

MODULE A5

Opérateur proximal de MOREAU

Sauf mention contraire, \mathcal{X} est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Pour toutes les autres notations et définitions, le lecteur est invité à se reporter aux modules précédents.

1 Opérateur proximal

1.1 Définition et exemples

Cet opérateur a été proposé par Jean-Jacques MOREAU en 1965.

Définition 1 (Opérateur proximal)

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. et propre. On appelle *opérateur proximal* (ou encore : *opérateur de proximité*) associé à J l'opérateur noté prox_J qui à tout point de $x^0 \in \mathcal{X}$ associe l'ensemble des points

$$\text{prox}_J(x^0) = \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ J(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right\}$$

Si cet ensemble est non vide, alors ses éléments sont appelés *points proximaux* de x^0 relativement à la fonction J .

On remarquera que, par définition d'un minimiseur, on a toujours

$$\forall x^0 \in \mathcal{X}, \quad \text{prox}_J(x^0) \subset \text{dom } J$$

À l'origine, cet opérateur a été défini pour des fonctions convexes ; il présente dans ce cas une propriété très intéressante :

Proposition 1 (Cas convexe)

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Alors $\text{prox}_J(x^0)$ est non vide et contient un unique élément.

DÉMONSTRATION : Il suffit de noter que la fonction

$$\begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto J(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \end{cases}$$

est fortement convexe (proposition 15 du module A1). On en déduit l'existence d'un unique minimiseur (proposition 8 du module B1). ■

REMARQUE : Dans ce cas, lorsque le point proximal est défini de manière unique, on identifie le singleton et le point, et on écrira

$$x^+ = \text{prox}_J(x^0)$$

au lieu de $\{x^+\} = \text{prox}_J(x^0)$

Dans le cas non convexe mais minoré, on a le résultat suivant :

Proposition 2

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction minorée, s.c.i. et de domaine non vide. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Alors $\text{prox}_J(x^0)$ est non vide.

DÉMONSTRATION : Il suffit de noter que la fonction

$$\begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto J(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \end{cases}$$

est minorée par la fonction

$$\begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto \inf J + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \end{cases}$$

qui est coercive. Ainsi, la première fonction est également coercive, et admet donc un minimiseur d'après la proposition 6 du module B1. ■

Donnons un premier exemple central d'opérateur proximal.

EXEMPLE

Opérateur proximal. Considérons la fonction

$$J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{2} \|x\|^2 \end{cases}$$

Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Puisque J est une fonction convexe et différentiable (donc propre), le point proximal de x^0 relativement à la fonction J est, par définition, l'unique minimiseur, de la fonction

$$\frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2$$

Celui-ci est caractérisé au premier par la règle de FERMAT, qui s'écrit ici

$$2 \text{prox}_J(x^0) - x^0 = 0 \quad \text{soit} \quad \text{prox}_J(x^0) = \frac{x^0}{2}$$

Le résultat suivant permet d'exprimer l'opérateur proximal d'une fonction séparable à l'aide des opérateurs proximaux des termes qui la composent :

Proposition 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$ des espaces vectoriels réels de dimension finie. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on considère $f_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Définissons la fonction séparable

$$J : \begin{cases} \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x = (x_{(i)})_{1 \leq i \leq n} & \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_{(i)}) \end{cases}$$

Soit $x^0 \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$. Alors

$$\forall x^0 \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n, \quad \text{prox}_J(x^0) = \text{prox}_{f_1}(x^0) \times \cdots \times \text{prox}_{f_n}(x^0)$$

REMARQUE : Notons que cette formule n'est pas valable dans le cas général de la somme de fonctions quelconques.

DÉMONSTRATION : Il suffit de vérifier que, par définition des points proximaux, on a pour tout $x^+ = (x_{(i)}^+)_{1 \leq i \leq n}$

$$x^+ \in \text{prox}_J(x^0) \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad x_{(i)}^+ \in \text{prox}_{f_i}(x^0)$$

On obtient alors le résultat désiré par définition du produit cartésien. ■

EXERCICE

Translation. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $z \in \mathcal{X}$. Considérons la fonction

$$J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto f(x - z) \end{cases}$$

Montrer que $\forall x^0 \in \mathcal{X}, \quad \text{prox}_J(x^0) = z + \text{prox}_f(x^0 - z)$

EXERCICE

Changement d'échelle. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la fonction

$$J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto f(\alpha x) \end{cases}$$

Montrer que $\forall x^0 \in \mathcal{X}, \quad \text{prox}_J(x^0) = \frac{1}{\alpha} \text{prox}_{\alpha^2 f}(\alpha x^0)$

Avant de nous intéresser aux propriétés de l'opérateur proximal, soulignons qu'il peut être interprété comme une généralisation de la projection orthogonale.

Proposition 4

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble **convexe** fermé non vide. Alors

$$\text{prox}_{\chi_{\mathcal{C}}} = \text{proj}_{\mathcal{C}}$$

DÉMONSTRATION : Le lemme précédent assure que la fonction indicatrice $\chi_{\mathcal{C}}$ est bien convexe, propre et s.c.i., de sorte que l'opérateur proximal de $\chi_{\mathcal{C}}$ est bien défini. Remarquons alors que

$$\text{dom } \chi_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$$

La définition de l'opérateur proximal pour $\chi_{\mathcal{C}}$ s'écrit donc

$$\text{prox}_{\chi_{\mathcal{C}}}(x^0) = \underset{x \in \text{dom } \chi_{\mathcal{C}}}{\text{argmin}} \left\{ \chi_{\mathcal{C}}(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right\} = \underset{x \in \mathcal{C}}{\text{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right\}$$

ce qui achève la preuve. ■

Cette interprétation permet de considérer une preuve alternative de l'unicité de la projection sur un ensemble **convexe** non vide. Pour cela, il suffit de remarquer le résultat suivant :

Lemme 1

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble **convexe** fermé non vide. Alors la fonction indicatrice $\chi_{\mathcal{C}}$ est convexe, s.c.i. et propre.

DÉMONSTRATION : La convexité de la fonction $\chi_{\mathcal{C}}$ a déjà été prouvée dans la proposition 6 du module A1. Par ailleurs, \mathcal{C} étant non vide, il s'ensuit qu'il existe un point $x \in \mathcal{C}$ tel que $\chi_{\mathcal{C}}(x) = 0 < +\infty$. La fonction $\chi_{\mathcal{C}}$ est donc propre. Enfin, elle est s.c.i. en vertu de la proposition 2 du module A3. ■

On peut alors appliquer la proposition 1 qui assure que le point proximal est défini de manière unique, c'est-à-dire, pour le cas de l'indicatrice d'un ensemble convexe fermé non vide, que le projeté orthogonal est défini de manière unique.

1.2 Caractérisation du point proximal dans le cas convexe

Lorsque la fonction J est **convexe**, le point proximal peut être caractérisé de manière intéressante à l'aide du sous-différentiel de J :

Proposition 5 (Caractérisation du point proximal dans le cas convexe)

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Pour tout $x^0 \in \mathcal{X}$, on a l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :

- (i) $x^+ = \text{prox}_J(x^0)$
- (ii) $x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$

DÉMONSTRATION : Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Par définition du point proximal, on a

$$x^+ = \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ J(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right\}$$

Or, on a fait remarquer que la fonction objectif de ce problème de minimisation est (fortement) convexe ; en appliquant la CNS d'optimalité du premier ordre, on a la

caractérisation suivante de x^+ :

$$0 \in \partial \left(x \mapsto J(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right) (x^+) = \partial J(x^+) + (x^+ - x^0)$$

ce qui achève la preuve. ■

EXEMPLE

Opérateur proximal de la valeur absolue. Considérons la fonction

$$J : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

Soit $x^0 \in \mathbb{R}$, la fonction J étant convexe, le point proximal $x^+ = \text{prox}_J(x^0)$ est caractérisé par

$$x^0 - x^+ \in \partial J(x^+) = \begin{cases} \left\{ \frac{x^+}{|x^+|} \right\} & \text{si } x^+ \neq 0 \\ [-1; 1] & \text{si } x^+ = 0 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\text{prox}_J(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^0 \in [-1; 1] \\ \frac{x^0}{|x^0|} (|x^0| - 1) & \text{si } x^0 \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Cette fonction est connue sous le nom de *seuillage doux* (*soft thresholding*).

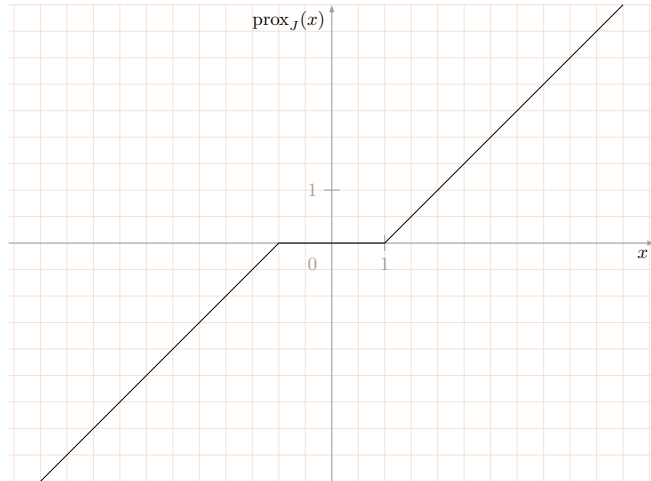


FIGURE 1 – Opérateur proximal de la valeur absolue.

EXERCICE

Opérateur proximal de la norme ℓ_1 . Considérons la fonction

$$J : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ x = \{x_{(i)}\}_{1 \leq i \leq n} & \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_{(i)}| \end{cases}$$

Calculer prox_J .

La proposition 5 permet de donner une nouvelle écriture à l'opérateur proximal dans le cas convexe, car, puisque

$$\begin{aligned} x^+ = \text{prox}_J(x^0) & \iff x^0 - x^+ \in \partial J(x^+) \\ & \iff x^0 \in x^+ + \partial J(x^+) = (\text{Id} + \partial J)(x^+) \end{aligned}$$

on peut écrire le point proximal comme une image réciproque (en confondant à nouveau le singleton et le point) :

$$x^+ = \text{prox}_J(x^0) \iff x^0 = (\text{Id} + \partial J)^{-1}(x^+)$$

Dans le cas non convexe, la règle de FERMAT ne donne qu'une condition nécessaire d'optimalité; aussi, on a uniquement l'implication suivante :

Proposition 6

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On suppose qu'il existe $x^+ \in \text{prox}_J(x^0)$. Alors on a $x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$. Autrement dit,

$$x^+ \in \text{prox}_J(x^0) \implies x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$$

ce qui ne fournit pas une caractérisation des points proximaux, attendu que certains points vérifiant l'inclusion de droite peuvent ne pas être des points proximaux.

DÉMONSTRATION : Laissé en exercice.

1.3 Propriétés de l'opérateur proximal

Commençons par établir quelques propriétés intéressantes de l'opérateur proximal dans le cas convexe.

Proposition 7 (Ferme non-expansivité)

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Alors

$$\forall (x, x') \in \mathcal{X}^2, \quad \langle \text{prox}_J(x) - \text{prox}_J(x'), x - x' \rangle \geq \|\text{prox}_J(x) - \text{prox}_J(x')\|^2$$

On dit que prox_J est un opérateur *fermement non-expansif*.

DÉMONSTRATION : Soit $(x, x') \in \mathcal{X}^2$. La caractérisation du point proximal (proposition 5) permet d'écrire

$$x - \text{prox}_J(x) \in \partial J(\text{prox}_J(x)) \quad \text{et} \quad x' - \text{prox}_J(x') \in \partial J(\text{prox}_J(x'))$$

En utilisant la monotonie de ∂J (qui découle de la convexité de J), on obtient que

$$\langle x - \text{prox}_J(x) - x' + \text{prox}_J(x'), x - x' \rangle \geq 0$$

En développant le produit scalaire et en réarrangeant les termes obtenus, on retrouve le résultat annoncé. ■

Cette proposition permet également de démontrer que prox_J est lipschitzien :

Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Alors prox_J est 1-lipschitzien.

On dit également que prox_J est un opérateur *non-expansif*.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ à la définition de forte non-expansivité de l'opérateur proximal. ■

Le résultat suivant est très utilisé dans les preuves de convergence d'algorithmes d'optimisation impliquant l'opérateur proximal d'une fonction convexe :

Proposition 8 (Inégalité proximale)

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, propre et s.c.i. et soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Soit $\tau > 0$. On pose

$$x^+ = \text{prox}_{\tau J}(x^0)$$

$$\text{Alors} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad J(x) \geq J(x^+) - \frac{1}{\tau} \langle x - x^+, x^+ - x^0 \rangle$$

DÉMONSTRATION : D'après la caractérisation du point proximal (proposition 5),

$$x^+ \in x^0 - \tau \partial J(x^+) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\tau} (x^0 - x^+) \in \partial J(x^+)$$

de sorte que, par définition des sous-gradients, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad J(x) \geq J(x^+) + \frac{1}{\tau} \langle x^0 - x^+, x - x^+ \rangle$$

Un réarrangement des termes donne alors le résultat désiré. ■

Enfin, signalons le résultat suivant, valable dès que l'opérateur proximal est bien défini (la convexité n'est pas requise) :

Proposition 9

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ tel que $\text{prox}_J(x^0)$ soit non vide. On pose

$$x^+ \in \text{prox}_J(x^0)$$

$$\text{Alors} \quad J(x^+) \leq J(x^+) + \frac{1}{2} \|x^+ - x^0\|^2 \leq J(x^0)$$

DÉMONSTRATION : Par définition d'un minimiseur global, on a pour tout $x \in \text{dom } J$

$$J(x^+) + \frac{1}{2} \|x^+ - x^0\|^2 \leq J(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2$$

En particulier, en prenant $x = x^0$, on a

$$J(x^+) + \frac{1}{2} \|x^+ - x^0\|^2 \leq J(x^0) + \frac{1}{2} \|x^0 - x^0\|^2 = J(x^0)$$

On en déduit alors le résultat souhaité. ■

1.4 Points fixes de l'opérateur proximal

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. On s'intéresse dans cette section aux points fixes de prox_J , c'est-à-dire aux points $\bar{x} \in \mathcal{X}$ tels que

$$\bar{x} = \text{prox}_J(\bar{x})$$

(On rappelle que, dans le cas convexe, prox_J est une application définie sur \mathcal{X} et à valeurs dans \mathcal{X} .) On peut alors démontrer le résultat suivant :

Proposition 10

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Alors on a équivalence entre les deux affirmations suivantes :

- (i) \bar{x} est un point fixe de prox_J ;
- (ii) \bar{x} est un minimiseur de J .

DÉMONSTRATION : Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 5, en notant que les points critiques d'une fonction convexe sont ses minimiseurs. ■

Dans le cas non convexe, on a un résultat plus faible, puisque la règle de FERMAT ne caractérise plus les minimiseurs et que l'opérateur proximal n'est pas nécessairement bien défini ni de manière unique :

Proposition 11

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $\bar{x} \in \mathcal{X}$ tel que $\bar{x} \in \text{prox}_J(\bar{x})$. Alors \bar{x} est un point critique de J .

DÉMONSTRATION : Il s'agit cette fois-ci d'une conséquence immédiate de la proposition 6. ■

Cette propriété, essentielle, est au cœur de nombreux algorithmes d'optimisation non lisse. C'est le cas en particulier de l'algorithme du point proximal, qui cherche un point critique de J en appliquant les itérations du point fixe à l'opérateur proximal.

2 Enveloppes de MOREAU

On va à présent s'intéresser de manière plus spécifique à l'opérateur proximal dans le cas d'une fonction **convexe**.

2.1 Définition

Définition 2 (Enveloppe de MOREAU)

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$. On appelle *enveloppe de MOREAU* d'indice τ de J la fonction notée ${}^\tau J$ définie par

$$\forall x^0 \in \mathcal{X}, \quad {}^\tau J(x^0) = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ J(x) + \frac{1}{2\tau} \|x - x^0\|^2 \right\}$$

Lorsque J est convexe, s.c.i. et propre, la fonction ${}^\tau J$ est bien définie d'après la proposition 1 puisque le minimiseur est atteint quel que soit $x^0 \in \mathcal{X}$.

Les enveloppes de MOREAU appartiennent à la classe des fonctions définies par *inf-convolution*. L'inf-convolution (ou encore *convolution infimale*) de deux fonctions f et g , notée $f \square g$, est définie comme suit :

$$\forall x^0 \in \mathcal{X}, \quad f \square g(x^0) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ f(x) + g(x^0 - x) \right\}$$

Ainsi, l'enveloppe de MOREAU ${}^\tau J$ d'indice $\tau > 0$ de J est l'inf-convolution de J et de la fonction $\|\cdot\|^2/(2\tau)$:

$${}^\tau J = J \square \left(\frac{1}{2\tau} \|\cdot\|^2 \right)$$

L'inf-convolution possède des propriétés intéressantes, parmi lesquelles la préservation de la convexité et de la différentiabilité. C'est pourquoi elle apparaît fréquemment dans la littérature de l'optimisation convexe.

EXEMPLE

Distance à un ensemble convexe non vide. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe fermé non vide. Alors, pour tout $\tau > 0$, l'enveloppe de MOREAU d'indice τ de $\chi_{\mathcal{C}}$

définit la distance euclidienne au carré au convexe \mathcal{C}

$$\forall x^0 \in \mathcal{X}, \quad \text{dist}(x^0, \mathcal{C}) = \min_{x \in \mathcal{C}} \|x - x^0\| = \sqrt{2\tau \, {}^\tau \chi_{\mathcal{C}}(x^0)}$$

2.2 Régularisation de MOREAU–YOSIDA

Établissons quelques propriétés intéressantes à propos de l'enveloppe de MOREAU. Commençons par remarquer que

$$\forall x^0 \in \mathcal{X}, \quad {}^\tau J(x^0) = \frac{1}{\tau} \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \tau J(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \right\}$$

Proposition 12

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$. Alors ${}^\tau J$ est une fonction différentiable. Son gradient est donné par

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \nabla({}^\tau J)(x) = \frac{1}{\tau} (x - \text{prox}_{\tau J}(x))$$

Il s'agit d'un cas particulier du théorème de l'enveloppe, qui permet de mesurer l'influence d'un paramètre sur le minimum d'une fonction dépendant de ce paramètre. Dans le cas de l'enveloppe de MOREAU, le paramètre en question est le point x^0 .

DÉMONSTRATION : On admet pour l'instant ce résultat, qui sera plus facile à démontrer une fois qu'on aura abordé les notions de dualité de FENCHEL dans un prochain cours.

Proposition 13

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$. Alors ${}^\tau J$ est $(1/\tau)$ -régulière.

DÉMONSTRATION : Ce résultat est également provisoire admis et sera démontré dans un cours prochain.

Un corollaire presque immédiat de la preuve du lemme 7 est la convexité des enveloppes de MOREAU :

Corollaire 2

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$. Alors ${}^\tau J$ est une fonction convexe.

DÉMONSTRATION : En effet, la monotonie du gradient de ${}^\tau J$ est une conséquence

de la ferme non-expansivité de l'opérateur proximal (proposition 7) :

$$\begin{aligned} \langle \nabla({}^\tau J)(x) - \nabla({}^\tau J)(x'), x - x' \rangle &= \left\langle \frac{1}{\tau} (x - \text{prox}_{\tau J}(x)) - \frac{1}{\tau} (x' - \text{prox}_{\tau J}(x')), x - x' \right\rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \langle x - \text{prox}_{\tau J}(x) - x' + \text{prox}_{\tau J}(x'), x - x' \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

qui prouve que ${}^\tau J$ est convexe. ■

Proposition 14

Soit $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$. Alors J et ${}^\tau J$ ont mêmes minimiseurs et même minimum.

DÉMONSTRATION : On démontre séparément les deux propriétés.

- **J et ${}^\tau J$ ont mêmes minimiseurs.** Il suffit de combiner les propositions 10 et 12, en remarquant que, si $\tau > 0$, alors J et ${}^\tau J$ ont mêmes minimiseurs.
- **J et ${}^\tau J$ ont même minimum.** On commence par remarquer que, puisque $\|x - x^0\|^2 \geq 0$, on a pour tout $x^0 \in \mathcal{X}$

$${}^\tau J(x^0) = \min_{x \in \mathcal{X}} J(x) + \frac{1}{2\tau} \|x - x^0\|^2 \geq \inf_{x \in \mathcal{X}} J(x)$$

En passant à la borne inférieure sur x^0 , il s'ensuit que

$$\inf_{x^0 \in \mathcal{X}} {}^\tau J(x^0) \geq \inf_{x \in \mathcal{X}} J(x)$$

Par ailleurs, par optimalité, on a

$${}^\tau J(x^0) = \min_{x \in \mathcal{X}} J(x) + \frac{1}{2\tau} \|x - x^0\|^2 \leq J(x^0) + \frac{1}{2\tau} \|x^0 - x^0\|^2 = J(x^0)$$

En passant à nouveau à la borne inférieure sur x^0 , on obtient

$$\inf_{x^0 \in \mathcal{X}} {}^\tau J(x^0) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} J(x)$$

La conclusion suit immédiatement si J atteint son minimum. ■

Cette dernière proposition justifie que l'on cherche parfois à remplacer le problème de la minimisation J par celui de la minimisation d'une enveloppe de MOREAU ${}^\tau J$.

L'enveloppe de MOREAU est également connue sous le nom de *régularisation de MOREAU–YOSIDA* de la fonction J . Il s'agit en effet d'une famille de fonctions qui présentent des caractéristiques intéressantes, à savoir une forte régularité (chaque enveloppe est différentiable à gradient lipschitzien) et une convexité. Par ailleurs, il est aisé d'observer que, lorsque l'indice τ tend vers $+\infty$, l'enveloppe de MOREAU associée "converge" (dans un sens qu'il faudrait préciser) vers la fonction J . De plus, on verra plus bas que, par ailleurs, J et ses enveloppes de MOREAU ont mêmes minimiseurs.

On termine ce module avec un exemple d'enveloppes de MOREAU.

EXEMPLE

Régularisation de MOREAU–YOSIDA de la valeur absolue. Considérons la fonction

$$J : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

Cette fonction est convexe, continue et non différentiable en 0. Intéressons-nous à sa régularisation de MOREAU–YOSIDA. On cherche donc à calculer le minimiseur de la fonction

$$f_\tau : x \mapsto |x| + \frac{1}{2\tau} (x - x^0)^2$$

pour $\tau > 0$. En reprenant les calculs de l'exemple de l'opérateur proximal de J , on vérifie que l'unique point x^* vérifiant $0 \in \partial f_\tau(x^*)$ est

$$x^* = \begin{cases} x^0 - \tau & \text{si } x^0 > \tau \\ x^0 + \tau & \text{si } x^0 < -\tau \\ 0 & \text{si } x^0 \in [-\tau; \tau] \end{cases}$$

On en déduit que

$${}^\tau J(x^0) = f_\tau(x^*) = \begin{cases} x^0 - \frac{\tau}{2} & \text{si } x^0 > \tau \\ -x^0 - \frac{\tau}{2} & \text{si } x^0 < -\tau \\ \frac{(x^0)^2}{2\tau} & \text{si } x^0 \in [-\tau; \tau] \end{cases}$$

On reconnaît (à une constante multiplicative près) une fonction de HUBER (module A4). On pourra vérifier que cette fonction est bien convexe et dérivable, de dérivée $(1/\tau)$ -lipschitzien. Cette famille de fonctions est illustrée par la figure 2.

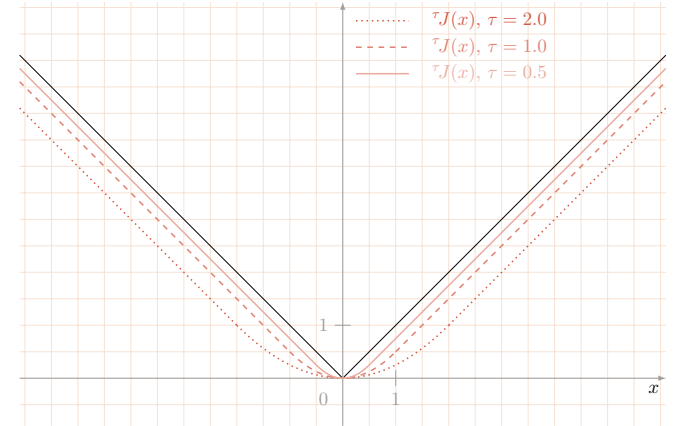


FIGURE 2 – Exemples de régularisation de MOREAU de la valeur absolue (la courbe représentative de cette dernière apparaît en noir).

Pour aller plus loin

L'opérateur proximal dans les algorithmes d'optimisation non lisse.

L'opérateur proximal apparaît dans de nombreux algorithmes d'optimisation du premier ordre, tels que la méthode du point proximal (module B₃), l'éclatement explicite-implicite (module B₄), ou encore les méthodes basées sur les éclatements de DOUGLAS–RACHFORD et DYSKTRA (module B₄). Comme on le verra dans les modules dédiés, l'opérateur proximal présente des propriétés très intéressantes qui justifient son utilisation, notamment en optimisation convexe non lisse, bien que des extensions au cas non convexe puissent être également envisagées. Comme on l'a vu dans ce module, cependant, le calcul du point proximal peut être fastidieux (il suffit de songer aux cas particuliers des projections orthogonales). L'éclatement de DYSKTRA propose une solution pour remédier à ce problème dans certains cas (module B₄).

La régularisation de MOREAU–YOSIDA. Les enveloppes de MOREAU jouent un rôle essentiel dans l'interprétation de concepts connus tels que le *lagrangien augmenté* (module A₇) ou encore pour établir un lien naturel entre l'algorithme du point proximal et la méthode du gradient explicite (module B₃).