Module A8

Dualité de Fenchel et conjuguée convexe

Sauf mention contraire, $\mathcal{X}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Pour toutes les autres notations et définitions, le lecteur est invité à se reporter aux cours précédents.

1 Conjuguée convexe ou de Legendre-Fenchel

1.1 Définition et exemples

Définition 1 (Conjuguée convexe)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. On définit sa *conjuguée convexe* comme étant la fonction $J^* : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ donnée par

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad J^*(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x \rangle - J(x) \Big\}$$

On parle parfois de *conjuguée de* Legendre-Fenchel. L'application

$$J \mapsto J^*$$

est quant à elle appelée *transformée de* Fenchel.

Commençons par deux exemples très classiques, qui illustrent deux techniques différentes permettant de déterminer expliciter les valeurs de la conjuguée convexe.

Exemple

Conjuguée convexe de la norme au carré. Considérons la fonction convexe

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\, \|x\|^2 \end{array} \right.$$

Alors on a $J^* = J$. En effet, par définition,

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad J^*(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \langle y, x \rangle - \frac{1}{2}\, \|x\|^2 \right\} = -\inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ -\langle y, x \rangle + \frac{1}{2}\, \|x\|^2 \right\}$$

On obtient le résultat désiré en appliquant la CNS d'optimalité du premier ordre pour ce problème de minimisation convexe lisse non contraint, qui assure que le minimum dans le membre de droite de l'égalité précédente est atteint au point $x^* = y$ et vaut

$$-\langle y, x^* \rangle + \frac{1}{2}\, \|x^*\|^2 = -\frac{1}{2}\, \|x^*\|^2$$

Exemple

Conjuguée convexe de la norme. Considérons la fonction convexe

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array} \right.$$

Soit $y \in \mathcal{X}$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz permet de fournir la majoration suivante :

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \langle y, x \rangle - \|x\| \leq \|y\|\, \|x\| - \|x\| = (\|y\| - 1)\, \|x\|$$

Ainsi, si $\|y\| \leq 1$, l'inégalité précédente assure que $\langle y, x \rangle - \|x\|$ est négatif pour tout $x \in \mathcal{X}$. On peut vérifier qu'elle s'annule pour $x = y/\|y\|$. Si $\|y\| > 1$, il suffit de poser $x_k = k\, y$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\langle y, x_k \rangle - \|x_k\| = \langle y, k\, y \rangle - \|k\, y\| = k\, \|y\|^2 - k\, \|y\| = k\, \|y\| \big(\|y\| - 1 \big)$$

On voit donc $$\lim_{k \to +\infty} \langle y, x_k \rangle - \|x_k\| = +\infty$$

de sorte que $$J^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\| \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, J^* est l'indicatrice de la boule unité fermée $\mathcal{B}$.

1.2 Convexité de la conjuguée convexe

On commence par établir le résultat suivant, qui assure en particulier que, même si J n'est pas convexe, sa conjuguée convexe l'est.

Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. Alors sa conjuguée convexe J^* est convexe et s.c.i.

Démonstration : Il suffit de remarquer que pour tout $y \in \mathcal{X}$, la fonction

$$y \mapsto \langle y, x \rangle - J(x)$$

est une fonction convexe (car affine) ; en tant qu'enveloppe supérieure de telles fonctions, la conjuguée convexe J^* est convexe et s.c.i. ■

Le caractère propre de la conjuguée convexe requiert une hypothèse supplémentaire sur la fonction J.

Proposition 2

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Alors on a l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :

(i) il existe $x^0 \in \mathcal{X}$ tel que $J(x^0) < +\infty$ et J admet une minorante affine ;

(ii) sa conjuguée convexe J^* est convexe, s.c.i. et propre.

Démonstration : On rappelle que J admet une minorante affine s'il existe un couple $(a, b) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq \langle a, x \rangle + b$$

- **Sens direct.** En vertu de la proposition 1, il suffit de démontrer que J^* est propre. Commençons par remarquer que, puisque J n'est pas identiquement égale à $+\infty$ par hypothèse, sa conjuguée convexe J^* est nécessairement à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ainsi, il nous reste à démontrer qu'il existe $y_0 \in \mathcal{X}$ tel que $J^*(y_0) \neq +\infty$. Par hypothèse, on a pour tout $y \in \mathcal{X}$

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \langle y, x \rangle - J(x) \leq \langle y - a, x \rangle - b$$

En particulier, si on choisit $y_0 = a$, alors la majoration précédente devient

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \langle y_0, x \rangle - J(x) \leq -b$$

ce qui assure, en passant à la borne supérieure, que $J^*(y_0)$ est fini.

- **Réciproque.** Si J^* est propre, alors il existe au moins un point $y_0 \in \mathcal{X}$ tel que $J^*(y_0) \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J^*(y_0) \geq \langle y_0, x \rangle - J(x) \qquad \text{soit} \qquad J(x) \geq \langle y_0, x \rangle - J^*(y_0)$$

ce qui assure que J admet une minorante affine, et ne peut donc prendre la valeur $-\infty$. Par ailleurs, si J était identiquement égale à $+\infty$, alors J^* prendrait la valeur $-\infty$, ce qui contredit le fait que J^* soit propre. ■

On en déduit alors le résultat suivant :

Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe** et propre. Alors sa conjuguée convexe J^* est convexe, s.c.i. et propre.

Démonstration : Il suffit de rappeler que toute fonction convexe propre admet une minorante affine (proposition 13 du module A1). ■

2 Propriétés de la conjuguée convexe

On s'intéresse dans cette section aux autres propriétés de la conjuguée convexe.

2.1 Bi-conjuguée

Il est possible d'établir un grand nombre de propriétés pour la conjuguée convexe, mais il faut pour cela introduire la notion de bi-conjuguée :

Définition 2 (Bi-conjuguée convexe)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. On définit sa bi-conjuguée convexe, notée J^{**}, comme étant la conjuguée convexe de sa conjuguée convexe J^*.

En tant que conjuguée convexe, la bi-conjuguée présente les mêmes propriétés que la conjuguée convexe :

Corollaire 2

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. Alors sa bi-conjuguée J^{**} est convexe et s.c.i.

Pour obtenir le caractère propre, il faut à nouveau ajouter une hypothèse supplémentaire sur J.

Proposition 3

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre. On suppose que J admet une minorante affine. Alors sa bi-conjuguée J^* est convexe, s.c.i. et propre.

Démonstration : Laissée en exercice.

Quel lien existe-t-il entre une fonction et sa bi-conjuguée ? La proposition 4 répond à cette question dans le cas le plus général. Auparavant, démontrons le lemme suivant :

Lemme 1 (Inégalité de Fenchel–Young)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. Alors on a

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X}^2, \qquad J(x) + J^*(y) \geq \langle y, x \rangle$$

Démonstration : Soit $y \in \mathcal{X}$. Par définition de la borne supérieure, on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J^*(y) \leq \langle y, x \rangle - J(x)$$

de sorte que le résultat désiré est immédiat. ■

Une conséquence importante de l'inégalité de Fenchel–Young est la suivante : si J^* est propre, alors pour $y^0 \in \operatorname{dom} J^*$, on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq \langle y^0, x \rangle - J^*(y^0)$$

Ainsi, la conjuguée convexe permet d'expliciter une minorante affine de J, tandis que, par définition de J^*, si le domaine de J est non vide, alors pour tout $x^0 \in \operatorname{dom} J$,

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad J^*(y) \geq \langle y, x^0 \rangle - J(x^0)$$

> Une fonction de domaine non vide et sa conjuguée convexe définissent donc chacune une minorante affine pour l'autre. Une question intéressante est de savoir si elles permettent de définir une minorante affine exacte en tout point donné.

Proposition 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. Alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J^{**}(x) \leq J(x)$$

Démonstration : Il suffit de passer à la borne supérieure sur y dans l'inégalité de Fenchel–Young. ■

En réalité, il est possible de montrer que J^{**} est la *plus grande fonction convexe* dont le graphe est située en-dessous de celui de le J. Plus précisément, la bi-conjuguée de J est l'enveloppe supérieure des minorantes affines de J :

Proposition 5

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. Alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J^{**}(x) = \sup \Big\{ \langle a, x\rangle + b \mid \forall z \in \mathcal{X}, \quad \langle a, z\rangle + b \leq J(z) \Big\}$$

Démonstration : On va considérer deux cas de figure possibles.

- **Premier cas : J admet une minorante affine.** Soit $x \in \mathcal{X}$. Il existe par hypothèse $(a, b) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, z \in \mathcal{X}, \quad \langle a, z\rangle + b \leq J(z) \qquad \text{soit} \qquad \langle a, z\rangle - J(z) \leq -b$$

  En passant à la borne supérieure dans la seconde inégalité, on obtient que

$$J^*(a) \leq -b \qquad \text{soit} \qquad \langle a, x\rangle + b \leq \langle a, x\rangle - J^*(a) \leq J^{**}(x)$$

  En passant à la borne supérieure en (a, b) définissant une minorante affine de J, on obtient

$$\sup \Big\{ \langle a, x\rangle + b \mid \forall z \in \mathcal{X}, \quad \langle a, z\rangle + b \leq J(z) \Big\} \leq J^{**}(x)$$

  Démontrons à présent l'inégalité inverse. D'après l'inégalité de Fenchel–Young, pour tout $y \in \operatorname{dom} J^*$, la fonction $z \mapsto \langle y, z\rangle - J^*(y)$ est une minorante affine de J. Par définition de la borne supérieure, on a donc pour tout $y \in \operatorname{dom} J^*$,

$$\langle y, x\rangle - J^*(y) \leq \sup \Big\{ \langle a, x\rangle + b \mid \forall z \in \mathcal{X}, \quad \langle a, z\rangle + b \leq J(z) \Big\}$$

  En passant à la borne supérieure sur les y, on obtient l'inégalité souhaitée.
- **Deuxième cas : J n'admet aucune minorante affine.** Dans ce cas, la conjuguée convexe J^* n'est pas propre (d'après la réciproque de la proposition **??**). Puisque J^* est convexe, il s'ensuit qu'elle est identiquement égale à $+\infty$, et que sa conjuguée convexe est identiquement égale à $-\infty$. La borne supérieure d'un ensemble vide valant $-\infty$, on en déduit que l'identité annoncée est vérifiée. ■

Ainsi, lorsque J est convexe, on a le résultat central suivant :

Théorème 1 (Fenchel–Moreau)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Alors

$$J^{**} = J$$

Autrement dit, on a la relation suivante

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \Big\{ \langle y, x\rangle - J^*(y) \Big\}$$

Démonstration : D'après la proposition précédente, il suffit de démontrer que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup \Big\{ \langle a, x\rangle + b \mid \forall z \in \mathcal{X}, \quad \langle a, z\rangle + b \leq J(z) \Big\}$$

Autrement dit, J est l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines ; c'est bien le cas sous les hypothèses du théorème. ■

Remarque : La réciproque dans le théorème de Fenchel–Moreau est vraie.

Exemple

Conjuguée convexe de l'indicatrice de la boule unité. Considérons à nouveau la fonction convexe

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array} \right.$$

On a montré dans un exemple précédent que J^* est l'indicatrice de boule unité fermée. Puisque J est convexe, s.c.i. et propre, on a $J^{**} = J$. Il s'ensuit donc en particulier que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle y, x\rangle$$

L'hypothèse de semi-continuité inférieure est essentielle dans le théorème de Fenchel–Moreau, comme le montre le contre-exemple suivant.

Contre-exemple

Cas d'une fonction non s.c.i. Considérons la fonction convexe définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$J(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas s.c.i. en 0. En effet, si on considère la suite $(1/k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de limite 0, on a

$$\lim_{k \to +\infty} J\left(\frac{1}{k}\right) = 0 < 1 = J(0)$$

ce qui contredit la définition de la semi-continuité inférieure. On peut vérifier (en exercice) que

$$J^* = \chi_{[\,0\,;+\infty\,[} \qquad \text{et} \qquad J^{**} = \chi_{]\,-\infty\,;0\,]}$$

Ainsi, $J^{**} \neq J$.

Enfin, notons que l'on ne peut pas définir de tri-conjuguée (plus précisément, cette notion ne permet pas de définir de nouveaux objets).

Lemme 2

Soit $J_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $J_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telles que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f(x) \leq g(x)$$

Alors
$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad f^*(y) \geq g^*(y)$$

Démonstration : Laissée en exercice.

Corollaire 3

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction. Alors

$$(J^{**})^* = J^*$$

Démonstration : La proposition 4 appliquée à J^* assure d'une part que

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad (J^*)^{**}(y) \leq J^*(y)$$

D'autre part, puisque (toujours d'après la proposition 4), on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J^{**}(x) \leq J(x)$$

le lemme précédent implique que

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad (J^{**})^*(y) \geq J^*(y)$$

On conclut en remarquant que $(J^*)^{**} = (J^{**})^*$. ■

2.2 Sous-différentiel de la conjuguée convexe

Puisque la conjuguée convexe est toujours convexe, on peut aisément étudier son sous-différentiel.

Lemme 3 (Identité de Legendre–Fenchel)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**. Soit $(x, p) \in \mathcal{X}^2$. Alors l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :

(i) $p \in \partial J(x)$

(ii) $J(x) + J^*(p) = \langle y, x \rangle$

Démonstration : Soit $(x, p) \in \mathcal{X}^2$. Il suffit d'écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} J^*(p) = \langle p, x\rangle - J(x) \quad &\iff \quad \forall\, z \in \mathcal{X}, \quad \langle p, z\rangle - J(z) \leq \langle p, x\rangle - J(x) \\ &\iff \quad \forall\, z \in \mathcal{X}, \quad J(z) \geq J(x) + \langle p, z - x\rangle \end{aligned}$$

soit
$$J^*(p) = \langle p, x\rangle - J(x) \qquad \iff \qquad p \in \partial J(x)$$

en notant que les relations apparaissant dans cette série d'équivalences impliquent nécessairement que $x \in \operatorname{dom} J$. Dans le cas contraire, aucune des deux affirmations (i) et (ii) n'est vraie. ■

> Ce résultat peut s'interpréter à la lumière des minorantes affines : il assure que, dans le cas d'une fonction convexe propre J, la conjuguée convexe permet de définir une minorante affine exacte en tout point où la fonction J admet un sous-gradient.

On a en réalité un résultat plus fort, qui relie les sous-différentiels de J et de sa conjuguée convexe dans le cas convexe :

Proposition 6 (Règle de bascule)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**. Soit $(x, p) \in \mathcal{X}^2$. Alors on a

$$p \in \partial J(x) \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \partial(J^*)(p)$$

Démonstration : Soit $p \in \partial J(x)$. Par définition d'un sous-gradient, on a

$$\forall\, z \in \mathcal{X}, \qquad J(z) \geq J(x) + \langle p, z - x\rangle \qquad \text{soit} \qquad \langle p, x\rangle - J(x) \geq \langle p, z\rangle - J(z)$$

En passant à la borne supérieure sur z, on obtient alors que

$$\langle p, x\rangle - J(x) \geq \sup_{z \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle p, z\rangle - J(z) \Big\} = J^*(p)$$

En remplaçant $J(x)$ par son expression avec J^*, il s'ensuit que

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad \langle p - y, x\rangle - J^*(y) \geq \langle p, x\rangle - \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x\rangle - J^*(y) \Big\} \geq J^*(p)$$

On reconnaît là la définition d'un sous-gradient de J^* en p ; plus précisément, on a démontré que $x \in \partial(J^*)(p)$. ■

Proposition 7 (Règle de bascule dans le cas convexe)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $(x, p) \in \mathcal{X}^2$. Alors on a

$$p \in \partial J(x) \qquad \iff \qquad x \in \partial(J^*)(p)$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la règle de la bascule à la fonction J^* et d'utiliser l'identité entre J et sa bi-conjuguée. ■

2.3 Règles de calcul

Voyons quelques règles de calcul pour la conjuguée convexe.

Proposition 8 (Produit par un scalaire et changement d'échelle)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction et $\alpha > 0$. Alors on a

- $$\forall\, y \in \mathcal{X}, \quad (\alpha\, J)^*(y) = \alpha\, J^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$
- $$\forall\, y \in \mathcal{X}, \quad \big(x \mapsto J(\alpha\, x)\big)^*(y) = J^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

Démonstration : Soit $\alpha > 0$ et $y \in \mathcal{X}$.

- Puisque α est strictement positif, on a
$$(\alpha\, J)^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x\rangle - \alpha\, J(x) \Big\} = \alpha \sup_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ \Big\langle \frac{y}{\alpha}, x \Big\rangle - J(x) \Big\} = \alpha\, J^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$
- En effectuant le changement de variables $u = \alpha\, x$, on obtient
$$\big(x \mapsto J(\alpha\, x)\big)^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x\rangle - J(\alpha\, x) \Big\} = \sup_{u\in\mathcal{X}} \Big\{ \Big\langle y, \frac{u}{\alpha} \Big\rangle - J(u) \Big\} = J^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

ce qui donne le résultat souhaité. ■

Proposition 9 (Translation)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction et $x^0 \in \mathcal{X}$. Alors on a

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \quad \big(x \mapsto J(x - x^0)\big)^*(y) = J^*(y) - \langle y, x^0\rangle$$

Démonstration : Soit $y \in \mathcal{X}$.

$$\sup_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x - x^0\rangle - J(x) \Big\} = \sup_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x\rangle - J(x) \Big\} - \langle y, x^0\rangle = J^*(y) - \langle y, x^0\rangle$$

ce qui achève la preuve. ■

Exercice

Conjuguée convexe d'une distance euclidienne. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Considérons la fonction convexe

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2\,\tau}\, \|x - x^0\|^2 \end{array} \right.$$

Montrer que $\quad \forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad J^*(y) = \dfrac{\tau}{2} \left\| y - \dfrac{x^0}{\tau} \right\|^2 - \dfrac{1}{2\,\tau}\, \|x^0\|^2$

Pour le cas de la somme de deux fonctions convexes, il faut au préalable introduire la définition de l'inf-convolution de deux fonctions :

Définition 3 (Inf-convolution)

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ deux fonctions. On définit leur *inf-convolution*, ou encore *convolution infimale*, comme la fonction notée $f \,\square\, g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f \,\square\, g(x) = \inf_{z\in\mathcal{X}} \Big\{ f(x - z) + g(z) \Big\}$$

Cet opérateur généralise la régularisation de Moreau–Yosida (module A5). En effet, par définition de ${}^{\tau}J$ pour une fonction J convexe, on peut écrire

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad {}^{\tau}J(x) = J \,\square\, \left(z \mapsto \frac{1}{2\,\tau}\, \|z\|^2 \right)$$

> L'inf-convolution est commutative ($f \,\square\, g = g \,\square\, f$) et possède en outre l'intéressante propriété de conserver la convexité.

Proposition 10 (Conjuguée convexe de l'inf-convolution)

Soit $J_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $J_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ deux fonctions. Alors on a

$$(J_1 \,\square\, J_2)^* = J_1^* + J_2^*$$

Démonstration : Soit $y \in \mathcal{X}$. Par définition de l'inf-convolution, on a

$$\begin{aligned}
(J_1 \,\square\, J_2)^*(y) &= \sup_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x\rangle - \inf_{z\in\mathcal{X}} \Big\{ J_1(x - z) + J_2(z) \Big\} \Big\} \\
&= \sup_{x\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x\rangle + \sup_{z\in\mathcal{X}} \Big\{ - J_1(x - z) - J_2(z) \Big\} \Big\} \\
(J_1 \,\square\, J_2)^*(y) &= \sup_{(x,z)\in\mathcal{X}^2} \Big\{ \langle y, x\rangle - J_1(x - z) - J_2(z) \Big\}
\end{aligned}$$

Réalisons le changement de variables $u = x - z$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
(J_1 \,\square\, J_2)^*(y) &= \sup_{(u,z)\in\mathcal{X}^2} \Big\{ \langle y, u\rangle - J_1(u) + \langle y, z\rangle - J_2(z) \Big\} \\
&= \sup_{u\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, u\rangle - J_1(u) \Big\} + \sup_{z\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle y, z\rangle - J_2(z) \Big\}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors l'expression de $J_1^*(y)$ et de $J_2^*(y)$. ■

Un corollaire immédiat de la proposition 10 dans le cas de fonctions convexes, s.c.i. et propres est le suivant :

Corollaire 4

Soit $J_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $J_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. Alors

$$J_1 + J_2 = (J_1^* \,\square\, J_2^*)^*$$

Autrement dit,

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J_1(x) + J_2(x) = \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x \rangle - (J_1 \,\square\, J_2)^*(y) \Big\}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser l'identité entre une fonction convexe, s.c.i. et propre et sa bi-conjuguée. ■

Il serait tentant d'en déduire immédiatement une formule pour la conjuguée convexe de la somme de deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Celle-ci découlerait immédiatement du théorème de Fenchel–Moreau si $(J_1^* \,\square\, J_2^*)^*$ est propre. L'exemple suivant montre que ce n'est malheureusement pas toujours le cas, même en présence de fonctions très simples.

Contre-exemple

Cas d'une inf-convolution impropre. Considérons le cas des deux fonctions convexes, continues (donc propres) définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$J_1(x) = x \qquad \text{et} \qquad J_2(x) = -x$$

Calculons leur inf-convolution. Par définition :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad J_1 \,\square\, J_2(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \Big\{ x - z - z \Big\} = \inf_{z \in \mathbb{R}} \Big\{ x - 2\,z \Big\} = -\infty$$

On voit donc que $J_1 \,\square\, J_2$ n'est pas propre.

> Pour obtenir l'identité $(J_1 + J_2)^* = J_1^* \,\square\, J_2^*$, il faut donc faire une hypothèse supplémentaire sur les domaines respectifs de J_1 et J_2. C'est l'objet du théorème d'Attouch–Brézis (non abordé dans ce cours).

3 Conjuguée convexe d'une fonction convexe

3.1 Identité de Moreau

Proposition 11 (Identité de Moreau)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et s.c.i. Alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad x = \operatorname{prox}_J(x) + \operatorname{prox}_{J^*}(x)$$

Démonstration : Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Posons $x^+ = \operatorname{prox}_J(x^0)$ et $p = x^0 - x^+$. Nous allons montrer que $p = \operatorname{prox}_{J^*}(x^0)$. Pour cela, utilisons la caractérisation du point proximal (proposition 5 du module A5), qui assure que

$$p = x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$$

La règle de bascule (proposition 6), on a

$$x^0 - p = x^+ \in \partial(J^*)(p)$$

ce qui, par la caractérisation du point proximal, assure que $p = \operatorname{prox}_{J^*}(x^0)$. ■

> Ce résultat est la généralisation de la décomposition orthogonale
>
> $$\mathcal{X} = U \oplus U^\perp$$
>
> où $U \subset \mathcal{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}$, et $U^\perp$ son orthogonal dans $\mathcal{X}$
>
> $$U^\perp = \Big\{ y \in \mathcal{X} \mid \forall\, x \in U, \quad \langle y, x \rangle = 0 \Big\}$$
>
> Il est alors connu que
>
> $$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad x = \operatorname{proj}_U(x) + \operatorname{proj}_{U^\perp}(x)$$
>
> avec $\operatorname{proj}_U(x) \in U$ et $\operatorname{proj}_{U^\perp}(x) \in U^\perp$. Cette relation peut se réécrire à l'aide d'opérateurs proximaux et des indicatrices d'ensembles convexes :
>
> $$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad x = \operatorname{prox}_{\chi_U}(x) + \operatorname{prox}_{\chi_{U^\perp}}(x)$$
>
> où on peut remarquer que $\chi_{U^\perp}$ est la conjuguée convexe de χ_U.

Corollaire 5 (Identité de Moreau généralisée)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et s.c.i. et $\tau > 0$. Alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad x = \operatorname{prox}_{\tau J}(x) + \tau\, \operatorname{prox}_{J^*/\tau}\left(\frac{x}{\tau}\right)$$

Démonstration : En utilisant l'identité de Moreau, on en revient à calculer $\operatorname{prox}_{(\tau J)^*}$. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. D'après la proposition 8, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{prox}_{(\tau J)^*}(x^0) &= \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \tau\, J^*\left(\frac{x}{\tau}\right) + \frac{1}{2}\, \|x - x^0\|^2 \right\} \\
&= \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{1}{\tau}\, J^*\left(\frac{x}{\tau}\right) + \frac{1}{2\,\tau^2}\, \|x - x^0\|^2 \right\} \\
&= \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{1}{\tau}\, J^*\left(\frac{x}{\tau}\right) + \frac{1}{2} \left\| \frac{x}{\tau} - \frac{x^0}{\tau} \right\|^2 \right\}
\end{aligned}$$

On effectue alors un changement de variables :

$$\operatorname{prox}_{(\tau J)^*}(x^0) = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{1}{\tau}\, J^*(x) + \frac{1}{2} \left\| x - \frac{x^0}{\tau} \right\|^2 \right\}$$

ce qui achève la preuve. ■

3.2 Forte convexité et régularité

On termine cette section avec une série de résultats qui montre la dualité régularité / forte convexité dans le cas de la transformée de Legendre–Fenchel.

Lemme 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**. Soit $(x, y) \in \mathcal{X}^2$. Alors on a l'équivalence suivante

$$y \in \partial J(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad J^*(y) = \langle y, x \rangle - J(x)$$

Démonstration : Soit $(x, y) \in \mathcal{X}^2$. Réécrivons la définition de la conjuguée convexe comme un problème de minimisation convexe :

$$J^*(y) = \sup_{z \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, z \rangle - J(z) \Big\} = - \inf_{z \in \mathcal{X}} \Big\{ J(z) - \langle y, z \rangle \Big\}$$

Les solutions de ce problème, s'ils existent, sont les points $x \in \mathcal{X}$ caractérisés au premier ordre par la règle de Fermat, qui s'écrit pour ce problème

$$0 \in \partial J(x) - y \qquad \text{soit} \qquad y \in \partial J(x)$$

On en déduit que x est une solution du problème d'optimisation définissant J^*, c'est-à-dire

$$J^*(y) = \langle y, x \rangle - J(x)$$

si et seulement si $y \in \partial J(x)$. ■

Lemme 5

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et continue. Soit $\alpha > 0$. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) J^* est fortement convexe de module α.

(ii) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\,\alpha} \|x\|^2 - J(x)$ est convexe.

Démonstration : Posons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2\,\alpha} \|x\|^2 - J(x) \end{array} \right.$$

- **(i) $\Longrightarrow$ (ii).** Soit $(x, z) \in \mathcal{X}^2$ et $y \in \partial J(x)$ et $p \in \partial J(z)$. La fonction J^* étant supposée fortement convexe, on a

$$J^*(p) \geq J^*(y) + \langle x, p - y \rangle + \frac{\alpha}{2} \|p - y\|^2$$

D'après le 4, on a donc

$$\langle p, z \rangle - J(z) \geq \langle y, x \rangle - J(x) + \langle x, p - y \rangle + \frac{\alpha}{2} \|p - y\|^2$$

soit, après réarrangement des termes et simplification,

$$\frac{1}{2\,\alpha} \|z\|^2 - J(z) \geq \frac{1}{2\,\alpha} \|x\|^2 - J(x) + \Big\langle \frac{x}{\alpha} - y, z - x \Big\rangle + \frac{1}{2\,\alpha} \|x - z + \alpha\,(p - y)\|^2$$

Ainsi, puisque le terme quadratique est positif, on a établi pour tout $x \in \mathcal{X}$ l'existence d'un vecteur $s = x/\alpha - y$ tel que

$$\forall\, z \in \mathcal{X}, \qquad \frac{1}{2\,\alpha} \|z\|^2 - J(z) \geq \frac{1}{2\,\alpha} \|x\|^2 - J(x) + \langle s, z - x \rangle$$

Autrement dit, d'après la proposition 3 du module A2, on en déduit que la fonction f est convexe.

- **(ii) $\Longrightarrow$ (i).** Soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Commençons par noter que, puisque f est convexe, on a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$, en réarrangeant les termes dans l'inégalité de Jensen,

$$-\lambda\, J(x_1) - (1 - \lambda)\, J(x_2) \geq -\frac{\lambda\,(1 - \lambda)}{2\,\alpha} \|x_1 - x_2\|^2 - J\big(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2\big)$$

Soit $(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2$. Par définition de la conjuguée convexe, on a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$

$$\lambda\, J^*(y_1) + (1 - \lambda)\, J^*(y_2) \geq \lambda\, \langle y_1, x_1 \rangle - \lambda\, J(x_1) + (1 - \lambda)\, \langle y_2, x_2 \rangle - (1 - \lambda)\, J^*(y_2)$$

En utilisant ce qui précède, on en déduit que

$$\begin{aligned} \lambda\, J^*(y_1) + (1 - \lambda)\, J^*(y_2) \geq \lambda\, \langle y_1, x_1 \rangle + (1 - \lambda)\, \langle y_2, x_2 \rangle - \frac{\lambda\,(1 - \lambda)}{2\,\alpha} \|x_1 - x_2\|^2 \\ - J\big(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2\big) \end{aligned}$$

On peut vérifier que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$, on a

$$\begin{aligned} &\lambda\, \langle y_1, x_1 \rangle + (1 - \lambda)\, \langle y_2, x_2 \rangle - \frac{\lambda\,(1 - \lambda)}{2\,\alpha} \|x_1 - x_2\|^2 \\ &\qquad = \langle \lambda\, y_1 + (1 - \lambda)\, y_2, \lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 \rangle + \frac{\alpha}{2}\, \lambda\,(1 - \lambda)\, \|y_1 - y_2\|^2 \\ &\qquad\quad - \frac{\lambda\,(1 - \lambda)}{2\,\alpha} \|(x_1 - x_2) - \alpha\,(y_1 - y_2)\|^2 \end{aligned}$$

Posons $v = x_1 - x_2$. On a donc, en injectant l'égalité précédente dans l'inégalité qui précède,

$$\begin{aligned} \lambda\, J^*(y_1) + (1 - \lambda)\, J^*(y_2) \geq \langle \lambda\, y_1 + (1 - \lambda)\, y_2, x_2 + \lambda\, v \rangle - J\big(x_2 + \lambda\, v\big) \\ - \frac{\lambda\,(1 - \lambda)}{2\,\alpha} \|v - \alpha\,(y_1 - y_2)\|^2 + \frac{\alpha}{2}\, \lambda\,(1 - \lambda)\, \|y_1 - y_2\|^2 \end{aligned}$$

Cette minoration est valable pour tout $(x_2, v) \in \mathcal{X}^2$. Aussi, on peut passer à la borne supérieure sur $x_2 \in \mathcal{X}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \lambda\, J^*(y_1) + (1 - \lambda)\, J^*(y_2) \geq J^*\big(\lambda\, y_1 + (1 - \lambda)\, y_2\big) \\ + \frac{\alpha}{2}\, \lambda\,(1 - \lambda)\, \|y_1 - y_2\|^2 - \frac{\lambda\,(1 - \lambda)}{2\,\alpha} \|v - \alpha\,(y_1 - y_2)\|^2 \end{aligned}$$

puis sur $v \in \mathcal{X}$, ce qui donne finalement

$$\lambda\, J^*(y_1) + (1 - \lambda)\, J^*(y_2) \geq J^*\big(\lambda\, y_1 + (1 - \lambda)\, y_2\big) + \frac{\alpha}{2}\, \lambda\,(1 - \lambda)\, \|y_1 - y_2\|^2$$

Autrement dit, on a démontré la forte convexité de module α de J^*. ■

Notons que ce 5 s'écrit également sous la forme suivante : si $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et continue, alors la fonction

$$y \mapsto J^*(y) - \frac{\alpha}{2} \|y\|^2$$

est convexe si et seulement si la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2\,\alpha}\,\|x\|^2 - J(x)$$

est convexe. On peut désormais démontrer le lemme de BAILLON–HADDAD vu dans le module A4 :

Lemme 6 (BAILLON–HADDAD)

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et différentiable. Soit $L > 0$. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) J est L-régulière.

(ii) $\forall\,(x,z) \in \mathcal{X}^2, \qquad \langle \nabla J(x) - \nabla J(z), x - z\rangle \geq \dfrac{1}{L}\,\|\nabla J(x) - \nabla J(z)\|^2$

DÉMONSTRATION : La réciproque a déjà été démontrée. On s'intéresse donc au sens direct. Soit $(x,z) \in \mathcal{X}^2$. Appliquons le lemme de descente (proposition 4 du module A4, qui se démontre de manière indépendante) successivement aux couples (x,z) et (z,x), puis sommons les deux relations obtenues. Il en découle que

$$\langle \nabla J(x) - \nabla J(z), x - z\rangle \leq L\,\|x - z\|^2$$

La règle de bascule assure que

$$x \in \partial(J^*)(\nabla J(x)) \qquad \text{et} \qquad z \in \partial(J^*)(\nabla J(z))$$

Proposition 12

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et L-régulière. Alors J^* est fortement convexe de module $1/L$.

DÉMONSTRATION : Le lemme de BAILLON–HADDAD (lemme 6) assure que

$$\forall\,(x,x') \in \mathcal{X}^2, \qquad \langle \nabla J(x) - \nabla J(x'), x - x'\rangle \geq \frac{1}{L}\,\|\nabla J(x) - \nabla J(x')\|^2$$

On peut alors vérifier que $\mathrm{Id} - (1/L)\,\nabla J$ est lui-même fermement non-expansif, c'est-à-dire que, quels que soit $(x,x') \in \mathcal{X}^2$,

$$\left\langle x - \frac{1}{L}\,\nabla J(x) - x' + \frac{1}{L}\,\nabla J(x'), x - x'\right\rangle \geq \left\| x - \frac{1}{L}\,\nabla J(x) - x' + \frac{1}{L}\,\nabla J(x')\right\|^2$$

(il suffit de développer le membre de droite). Puisque L est strictement positif, on en déduit en divisant par L que

$$\langle L\,x - \nabla J(x) - L\,x' + \nabla J(x'), x - x'\rangle \geq 0$$

Autrement dit, la fonction différentiable $x \mapsto (L/2)\,\|x\|^2 - J(x)$ est convexe. D'après le 5, on en déduit que J^* est fortement convexe de module $(1/L)$. ■

Proposition 13

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Supposons que J est fortement convexe de module α. Alors J^* est $(1/\alpha)$-régulière.

DÉMONSTRATION : On démontre successivement que J^* est différentiable puis que son gradient est lipschitzien.

- J^* **est différentiable.** Soit $p \in \operatorname{dom} J^*$ et $x \in \partial J^*(y)$. La règle de bascule affirme que $p \in \partial J(x)$. Puisque J est fortement convexe, on a

$$\forall\,z \in \mathcal{X}, \qquad J(z) \geq J(x) + \langle p, z - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\,\|x - z\|^2$$

Soit $y \in \mathcal{X}$. On a alors

$$\begin{aligned} J^*(y) &\leq \sup_{z \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, z\rangle - J(z) \Big\} \\ &\leq \sup_{z \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, z\rangle - J(x) - \langle p, z - x\rangle - \frac{\alpha}{2}\,\|x - z\|^2 \Big\} \\ J^*(y) &\leq \langle y, x\rangle - J(x) + \sup_{z \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y - p, z - x\rangle - \frac{\alpha}{2}\,\|x - z\|^2 \Big\} \end{aligned}$$

On peut vérifier que la borne supérieure apparaissant dans la dernière ligne est atteinte ; il s'ensuit que

$$\begin{aligned} J^*(y) &\leq \langle y, x\rangle - J(x) + \frac{1}{2\,\alpha}\,\|y - p\|^2 \\ &\leq \langle p, x\rangle - J(x) + \langle y - p, x\rangle + \frac{1}{2\,\alpha}\,\|y - p\|^2 \\ J^*(y) &\leq J^*(p) + \langle y - p, x\rangle + \frac{1}{2\,\alpha}\,\|y - p\|^2 \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue en appliquant la définition de la conjuguée convexe. On en déduit d'une part que J^* est bien définie en tout point $y \in \mathcal{X}$, puisqu'elle y prend une valeur finie. D'autre part, la convexité de cette dernière assure par ailleurs que

$$J^*(p) + \langle y - p, x\rangle \leq J^*(y)$$

On a ainsi établi que

$$\forall\,y \in \mathcal{X}, \qquad 0 \leq J^*(y) - J^*(p) - \langle y - p, x\rangle \leq \frac{1}{2\,\alpha}\,\|y - p\|^2$$

démontrant ainsi que J^* est différentiable en p, de gradient $\nabla J^*(p) = x$.

- ∇J^* **est lipschitzien.** Soit $(p,q) \in \mathcal{X}^2$. D'après ce qui précède et la règle de bascule, on a

$$p \in \partial J\big(\nabla J^*(p)\big) \qquad \text{et} \qquad y \in \partial J\big(\nabla J^*(y)\big)$$

Posons $x = \nabla J^*(p)$ et $z = \nabla J^*(y)$. Grâce à la forte convexité de J, le corollaire 1 du module A2 écrit pour les couples (x,z) puis (z,x) donne, après sommation de deux inégalités obtenues,

$$\langle p - y, x - z\rangle \geq \alpha\,\|x - z\|^2$$

soit, en remplaçant x et z par leur définition,

$$\|p - y\|\,\|\nabla J^*(p) - \nabla J^*(y)\| \geq \langle p - y, \nabla J^*(p) - \nabla J^*(y)\rangle \geq \alpha\,\|\nabla J^*(p) - \nabla J^*(y)\|^2$$

où le premier membre est obtenu à l'aide de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. On obtient l'inégalité souhaitée en divisant par $\|\nabla J^*(p) - \nabla J^*(y)\|$ lorsque ce terme en non nul. ■

Corollaire 6

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Alors on a l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :

- J est fortement convexe de module $1/L$
- J^* est L-régulière

De même, on a l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :

- J est L-régulière
- J^* est fortement convexe de module $1/L$

On voit donc la forte convexité peut toujours être interprétée comme une forme de régularité, à condition de passer dans le domaine dual.

Démonstration : La preuve de ce résultat est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes, dès lors que l'on a l'identité $J = J^{**}$. ■

Terminons ce module avec la démonstration d'un résultat admis dans le module A5, à savoir la régularité de la régularisation de Moreau–Yosida. On commence par énoncer le lemme suivant :

Lemme 7

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et propre. Soit $\tau > 0$. Alors on a

$$\forall\, y \in \mathcal{X}, \qquad ({}^{\tau}J)^*(y) = J^*(y) + \frac{\tau}{2}\, \|y\|^2$$

En particulier, on en déduit que $({}^{\tau}J)^*$ est une fonction fortement convexe, de module $1/\tau$.

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 10. ■

Proposition 14

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$. Alors ${}^{\tau}J$ est une fonction différentiable. Son gradient est donné par

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \nabla\big({}^{\tau}J\big)(x) = \frac{1}{\tau}\big(x - \mathrm{prox}_{\tau J}(x)\big)$$

Démonstration : Démontrons séparément les deux affirmations.

- **${}^{\tau}J$ est différentiable.** Il s'agit d'une conséquence du lemme 6 et de la proposition **??**, qui assurent que $({}^{\tau}J)^{**}$ est τ-régulière. Or, ${}^{\tau}J$ étant convexe, s.c.i. et propre, on en déduit d'après le théorème de Fenchel–Moreau que $({}^{\tau}J)^{**} = {}^{\tau}J$.
- **Gradient de ${}^{\tau}J$.** On applique l'identité de Moreau généralisée à J, ce qui

donne après réarrangement des termes

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \mathrm{prox}_{J^*/\tau}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\big(x - \mathrm{prox}_{\tau J}(x)\big)$$

Intéressons-nous au membre de gauche. La caractérisation du point proximal assure que

$$p = \mathrm{prox}_{J^*/\tau}\left(\frac{x}{\tau}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - \tau\, p \in \partial(J^*)(p)$$

Par ailleurs, en différentiant l'expression apparaissant dans le lemme 6, on obtient que

$$\forall\, p \in \mathcal{X}, \qquad \partial(({}^{\tau}J)^*)(p) = \partial(J^*)(p) + \tau\, p$$

Ainsi, il en découle que

$$x - \tau\, p \in \partial(J^*)(p) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \partial(({}^{\tau}J)^*)(p)$$

On conclut en utilisant la règle de bascule. ■

Pour aller plus loin

Conjuguée convexe. La conjuguée convexe peut être utilisée pour introduire de la dualité dans un problème d'optimisation. Généralement, il est difficile de calculer la conjuguée convexe d'une fonction objectif. Aussi, on se contente dans la grande majorité des cas d'une partie de la fonction objectif, voire de plusieurs parties (on introduit alors autant de variables duales). Il est à noter que, de la même manière que pour le lagrangien (ou lagrangien augmenté), la fonction de couplage associée est concave en la variable duale (même s'il y en a plusieurs, car elle est alors séparable en ces variables).

Dualité régularité/forte convexité. Puisque la régularité se traduit par la forte convexité dans le domaine dual (et *vice-versa*), il apparaît qu'en utilisant la conjuguée convexe, il est possible de transformer un problème régulier (resp. fortement convexe) en un problème fortement convexe (resp. régulier). Or, certains algorithmes requièrent l'une ou l'autre de ces deux hypothèses, il peut donc être avantageux de considérer le problème primal plutôt que dual (ou l'inverse).