作业第四题报告

PB18020539 黄韫飞

1.作业题目：设pdf满足关系式$p'(x)=p(x)\frac{x-d}{ax^2+bx+c}$，请找到其中一种函数，讨论性质并给出抽样方法

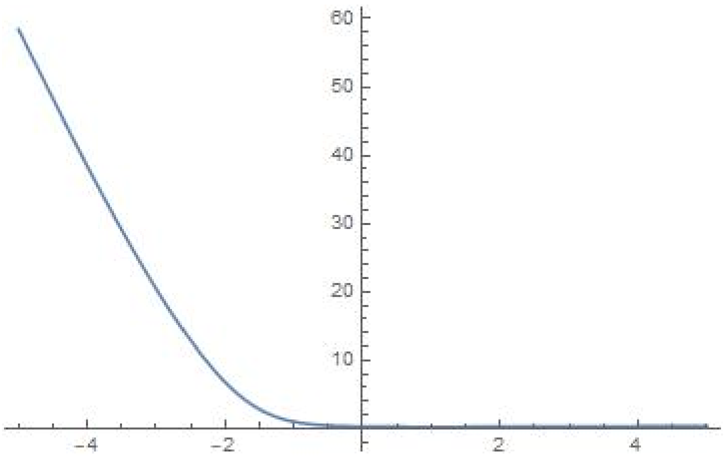
2.算法与公式

用Mathematica解微分方程$p'(x)=p(x)\frac{x-d}{ax^2+bx+c}$，得到$p(x)$

抽样方法是：先给出$p(x)$的分布函数$\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x')\mathrm{d}x'$，再反解出$x(\xi)$，则从$\xi$的随机抽样就可以得到$p(x)$的随机抽样。本题的函数可能比较难得到解析的反函数解，可以先找到各个x对应的ξ，然后列表并用插值法给出随机抽样ξ对应的x的值。

3.计算结果与讨论

取$a=1,b=2,c=2,d=1$，则$p(x)=\exp(-2\arctan(1+x))\sqrt{2+x(2+x)}$



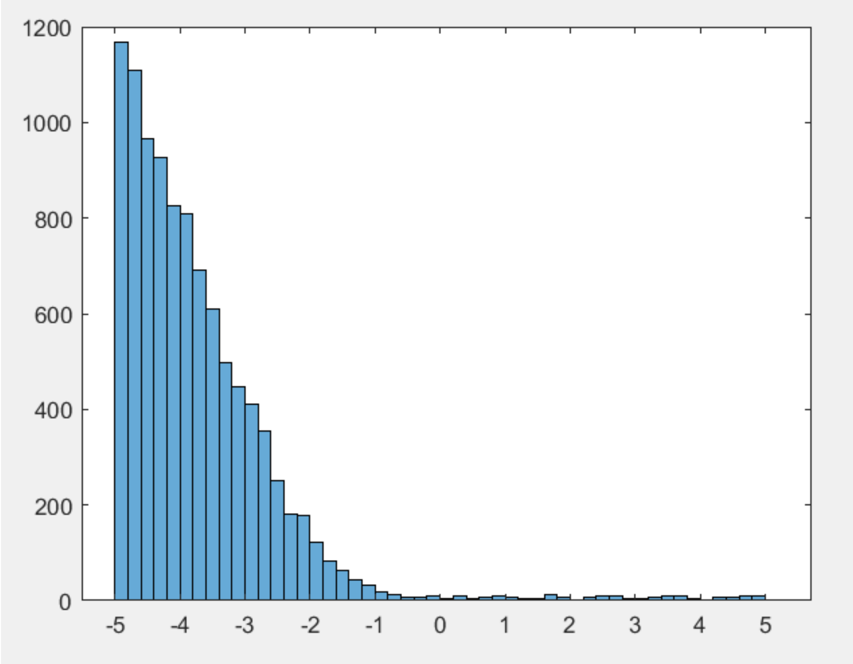
在绘图范围内，$p(x)$随x先递减，再以很慢的速度递增。

可以看到，在实际计算过程中，$p(x)$可能出现不收敛的情况，但是作为概率密度函数，$p(x)$的积分应该是一个有限值。所以x应该取在一定的范围内，在接下来的计算中，取$x\in[-5,5]$。

$$A=\int_{-5}^{5}p(x)\mathrm{d}x=95.824$$

将$p(x)$归一化为$p(x)/A$，$\xi(x)=\frac{1}{A}\int_{-5}^{x}p(x')\mathrm{d}x'$，可以得到$x$与$\xi$的对应关系。分布函数$\xi(x)$满足$\xi(-5)=0,\xi(5)=1$。

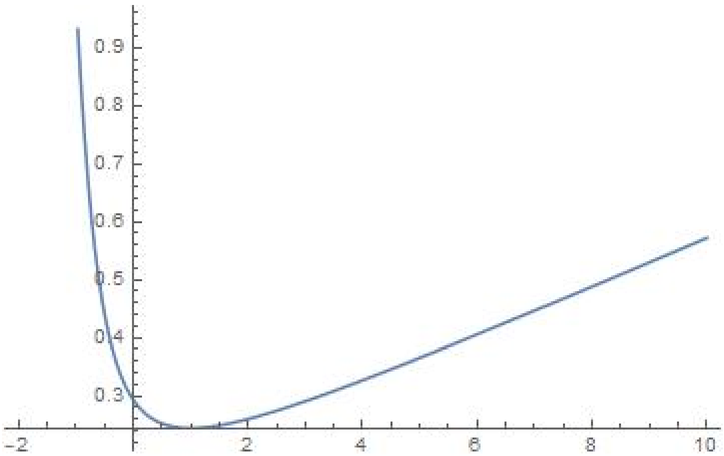
利用16807产生器生成10^4个[0,1]内的随机数ξ，利用插值法分别找到对应的x，画出直方图，结果如下



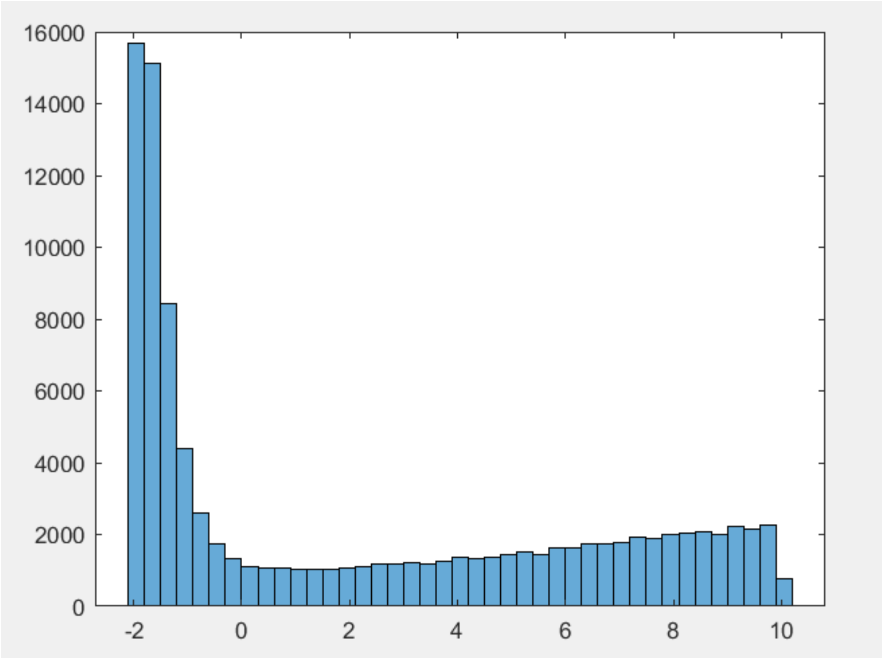
可以看到直接抽样生成的结果与函数图像比较吻合。

上述数据处理是在MATLAB中完成的，代码在压缩包内，命名为“ComPhy4.m”。使用时需要先将生成的随机数文件“RandGen16807()”导入MATLAB，然后再执行。

上述图像没有显示出$p(x)$在正半轴上有缓慢递增的现象



原因是且在[-5,5]范围内绝大多数点都处在[-5,-2]内，落在$p(x)$递增区域上的点很少。为了显示正半轴内的现象，改变范围为[-2,10]，并取点数为10^5，按照同样的方法直接抽样，得到下图：



结果很好地反映了$p(x)$的性质

4.结论

题中解出的概率密度函数$p(x)$可能不收敛，比如当$a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$时就在$x \to -\infty$时趋近于$\infty$。为了对于$p(x)$进行堆积抽样，先归一化并找到其概率分布函数$\xi(x) = \frac{1}{A}\int_{-5}^{x} p(x')\mathrm{d}x'$。反解或通过列表后插值的方式得到其反函数$x(\xi)$，则对$\xi$在$[0,1]$上的随机抽样即为对$p(x)$的直接抽样。从抽样结果可以看出，当取的点很多时，抽样结果可以很好地反应概率密度函数的性质。