作业第一题报告

PB18020539 黄韫飞

1.作业题目：用Schrage方法编写随机数子程序，用连续两个随机数作为点的坐标值绘出若干点的平面分布图。再用$\langle x^k \rangle$测试均匀性（取不同量级的N值，讨论偏差与N的关系）、$C(l)$测试其二维独立性（总点数$N > 10^7$）

2.算法与公式

Lehmer线性同余法产生随机数的公式：

$$I_{n+1} = (aI_n + b) \mod m;$$
$$x_n = I_n/m;$$

16807产生器：$a = 7^5 = 16807, b = 0, m = 2^{31} - 1 = 2147483647$

在计算$I_{n+1} = aI_n$的过程中，可能会超过计算机可以表示的最大数字而产生整数的溢出，为此采取了Schrage方法：

$$az \mod m = \begin{cases} a(z \mod q) - r[z/q], & if \geq 0 \\ a(z \mod q) - r[z/q] + m, & else \end{cases}$$
$$m = aq + r, q = [m/a], r = m \mod a$$

在程序中，定义随机数产生器RandGen16807()函数和自动取模的Schrage()函数，每次执行RandGen16807()时先调用Schrage()对aI_n进行自动取模，将返回值s代入线性同余法的公式中。

均匀性与独立性检验

$\langle x^k \rangle$检验：取各个k，遍历产生的随机数，计算x^k并求出平均值$\langle x^k \rangle$。理想情况下，$\lim\limits_{N\to\infty} \langle x^k \rangle \to \frac{1}{1+k}$. $|\langle x^k \rangle - \frac{1}{k+1}| = O(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

$C(l)$检验：取各个l，计算$\frac{\langle x_n x_{n+1} \rangle - \langle x_n \rangle^2}{\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2}$，其中，$\langle x_n \rangle^2$和$\langle x_n^2 \rangle$可以从前面的计算结果取$k = 1$和$k = 2$. 理想情况下$\lim\limits_{N\to\infty} C(l) = 0$

3.计算结果

取种子$I = 1$

$N = 10^5$

```
k=1, x^k=0.500284, 1/(1+k)=0.500000
delta=0.000284
k=2, x^k=0.333484, 1/(1+k)=0.333333
delta=0.000151
k=3, x^k=0.249990, 1/(1+k)=0.250000
delta=-0.000010
k=4, x^k=0.199879, 1/(1+k)=0.200000
delta=-0.000121
k=5, x^k=0.166482, 1/(1+k)=0.166667
delta=-0.000184
k=6, x^k=0.142640, 1/(1+k)=0.142857
delta=-0.000217
k=7, x^k=0.124767, 1/(1+k)=0.125000
delta=-0.000233
k=8, x^k=0.110873, 1/(1+k)=0.111111
delta=-0.000238
k=9, x^k=0.099762, 1/(1+k)=0.100000
delta=-0.000238
k=10, x^k=0.090674, 1/(1+k)=0.090909
delta=-0.000235
l=1, C_l=0.002424
l=2, C_l=-0.002645
l=3, C_l=0.003534
l=4, C_l=0.003893
l=5, C_l=-0.000770
l=6, C_l=-0.001578
l=7, C_l=-0.005024
l=8, C_l=-0.003987
l=9, C_l=0.003605
```

$N = 10^6$

```
k=1, x^k=0.500030, 1/(1+k)=0.500000
delta=0.000030
k=2, x^k=0.333278, 1/(1+k)=0.333333
delta=-0.000055
k=3, x^k=0.249888, 1/(1+k)=0.250000
delta=-0.000112
k=4, x^k=0.199856, 1/(1+k)=0.200000
delta=-0.000144
k=5, x^k=0.166507, 1/(1+k)=0.166667
delta=-0.000160
k=6, x^k=0.142692, 1/(1+k)=0.142857
delta=-0.000165
k=7, x^k=0.124836, 1/(1+k)=0.125000
delta=-0.000164
k=8, x^k=0.110952, 1/(1+k)=0.111111
delta=-0.000159
k=9, x^k=0.099848, 1/(1+k)=0.100000
delta=-0.000152
k=10, x^k=0.090765, 1/(1+k)=0.090909
delta=-0.000144
l=1, C_l=-0.000273
l=2, C_l=-0.001716
l=3, C_l=0.000878
l=4, C_l=-0.000375
l=5, C_l=-0.000330
l=6, C_l=0.000397
l=7, C_l=-0.000827
l=8, C_l=0.000388
l=9, C_l=0.000752
```

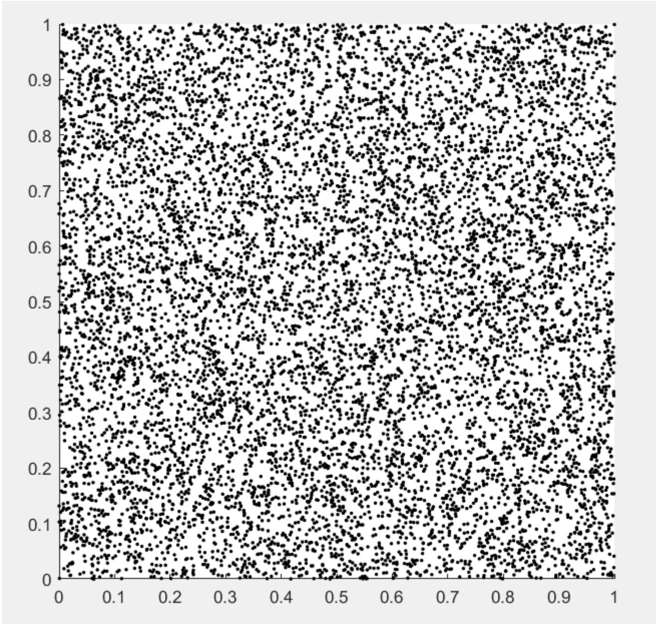
$N = 10^7$

```
k=1, x^k=0. 500019, 1/(1+k)=0. 500000
delta=0. 000019
k=2, x^k=0. 333339, 1/(1+k)=0. 333333
delta=0. 000005
k=3, x^k=0. 249999, 1/(1+k)=0. 250000
delta=-0. 000001
k=4, x^k=0. 199995, 1/(1+k)=0. 200000
delta=-0. 000005
k=5, x^k=0. 166658, 1/(1+k)=0. 166667
delta=-0. 000009
k=6, x^k=0. 142845, 1/(1+k)=0. 142857
delta=-0. 000012
k=7, x^k=0. 124985, 1/(1+k)=0. 125000
delta=-0. 000015
k=8, x^k=0. 111094, 1/(1+k)=0. 111111
delta=-0. 000017
k=9, x^k=0. 099981, 1/(1+k)=0. 100000
delta=-0. 000019
k=10, x^k=0. 090889, 1/(1+k)=0. 090909
delta=-0. 000020
l=1, C_l=0. 000344
l=2, C_l=0. 000039
l=3, C_l=0. 000361
l=4, C_l=-0. 000045
l=5, C_l=-0. 000061
l=6, C_l=0. 000512
l=7, C_l=0. 000038
l=8, C_l=0. 000233
l=9, C_l=-0. 000188
```

$N = 10^8$

```
k=3, x^k=0. 250020, 1/(1+k)=0. 250000
delta=0. 000020
k=4, x^k=0. 200016, 1/(1+k)=0. 200000
delta=0. 000016
k=5, x^k=0. 166680, 1/(1+k)=0. 166667
delta=0. 000013
k=6, x^k=0. 142868, 1/(1+k)=0. 142857
delta=0. 000011
k=7, x^k=0. 125009, 1/(1+k)=0. 125000
delta=0. 000009
k=8, x^k=0. 111119, 1/(1+k)=0. 111111
delta=0. 000008
k=9, x^k=0. 100007, 1/(1+k)=0. 100000
delta=0. 000007
k=10, x^k=0. 090916, 1/(1+k)=0. 090909
delta=0. 000007
l=1, C_l=0. 000048
l=2, C_l=-0. 000151
l=3, C_l=0. 000103
l=4, C_l=0. 000072
l=5, C_l=-0. 000037
l=6, C_l=-0. 000067
l=7, C_l=0. 000074
l=8, C_l=0. 000101
l=9, C_l=-0. 000064
```

画图：取$N = 2 \times 10^4$个数据，以连续的两个数据为一个点的坐标，组成10^4个点的坐标



4.讨论

(1)根据取2×10^4个数据画的散点图，可以看到随机数产生的比较均匀。

(2)随着N的增大(10^5到10^7)，$\langle x^k\rangle$逐渐趋近于$\frac{1}{1+k}$。且与$\frac{1}{1+k}$的差值随着N的增大而递减。变化规律与$\frac{1}{\sqrt{N}}$大致相同。但是当N取10^8时，又出现了$\langle x^k\rangle$远离$\frac{1}{1+k}$的现象。猜测可能是由于计算过程中保留小数位数造成的精度问题。或者是由于N太大而出现周期。

(3)C(l)随着参数l的变化规律不明显。但是随着N的增大，$C(l)$趋近于0

(4)取$a=25,m=101$，画出了下图，说明了线性同余法的缺陷。画出的点分布在一系列直线上。