Statistik

Vorlesung 2 - Kombinatorik: Wahrscheinlichkeitsberechnung durch Abzählen

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

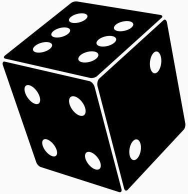
18./25. März 2024

Hochschule Landshut

Agenda

Laplace Experimente

Motivation Laplace Raum



Laplace Experimente sind wie 1x Würfeln mit einem fairen Würfel (jedes Ergebnis gleichwahrscheinlich) oder Werfen einer ungezinkten Münze:

- ein Experiment kann nur endlich viele Ergebnisse haben (1,2,3,4,5,6)
- alle diese Einzelereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{6} = \frac{1}{\text{Anzahl von möglichen Ergebnissen}})$

Achtung: nicht Ergebnis mit Ereignis verwechseln!

Laplace-Raum

Definition

Ein Laplace-Raum (der Ordnung n) ist ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit:

- endlichem Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$,
- und gleicher Wahrscheinlichkeit auf allen Einzelereignissen

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n},$$

Dann heißt P die (diskrete) Gleichverteilung auf Ω.

Folgerungen für Laplace Räume

Ist A eine Teilmenge von Ω mit k Elementen, dann gilt

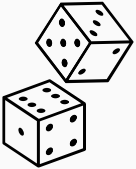
$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{k}{n}.$$

Damit erhalten wir für jedes $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten durch Abzählen von Ergebnissen heißt Kombinatorik.

Beispiel: 2x Würfeln - ein Laplace Raum?



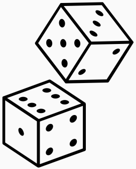
Beispiel: Wir würfeln mit 2 Würfeln und interessieren uns für die Würfelsumme.

Ergebnismenge: $\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$ Frage: Ist das Experiment mit dieser Ergebnismenge ein Laplace Raum?

Nein! Keine gleichen Wahrscheinlichkeiten, z.B. gilt $P(\{2\}) \neq P(\{6\})$.

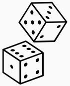
Frage: Wie kann man die Ergebnismenge schreiben, damit jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist (Laplace Setting)?

Beispiel: 2x Würfeln - ein Laplace-Raum!



$$
\text{Wir setzen}\quad \Omega = \begin{array}{l} \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),\\ (2,1),(2,2),\ldots,(2,6)\\ \vdots \\ (6,1),(6,2),\ldots(6,6)\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2 \end{array}
$$

- Hier sind die Ereignisse Paare von Würfen und es gilt $|\Omega| = 36$.
- Jedes der Elementarereignisse hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $1/36$.



So berechnen wir die Wahrscheinlichkeit der Augensummen:

$$\begin{aligned}
P(\text{Augensumme} = 2) &= P(\{(1,1)\}) = 1/36 \\
P(\text{Augensumme} = 3) &= P(\{(1,2),(2,1)\}) = 2/36 \\
P(\text{Augensumme} = 7) &= P(\{(1,6),(2,5),\ldots,(6,1)\}) = 6/36
\end{aligned}$$

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\text{Augensumme} = m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\Rightarrow$ Schreibe die Ergebnisse von mehreren Laplace-Experimenten hintereinander immer als Tupel!

Beispiel: Lotto 6 aus 49

Bei der Ziehung der Gewinnzahlen in zeitlicher Reihenfolge gibt es für die gezogenen Zahlen $(a_1, \ldots, a_6)$

49 Möglichkeiten für die Wahl von a_1,
48 Möglichkeiten für die Wahl von a_2,
47 Möglichkeiten für die Wahl von a_3,
46 Möglichkeiten für die Wahl von a_4,
45 Möglichkeiten für die Wahl von a_5,
44 Möglichkeiten für die Wahl von a_6,

und damit insgesamt $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10.068.347.520$ Möglichkeiten.

Dies gilt allgemein:

Rechenregel für Laplace Experimente: Multiplikationsregel

Werden n viele Laplace Experimente durchgeführt, schreibe den Ergebnisraum als eine Menge von Tupeln $(a_1, \ldots, a_n)$. Hat ein Ereignis A

j_1 Möglichkeiten für die Wahl von a_1,
j_2 Möglichkeiten für die Wahl von a_2,
$\vdots$ etc.

so hat A insgesamt $j_1 \cdot j_2 \cdot \ldots \cdot j_n$ Tupel als Elemente. Dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit durch "Abzählen" von Tupeln wie oben berechnen:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Beispiel: Geburtstagsproblem

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass k Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, wenn keiner von ihnen in einem Schaltjahr geboren ist?

- Wie sieht Ω aus und wie viele Elemente hat Ω?
- Wenn A_k das Ereignis darstellt, dass die Geburtstage auf k verschiedene Tage fallen, wie viele Elemente hat A_k?
- Was ist also die Antwort auf obige Frage?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der k Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Ergebnis: Geburtstagsproblem

Antworten:

- $\Omega = \{(d_1, \dots, d_k) | d_i \text{ ist Datum eines Tags im Jahr}\} \Rightarrow |\Omega| = 365^k$?
- $A_k = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)$
- $\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k}$
- $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k}$

Beispiel für verschiedene Arten von Tupeln

- *k*-mal Würfeln mit Reihenfolge: *k*-Tupel mit Einträgen aus $\{1, \ldots, 6\}$
- Ziehen von Lottozahlen mit Reihenfolge: 6-Tupel mit Einträgen aus $\{1, \ldots, 49\}$, die paarweise verschieden sind.
- *k* Würfel in einem Becher (ohne Reihenfolge, also nach Größe sortiert): *k*-Tupel mit Einträgen aus $\{1, \ldots, 6\}$, mit $\leq$ sortiert
- Lotto ohne Reihenfolge: 6-Tupel mit Einträgen aus $\{1, \ldots, 49\}$, mit $<$ sortiert

Permutationen, Kombinationen

Ist M eine n-elementige Menge von Zahlen, so definieren wir

- $$\begin{aligned} \mathrm{Per}_k^n(mW) &= k\text{-Permutationen aus } M \text{ mit Wiederholung} \\ &= M^k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) | a_i \in M \text{ für } i = 1, \dots, k\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathrm{Per}_k^n(oW) &= k\text{-Permutationen aus } M \text{ ohne Wiederholung} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in M^k | a_i \neq a_j \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq k\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathrm{Kom}_k^n(mW) &= k\text{-Kombinationen aus } M \text{ mit Wiederholung} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in M^k | a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathrm{Kom}_k^n(oW) &= k\text{-Kombinationen aus } M \text{ ohne Wiederholung} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in M^k | a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n\} \end{aligned}$$

Frage: Was ist die Mächtigkeit dieser Mengen, wenn wir die Multiplikationsregel nutzen?

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

- $\text{Per}_k^n(mW)$: an jeder Stelle n Möglichkeiten
- $\text{Per}_k^n(oW)$: 1. Stelle: n, 2. Stelle: $(n-1)$, 3. Stelle: $n-2$, ... i-te Stelle: $(n-i+1)$
- $\text{Kom}_k^n(oW)$: ein Tupel entspricht der Auswahl von k aus n Elementen.
- $\text{Kom}_k^n(mW)$: ist, als würden wir k Elemente auswählen aus der Menge, die entsteht, wenn wir der Menge M die ersten $k-1$ gewählten Elemente nochmal hinzufügen.

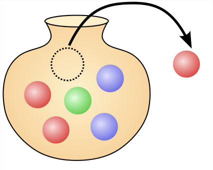
Erinnerung: Es gilt folgende Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Grundformeln der Kombinatorik

	Reihenf.	Wiederh.	Anzahl Elemente	Beispiel
$\mathrm{Per}_k^n(mW)$	mit	mit	n^k	Würfeln mit Reihenfolge
$\mathrm{Per}_k^n(oW)$	mit	ohne	$n \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	Lotto mit Reihenfolge
$\mathrm{Kom}_k^n(mW)$	ohne	mit	$\binom{n+k-1}{k}$	Würfeln ohne Reihenfolge
$\mathrm{Kom}_k^n(oW)$	ohne	ohne	$\binom{n}{k}$	Lotto ohne Reihenfolge

Urnen-Modelle



In einer Urne liegen von 1 bis n nummerierte Kugeln. Wir betrachten vier verschiedene Arten, k Kugeln aus dieser Urne zu ziehen (mit oder ohne Reihenfolge, mit oder ohne Zurücklegen).

Urnenmodell:

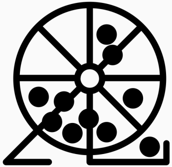
Reihenfolge	Zurücklegen	Tupel	Formel
mit	mit	$\mathrm{Per}_k^n(mW)$	n^k
mit	ohne	$\mathrm{Per}_k^n(oW)$	$n \cdots (n-k+1)$
ohne	mit	$\mathrm{Kom}_k^n(mW)$	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne	ohne	$\mathrm{Kom}_k^n(oW)$	$\binom{n}{k}$

Aufgabe - Urnenmodell

- Formulieren Sie den mehrfach hintereinander ausgeführten Würfelwurf in einem Urnenmodell.
- Von k Personen werden in einer anonymen Befragung die Geburtsmonate festgestellt. Welches Urnen-Modell liegt hier vor? Wie viele Ergebnisse einer solchen Befragung sind möglich?

Ergebnis - Urnenmodell

- k-facher Würfelwurf $=$ k-faches Ziehen aus einer Urne mit 6 mit $\{1,\ldots,6\}$ markierten Kugeln mit Zurücklegen und merken der Reihenfolge ($Per_k^6(mW)$).
- Es gibt (mit Schaltjahren) 366 mögliche Geburtstage, diese sind die Kugeln in der Urne, auf die wir die Personen aufteilen. Da mehrere Personen am gleichen Tag Geburtstag haben können, ziehen wir mit Zurücklegen. Da die Befragung anonym ist, ist die Reihenfolge der Ergebnisse egal, daher ist das Ergebnis ohne Reihenfolge. Die Ergebnisse entsprechen also den Kombinationen mit Wiederholungen $Kom_k^{366}(mW)$.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim *Lotto* 6 *aus* 49

(a) die zweite gezogene Zahl größer als die erste?

(b) die dritte gezogene Zahl größer als die ersten beiden?

(c) die erste gezogene Zahl die kleinste aller 6 Gewinnzahlen?

Ergebnis - Abzählen

(a) Hier suchen wir die Mengen aller Tupel $A = \{(i,j) \in \{1,\dots,49\} | j > i\}$ unter allen möglichen Tupeln $\Omega = \{(i,j) \in \{1,\dots,49\} | i \neq j\}$. Schreiben wir alle möglichen Tupel in ein Raster (ohne die Diagonale)

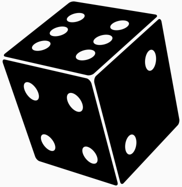
$$\begin{array}{ccccc} & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,49) \\ (2,1) & & (2,3) & \dots & (2,49) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (49,1) & (49,2) & (49,3) & \dots & \end{array}$$

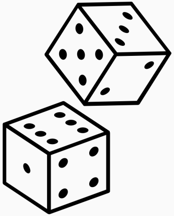
so sehen wir dass es in A genau halb so viele gibt wie in Ω. $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$.

(b) In einem Tupel (i,j,k) mit unterschiedlichen Einträgen gibt es immer genau eine größte Zahl. Aus Symmetriegründen ist die Wahrscheinlichkeit gleich groß, dass die größte Zahl an der ersten, zweiten oder dritten Stelle steht. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie an der dritten ist, ist also $\frac{1}{3}$.

(c) Aus genau dem gleichen Grund wie bei (b) ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$

Aufgabe - Frage des Chevalier der Meré, 1654





Sollte man beim Spiel mit einem fairen Würfel eher auf das Eintreten mindestens einer Sechs in vier Würfen oder beim Spiel mit zwei fairen Würfeln auf das Eintreten mindestens einer Doppelsechs in 24 Würfen setzen?

Ergebnis - Frage des Chevalier der Meré, 1654

Ereignis $A =$ “mind. eine 6 in 4 Würfen mit einem Würfel”
Ereignis $\overline{A} =$ “keine 6 in 4 Würfen mit einem Würfel”,
$P(\overline{A}) = \frac{5}{6}^4 \simeq 0.48225 \Rightarrow P(A) = 1 - 0.48225 \simeq 0.51775$

Ereignis $B =$ “mind. eine Doppel-Sechs in 24 Würfen mit zwei Würfeln”
Ereignis $\overline{B} =$ “keine Doppel-6 in 24 Würfen mit einem Würfel”; Die Wahrscheinlichkeit für eine Doppel-6 in einem Wurf ist $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Die Wahrscheinlichkeit keine Doppel-6 zu erhalten ist also $\frac{35}{36}$. $\Rightarrow P(\overline{B}) = (\frac{35}{36})^2 4 \simeq 0.508596$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) \simeq 0.491404$$

Es ist also wahrscheinlicher, mindestens eine 6 in 4 Würfen zu erhalten als eine Doppel-6 in 24 Würfen.

Unabhängige Ereignisse

Motivation - Unabhängige Ereignisse

Zweimaliges Würfeln: das zweite Ergebnis hängt nicht vom ersten ab.
Zweimal ziehen aus einer Urne mit drei unterschiedlichen Kugeln: hier schon!

> Wird ein Zufallsexperiment unter den gleichen Ausgangsbedingungen mehrfach wiederholt (etwa Würfeln, Lottospielen oder Roulette), so sind die Ereignisse der einzelnen Zufallsexperimente unabhängig voneinander.

Was bedeutet dies statistisch?

Unabhängige Ereignisse

Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt:

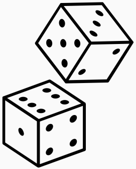
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen (vollständig) unabhängig, wenn gilt:

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{j_m})$$

  für jede mindestens zweielementige Menge $\{j_1, \ldots, j_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Beispiel - 2x Würfeln



Betrachte die Ereignisse

A: Erster Wurf zeigt gerade Zahl

B: Zweiter Wurf zeigt ungerade Zahl

C: Augensumme ist gerade

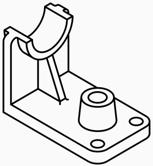
- Sind A,B und C paarweise unabhängige Ereignisse?
- Sind A,B und C vollständig unabhängig?

Ergebnis - 2x Würfeln

- Es gilt $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ und $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = 1/4$. Damit gilt: A und B sind unabhängig, B und C sind unabhängig, A und C sind unabhängig.
- $P((A \cap B) \cap C) = 0 \neq P(A \cap B)P(C) = P(A)P(B)P(C)$. Daher sind sie nicht vollständig unabhängig.

Bernoulli-Experimente

Motivation: Bauteil-Qualität



Produktion von Bauteilen:

- iO (in Ordnung) = 0
- niO (nicht in Ordnung) = 1 mit P(1)=0,2%

Die Qualität von je zwei Bauteilen sei unabhängig.

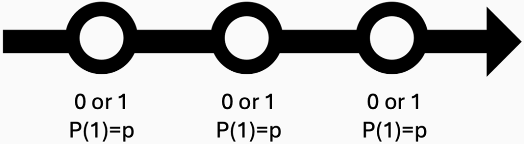
$\Rightarrow$ 1000 unabhängigen Zufallsexperimente mit Ergebnis 0 oder 1 und konstanter Nietenwahrscheinlichkeit = Bernoulli-Experiment

$$\Omega = \{0,1\}^{1000} = \{(a_1,\dots,a_{1000}) | a_i \in \{0,1\}\}$$

Frage: Wie viele Bauteile von 1000 produzierten sind defekt?

Antwort: Es müssen nicht zwei sein! Wie berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten?

Bernoulli-Experiment



Bei einem Zufallsexperiment trete das Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p ein. Das Experiment werde n-mal wiederholt. Sind die Ereignisse "A tritt beim i-ten Versuch ein" alle (vollständig) unabhängig, so heißt es Bernoulli-Experiment. Das Ereignis A ($=$ Treffer) wird mit 1, $\overline{A}$ ($=$ Niete) mit 0 bezeichnet.

Beispiele

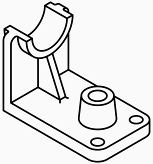
Welche der folgenden Experimente sind Bernoulli-Experimente?

- mehrmaliges Würfeln
- Ziehen von Kugeln aus einer Urne *mit* Zurücklegen
- Ziehen von Kugeln *ohne* Zurücklegen

Antwort:

- ja
- ja
- nein

Bauteil-Beispiel fortgesetzt



Bernoulli-Experiment mit $1 =$ niO Bauteil, P(1)$=$ 0,2%:

$$\Omega = \{0,1\}^{1000} = \{(a_1, \ldots, a_{1000}) | a_i \in \{0,1\}\}$$

Jedes Tupel gleichwahrscheinlich $\rightarrow$ Laplace!

$P(1,1,0,\ldots,0) = p^2 \cdot (1-p)^{1000-2}$ Dasselbe gilt für alle Tupel mit exakt zwei 1-ern.
Frage: Wie viele solche Tupel gibt es?
Antwort: $\binom{1000}{2}$.

$$\Rightarrow P(\text{Anzahl niO BT} = 2 \text{ von } 1000) = \binom{1000}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{1000-2}$$

Das gilt genauso allgemein!

Binomialverteilung

In einem Bernoulli-Experiment mit Umfang n sei die Trefferwahrscheinlichkeit gegeben durch p. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Treffer genau k-mal eintritt gleich

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: b_{n,p}(k)$$

Die Funktion $b_{n,p}(k)$ heißt Binomialverteilung.

Wahrscheinlichkeit für das erste Eintreten eines Ereignisses

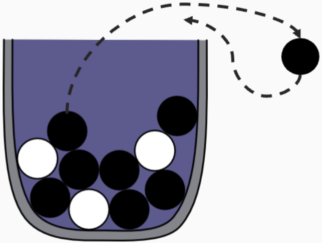
Theorem

In einem Bernoulli-Experiment sei die Trefferwahrscheinlichkeit gegeben durch p. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Treffer beim k-ten Experiment zum ersten Mal eintritt gleich

$$p(1-p)^{k-1}$$

Grund: Das ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{(0, \ldots, 0, 1)\}$, wobei 1 an der k-ten Stelle steht.

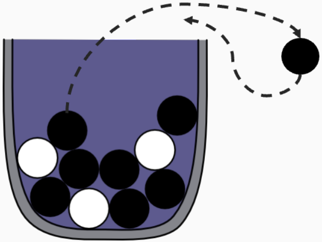
Beispiel: Urnen-Experiment mit Zurücklegen



In einer Urne befinden sich N Kugeln, S schwarze und W weiße, wobei $S + W = N$ gilt. Aus der Urne werden zufällig n Kugeln gezogen, nach jedem Zug wird die Kugel wieder zurückgelegt. Es werden n_s schwarze und n_w weiße Kugeln gezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, genau n_s schwarze und n_w weiße Kugeln zu erhalten?

Ergebnis: Urnen-Experiment mit Zurücklegen

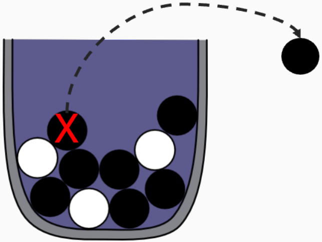


- Wegen des Zurücklegens bleiben $p = P(Schwarz) = \frac{S}{N}$ und $P(Weiß) = 1 - p$ für jeden Zug gleich.
- Aufeinanderfolgende Züge sind unabhängig voneinander.
- Wir ziehen $n = n_s + n_w$-mal.

$\Rightarrow$ n-stufiges Bernoulli-Experiment mit 1=Schwarz:

$$P(\text{"Anzahl schwarzer Kugeln"} = n_s) = \binom{n}{n_s} p^{n_s}(1-p)^{n-n_s} = \binom{n}{n_s} p^{n_s}(1-p)^{n_w}$$

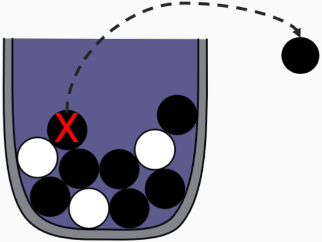
kein Beispiel: Urnen-Experiment ohne Zurücklegen



Beim Urnen-Experiment wie oben *ohne Zurücklegen* ändern sich die Wahrscheinlichkeiten mit jedem Zug, Züge sind nicht unabhängig, hier liegt also kein Bernoulli-Experiment vor!

Dennoch: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, genau n_s schwarze und n_w weiße Kugeln zu erhalten?

Ergebnis: Urnen-Experiment ohne Zurücklegen



Sei A das Ereignis, genau n_s schwarze und n_w weiße Kugeln zu erhalten. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Laplace-Raum, also zählen wir Möglichkeiten:

- $|\Omega|$ = Anzahl von Möglichkeiten, n Kugeln aus N Kugeln ziehen $= \binom{N}{n}$
- $|A|$ = Anzahl von Möglichkeiten n_s Kugeln aus S schwarzen und n_w Kugeln aus W weißen zu ziehen $= \binom{S}{n_s} \cdot \binom{W}{n_w}$.

$$\Rightarrow P(\text{"Anzahl schwarzer Kugeln"} = n_s) = \frac{\binom{S}{n_s}\binom{W}{n_w}}{\binom{N}{n}}$$

Verständnisfragen und Aufgaben

Aufgaben 1

1. Welches sind die charakteristischen Eigenschaften eines Laplace-Raums?
2. Unter welchen Bedingungen gilt $P(A \cap B) = P(A)P(B)$? Unter welchen Bedingungen gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
3. Wenn A, B und A, C jeweils voneinander unabhängige Ereignisse sind, sind dann auch B und C voneinander unabhängig?

Ergebnisse 1

1.
   - ein Experiment kann nur endlich viele Ergebnisse haben
   - alle diese Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit
2.
   - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ wenn A und B unabhängige Ereignisse sind.
   - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$, also wenn $A \cap B = \emptyset$
3. Nein! Beispiel: Wir würfeln zweimal. Ereignis A: "Die Würfelsumme ist gerade", Ereignis B: "Der erste Wurf ist gerade". Ereignis C: "Der erste Wurf ist ungerade". Dann gilt: $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

   $$A = \{(i,j) | i,j \text{ sind gerade}\} \cup \{(i,j) | i,j \text{ sind ungerade}\} \Rightarrow P(A) = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}$$

   $$A \cap B = \{(i,j) | i \text{ ist gerade }, j \text{ ist gerade}\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

   $$A \cap C = \{(i,j) | i \text{ ist ungerade}, j \text{ ist ungerade}\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

   Aber es gilt: $P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \cdot P(B) \Rightarrow B, C$ abhängig!

Aufgaben 2

4. Durch ein Labyrinth mit zwei Ausgängen können Ratten geschickt werden. Hinter einem der Ausgänge ist Futter zu finden. Ist das Ereignis „Ratte findet das Futter“ unter folgenden Bedingungen ein Bernoulli-Experiment?
   (a) Eine (kluge) Ratte wird 50 Mal durch das Labyrinth geschickt?
   (b) 50 Ratten werden nacheinander durch das Labyrinth geschickt?
5. In einer sehr großen Urne mit sehr vielen Kugeln sind die Experimente „Ziehen mit Zurücklegen“ und „Ziehen ohne Zurücklegen“ sehr ähnlich. Warum?
6. Eine Wahlumfrage kann auch als Urnenexperiment angesehen werden. Handelt es sich hier um ein Experiment mit oder ohne Zurücklegen?

Ergebnisse 2

4. (a) Kein Bernoulli-Experiment, weil die Ratte dazulernt und daher die Wahrscheinlichkeit mit jedem Mal steigt, dass sie sich an den richtigen Weg erinnert und das Futter findet.
   (b) Ein Bernoulli-Experiment, weil die Ratten sich unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit für die Ausgänge entscheiden.
5. Weil sich die Ausgangssituation nach einem Zug nur sehr geringfügig ändert.
6. Eigentlich Ziehen ohne Zurücklegen, weil jede Person nur einmal befragt wird. Wegen 5. rechnet man aber näherungsweise mit Ziehen mit Zurücklegen. rechnen.

Aufgaben 3

6. In einer Schachtel mit 100 Losen befinden sich 40 Nieten. Sie kaufen 6 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens 3 Gewinne erhalten?
7. Nehmen Sie die Hypothese als wahr an, dass eine Toastscheibe beim Herunterfallen genauso oft auf die Butterseite wie auf die ungebutterte Seite fällt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 Versuchen der Toast mehr als 52 Mal auf die Butterseite fällt?
8. Bei 4000 Ziehungen im Zahlenlotto 6 aus 49 wurde die Zahlenreihe 15, 25, 27, 30, 42, 48 zweimal gezogen: am 20.12.1986 und am 21.06.1995. Dies erregte unter den Lottospielern ziemliches Aufsehen. Rechnen Sie nach, ob dieses Ereignis wirklich unwahrscheinlich war.

6-8 sind Hausaufgaben - es wird keine Lösung bereitgestellt, höchstens am Ende des Semesters, wenn Zeit bleibt.

Literatur

- Hartmann, Peter; Mathematik für Informatiker, Springer-Vieweg; 7. Auflage; 2019
- Henze, Norbert; Stochastik für Einsteiger; Springer; 10. Auflage; 2013