作业第十三题报告

PB18020539 黄韫飞

1.作业题目：用Metropolis-Hasting方法计算积分： $I=\int_0^\infty (x-\alpha\beta)^2 f(x)\mathrm{d}x=\alpha\beta^2$**，** $f(x)=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp(-x/\beta)$**，设积分的权重函数为**$p(x)=f(x)$**和**$p(x)=(x-\alpha\beta)^2 f(x)$**。给定参数**$\alpha,\beta$**，并用不同的**$\gamma$**值分别计算积分，讨论计算精度和效率**

2.算法与公式

细致平衡条件：

$$p_i W_{ij}=p_j W_{ji}$$

Metropolis提出上式的一个非对称的解，假设从i跃迁到j的几率为W_{ij}

$$W_{ij}=T_{ij}A_{ij}$$

其中T和A分别表示离开i态的概率和被j态接受的概率。

Metropolis-Hasting抽样：

$$\frac{p_j}{p_i}=\frac{W_{ij}}{W_{ji}}=\frac{T_{ij}A_{ij}}{T_{ji}A_{ji}}$$

$$A_{ij}=\min\{1,\frac{p_j T_{ji}}{p_i T_{ij}}\}$$

$$W_{ij}=\begin{cases} T_{ij}, & if \quad p_j T_{ij}>p_i T_{ij} \\ \frac{p_j T_{ji}}{p_i}, & if \quad p_j T_{ij}<p_i T_{ij} \end{cases}$$

$$W_{ii}=1-\sum_{j\neq i} W_{ij}$$

根据建议分布T进行初始抽样，T是任意的条件概率分布，最好与p有接近的形状。

在本题中，可以取$\alpha=2,\beta=1$，积分变为：

$$I=\int_0^\infty (x-2)^2 f(x)\mathrm{d}x=2, f(x)=x\exp(-x)$$

若$p(x)=f(x)$，

可以先假设$T_{ij}=0.5\exp(-x'/\gamma)$，取$x_0=1$，抽样$x'=-\gamma\ln\xi$，其中$\xi\in(0,1)$为均匀随机数

$$r=\frac{p_j T_{ji}}{p_i T_{ij}}=\left(\frac{x'}{x_i}\right)^{\alpha-1}\exp(-(x'-x_i)/\beta)\exp((x'-x_i)/\gamma)=(x'/x_i)\exp(-(x'-x_i))\exp((x'-x_i)/\gamma)$$

$$x_{i+1}=\begin{cases} x' & if \quad R<\min(1,r) \\ x_i & if \quad R>\min(1,r) \end{cases}$$

$$I=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\alpha\beta)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-2)^2$$

3.计算结果与讨论

从$\gamma=2$到$\gamma=10$以0.5的步长改变γ，点数$N=1E6$，分别求积分的值和抽样效率

```
积分1:
Τ =2.000000      积分结果: 1.996933      抽样效率: 0.759795
Τ =2.500000      积分结果: 1.998131      抽样效率: 0.736264
Τ =3.000000      积分结果: 2.008947      抽样效率: 0.691874
Τ =3.500000      积分结果: 1.995762      抽样效率: 0.643461
Τ =4.000000      积分结果: 1.990151      抽样效率: 0.597825
Τ =4.500000      积分结果: 1.998478      抽样效率: 0.556704
Τ =5.000000      积分结果: 1.992620      抽样效率: 0.520246
Τ =5.500000      积分结果: 2.000728      抽样效率: 0.488511
Τ =6.000000      积分结果: 2.013136      抽样效率: 0.458853
Τ =6.500000      积分结果: 2.010284      抽样效率: 0.433296
Τ =7.000000      积分结果: 2.001514      抽样效率: 0.409538
Τ =7.500000      积分结果: 2.003007      抽样效率: 0.387904
Τ =8.000000      积分结果: 1.995874      抽样效率: 0.368921
Τ =8.500000      积分结果: 1.992676      抽样效率: 0.351942
Τ =9.000000      积分结果: 2.002609      抽样效率: 0.335876
Τ =9.500000      积分结果: 1.999831      抽样效率: 0.321438
Τ =10.000000     积分结果: 1.996215      抽样效率: 0.307264
```

与理论值$\alpha\beta^2=2$的偏差在10^{-3}量级，在$\gamma\in[2,10]$抽样效率随着γ的增大而减小

但是如果把γ的值取$[0,2]$，则当γ很小的时候误差较大，抽样效率也比较低，但当γ继续增大时，积分值稳定在2左右。抽样效率随着γ在[0,2]的增加而递增。

```
积分1:
Τ =0.100000      积分结果: 1.777302      抽样效率: 0.050315
Τ =0.200000      积分结果: 0.908183      抽样效率: 0.057004
Τ =0.300000      积分结果: 1.207729      抽样效率: 0.107318
Τ =0.400000      积分结果: 1.569478      抽样效率: 0.166990
Τ =0.500000      积分结果: 1.579124      抽样效率: 0.225941
Τ =0.600000      积分结果: 1.798844      抽样效率: 0.284190
Τ =0.700000      积分结果: 2.009653      抽样效率: 0.339652
Τ =0.800000      积分结果: 1.892328      抽样效率: 0.397733
Τ =0.900000      积分结果: 2.055275      抽样效率: 0.447652
Τ =1.000000      积分结果: 1.998093      抽样效率: 0.501546
Τ =1.100000      积分结果: 2.014925      抽样效率: 0.548315
Τ =1.200000      积分结果: 1.991188      抽样效率: 0.595049
Τ =1.300000      积分结果: 1.990767      抽样效率: 0.637669
Τ =1.400000      积分结果: 2.002510      抽样效率: 0.675407
Τ =1.500000      积分结果: 1.999096      抽样效率: 0.704663
Τ =1.600000      积分结果: 2.006384      抽样效率: 0.728427
Τ =1.700000      积分结果: 2.001107      抽样效率: 0.744398
Τ =1.800000      积分结果: 2.004843      抽样效率: 0.753011
Τ =1.900000      积分结果: 1.999869      抽样效率: 0.759579
```

4.结论

通过$Metropolis-Hasting$抽样可以比较准确地抽出符合$p(x)$分布的抽样。利用这种办法可以求出积分。在本题中，利用MH抽样得到，当$\alpha=2,\beta=1$时，$I=\int_0^\infty(x-\alpha\beta)^2f(x)\mathrm{d}x$的值在$\alpha\beta^2=2$附近。随着$\gamma$在[0,2]范围内的增大，抽样效率升高，随着$\gamma$在[2,10]范围内的增大，抽样效率降低，这是因为γ改变了跃迁函数T的性质。