

作业第十三题报告

PB18020539 黄韞飞

1.作业题目：用Metropolis-Hasting方法计算积分： $I = \int_0^\infty (x - \alpha\beta)^2 f(x) dx = \alpha\beta^2$ ， $f(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(a)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{a-1} \exp(-x/\beta)$ ，设积分的权重函数为 $p(x) = f(x)$ 和 $p(x) = (x - \alpha\beta)^2 f(x)$ 。给定参数 α, β ，并用不同的 γ 值分别计算积分，讨论计算精度和效率

2.算法与公式

细致平衡条件：

$$p_i W_{ij} = p_j W_{ji}$$

Metropolis提出上式的一个非对称的解，假设从 i 跃迁到 j 的几率为 W_{ij}

$$W_{ij} = T_{ij} A_{ij}$$

其中 T 和 A 分别表示离开 i 态的概率和被 j 态接受的概率。

Metropolis-Hasting抽样：

$$\begin{aligned} \frac{p_j}{p_i} &= \frac{W_{ij}}{W_{ji}} = \frac{T_{ij} A_{ij}}{T_{ji} A_{ji}} \\ A_{ij} &= \min\left\{1, \frac{p_j T_{ji}}{p_i T_{ij}}\right\} \\ W_{ij} &= \begin{cases} T_{ij}, & \text{if } p_j T_{ij} > p_i T_{ij} \\ \frac{p_j T_{ji}}{p_i}, & \text{if } p_j T_{ij} < p_i T_{ij} \end{cases} \\ W_{ii} &= 1 - \sum_{j \neq i} W_{ij} \end{aligned}$$

根据建议分布 T 进行初始抽样， T 是任意的条件概率分布，最好与 p 有接近的形状。

在本题中，可以取 $\alpha = 2, \beta = 1$ ，积分变为：

$$I = \int_0^\infty (x - 2)^2 f(x) dx = 2, f(x) = x \exp(-x)$$

若 $p(x) = f(x)$ ，

可以先假设 $T_{ij} = 0.5 \exp(-x'/\gamma)$ ，取 $x_0 = 1$ ，抽样 $x' = -\gamma \ln \xi$ ，其中 $\xi \in (0, 1)$ 为均匀随机数

$$r = \frac{p_j T_{ji}}{p_i T_{ij}} = \left(\frac{x'}{x_i}\right)^{a-1} \exp(-(x' - x_i)/\beta) \exp((x' - x_i)/\gamma) = (x'/x_i) \exp(-(x' - x_i)) \exp((x' - x_i)/\gamma)$$

$$x_{i+1} = \begin{cases} x' & \text{if } R < \min(1, r) \\ x_i & \text{if } R > \min(1, r) \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \alpha\beta)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - 2)^2$$

3.计算结果与讨论

从 $\gamma = 2$ 到 $\gamma = 10$ 以0.5的步长改变 γ , 点数 $N = 1E6$, 分别求积分的值和抽样效率

积分1:		
T=2.000000	积分结果: 1.996933	抽样效率: 0.759795
T=2.500000	积分结果: 1.998131	抽样效率: 0.736264
T=3.000000	积分结果: 2.008947	抽样效率: 0.691874
T=3.500000	积分结果: 1.995762	抽样效率: 0.643461
T=4.000000	积分结果: 1.990151	抽样效率: 0.597825
T=4.500000	积分结果: 1.998478	抽样效率: 0.556704
T=5.000000	积分结果: 1.992620	抽样效率: 0.520246
T=5.500000	积分结果: 2.000728	抽样效率: 0.488511
T=6.000000	积分结果: 2.013136	抽样效率: 0.458853
T=6.500000	积分结果: 2.010284	抽样效率: 0.433296
T=7.000000	积分结果: 2.001514	抽样效率: 0.409538
T=7.500000	积分结果: 2.003007	抽样效率: 0.387904
T=8.000000	积分结果: 1.995874	抽样效率: 0.368921
T=8.500000	积分结果: 1.992676	抽样效率: 0.351942
T=9.000000	积分结果: 2.002609	抽样效率: 0.335876
T=9.500000	积分结果: 1.999831	抽样效率: 0.321438
T=10.000000	积分结果: 1.996215	抽样效率: 0.307264

与理论值 $\alpha\beta^2 = 2$ 的偏差在 10^{-3} 量级, 在 $\gamma \in [2, 10]$ 抽样效率随着 γ 的增大而减小

4.结论

通过Metropolis – Hasting抽样可以比较准确地抽出符合 $p(x)$ 分布的抽样。利用这种办法可以求出积分。在本题中, 利用MH抽样得到, 当 $\alpha = 2, \beta = 1$ 时, $I = \int_0^\infty (x - \alpha\beta)^2 f(x)dx$ 的值在 $\alpha\beta^2 = 2$ 附近。随着 γ 在 $[2, 10]$ 范围内的增大, 抽样效率降低, 这是因为 γ 改变了跃迁函数 T 的性质。