作业第八题报告

PB18020539 黄韫飞

1.作业题目：用Monte Carlo方法计算如下定积分，并讨论有效数字位数

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{9/10}\mathrm{d}x\int_0^{4/5}\mathrm{d}y\int_0^{9/10}\mathrm{d}z\int_0^{2}\mathrm{d}u\int_0^{13/10}\mathrm{d}v(6-x^2-y^2-z^2-u^2-v^2)$$

2.算法与公式

根据积分平均值定理：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\langle f\rangle$$

其中

$$\langle f\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)$$

对于多重积分，上式推广为：

$$\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\ldots\int_{a_n}^{b_n}\mathrm{d}x_n f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{N}\left[\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)\right]\sum_{i=1}^{N}f(x_{1_i},x_{2_i},\ldots,x_{n_i})$$

根据中心极限定理，

$$P\left(\left|\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right|<\beta\right)=\Phi(\beta)$$

所以

$$\sigma_s=|\langle f\rangle-\mu|\propto\frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\langle f^2\rangle-\langle f\rangle^2}$$

可以看到，标准差随着N是以$1/\sqrt{N}$收敛的，也就是说，N增大100倍时，积分的标准差σ_s缩小10倍

3.计算结果与讨论

N取10^3到10^6，分别计算积分的平均值与标准差得到以下结果：

Microsoft Visual Studio 调试控制台

```
quad1
N:1000
quad=2.69251755
sigmas=0.02309383
N:10000
quad=2.69002446
sigmas=0.00725278
N:100000
quad=2.68967942
sigmas=0.00216649
N:1000000
quad=2.68946222
sigmas=0.00065440
quad2
N:1000
quad=5.64751172
sigmas=0.07282159
N:10000
quad=5.64319499
sigmas=0.02077132
N:100000
quad=5.64383540
sigmas=0.00732057
N:1000000
quad=5.64402278
sigmas=0.00241883
```

可以看到积分1的平均值大约在2.6895，积分2的平均值大约在5.644。（用Mathematica计算得到的精确值为2.6895213048...和5.64408），得到的结果与精确值差不多。

σ_s随着N的增加大概呈$1/\sqrt{N}$减小，也就是N增加100倍，σ_s减小10倍。这与中心极限定理给出的结果相同。

要进一步增加精度，花费的时间也更长，执行$N=10^6$的运算时，计算机花费了十几秒的时间。如果再进行到$N=10^7$，计算时间会大大增加。

4.结论

第一个积分的结果是2.6895，第二个积分结果是5.644，（N取10^6），σ_s随着N的增大而呈$1/\sqrt{N}$减小，但是运算的时间也随N的增加而增大