# 作业第三题报告

## PB18020539 黄韫飞

**1.作业题目：在球坐标系$(\rho,\theta,\phi)$下产生球面上分布均匀的随机坐标点，给出其直接抽样方法**

**2.算法与公式**

利用16807随机数产生器产生[0,1]区间内的随机数$\xi$

$\phi=2\pi\xi\in[0,2\pi],\quad t=2\xi-1\in[-1,1]$也是随机数

则球坐标系下的$(\rho,\arccos t,\phi)$是球面上均匀分布的随机坐标点

证明如下：

球面上单位立体角

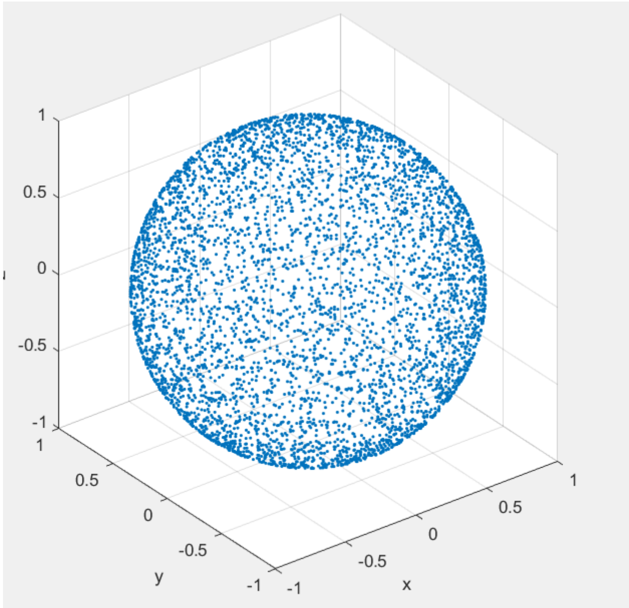
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Omega&=\frac{\mathrm{d}S}{\rho^2}\\
&=2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\
&=2\pi\sin(\arccos t)\mathrm{d}(\arccos t)\mathrm{d}\phi\\
&=2\pi\sqrt{1-t^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi\\
&=2\pi\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

由于$\mathrm{d}t,\mathrm{d}\phi$都是均匀随机数，所以单位立体角上的点数是相等的，如此取的点就是球面上均匀分布的坐标点。

**3.计算结果与讨论**

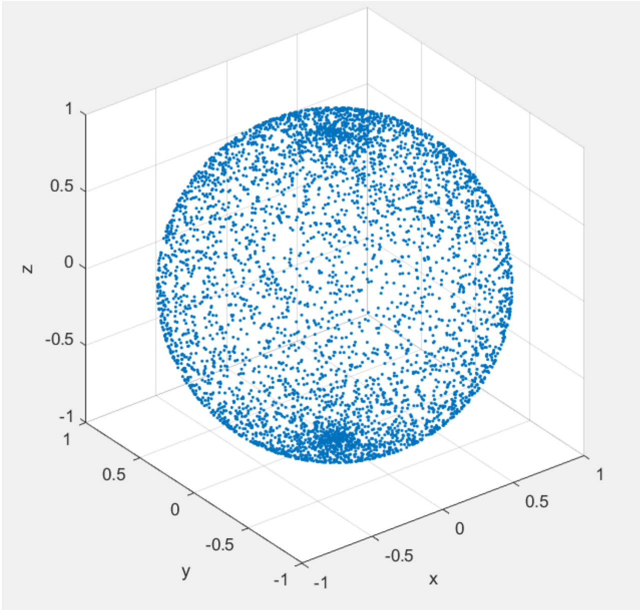
因为$\rho$对于分布没有影响，取$\rho=1$。

取N=5000个点，用MATLAB画出点的分布如下：




可以看到点在$\rho=1$的球面上是均匀分布的。（看起来边缘密中间疏的假象是由于投影导致的）

如果直接用$\theta=2\pi\xi\in[0,\pi]$，得到的图像：




可以明显看到两极处的点明显较密，原因是靠近两极处，单位立体角$\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$较小，如果让$\theta$均匀分布，单位立体角内的点数就会较大，不满足球面上的均匀分布。所以不能直接用$\theta = 2\pi\xi \in [0, \pi]$

**4.结论**

为了产生球面上均匀分布的随机坐标点，应该用$\phi = 2\pi\xi \in [0, 2\pi], \quad t = 2\xi - 1 \in [-1, 1]$，则$(\rho, \arccos t, \phi)$均匀分布在球面上。原因是单位立体角上的点个数相等。不能直接让$\theta$均匀分布，否则就会出现两极处点较密的现象。