Bsp.: **(i)** lineare Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto ax + b$$

ist smw für $a > 0$

smf für $a < 0$

mw & mf für $a = 0$.

Der Graph ist eine Gerade.

(ii) quadratische Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto ax^2 + bx + c$$

Der Graph ist eine Parabel. Für $b = 0$ ist die Funktion gerade $(f(-x) = f(x))$.

(iii) Potenzfunktionen. Für $n \in \mathbb{N}_0$

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^n$$

wobei $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$f \text{ eine } \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix} \text{ Funktion für } \begin{Bmatrix} n \text{ gerade} \\ n \text{ ungerade} \end{Bmatrix}.$$

Es gelten die Potenzgesetze

$$x^m \cdot x^n = x^{m \cdot n}$$

$$x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Alle stetig.

(iv) $\sqrt[n]{} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ , \; x \mapsto \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}$
ist die Umkehrfunktion zu $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ , \; x \mapsto x^n$.

Einschränkung auf Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$ ist entscheidend, weil sonst nicht bijektiv.

Def. 7.1:

Sei $x \in \mathbb{R}^+$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$
$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$
$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$$

Def. 7.2:

Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt

(i) $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$

(ii) $x^p \cdot y^p = (xy)^p$

(iii) $(x^p)^q = x^{pq}$

Bsp.: (fortgesetzt)

(v) Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist

$$f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+, \quad q \mapsto a^q$$

die Exponentialfunktion mit Basis a.

a^x mit $x \in \mathbb{R}$ ist noch nicht definiert!

(vi) Insbesondere auch Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Wir halten hierzu (Kapitel Reihen):

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z+w)$$

und es gilt

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \underbrace{\frac{0^0}{0!}}_{=1} + \underbrace{\frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots}_{=0} = 1$$

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e$$

Satz 7.3:

Für $q \in \mathbb{Q}$ gilt $\exp(q) = e^q$.

Bew.: (Idee)

- zunächst für $q = n \in \mathbb{N}$
- dann für $q = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$
- letztlich für $q = -\frac{m}{n}$.

Def. 7.4:

Für $z \in \mathbb{C}$ sei $e^z = \exp(z)$.

Satz 7.5:

Die Exponentialfunktion (vi) ist stetig

Satz 7.6: Eigenschaften von exp

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

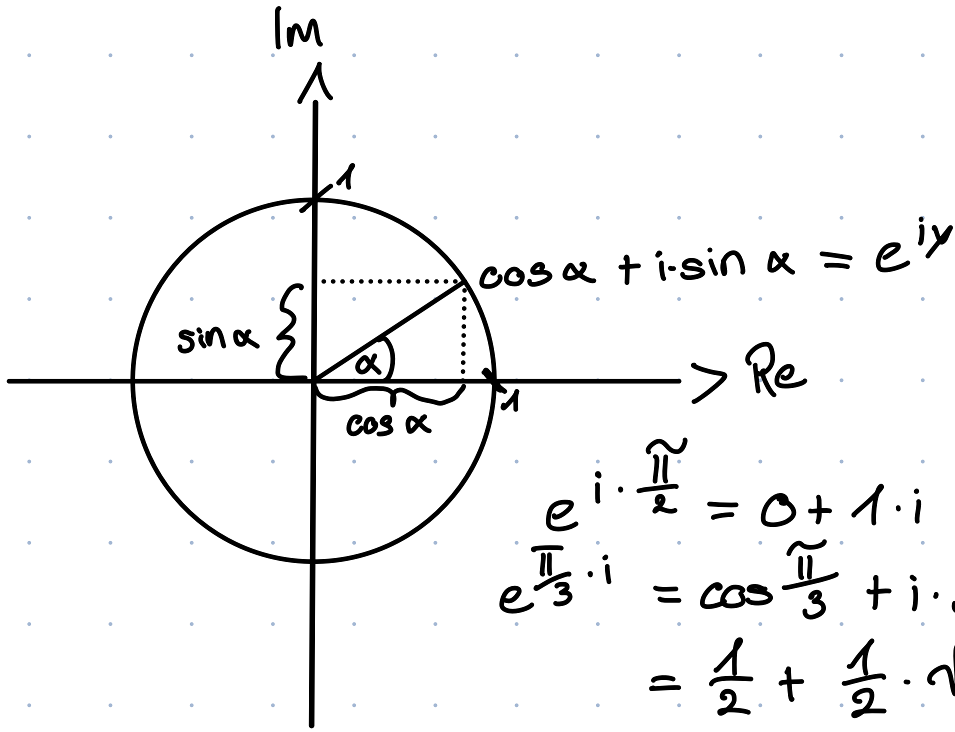
a) $e^z = e^x \cdot e^{iy}$

b) $e^x > 0$

c) $|e^{iy}| = 1$

d) $|e^z| = e^x$

Bem.:



$$e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = 0 + 1\cdot i$$

$$e^{\frac{\pi}{3}\cdot i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot i$$

Def. 7.7: Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$\cos(y) = \mathrm{Re}(e^{iy}) \text{ und } \sin(y) = \mathrm{Im}(e^{iy})$$

stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$.

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Erinnerung

Satz 7.8.: Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$

Bew: $1 = e^0 = e^{iy-iy} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = (\cos y + i \sin y)(\cos(-y) + i \sin(-y))$

hier ist Anfang

$$= (\cos y + i \sin y)(\cos y - i \sin y)$$

$$= (\cos y)^2 - (i \sin y)^2$$

$$= (\cos y)^2 + (\sin y)^2 \qquad \square$$

Bem.:

- Oft schreiben wir kürzer, aber leicht missverständlich $\cos^2 y$ bzw. $\sin^2 y$ für $(\cos y)^2$ bzw. $(\sin y)^2$

Satz: Additionstheoreme

a) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

b) $\cos(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

Bew:

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

$$\|$$

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i\sin x) \cdot (\cos y + i \sin y)$$

$$= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + i \sin x \cdot \cos y + i \cos x \cdot \sin y$$

Und vergleiche Real- und Imaginärteil.

Satz: Reihenentwicklung von cos & sin

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$