

作业第五题报告

PB18020539 黄韞飞

1.作业题目：对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在(x,y)平面上投影的几率分布函数。并由此验证Marsaglia方法： $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1 - 2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样

2.算法与公式

对于球面上的均匀分布的随机坐标点，单位立体角上的点数是均匀分布的，由于 $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta d\phi$ ，设 $p(\theta, \phi) = A \sin \theta$ ，归一化： $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi A \sin \theta = 4\pi A = 1$ ， $A = \frac{1}{4\pi}$ ， $p(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \cos \theta \\ p(x, y) &= \frac{p(\theta, \phi)}{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \right|} \\ &= \frac{1}{4\pi r^2 \cos \theta} \end{aligned}$$

在之后的计算中，不妨取单位球面 $r = 1$ ，则 $p(x, y) = \frac{1}{4\pi \cos \theta} = \frac{1}{4\pi \sqrt{1-x^2-y^2}}$ 。

Marsaglia方法：由于 u, v 满足 $(u, v) \in [-1, 1]$ 且 $u^2 + v^2 \leq 1$ ，所以 u, v 分布在半径为1的圆内， $p(u, v) = \frac{1}{\pi}$

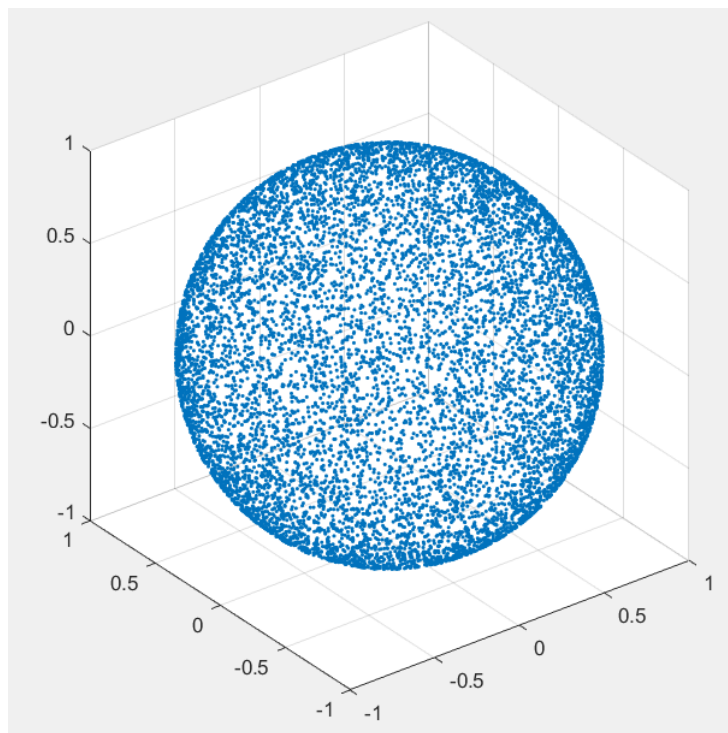
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\frac{2u^2}{\sqrt{1-r^2}} + 2\sqrt{1-r^2} & -\frac{2uv}{\sqrt{1-r^2}} \\ -\frac{2uv}{\sqrt{1-r^2}} & -\frac{2v^2}{\sqrt{1-r^2}} + 2\sqrt{1-r^2} \end{vmatrix} = 4(1-r^2) - 4(u^2 + v^2) = 4(1-2r^2) \\ p(x, y) &= \frac{p(u, v)}{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|} \\ &= \frac{1}{4\pi(1-2r^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi z} = \frac{1}{4\pi \sqrt{1-x^2-y^2}} \end{aligned}$$

与第一种方法计算的结果相同

用Marsaglia方法进行抽样，先抽取一对均匀分布在 $[-1, 1]$ 上的随机数 (u, v) ，如果 $r^2 = u^2 + v^2 > 1$ 则重新抽样至 $r^2 \leq 1$ 。再根据公式 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1 - 2r^2$ 得到点的坐标

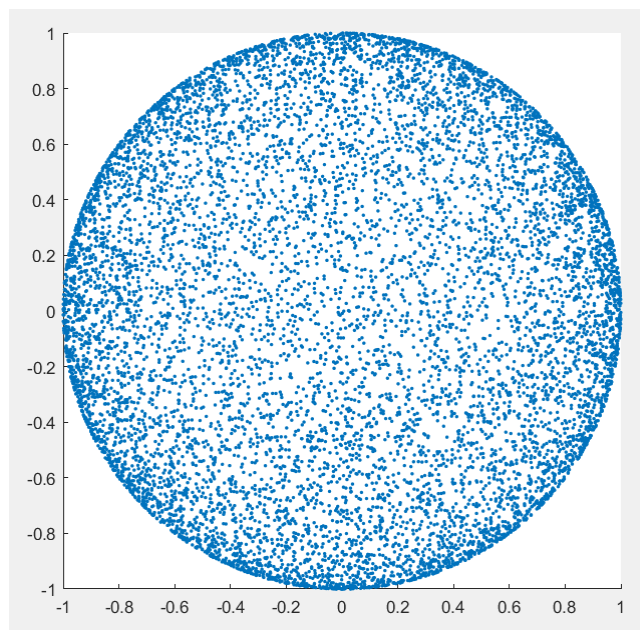
3.计算结果与讨论

按照上述方法计算 $N = 10^4$ 个点的坐标并导入MATLAB画图



画出的图与作业题3的方法画出的图比较，可以看到点在球面上的分布比较均匀

在(x,y)平面上投影的分布为：



4.结论

以 $r = 1$ 为例，球面上均匀分布的坐标点，其在(x,y)平面上投影的分布函数 $p(x, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$

通过Marsaglia方法产生球面上的坐标点，其在(x,y)平面上投影的分布函数满足上式，这些坐标点是在球面上均匀分布的。