Mathematik II

1. **Rand, Abschluss und Inneres**

Gegeben sei die Menge

$$M = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \cup]1, 2] \cup (\mathbb{Q} \cap [2, 3]) \subseteq \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ als metrischen Raum mit der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Rand, Abschluss und Inneres von M.

(b) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ als metrischen Raum mit der *diskreten* Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Rand, Abschluss und Inneres von M.

2. **Metriken aus Normen**

Betrachten Sie die folgenden Metriken auf $\mathbb{R}^2$:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \tag{3}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \tag{4}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \tag{5}$$

wobei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Stellen Sie jeweils die 1-Umgebung $U_1(0)$ des Koordinaten-Ursprungs $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ bzgl. dieser Metriken graphisch dar!.

Hinweis: Die SageMath-Funktion `implicit_plot(f(x,y), (a,b), (c,d))` zeigt alle Punkte im Rechteck $[a, b] \times [c, d]$, die die Gleichung $f(x, y) = 0$ erfüllen.

Ausblick: Über Metriken in PISA-Aufgaben und Gerichtsverfahren berichtet Thilo Kuessner unter `https://www.mathematik.de/dmv-blog/4998-k%C3%BCrzeste-wege`.

3. **Metrik-Check**

Untersuchen Sie die folgende Abbildungen bzgl. der für eine Metrik geforderten Eigenschaften

$$d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2^{|x-y|} - 1. \tag{6}$$

4. **Pariser Eisenbahnmetrik**

Sei P ein fester Punkt in $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die folgende Funktion

$$d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \begin{cases} \|X - P\|_2 + \|Y - P\|_2, & \text{falls } X \neq Y, \\ 0, & \text{falls } X = Y, \end{cases} \tag{7}$$

wobei

$$\|A - B\|_2 = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \tag{8}$$

den euklidischen Abstand zwischen den Punkten $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ bezeichnet.

Hinweis: Mit anderen Worten, der Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten X und Y ist der Abstand zwischen X und P plus dem Abstand zwischen P und Y.

(a) Prüfen Sie die Eigenschaften einer Metrik für d nach.

(b) Sei $a_n = (1/n, 2^{-n}) \in \mathbb{R}^2$ eine Folge von Punkten in $\mathbb{R}^2$. Für welche Wahl von P konvergiert a_n im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d)$.

5. **Grenzwerte**

Entscheiden Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie ggf. den entsprechenden Wert.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1000\cdot n^{10}+2^n+1}{n^{11}-2^n-1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{n^2-1}{n^2+1} + \frac{(-1)^n\cdot n-1}{n+1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1000^n}$

6. **Grenzwerte rekursiver Folgen**

(a) Sei x_n rekursiv definiert durch $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ für $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert. (Sie dürfen annehmen, dass der Grenzwert existiert.)

(b) Sie x_n rekursiv definiert durch $x_1 = 5$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) \tag{9}$$

für $n \geq 1$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass x_n monoton fallend ist. Bestimmen Sie den Grenzwert. (Wieso existiert dieser?)

Hinweis: Identifizieren Sie zunächst Fixpunkte $\tilde{x}$ der Rekursionsgleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ mit dem Ansatz $\tilde{x} = f(\tilde{x})$.