# 作业第十题报告

### PB18020539 黄韫飞

#### 1.作业题目：Monte Carlo方法研究正弦外力场$\sim \sin\omega t$中的随机行走

#### 2.算法与公式

只考虑粒子在$x$方向的运动，粒子在每一步可以随机选择向右或者向左，如果没有外力，概率分别为$1/2$，在正弦外力的作用下，向右的概率$p_1$和向左的概率$p_2$分别为：

$$\begin{aligned}p_1 &= 1/2 + a\sin\omega t\\ p_2 &= 1/2 - a\sin\omega t\end{aligned}$$

设$t$的步长为$1$，则第$i$个$t$时刻，向前走的位移$x$的期望为：

$$\langle x_i\rangle = (+1)p_1 + (-1)p_2 = 2a\sin\omega i$$

此时粒子的总位移$x_n$的期望为：

$$\begin{aligned}\langle x_n\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle x_i\rangle\\ &= 2a\sum_{i=1}^{n}\sin\omega i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\omega/2)(\sin\omega+\sin 2\omega+\ldots+\sin n\omega) &= \frac{1}{2}(\cos\frac{3\omega}{2}-\cos\frac{\omega}{2}+\ldots+\cos\frac{(2n+1)\omega}{2}-\cos\frac{(2n-1)\omega}{2})\\ &= \frac{1}{2}(\cos\frac{(2n+1)\omega}{2}-\cos\frac{\omega}{2})\\ &= \sin(\frac{n\omega}{2})\sin(\frac{(n+1)\omega}{2})\\ \Rightarrow \langle x_n\rangle &= 2a\frac{\sin(\frac{n\omega}{2})\sin(\frac{(n+1)\omega}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}\end{aligned}$$

粒子距离出发点距离平方的平均值为：

$$\begin{aligned}\langle x_n^2\rangle &= \langle\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{j=1}^{n}x_j\rangle\\ &= \langle\sum_{i=1}^{n}x_i^2\rangle+\langle\sum_{i\neq j}x_ix_j\rangle\\ &= n+4a^2\sum_{i\neq j}\sin\omega i\sin\omega j\\ &= n+4a^2(\sum_{i=1}^{n}\sin\omega i)^2-4a^2\sum_{i=1}^{n}(\sin\omega i)^2\\ &= n-4a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\cos(2\omega i)}{2}+4a^2\left(\frac{\sin(\frac{n\omega}{2})\sin(\frac{(n+1)\omega}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^2\\ &= n(1-2a^2)+2a^2\sum_{i=1}^{n}\cos(2\omega i)+4a^2\left(\frac{\sin(\frac{n\omega}{2})\sin(\frac{(n+1)\omega}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^2\\ &= n(1-2a^2)+2a^2\frac{\sin(n\omega)\cos(n+1)\omega}{\sin\omega}+4a^2\left(\frac{\sin(\frac{n\omega}{2})\sin(\frac{(n+1)\omega}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

$t$时刻粒子位移的方差：

$$
\begin{aligned}
D(n) &= \langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2 \\
&= n(1-2a^2) + 2a^2 \frac{\sin(n\omega)\cos(n+1)\omega}{\sin\omega}
\end{aligned}
$$

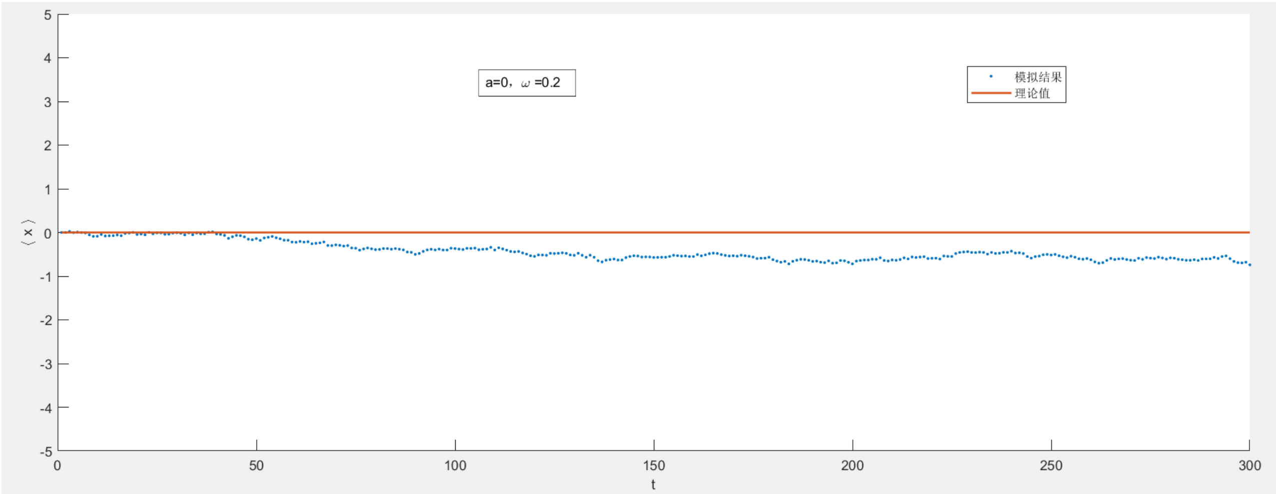
在程序中，产生一个$[0,1]$中的随机数，判断值，如果处于$[0,1/2+a\sin\omega t]$中，则向右一步，如果处于$[1/2+a\sin\omega t,1]$中，则向左走一步。记录点的位置。

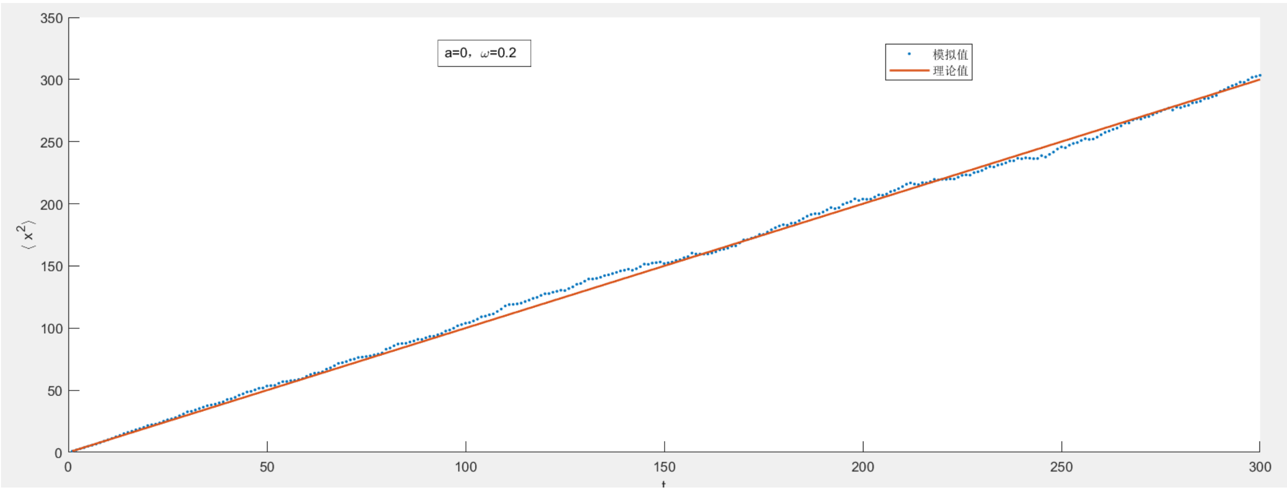
### 3.计算结果与讨论

取1000个粒子做平均，改变$\alpha$，对比理论和实验给出的$\langle x_n \rangle$和$\langle x_n^2 \rangle$，画图

**$a=0$即没有正弦力的情况**

理论值：$\langle x_n \rangle = 0, \langle x_n^2 \rangle = n$，将数据导入MATLAB，画图如下：



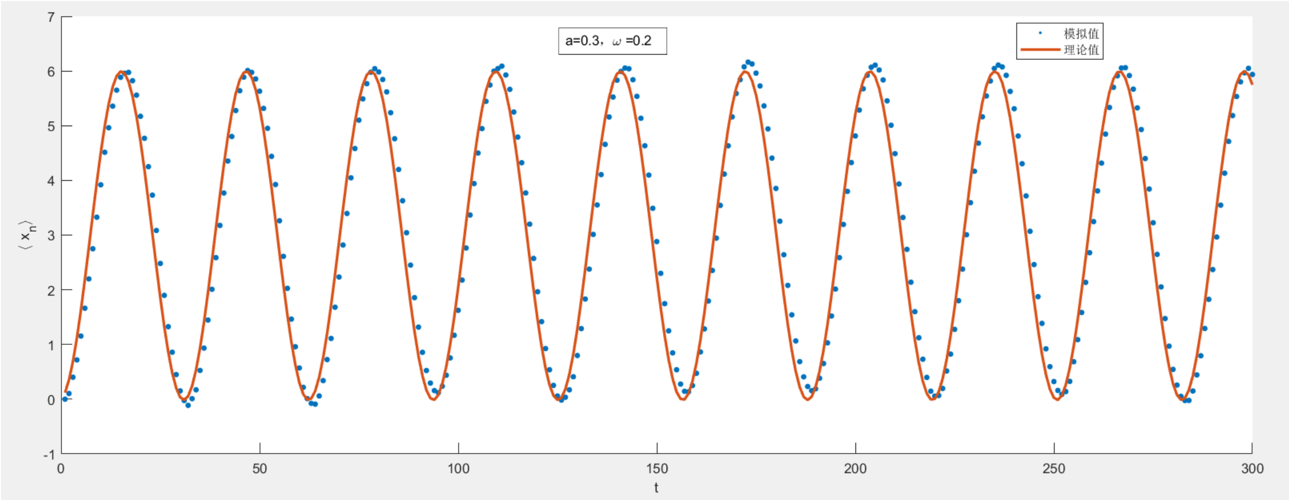

看到在[0,300]范围内，理论值和模拟结果符合的很好

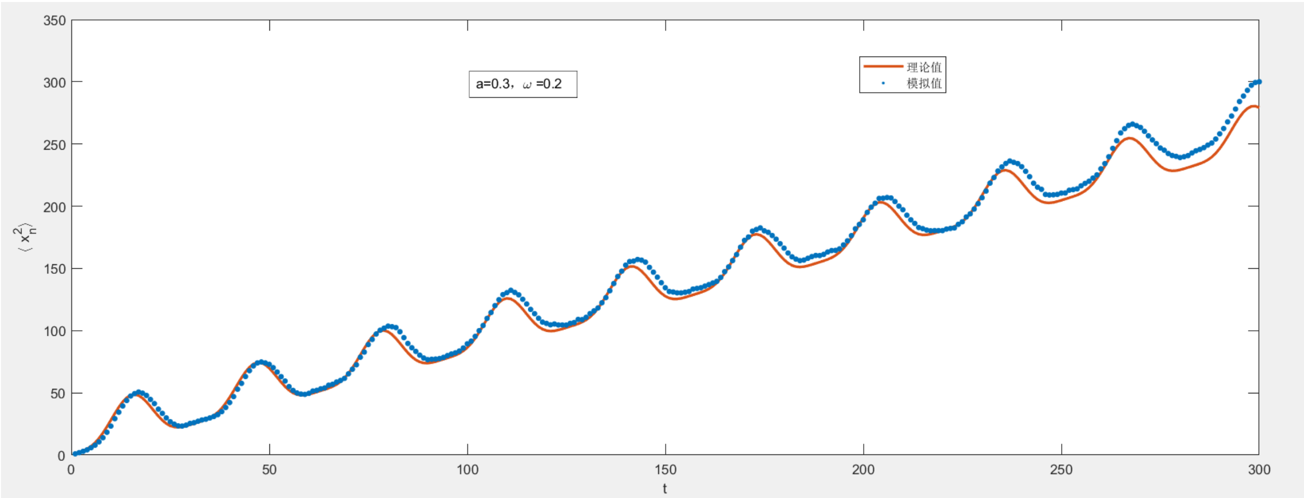
**考虑正弦力的影响，设**$a=0.3, \omega=0.2$

理论值：

$$
\langle x_n \rangle = 6.01\sin(0.1n)\sin(0.1(n+1))
$$
$$
\langle x_n^2 \rangle = 0.82n + 0.906\sin(0.2n)\cos(0.2(n+1)) + 36.1201\sin^2(0.1n)\sin^2(0.1(n+1))
$$

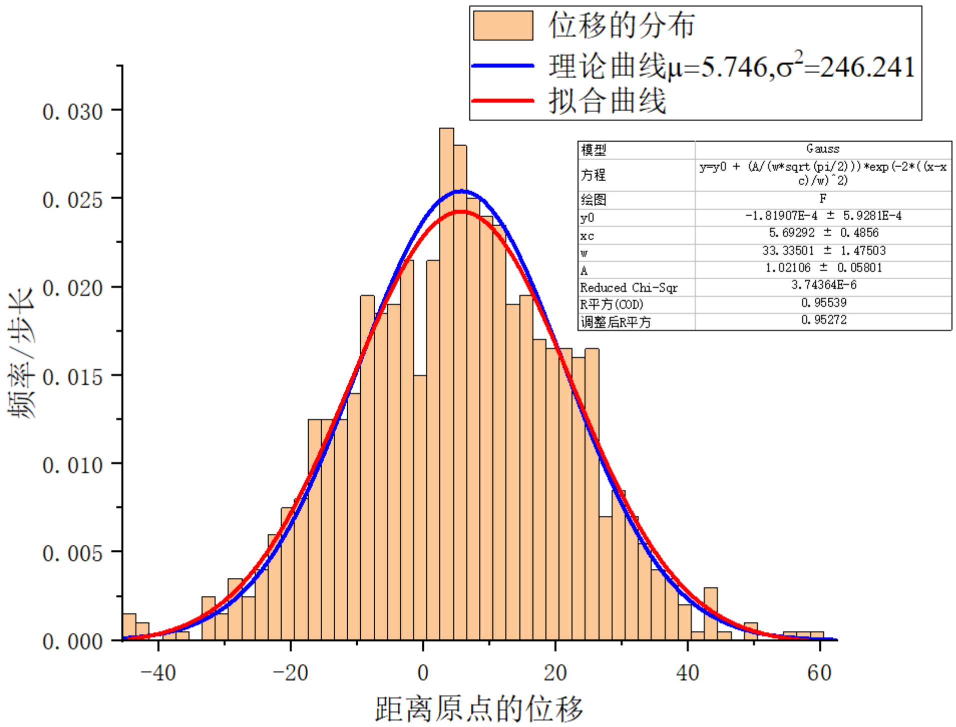
计算结果绘图：



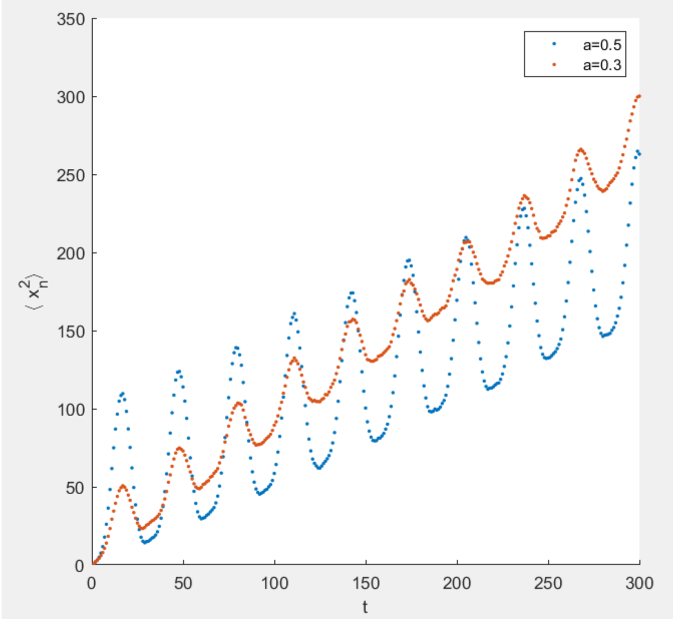

可以看到，距离原点位移的平均值和位移平方的平均值都是随着力$F$以频率$\omega$振荡的。

在$t=300$时刻，粒子位置的平均值为$5.746$，方差为$246.241$，画出这$1000$个粒子距离原点位移的分布，与计算结果比较。




距离原点的位移近似呈正态分布

讨论$a$的影响，令$a=0.5$，画图与$a=0.3$对比




此时振幅增大，而距离原点位移的平方的增速减小了。这是因为$n(1-2a^2)$随着$a$的增大而减小。

**4.结论**

粒子在正弦力场中随机行走的行为受到$\alpha$（用于表征力的大小）以及$\omega$（正弦力的频率）的控制。不受力时，粒子的位移平均值为$0$，平方的平均值$\langle x_n^2 \rangle$为$n$。

在频率为$\omega$的正弦力场中，粒子位移的平均值$\langle x_n \rangle$以及位移平方的平均值$\langle x_n^2 \rangle$也以$\omega$的频率振荡，不同的是，$\langle x_n \rangle$随着时间做正弦振荡，$\langle x_n^2 \rangle$除了正弦振荡外，其平衡位置随着时间增大，且增大的速率随着$a$的增大而减小。

粒子运动一段时间后，相对于原点的位移呈正态分布$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\langle x_n \rangle)^2/2\sigma^2}$。

另外，振荡的振幅由$a$决定，$a$越大，振幅越大。