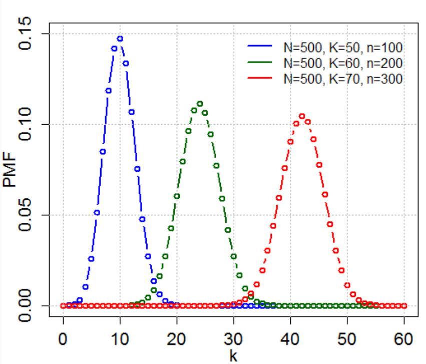
$$Cov((X_1, \dots, X_K)) = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \dots & -np_1p_K \\ -np_2p_1 & np_2(1-p_2) & \dots & -np_2p_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -np_Kp_1 & -np_Kp_2 & \dots & np_K(1-p_K) \end{pmatrix}$$

Herleitung: siehe Übungsaufgabe.

Ziehen ohne Zurücklegen: Hypergeometrische Verteilung

Hypergeometrische Verteilung

Die hypergeometrische Verteilung gehört zum Urnenexperiment "Ziehen ohne Zurücklegen": Eine Urne enthalte N Kugeln, S davon seien schwarz, nx Ziehen ohne Zurücklegen.
$Y =$ Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln



Definition

Die Zufallsvariable Y wie oben heißt hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, S und n, und

$$h_{N,S,n}(k) := P(Y = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Zusammenhang hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung

Theorem

Ist $S < N$, $n < N$ und sind n und $p = S/N$ konstant, so gilt für $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\lim_{N \to \infty} h_{N,S,n}(k) = b_{n,p}(k)$$

Das heißt: Für große Zahlen N unterscheiden sich Binomialverteilung und hypergeometrische Verteilung wenig.

Sei X hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, S und n, es sei $p := S/N$. Dann gilt

$$E(X) = np, \quad Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Aufgabe: Vergleiche Erwartungswert und Varianz mit der der Binomialverteilung und betrachte $n \to N$.

Beispiel: Tombola

10 Verkäufer, jeder hat 50 Lose, davon 20 Gewinne. Ich kaufe 10 Lose.

Was ist besser, alle Lose bei einem Verkäufer kaufen oder bei jedem Verkäufer 1 Los?

Ergebnis: Tombola

Alle bei einem: Experiment Ziehen ohne Zurücklegen. $n = 10$, $N = 30$, $S = 20$ (Gewinne), $p = 2/5$

$$E(X) = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4, \quad Var(X) = 10 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \frac{50-10}{49} = 1.96$$

Bei jedem Verkäufer 1 Los: Bernoulliexperiment, jedesmal gleiche Ausgangsposition. $n = 10$, $N = 50$, $S = 20$, $p = 2/5$

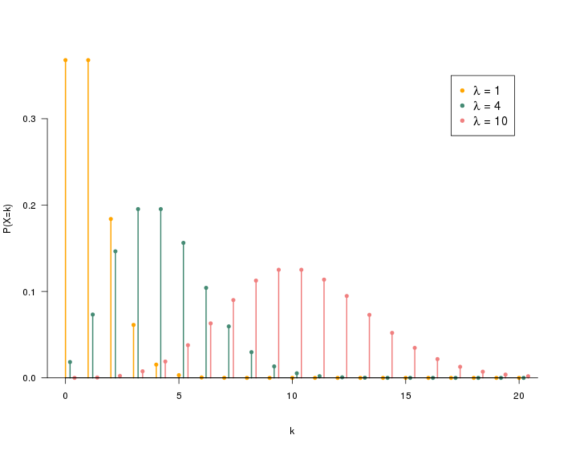
$$E(X) = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4, \quad Var(X) = 10 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = 2.4$$

Poissonverteilung: Bernoulli-Experimente mit großem n und kleinem p

Die Poissonverteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt Poisson-verteilt mit Parameter λ, $X \sim \text{Po}(\lambda)$, wenn

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$



[a]

[a] Daticien, CC BY-SA 4.0 https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0

Poisson- und Binomialverteilung

Für große n und kleine p sind Binomialkoeffizienten schlecht zu berechnen. Hier gilt folgende Rechenregel:

- Ist $np = \lambda$ konstant, so gilt $\lim_{n\to\infty} b_{n,p}(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
- Rechenregel (wichtig!): Für $\lambda = n \cdot p \leq 10$ und für $n \geq 1500 \cdot p$ kann die Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung ersetzt werden.

Vergleich Binomial- und Poisson-Verteilungen

Für $n = 10$ gibt es noch Unterschiede, die allerdings für große n fast verschwinden.

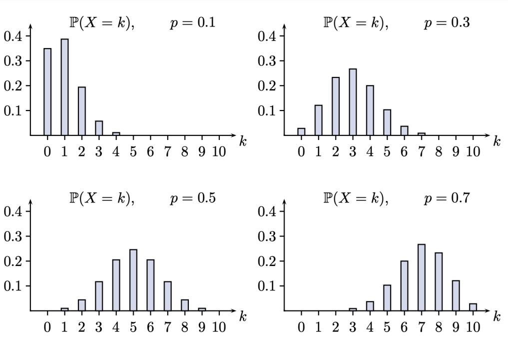


Abbildung 1: Stabdiagramme von Binomial-Verteilungen

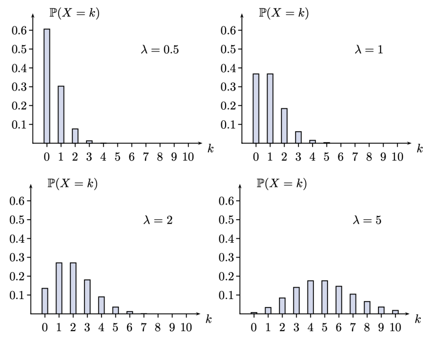


Abbildung 2: Stabdiagramme von Poisson-Verteilungen

Eigenschaften der Poisson-Verteilung

(a) Ist X Poisson-Verteilt mit Parameter λ, d.h. $X \sim \text{Po}(\lambda)$, so gilt: $E(X) = \lambda$ und $Var(X) = \lambda$.

(b) Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit den Poisson-Verteilungen $X \sim \text{Po}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Po}(\mu)$, so gilt das Additionsgesetz

$$X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$$

Auftreten der Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung kommt immer dann als Verteilungsmodell in Betracht, wenn gezählt wird

- wie viele von vielen möglichen
- aber einzeln sehr unwahrscheinlichen Ereignissen

eintreten.

Beispiele:

- Anzahl von Gewittern innerhalb eines festen Zeitraums in einer bestimmten Region
- Anzahl von Unfällen, bezogen auf eine gewisse große Population und eine festgelegte Zeitdauer
- Anzahl fehlerhafter Teile in einer gewissen Produktionsserie

Beispiel: Erdbeben

Man beobachtet pro Jahr im Mittel ein Erdbeben der Mindeststärke 8 auf der Richter-Skala. Wir nehmen an, dass

- die Anzahl solcher Erdbeben pro Jahr approximativ Poisson-verteilt ist
- die entsprechenden Anzahlen in unterschiedlichen Jahren stochastisch unabhängig sind

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es im nächsten Jahr mehr als ein solches Erdbeben?

(b) Welche Verteilung besitzt die Anzahl X derjenigen unter den nächsten 100 Jahren, in denen mehr als zwei solcher Erdbeben stattfinden?

Ergebnis: Erdbeben

$\lambda = 1$

(a) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} - e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} \simeq 0.264$

(b) Mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.264$ finden in einem Jahr mehr als 2 Erdbeben statt. Die Anzahl von Erdbeben in zwei aufeinanderfolgenden Jahren sind unabhängig voneinander. Wir haben hier also ein 100-stufiges Bernoulli-Experiment, die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $P(X = k) = b_{100,0.264}(k)$.

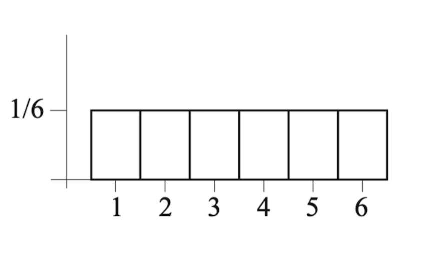
Zusammenfassung

Überblick: Verteilung von Laplace-Experimenten

Gleichverteilung

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$\mu = E(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$, $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

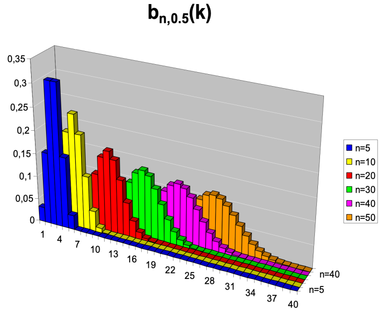


Überblick: Verteilungen für Bernoulli-Experimente

Binomialverteilung

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

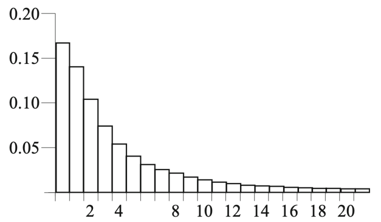
$E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.



geometrische Verteilung

$$P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

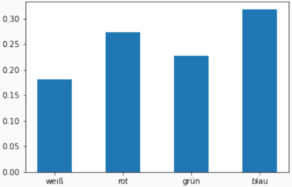
$E(X) = \frac{1-p}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$



Überblick: Mehrere Kategorien als mögliche Ausgänge

Kategoriale Verteilung

$$\mathrm{Cat}_p(k) = \begin{cases} p_1 & k = 1 \\ \vdots & \\ p_K & k = K \end{cases}$$



Multinomialverteilung

$$P(X_1 = i_1, \ldots, X_s = i_s) = \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_s!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_s^{i_s}$$

$E((X_1, \ldots, X_K)) = n(p_1, \ldots, p_K)$, Kovarianz:

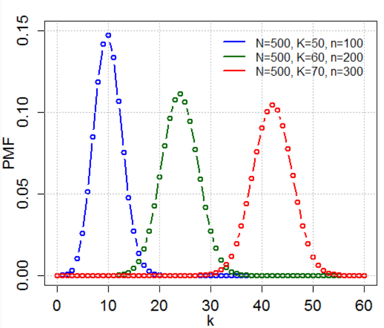
$$\begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & \ldots & -np_1 p_K \\ -np_2 p_1 & \ldots & -np_2 p_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -np_K p_1 & \ldots & np_K(1-p_K) \end{pmatrix}$$

Überblick: Verteilungen mit Grenzwert Binomialverteilung

hypergeometrische Verteilung

$$h_{N,S,n}(k) := P(Y = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

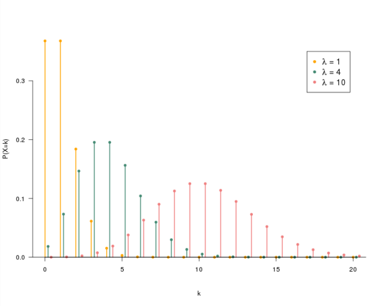
$$E(X) = np, \quad Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$



Poisson-Verteilung

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda, Var(X) = \lambda$$



Literatur

- Hartmann, Peter; Mathematik für Informatiker, Springer-Vieweg; 7. Auflage; 2019
- Henze, Norbert; Stochastik für Einsteiger; Springer; 10. Auflage; 2013