Gruppe P
Alsheikh, Roubeer
Nouri, Nawid
Nguyen, Hoang Son

****

Inhalt

0. Allgemeine Hinweise

0.1 Vor dem Versuch

Bitte bereiten Sie die wie folgt gekennzeichneten Blöcke *vor* dem Praktikumsversuch vor, tragen Sie Ihren Namen und die Ihrer Gruppe oben und die Antworten ins Notebook ein und speichern Sie es lokal unter dem Namen "Lab1_Nachname_Vorname" (File -> Save Notebook As ...) ab.

VORBEREITUNG:

Beispiel

- **Geben Sie die Systemfunktion eines Differenzierers an**

$H(z) = 1 - z^{-1}$

- **Welche Filter sind für die Praxis am wichtigsten?**

Kaffeefilter und *Spamfilter*

Simulationsaufgaben werden gemeinsam im Praktikum bearbeitet, sie sind gekennzeichnet durch

SIMULATION:

0.2 Tipps zum Schreiben und Coden

- **\<SHIFT>-\<RETURN> führt eine Codezelle aus und rendert eine Textzelle.**
- **In Markdown sind Leerzeilen wichtig zum Trennen von Abschnitten!**
- **Sie können LaTeX-Code zwischen $ ... $ einschließen.**
- **Kontexthilfe zu Funktionen etc. bekommen Sie über \<SHIFT>-\<TAB>**

0.3 Nach dem Versuch

Nach dem Praktikumsversuch exportieren Sie das Notebook mit Textantworten, Codezellen und Plots als HTML (File -> Export Notebook As ... -> Export Notebook to HTML) und reichen es in Moodle ein.</div>

Abbildungen in diesem Notebook wurden konvertiert mit https://www.base64-image.de/ und in den HTML-Code eingebettet.

In [ ]:
```
import os, sys
module_path = os.path.abspath(os.path.join('..')) # append directory one level up to import path
if module_path not in sys.path:  # ... if it hasn't been appended already
    sys.path.append(module_path)
import dsp_fpga_lib as dsp
dsp.versions() # print versions

%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
size = {"figsize":(12,6)} # Plotgröße in Inch

import numpy as np
import scipy.signal as sig
import wave

from IPython.display import Audio, display
```

```
Python version: 3.10.9
Numpy: 1.23.5
Scipy: 1.10.0
Matplotlib: 3.7.0 module://matplotlib_inline.backend_inline
```

LAB 1: Intro, Faltung zeitdiskreter Signale und LTI-Systeme

1. Einführung

In diesem Abschnitt erstellen Sie verschiedene Signale, plotten sie und machen sie hörbar.

Zunächst generieren wir ein Sinussignal der Länge $T = 2$ s und der Frequenz $f_a = 440$ Hz, das mit $f_S = 8$ kHz abgetastet wird.

Bitte bereiten Sie die wie folgt gekennzeichneten Blöcke vor dem Praktikum vor:

VORBEREITUNG:

- **Wie viele Datenpunkte N und wie viele Perioden L umfasst das Signal?** $L = \ldots$, $N = \ldots$

  $L = T_S \cdot f_a = 2\mathrm{s} \cdot 440\mathrm{kHz} = 880$

  $N = T_S \cdot f_s = 2\mathrm{s} \cdot 8\mathrm{kHz} = 16000$

- **Wie groß ist die Abtastperiode T_S?**

  $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{8\mathrm{kHz}} = 125\mu\mathrm{s}$

1.1 Signalerzeugung

SIMULATION:

Achtung: Bei der Angabe von Bereichen ist in Python das letzte Element immer ausgeschlossen - `a = np.arange(10)` erzeugt ein Array mit den Zahlen 0 ... 9; `a[3:7] = [3, 4, 5, 6]`, Element Nr. 7 ist gerade eben nicht mehr dabei. Im Gegensatz zu Matlab nutzt Python 0-based indexing, d.h. das erste Element eines Arrays ist `a[0]`.

- **Erzeugen Sie ein Index-Array `n` mit N ganzzahligen Elementen mit der numpy Funktion `n = np.arange(end)` Vollständige Syntax: `n = np.arange(start, end, step)` mit den Defaultwerten `start=0` und `step=1` und `end=N`.**
- **Erzeugen Sie ein Zeit-Array `t` mit N reellwertigen Elementen im Abstand T_S über `t = np.linspace(start, end, N, endpoint=False)` (hier wäre `end` defaultmäßig das letzte Element des Arrays, das daher mit `endpoint=False` ausgeschlossen werden muss). Prinzipiell geht das auch mit `t = np.arange(0, N * T_S, T_S)`, hier besteht aber die Gefahr dass das Array wegen Rundungsfehlern ein Element mehr enthält als erwartet.**
- **Stellen Sie mit `len()` sicher, dass die Längen der beiden Vektoren identisch sind, schauen Sie sich mit `n[-1]` und `t[-1]` jeweils den Wert des letzten Arrayelements an.**
- **Stellen Sie die Funktionen `y1 = sin( ... Fa n)` und `y2 = sin( ... fa t)` so auf, dass mit $F_a = f_a / f_S$ beide Ausdrücke die gleichen Zahlenfolgen ergeben. Was liefert der Vergleich `print(y1[:10] == y2[:10])`? Erklären Sie das Ergebnis!**
- **Das Herausschneiden von Bereichen aus einem Array nennt man "Slicing", siehe z.B. https://www.w3schools.com/python/numpy_array_slicing.asp. Mit Slicing kann man ziemlich kranke Dinge tun, `y[2 : -1 : -2]` gibt Ihnen z.B. rückwärts jeden zweiten Wert ("-2") eines Arrays aus, angefangen beim letzten Wert ("-1") bis zum zweiten Wert ("2"), der gerade eben nicht mehr mit dabei ist. Was liefert `a[:10]`? Und was könnte `a[10:]` bedeuten?**

In [ ]:

```
N = 200
T_S = 125E-6
print(T_S)
n = np.arange(0,N,1)
print(N*T_S)
t = np.linspace(0, N * T_S, N, endpoint=False)
print(len(n), len(t))
#print(n)
#print(t)
f = 440
y1 = np.sin(2 * np.pi * f * n * T_S)
y2 = np.sin(2 * np.pi * f * t)
print(np.allclose(y1[:10], y2[:10]))
print(y1[:10])
print(y2[:10])
```

```
0.000125
0.025
200 200
True
[0.         0.33873792 0.63742399 0.86074203 0.98228725 0.98768834
 0.87630668 0.66131187 0.36812455 0.03141076]
[0.         0.33873792 0.63742399 0.86074203 0.98228725 0.98768834
 0.87630668 0.66131187 0.36812455 0.03141076]
```

1.2 Anschauen

In der nächsten Codezelle sollen Sie die Daten plotten mit Hilfe der Funktionen `ax.plot(x,y)` oder `ax.stem(x,y)`. In das Signal "hinein zoomen" können Sie mit `ax.set_xlim([start, stop])`, dabei beziehen sich `start` und `stop` auf die Werte des Zeitvektors, nicht auf die Indizes. Mit `ax.plot(x[10:20], y[10:20])` wählen Sie indexbasiert Slices aus, die fürs Plotten gleiche Länge haben müssen. Sie können die Plots verschönern mit `ax.set_xlabel("mein Label")` (ebenso für die y-Achse) oder `ax.set_title("mein Titel")`.

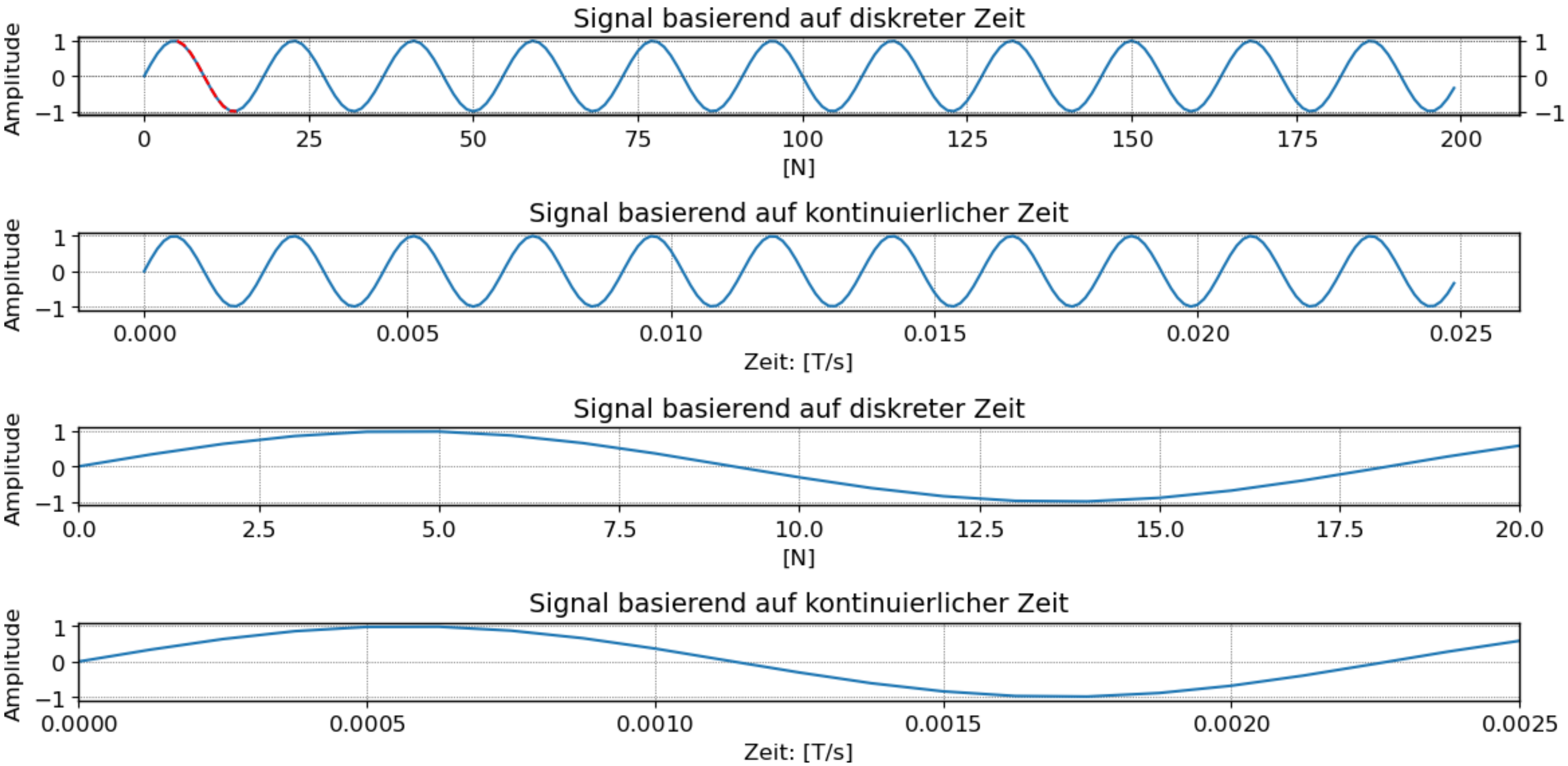
Die etwas seltsam aussehende Syntax `**size` bewirkt übrigens, dass das Dictionary `size` entpackt wird und die einzelnen Schlüssel-Werte Paare an die subplots-Methode übergeben werden.

SIMULATION:

- **Plotten Sie jetzt die Daten, indem Sie den Code der nächsten Zelle vervollständigen.**
- **Fügen Sie Label, Titel oder was immer Ihnen gefällt hinzu**
- **Testen Sie `ax.set_xlim()`, um in die Signale hinein zu zoomen.**
- **Zeigen Sie, dass die Signale identisch sind, indem Sie die gleichen Indizes beider Signale über einen kleinen Bereich darstellen.**

In [ ]:

```
#fig, axs = plt.subplots(2,1,**size)
#ax1.plot(n,...)
#ax2.plot(t,...)

fig, (ax1,ax2,ax3,ax4) = plt.subplots(4, 1, **size)

ax1.plot(n, y1, label='Signal basierend auf diskreter Zeit')
ax1.set_title('Signal basierend auf diskreter Zeit')
ax1.set_xlabel('[N]')
ax1.set_ylabel('Amplitude')
#ax1.legend()

ax2.plot(t, y2, label='Signal basierend auf kontinuierlicher Zeit')
ax2.set_title('Signal basierend auf kontinuierlicher Zeit')
ax2.set_xlabel('Zeit: [T/s]')
ax2.set_ylabel('Amplitude')
#ax2.legend()

ax3.plot(n, y1, label='Signal basierend auf diskreter Zeit')
ax3.set_xlim(n[0],n[20])
ax3.set_title('Signal basierend auf diskreter Zeit')
ax3.set_xlabel('[N]')
ax3.set_ylabel('Amplitude')

ax4.plot(t, y2, label='Signal basierend auf kontinuierlicher Zeit')
ax4.set_xlim([t[0], t[20]])
ax4.set_title('Signal basierend auf kontinuierlicher Zeit')
ax4.set_xlabel('Zeit: [T/s]')
ax4.set_ylabel('Amplitude')

index_i = slice(5,15)
ax1_compare = ax1.twinx() # Zweite y-Achse für den Vergleichplot
ax1_compare.plot(n[index_i], y2[index_i], linestyle='--', color = 'red')

plt.tight_layout()
plt.show()

print(n[10]*T_S,n[30]*T_S)
print([T_S*10, T_S*30])
```




```
0.00125 0.00375
[0.00125, 0.00375]
```

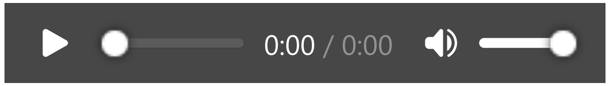
1.3 Anhören

Die Daten kann man sich im Browser anhören mit der `Audio` Klasse aus dem `IPython.display` - Modul:

`display(Audio((data=None, filename=None, url=None, embed=None, rate=None, autoplay=False)`

`data` kann dabei ein ein- oder zweidimensionales numpy-Array oder Liste sein, ein Filename oder auch eine URL. Der Parameter `rate` definiert die Abtastrate (nicht bei wav-Files, dort steht die Abtastrate im File.

In [ ]:
```python
display(Audio(data=y2, rate=8000))
```



SIMULATION:

Erzeugen Sie ein Stereosignal mit Hilfe eines zweiten Sinussignals mit 445 Hz und hören Sie sich das Resultat mit dem Kopfhörer an.

Sie können zwei Listen oder Arrays zusammenfügen zu einer Liste mit `list12 = [list1, list2]` oder Sie nutzen `a12 = np.vstack((a1, a2))`. Für Stereowiedergabe muss das Array die Form `(2, Anzahl_Samples_pro_Kanal)` haben

Überprüfen Sie mit den Befehlen `np.shape(a)`, `a.size`, `len(a)` oder `np.ndim(a)` Form und Dimension des entstandenen Arrays. Was macht der Befehl `np.hstack()`?

Ein Signal transponiert man (vertauschen der Achsen) ganz einfach mit `a.T`. Falls sich ein Signal gar nicht abspielen lässt, versuchen Sie es einmal zu transponieren.

In [ ]:
```python
#y3 = np.sin(2 * np.pi * 445 * t)
#y3
#display(Audio(data=y3))

y3 = np.sin(2 * np.pi * 445 * t)
signal = np.vstack((y2, y3))
display(Audio(data=signal, rate=8000))
print("Shape:", np.shape(signal))
print("Size:", signal.size)
print("Len:", len(signal))
print("Dimensions:", np.ndim(signal))
# np.hstack() fügt die Arrays horizontal zusammen
horizontal_stack = np.hstack((y2.reshape(-1, 1), y3.reshape(-1, 1)))
# nochmal Überprüfen
print("\nNach np.hstack():")
print("Shape:", np.shape(horizontal_stack))
print("Size:", horizontal_stack.size)
print("Len:", len(horizontal_stack))
print("Dimensions:", np.ndim(horizontal_stack))
```

0:00 / 0:00

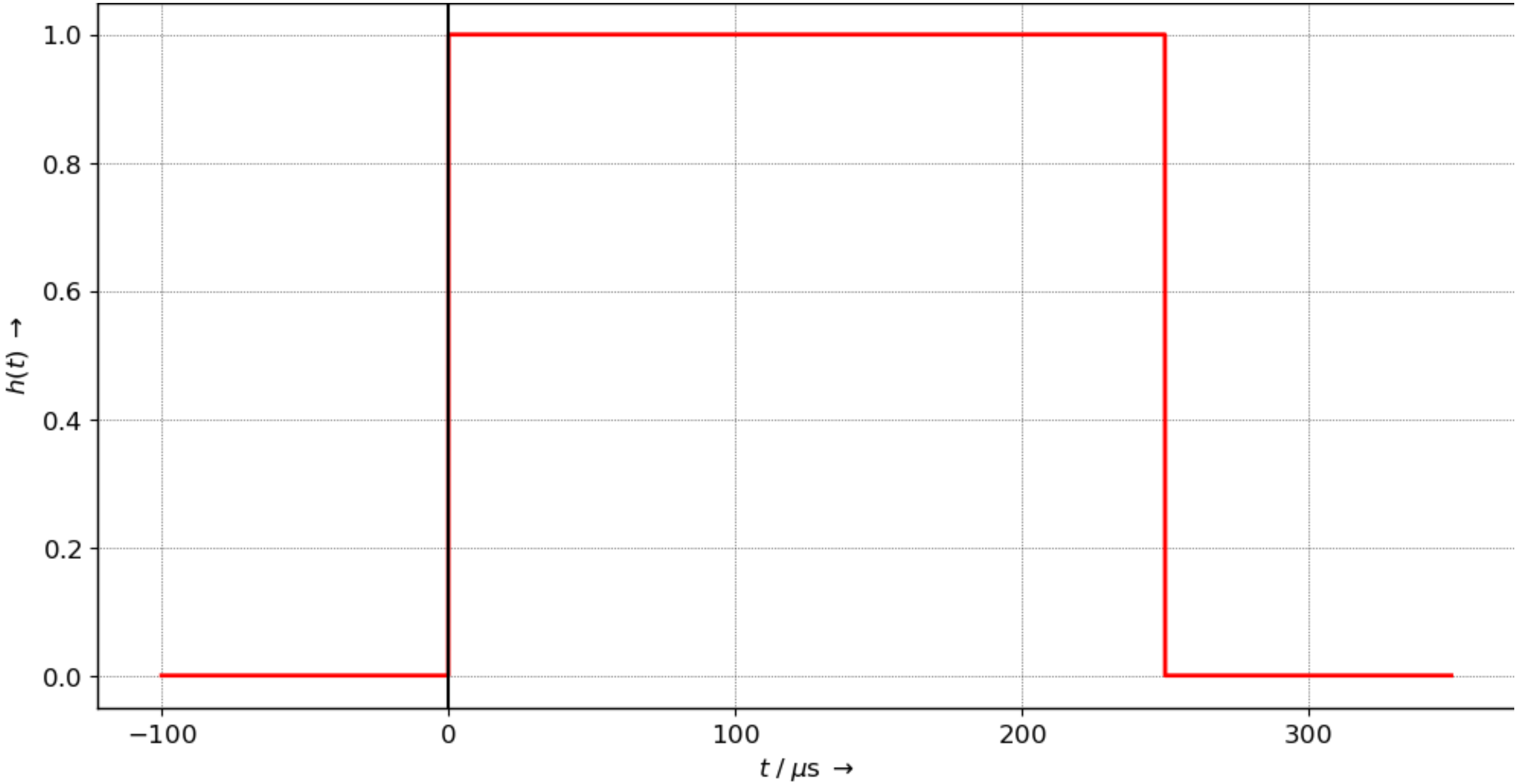
```
Shape: (2, 200)
Size: 400
Len: 2
Dimensions: 2

Nach np.hstack():
Shape: (200, 2)
Size: 400
Len: 200
Dimensions: 2
```

2 Diskrete Faltung

In diesem Versuchsteil entwerfen wir ein zeitdiskretes Filter mit $f_S = 64$ kHz so, dass dessen Impulsantwort $h[n]$ möglichst ähnlich zu einem analogen Rechteckpuls $h(t) = \mathrm{rect}(t/\Delta T)$ mit $\Delta T = 250\,\mu$ s wird. Die Impulsantwort ist also eine Abfolge von L Diracstößen mit gleicher Amplitude. Mit dem so definierten System filtern wir anschließend Rauschsignale.

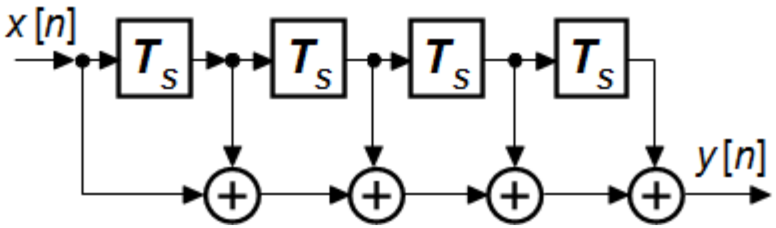
In [ ]:

```python
fig, ax = plt.subplots(**size)
t = np.arange(-100, 350, 0.1)
ax.plot(t, np.where((t >= 0) & (t < 250), 1, 0), 'r', lw=2)
ax.axvline(0, ls='-',color='k')
ax.set_xlabel(r"$t \; / \;\mu\mathrm{s} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$h(t) \;\rightarrow$");
```



Dieses System wird Moving Average (MA) Filter (gleitender Mittelwert) genannt, das folgende Bild zeigt den Signalflussgraphen eines MA-Filters der Ordnung $N = 4$ bzw. Länge $L = 5$. Die Länge der Impulsantwort entspricht der Anzahl der Taps.

Die Abbildung zeigt nur die prinzipielle Struktur, bitte verwenden Sie im folgenden die von Ihnen berechnete Anzahl von Taps L!



VORBEREITUNG:

- **Wieviele Taps L braucht das Filter, damit seine Impulsantwort dem zeitkontinuierlichen Puls $h(t)$ entspricht? $L = ...$**

> $250/15.625 = 16$
>
> $N = L - 1 = 15$ **bei Moving-Average-Filter**

- **Wie groß ist die Abtastperiode T_S?**

> $1/64$ **kHz =** 15.625μ **s**

- **Wie können Sie näherungsweise den analogen Puls $h(t)$ plotten?**

> **Dirac Stöße nacheinnander stacken**

2.1 Einschub: Abschnittsweise definierte Funktionen in Python

Allgemein können Sie Funktionen abschnittsweise definieren mit:

2.1.1 List Comprehension

Mit einer sogenannten "List Comprehension" können Sie sehr kompakt eine Liste definieren oder modifzieren. Mit `y=[i*i for i in t]` definieren Sie eine Liste mit einer quadratischen Funktion über dem Zeitvektor t, mit `y=[i < T_0 for i in t]` eine Liste mit einer Funktion, die 1 ist für $t < T_0$ und ansonsten 0. Dabei wird das schlampige Typecasting von Python genutzt (True -> 1, False -> 0).

List comprehensions ähneln der mathematischen Schreibweise:

$$y = t^2 \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$y = 1 \text{ für } t < T_0, \text{ sonst } 0.$$

Mit einer zusätzlichen Bedingung kann man auch kompliziertere Funktionen erzeugen wie die Menge der Quadratzahlen aller geraden Zahlen zwischen 10 und 20: `m = [x**2 for x in range(10,21) if x%2 == 0]`. Mathematisch gesehen:

$$m = \{x^2 \in \mathbb{N} \,|\, 10 \leq x \leq 20, \, x \bmod 2 = 0\}$$

2.1.2. Schneller mit numpy

Für große Datenmengen und / oder hohe Geschwindigkeit sollte man numpy-Funktionen wie `np.where()` verwenden:

In [ ]:
```
t = np.arange(100) # Array 0 ... 99
print(t)
h = np.where(t < 25, 1, 0) # 1 für t < 25, ansonsten 0
print(h)
```

```
[ 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47
 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71
 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95
 96 97 98 99]
[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

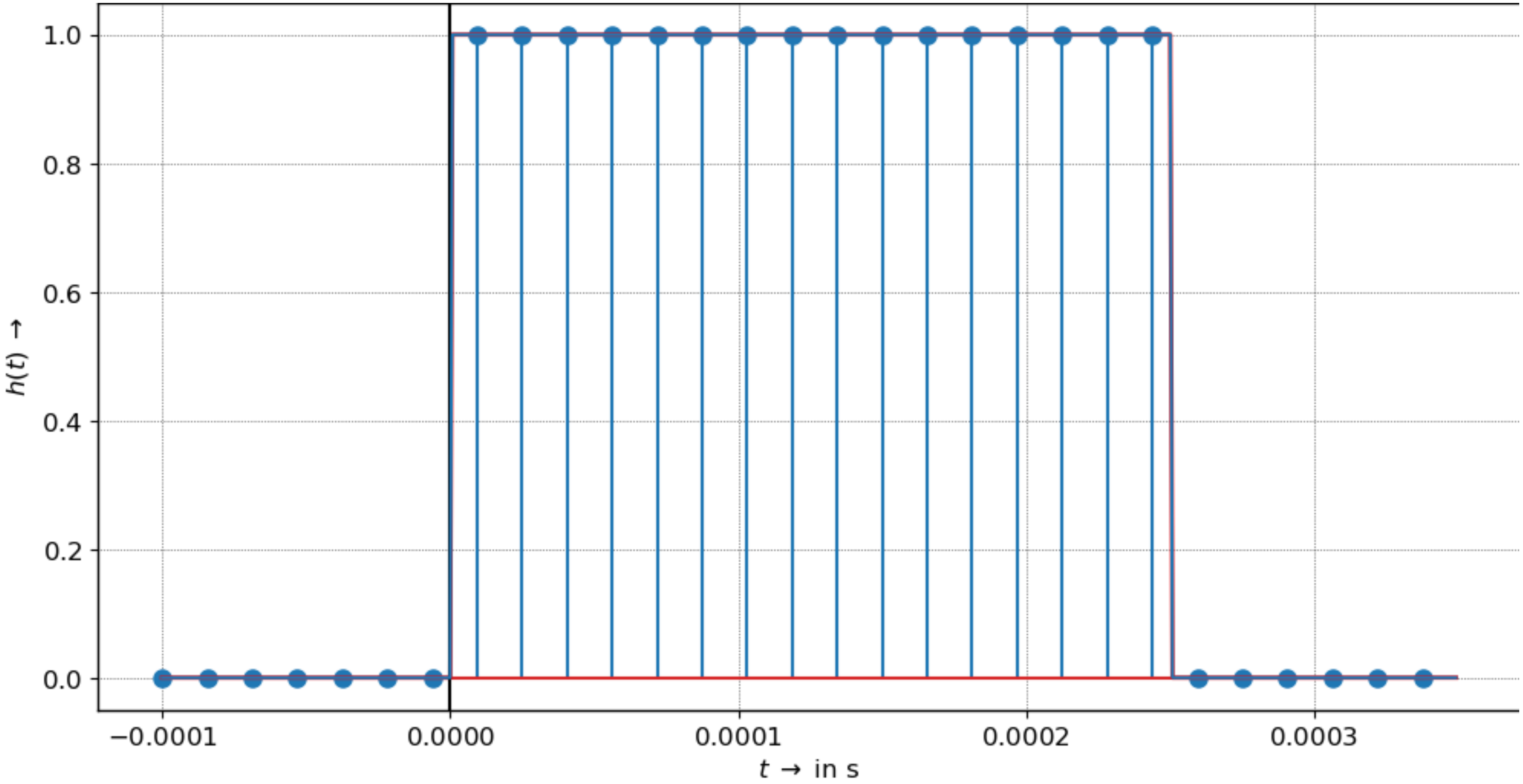
2.2 Plotten der Impulsantwort

SIMULATION:

Definieren Sie jetzt mit Hilfe einer list comprehension oder der `np.where()` Funktion die Impulsantwort des Filters und plotten Sie sie als `stem()` Plot über der Zeit t. Optional überlagern Sie im gleichen Plot den "analogen" Rechteckpuls.

Tipp: Sie können das Aussehen des Stemplots ändern z.B. mit `stem(n,y, linefmt='b-', markerfmt='ro', basefmt='k')` ('b-' blaue Linien, 'ro' rote Punkte als Marker und 'k' schwarze Grundlinie)

In [ ]:
```python
fig, ax = plt.subplots(**size)
tt = np.arange(-100e-6, 350e-6, step=15.625e-6)
#print(tt)
ht = np.where( (tt >= 0) & (tt < 250e-6), 1, 0)
ax.stem(tt, ht)

t = np.arange(-100e-6, 350e-6, step=15.625e-6/20)
ax.plot(t, np.where((t >= 0) & (t < 250e-6), 1, 0), 'r', lw=2)
ax.axvline(0, ls='-',color='k')
ax.set_xlabel(r"$t \; / \;\mu\mathrm{s} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$h(t) \;\rightarrow$");
h = np.where( (t >= 0) & (t < 250e-6), 1, 0)
#h = np.ones(L)
#h = np.where(n < L, 1, 0)

ax.plot(t, h)
ax.set_xlabel(r"$t \; \rightarrow$ in s");
```



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$h(t)$ →
−0.0001
0.0000
0.0001
0.0002
0.0003
t → in s

2.3 Rauschen als Testsignal

Als Testsignal für das System verwenden wir gauss- oder normalverteiltes Rauschen: `x_n = np.random.randn(M,N)` gibt ein Array `x_n` zurück mit den Dimensionen $M \times N$ und der Varianz $\sigma^2 = 1$ sowie dem Mittelwert $m = 0$. M ist bei uns die Anzahl der Audiokanäle, also 1 oder 2.

Addieren Sie einen Gleichspannungswert von 1 V zum Rauschsignal. Durch Multiplikation mit σ^2 können Sie die Varianz anpassen.

SIMULATION:

Hören Sie sich zunächst das Stereorauschen in der nächsten Zelle an. Ersetzen Sie versuchsweise das normalverteilte Rauschen durch gleichverteiltes (uniform) Rauschen `np.random.rand(M,N)`. Hören Sie einen Unterschied?

In [ ]:
```python
k = 16000

x_uniform = np.random.uniform(0.0, 1.0, (2,k))+1
x_normal = np.random.normal(2, 1, (2, k))

#print(np.median(x_uniform))
#print(np.median(x_normal))

display(Audio(data=x_uniform, rate=k))
display(Audio(data=x_normal, rate=k))

#figure, axis = plt.subplots(2)
#axis[0].plot(x_uniform)
#axis[1].plot(x_normal)
```

0:00 / 0:01

0:00 / 0:01

VORBEREITUNG:

- **Wodurch unterscheiden sich normal- und gleichverteiltes Rauschen? Finden Sie es mit einem Lehrbuch oder Wikipedia o.ä. heraus!**

  Weicher Rauschen Normalverteilt: Parametrisiert nach Mittelwert und Standardabweichung/Varianz und gewünschter Normalverteilung Härter Rauschen Gleichverteilt: Weißes Rauschen, Werte des Rauschens liegen dann gleichverteilt im Intervall [-Rauschamplitude, +Rauschamplitude]

- **Warum ändert sich der "Sound" des Rauschens im vorigen Beispiel, wenn Sie die Abtastrate in der vorigen Codezelle ändern?**

  Tonhöhe/Frequenz ändert sich. Das Signal wird auch länger je niedriger die Frequenz ist.

- **Im nächsten Abschnitt sollen Sie das Rauschsignal `x_n` der Länge `Lx` filtern, indem sie es mit dem vorher definierten Filter (Länge `L`) falten. Wie viele Samples `Ly` enthält das Ergebnis der diskreten Faltung $y[n] = x_n[n] * h[n]$?**

  $(Lx + L - 1) = Ly$

- **Welche Verstärkung $H(f = 0)$ hat unser Moving Average Filter für Gleichsignale?**

  Moving Average Filter ein Tiefpassfilter -> Verstärkung 1. Signal sollte Mittelwert durchgelassen werden.

- **Sie können ein Array `t` mit passender Länge und Skalierung zum Array `y` erzeugen mit `t = np.arange(len(y))*T_S`. Wie funktioniert dieser Befehl (Ausprobieren, keine schriftliche Antwort erforderlich)?**

  array Länge y und skaliert mit T_S

2.3 Falten und Plotten

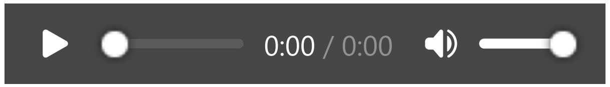
Mit `np.convolve(a,b)` faltet man zwei eindimensionale Array miteiander., ggf. können Sie ein Array der Form (500,1) mit `np.squeeze(x_n)` in eine "flache Form" bringen oder aus einem mehrdimensionalen Array mit `x_n[:,0]` eine Dimension herausziehen.

SIMULATION:

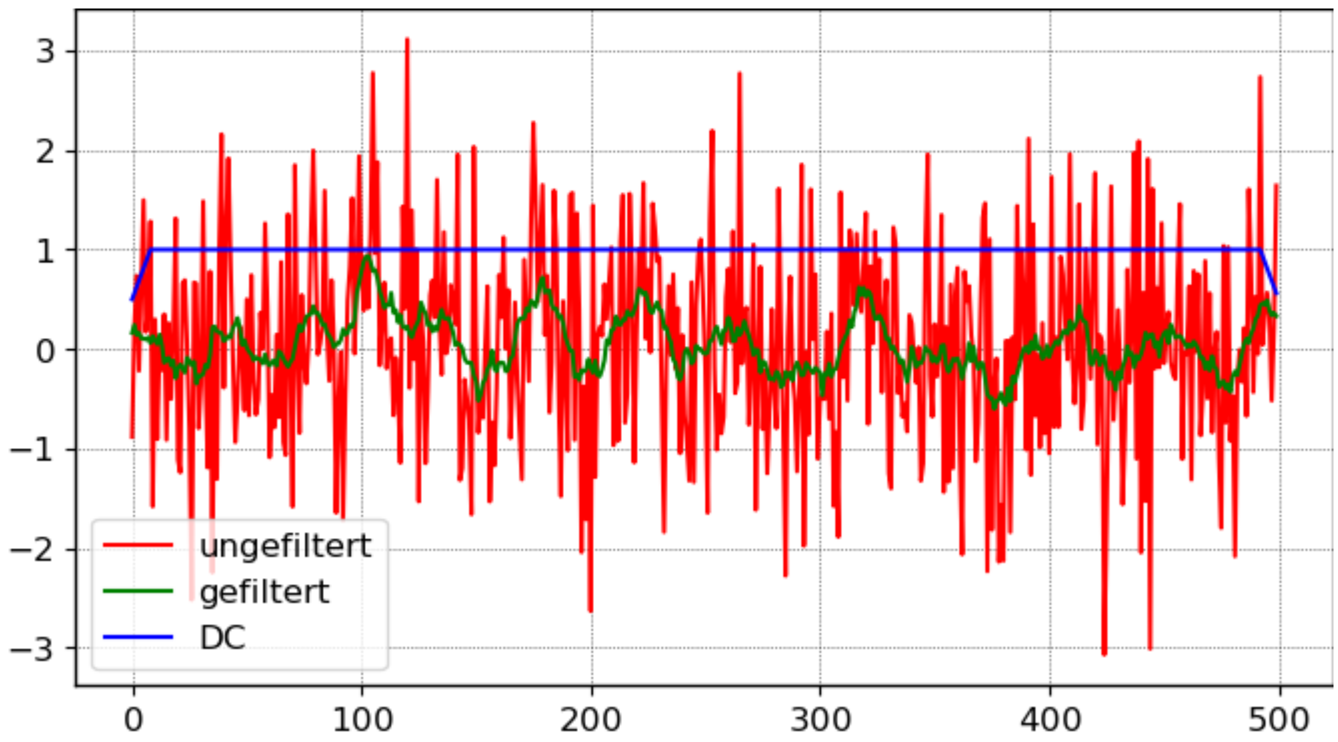
- **Definieren Sie jetzt die Impulsantwort des MA-Filters ohne zusätzliche Nullen mit `h = np.ones(L)` und falten Sie das Rauschen mit der Impulsantwort per `y=np.convolve(x_n, h)`. Stimmt die Länge des resultierenden Arrays `y` mit Ihrer Berechnung aus der Vorbereitung überein?**
- **Stellen Sie ungefiltertes und gefiltertes Rauschen im gleichen Plotfenster dar. Skalieren Sie die Zeitachse in Sekunden.**
- **Passen Sie das Filter so an, dass die DC-Verstärkung 1 ist und vergleichen Sie ungefiltertes und gefiltertes Rauschen.**
- **Welche Art von Filterung (HP, TP, ...) hat das Moving Average Filter? Erhöhen Sie die Länge des Rauschsignals und hören Sie es sich an (Sie müssen das Signal mit `y.T` transponieren - ich habe auch noch nicht verstanden warum).**

In [ ]:

```python
#Filter erstellen
L = 16
x_n = np.squeeze(np.random.randn(500,1))
t = np.arange(len(x_n))
h = np.ones(L) # MA-filter mit Länge L - setzen Sie den passenden Zahlenwert ein
h = h / L

#Signal filtern
y = np.convolve(np.squeeze(x_n), h, mode = 'same')
y2 = np.convolve(np.ones(len(x_n)), h, mode = 'same')

display(Audio(data=y.T, rate=16000))

#Shape and print
print("shape x_n: ", np.shape(x_n), "shape y: ", np.shape(y))

#figure, axis = plt.subplots(3)
#figure.set_dpi(160)
#axis[0].plot(x_n)
#axis[0].set_title("Original")
#axis[1].plot(y)
#axis[1].plot(y2)
#axis[1].set_title("Filtered")
#axis[2].plot(y2)
#axis[2].set_title("Filtered Normalized")

#Plotten
plt.plot(t, x_n, color='r', label='ungefiltert')
plt.plot(t, y, color='g', label='gefiltert')
plt.plot(t, y2, color='b', label='DC')

plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```




```
shape x_n:  (500,) shape y:  (500,)
```

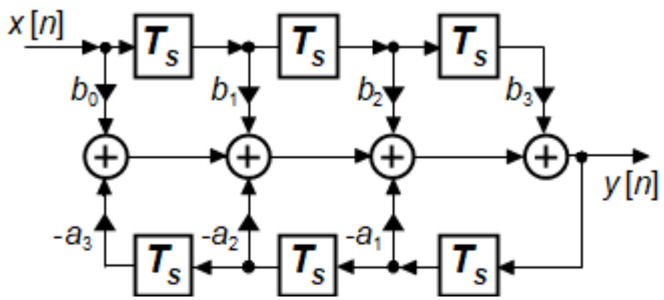


3. Transferfunktion von LTI-Systemen

Zeitdiskrete Systeme werden in Python und Matlab meistens über die Koeffizienten a_i des rekursiven Teils und die Koeffizienten b_i des nicht-rekursiven Teils angegeben:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

Aus den Koeffizienten erhält man nämlich sofort den Signalflussgraph in der sog. "Direktform":



x [n]
T_s
T_s
T_s
b_0
b_1
b_2
b_3
y [n]
$-a_3$
$-a_2$
$-a_1$
T_s
T_s
T_s

Sie können mit der Software pyfda die Eigenschaften des Systems visualisieren und eigene Filter entwerfen. Im Tab "b,a" importieren Sie Koeffizienten aus einem CSV-File oder (nach Auswahl von "Clipboard" in den Einstellungen) direkt aus der Zwischenablage. Die Koeffizienten `b` des nicht-rekursiven Teils geben Sie hierfür getrennt durch Kommata an, optional in einer zweiten Zeile die Koeffizienten `a` des rekursiven Teils.

Alternativ arbeiten Sie mit dem Notebook LTF-Filter_properties.ipynb, das Ihnen ebenfalls die wichtigsten Eigensschaften darstellt. Aus diesem Notebook können Sie auch leicht Code zum Plotten verschiedener Filtereigenschaften kopieren.

3.1 Analyse des Moving Average Filters aus Abschnitt 2

VORBEREITUNG:

- **Geben Sie nicht-rekursiven Koeffizienten des Filters an. Vergleichen Sie dazu obige Abbildung der Direktform mit der Abbildung des Moving Average Filters.**

  > $b_n = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1]$

- **Wie lauten die rekursiven Koeffizienten?**

  > $a_0 = 1$ **Der Rest ist 0**

- **Begründen Sie mit Hilfe der Systemfunktion $H(z)$ ob das Filter linearphasig ist.**

  > **symmetrische Impulsantwort = linearphasig bei FIR Filtern**
  >
  > **P/N Diagramm. Falls Pole außerhalb des Ursprungs dann nicht linearphasig**

- **Welche Ordnung N hat es?**

  > $N = 15$

- **Welche Gruppenlaufzeit τ_g hat es?**

  > **Mitte des Filters** -> $\tau_g = \frac{N}{2} \cdot T_S = 15/2 \cdot T_S = 7.5 * T_S$

> **Mitte des Filters ->** $\tau_g = \frac{\quad}{2} \cdot T_S = 15/2 \cdot T_S = 7.5 * T_S$

- **Berechnen Sie die Frequenzen, bei denen der Betragsgang Null wird (siehe z.B. Folie LTF-54 oder Musterlösung zu Aufgabe 2.11).**
- **Wie müsste $h[n]$ aussehen, damit die Gruppenlaufzeit $\tau_g = 0$ wäre?**

SIMULATION:

- **Plotten Sie Betrags- und Phasenfrequenzgang, Gruppenlaufzeit und P/N-Diagramm.**

- **Lesen Sie $H(f = 0)$ aus der Simulation ab und vergleichen Sie mit Ihrem berechneten Wert.**

> **Simulation: Dämpfung vin H(f=0) = 0dB -> DC-Verstärkung von 1**
>
> **Berechnung: Für z = 0 -> H_z(z=0) = 0.06251 + 0.0625z^-1 + 0.0625z^-2 .... + 0.0625z^-15 = 1 -> Gleiche DC Verstärkung**

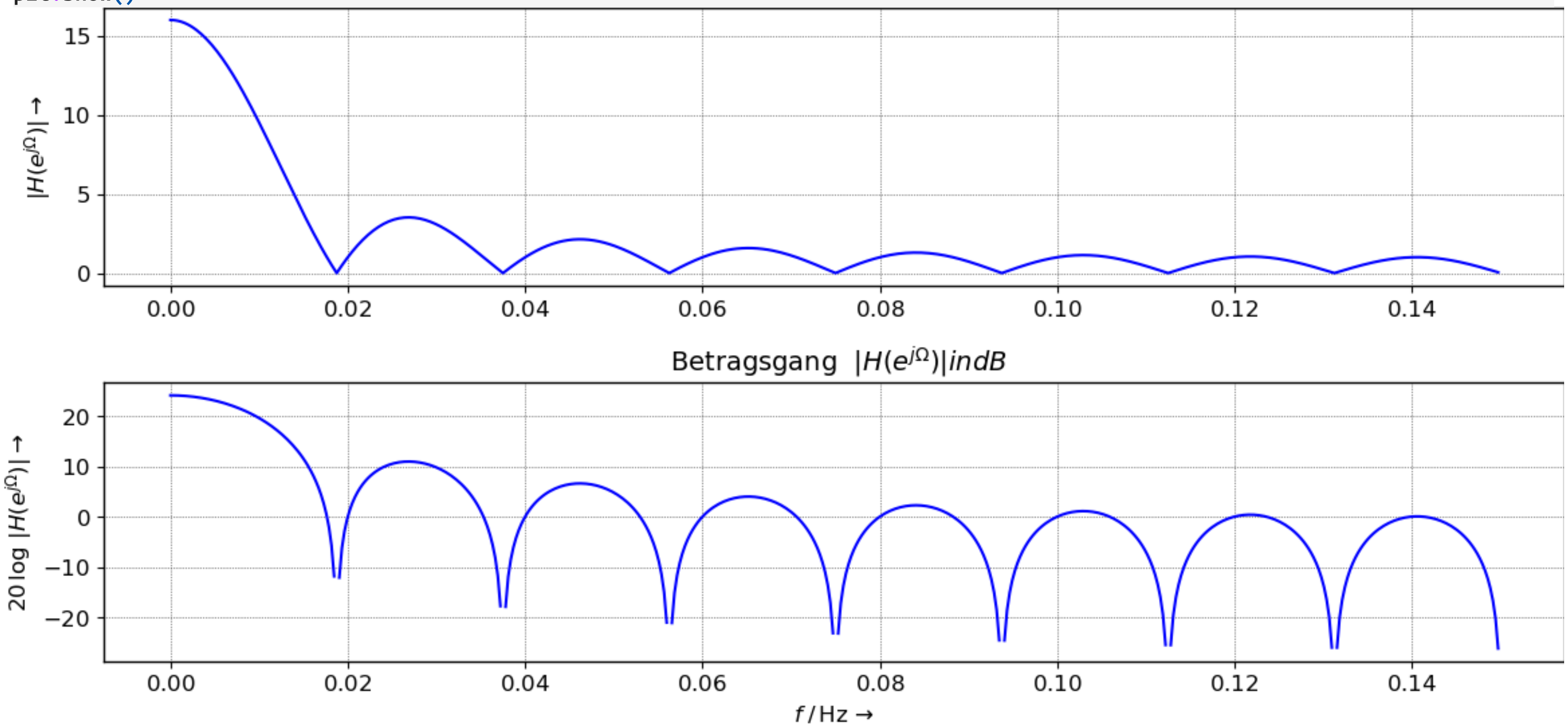
- **Stimmt die simulierte Gruppenlaufzeit mit der berechneten überein?**

> **Gruppenlaufzeit liegt ca. 117ms**

In [ ]:

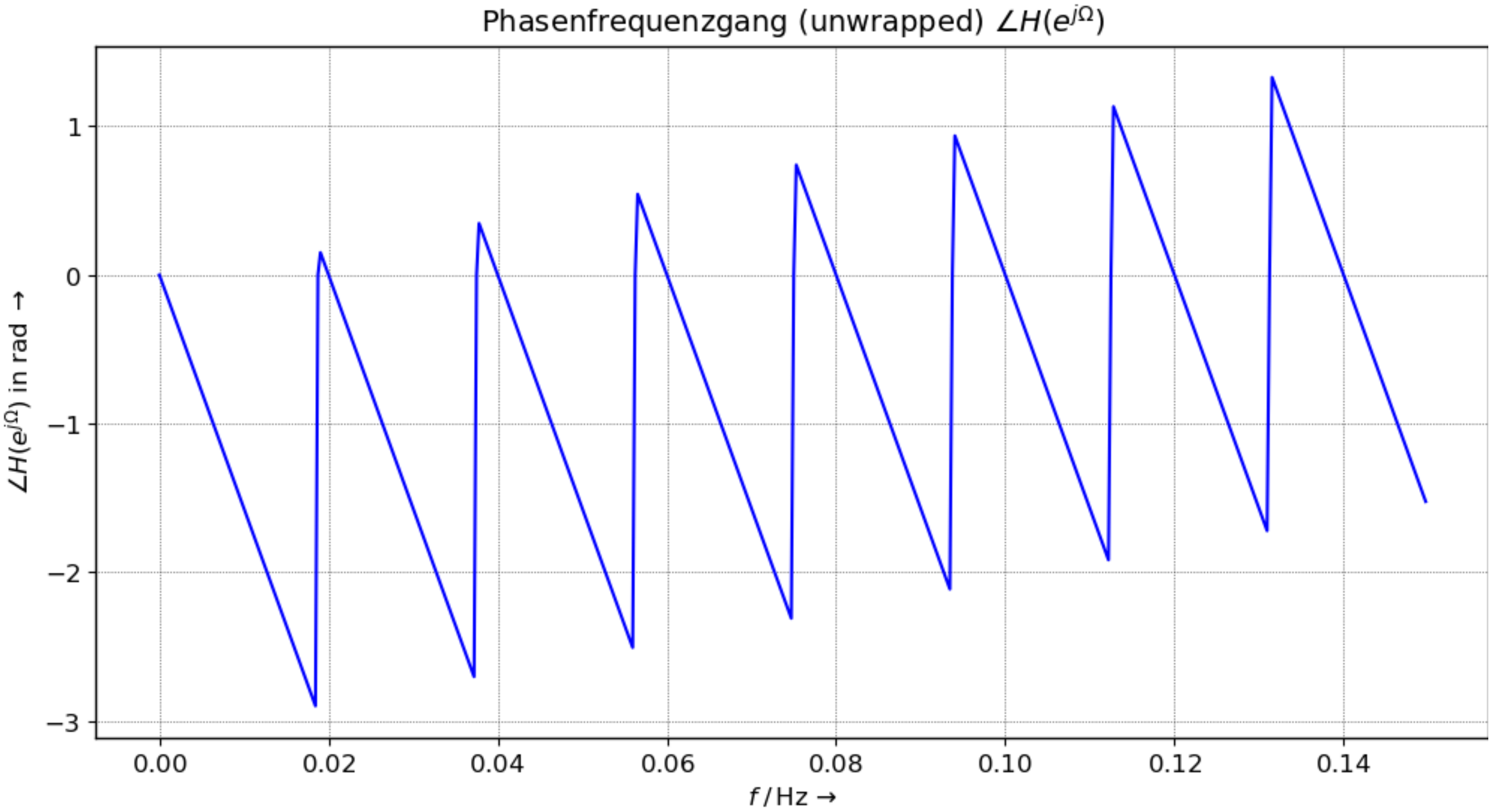
```
b = np.ones(16); a = 1
fig, [ax1,ax2] = plt.subplots(2,**size)
f_P = 0.2 # Eckfrequenz Passband bezogen auf f_S/2
f_S = 0.3 # Eckfrequenz Stopband bezogen auf f_S/2
Apass = 1 # max. Ripple im Passband in dB
Astop = 40 # min.Dämpfung im Stopband in dB
fil_type='ellip'
#b,a = sig.iirdesign(f_P, f_S, Apass, Astop, ftype=fil_type)
[W, H] = sig.freqz(b, a, whole=False);
f = f_S * W  / (2 * np.pi)
ax1.plot(f, (np.abs(H)), 'b')
ax1.set_ylabel(r'$|H(e^{j \Omega})| \rightarrow$')
ax1.set_title(r'Betragsfrequenzgang $|H(e^{j \Omega})|$')
#
ax2.set_title(r' Betragsgang $\ |H(e^{j \Omega})| in dB$')
ax2.plot(f, 20*np.log10(np.abs(H)), 'b')
ax2.set_ylabel(r'$20 \,\log \,|H(e^{j \Omega})| \rightarrow$')
```

```
ax2.set_xlabel(r'$f \; \mathrm{/\,Hz} \, \rightarrow$');
#
plt.tight_layout()
plt.show()
```



In [ ]:

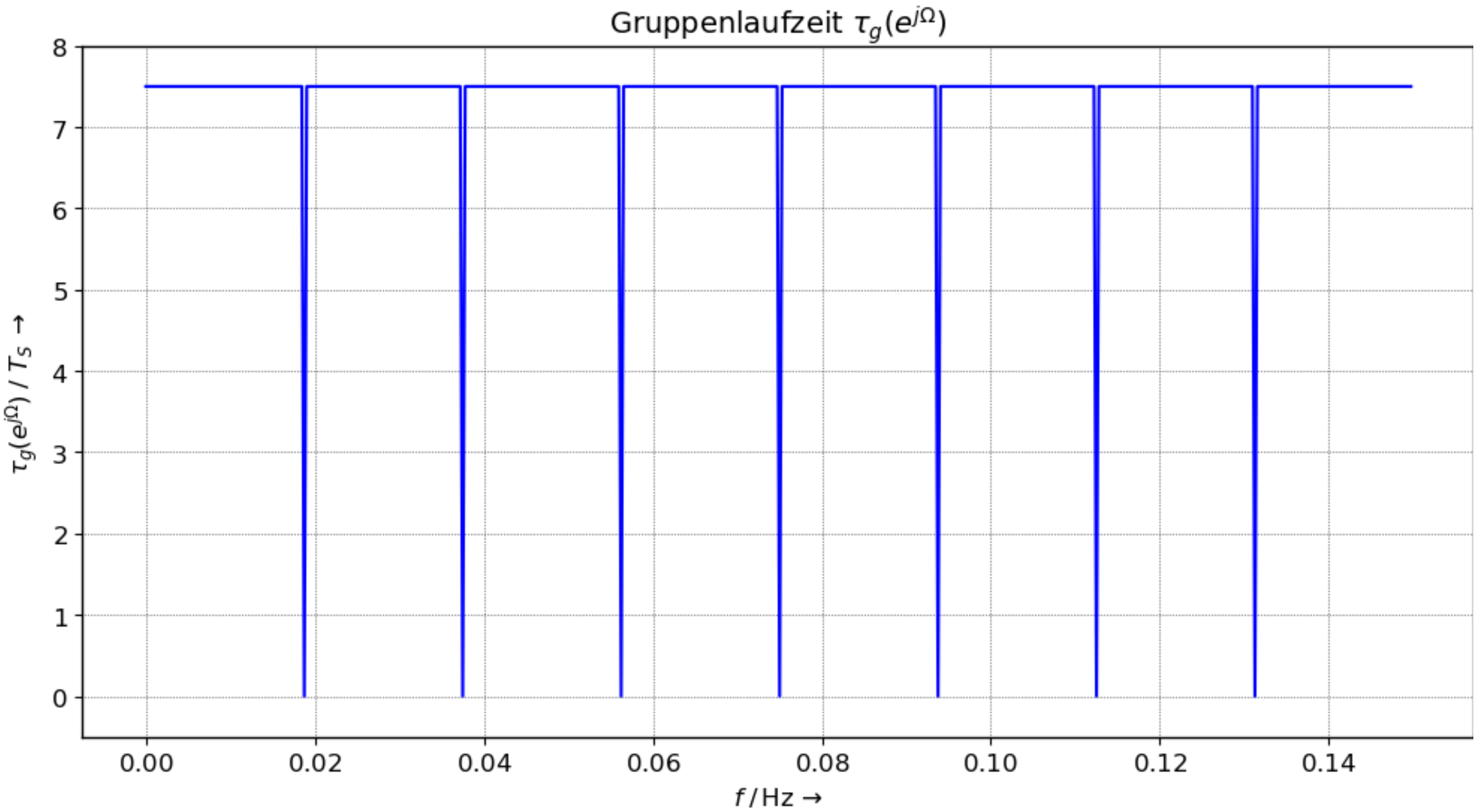
```
fig, ax3 = plt.subplots(**size)
#[W, H] = sig.freqz(b, a, whole=False);
#f = f_S * W  / (2 * np.pi)
ax3.plot(f,np.unwrap(np.angle(H)), 'b')
ax3.set_ylabel(r'$\angle H(e^{j \Omega}) \mathrm{\;in\;rad\;} \rightarrow$')
ax3.set_xlabel(r'$f \; \mathrm{/\,Hz} \, \rightarrow$')
ax3.set_title(r'Phasenfrequenzgang (unwrapped) $\angle H(e^{j \Omega})$');
```



In [ ]:

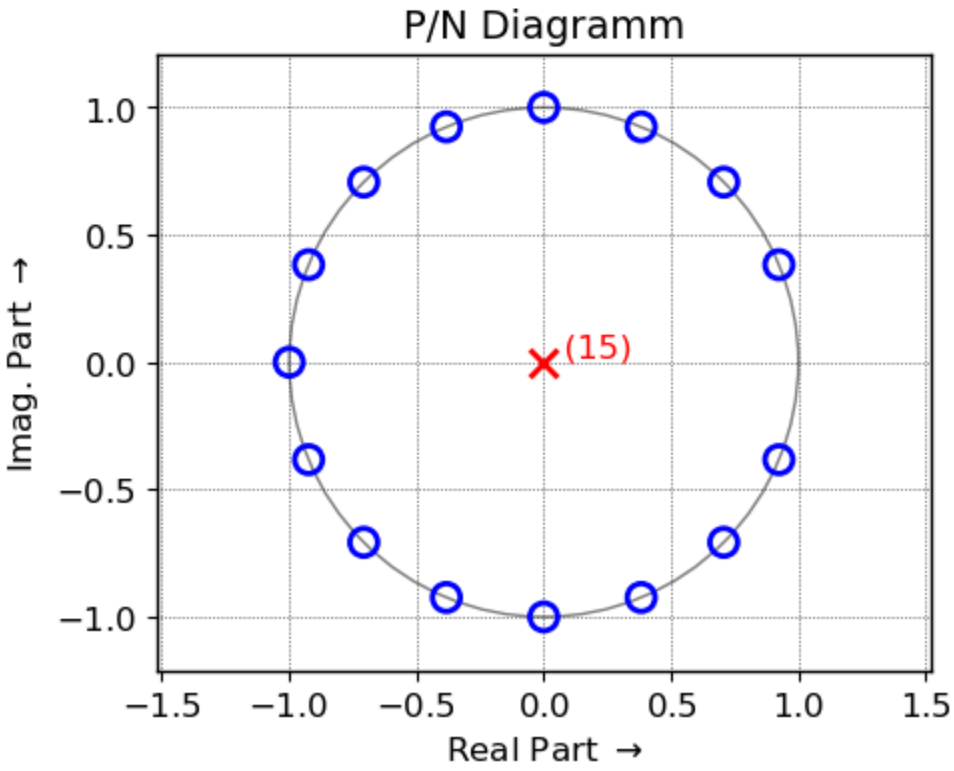
```
fig, ax = plt.subplots(**size)
W, tau_g = dsp.group_delay(b, a)
f = f_S * W  / (2 * np.pi)
ax.plot(f, tau_g, 'b')
ax.set_ylabel(r'$\tau_g(e^{j \Omega}) \;/\; T_S \;\rightarrow$')
ax.set_xlabel(r'$f \; \mathrm{/\,Hz} \, \rightarrow$')
ax.set_ylim([min(tau_g)-0.5, max(tau_g)+0.5])
ax.set_title(r'Gruppenlaufzeit $\tau_g(e^{j \Omega})$');
```

```
FIR filter, using J.O. Smith's algorithm for group delay.
singularity -> setting to 0 at:
i = 0.39269908169872414
i = 0.7853981633974483
i = 1.1780972450961724
i = 1.5707963267948966
i = 1.9634954084936207
i = 2.356194490192345
i = 2.748893571891069
i = 3.141592653589793
i = 3.5342917352885173
i = 3.9269908169872414
i = 4.319689898685965
i = 4.71238898038469
i = 5.105088062083414
i = 5.497787143782138
i = 5.890486225480862
```



In [ ]:

```
fig3, ax3 = plt.subplots(figsize=(5,4))
ax3.set_xlabel(r'Real Part $\rightarrow$');
ax3.set_ylabel(r'Imag. Part $\rightarrow$')
ax3.set_title('P/N Diagramm')
dsp.zplane(b,a,plt_ax=ax3);
```


P/N Diagramm
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
Imag. Part →
(15)
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
Real Part →

Copyright

← LAB ◊ ↑ TOC ↑

Name, Vorname:

LAB 2: Filterung und DFT als Näherung für spektrale Analyse

Inhalt

0. Allgemeine Hinweise

- \<SHIFT>-\<RETURN> führt eine Codezelle aus und rendert eine Textzelle.
- In Markdown sind Leerzeilen wichtig zum Trennen von Abschnitten!
- Sie können LaTeX-Code zwischen $ ... \$ einschließen.
- Kontexthilfe zu Funktionen etc. bekommen Sie über \<SHIFT>-\<TAB>

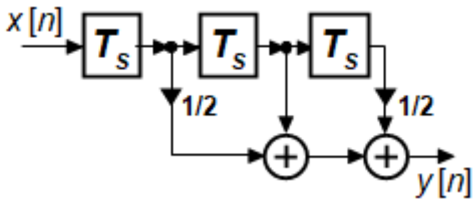
Nach dem Praktikumsversuch exportieren Sie das Notebook mit Textantworten, Codezellen und Plots als HTML (File -> Export Notebook As ... -> Export Notebook to HTML) und reichen es in Moodle ein.</div>

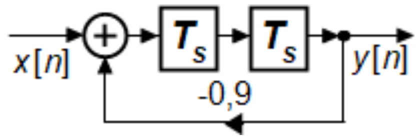
In [ ]:
```python
import os, sys
module_path = os.path.abspath(os.path.join('..')) # append directory one level up to import path
if module_path not in sys.path:  # ... if it hasn't been appended already
    sys.path.append(module_path)
import dsp_fpga_lib as dsp
dsp.versions() # print versions

%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
size = {"figsize":(12,5)} # Plotgröße in Inch

import numpy as np
import scipy.signal as sig
import wave

from IPython.display import Audio, display
#---------------------------------------------------------------------------------
def wav2np(filename):
    """ Read the wav-file and convert it to a one or two-dimensional numpy array,
        depending on the number of channels.
        Properties of the WAV-file are stored as function attributes (evil)
    """
    wf = wave.open(filename,'rb')
    wav2np.N_CH = wf.getnchannels() # number of channels
    wav2np.W    = wf.getsampwidth() # wordlength per sample in bytes
    wav2np.N_FR = wf.getnframes()   # number of frames
    wav2np.f_S  = wf.getframerate() # sample (frame) rate

    print("{0} channels with {1} frames of {2} bytes and f_S = {3} Hz.".format(wav2np.N_CH, wav2np.N_FR, wav2np.W, wav2np.f_S)

    if wav2np.W == 2:
        samples_in = np.frombuffer(wf.readframes(-1), dtype=np.int16) # read wav data as 16 bit integers, R and L samples are
    elif wav2np.W == 1:
        samples_in = np.frombuffer(wf.readframes(-1), dtype=np.int8) # read wav data as 8 bit integers, R and L samples are in
    else:
         raise TypeError("Unknown data format: {0} bytes".format(wav2np.W))

    samples = np.array([samples_in[idx::wav2np.N_CH] for idx in range(wav2np.N_CH)], dtype=np.int32) # deinterleave channels t
    return samples
```

```
Python version: 3.10.9
Numpy: 1.23.5
Scipy: 1.10.0
Matplotlib: 3.7.0 module://matplotlib_inline.backend_inline
```

1. FIR und IIR Filter

In diesem Abschnitt analysieren Sie die beiden Filter aus der folgenden Abbildung:





Filter 1	Filter 2

VORBEREITUNG:

- Woran erkennen Sie, welches davon ein IIR- und welches ein FIR Filter ist?

> Filter 1 hat keine Rückkopplung FIR
>
> Filter 2 hat Rückkopplung IIR

- Berechnen Sie die Differenzengleichung der beiden Filter.

> Filter 1 $y[n] = 0.5 \cdot x[n-1] + x[n-2] + 0.5 \cdot x[n-3]$
>
> Filter 2 $y[n] = 0.9 \cdot y[n-2] + x[n-2]$

- Berechnen Sie die Systemantwort der beiden Filter. Können Sie die Impulsantwort beider Filter einfach aufschreiben?

  Systemfunktionen

> Filter 1 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0.5z^{-1} + z^{-2} + 0.5z^{-3} = \frac{0z^3+0.5z^2+z+0.5}{z^3} = 0.5 \cdot \frac{(z+1)^2}{z^3}$
>
> Filter 2 $H(z) = \frac{z^{-2}}{1+0.9z^{-2}} = \frac{1}{z^2+0.9}$

  Impulsantwort

> Filter 1 $h[n] = \{0; 0.5; 1; 0.5\}$
>
> Filter 2 $h[n] = \delta[n-2] - 0.9h[n-2]$

- Berechnen Sie Pole und Nullstellen beider Systemfunktionen und skizzieren Sie (auf einem Blatt Papier) den P/N - Plan.

> Berechnung über Mitternachtsformel FIR: Alle 3 Pole im Ursprung & 2 Nst. bei (-1)
>
> IIR: Keine Nst. , komplex konjugierte Pole bei $\pm 0.949i$

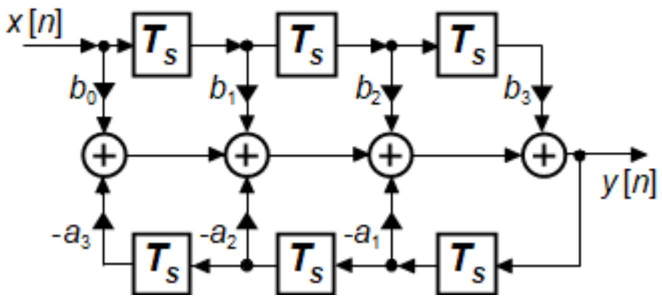
- Schätzen Sie aus dem P/N Plan ab, um welchen Filtertyp es sich handelt. Bei welcher Frequenz liegt das Maximum des Betragsgangs? Welchen Wert hat es?

Welchen Wert hat es?

> Tiefpass bei FIR
>
> Bandpass bei IIR

1.1 Simulation

Für die Simulation müssen wir zuerst die Filter als Koeffizientenvektoren `a` und `b` darstellen (siehe folgendes Bild und Abschnitt 3 von LAB 1).



Als "Codesteinbruch" können Sie wieder das Notebook 02_LTF/LTF-Filter_properties.ipynb verwenden.

Alternativ verwenden Sie pyfda: Im Tab "b,a" importieren Sie Koeffizienten aus einem CSV-File oder (nach Auswahl von "Clipboard" in den Einstellungen) direkt aus der Zwischenablage. Die Koeffizienten `b` des nicht-rekursiven Teils geben Sie hierfür getrennt durch Kommata an, optional in einer zweiten Zeile die Koeffizienten `a` des rekursiven Teils.

SIMULATION:

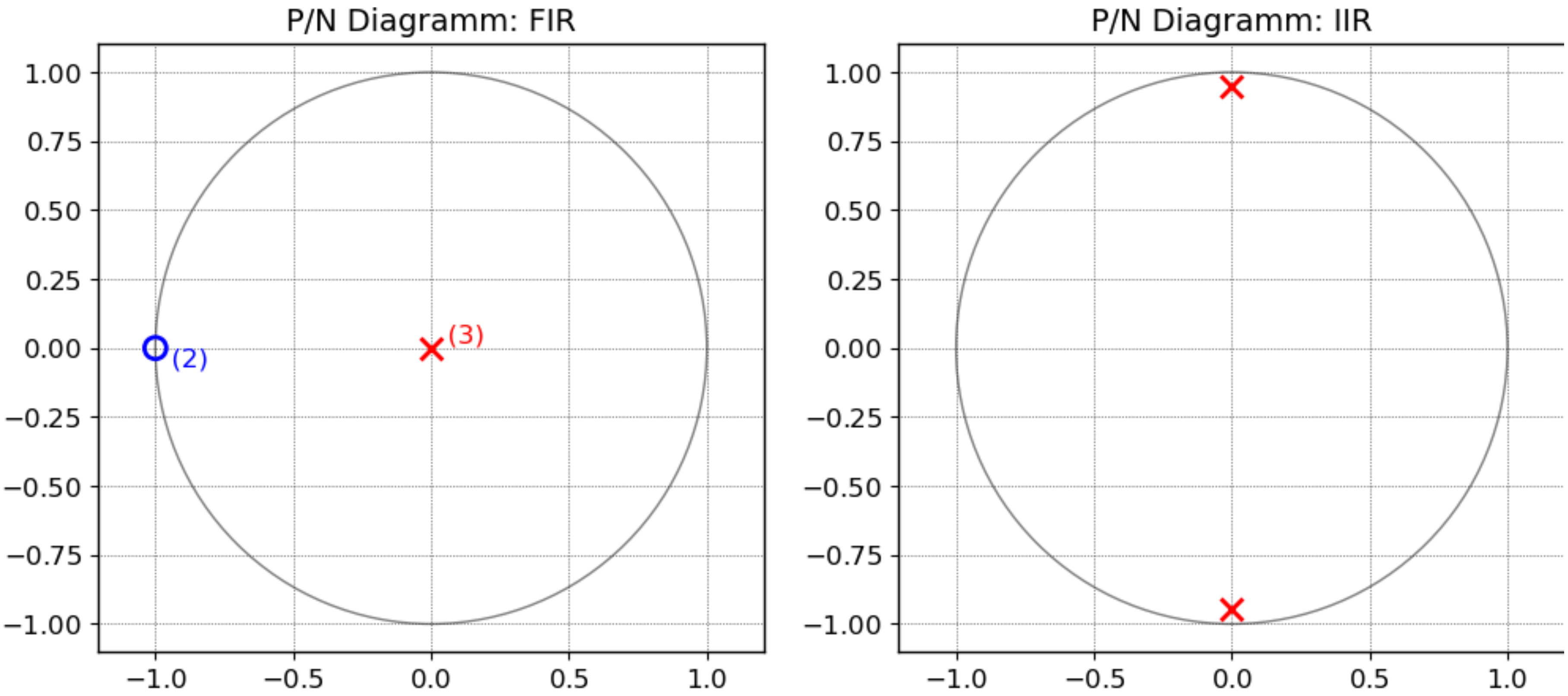
- Stellen Sie Filter 1 und Filter 2 (s.o.) als Koeffizientenvektoren `a` und `b` dar. Informationen dazu finden Sie im Abschnitt 3 von LAB 1 und in obiger Abbildung. Beachten Sie:
  - Die Reihenfolge ist $a = [1, a_1, a_2, \ldots]$ und $b = [b_0, b_1, \ldots]$. Warum ist immer $a_0 = 1$? Warum dreht sich das Vorzeichen der rekursiven Koeffizenten herum?
  - "Fehlende" Koeffizienten müssen als 0 eingetragen werden.
  - Die imaginäre Einheit ist `1j`, dementsprechend werden imaginäre Zahlen z.B. als `0.3j` repräsentiert.
- Testen Sie mit dem P/N Diagramm, ob Rechnung und Simulation zusammen passen.
- Lassen Sie sich die Impulsantwort anzeigen, für das FIR-Filter ist das relativ einfach ;-), beim IIR-Filter benötigen Sie `dsp.impz()`
- Plotten Sie Betragsfrequenzgang, Phasengang und Gruppenlaufzeit.

1.1.1 P/N Diagramm

In [ ]:

```python
a_FIR = [1,0,0,0]
b_FIR = [0,0.5,1,0.5]
#'a_FIR = [2,0,0,0]
#b_FIR = [0,1,2,1]
a_IIR = [1,0,0.9]
b_IIR = [1]
#---------------
fig, (ax1,ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2,**size)
ax1.set_title('P/N Diagramm: FIR')
dsp.zplane(b_FIR,a_FIR, plt_ax=ax1);
print("Nullstellen FIR: {0}".format(np.roots(b_FIR)))

ax2.set_title('P/N Diagramm: IIR')
dsp.zplane(b_IIR,a_IIR, plt_ax=ax2);
print("Nullstellen IIR: {0}".format(np.roots(b_IIR)))
if type(a_IIR) in {list, np.ndarray} and len(a_IIR) > 1:
    print("Polstellen IIR:  {0}\n".format(np.roots(a_IIR)))
```

```
Nullstellen FIR: [-1. -1.]
Nullstellen IIR: []
Polstellen IIR:  [-0.+0.9486833j  0.-0.9486833j]
```

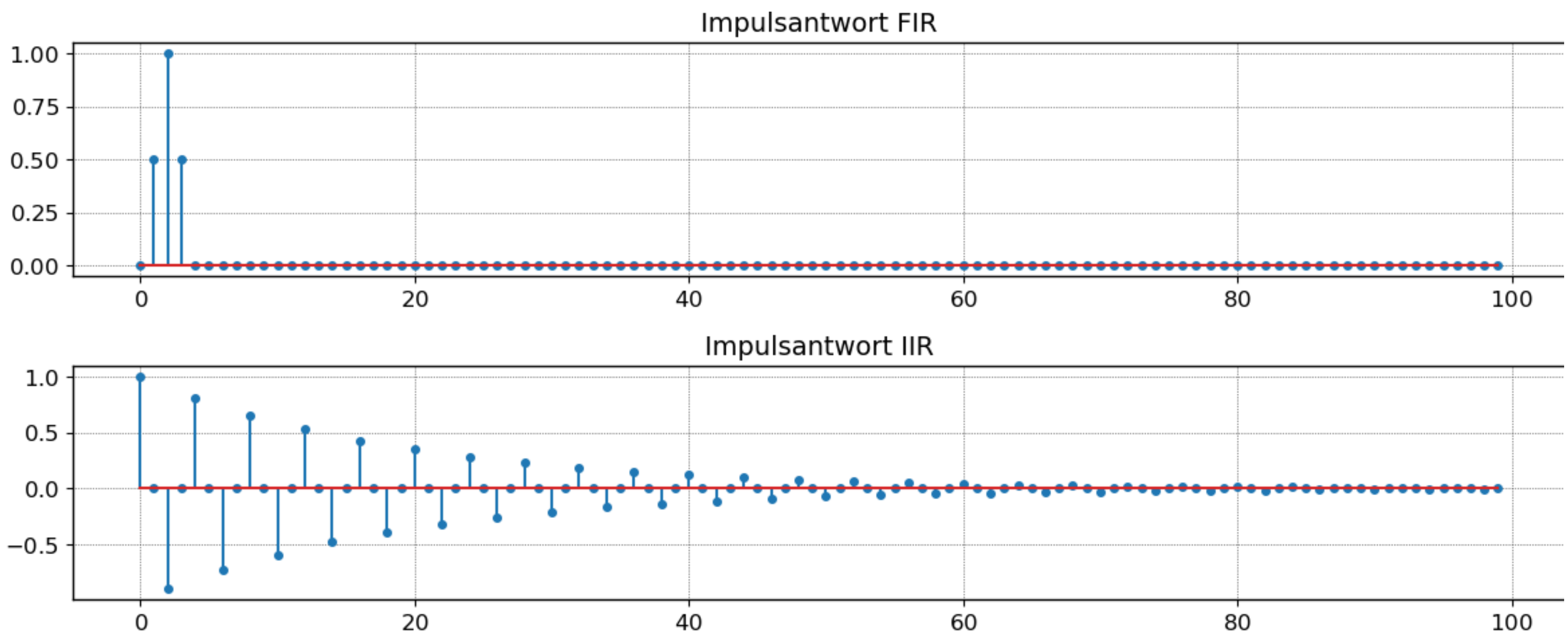


1.1.2 Impulsantwort

Der Befehl `h,t = dsp.impz(b,a)` berechnet die Impulsantwort, die Sie dann plotten können, am Besten als stem-Plot.

Warum ist beim IIR-Filter jeder zweite Impuls Null?

In [ ]:
```
fig, (ax1,ax2) = plt.subplots(nrows=2, ncols=1,**size)
ax1.set_title('Impulsantwort FIR')
h_FIR,t_FIR = dsp.impz(b_FIR,a_FIR);
ax1.stem(t_FIR, h_FIR, markerfmt='.')
ax2.set_title('Impulsantwort IIR')
h_IIR,t_IIR = dsp.impz(b_IIR,a_IIR);
ax2.stem(t_IIR, h_IIR, markerfmt='.')
fig.set_tight_layout(True)
```



1.1.3 Betrags- und Phasengang sowie Gruppenlaufzeit

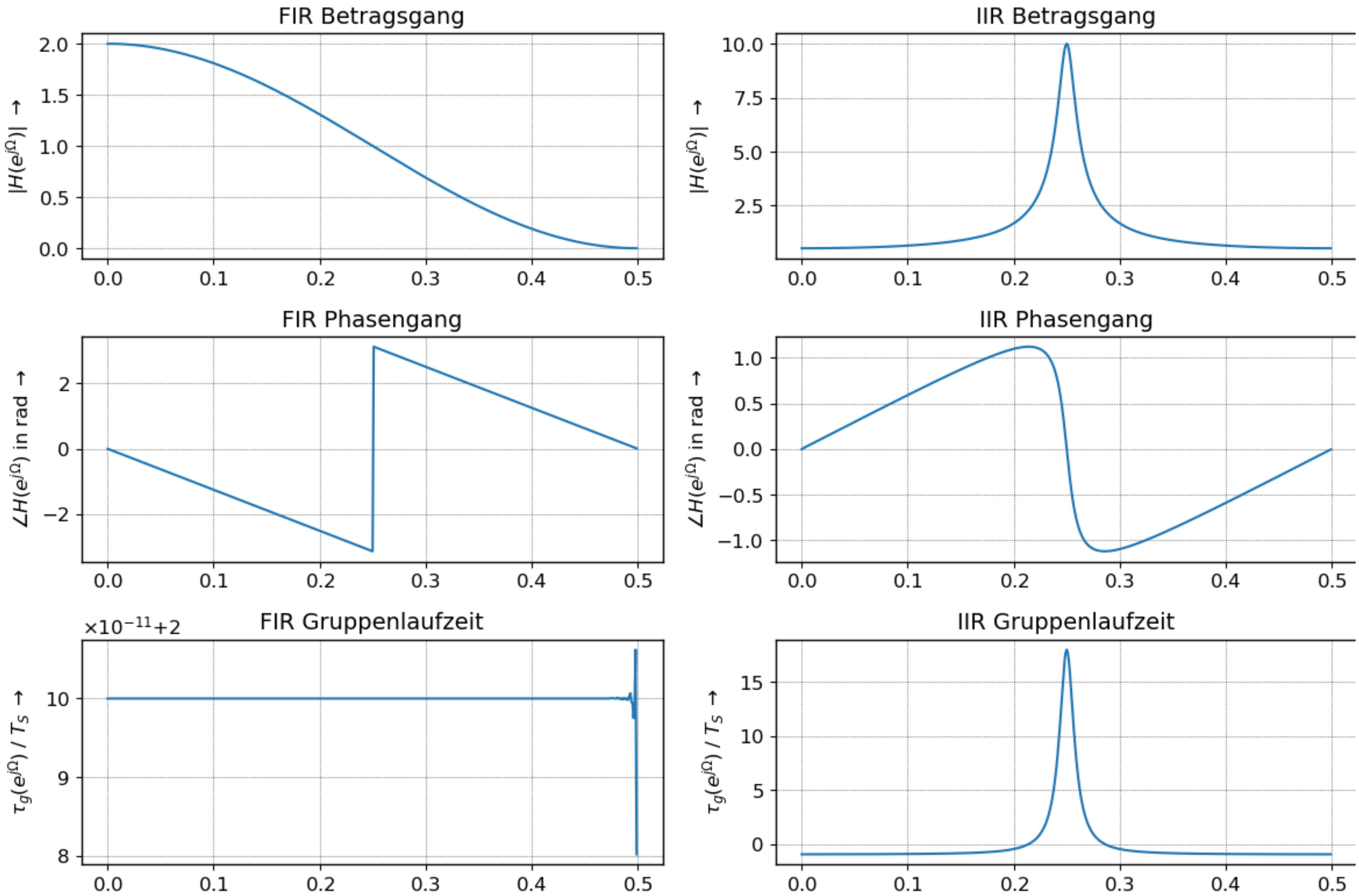
Aus dem komplexen Frequenzgang `omega, H = sig.freqz(b,a)` ermitteln Sie mit `np.abs()` und `np.angle()` Betrags- und Phasengang. Defaultmäßig werden 512 Frequenzpunkte zwischen 0 und $f_S/2$ bestimmt und als normierte Kreisfrequenz zurückgegeben.

Die Gruppenlaufzeit ermitteln Sie mit `w, H = sig.group_delay((b,a), omega)`. Mit `omega` übergeben Sie die Frequenzen, an denen die Gruppenlaufzeit berechnet werden soll (z.B. die, die Sie aus der Berechnung des komplexen Frequenzgangs erhalten haben).

Der Plot der Gruppenlaufzeit sieht u.U. etwas seltsam aus, mit `set_ylim([y_min, y_max])` passen Sie die Grenzen an.

In [ ]:

```python
fig, ax = plt.subplots(nrows=3, ncols=2, figsize=(12,8))
w_FIR, H_FIR = sig.freqz(b_FIR, a_FIR)
_, tau_FIR = sig.group_delay((b_FIR, a_FIR), w_FIR)
w_IIR, H_IIR = sig.freqz(b_IIR, a_IIR)
_, tau_IIR = sig.group_delay((b_IIR, a_IIR), w_IIR)
ax[0][0].set_title("FIR Betragsgang")
ax[0][0].plot(w_FIR / (2*np.pi), np.abs(H_FIR))
ax[0][0].set_ylabel(r"$|H(e^{j \Omega})| \;\rightarrow$")
ax[1][0].set_title("FIR Phasengang")
#ax[1][0].plot(w_FIR / (2*np.pi), np.unwrap(np.angle(H_FIR)))
ax[1][0].plot(w_FIR / (2*np.pi), np.angle(H_FIR))
ax[1][0].set_ylabel(r'$\angle H(e^{j \Omega}) \mathrm{\;in\;rad\;} \rightarrow$')
ax[2][0].set_title("FIR Gruppenlaufzeit")
ax[2][0].plot(w_FIR / (2*np.pi), tau_FIR)
ax[2][0].set_ylabel(r'$\tau_g(e^{j \Omega}) \;/\; T_S \;\rightarrow$')
#ax[2][0].set_ylim([min(tau_FIR)-0.5, max(tau_FIR)+0.5])
#...
ax[0][1].set_title("IIR Betragsgang")
ax[0][1].plot(w_IIR / (2*np.pi), np.abs(H_IIR))
ax[0][1].set_ylabel(r"$|H(e^{j \Omega})| \;\rightarrow$")
ax[1][1].set_title("IIR Phasengang")
ax[1][1].plot(w_IIR / (2*np.pi), np.unwrap(np.angle(H_IIR)))
ax[1][1].set_ylabel(r'$\angle H(e^{j \Omega}) \mathrm{\;in\;rad\;} \rightarrow$')
ax[2][1].set_title("IIR Gruppenlaufzeit")
ax[2][1].plot(w_IIR / (2*np.pi), tau_IIR)
ax[2][1].set_ylabel(r'$\tau_g(e^{j \Omega}) \;/\; T_S \;\rightarrow$')
#ax[2][1].set_ylim([min(tau_IIR)-0.5, max(tau_IIR)+0.5])
#ax[2][1].set_xlabel(r"$F \;\rightarrow$")
fig.set_tight_layout(True)
```



FIR Betragsgang
IIR Betragsgang
$|H(e^{j\Omega})| \rightarrow$
FIR Phasengang
IIR Phasengang
$\angle H(e^{j\Omega})$ in rad $\rightarrow$
FIR Gruppenlaufzeit
IIR Gruppenlaufzeit
$\times 10^{-11}+2$
$\tau_g(e^{j\Omega})$ / T_S $\rightarrow$

1.2 Anhören

Im folgenden filtern wir Sprach- oder Rauschsignale mit unseren beiden Filtern und hören und schauen uns das Resultat an. Eine FIR-Filterung könnten Sie wieder mit `convolve(x,h)` durchführen (nur für eindimensionale Arrays). Warum funktioniert bei IIR-Filtern die `convolve` -Methode nicht?

Für IIR und FIR-Filter können Sie die Routine `y = sig.lfilter(b,a,x)` verwenden (funktioniert auch mit zweidimensionalen Arrays).

SIMULATION:

- Filtern Sie ein Rauschsignal oder einen WAV-File aus dem Unterordner `medien` mit dem FIR- und dem IIR-Filter. Rauschen erzeugen Sie wieder z.B. mit `x_n = np.random.randn(16000)` , WAV-Files wandeln Sie mit der Hilfsfunktion `wav2array(filename)` in ein ein- oder zweidimensionales Array um.

- Hören Sie sich die Wirkung der beiden Filter an mit der `Audio` Klasse aus dem `IPython.display` - Modul:

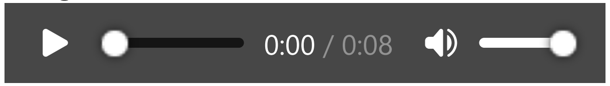
  `display(Audio((data=None, rate=None)` , `data` kann dabei ein ein- oder zweidimensionales numpy-Array oder Liste sein, ein Filename oder auch eine URL. Der Parameter `rate` definiert die Abtastrate.

- Schauen Sie sich einen Ausschnitt des ursprünglichen und des gefilterten Signals im gleichen Plot an und vergleichen Sie.

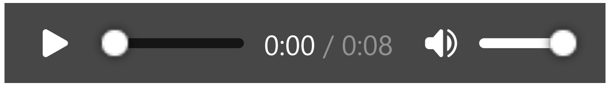
In [ ]:
```
x_n = np.random.randn(16000)
x_w = wav2np("../medien/87778__marcgascon7__vocals.wav")
#Convolve ?!?
print(np.shape(x_w))
y_FIR = sig.lfilter(b_FIR, a_FIR, x_w)
y_IIR = sig.lfilter(b_IIR, a_IIR, x_w)
print('\nOriginal')
display(Audio(data=x_w, rate=wav2np.f_S))
print('Rauschen FIR')
display(Audio(data=y_FIR, rate=wav2np.f_S))
print('Rauschen IIR')
display(Audio(data=y_IIR, rate=wav2np.f_S))
y_FIR
```

```
2 channels with 349952 frames of 2 bytes and f_S = 44100 Hz.
(2, 349952)
```

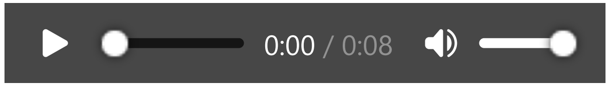
Original



Rauschen FIR



Rauschen IIR

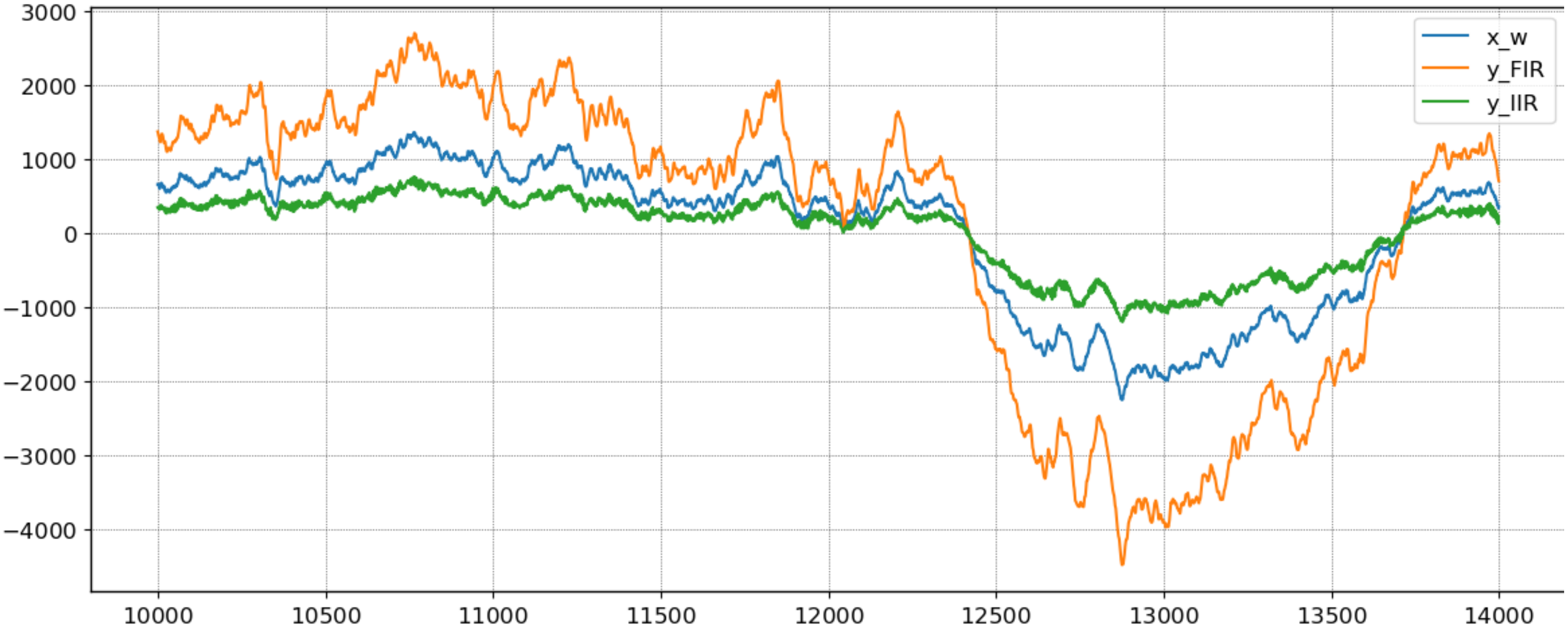


Out[ ]:

```
array([[ 0.0000e+00, -5.0000e-01, -2.5000e+00, ..., -1.4790e+03,
        -1.5620e+03, -1.5810e+03],
       [ 0.0000e+00,  1.4000e+01,  3.9000e+01, ..., -1.1710e+03,
        -1.1850e+03, -1.1755e+03]])
```

In [ ]:

```
#fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(**size, nrows=3)
fig, ax1 = plt.subplots(**size)
l = 4000
start = 10000

t =np.arange(start, start+l, 1)

ax1.plot(t, x_w[0][t], label="x_w")
ax1.plot(t, y_FIR[0][t],label="y_FIR")
ax1.plot(t, y_IIR[0][start:start+l], label="y_IIR")
ax1.legend();
fig.set_tight_layout(True)
```

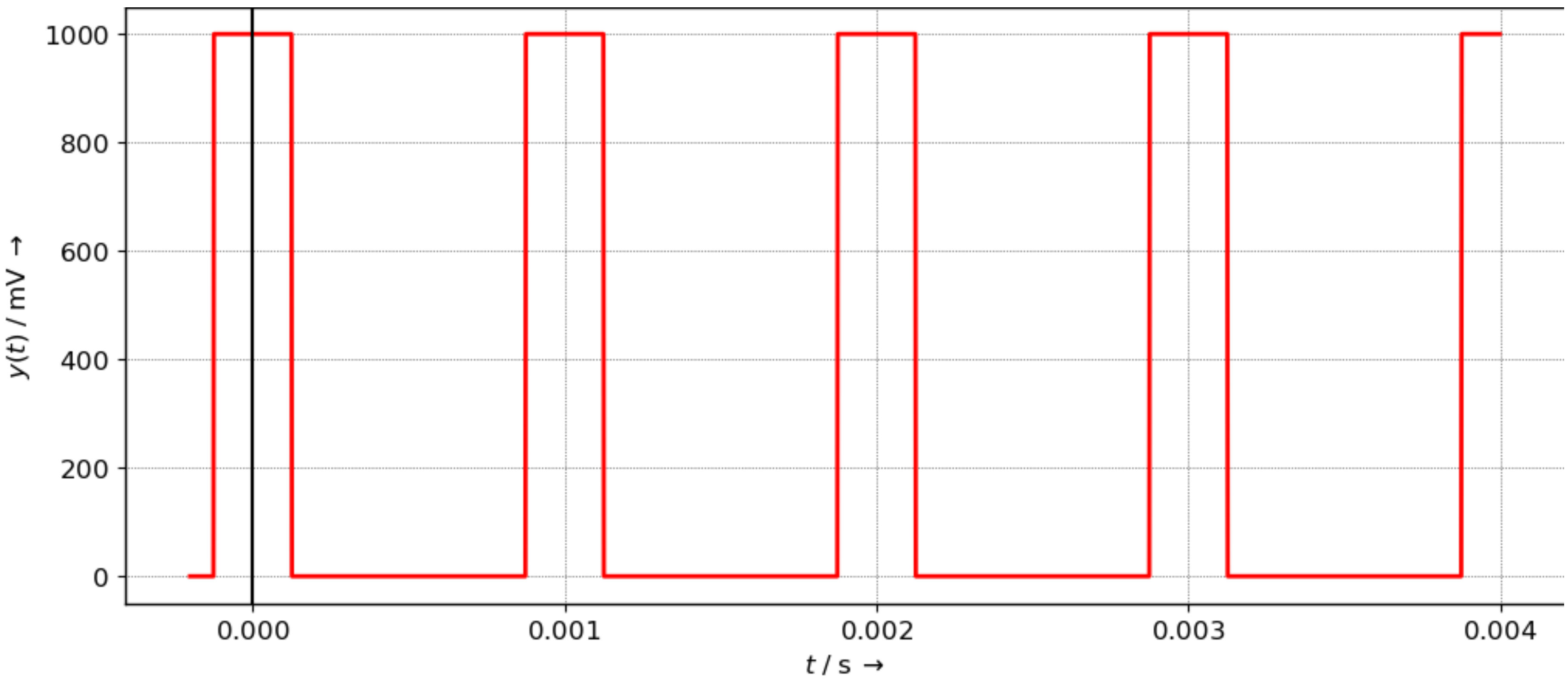


2. Fourierreihe einer Rechteckpulsfolge

In diesem Versuchsteil bestimmen wir die Fourierkoeffizienten einer rechteckförmigen zeitkontinuierlichen Pulsfolge mit $T_1 = 1$ ms. Der Duty Cycle $\alpha = 0.25$ und Amplitude $A = 1000$ mV, die Pulsbreite ist also $\Delta T = T_1/4$ (siehe nächster Plot).

In [ ]:

```
fig, ax = plt.subplots(**size)
t = np.arange(-0.2e-3, 4e-3, 1/640e3) # pseudo-analoger Zeitvektor in ms (mit 640 kHz so fein abgetastet, dass der Unterschied
y = 500*sig.square(t*1e3*2*np.pi+np.pi/4, duty=0.25) + 500
ax.plot(t, y, 'r', lw=2)
ax.axvline(0, ls='-',color='k')
ax.set_xlabel(r"$t \; / \;\mathrm{s} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$y(t)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
```


1000
800
600
400
200
0
y(t) / mV →
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
t / s →

2.1 Berechnung der Koeffizienten

Ein mit T_1 periodisches Signal $y(t)$ lässt sich mit Hilfe der Fourierreihe für reellwertige Signale (Index $k \in \mathbb{N}_0$) darstellen:

$$y(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi k f_1 t + b_k \sin 2\pi k f_1 t \;\; k \in \mathbb{N}$$

Zunächst berechnen wir die Koeffizienten a_k, b_k für $k = 0, 1, \ldots, 11$ mit Hilfe der Formel für die Fourierreihe von reellwertigen Zeitsignalen. Da das Signal achsensymmetrisch ist, sind die imaginärwertigen Koeffizienten $b_k = 0$.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} y(t)\cos(2k\pi f_1 t)\,\mathrm{d}t = \frac{A}{T_1}\int_{-\alpha T_1/2}^{\alpha T_1/2} \cos(2k\pi f_1 t)\,\mathrm{d}t & (1) \\ &= \frac{A}{T_1 \cdot 2k\pi f_1}\sin(2k\pi f_1 t)\Big|_{-\alpha T_1/2}^{\alpha T_1/2} = \frac{A}{k\pi}\sin(k\alpha\pi) = A\alpha\,\mathrm{si}(k\alpha\pi) & (2) \end{aligned}$$

SIMULATION:

Schreiben Sie ein Skript, das die ersten 11 Koeffizienten der Rechteckfunktion exakt berechnet. Welchen Vorteil hat es, die `sinc(x)` Funktion zu verwenden anstelle von `sin(x)/x`? Aber Achtung: In Numpy (und in Matlab) ist die sinc-Funktion definiert als $\mathrm{sinc}(x) = sin(\pi x)/\pi x$, das π im Argument müssen Sie daher weglassen. Drucken Sie die Ergebnisse übersichtlich in eine Tabelle aus (s.u.)

2.1.1 Formatierte Ausdrucke in Python

Einen formatierten Ausdruck erhalten Sie z.B. mit `print("\n{0:7.2f} | ".format(Y[i]), end="")` (der Teil in der geschweiften Klammer wird ersetzt durch `Y[i]` und formatiert mit insgesamt 7 Stellen, 2 Nachkommastellen, keinen Zeilenumbruch). Eingebettet in eine `for` Schleife bekommen Sie so schnell eine übersichtliche Tabelle.

- **"\n"** erzeugt einen Zeilenumbruch in einem String
- `print(a, end="" )` ersetzt den Zeilenumbruch am Ende des Printbefehls durch ein anderes Zeichen (oder nichts wie hier)
- Die **str.format()** Anweisung ersetzt Ausdrücke in geschweiften Klammern im String durch die Argumente in der .format() Anweisung, versuchen Sie es selbst mit `"{0} ich heiße und bin {1} Jahre alt".format("Yoda", 877)`.
- Der Ausdruck in der geschweiften Klammer kann durch Formatierungsanweisung ergänzt werden, **{0:7.2f}** formatiert das Argument 0 als

Float mit 2 Nachkommastellen und insgesamt mindestens 7 Stellen. **{0:>7}** lässt ebenfalls Platz für mindestens 7 Stellen oder Zeichen und richtet den Ausdruck rechtsbündig aus.

Auf https://www.python-kurs.eu/python3_formatierte_ausgabe.php finden Sie eine übersichtliche Grafik hierzu.

In [ ]:
```
k=np.arange(16)
alpha = 4/16; A = 1000
Y0 =  A*alpha*np.sinc(k*alpha)
print("i = | ", end="")
for i in k:
    #Y.append()
    print("{0:>7d} | ".format(i), end="")
print("\nY0 = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:7.2f} | ".format(Y0[i]), end="")
```

```
i = |       0 |       1 |       2 |       3 |       4 |       5 |       6 |       7 |       8 |       9 |      10 |      11 |
12 |      13 |      14 |      15 |
Y0 = |  250.00 |  225.08 |  159.15 |   75.03 |    0.00 |  -45.02 |  -53.05 |  -32.15 |   -0.00 |   25.01 |   31.83 |   20.46
|    0.00 |  -17.31 |  -22.74 |  -15.01 |
```

2.2 Abschätzung des Spektrums durch FFT

Um das Spektrum des zeitkontinuierlichen Signals mit einer FFT abschätzen zu können, muss es zunächst abgetastet werden und zwar über eine ganzzahlige Anzahl Perioden T_1 (da es ja periodisch ist), wir starten zunächst mit einer Periode, $T_{mess1} = T_1$. Für eine effiziente Berechnung sollen $N_1 = 2^4 = 16$ Samples genommen werden.

VORBEREITUNG:

- Welche Abtastfrequenz f_{S1} ist dafür erforderlich?

> $f_{S1} = \frac{1}{T_{Mess}} \cdot N_1 = \frac{1}{1ms} \cdot 16 = 16$ kHz

- Welchen Abstand T_{S1} haben die abgetasteten Punkte? In welchem Abstand liegen die Frequenzpunkte der FFT?

> $T_{S1} = \frac{1}{f_{S1}} = 62.5\mu s$
>
> $\Delta f = \frac{f_{S1}}{N_1} = \frac{16kHz}{16} = 1000$
>
> **SIMULATION:**

Zunächst einmal benötigen Sie einen passenden Zeitvektor z.B. mit `t1 = np.arange(N_1)/f_S1` oder durch Abtasten des "zeitkontinuierlichen" Zeitvektors `t` (s.u.). Das abgetastete Signal $y_1[n]$ erzeugen Sie:

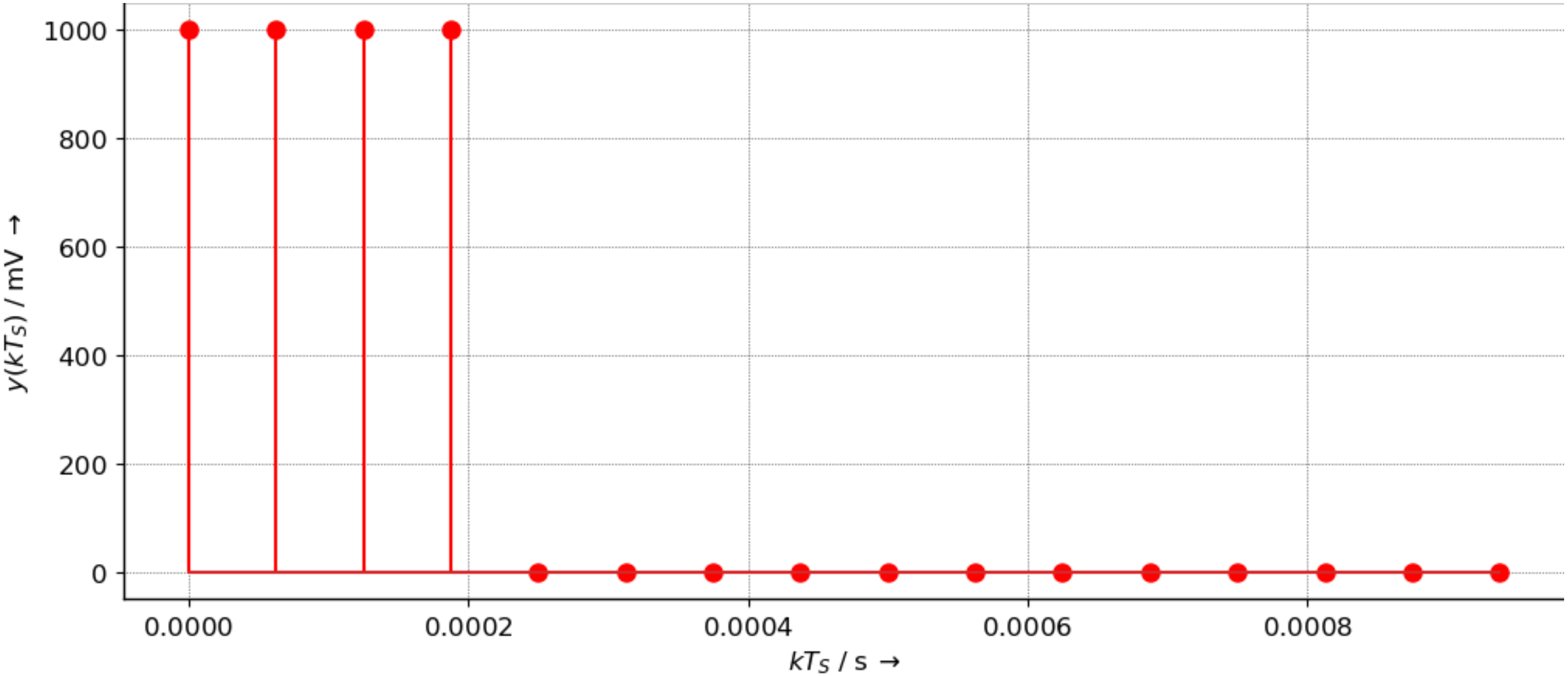
- **Händisch** mit `y1 = np.ones(N_1); y1[4:N_1] = 0` oder durch `y1 = np.concatenate((np.ones(4), np.zeros(12)))`
- Durch **Abtasten** des "zeitkontinuierlichen" Signals ($f_S = 640$ kHz) mit `y1 = y[::40]`, mit diesem Befehl wird von y nur jedes vierzigste Element nach `y1` kopiert. Das funktioniert natürlich nur, wenn wie hier $f_{S1} = f_S/40$ ist. Wenn wie hier Start- und Endwert fehlen, werden alle Elemente von `y` vom ersten bis zum letzten berücksichtigt, Sie müssen ggf. noch Start- und Endwert anpassen, um den richtigen Ausschnitt finden.
- Durch **Berechnung aus dem Zeitvektor** mit Hilfe der `np.where()` Funktion wie im vorigen Lab.

Egal für welche Variante Sie sich entschieden haben, plotten Sie das abgetastete Signal mit dem folgenden Skript

Egal für welche Variante Sie sich entschieden haben, plotten Sie das abgetastete Signal mit dem folgenden Skript.

In [ ]:

```
fig, ax = plt.subplots(**size)
N1 = 16
f_S1 = 16e3
f_S = 64e3
t1 = np.arange(N1)/f_S1
y1 = 1000*np.ones(N1); y1[4:N1] = 0
ax.stem(t1, y1, 'r')
ax.set_xlabel(r"$k T_S \; / \;\mathrm{s} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$y(k T_S)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
```



2.2.1 FFT, erster Ansatz: $f_{S1} = 16 \text{ kHz}$, $N_1 = 16$

VORBEREITUNG:

- Welche höchste Frequenzkomponente ist im zeitkontinuierlichen Signal enthalten?

> $\frac{f_s}{2} = \frac{640kHz}{2} = 320$ kHz

- Welche maximale Frequenzkomponente ist im abgetasteten Signal enthalten?

> $\frac{f_{S1}}{2} = \frac{16kHz}{2} = 8$ kHz

SIMULATION:

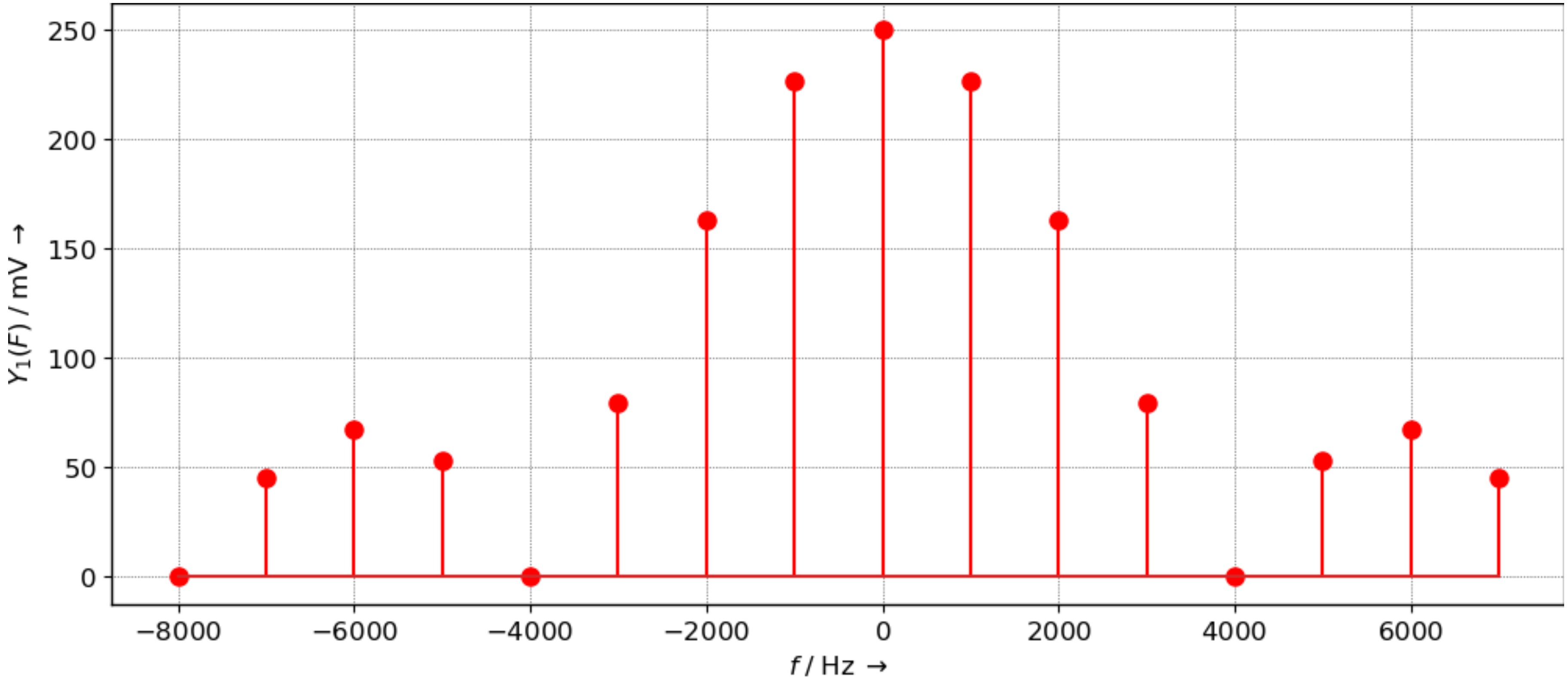
In numpy berechnen wir die FFT mit `Y = np.fft.fft(y, N)` (die FFT liefert *komplexe* Werte ...). Ohne den Parameter `N` wird die FFT über das gesamte Signal berechnet mit der Anzahl der Datenpunkte. Nutzen Sie das Notebook 03_DFT/DFT-Skalierung.ipynb zur korrekten Berechnung und Skalierung des Signals. Mit f = `np.fft.fftfreq(N, T_S)` erzeugen Sie eine passenden Frequenzvektor.

- Vervollständigen Sie das Skript in der nächsten Codezelle: Wie müssen Sie die Amplitude und die Frequenz skalieren, um physikalisch sinnvolle Werte zu erhalten?

In [ ]:

```python
fig, ax = plt.subplots(**size)
N1 = 16
f_S1 = N1 * 1e3
t1 = np.linspace(0.0, N1 / f_S1, num = N1, endpoint=False)
#y1 = ...
#y1 = np.ones(N1); y1[4:N1] = 0
Y1 = np.fft.fft(y1, N1)
Y1 = np.abs(Y1)/N1
f1 = np.fft.fftfreq(N1, 1/f_S1)
ax.stem(f1, Y1, 'r')
ax.set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$Y_1(F)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
# ----------- Tabellenausgabe --------------
# Drucken Sie i, Y0 und Y1 aus

print("i = | ", end="")
for i in k:
    #Y.append()
    print("{0:>7d} | ".format(i), end="")
print("\nY0 = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:7.2f} | ".format(Y0[i]), end="")
print("\nY1 = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:7.2f} | ".format(Y1[i]), end="")
```

```
i = |       0 |       1 |       2 |       3 |       4 |       5 |       6 |       7 |       8 |       9 |      10 |      11 |
12 |      13 |      14 |      15 |
Y0 = |  250.00 |  225.08 |  159.15 |   75.03 |    0.00 |  -45.02 |  -53.05 |  -32.15 |   -0.00 |   25.01 |   31.83 |   20.46
|    0.00 |  -17.31 |  -22.74 |  -15.01 |
Y1 = |  250.00 |  226.53 |  163.32 |   79.55 |    0.00 |   53.15 |   67.65 |   45.06 |    0.00 |   45.06 |   67.65 |   53.15
|    0.00 |   79.55 |  163.32 |  226.53 |
```



Nach der SIMULATION:

- Vergleichen Sie die simulierten mit den berechneten Werten. Welche Koeffizienten weichen besonders stark von den erwarteten (berechneten) Werten ab? Was ist die Ursache dafür?
- Wie könnte man die Abweichungen reduzieren?

2.2.2 FFT mit Erhöhung der Abtastfrequenz auf $f_{S2} = 64\ \mathrm{kHz}$ und N_2 Samples

Die Abtastfrequenz wird jetzt vervierfacht auf den Wert $f_{S2} = 64\ \mathrm{kHz}$.

VORBEREITUNG:

- Wie lang muss das Messfenster T_{Mess2} der FFT sein für eine Frequenzauflösung $\Delta f = 1$ kHz? Wieviele Samples N_2 sind dafür erforderlich?

  > $T_{Mess2} = \frac{1}{\Delta f} = 1$ ms
  >
  > $N_2 = T_{Mess2} \cdot f_{S2} = 1ms \cdot 64kHz = 64$

- Welche maximale Frequenzkomponente ist im abgetasteten Signal enthalten?

  > $f_{max} = \frac{f_{S2}}{2} = 32$ kHz
  >
  > **SIMULATION:**

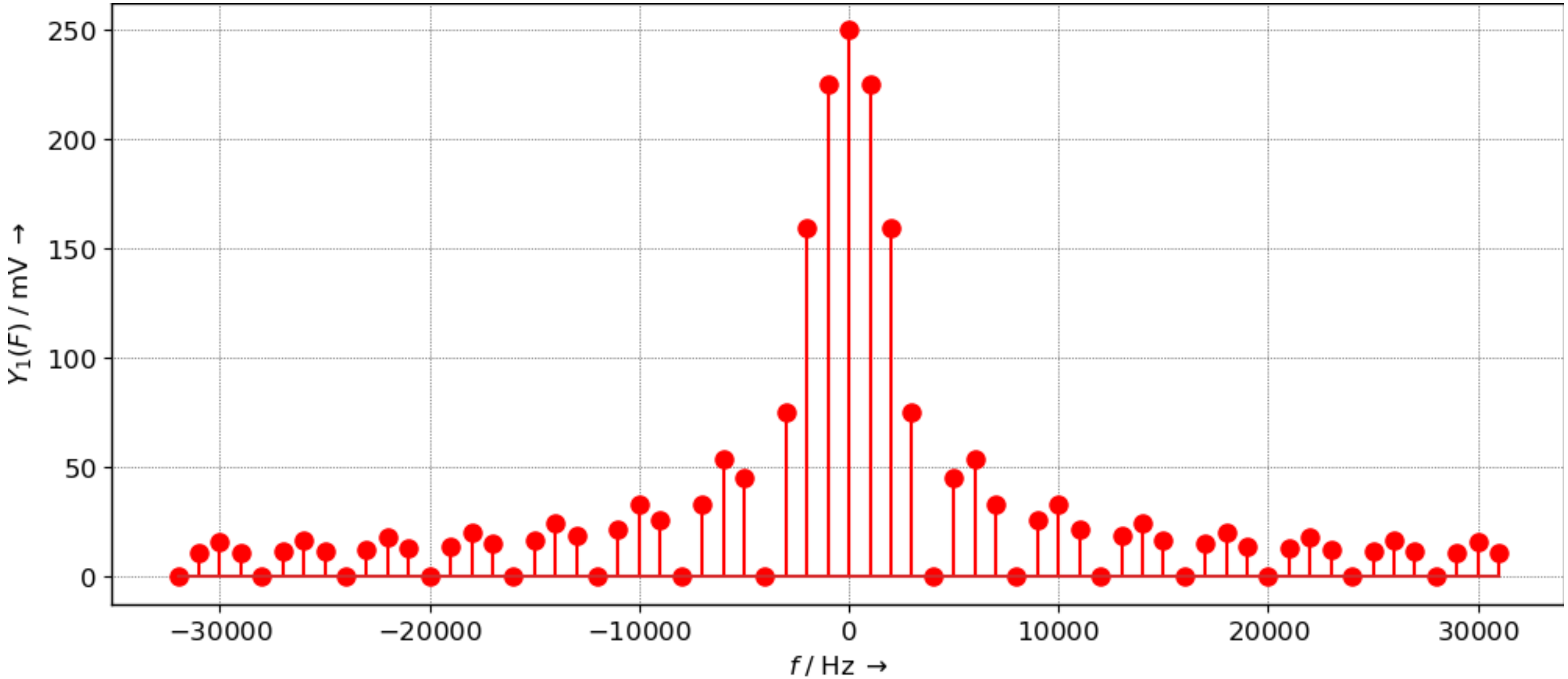
- Kopieren Sie das Skript aus dem vorigen Unterpunkt und passsen Sie es an die ermittelten Parameter an.

- Vergleichen Sie erneut Rechnung mit Simulation

In [ ]:

```
fig, ax4 = plt.subplots(**size)
N2 = 64
f_S2 = N2 * 1e3
t2 = np.arange(N2)/f_S2
y2 = 1000* np.where(t2< 250e-6, 1, 0)
Y2 = np.fft.fft(y2)
Y2 = np.abs(Y2)/N2
f2 = np.fft.fftfreq(N2, 1/f_S2)
ax4.stem(f2, Y2, 'r')
ax4.set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax4.set_ylabel(r"$Y_1(F)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
# ----------- Tabellenausgabe --------------
# Drucken Sie i, Y0 und Y1 aus

print("i = | ", end="")
for i in k:
    #Y.append()
    print("{0:>7d} | ".format(i), end="")
print("\nY0 = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:7.2f} | ".format(Y0[i]), end="")
print("\nY1 = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:7.2f} | ".format(Y1[i]), end="")
print("\nY2 = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:7.2f} | ".format(Y2[i]), end="")
```

```
i = |       0 |       1 |       2 |       3 |       4 |       5 |       6 |       7 |       8 |       9 |      10 |      11 |
12 |      13 |      14 |      15 |
Y0 = |  250.00 |  225.08 |  159.15 |   75.03 |    0.00 |  -45.02 |  -53.05 |  -32.15 |   -0.00 |   25.01 |   31.83 |   20.46
|    0.00 |  -17.31 |  -22.74 |  -15.01 |
Y1 = |  250.00 |  226.53 |  163.32 |   79.55 |    0.00 |   53.15 |   67.65 |   45.06 |    0.00 |   45.06 |   67.65 |   53.15
|    0.00 |   79.55 |  163.32 |  226.53 |
Y2 = |  250.00 |  225.17 |  159.41 |   75.30 |    0.00 |   45.47 |   53.83 |   32.80 |    0.00 |   25.84 |   33.15 |   21.49
|    0.00 |   18.55 |   24.63 |   16.45 |
```



250
200
150
100
50
0
$Y_1(F)$ / mV →
−30000
−20000
−10000
0
10000
20000
30000
f / Hz →

2.2.3 FFT mit verlängertem Messfenster ($T_{Mess3} = 4\ \mathrm{ms}$) und $f_{S3} = 16\ \mathrm{kHz}$

Die Abtastfrequenz ist wieder wie zu Beginn $f_{S3} = 16\ \mathrm{kHz}$, jetzt soll getestet werden wie sich eine Verlängerung des Messfensters um den Faktor 4 auswirkt.

VORBEREITUNG:

- Wie viele Samples N_3 benötigen Sie jetzt? Wieviele Perioden passen in Ihr Messfenster?

> $N_3 = T_{Mess3} \cdot f_{S3} = 64$
>
> L = $\frac{T_{Mess3}}{T_1} = 4$

- Welche Frequenzauflösung erzielt man mit diesem Setup? Welche Frequenzkomponente kann maximal dargestellt werden?

> $\Delta f = \frac{1}{T_{Mess3}} = 250 Hz$
>
> **SIMULATION:**

Da Ihr Messfenster jetzt mehrere Perioden des Signals umfasst, müssen Sie Ihr Signal erzeugen entweder

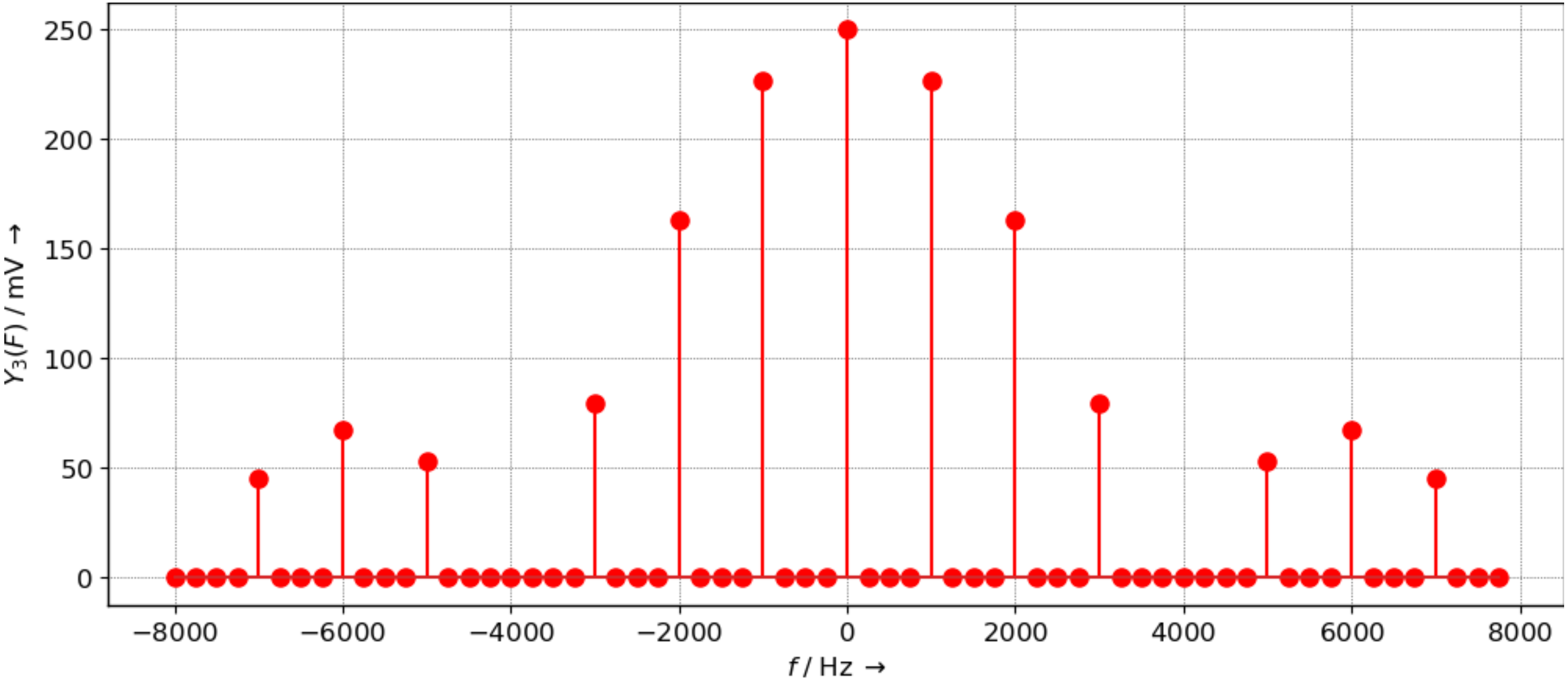
- **Händisch** durch mehrfaches Aneinanderhängen eines Pulses z.B. mit `y3 = np.tile(y1, 4)`
- Durch **Abtasten** des "zeitkontinuierlichen" Signals wie am Anfang von 2.2 beschrieben. Achten Sie wieder darauf, Anfang und Ende passend zu wählen.

Plotten Sie Ihr Zeitsignal, damit Sie sicher sind dass Ihr Signal so aussieht wie Sie sich das vorstellen.

- Vergleichen Sie erneut Rechnung mit Simulation
- Ähnelt das Spektrum mehr dem ursprünglichen Spektrum Y_1 oder dem Spektrum mit erhöhter Abtastrate Y_2?
- Welchen Vorteil hat die Verlängerung des Messfenster? Welchen Vorteil hat sie im hier vorliegenden Fall?

In [ ]:

```
fig, ax = plt.subplots(**size)
N3 = 64
f_S3 = 16 * 1e3
t3 = np.arange(N3)/f_S3
y3 = np.tile(y1, 4)
Y3 = np.abs(np.fft.fft(y3))/N3
f3 = np.fft.fftfreq(N3, 1./f_S3)
ax.stem(f3, Y3, 'r')
ax.set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$Y_3(F)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
```



2.2.4 FFT über nicht-ganzzahlige Anzahl von Perioden

Das Signal wird wieder mit $f_{S4} = 16\ \mathrm{kHz}$ abgetastet, allerdings ist das Messfenster jetzt nur noch $60\,T_S$ lang.

VORBEREITUNG:

- Welche Länge T_{Mess4} hat jetzt Ihr Messfenster und wieviele Signalperioden passen in das Messfenster?

> $T*{Mess4}= \frac{60}{f*{S4}}=3.75ms
>
> $L = \frac{T_{Mess4}}{T1} = 3.75$, passt in das Messfesnter keine ganzzahlige Anzahl Signalperioden.

- Welche Frequenzauflösung Δf ergibt sich, in welchem Raster liegen die Frequenzbins f_k?

> $\Delta f = \frac{1}{T_{Mess4}} = 266,67$ Hz $f_k = k \cdot \Delta f$
>
> **SIMULATION:**

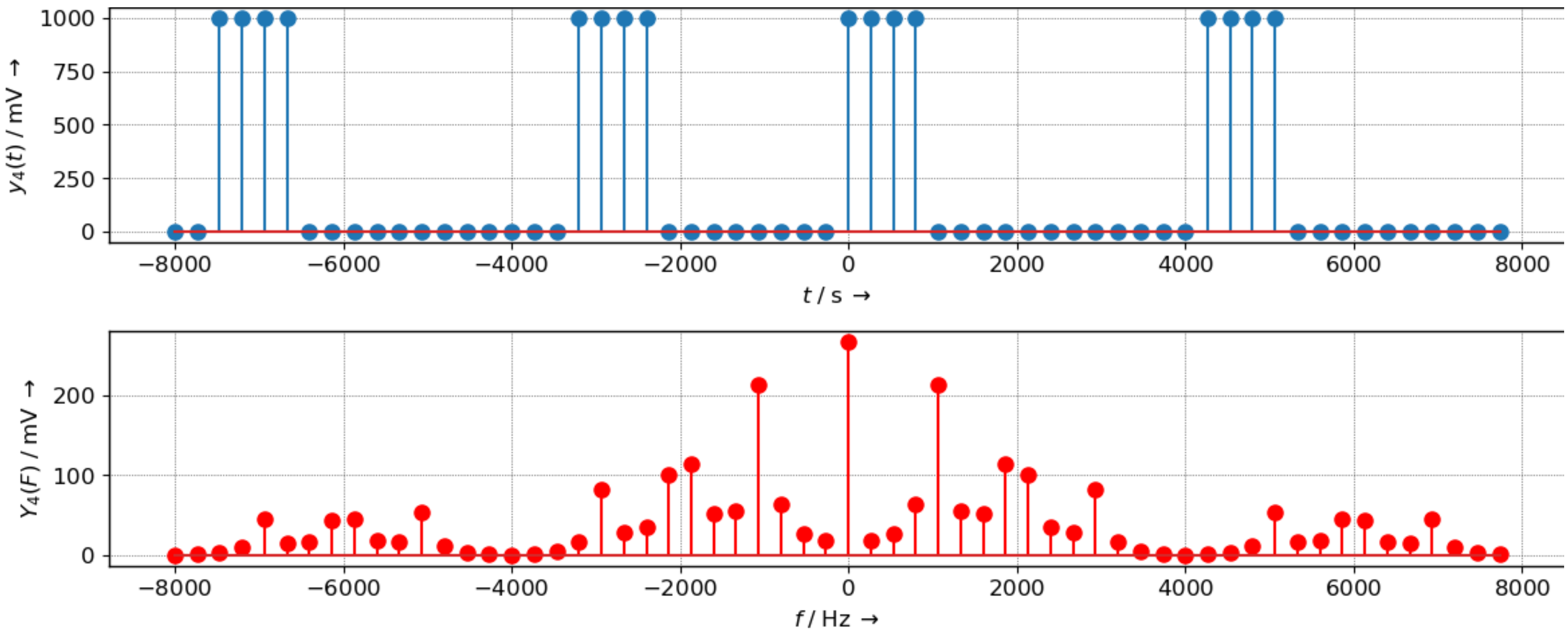
Signal und Zeitvektor erzeugen Sie am einfachsten durch Verkürzen der Signale aus dem letzten Abschnitt, also mit `y4 = y3[:60]` oder alternativ `y4 = y3[:-4]` (negative Indizes zählen vom Ende aus). Der Index, der das Ende markiert ("60" bzw. "-4") definiert dabei den ersten Wert, der *nicht* mit ausgegeben wird. Das ist z.B. bei `arange(0,10,1)` genauso und ist eine Folge des 0-based indexing (der erste Wert eines Arrays wird mit 0 angesprochen).

- Was hat sich im Vergleich zum Spektrum Y_3 des vorigen Abschnitts geändert?

In [ ]:

```
fig, ax = plt.subplots(2, **size)
N4 = 60
f_S4 = 16 * 1e3
t4 = t3[:N4]
y4 = y3[:-4]
Y4 = np.abs(np.fft.fft(y4))/N4
f4 = np.fft.fftfreq(N4, 1./f_S4)
ax[0].stem(f4, y4)
ax[0].set_xlabel(r"$t \; / \;\mathrm{s} \;\rightarrow$")
ax[0].set_ylabel(r"$y_4(t)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
ax[1].stem(f4, Y4, "r")
ax[1].set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax[1].set_ylabel(r"$Y_4(F)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
fig.set_tight_layout(True)
k = np.arange(12)
print("i  = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:>7d} | ".format(i), end="")
print("\n|Y4| = | ", end="")
for i in k:
    print("{0:>7.2f} | ".format(Y4[i]), end="")
print("\n")
```

```
i  = |       0 |       1 |       2 |       3 |       4 |       5 |       6 |       7 |       8 |       9 |      10 |      11
|
|Y4| = |  266.67 |   18.52 |   26.52 |   62.62 |  212.93 |   55.77 |   51.29 |  113.09 |   99.64 |   34.91 |   28.87 |   81.2
8 |
```



1000
750
500
250
0
$y_4(t)$ / mV →
−8000
−6000
−4000
−2000
0
2000
4000
6000
8000
t / s →
200
100
0
$Y_4(F)$ / mV →
−8000
−6000
−4000
−2000
0
2000
4000
6000
8000
f / Hz →

3. Schätzung des Fourierspektrums von Sinustönen mit überlagertem Rauschen durch FFT

In diesem Versuchsteil versuchen wir mit Hilfe der FFT Amplituden und Frequenzen von zwei Sinustönen zu schätzen mit $f_1 = 990\ \mathrm{Hz}$ und $A_1 = 100\ \mathrm{mV}$ sowie $f_2 = 1010\ \mathrm{Hz}$ und $A_2 = 2\ \mathrm{mV}$, überlagert ist eine gleichverteilte Rauschstörung im Bereich $\pm 1\ \mathrm{mV}$.

Tipp: Diesen Versuchsteil können Sie auch mit pyfda durchführen, im Tab `y[n]` wählen Sie dazu ein Sinussignal mit überlagertem Rauschen aus und schauen sich das Spektrum im Untertab "Frequency" an. Enablen Sie "Stimulus X" und deaktivieren Sie "Response Y".

3.1 Abtastfrequenz frei wählbar

Die Anzahl der Datenpunkte N für die FFT und die Abtastfrequenz f_S können zunächst frei gewählt werden.

VORBEREITUNG:

- Welche Abtastfrequenz benötigen Sie mindestens?

  > Die Abtastfrequenz muss größer als $2 f_2 = 2020\ \mathrm{Hz}$ sein.

- Wählen Sie die kleinstmöglichen Werte für N und f_S so, dass kein Frequenzfehler und kein Leckeffekt auftritt. Tipp: Bestimmen Sie mit $T_{min} = L_1 T_1 = L_2 T_2$ zunächst das kürzeste Zeitfenster, in dem sowohl f_1 als auch f_2 periodisch sind. Danach können Sie mit $T_{Mess} = \frac{N}{f_S} = M T_{min}$ eine Bedingung für N und T_S ableiten

  > mit $T_{min} = \frac{L_1}{990 Hz} = \frac{L_2}{1010 Hz}$ bekommt man $\frac{L_1}{L_2} = \frac{99}{101}$ also $L_1 = 99, L_2 = 101$ und $T_{min} = 100 ms$ Daraus erhält man $T_{Mess} = \frac{N}{f_S} = M \frac{99}{990 Hz}$ und damit $f_S = 10 Hz$ und $N = M = 1$.
  >
  > Diese Kombination ist zwar periodisch, verletzt aber natürlich das Nyquist-Kriterium. Durch Erhöhen von Abtastfrequenz und N um den gleichen Faktor (damit sich $T_{Mess} = T_{min}$ nicht ändert) erhählt man schließlich $f_s = 2030 Hz$ und $N = 203$.

- Wie groß ist das Verhältnis der Amplituden und wie groß das Verhältnis der Leistungen beider Sinustöne in dB?

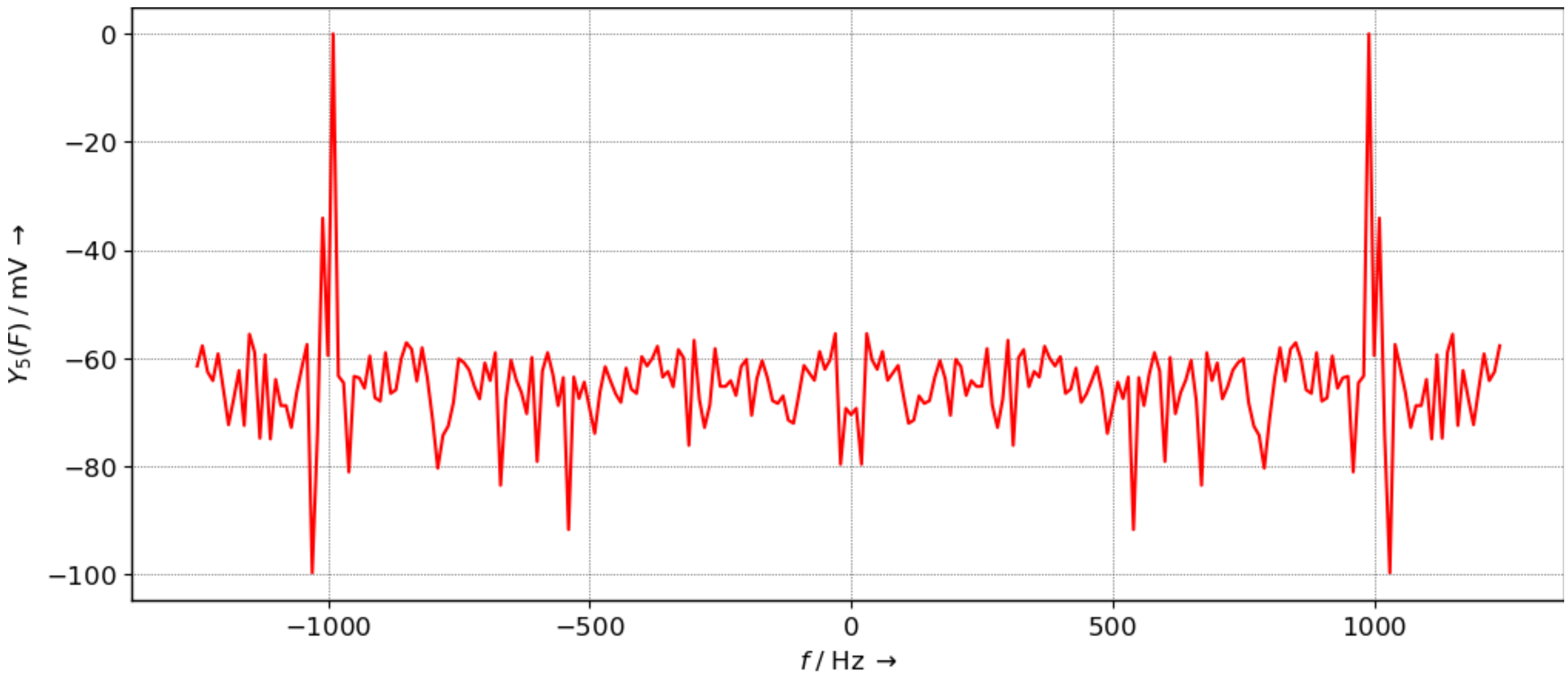
> $\frac{A_1}{A_2} = 50$ damit $20\log_{10} 50 = 34dB.$
>
> $\frac{P_1}{P_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = 2500$ damit $10\log_{10} 2500 = 34dB.$

SIMULATION:

- Wählen Sie $f_S = 2500\ \mathrm{Hz}$ und $N = 250$ für ein leichter ablesbares Spektrum.
- Stellen Sie das Spektrum als (Amplituden-)Betragsspektrum im logarithmischen Maßstab dar, die Werte sollen relativ zum Maximum dargestellt werden. Zur Verbesserung der Darstellung können Sie mit `np.fft.fftshift` positive und negative Achse von Frequenzvektor und Spektrum vertauschen.

In [ ]:

```
N5 =  250
f_S5 = 2500
n = np.arange(N5)
t = n/f_S5
noi = 2 * np.random.rand(N5) - 1
y5 = 100 * np.sin(2 * np.pi * 990 * t) + 2 * np.sin(2 * np.pi * 1010 * t) + noi
Y5 = np.abs(np.fft.fft(y5))/N5
Y5 /= np.max(Y5)
Y5 = np.fft.fftshift(20 * np.log10(Y5))
f5 = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N5, 1./f_S5))
fig, ax = plt.subplots(**size)
ax.plot(f5, Y5, 'r')
ax.set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$Y_5(F)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
```



0
−20
−40
−60
−80
−100
$Y_5(F)$ / mV →
−1000
−500
0
500
1000
f / Hz →

3.2 Feste Abtastfrequenz $f_S = 4\ \mathrm{kHz}$

Die Abtastfrequenz ist jetzt fest eingestellt auf $f_S = 4\ \mathrm{kHz}$, die Anzahl der Datenpunkte N für die FFT soll eine Zweierpotenz sein, $N = 2^L$, für eine möglichst effiziente Berechnung der FFT.

Auch diesen Unterpunkt können Sie mit pyfda bearbeiten.

VORBEREITUNG:

- Gibt es bei der gewählten Abtastfrequenz einen Wert für N, bei dem kein Frequenzfehler und kein Leckeffekt auftritt (mit und ohne Beschränkung auf Zweierpotenzen)? Gibt es für $N = 256$ eine Abtastfrequenz, bei der kein Leckeffekt auftritt?

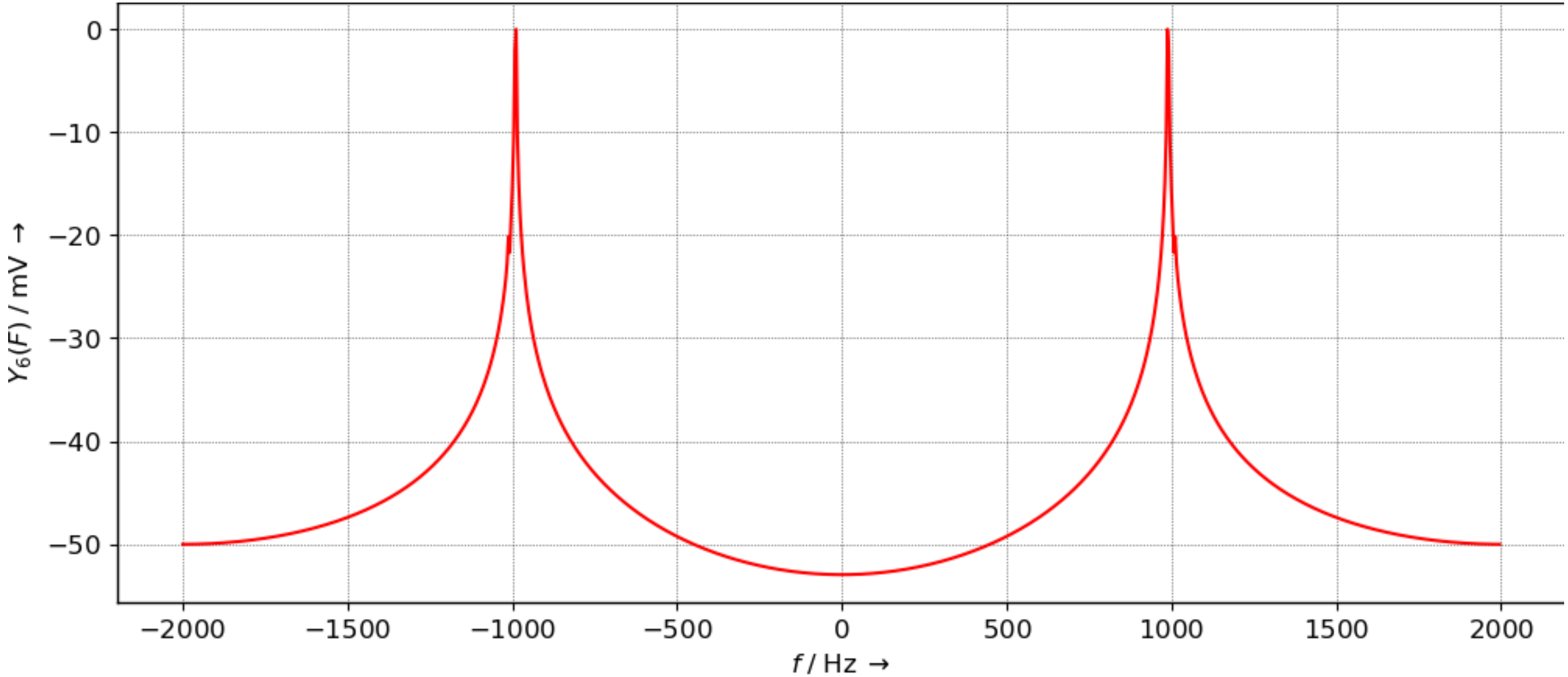
  > Wie weiter oben ermittelt ist auch $f_S = 2500$ und $N = 250$ eine Kombination, bei der beider Töne kohärent abgetastet werden.
  >
  > Analog dazu benötigt man für $N = 256$ die Abtastfrequenz $f_S = 2560Hz$.
  >
  > **SIMULATION:**

- Der Leckeffekt soll jetzt durch Verwendung "weicherer" Fenster reduziert werden. Fensterfunktionen finden Sie unter `scipy.signal.windows` (https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.windows.html). Vor Berechnung der FFT müssen Sie dazu Ihr Signal mit der Fensterfunktion multiplizieren, also z.B. `y_win = y * sig.windows.hann(256, sym=False)`. Dabei wurde angenommen, dass auch Ihr Zeitsignal `y` eine Länge von $N = 256$ hat. Für die Spektralanalyse periodischer Signale (im Gegensatz zum Filterdesign und zur Analyse von impulsförmigen Signalen) muss `sym = False` gewählt werden.

- Testen Sie den Einfluss der Fensterlänge $N = 256$, $N = 512$ und $N = 1024$ ... und den Effekt eines rechteckförmigen (`boxcar` bzw. gar keine Fensterung) und eines Hann-Fensters. Wie genau werden die Amplituden und Frequenzen geschätzt? Schauen Sie sich auch die anderen Fensterfunktionen an.

In [ ]:

```
N6 =  1024
f_S6 = 4000
n = np.arange(N6)
t = n/f_S6
noi = 2 * np.random.rand(N6) - 1
y6 = 100 * np.sin(2 * np.pi * 990 * t) + 2 * np.sin(2 * np.pi * 1010 * t) #+ noi
y6_win = y6 * sig.windows.boxcar(N6, sym=True)
Y6 = np.abs(np.fft.fft(y6_win))/N6
Y6 /= np.max(Y6)
Y6 = np.fft.fftshift(20 * np.log10(Y6))
f6 = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N6, 1./f_S6))
fig, ax = plt.subplots(**size)
ax.plot(f6, Y6, 'r')
ax.set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$Y_6(F)\; / \;\mathrm{mV} \;\rightarrow$");
```



4. Schätzung des Fourierspektrums eines rechteckförmigen Impulses durch FFT

In diesem Versuchsteil schätzen wir das Fourierintegral des rechteckförmigen Impulses $y(t)$ mit $\Delta T = 250\,\mu$s und $A = 1000\,\mathrm{mV}$ (s. nächster Plot) mit Hilfe der FFT.

4.1 Berechnung der Fouriertransformierten

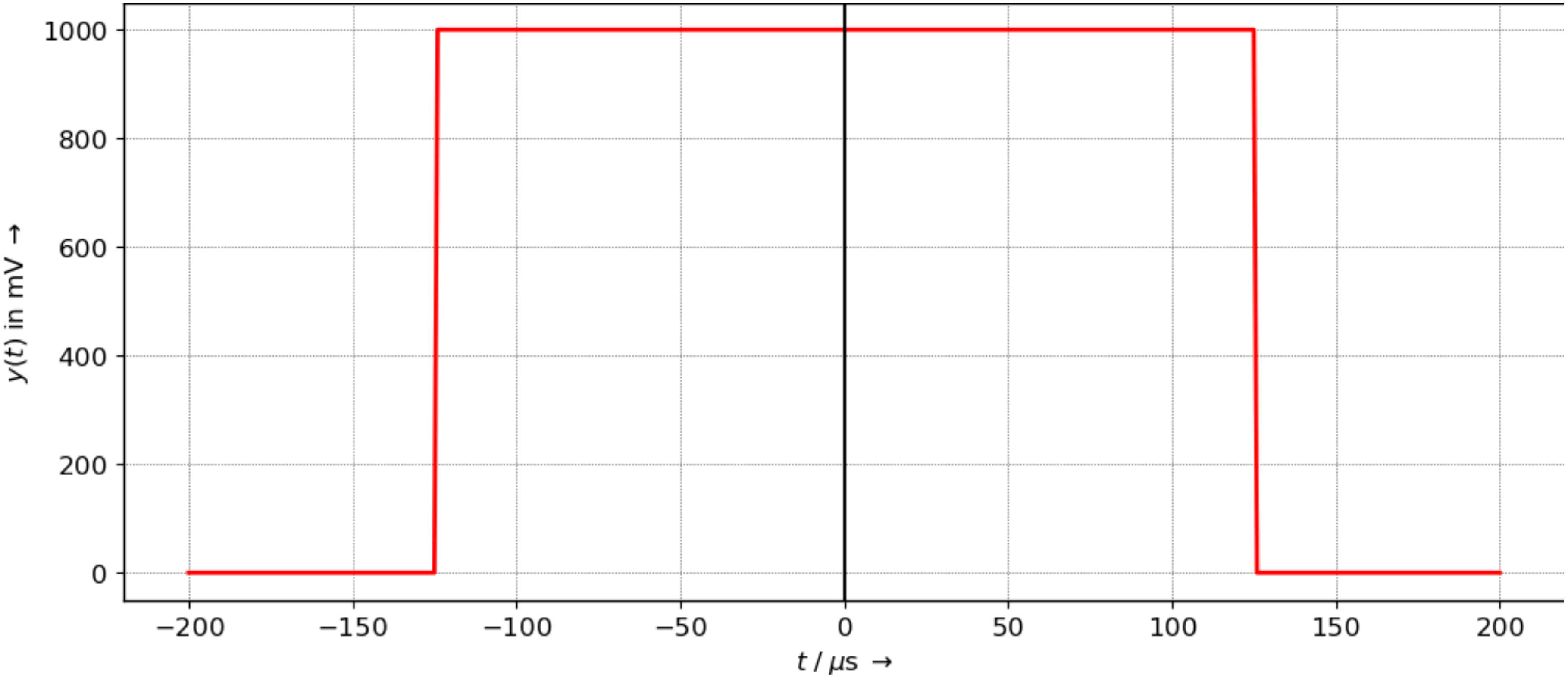
VORBEREITUNG:

- Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Impulses und skizzieren Sie die Betragsfunktion (oder plotten Sie sie).
- Bei welcher Frequenz hat die Fouriertransformierte die erste Nullstelle?

> Die erste Nullstelle f_0 der Fouriertransformierten ist bei $\pi f_0 \Delta T_1 = \pi \;\Rightarrow\; f_0 = 1/\Delta T = 4\,\mathrm{kHz}$.

In [ ]:

```
fig, ax = plt.subplots(**size)
Delta_T = 250e-6
A = 1000
t = np.arange(-200e-6, 200e-6, 1e-6)
ax.plot(t*1e6, A*np.where((t >= -Delta_T/2) & (t < Delta_T/2), 1, 0), 'r', lw=2)
ax.axvline(0, ls='-',color='k')
ax.set_xlabel(r"$t \; / \;\mu\mathrm{s} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$y(t) \; \mathrm{in \;mV} \;\rightarrow$");
```


1000
800
600
400
200
0
$y(t)$ in mV →
−200
−150
−100
−50
0
50
100
150
200
t / μs →

Das zeitkontinuierliche Signal $y(t)$ hat eine endliche zeitliche Ausdehnung und endliche Energie, daher kann sein Amplitudenspektrum mit dem Fourierintegral beschrieben werden:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} \mathrm{d}t$$

Der Impuls ist symmetrisch zur y-Achse was die Berechnung deutlich vereinfacht:

$$Y(f) = A \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} \mathrm{d}t = \frac{A}{-\mathrm{j}2\pi f} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} \Big|_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} = A \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi f \Delta T} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f \Delta T}}{2\pi \mathrm{j} f} = A \frac{\sin \pi f \Delta T}{\pi f} \tag{3}$$

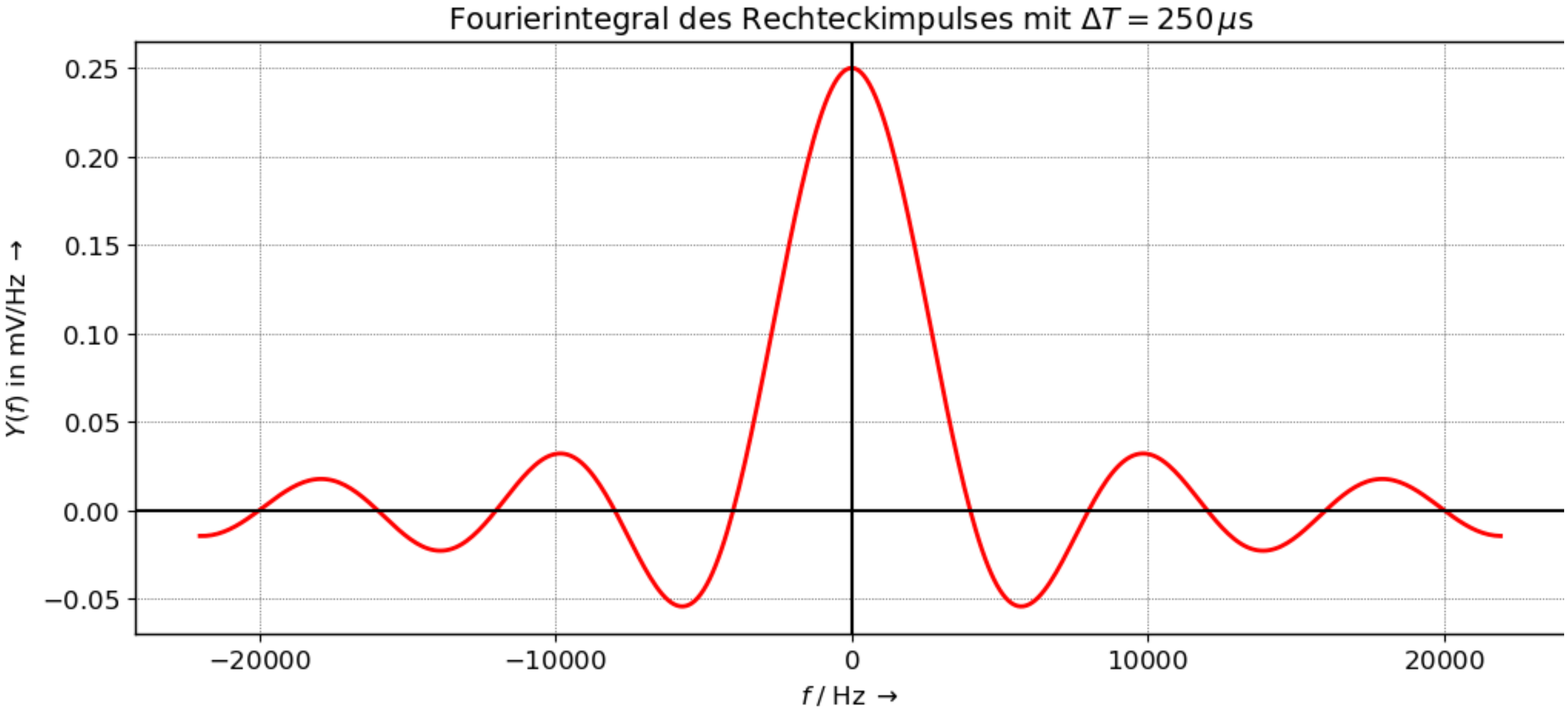
$$= A \Delta T \frac{\sin \pi f \Delta T}{\pi f \Delta T} = A \Delta T \mathrm{sinc} f \Delta T \text{ mit } \mathrm{sinc} f = \frac{\sin \pi f}{\pi f} \tag{4}$$

Das Ergebnis ist die Amplitudenspektrumsdichte in V/Hz.

Berechnet man die FFT anstatt des Fourierintegrals, überstreicht jeder Frequenzpunkt die Bandbreite $\Delta f = f_S / N$. Möchte man die FFT eines Energiesignals so skalieren dass man (in etwa) identische Zahlenwerte erhält wie bei der spektralen Amplitudendichte des ursprünglichen zeitkontinuierlichen Signals, so muss man mit $1/\Delta f = N/f_S$ multiplizieren. Da die FFT bereits mit $1/N$ skaliert ist, hebt sich der Faktor N auf. Man muss also nur durch f_S dividieren.

Für unendlich ausgedehnte Leistungssignale (periodische Signale, stationäre und nicht-stationäre Prozesse) konvergiert das Integral nicht, man nimmt stattdessen die Fourierreihe (periodische Signale) oder die spektrale Leistungsdichte, die über die Autokorrelationsfunktion berechnet wird (aber nicht hier und jetzt ...).

In [ ]:
```
fig, ax = plt.subplots(**size)
Delta_T = 250e-6
A = 1000
f = np.arange(-2.2e4, 2.2e4, 1e2)
ax.plot(f, A * Delta_T*np.sinc(f * Delta_T), 'r', lw=2)
ax.axvline(0, ls='-',color='k'); ax.axhline(0, ls='-',color='k')
ax.set_title(r"Fourierintegral des Rechteckimpulses mit $\Delta T = 250\, \mu \mathrm{s}$")
ax.set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$Y(f) \; \mathrm{in \;mV/Hz} \;\rightarrow$");
```


Fourierintegral des Rechteckimpulses mit $\Delta T = 250\,\mu s$
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
$Y(f)$ in mV/Hz →
−20000
−10000
0
10000
20000
f / Hz →

4.2 Schätzung der Fouriertransformierten mit Hilfe der FFT

Im folgenden soll die Fouriertransformierte des Impulses mit Hilfe einer FFT abgeschätzt werden, dazu wird der Impuls mit $L = 16$ Samples abgetastet.

VORBEREITUNG:

- Welche Abtastfrequenz f_S ist dazu notwendig?

  > $f_S = \frac{L}{\Delta T} = 64KHz$

- Wie groß ist die Frequenzauflösung Δf? Wieviele Frequenzpunkte erhält man zwischen $f = 0$ und der ersten Nullstelle f_0?

  > $\Delta f = \frac{1}{T_{Mess}} = \frac{1}{\Delta T} = \frac{f_S}{L} = 4KHz$
  >
  > Wegen $\Delta f = \frac{1}{\Delta T} = f_0$ erhält man unabhängig von der Abtastfrequenz einen Frequenzpunkt bei $f = 0$ und bereits den nächsten bei $f = f_0$

- Kann man die graphische Darstellung des Amplitudenspektrums zwischen $f = 0$ und der ersten Nullstelle f_0 durch Änderung der Abtastfrequenz verbessern?

  > Nein

- Wie kann die graphische Darstellung des Betragsgangs verbessert werden ohne die Abtastfrequenz zu verändern?

  > Durch nur Verlängerung des Messfensters erhöht man die Auflösung $\Delta f = \frac{1}{T_{mess}}$. Da die Signallänge begrenzt ist auf ΔT, kann man das Fenster nur durch Anhängigen con Nullen verlängern("Zero Padding") die FFT wird dann berechnet über insgesamt N_{FFT} Datenpunkte, von denen nur L ungleich null sind.

- Wie müssen die Ergebnisse skaliert werden, um physikalisch korrekte Werte für die spektrale Amplitudendichte in V/Hz zu bekommen (so wie theoretisch berechnet)?

  > Tipp: eine Skalierung mit $\frac{1}{N_{FFT}}$ ist nur sinnvol für ein periodisches Signal mit einer Periode von N_{FFT} Samples. Der mit

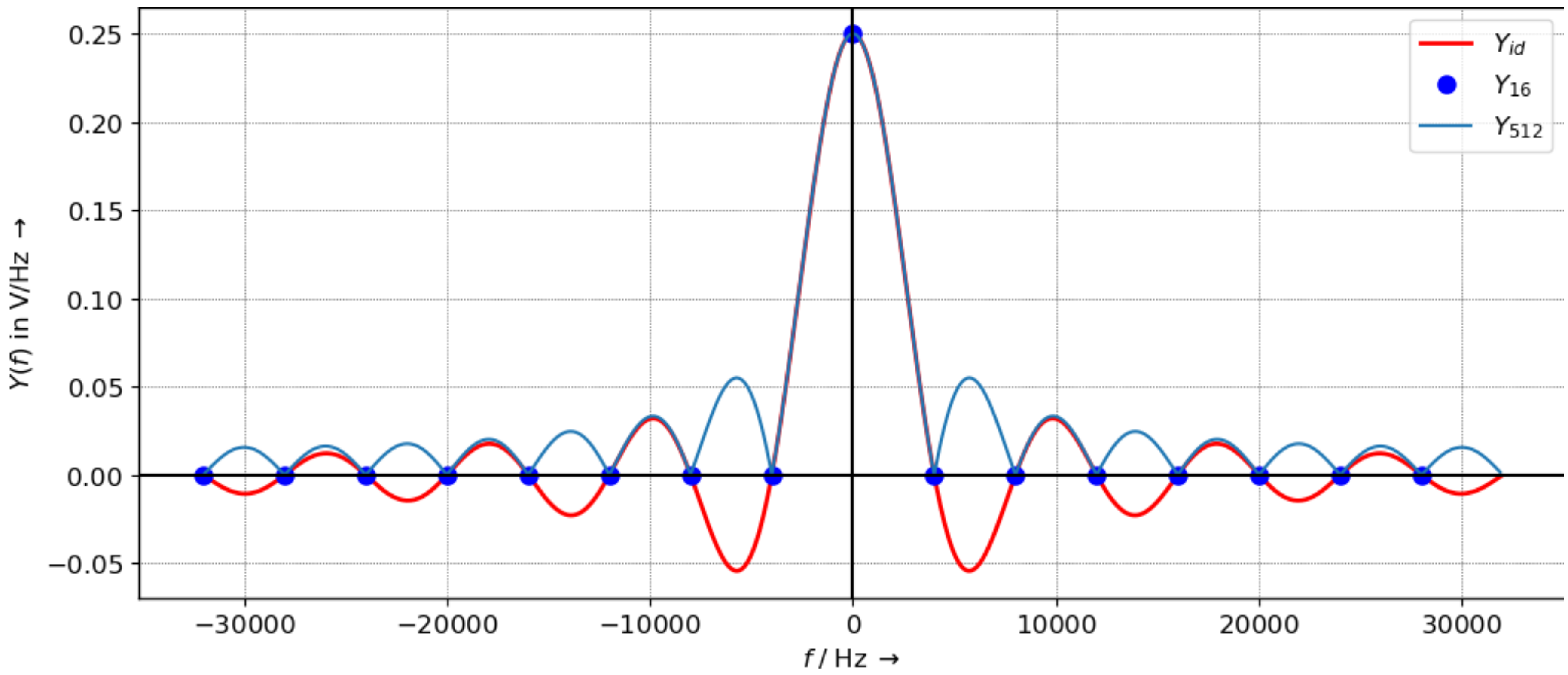
> Zero-Padding verlängerte Puls hätte als periodischer Rechteckpuls einen Duty Cycle $\frac{L}{N_{FFT}}$ dessen Amplitudenspektrum mit zunehmendem N_{FFT} immer mehr abnimmt.
>
> Daher darf hier nur mit $\frac{1}{L}$ skalert werden.

SIMULATION:

- Berechnen Sie die FFT des Rechteckpulses mit $L = 16$ und mit $N_{FFT} = 2^9 = 512$ Punkten.
- Erstellen Sie einen Plot mit der FFT mit $L = 16$ Punkten, $N_{FFT} = 512$ Punkten und dem idealen Amplitudenspektrum des Rechteckimpulses.

In [ ]:

```python
fig, ax = plt.subplots(**size)
f_S = 64e3
Delta_T = 250e-6
A = 1000
f = np.arange(-32e3, 32e3, 1e2)
f_16 = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(16, d= 1/f_S))
f_512 = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(512, d= 1/f_S))
y_id = A * Delta_T*np.sinc(f * Delta_T)
y_16 = A*np.ones(16)
Y_16 = np.fft.fftshift(np.abs(np.fft.fft(y_16))/f_S)
Y_512 = np.fft.fftshift(np.abs(np.fft.fft(y_16, 512))/f_S)
ax.plot(f, y_id, 'r', lw=2, label="$Y_{id}$")
ax.plot(f_16, Y_16, 'bo', label="$Y_{16}$")
ax.plot(f_512, Y_512, label="$Y_{512}$")
ax.legend()
ax.axvline(0, ls='-',color='k'); ax.axhline(0, ls='-',color='k')
ax.set_xlabel(r"$f \; / \;\mathrm{Hz} \;\rightarrow$")
ax.set_ylabel(r"$Y(f) \; \mathrm{in \;V/Hz} \;\rightarrow$");
```



0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
Y(f) in V/Hz →
−30000
−20000
−10000
0
10000
20000
30000
f / Hz →
Y_{id}
Y_{16}
Y_{512}

Copyright

← LAB ◊ ↑ TOC ↑

Name, Vorname:

LAB 3: Filterentwurf mit pyfda

In diesem Versuch

Inhalt

0. Allgemeine Hinweise

0.1 Jupyter Notebook

- \<SHIFT>-\<RETURN> führt eine Codezelle aus und rendert eine Textzelle.
- In Markdown sind Leerzeilen wichtig zum Trennen von Abschnitten!
- Sie können LaTeX-Code zwischen $ ... \$ einschließen.
- Kontexthilfe zu Funktionen etc. bekommen Sie über \<SHIFT>-\<TAB>

Abbildungen in diesem Notebook wurden konvertiert mit https://www.base64-image.de/ und in den HTML-Code eingebettet.

0.2 Installation von pyfda

Für diesen Versuch benötigen Sie die Software **pyfda** (Python Filter Design and Analysis), die Sie per `pip install pyfda` installieren können (wenn Sie eine Python-Installation auf Ihrem Rechner haben), alternativ gibt es unter https://github.com/chipmuenk/pyfda Binaries für Windows und für Ubuntu 20.10 (funktioniert vermutlich auch mit anderen halbwegs aktuellen Distros).

0.3 Abgabe

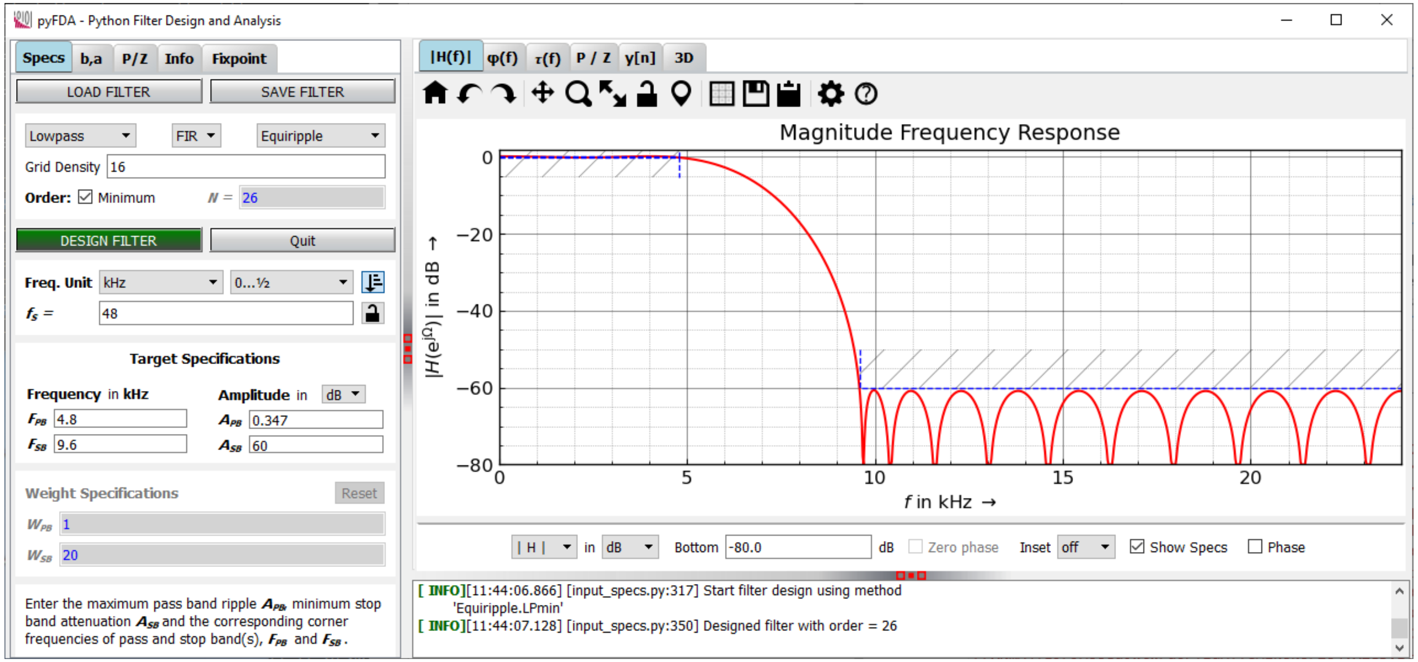
Nach dem Praktikumsversuch exportieren Sie das Notebook mit Textantworten, Codezellen und Plots als HTML (File -> Export Notebook As ... -> Export Notebook to HTML) und reichen es in Moodle ein.</div>

In [ ]:

```python
import os, sys
module_path = os.path.abspath(os.path.join('..')) # append directory one level up to import path
if module_path not in sys.path:  # ... if it hasn't been appended already
    sys.path.append(module_path)
import dsp_fpga_lib as dsp
dsp.versions() # print versions

%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
size = {"figsize":(12,5)} # Plotgröße in Inch

import numpy as np
import scipy.signal as sig
import wave

from IPython.display import Audio, display
#---------------------------------------------------------------------------
def wav2np(filename):
    """ Read the wav-file and convert it to a one or two-dimensional numpy array,
        depending on the number of channels.
        Properties of the WAV-file are stored as function attributes (evil)
    """
    wf = wave.open(filename,'rb')
    wav2np.N_CH = wf.getnchannels() # number of channels
    wav2np.W    = wf.getsampwidth() # wordlength per sample in bytes
    wav2np.N_FR = wf.getnframes()   # number of frames
    wav2np.f_S  = wf.getframerate() # sample (frame) rate

    print("{0} channels with {1} frames of {2} bytes and f_S = {3} Hz ".format(wav2np.N_CH, wav2np.N_FR, wav2np.W, wav2np.f_S)
```

```
    print("{0} channels with {1} frames of {2} bytes and f_S = {3} Hz.".format(wav2np.N_CH, wav2np.N_FR, wav2np.W, wav2np.f_S)

    if wav2np.W == 2:
        samples_in = np.frombuffer(wf.readframes(-1), dtype=np.int16) # read wav data as 16 bit integers, R and L samples are
    elif wav2np.W == 1:
        samples_in = np.frombuffer(wf.readframes(-1), dtype=np.int8) # read wav data as 8 bit integers, R and L samples are in
    else:
         raise TypeError("Unknown data format: {0} bytes".format(wav2np.W))

    samples = np.array([samples_in[idx::wav2np.N_CH] for idx in range(wav2np.N_CH)], dtype=np.int32) # deinterleave channels t
    return samples
```

1. Überblick über pyfda



Auf der linken Seite wählen und entwerfen Sie Filter unter den Tabs "Specs" (Filterentwurf), "b,a" (Eingabe von Filterkoeffizienten), "P/Z" (Eingabe von Polen und Nullstellen). Auf der rechten Seite schauen Sie sich Betrags- und Phasengang, Gruppenlaufzeit, P/N Diagramm und die transiente Antwort auf verschiedene Stimuli an.

1.1. Frequenzen und Amplituden

Frequenzen können in unterschiedlicher Form eingeben und angezeigt werden:

- Normalisiert auf die Samplingfrequenz f_S: $F = f/f_S$
- Normalisiert auf die Nyquistfrequenz $f_{Ny} = f_S/2$: $F = 2f/f_S$
- In absoluten Frequenzen, hier können Sie die Abtastfrequenz f_S eingeben. In der Einstellung "Lock" (verriegeltes Schloss) bleiben die absoluten Frequenzen gleich wenn die Abtastrate geändert wird. Bei "Unlocked" werden die absoluten Frequenzen so angepasst, dass die normalisierten Frequenzen gleich bleiben und damit auch Filterentwürfe, Signalverläufe etc.

Amplituden werden in V, W oder dB eingegeben und angezeigt.

1.2 Filterspezifikationen

Filterentwurfsalgorithmen benötigen unterschiedliche Eingabeparameter. Wenn "Order Minimum" angeklickt ist, versucht ein Algorithmus die minimale Ordnung zu den gegebenen Filterspezifikationen zu berechnen, halbwegs genau funktioniert das aber nur bei Equiripple (FIR) und den meisten IIR-Filtern. Bei pyfda können Sie nach dem Entwurf mit minimaler Ordung das Häkchen entfernen und dann selber Entwurfsparameter bearbeiten.

Nicht benötigte Parameter sind entweder deaktiviert oder ausgeblendet. Manche Parameter sind ausgegraut, aber bearbeitbar: Diese Parameter beeinflussen nicht den Filterentwurf, sie dienen aber z.B. dazu um das Toleranzschema anzuzeigen.

2. Filterentwurf

Ein Audiotrack von einer CD ($f_S = 44,1\,\mathrm{kHz}$) soll tiefpassgefiltert werden. Die Filterspezifikationen sind:

- Eckfrequenz des Passbands: $f_{PB} = 3,4\,\mathrm{kHz}$
- Eckfrequenz des Sperrbands: $f_{SB} = 4\,\mathrm{kHz}$
- Max. Ripple im Passband: $A_{PB} = 1\,\mathrm{dB}$
- Min. Dämpfung im Sperrband: $A_{SB} = 60\,\mathrm{dB}$

Es sollen die folgenden Filtertypen getestet werden:

- Fourier-Approximation / Least-Square (Windowed FIR mit Boxcar-Fenster)
- Windowed FIR mit Kaiser-Fenster
- Equiripple
- Butterworth
- Chebychev 1
- Chebychev 2
- Elliptisch (Cauer)

2.1 Filtervergleich

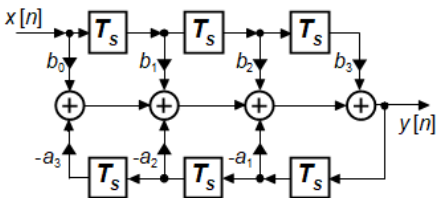
SIMULATION:

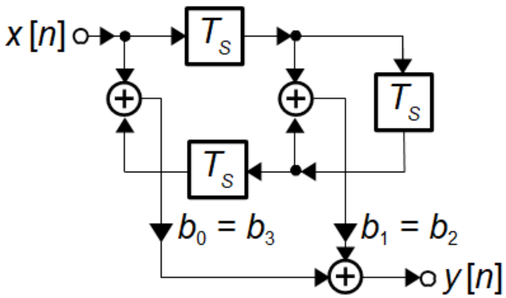
Ermitteln Sie die folgenden Filtereigenschaften und fassen Sie sie in einer Tabelle zusammen mit den Spalten:

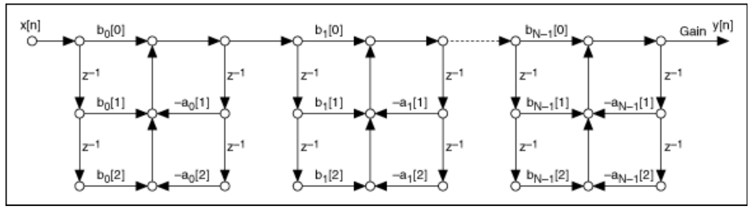
Filtertyp	IIR/FIR?	Ordnung *N*	Gruppenlaufzeit τ_g	Mult. *L* pro Sample	Max. Samplerate [GHz]	Vorteil	Nachteile
Fourier-Approximation / Least-Square(Windowed FIR mit Boxcar-Fenster)	FIR	164	1.84 ps	164	1.83	geringe Nichtlinearität	hohe Rippel / zu geringe Steilheit
Windowed FIR mit Kaiser-Fenster	FIR	268	30.2 ns	268	1.12	keine Rippel im Sperrbereich / hohe Däpfung im Sperrbereich	mittlerer Rippel im Sperrbereich
Equiripple	FIR	163	18.4 ps	163	1.8	geringe Nichtlinearität	hoher Rippel
Butterworth	IIR	PyFDA -> max. 20	1.46 ms	23	13.0	kein Rippel / geringe Nichttlinearität	geringe Steilheit
Chebychev 1	IIR	14	4.75 ms	17	17.6	mittlere Steilheit	hoher Rippel im Durchlassband / hohe Nichttlinearität
Chebychev 2	IIR	14	1.48 ms	17	17.6	mittlere Steilheit	hoher Rippel im Sperrbereich / hohe Nichttlinearität
Elliptisch (Cauer)	IIR	7	2.31 ms	10	30	geringe Ordung	hoher Rippel

- Welche der Filter sind **FIR**, welche **IIR**?
- Vergleichen Sie die benötigte **Ordnung *N***. Für nicht alle der Filter gibt es gut funktionierende Designalgorithmen, Sie müssen dann von Hand die Filterordnung und / oder Eckfrequenzen so lange anpassen, bis alle Spezifikationen erfüllt sind. Im Tab "Info" sehen Sie, ob Spezifikationen verletzt werden.
- Welche Ordnung benötigen Sie, wenn Sie die Abtastrate vor der Filterung auf die Hälfte reduzieren? (Tipp: Aktivieren Sie das "Schloss" neben der Samplingfrequenz, bevor Sie f_S ändern.) Es genügt, wenn Sie das für ein Filter ausprobieren. Was müssen Sie beachten wenn Sie die Samplerate reduzieren wollen?

- Welche **Gruppenlaufzeit τ_g** haben die Filter bei $f = 2\,\mathrm{kHz}$? Schauen Sie sich im `y[n]` an, wie die Signalform eines 500 Hz Sägezahnsignals durch das Filter verformt wird.
- Wieviele **Multiplikationen *L* pro Sample** werden benötigt? Berücksichtigen Sie dabei die Filterstruktur (Optimierung durch Linearphasigkeit möglich?), IIR Filter sollen in einer kaskadierten SOS-Struktur realisiert werden - siehe folgende Abbildungen.
- Welche **maximale Samplerate** kann man auf einem DSP mit max. $300 \cdot 10^6$ Multiplikationen / s verarbeiten? Zusätzliche Informationen: How fast are DSPs?
- Fügen Sie den **Plot des Betragsgangs** mit Phasengang (Checkbox "Phase") ein.



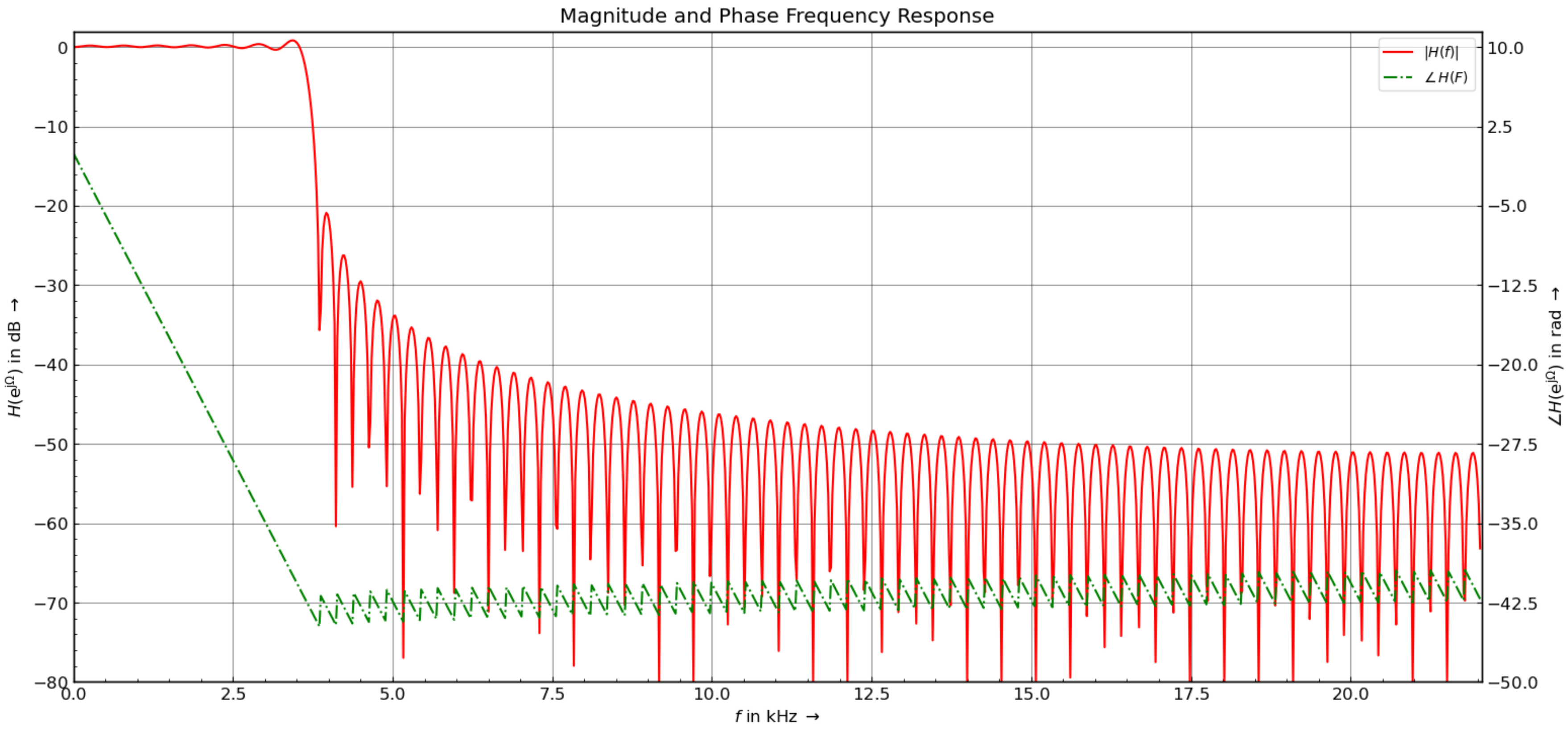




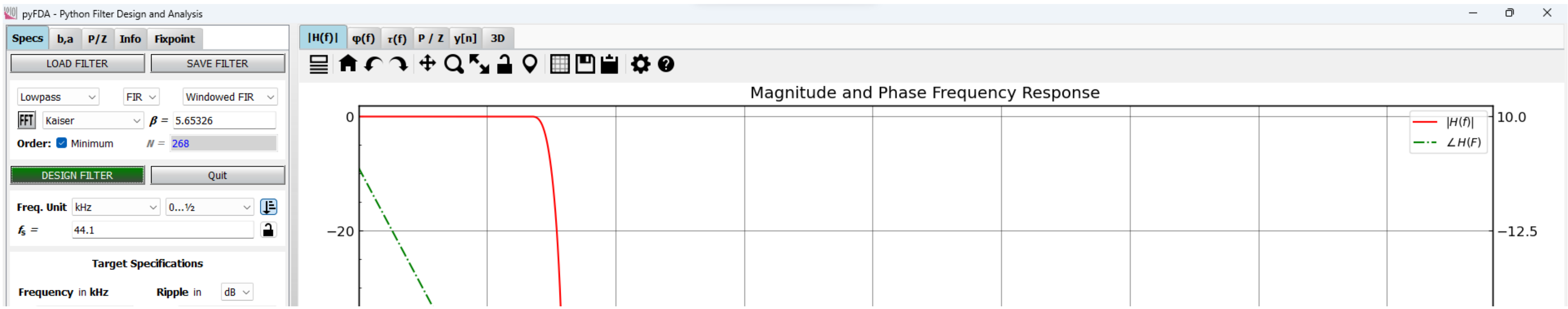
Direktform

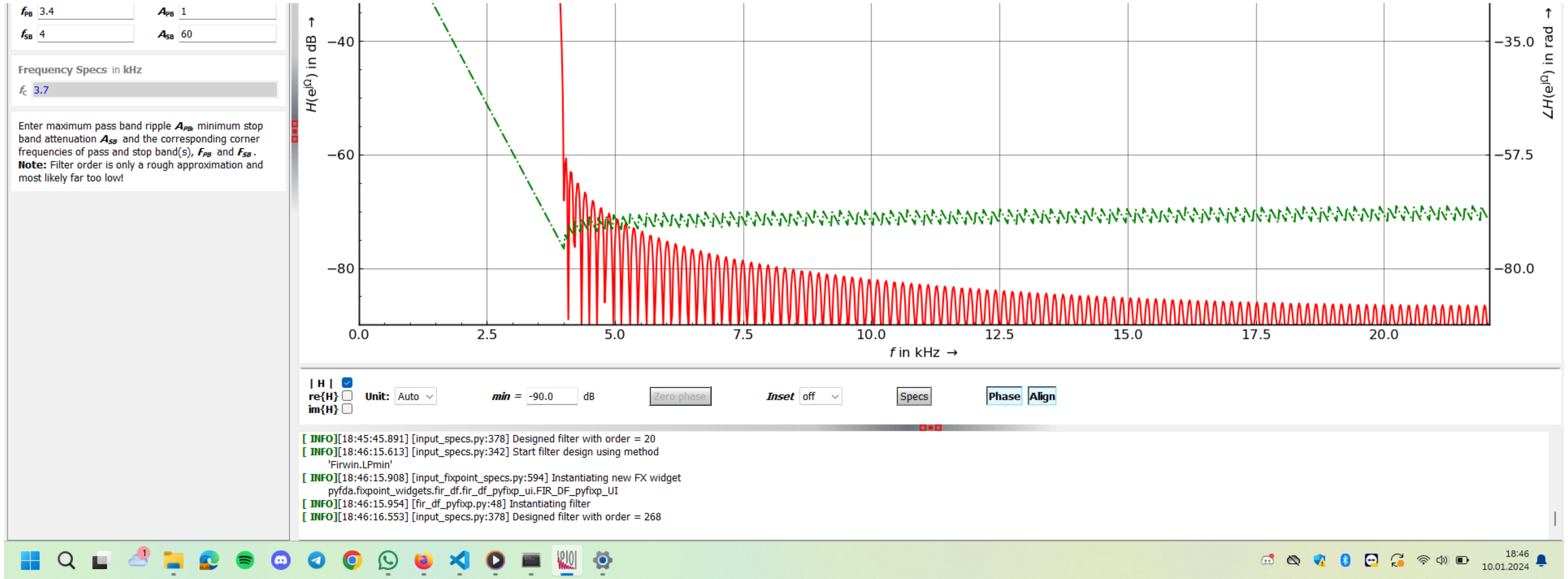
Lin. phasige Form

Kaskadierte Second Order Sections

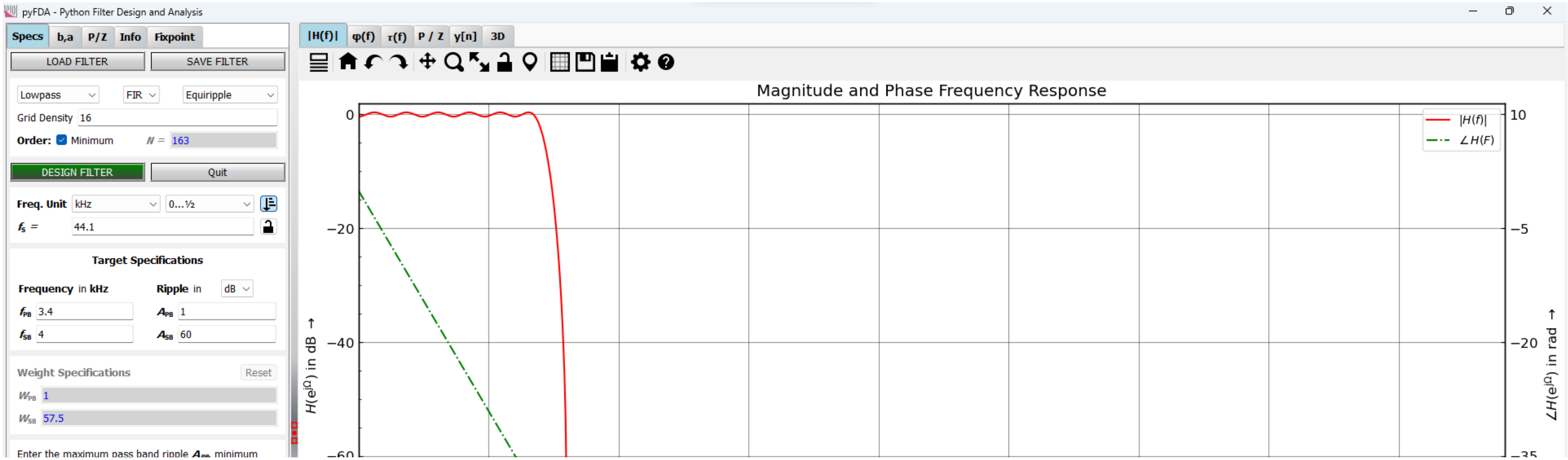


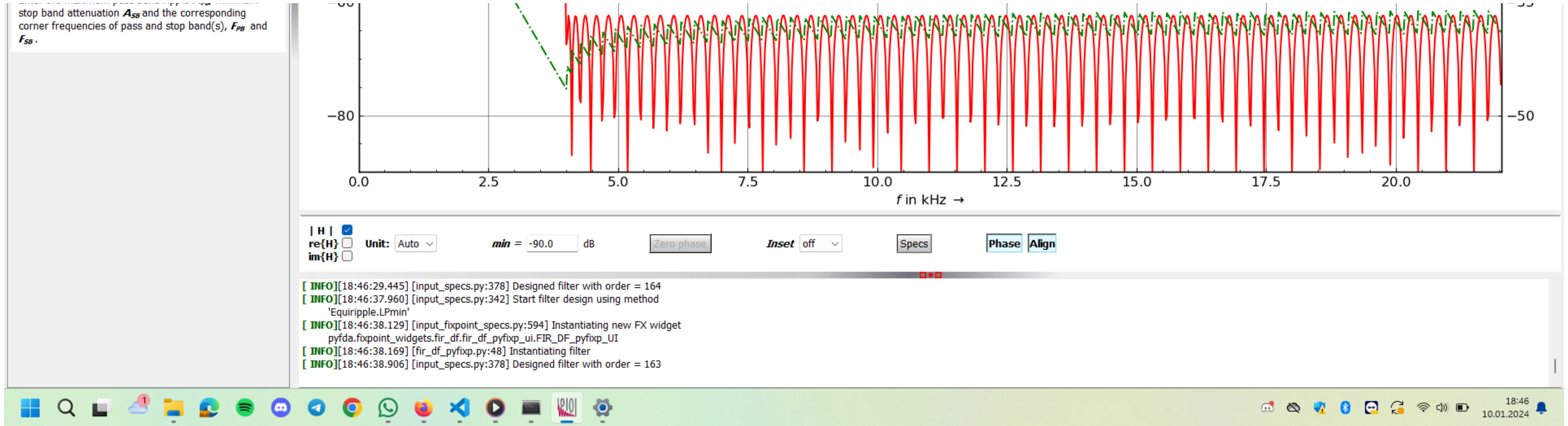
Windowed FIR mit Kaiser-Fenster:



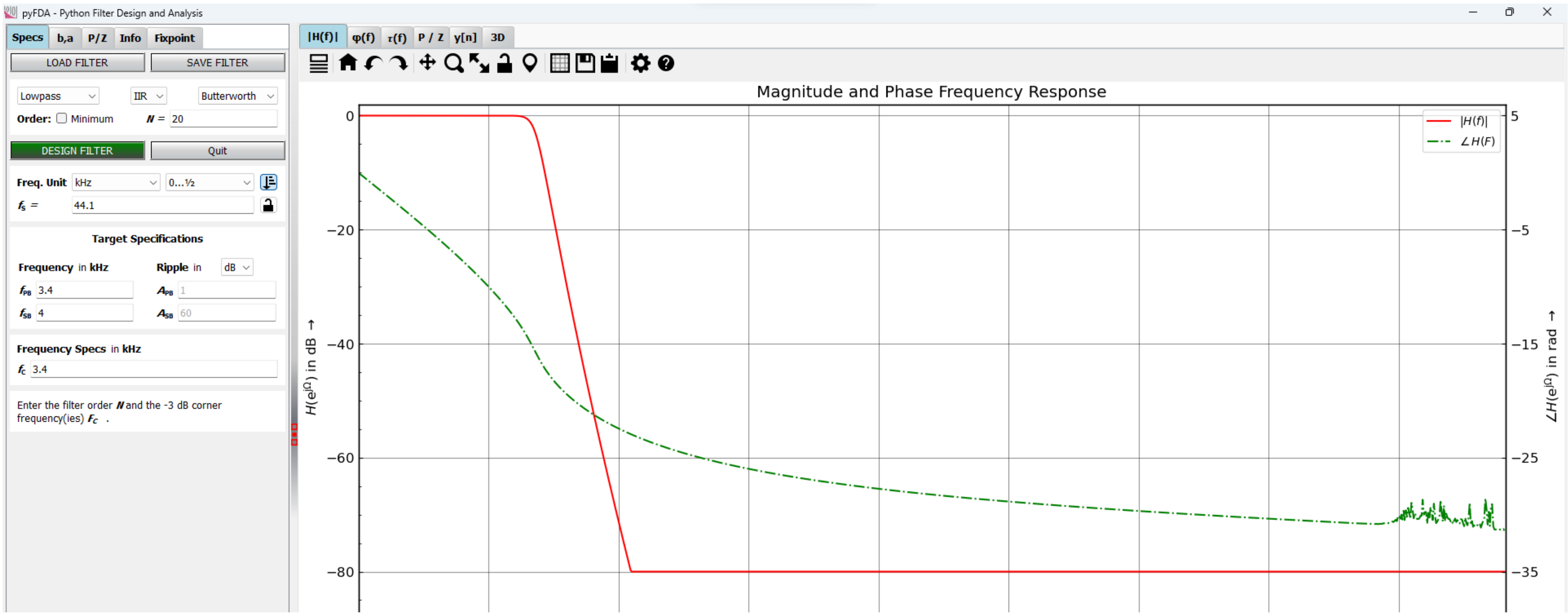


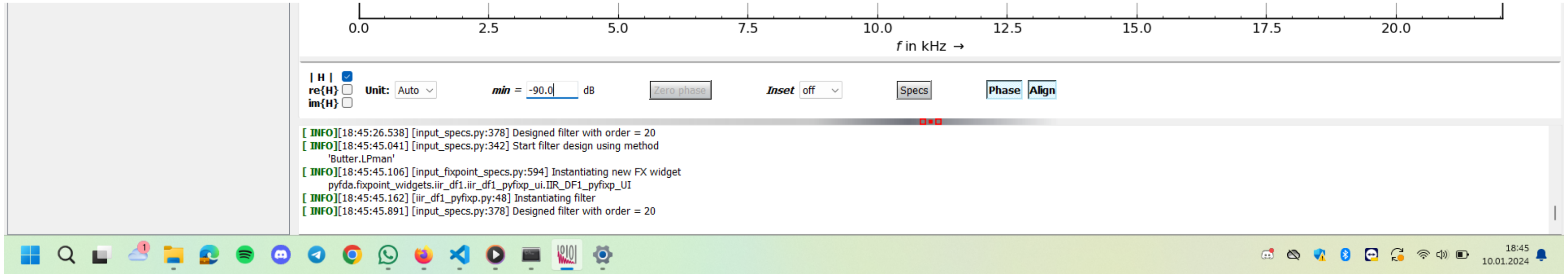
Equiripple:



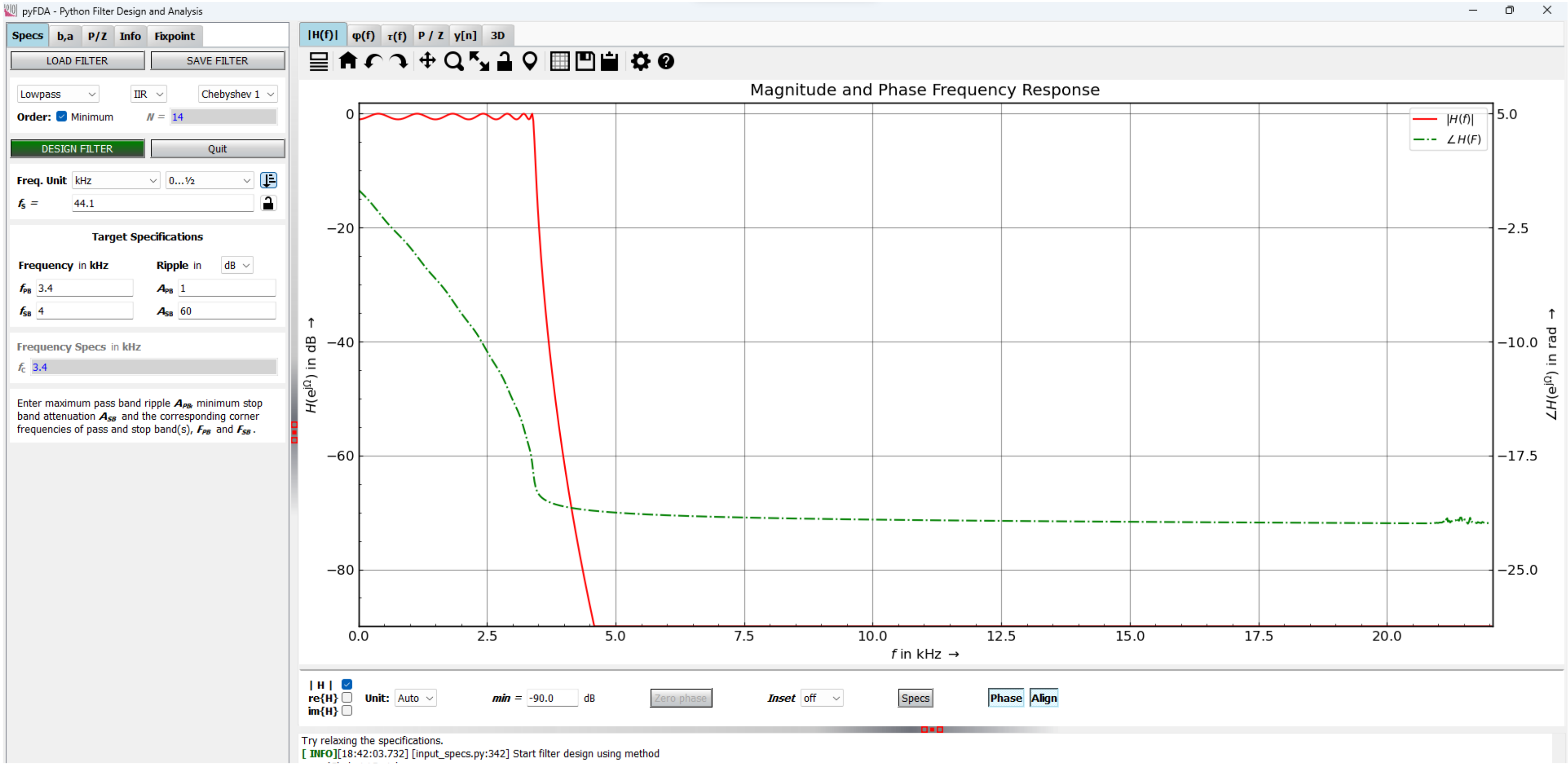


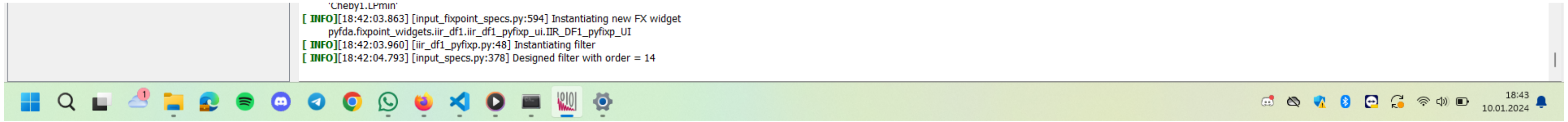
Butterworth:



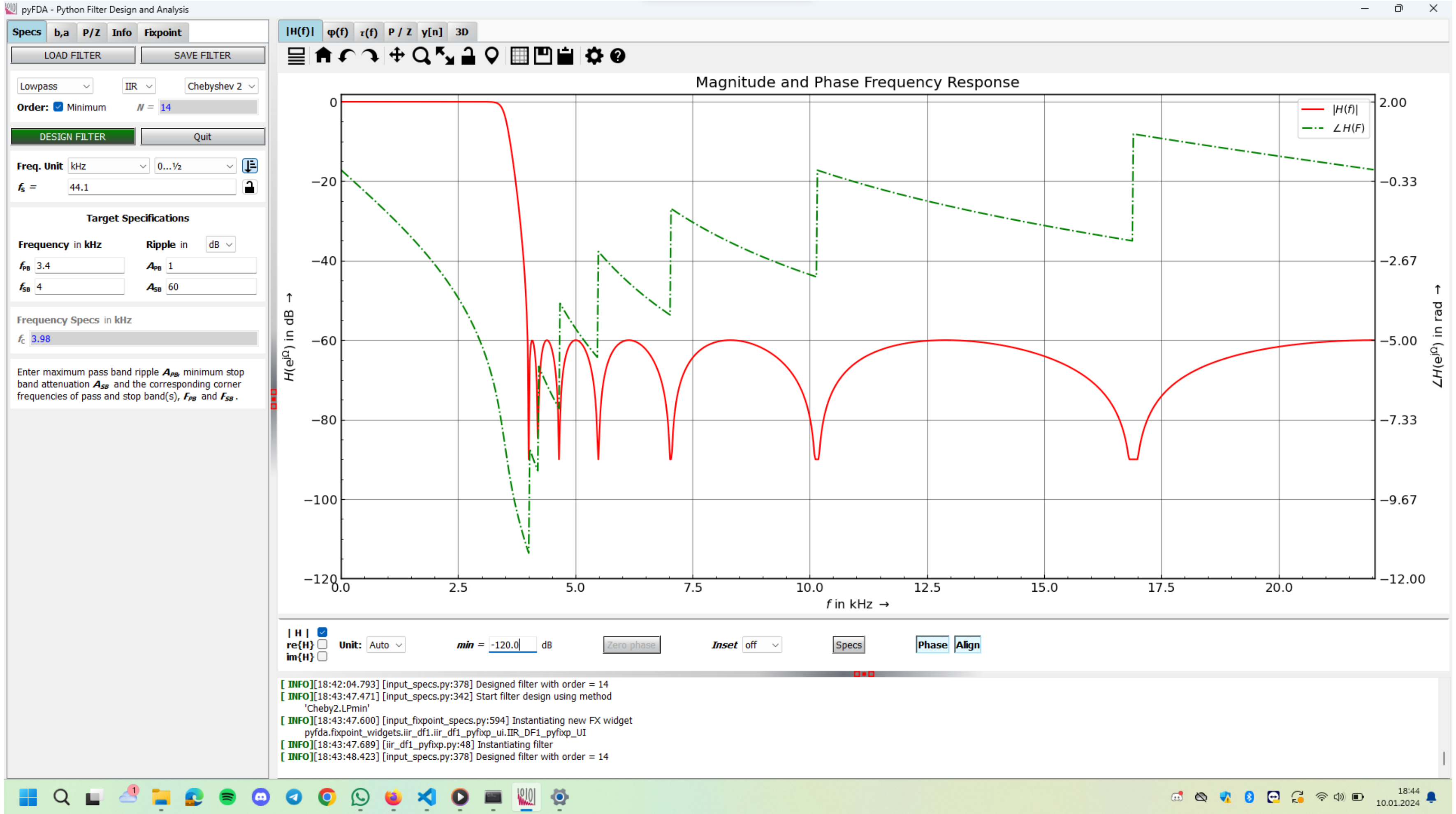

f in kHz →
[INFO][18:45:26.538] [input_specs.py:378] Designed filter with order = 20
[INFO][18:45:45.041] [input_specs.py:342] Start filter design using method 'Butter.LPman'
[INFO][18:45:45.106] [input_fixpoint_specs.py:594] Instantiating new FX widget pyfda.fixpoint_widgets.iir_df1.iir_df1_pyfixp_ui.IIR_DF1_pyfixp_UI
[INFO][18:45:45.162] [iir_df1_pyfixp.py:48] Instantiating filter
[INFO][18:45:45.891] [input_specs.py:378] Designed filter with order = 20

Chebychev 1:

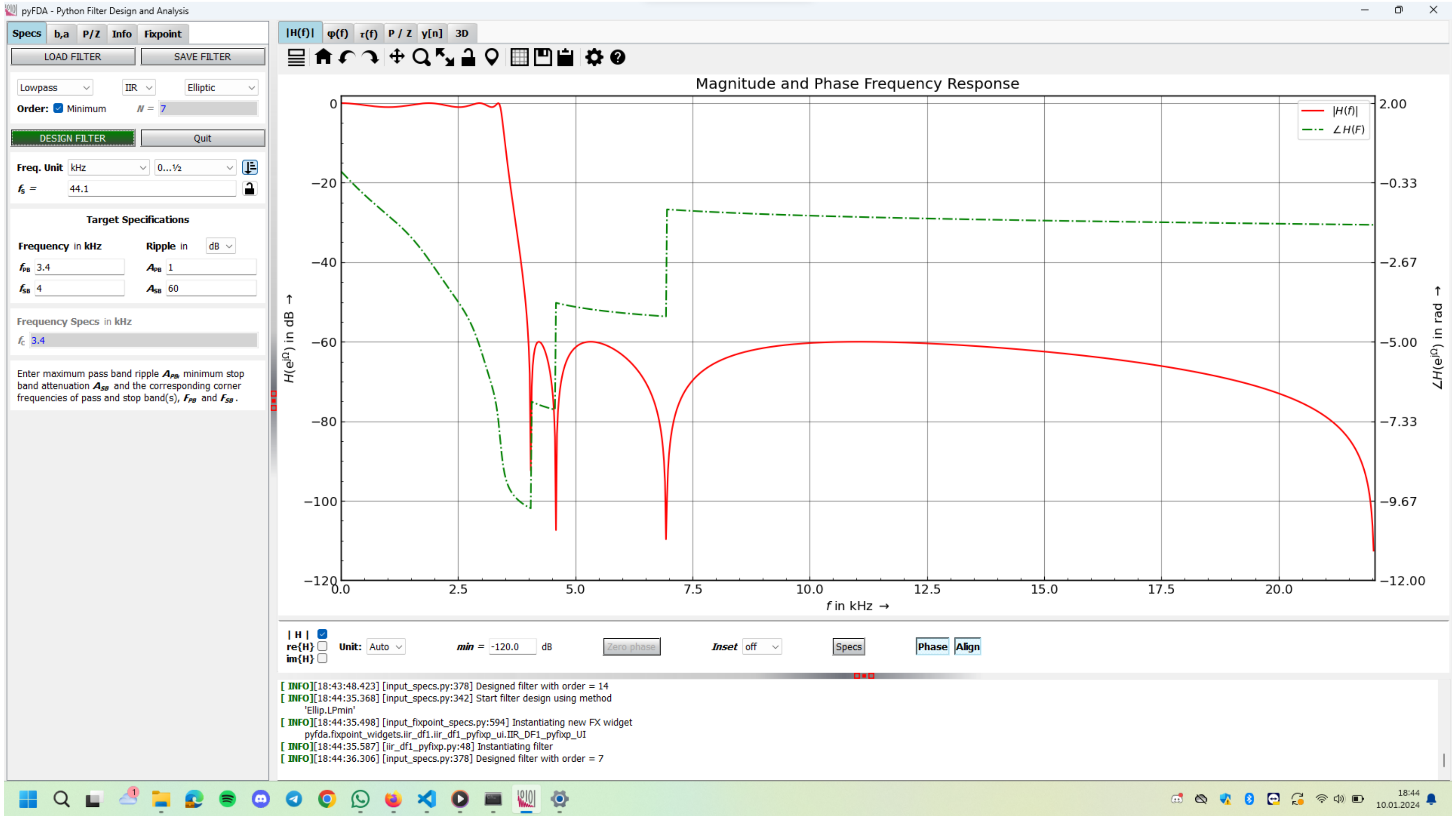

pyFDA - Python Filter Design and Analysis
LOAD FILTER
SAVE FILTER
Lowpass
IIR
Chebyshev 1
Order: Minimum N = 14
DESIGN FILTER
Quit
Freq. Unit kHz
fS = 44.1
Target Specifications
Frequency in kHz
Ripple in dB
fPB 3.4
APB 1
fSB 4
ASB 60
Frequency Specs in kHz
fC 3.4
Enter maximum pass band ripple APB, minimum stop band attenuation ASB and the corresponding corner frequencies of pass and stop band(s), FPB and FSB .
Magnitude and Phase Frequency Response
|H(f)|
∠H(F)
f in kHz →
Try relaxing the specifications.
[INFO][18:42:03.732] [input_specs.py:342] Start filter design using method


'Cheby1.LPmin'
[INFO][18:42:03.863] [input_fixpoint_specs.py:594] Instantiating new FX widget
pyfda.fixpoint_widgets.iir_df1.iir_df1_pyfixp_ui.IIR_DF1_pyfixp_UI
[INFO][18:42:03.960] [iir_df1_pyfixp.py:48] Instantiating filter
[INFO][18:42:04.793] [input_specs.py:378] Designed filter with order = 14
18:43
10.01.2024

Chebychev 2:


pyFDA - Python Filter Design and Analysis
Specs
b,a
P/Z
Info
Fixpoint
LOAD FILTER
SAVE FILTER
Lowpass
IIR
Chebyshev 2
Order: Minimum
N = 14
DESIGN FILTER
Quit
Freq. Unit kHz
0...½
fS = 44.1
Target Specifications
Frequency in kHz
Ripple in dB
fPB 3.4
APB 1
fSB 4
ASB 60
Frequency Specs in kHz
fC 3.98
Enter maximum pass band ripple APB, minimum stop band attenuation ASB and the corresponding corner frequencies of pass and stop band(s), FPB and FSB.
|H(f)|
φ(f)
τ(f)
P / Z
y[n]
3D
Magnitude and Phase Frequency Response
|H(f)|
∠H(F)
H(e^jΩ) in dB →
∠H(e^jΩ) in rad →
f in kHz →
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
2.00
−0.33
−2.67
−5.00
−7.33
−9.67
−12.00
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
| H |
re{H}
im{H}
Unit: Auto
min = -120.0 dB
Zero phase
Inset off
Specs
Phase
Align
[INFO][18:42:04.793] [input_specs.py:378] Designed filter with order = 14
[INFO][18:43:47.471] [input_specs.py:342] Start filter design using method
'Cheby2.LPmin'
[INFO][18:43:47.600] [input_fixpoint_specs.py:594] Instantiating new FX widget
pyfda.fixpoint_widgets.iir_df1.iir_df1_pyfixp_ui.IIR_DF1_pyfixp_UI
[INFO][18:43:47.689] [iir_df1_pyfixp.py:48] Instantiating filter
[INFO][18:43:48.423] [input_specs.py:378] Designed filter with order = 14
18:44
10.01.2024

Elliptisch:



3. Filterexport und -simulation

Im folgenden sollen Sie Audiofiles mit dem Equiripple und dem elliptischen Filter filtern. Dazu können Sie aus pyfda Filter in verschiedenen Formaten exportieren:

Formaten exportieren.

In [ ]:

```
x_w = wav2np("../medien/87778__marcgascon7__vocals.wav")

#Equiripple
b_FIR = [0.0006123033469102477,0.0005231312265310316,0.000561083771645731,0.00041518098768839355,2.827711686114232e-05,-0.0006
a_FIR = [1.]


#Elliptisch
b_IIR = [0.001710952004172366,-0.005755838859144107,0.008363025285148405,-0.004112746893907044,-0.004112746893907043,0.0083630
a_IIR = [1.0,-6.10402966946488,16.40268768530511,-25.100822235115835,23.595177173520497,-13.615049072423911,4.4641836431418325


#Signal Filtern
y_FIR = sig.lfilter(b_FIR, a_FIR, x_w)
y_IIR = sig.lfilter(b_IIR, a_IIR, x_w)

print("Orginal")
display(Audio(data=x_w, rate=wav2np.f_S))


print("-----------------------------------------------------------")
print("FIR: Equiripple")
print(y_FIR.dtype)
display(Audio(data=y_FIR, rate=wav2np.f_S))


print("-----------------------------------------------------------")
print("IIR: Elliptisch")
print(y_IIR.dtype)
display(Audio(data=y_IIR, rate=wav2np.f_S))
```

Hören Sie einen Unterschied zwischen dem Orginal und den beiden unterschiedlichen Filtern? Woran liegt das?

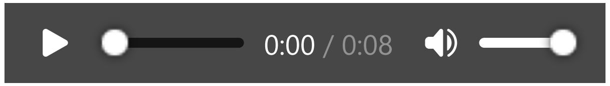
```
2 channels with 349952 frames of 2 bytes and f_S = 44100 Hz.
Orginal
```

0:00 / 0:08

```
-----------------------------------------------------------
FIR: Equiripple
float64
```

0:00 / 0:08

```
------------------------------------------------------------
IIR: Elliptisch
float64
```



In [ ]:

```python
#fig, ax = plt.subplots(**size)
fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(35,8))
l = 4000
start = 20000


ax[0].set_title("FIR-Filter: Equiripple")
ax[0].plot(np.arange(l), x_w[0][start:start+l], label="Orginal")
ax[0].plot(np.arange(l), y_FIR[0][start:start+l], label="y_FIR")
ax[0].legend()

ax[1].set_title("IIR-Filter: Elliptisch")
ax[1].plot(np.arange(l), x_w[0][start:start+l], label="Orginal")
ax[1].plot(np.arange(l), y_IIR[0][start:start+l], label="y_IIR")
ax[1].legend()
```

Out[ ]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x1b3ef61a380>
```