作业第九题报告

PB18020539 黄韫飞

1.题目：自设若干个随机分布（相同或不同的μ和σ^2）。通过Monte Carlo模拟，验证中心极限定理成立(N=2,5,10)

2算法与公式

根据大数定律，随机序列$\{f_i\}$的期待值μ满足：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i\to\mu$$

当N有限时，平均值满足：

$$P\left(\left(\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right)<\beta\right)=\Phi(\beta)$$

其中$\Phi(\beta)$是Gauss分布

设一个分布并求出其μ，对该分布进行抽样，得到$\left(\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right)$的值，重复多次，得到$\left(\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right)$的分布

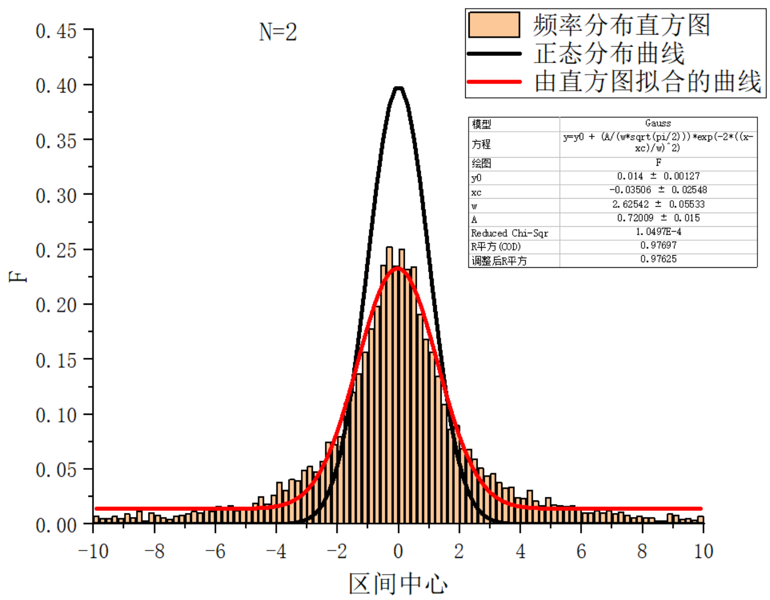
本题中分别取了标准正态分布$N(0,1)$和指数分布$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2} & for\quad x>0\\ 0, & else\end{cases}$

3.计算结果与讨论

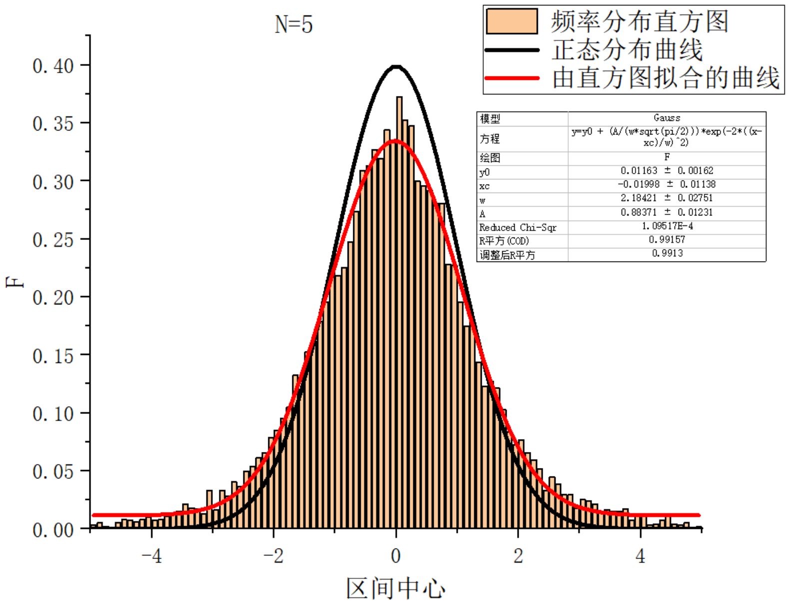
(1)取正态分布$N(0,1^2)$，$\mu=0$

标准正态分布的抽样为：$x=\sqrt{-2\ln u}\cos(2\pi v)$，其中$u,v\in[0,1]\times[0,1]$

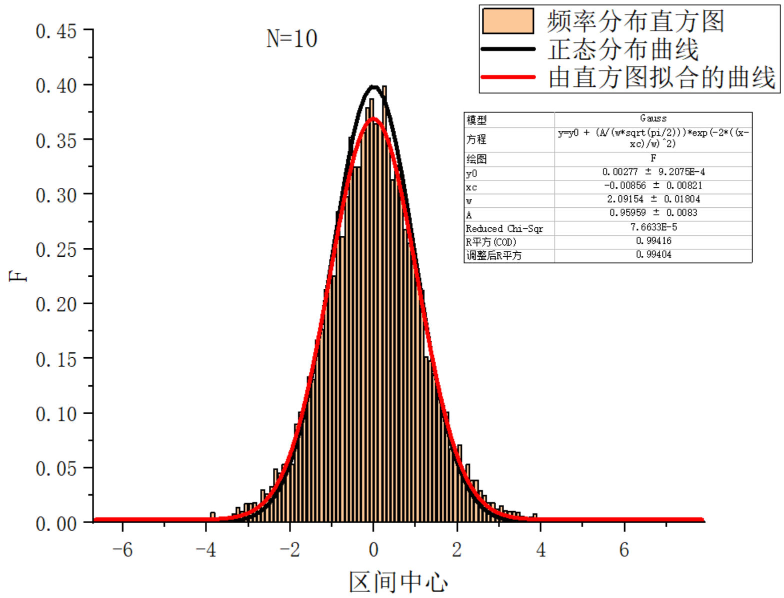
N=2：



N=5：



N=10：

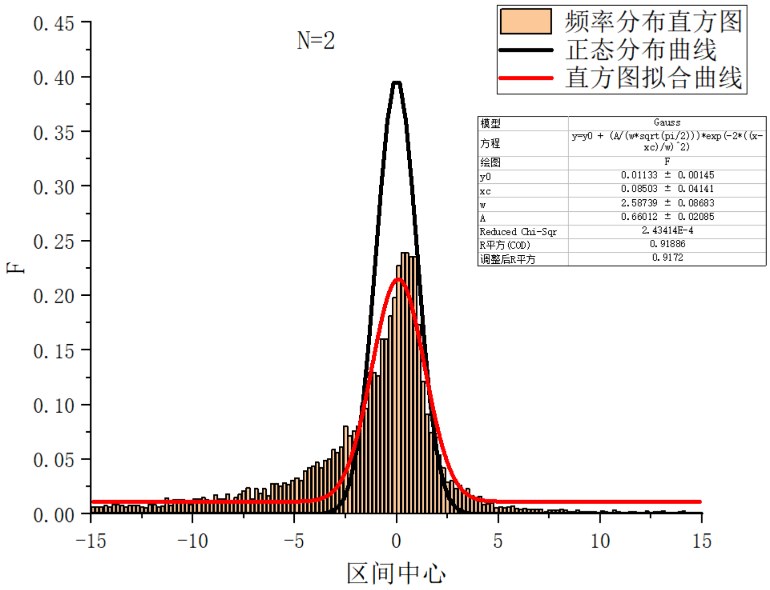


可以看到随着N的增加，所得到的$\left(\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right)$的分布与正态分布越来越接近，这与中心极限定理预测的结果相同

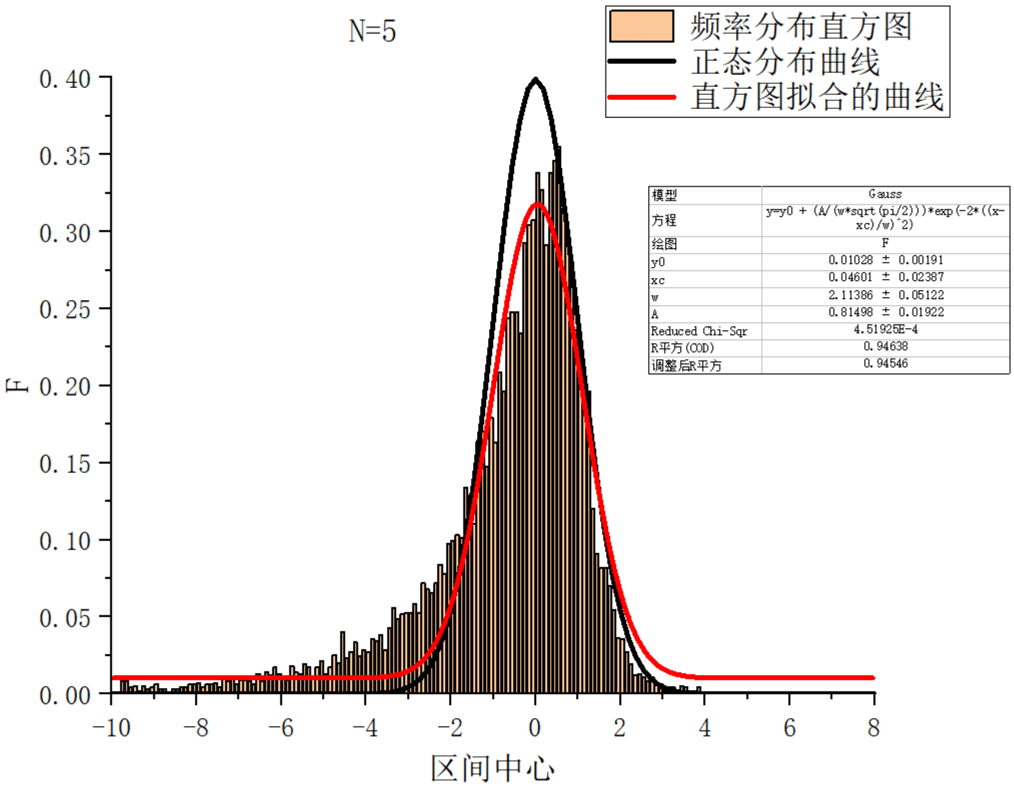
(2)指数分布:$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2} & for \quad x>0\\ 0, & else\end{cases}$

指数分布有：$\xi=\int_0^x \frac{1}{2}e^{-t/2}\mathrm{d}t=1-e^{-x/2}$，$x=-2\ln(1-\xi)=-2\ln\xi$，其中$\xi\in[0,1]$

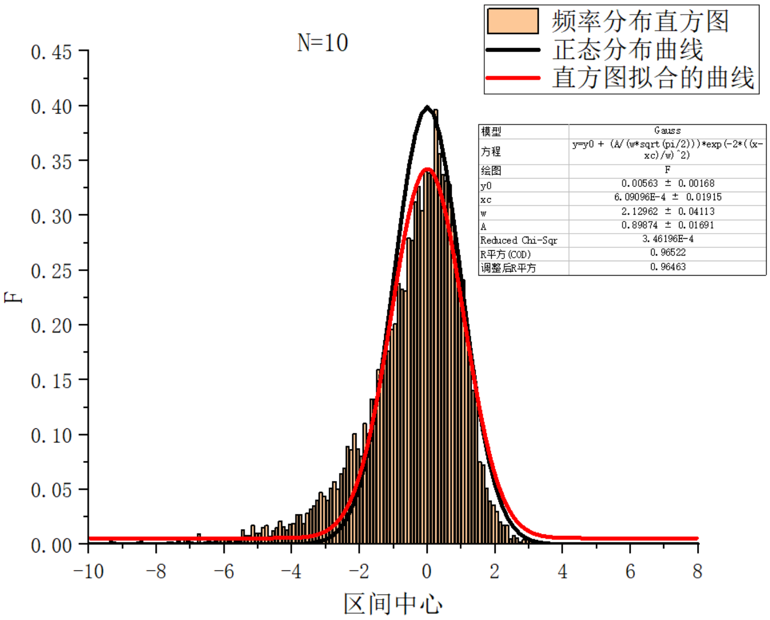
N=2


N=2
频率分布直方图
正态分布曲线
直方图拟合曲线
模型 Gauss
方程 y=y0 + (A/(w*sqrt(pi/2)))*exp(-2*((x-xc)/w)^2)
绘图 F
y0 0.01133 ± 0.00145
xc 0.08503 ± 0.04141
w 2.58739 ± 0.08683
A 0.66012 ± 0.02085
Reduced Chi-Sqr 2.43414E-4
R平方(COD) 0.91886
调整后R平方 0.9172
F
区间中心

N=5

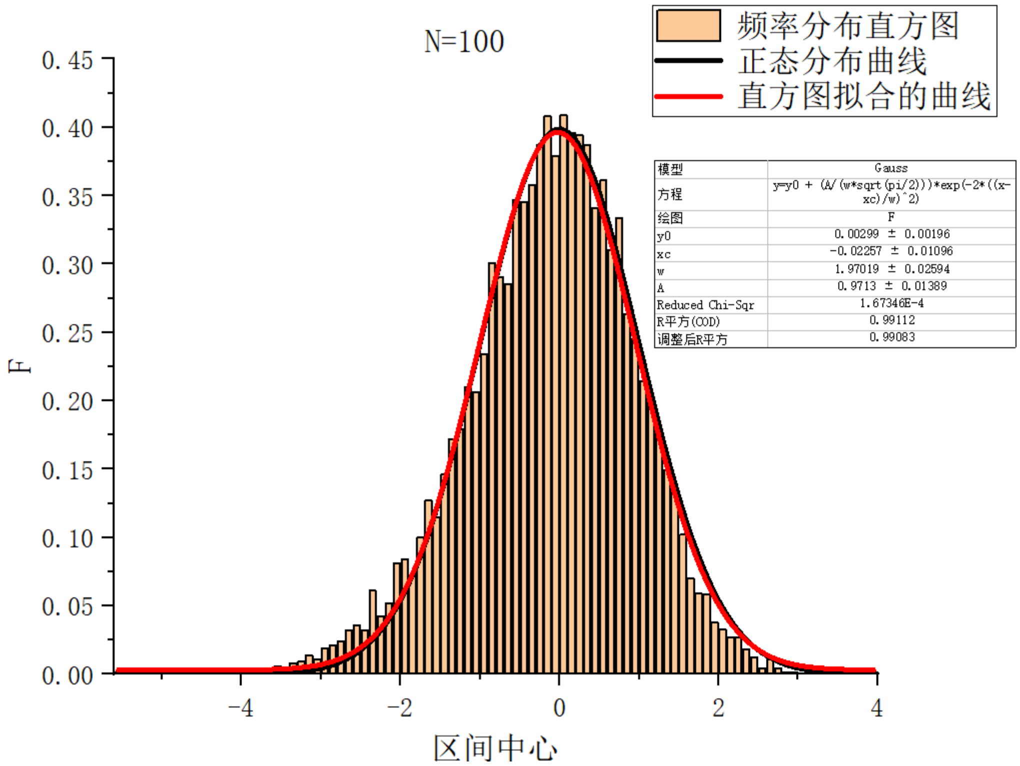

N=5
频率分布直方图
正态分布曲线
直方图拟合的曲线
模型 Gauss
方程 y=y0 + (A/(w*sqrt(pi/2)))*exp(-2*((x-xc)/w)^2)
绘图 F
y0 0.01028 ± 0.00191
xc 0.04601 ± 0.02387
w 2.11386 ± 0.05122
A 0.81498 ± 0.01922
Reduced Chi-Sqr 4.51925E-4
R平方(COD) 0.94638
调整后R平方 0.94546
F
区间中心

N=10



同样有当N增加时，$\left(\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right)$的分布接近于正态分布，但是由于指数函数本身的性质，其分布有明显的左偏。

当N进一步增大时（取N=100），得到的曲线与正态分布几乎完全重合



4.结论

在本题中分别用标准正态分布和$\lambda=2$的指数分布验证了中心极限定理。可以看到，随着N的增加(N=2,5,10)，$\left(\frac{\langle f\rangle-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}\right)$的分布与正态分布越来越接近。虽然由于函数性质的差异，收敛的速度有所不同，但当N增大时，都会趋近于正态分布。这就验证了中心极限定理。