MT09-A2019 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n^o:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient A une matrice réelle carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$.

1. Vérifier que A^TA est symétrique, semi-définie positive et que :

$$A^TA \text{ définie positive } \iff A \text{ inversible.}$$

Réponse : $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ **et** $x^TA^TAx = (Ax)^TAx = \|Ax\|_2^2 \geq 0$ **donc** A^TA **est symétrique, semi-définie positive.**

De plus : $x^TA^TAx = 0 \iff \|Ax\|_2^2 = 0 \iff Ax = 0 \iff x \in \ker(A)$**. Donc**

A^TA **SDP** $\iff (x^TA^TAx = 0 \Longrightarrow x = 0) \iff (x \in \ker(A) \Longrightarrow x = 0) \iff \ker(A) = \{0\} \iff A$ **inversible,**

car A **est carrée.** ☐

2. Montrer que $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$.

Réponse : voir cours : $|||A|||_2^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sup_{x\neq 0} \frac{x^TA^TAx}{x^Tx} = \max vp(A^TA) = \max |vp(A^TA)| = \rho(A^TA)$**, car les** vp **de** A^TA **(semi DP) sont** ≥ 0**. On a utilisé le résultat du cours qui lie vp et quotient de Rayleigh pour les matrices symétriques (Théorème 2.6.1.).** ☐

3. Que se passe-t-il si A est symétrique ? Que vaut alors $|||A|||_2$?

Réponse : Dans ce cas, $|||A|||_2^2 = \rho(A^TA) = \rho(A^2) = \rho(A)^2$ **car les vp de** A^2 **sont les carrés des vp de** A**.** ☐

4. Soit U une matrice orthogonale, c'est-à-dire qu'elle vérifie $U^TU = UU^T = I$.
Calculer $|||U|||_2$. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n, \quad |||UA|||_2 = |||AU|||_2 = |||A|||_2$.

Réponse : On a $|||UA|||_2^2 = \rho((UA)^TUA) = \rho(A^T(U^TU)A) = \rho(A^TA) = |||A|||_2^2$**.**

De plus, comme $|||A|||_2 = \rho(AA^T)$ **(car** $\rho(AB) = \rho(BA)$**), il vient** $|||AU|||_2^2 = \rho(AU(AU)^T) = \rho(A(UU^T)A^T) = \rho(AA^T) = |||A|||_2$**.**

☐

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\hat{x} \in \mathbb{R}$. On suppose en outre qu'il existe une constante $0 < \lambda < 1$ telle que

$$\forall n = 1, 2, \ldots, \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|.$$

1. En déduire que

$$\forall n = 0, 1, 2, \ldots, \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^n |x_1 - x_0|.$$

Réponse : récurrence immédiate :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda|x_n - x_{n-1}| \leq \lambda^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \lambda^n|x_1 - x_0|.$$

☐

2. Soit p un entier supérieur à n. En déduire une majoration de $|x_p - x_n|$ en fonction de $|x_1 - x_0|$

Réponse : comme $x_p - x_n = (x_p - x_{p-1}) + \cdots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)$**, l'inégalité triangulaire et le résultat de la question précédente donne**

$$|x_p - x_n| \leq \left(\lambda^{p-1} + \cdots + \lambda^n\right)|x_1 - x_0|.$$

☐

3. On rappelle l'identité suivante : $\sum_{i=0}^{k} \lambda^i = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$. En déduire une nouvelle majoration de $|x_p - x_n|$.

   Réponse : comme $0 < \lambda < 1$, on obtient

$$|x_p - x_n| \leq \lambda^n \left(\sum_{i=0}^{p-1-n} \lambda^i \right) |x_1 - x_0| = \lambda^n \frac{1-\lambda^{p-n}}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

□

4. En faisant alors tendre p vers l'infini, en déduire une majoration de l'erreur $|\hat{x} - x_n|$ en fonction de λ, n et $|x_1 - x_0|$.

   Réponse : On fixe n. Quand p tend vers l'infini, λ^{p-n} tend vers 0 (car $0 < \lambda < 1$) et x_p tend vers $\hat{x}$. Donc à la limite l'inégalité ci-dessus devient :

$$|\hat{x} - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

□

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_2$. On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).

   Réponse : cf. cours. □

2. Donner la valeur de $\varepsilon_{\text{mach}}$.

   Réponse : $\varepsilon_{\textbf{mach}} = 2^{-t}$. □

3. On rappelle la valeur des premières puissances de 2 :

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

   On prend $t = 4$. On pose $x = 2^{10}$. On note y le flottant de $\mathcal{F}_2$ qui suit immédiatement x. Que vaut y? Quel est l'écart relatif entre x et y? Est-ce cohérent avec $\varepsilon_{\text{mach}}$?

   Réponse : $x = 2^{10} = (0.1000)_2\ 2^{11}$. Le flottant suivant est $y = (0.1001)_2\ 2^{11} = 2^{10} + 2^7 = 1024 + 128 = 1152$. L'écart relatif vaut $\frac{y-x}{x} = \frac{2^7}{2^{10}} = 2^{-3} = \varepsilon_{\textbf{mach}}$. □

4. On prend $t = 4$. Calculer $z = (x \oplus 100) \ominus x$ en opération flottante et déterminer l'erreur relative qui est faite sur ce calcul. On indique que $100 = 64 + 32 + 4$

   Réponse : $104 = 64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = (0.11001)_2\ 2^7$. Donc $\text{fl}(100) = (0.1100)_2\ 2^7 = 96$ en arrondissant par valeur inférieure. (Cela pourrait être $\text{fl}(100) = (0.1101)_2\ 2^7 = 104$ par valeur supérieure, cela ne changera pas le résultat ci-dessous.)

   $x + \text{fl}(100) = (0.1000)_2\ 2^{11} + (0.00001100)_2\ 2^{11} = (0.10001100)_2\ 2^{11}$. Donc $x \oplus \text{fl}(100) = \text{fl}(x + \text{fl}(100)) = (0.1001)_2\ 2^{11} = 2^{10} + 2^7 = 1152$ en arrondissant au plus proche.

   Ensuite, $z = \text{fl}((0.1001)_2 - (0.1000)_2\ 2^{11}) = 2^7 = 128$. La solution exacte est 100.

   L'écart relatif vaut $\frac{z-100}{100} = \frac{28}{100} = 28\%$. □

MT09-A2019- Examen médian

Durée : 1h30.

Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *6 points.*

RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 7 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Soit n un entier strictement positif. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

On pose $A^{(1)} = A$.

On veut faire l'élimination de Gauss en partant de la dernière colonne et de la dernière ligne et en remontant. Le premier pivot sera donc $a_{n,n}^{(1)}$ et la matrice $A^{(2)}$ après la première étape contiendra des zéros dans la dernière colonne : $a_{i,n}^{(2)} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

On suppose dans tout l'exercice que les pivots sont non-nuls.

1. Écrire les relations sur les lignes pour calculer $\underline{A}_i^{(2)}$ pour $i = n$ à 1.

   On posera $l_{i,n} = \dfrac{a_{i,n}^{(1)}}{a_{n,n}^{(1)}}$ si $i \leq n-1$.

   Réponse : Étape $k = 1$ (pour passer de $A^{(1)}$ à $A^{(2)}$) : pour éliminer les termes $a_{i,n}^{(1)}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ avec $a_{n,n}^{(1)}$ comme pivot, il faut faire :

$$\begin{cases} i = n & \underline{A}_n^{(2)} = \underline{A}_n^{(1)} \\ \forall i = n-1, \ldots, 1 & \underline{A}_i^{(2)} = \underline{A}_i^{(1)} - l_{i,n}\underline{A}_n^{(1)}, \qquad \textbf{en posant } l_{i,n} = \frac{a_{i,n}^{(1)}}{a_{n,n}^{(1)}}. \end{cases}$$

   □

2. Même question pour $A^{(3)}$ (deuxième étape).

   Réponse : Étape $k = 2$ (pour passer de $A^{(2)}$ à $A^{(3)}$) : pour éliminer les termes $a_{i,n-1}^{(2)}$ pour $i = 1, \ldots, n-2$ avec $a_{n-1,n-1}^{(2)}$ comme pivot (supposé non nul), il faut faire :

$$\begin{cases} \forall i = n, n-1 & \underline{A}_i^{(3)} = \underline{A}_i^{(2)} \\ \forall i = n-2, \ldots, 1 & \underline{A}_i^{(3)} = \underline{A}_i^{(2)} - l_{i,n-1}\underline{A}_{n-1}^{(2)}, \qquad \textbf{en posant } l_{i,n-1} = \frac{a_{i,n-1}^{(2)}}{a_{n-1,n-1}^{(2)}}. \end{cases}$$

   □

3. Écrire les relations sur les lignes pour calculer $\underline{A}_i^{(k+1)}$ pour $i = 1$ à n.
   On introduira des $l_{i,j}$ pour un certain j à préciser.

   Réponse : Étape $k \geq 1$ (pour passer de $A^{(k)}$ à $A^{(k+1)}$) : pour éliminer les termes $a_{i,n-k}^{(k)}$ pour $i = 1, \ldots, n-k$ avec $a_{n-k+1,n-k+1}^{(k)}$ comme pivot (supposé non nul), il faut faire :

$$\begin{cases} \forall i = n, \ldots, n-k+1 & \underline{A}_i^{(k+1)} = \underline{A}_i^{(k)} \\ \forall i = n-k, \ldots, 1 & \underline{A}_i^{(k+1)} = \underline{A}_i^{(k)} - l_{i,n-k+1}\underline{A}_{n-k+1}^{(k)}, \qquad \textbf{en posant } l_{i,n-k+1} = \frac{a_{i,n-k+1}^{(k)}}{a_{n-k+1,n-k+1}^{(k)}}. \end{cases}$$

   □

4. On fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et on regarde la ligne i de A quand les itérations k varient de 1 à $n-1$.

   (a) Écrire toutes les égalités que vérifie $\underline{A}_i^{(k+1)}$ en fonction de $\underline{A}_i^{(k)}$ pour $k = 1$ à $n-1$.
   Réponse : La ligne $i \in \{1, \ldots, n\}$ de A vérifie, quand les étapes k varient de 1 à $n-1$:

$$\begin{cases} & \underline{A}_i^{(1)} = \underline{A}_i \\ k = 1 & \underline{A}_i^{(2)} = \underline{A}_i^{(1)} - l_{i,n}\underline{A}_n^{(1)}, \\ k = 2 & \underline{A}_i^{(3)} = \underline{A}_i^{(2)} - l_{i,n-1}\underline{A}_{n-1}^{(2)}, \\ k \leq n-i & \underline{A}_i^{(k+1)} = \underline{A}_i^{(k)} - l_{i,n-k+1}\underline{A}_{n-k+1}^{(k)}, \\ k = n-i & \underline{A}_i^{(n-i+1)} = \underline{A}_i^{(n-i)} - l_{i,i+1}\underline{A}_{i+1}^{(n-i)}, \\ k = n-i+1 & \underline{A}_i^{(n-i+2)} = \underline{A}_i^{(n-i+1)}, \\ k \geq n-i+1 & \underline{A}_i^{(k+1)} = \underline{A}_i^{(k)}, \\ k = n-1 & \underline{A}_i^{(n)} = \underline{A}_i^{(n-1)}, \end{cases} \iff \begin{cases} & \underline{A}_{n-j}^{(1)} = \underline{A}_{n-j} \\ k = 1 & \underline{A}_{n-j}^{(2)} = \underline{A}_{n-j}^{(1)} - l_{n-j,n}\underline{A}_n^{(1)}, \\ k = 2 & \underline{A}_{n-j}^{(3)} = \underline{A}_{n-j}^{(2)} - l_{n-j,n-1}\underline{A}_{n-1}^{(2)}, \\ k \leq j & \underline{A}_{n-j}^{(k+1)} = \underline{A}_{n-j}^{(k)} - l_{n-j,n-k+1}\underline{A}_{n-k+1}^{(k)}, \\ k = j & \underline{A}_{n-j}^{(j+1)} = \underline{A}_{n-j}^{(j)} - l_{n-j,n-j+1}\underline{A}_{n-j+1}^{(j)}, \\ k = j+1 & \underline{A}_{n-j}^{(j+2)} = \underline{A}_{n-j}^{(j+1)}, \\ k \geq j+1 & \underline{A}_{n-j}^{(k+1)} = \underline{A}_{n-j}^{(k)}, \\ k = n-1 & \underline{A}_{n-j}^{(n)} = \underline{A}_{n-j}^{(n-1)}, \end{cases}$$

   en posant $j = n-i$ ($j \in \{0, \ldots, n-1\}$).

   □

(b) Sommer ces équations et simplifier le résultat de façon à ne faire apparaître que des lignes de A et de $A^{(n)}$.

Réponse : En sommant, les termes $\underline{A}_i^{(k)}$ se simplifient, sauf $\underline{A}_i^{(n)}$ et $\underline{A}_i$. Il vient

$$\underline{A}_i^{(n)} = \underline{A}_i - l_{i,n}\underline{A}_n^{(1)} - l_{i,n-1}\underline{A}_{n-1}^{(2)} \dots - l_{i,i+1}\underline{A}_{i+1}^{(n-i)} = \underline{A}_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{i,j}\underline{A}_j^{(n-j+1)}.$$

En remarquant que $\underline{A}_j^{(n-j+1)} = \underline{A}_j^{(n-j+2)} = \dots = \underline{A}_j^{(n)}$, et en passant la somme à gauche, il vient

$$\underline{A}_i^{(n)} + \sum_{j=i+1}^{n} l_{i,j}\underline{A}_j^{(n)} = \underline{A}_i.$$

□

(c) En introduisant une matrice L à définir, écrire la relation matricielle qui relie L, A et $A^{(n)}$. Expliciter quels sont les termes nuls des matrices L et $A^{(n)}$.

Réponse : L'équation précédente se réécrit matriciellement pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
\underline{A}_i &= \underline{A}_i^{(n)} + \sum_{j=i+1}^{n} l_{i,j}\underline{A}_j^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & l_{i,i+1} & l_{i,i+2} & \dots & l_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_i^{(n)} \\ \underline{A}_{i+1}^{(n)} \\ \underline{A}_{i+2}^{(n)} \\ \dots \\ \underline{A}_n^{(n)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & l_{i,i+1} & l_{i,i+2} & \dots & l_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1^{(n)} \\ \dots \\ \underline{A}_{i-1}^{(n)} \\ \underline{A}_i^{(n)} \\ \underline{A}_{i+1}^{(n)} \\ \underline{A}_{i+2}^{(n)} \\ \dots \\ \underline{A}_n^{(n)} \end{bmatrix} = \underline{L}_i A^{(n)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $A = LA^{(n)}$, avec

$$L = \begin{bmatrix} 1 & l_{1,2} & l_{1,3} & \cdots & l_{1,n} \\ 0 & 1 & l_{1,3} & \cdots & l_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & l_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(n)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1}^{(n)} & a_{2,2}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1,1}^{(n)} & a_{n-1,2}^{(n)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & 0 \\ a_{n,1}^{(n)} & a_{n,2}^{(n)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(n)} & a_{n,n}^{(n)} \end{bmatrix}$$

La matrice L est donc triangulaire supérieure et $A^{(n)}$ triangulaire inférieure (le contraire de l'élimination de Gauss classique). □

5. Écrire la fonction scilab correspondant à cet algorithme : `function [L, An] = factor(A)`.

Réponse : Cet algorithme est différent de celui de l'élimination de Gauss (résultat différent, ordre des opérations différents. . .), mais a une structure similaire.

Implémentation possible :

```
==================================
function [L, An] = triinf(A)
n = size(A, 1)
if ( size(A)~= [n, n] ) then error('not a correct size'); end

tol = 1E-12;
An = A; L = eye(n, n);

for k = 1:n-1
    jj = n-k+1
    pivot = An( jj, jj);
    if ( abs( pivot ) < tol )
        disp(pivot, [jj , jj]); error('Pivot nul');
    end
```

```
        for ii = 1:n-k
                cc = An(ii, jj) / pivot;
                L(ii, jj) = cc;
                An(ii, jj) = 0;
                An(ii, [1:jj-1]) = An(ii, [1:jj-1]) - cc * An(jj,[1:jj-1]);
        end
end

pivot = An(1,1);
if ( abs( pivot ) < tol )
        disp(pivot, [1, 1]); error('Dernier pivot nul');
end
endfunction
==================================
```

□

6. Calculer son coût en nombre de multiplications (on ne gardera que les termes dominants quand n tend vers l'infini).
   On rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Réponse : À l'intérieur de la boucle sur i, on fait $j-1 = n-k$ multiplications (et une division qu'on omet). La boucle sur i est faite $n-k$ fois. Donc on a $(n-k)^2$ multiplications à l'intérieur de la boucle sur k.

   Au final, on a $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \sum_{l=1}^{n-1} l^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \approx \frac{n^3}{3}$ multiplications. C'est le même coût que l'élimination de Gauss. □

Exercice 2 : *(barème approximatif : 9 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les parties 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.
La question 11 (programmation) peut être traitée sans avoir fait la partie 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On appelle $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice qui transforme A en la matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont ordonnées de telle sorte que : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. On note $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ la base des vecteurs propres correspondants.

Partie 1

Soit $q \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|q\|_2 = 1$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose $r = Aq - \mu q$.
On supose dans cette partie qu'il existe i_0 dans $\{1, \dots, n\}$ tel que $0 < |\lambda_{i_0} - \mu| < |\lambda_i - \mu|$ pour tout $i \neq i_0$.

1. Montrer que $\Lambda - \mu I$ est inversible.

   Réponse : la matrice $D = \Lambda - \mu I$ est une matrice diagonale contenant $d_i = \lambda_i - \mu$ sur la diagonale. Comme pour tout $i = 1, \dots, n$, $d_i \neq 0$ car $|\lambda_i - \mu| > 0$, on en déduit que D est inversible (car $\det(D) = \Pi_{i=1}^n d_i = \Pi_{i=1}^n (\lambda_i - \mu) \neq 0$ par exemple.) $\square$

2. Montrer que $q = P(\Lambda - \mu I)^{-1} P^{-1} r$.

   Réponse : on sait que $\Lambda = P^{-1}AP \iff A = P\Lambda P^{-1}$. Donc $r = Aq - \mu q = P\Lambda P^{-1} q - \mu P P^{-1} q = P(\Lambda - \mu I)P^{-1} q$. Comme P, P^{-1} et $D = \Lambda - \mu$ sont inversibles, on a $(PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ (attention à l'ordre : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ si A et B sont deux matrices inversibles). On en déduit $q = P(\Lambda - \mu I)^{-1} P^{-1} r$. $\square$

3. Soit une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Calculer $|||D|||_2$.

   Réponse : $|||D|||_2 = \sqrt{\rho(D^T D)} = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{\max\limits_{i=1,\dots,n} d_i^2} = \max\limits_{i=1,\dots,n} |d_i|$. $\square$

4. Déduire des questions précédentes que
$$|\lambda_{i_0} - \mu| \leq \chi_2(P)\|r\|_2, \tag{1}$$
   où $\chi_2(P)$ est le conditionnement par rapport à la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$.

   Réponse : En utilisant les propriétés de la norme subordonnée $|||\cdot|||_2$ et la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}
1 = \|q\|_2 &= \|P(\Lambda - \mu I)^{-1} P^{-1} r\|_2 \leq |||P|||_2 \, |||(\Lambda - \mu I)^{-1}|||_2 \, |||P^{-1}|||_2 \, \|r\|_2 \\
&\leq \chi_2(P) \max_{i=1,\dots,n} |((\Lambda - \mu I)^{-1})_i| \, \|r\|_2 = \chi_2(P) \max_{i=1,\dots,n} \frac{1}{|\lambda_i - \mu|} \, \|r\|_2 \\
&\leq \chi_2(P) \frac{1}{\min\limits_{i=1,\dots,n} |\lambda_i - \mu|} \, \|r\|_2,
\end{aligned}$$
   car $(\Lambda - \mu I)^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1 - \mu}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - \mu})$. **On conclut donc**
$$\min_{i=1,\dots,n} |\lambda_i - \mu| = |\lambda_{i_0} - \mu| \leq \chi_2(P)\|r\|_2.$$
   $\square$

5. Dans cette question uniquement, on suppose que A est symétrique. Quel est le conditionnement minimal que peut prendre P? Que devient l'inégalité (1)?

   Réponse : si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe P, matrice orthogonale ($P^{-1} = P^T$), telle que $\Lambda = P^{-1}AP = P^TAP$.

   Pour ce P, $|||P|||_2^2 = \rho(P^TP) = \rho(I) = 1$ et $|||P^{-1}|||_2^2 = \rho((P^{-1})^T P^{-1}) = \rho((P^T)^T P^T) = \rho(PP^T) = \rho(I) = 1$. Donc $\chi_2(P) = 1$ et
$$|\lambda_{i_0} - \mu| \leq \|r\|_2.$$
   $\square$

6. (a) Si (μ, q) est un couple propre (λ_i, y_i), que vaut r? L'inégalité (1) reste-t-elle valide?

   Réponse : on a :
$$r = Ay_i - \lambda_i y_i = 0 \quad \textbf{et} \quad \min_{i=1,\dots,n} |\lambda_i - \mu| = 0 = \chi_2(P)\|r\|_2.$$
   L'inégalité reste vraie (c'est une égalité). $\square$

(b) Quel type de critère d'arrêt pour la méthode des puissances itérées l'inégalité (1) suggère-t-elle d'utiliser? Expliquer.

Réponse : On se donne une tolérance tol. **On peut prendre comme critère d'arrêt pour les puissances itérées :**

$$\|r\|_2 = \|Ax^{(k)} - \mu^{(k)}x^{(k)}\|_2 \leq \text{tol},$$

car si r est petit, on est assuré que $\mu^{(k)}$ sera proche d'une des valeurs propres (en l'occurence ce sera λ_1), à condition que le conditionnement de P ne soit pas trop mauvais.

□

Partie 2

On suppose dans cette partie que $\lambda_1 = -\lambda_2 > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. On considère la méthode suivante : $x^{(0)}$ donné dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et

$$\text{pour } k \geq 0 \quad \begin{cases} u^{(k)} = Ax^{(k)}, \\ x^{(k+1)} = \dfrac{u^{(k)}}{\|u^{(k)}\|_2}, \\ \mu^{(k+1)} = (x^{(k+1)})^T Ax^{(k+1)}. \end{cases} \tag{2}$$

7. (a) Calculer $\dfrac{y_j^T A y_j}{y_j^T y_j}$ pour $j = 1, \ldots, n$.

Réponse : on a ($y_j \neq 0$ car c'est un vecteur propre, donc $\|y_j\|_2 \neq 0$) :

$$\frac{y_j^T(Ay_j)}{y_j^T y_j} = \frac{y_j^T(\lambda_j y_j)}{y_j^T y_j} = \lambda_j \frac{y_j^T y_j}{y_j^T y_j} = \lambda_j.$$

□

(b) Si $\lim\limits_{k\to+\infty} u^{(k)} = \gamma y_j$ (pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$), que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu^{(k)}$?

Réponse : On suppose que $\gamma \neq 0$. On a (si $u^{(k-1)} \neq 0$) :

$$\mu^{(k)} = (x^{(k)})^T Ax^{(k)} = \frac{(u^{(k-1)})^T A u^{(k-1)}}{\|u^{(k-1)}\|_2^2} = \frac{(u^{(k-1)})^T A u^{(k-1)}}{(u^{(k-1)})^T u^{(k-1)}}.$$

Donc par continuité du produit matriciel et de la division dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\gamma \neq 0$ et $y_j \neq 0$ car c'est un vecteur propre) :

$$\lim_{k\to+\infty} \mu^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(u^{(k-1)})^T A u^{(k-1)}}{(u^{(k-1)})^T u^{(k-1)}} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2} \frac{y_j^T A y_j}{y_j^T y_j} = \lambda_j.$$

On note qu'on peut obtenir un résultat moins intéressant. Comme la norme est une fonction continue et comme $\gamma \neq 0$ et $y_j \neq 0$, en notant que

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{u^{(k-1)}}{\|u^{(k-1)}\|_2} = \frac{\gamma}{|\gamma|} \frac{y_j}{\|y_j\|_2} = \text{sgn}(\gamma) \frac{y_j}{\|y_j\|_2},$$

on déduit (les limites existent et sont finies)

$$\lim_{k\to+\infty} \mu^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} (x^{(k)})^T Ax^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} (x^{(k)})^T u^{(k)} = \text{sgn}(\gamma) \frac{y_j^T}{\|y_j\|_2} \gamma y_j = |\gamma| \, \|y_j\|_2.$$

□

8. Soit $k \geq 1$.

(a) Écrire $x^{(0)}$ dans la base des vecteurs propres.

On suppose dans toute la suite que les composantes de $x^{(0)}$ suivant y_1 et y_2 sont non nulles.

Réponse : comme A est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres. On écrit $x^{(0)}$ dans la base des vecteurs propres $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$: il existe des $(\xi_j)_{j=1,\ldots,n}$ uniques dans $\mathbb{R}$ tels que

$$x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j, \qquad \textbf{et } \xi_1 \neq 0, \ \xi_2 \neq 0.$$

□

(b) Calculer $A^k x^{(0)}$.

Réponse : il vient par récurrence immédiate que $A^k y_j = \lambda_j^k y_j$ pour tout $k \geq 0$, donc par linéarité de A^k et comme $\lambda_1 \neq 0$:

$$A^k x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j A^k y_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j^k y_j = \lambda_1^k \left(\xi_1 y_1 + (-1)^k \xi_2 y_2 + \sum_{j=3}^{n} \left[\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right]^k \xi_j y_j \right), \quad \forall k \geq 0.$$

□

(c) Montrer que $A^k x^{(0)} \neq 0$.

Réponse : comme ξ_1 et ξ_2 sont non-nuls et que $\lambda_1 \neq 0$, le vecteur $A^k x^{(0)} \neq 0$. (Dans une famille libre, une combinaison linéaire est nulle si et seulement si chaque composante est nulle. Comme ($\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est une base, c'est une famille libre, et les 2 premières composantes de $A^k x^{(0)}$ au moins sont non-nulles.) □

(d) Calculer $x^{(k)}$ en fonction de $A^k x^{(0)}$. La suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite quand $k \to \infty$?

Réponse : comme $A^k x^{(0)} \neq 0$, il vient par récurrence (cf. cours chap. 8) que

$$x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|_2}, \quad \forall k \geq 0.$$

On obtient ainsi (avec $\lambda_1 > 0$)

$$x^{(k)} = \frac{\xi_1 y_1 + (-1)^k \xi_2 y_2 + \sum_{j=3}^{n} \left[\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right]^k \xi_j y_j}{\|\xi_1 y_1 + (-1)^k \xi_2 y_2 + \sum_{j=3}^{n} \left[\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right]^k \xi_j y_j\|_2}, \quad \forall k \geq 0.$$

On pose

$$z^{(k)} = \sum_{j=3}^{n} \left[\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right]^k \xi_j y_j, \qquad \textbf{pour } k \geq 0.$$

Comme $|\lambda_j| < \lambda_1$ pour $j \geq 3$, $\lim_{k\to+\infty} \left[\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right]^k = 0$ et

$$\lim_{k\to+\infty} z^{(k)} = 0.$$

Donc $x^{(k)}$ n'admet pas de limite quand k tend vers l'infini, car $(-1)^k \xi_2 y_2$ n'admet pas de limite. □

9. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{A^{2k} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k}}$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{A^{2k+1} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k+1}}$.

Réponse : d'après la question 8.(b),

$$\frac{A^{2k} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k}} = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + z^{(2k)} \qquad \textbf{et} \qquad \frac{A^{2k+1} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k+1}} = \xi_1 y_1 - \xi_2 y_2 + z^{(2k+1)},$$

et donc comme $\lim_{k\to+\infty} z^{(k)} = 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{A^{2k} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k}} = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{A^{2k+1} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k+1}} = \xi_1 y_1 - \xi_2 y_2.$$

□

(b) Pour $k \geq 1$, on pose $v^{(k)} = A^k x^{(0)}$. Calculer $w^{(k)} = v^{(k)} + \lambda_1 v^{(k-1)}$.

Réponse : il vient :

$$\begin{aligned} w^{(k)} &= v^{(k)} + \lambda_1 v^{(k-1)} = \lambda_1^k \left(\xi_1 y_1 + (-1)^k \xi_2 y_2 + z^{(k)} + \xi_1 y_1 + (-1)^{k-1} \xi_2 y_2 + z^{(k-1)} \right) \\ &= \lambda_1^k \left(2\xi_1 y_1 + z^{(k)} + z^{(k-1)} \right). \end{aligned}$$

□

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{(w^{(k)})^T A w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2^2}$.

Réponse : On remarque que pour tout $k \geq 1$ $w^{(k)}$ est non nul, car $\xi_1 \neq 0$. Comme $\lambda_1 > 0$ et $\lim_{k\to+\infty} z^{(k)} = 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2} &= \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\lambda_1^k}{|\lambda_1|^k} \frac{2\xi_1 y_1 + z^{(k)} + z^{(k-1)}}{\|2\xi_1 y_1 + z^{(k)} + z^{(k-1)}\|_2}\right) \\ &= \frac{2\xi_1 y_1}{\|2\xi_1 y_1\|_2} = \operatorname{sgn}(\xi_1)\frac{y_1}{\|y_1\|_2}.\end{aligned}$$

Donc $w^{(k)}$ tend vers un vecteur propre de norme 1 associé à λ_1 (c'est, au signe près, le vecteur y_1 normalisé). Donc d'après la question 7.(b),

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(w^{(k)})^T A w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2^2} = \lambda_1.$$

□

10. Modifier la méthode (2) pour calculer λ_1 et y_1. Bien expliquer.

Réponse : ces calculs suggèrent que les suites $(Ax^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas quand k tend vers l'infini (à cause du terme en $(-1)^k y_2$). On est dans un cas où la méthode des puissances itérées (2) (écrit avec la norme 2) ne converge pas, car la valeur propre dominante n'est pas isolée (on n'a pas $|\lambda_1| > |\lambda_i$ pour tout $i \geq 2$).

En revanche, quand les 2 valeurs propres dominantes sont réelles et opposées (le cas étudié ici), on peut quand même converger vers un vecteur propre, à condition de considérer les suites $(A^{2k}x^{(0)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(A^{2k+1}x^{(0)})_{k\in\mathbb{N}}$. C'est le vecteur $w^{(k)}$ qui converge vers un vecteur propre de λ_1.

On note au passage qu'on pourrait également obtenir un vecteur propre pour λ_2, en considérant $(-1)^k\widetilde{w}^{(k)} = (-1)^k(v^{(k)} - \lambda_1 v^{(k-1)})$.

On propose l'algorithme suivant : poser $v^{(0)} = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $\mu^{(0)} = 0$, puis faire

$$\textbf{pour } k \geq 0 \quad \begin{cases} v^{(k+1)} = Av^{(k)}, \\ w^{(k+1)} = v^{(k+1)} + \mu^{(k)} v^{(k)}; \\ w^{(k+1)} = \dfrac{w^{(k+1)}}{\|w^{(k+1)}\|_2}, \\ \mu^{(k+1)} = (w^{(k+1)})^T A w^{(k+1)}. \end{cases} \tag{3}$$

Un problème possible avec cet algorithme, c'est que la norme de $v^{(k)}$ va devenir très grande (si $\lambda_1 > 1$) ou très petite (si $0 < \lambda_1 < 1$) et donc la précision sur le calcul de $w^{(k)}$ pourrait être dégradée. □

11. Écrire une fonction scilab : `function [mu, x, k] = puissiterbis(A, x, N, tol)` qui calcule λ_1 et y_1 **en utilisant la méthode** (2) **modifiée**. On explicitera les arguments d'entrée `x`, `N`, `tol` et l'argument de sortie `k`.

On utilisera de préférence le critère d'arrêt suggéré à la fin de la partie 1.

Réponse : On prend comme critère d'arrêt la norme 2 du résidu $r^{(k)} = Aw^{(k)} - \mu^{(k)} w^{(k)}$. Implémentation possible (la fonction scilab `norm` avec un seul argument calcule la norme 2) :

```
=================================
function [mu, W, kk] = puissiterbis(A, x, N, tol)
n = length(x); V = zeros(n, 1);
Vprev = x; muprev = 0;
for k = 1:N
    V = A * Vprev;
    W = V + muprev * Vprev; W = W / norm(W);
    Z = A * W;
    mu = W' * Z;
    err = norm(Z - mu * W);
    muprev = mu; Vprev = V;
    if err < tol
        return;
    end
end
warning("la methode des puissances iterees n"a pas converge en N iterations");
endfunction
=================================
```

□