Module B4
Éclatement primal d'opérateurs

Sauf mention contraire, $\mathcal{X}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Pour toutes les autres notations et définitions, le lecteur est invité à se reporter aux modules précédents.

Dans ce module, on s'intéresse au problème de minimisation suivant

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

où $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont des fonctions s.c.i. de domaine non vide, telle que le domaine de $f + g$ soit également non vide. On supposera que ce problème admet au moins une solution.

1 Principe et observations

Les stratégies d'éclatement (*splitting* en anglais) d'opérateurs que nous allons étudier dans ce module visent à exploiter des propriétés *partielles* de la fonction objectif J, c'est-à-dire ne portant que sur f ou g, telles que la régularité (fonction de gradient lipschitizien) ou la simplicité (opérateur proximal évaluable).

Notons J la fonction objectif du problème $(\mathcal{P})$:

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = f(x) + g(x)$$

Il est opportun de signaler que, même si f ou g est différentiable, rien de garantit la différentiabilité de J. Il en est de même pour la régularité (qui est un cas particulier de la différentiabilité), ni de la convexité. De manière analogue, si f ou g est simple, c'est-à-dire si l'opérateur prox_f ou prox_g est calculable, rien ne garantit en revanche que J soit simple (ni même que prox_J soit non vide pour un point donné). Ainsi, on suppose ici que, quels que soient les propriétés des termes f et g, la somme J n'est ni régulière ni simple, de sorte que ni la méthode du gradient explicite (module B2), ni l'algorithme du point proximal (module B3) n'est applicable.

Par ailleurs, on rappelle que la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre (règle de Fermat) assure que les solutions du problème $(\mathcal{P})$ sont des points critiques de J, c'est-à-dire des points x^* pour lequel son sous-différentiel en x^* contient le vecteur nul ; autrement dit, ces points vérifient l'inclusion

$$0 \in \partial(f+g)(x^*)$$

(la réciproque étant vraie si $f+g$ est convexe). On a vu dans le module A2 que le lien entre le sous-différentiel de la somme $f+g$ et les sous-différentiels respectifs de f et g n'est pas simple. En général, on a

$$\partial(f+g)(x) \neq \partial f(x) + \partial g(x)$$

Les cas d'égalité comprennent entre autres le cas où f et g sont convexes propres avec f ou g continue en $x \in \operatorname{dom} J$ et le cas où f (ou g) est continûment différentiable dans un voisinage de $x \in \operatorname{dom} J$.

2 Éclatement explicite-implicite ou *forward-backward splitting*

2.1 Position du problème

On s'intéresse au problème $(\mathcal{P})$ dans le cas où

- $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière, c'est-à-dire qu'elle est différentiable et que son gradient est lipschitzien de constante L ;
- $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction simple, c'est-à-dire qu'il est possible d'évaluer son opérateur proximal prox_g.

Comme rappelé dans la section précédente, lorsque la fonction g n'est pas différentiable, la fonction objectif J résultante ne l'est pas non plus. Aussi, il n'est pas envisageable d'appliquer pour ce problème une méthode de descente de gradient explicite. En général, J n'est pas simple non plus : il n'est donc pas possible d'appliquer l'algorithme du point proximal.

La règle de Fermat s'écrit dans le cas que nous sommes en train de considérer

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial g(x^*) \qquad \text{soit} \qquad x^* \in x^* - \tau\, \nabla f(x^*) - \tau\, \partial g(x^*)$$

pour tout $\tau > 0$; ainsi, si g est **convexe**, alors, en utilisant la caractérisation du point proximal, on obtient

$$x^* = \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^* - \tau\, \nabla f(x^*)\right)$$

de sorte que les points critiques x^* de J peuvent être vus comme des points fixes. Réciproquement, si g est quelconque (non nécessairement convexe), alors de tels points fixes sont des points critiques de J, en vertu de la proposition 11 du module A5.

2.2 Algorithme FBS

L'interprétation des points critiques de J comme des points fixes justifie de considérer les itérations du point fixe suivantes :

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau_k g}\left(x_k - \tau_k\, \nabla f(x_k)\right) \quad \text{avec } \tau_k > 0$$

Cette méthode est connue sous le nom d'*algorithme du gradient explicite-implicite*. On parle également d'éclatement explicite-implicite, ou *forward-backward splitting* (FBS) en anglais.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut interpréter un point x_{k+1} comme étant calculé en appliquant successivement un pas de gradient *explicite* sur f, de pas de temps τ_k :

$$x_{k+1/2} = x_k - \tau_k\, \nabla f(x_k)$$

puis un pas proximal, c'est-à-dire de (sous-)gradient *implicite*, sur g, de même pas de temps :

$$x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau_k g}(x_{k+1/2})$$

d'où le nom de la méthode.

Notons que cette méthode génère des points des points admissibles, car on sait que le point proximal x_{k+1} appartient au domaine de g, qui est égal au domaine de J. Si g est convexe, alors la suite des itérés est définie de manière unique.

Remarque : Si $g = 0$, alors on retrouve les itérations de la méthode du gradient explicite. Si $f = 0$, alors on retrouve les itérations de l'algorithme du point proximal.

En utilisant la définition du point proximal, on peut montrer que

$$x_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{X}} \left\{ g(x) + \frac{1}{2\,\tau}\, \|x - x^0\|^2 + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{\tau}{2}\, \|\nabla f(x^0)\|^2 \right\}$$

L'ajout de termes constants par rapport à x ne modifiant pas les minimiseurs, on a :

$$x_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \tilde{f}_k(x) + g(x) \right\} \qquad \text{avec} \qquad \tilde{f}_k : x \mapsto f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x_k\|^2$$

La fonction $\tilde{f}_k$ est une approximation quadratique de la fonction f autour de x_k ; aussi, le point x_{k+1} peut être vu comme un minimiseur d'une approximation de J autour du point précédent x_k. Il est clair qu'à cause de la présence du terme $g(x)$, cette approximation n'est plus quadratique, ni même différentiable. En revanche, si g est convexe, elle est fortement convexe (de module $1/\tau$).

> Une autre manière d'interpréter ces itérations est de les réécrire de la manière suivante :
>
> $$x_{k+1} = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} \left\{ f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x) + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x_k\|^2 \right\}$$
>
> c'est-à-dire comme un pas de l'algorithme du point proximal pour la fonction
>
> $$x \mapsto f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x)$$
>
> qui est une autre approximation de la fonction J autour de x_k, obtenue en linéarisant la partie différentiable de la fonction objectif J.

Établissons dès à présent quelques résultats sur l'approximation $\tilde{J}_k = \tilde{f}_k + g$.

Proposition 1 (Lien entre le minimum de J et de $\tilde{J}_k$)

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. minorée de domaine non vide. On suppose que $J = f + g$ admet un minimiseur. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On définit

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau\,\nabla f(x^0)\right)$$

et on pose

$$\tilde{J} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2 + g(x) \end{array} \right.$$

Si $\tau \in \,]\,0\,;1/L\,]$, alors on a

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \tilde{J}(x) \geq J(x) \qquad \text{et} \qquad \min_{x\in\mathcal{X}} \tilde{J}(x) \geq \min_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

Démonstration : Soit x^* un minimiseur de J. On rappelle que, par définition, x^+ est un minimiseur de $\tilde{J}$.

- **Démontrons que** $\tilde{J}(x) \geq J(x)$**.** Si $\tau \in \,]\,0\,;1/L\,]$, alors $L \leq 1/\tau$ et donc f est τ-régulière. Aussi, le lemme de descente (proposition 5 du module A4) assure que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f(x) \leq f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2$$

Il suffit d'ajouter $g(x)$ à cette inégalité pour obtenir le résultat annoncé.

- **Démontrons que** $\tilde{J}(x^+) \geq J(x^*)$**.** En effet, on a

$$\tilde{J}(x^+) - J(x^*) = \tilde{J}(x^+) - J(x^+) + J(x^+) - J(x^*) \geq \tilde{J}(x^+) - J(x^+)$$

par optimalité de x^*. On utilise alors le point précédent pour conclure. ■

Si g est supposée convexe, alors on a de plus la minoration suivante :

Proposition 2

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe** minorée, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On définit

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau\,\nabla f(x^0)\right)$$

et on pose pour $\tau > 0$

$$\tilde{J} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2 + g(x) \end{array} \right.$$

Alors on a $\qquad \forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \tilde{J}(x) - \tilde{J}(x^+) \geq \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^+\|^2$

Démonstration : En effet, par définition de $\tilde{J}$, on a (après simplification)

$$\tilde{J}(x) - \tilde{J}(x^+) = g(x) - g(x^+) + \frac{1}{\tau} \langle x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0), x - x^+ \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^+\|^2$$

Or, en appliquant la règle de Fermat à la définition de x^+, il s'ensuit que

$$-\frac{1}{\tau}\,(x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0)) \in \partial g(x^+)$$

La convexité de g entraîne alors que

$$g(x) \geq g(x^+) - \frac{1}{\tau} \langle x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0), x - x^+ \rangle$$

et la conclusion suit. ■

Si f est supposée convexe, alors on a une autre majoration :

Proposition 3

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction **convexe** L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction minorée, s.c.i. et de domaine non vide. On suppose que $J = f + g$ admet un minimiseur. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On définit

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau\,\nabla f(x^0)\right)$$

et on pose pour $\tau > 0$

$$\tilde{J} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2 + g(x) \end{array} \right.$$

Alors on a $\qquad \forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \tilde{J}(x) - J(x) \leq \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2$

Démonstration : En effet, on a

$$\tilde{J}(x) - J(x) = -f(x) + f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2\,\tau} \|x - x^0\|^2$$

La majoration découle de la convexité de f. ■

On utilisera ces trois résultats dans la section suivante pour démontrer la convergence des itérées dans le cas convexe.

2.3 Propriétés de convergence

Intéressons-nous aux propriétés des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ générées par l'algorithme FBS.

Commençons par établir que, si les pas de temps τ_k sont correctement choisis, alors ce schéma est un schéma de descente. Pour le démontrer, prouvons le lemme suivant :

Lemme 1 (Lemme de descente)

Soit $J = f+g$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction s.c.i. minorée de domaine non vide. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $\tau > 0$. On définit le point suivant :

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x^0 - \tau\, f(x^0)\right)$$

Alors $$J(x^0) \geq J(x^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right)\|x^+ - x^0\|^2 \geq J(x^+)$$

Par ailleurs, si g est **convexe**, alors on a

$$J(x^0) \geq J(x^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau} - L\right)\|x^+ - x^0\|^2 \geq J(x^+)$$

Notons que l'on peut résumer ce résultat par l'inégalité suivante :

$$J(x^0) \geq J(x^+) + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\tau} - L\right)\|x^+ - x^0\|^2 \geq J(x^+)$$

où Q vaut 2 si g est convexe, et 1 sinon.

Démonstration : Considérons séparément les cas où g est convexe ou non.

- g **n'est pas convexe.** Commençons par noter que, par optimalité, on a
$$g(x^+) + \frac{1}{2\,\tau}\|x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0)\|^2 \leq g(x^0) + \frac{1}{2\,\tau}\|\tau\,\nabla f(x^0)\|^2$$
Par ailleurs, la proposition 4 du module A4 assure que
$$f(x^+) \leq f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x^+ - x^0\rangle + \frac{L}{2}\|x^+ - x^0\|^2$$
En sommant les deux inégalités et en réarrangeant les termes, on en déduit le résultat souhaité.
- g **est convexe.** Dans ce cas, on peut caractériser le point proximal de manière plus optimale à l'aide de l'inégalité proximale (proposition 8 du module A5) :
$$g(x^0) \geq g(x^+) - \frac{1}{\tau}\langle x^0 - x^+, x^+ - x^0 + \tau\,\nabla f(x^0)\rangle$$
qu'il suffit de combiner à nouveau avec l'inégalité obtenue avec la proposition 4 du module A4. ■

On en déduit un premier résultat de convergence :

Corollaire 1 (Convergence du critère)

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction s.c.i. minorée de domaine non vide. On suppose que $J = f + g$ est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau_k g}\left(x_k - \tau_k\,\nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. Si $\tau_k \in \,]\,0\,; Q/L\,[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers une valeur J^*. De plus, on a

$$J(x_{k+1}) \leq J(x_k) - \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\tau_k} - L\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence directe du lemme de descente, qui assure que, puisque la quantité $Q/\tau_k - L$ est strictement positive, la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La convergence découle du fait que cette suite soit minorée par la borne inférieure de J. ■

Un corollaire immédiat de ce premier résultat dans le cas des pas de temps constants est le suivant :

Corollaire 2

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction s.c.i. minorée de domaine non vide. On suppose que $J = f + g$ est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau\,\nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. Si $\tau \in \,]\,0\,; Q/L\,[$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0$$

Démonstration : Il suffit de sommer les inégalités du corollaire 1 pour k entre 0 et $K-1$; après télescopage des termes, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\tau} - L\right)\sum_{k=0}^{K-1}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_K) \leq J(x_0) - \inf J$$

Il s'ensuit que la série de terme général $\|x_{k+1} - x_k\|^2$ est absolument convergente, donc la suite des $\|x_{k+1} - x_k\|$ converge vers 0. ■

Intéressons-nous à présent à la convergence vers le critère d'optimalité. Puisque f est continûment différentiable, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\partial J(x_{k+1}) = \nabla f(x_{k+1}) + \partial g(x_{k+1})$$

Par ailleurs, la règle de FERMAT appliquée à la définition de l'opérateur proximal assure que (proposition 6 du module A5)

$$x_k - \tau_k \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \tau_k \partial g(x_{k+1})$$

Combinons ces deux relations. Il s'ensuit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{x_k - x_{k+1}}{\tau_k} + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \in \partial J(x_{k+1})$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 4 (Convergence des sous-gradients)

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. minorée de domaine non vide. On suppose que $J = f + g$ est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau \nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. On définit également

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad p_{k+1} = \frac{x_k - x_{k+1}}{\tau} + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \in \partial J(x_{k+1})$$

Si $\tau \in]\,0\,; Q/L\,[$, alors la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Par ailleurs, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \|p_{k+1}\| \leq \left(\frac{1}{\tau} + L\right) \|x_{k+1} - x_k\|$$

DÉMONSTRATION : La majoration des $\|p_k\|$ est obtenue grâce à l'inégalité triangulaire et à la régularité de f. La convergence vers 0 est alors une conséquence du lemme 2. ■

Si la fonction J est continue sur son domaine et que la suite des itérés admet au moins un point d'accumulation, alors on peut montrer que la suite des $J(x_k)$ converge vers la valeur d'un point critique de J et que tout point de l'adhérence de la suite des x_k est un point critique de J :

Proposition 5

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction minorée de domaine non vide et continue sur son domaine. On suppose que $J = f + g$ est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau \nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. On suppose qu'il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x^* \in \operatorname{dom} J$. Si $\tau \in]\,0\,; Q/L\,[$, alors x^* est un point critique de J et

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = J(x^*)$$

DÉMONSTRATION : On démontre séparément les deux affirmations.

- x^* **est un point critique.** Il s'agit d'une conséquence de la fermeture du sous-différentiel et de la proposition 1.
- $J^* = J(x^*)$**.** Cette égalité découle de la continuité de J en x^* et de la convergence de la suite des $J(x_k)$. ■

L'hypothèse selon laquelle la suite des itérés est d'adhérence non vide (et possède donc au moins un point d'accumulation) est vérifiée dès que la fonction J est coercive (en particulier, de domaine borné). Par ailleurs, la condition $x^* \in \operatorname{dom} J$ est satisfaite si le domaine de J (et donc celui de g) est fermé.

Pour obtenir une convergence des itérés, on peut démontrer le résultat suivant, qui est une stricte application du théorème d'ATTOUCH–BOLTE–SVAITER (module A3) :

Proposition 6 (Convergence des itérés I)

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction minorée de domaine fermé non vide et continue sur son domaine. On suppose que $J = f + g$ est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau \nabla f(x_k)\right)$$

On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon. On suppose qu'il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x^* \in \operatorname{dom} J$ et que J satisfait la propriété KŁ en x^*. Si $\tau \in]\,0\,; Q/L\,[$, alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.

DÉMONSTRATION : La condition de décroissance a été démontrée dans le corollaire 1, la condition d'erreur relative dans la proposition 1 et la condition de continuité est une conséquence des hypothèses. ■

Dans le cas où f et g (donc J) sont convexes, on peut s'affranchir de l'hypothèse KŁ.

Proposition 7 (Convergence des itérés II)

Soit $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction **convexe** L-régulière et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe** minorée de domaine fermé non vide et continue sur son domaine. On suppose que $J = f + g$ est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme suivant

$$x_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau g}\left(x_k - \tau \nabla f(x_k)\right)$$

Si $\tau \in]\,0\,; 1/L\,]$, alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un minimiseur de J.

DÉMONSTRATION : Soit x^* un minimiseur de J. Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $\tilde{J}_k = \tilde{f}_k + g$.

- **La suite** $(\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ **converge.** D'après la proposition 3, on a

$$\begin{aligned}\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}) &= J(x^*) + \tilde{J}_k(x^*) - J(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}) \\ &\leq J(x^*) + \frac{1}{2\,\tau}\|x^* - x_{k+1}\|^2 - \tilde{J}_k(x_{k+1})\end{aligned}$$

On peut alors appliquer la proposition 2, et obtenir

$$\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1}) \leq J(x^*) + \tilde{J}_{k-1}(x^*) - \tilde{J}_{k-1}(x_k) - \tilde{J}_k(x_{k+1})$$

Il s'ensuit que, d'après la proposition 1,

$$\big(\tilde{J}_{k-1}(x^*) - \tilde{J}_{k-1}(x_k)\big) - \big(\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1})\big) \geq \tilde{J}_k(x_{k+1}) - J(x^*) \geq 0$$

de sorte que la suite des $\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1})$ est décroissante. Par optimalité de x_{k+1}, elle est également minorée par 0. Aussi, elle est convergente.

- **La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.** Puisque, d'après les propositions 1 et 2, on a

$$\tilde{J}_k(x_{k+1}) - J(x^*) = \tilde{J}_k(x_{k+1}) - \tilde{J}_k(x^*) + \tilde{J}_k(x^*) - J(x^*) \geq \frac{1}{\tau}\,\|x^* - x_{k+1}\|^2$$

le calcul précédent assure en réalité que

$$\big(\tilde{J}_{k-1}(x^*) - \tilde{J}_{k-1}(x_k)\big) - \big(\tilde{J}_k(x^*) - \tilde{J}_k(x_{k+1})\big) \geq \frac{1}{\tau}\,\|x^* - x_{k+1}\|^2$$

En sommant pour k entre 1 et K, il s'ensuit que

$$\tilde{J}_0(x^*) - \tilde{J}_0(x_1) \geq \big(\tilde{J}_0(x^*) - \tilde{J}_0(x_1)\big) - \big(\tilde{J}_K(x^*) - \tilde{J}_K(x_{K+1})\big) \geq \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{K}\|x^* - x_{k+1}\|^2$$

La série de terme général $\|x^* - x_{k+1}\|^2$ converge donc absolument. Par conséquence, la suite $\|x^* - x_{k+1}\|$ converge vers 0. ■

2.4 Exemple d'applications

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser à deux applications génériques de l'algorithme FBS, à savoir l'algorithme du gradient projeté et l'algorithme ISTA.

Une première application célèbre de l'éclatement explicite-implicite est l'application de l'algorithme de descente explicite-implicite au problème d'optimisation convexe lisse sous contraintes suivant :

$$\min_{x\in\mathcal{C}} f(x) \qquad (\mathcal{P}_{\text{grad. proj.}})$$

avec f une fonction L-régulière et $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble **convexe**, fermé et non vide, qui peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation non contraint en introduisant l'indicatrice de $\mathcal{C}$:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \Big\{f(x) + \chi_{\mathcal{C}}(x)\Big\}$$

Si la projection sur $\mathcal{C}$ est calculable pour tout point $x \in \mathcal{X}$, alors les itérées FBS s'écrivent

$$x_0 \in \mathcal{X}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}}\big(x_k - \tau_k\,\nabla f(x_k)\big) \qquad \text{avec } \tau_k > 0$$

Autrement dit, le point x_{k+1} s'obtient en appliquant un pas de descente de gradient explicite sur f en x_k ; si le point obtenu n'est pas admissible, alors il est projeté sur l'ensemble admissible. Il n'est pas évident qu'un tel schéma puisse être un schéma de descente ; pourtant, la proposition 7 assure que si f est **convexe** et que $\tau_k \leq 1/L$, alors c'est bien le cas.

Lorsque la fonction f est fortement convexe, et que l'ensemble $\mathcal{C}$ est convexe, alors la somme $f + \chi_{\mathcal{C}}$ est fortement convexe. Dans ce cas, on peut démontrer un autre résultat de convergence :

Proposition 8

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière et fortement convexe de module $\alpha > 0$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe, fermé et non vide. Si $0 < \tau < 2\,\alpha/L^2$, alors l'algorithme du gradient projeté converge linéairement vers une solution x^* du problème $(\mathcal{P}_{\text{grad. proj.}})$: il existe $\beta \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k - x^*\| \leq \beta^k\,\|x_0 - x^*\|$$

Démonstration : Commençons par noter que l'inégalité d'Euler assure que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \langle \nabla f(x), x^* - x\rangle \geq 0$$

En multipliant cette inégalité par $\tau > 0$ et en écrivant que $0 = x - x$, on obtient

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \langle x^* - (x^* - \tau\,\nabla f(x^*)), x - x^*\rangle \geq 0$$

La caractérisation de la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$ assure que

$$x^* = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}}(x^* - \tau\,\nabla f(x^*))$$

Autrement dit, $x^* \in \mathcal{C}$ un point fixe de l'algorithme. On rappelle que la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$ est une application lipschitzienne de constante de Lipschitz 1. Aussi, on a

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| &\leq \big\|\big(x_k - \tau\,\nabla f(x_k)\big) - \big(x_{k-1} - \tau\,\nabla f(x_{k-1})\big)\big\| \\ &\leq \big\|x_k - x_{k-1} - \tau\,\big(\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})\big)\big\|\end{aligned}$$

de sorte que, en élevant au carré, puis en utilisant la régularité de f après avoir développé le carré de droite, on obtient

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq (1 + \tau^2\,L^2)\,\|x_{k-1} - x^*\|^2 - 2\,\tau\,\big\langle x_{k-1} - x^*, \nabla f(x_{k-1}) - \nabla f(x^*)\big\rangle$$

Par ailleurs, la forte convexité de f assure que

$$\big\langle x_{k-1} - x^*, \nabla f(x_{k-1}) - \nabla f(x^*)\big\rangle \geq \alpha\,\|x_{k-1} - x^*\|^2$$

Par conséquent, on obtient la majoration suivante

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq (1 + \tau^2\,L^2 - 2\,\alpha\,\tau)\,\|x_{k-1} - x^*\|^2$$

la quantité $1 + \tau^2\,L^2 - 2\,\alpha\,\tau$ étant strictement comprise entre 0 et 1 si $\tau \in \,]\,0\,;2\,\alpha/L^2\,[$ (il suffit d'étudier les variations de la fonction convexe $\tau \mapsto 1 + \tau^2\,L^2 - 2\,\alpha\,\tau$, en notant que $\alpha \leq L$). En appliquant récursivement la formule obtenue, on démontre le résultat voulu. ■

Une autre application intéressante est l'algorithme ISTA (pour *Iterative shrinkage-thresholding algorithm*) proposé par Teboulle *et al.* pour résoudre le problème suivant :

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \Big\{f(x) + \|x\|_1\Big\} \qquad (\mathcal{P}_{\text{ISTA}})$$

avec f une fonction L-régulière. On rappelle que, si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ et que $x = (x_{(i)})_{1\leq i\leq n}$, alors la norme ℓ_1 est définie de manière séparable par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_{(i)}|$$

Ainsi, les itérations de l'algorithme FBS s'écrivent pour ce problème

$$x_0 \in \mathcal{X}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \mathrm{prox}_{\|\cdot\|_1}\left(x_k - \tau_k \nabla f(x_k)\right) \qquad \text{avec } \tau_k > 0$$

Explicitons l'expression de ces itérations. Il est aisé de vérifier que, grâce à la nature séparable de la norme ℓ_1, si on pose $x_{k+1} = \left((x_{k+1})_{(i)}\right)_{1\leq i\leq n}$, alors

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!], \quad (x_{k+1})_{(i)} = \mathrm{prox}_{|\cdot|}\left((x_k)_{(i)} - \tau_k \frac{\partial f}{\partial x_{(i)}}(x_k)\right)$$

Il s'ensuit que (d'après un exemple de la section 1.2 du module A5), on a

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!], \quad (x_{k+1})_{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } |(x_{k+1/2})_{(i)}| \leq 1 \\ \dfrac{(x_{k+1/2})_{(i)}}{|(x_{k+1/2})_{(i)}|}\left(|(x_{k+1/2})_{(i)}| - 1\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $$(x_{k+1/2})_{(i)} = (x_k)_{(i)} - \tau_k \frac{\partial f}{\partial x_{(i)}}(x_k)$$

Autrement dit, l'algorithme consiste en premier lieu à calculer un pas de descente de gradient explicite sur f, puis à effectuer un seuillage doux sur chaque composante du point obtenu.

3 Éclatement de Douglas–Rachford

3.1 Position du problème

Dans cette section, on relâche l'hypothèse de régularité sur le terme f de la fonction objectif. On considère donc maintenant un problème d'optimisation de la forme $(\mathcal{P})$ avec $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes** simples, telles que qu'il existe un point $x^* \in \mathcal{X}$ vérifiant

$$0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)$$

Notons que, si f ou g est continue en x^*, alors cette condition équivaut à

$$0 \in \partial J(x^*)$$

Autrement dit, si f ou g est continue en x^*, par convexité, on en revient à supposer l'existence d'un minimiseur.

Sous les hypothèses formulées dans cette section, la méthode présentée dans la section précédente n'est, en général, pas applicable. Cependant, puisqu'il existe des fonctions à la fois simple et régulière, il peut être plus intéressant d'appliquer l'une ou l'autre de deux méthodes suivant les situations.

> Une manière plus simple de minimiser la somme de deux fonctions f et g convexes et simples serait d'appliquer l'algorithme implicite-implicite dans lequel les itérées sont définies par
>
> $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = \mathrm{prox}_{\tau f}\left(\mathrm{prox}_{\tau g}(x_k)\right)$$
>
> Cependant, les propriétés de convergence de ce schéma sont moins intéressantes que celle de l'algorithme que nous étudions ici.

3.2 Algorithme DRS

Avant de présenter l'algorithme de Douglas–Rachford, commençons par faire l'observation suivante : on a vu que les solutions x^* du problème $(\mathcal{P})$ sont caractérisées au premier ordre par l'inclusion

$$0 \in \partial(f+g)(x^*) \qquad \text{soit} \qquad x^* \in x^* - \tau\,\partial(f+g)(x^*)$$

quel que soit $\tau > 0$, de sorte que les solutions de $(\mathcal{P})$ sont en réalité les points fixes de $\mathrm{prox}_{\tau(f+g)}$. Cette caractérisation n'est pas très exploitable, dans la mesure où la somme $f+g$ n'est pas simple en général.

Pour contourner ce problème, il faut introduire de l'éclatement, c'est-à-dire ici donner une caractérisation des solutions x^* d'une manière qui découple les deux termes f et g. Pour ce faire, on remarque que, g étant supposée convexe, s.c.i. et propre, on peut la représenter par l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions :

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad g(x) = \sup_{y\in\mathcal{X}} \left\{\langle y, x\rangle - g^*(y)\right\}$$

où g^* est la conjuguée convexe de g. Définissons la fonction de couplage

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(x;y) = f(x) + \langle y, x\rangle - g^*(y)$$

Commençons par remarquer que le problème dual consiste en la minimisation de la fonction qui à tout $y \in \mathcal{Y}$ associe

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x;y) = -\sup_{x\in\mathcal{X}}\left\{\langle y, x\rangle - f(x)\right\} - g^*(y) = -f^*(y) - g^*(y)$$

Soit $y^* \in \partial g(x^*)$ tel que $-y^* \in \partial f(x^*)$ (son existence est assurée par l'hypothèse faite au début de ce paragraphe). Alors, la règle de bascule assure que $x^* \in \partial g^*(y^*) \cap \partial f^*(-y^*)$, si bien que

$$g(x^*) = \langle y^*, x^*\rangle - g^*(y^*) \qquad \text{et} \qquad f(x^*) = -\langle y^*, x^*\rangle - f^*(-y^*)$$

car y^* (resp. $-y^*$) est un point critique de la fonction concave $y \mapsto \langle y, x^*\rangle - g^*(y)$ (resp. $y \mapsto \langle y, x^*\rangle - f^*(y)$), donc un maximiseur (global). On en déduit que

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) + g(x) = f(x^*) + g(x^*) = f(x^*) + \langle y^*, x^*\rangle - g^*(y^*)$$

Ainsi, par dualité faible et par définition de la borne supérieure,

$$f(x^*) + \langle y^*, x^*\rangle - g^*(y^*) \geq \sup_{y\in\mathcal{Y}} -f^*(y) - g^*(y) \geq g(x^*) - \langle y^*, x^*\rangle - f^*(y^*)$$

Or, les calculs précédents prouvent que les deux membres extrêmes de cet encadrement sont égaux ; on en déduit de la sorte que le problème dual admet comme solution le vecteur y^* et que le saut de dualité est nul. Aussi, le problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{DR}})$ est équivalent au problème de recherche de point selle

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x) + \langle y, x\rangle - g^*(y)$$

Plus précisément, tout couple $(x^*, y^*) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ est un point-selle de la fonction de couplage $\mathcal{L}$ si et seulement si x^* (resp. y^*) est un minimiseur de $f+g$ (resp. un maximiseur de $-f^* - g^*$). Ces points-selles sont caractérisés au premier ordre par les deux inclusions

$$-y^* \in \partial f(x^*) \qquad \text{et} \qquad x^* \in \partial g^*(y^*)$$

Soit $\tau > 0$. On a alors en particulier que

$$x^* \in x^* - \tau\, y^* - \tau\, \partial f(x^*) \qquad \text{et} \qquad y^* \in y^* + \frac{x^*}{\tau} - \frac{1}{\tau}\, \partial g^*(y^*)$$

ce qui implique que

$$x^* = \operatorname{prox}_{\tau f}(x^* - \tau\, y^*) \qquad \text{et} \qquad y^* = \operatorname{prox}_{g^*/\tau}\left(y^* + \frac{x^*}{\tau}\right)$$

l'identité généralisée de Moreau (corollaire 5 du module A8) assurant que

$$y^* = y^* - \frac{x^*}{\tau} + \frac{1}{\tau}\, \operatorname{prox}_{\tau g}\,(\tau\, y^* + x^*) = y^* + \frac{1}{\tau}\,\Big(\operatorname{prox}_{\tau g}\,(\tau\, y^* + x^*) - x^*\Big)$$

Posons $p^* = x^* - \tau\, y^*$. On en déduit donc que x^* est solution du problème $(\mathcal{P})$ si et seulement s'il existe un vecteur $p^* \in \mathcal{X}$ tel que le système suivant soit vérifié

$$\begin{cases} x^* = \operatorname{prox}_{\tau f}(p^*) \\ p^* = p^* + \mu\, \big(\operatorname{prox}_{\tau g}(2\, x^* - p^*) - x^*\big) \end{cases}$$

quel que soit $\mu > 0$. Ainsi, c'est le couple (x^*, p^*) qui peut être vu comme un point fixe.

L'algorithme de Douglas–Rachford cherche donc à trouver un point fixe (x^*, p^*) à l'aide des itérations du point fixe suivantes :

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k) \\ p_{k+1} = p_k + \mu\, \big(\operatorname{prox}_{\tau g}(2\, x_{k+1} - p_k) - x_{k+1}\big) \end{cases}$$

avec $\mu, \tau > 0$. On peut réécrire la seconde mise-à-jour en introduisant une variable supplémentaire :

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} &= \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k) \\ p_{k+1/2} &= \operatorname{prox}_{\tau g}(2\, x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} &= p_k + \mu\, \big(p_{k+1/2} - x_{k+1}\big) \end{cases}$$

avec $\mu \in \,]\,0\,;2\,[$.

> Dans la littérature, l'algorithme de Douglas–Rachford désigne souvent uniquement le cas particulier où le paramètre μ vaut 1 ; dans le cas général, on parle plutôt de l'algorithme de Peaceman–Rachford (PRS).

3.3 Propriétés de convergence

Notons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{k+1} = p_{k+1/2} - \frac{1}{\mu}\,(p_{k+1} - p_k)$$

Par ailleurs, on a

$$p_{k+1} = p_k + \mu\,\big(\operatorname{prox}_{\tau g}(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k) - p_k) - \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k)\big)$$

Posons $\quad \forall\, p \in \mathcal{X}, \qquad T(p) = 2\, \operatorname{prox}_{\tau g}\,\big(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p) - p\big) - \big(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p) - p\big)$

et définissons $\qquad T_\lambda = (1 - \lambda)\, \mathrm{Id} + \lambda\, T$

On a alors

$$p_{k+1} = p_k + \frac{\mu}{2}\,(T(p_k) - p_k) = \left(\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\, \mathrm{Id} + \frac{\mu}{2}\, T\right)(p_k) = T_{\mu/2}(p_k)$$

Commençons par nous intéresser au comportement de la suite des p_k.

Proposition 9 (Point fixe de T)

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. Soit $\tau > 0$. On définit

$$T : p \mapsto 2\, \operatorname{prox}_{\tau g}\,\big(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p) - p\big) - \big(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p) - p\big)$$

Soit $x^* \in \mathcal{X}$. Alors on a l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :

(i) il existe $p^* \in \mathcal{X}$ tel que

$$p^* = T(p^*) \qquad \text{et} \qquad x^* = \operatorname{prox}_{\tau f}(p^*)$$

(ii) $0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)$.

Démonstration : Démontrons séparément les deux sens de l'équivalence.

- **Sens direct.** Par définition de T, on a

$$p^* = T(p^*) \qquad \iff \qquad \operatorname{prox}_{\tau g}\,\big(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p^*) - p^*\big) = \operatorname{prox}_{\tau f}(p^*)$$

  La caractérisation du point proximal assure alors que

$$p^* = T(p^*) \qquad \iff \qquad \frac{1}{\tau}\,\big(\operatorname{prox}_{\tau f}(p^*) - p^*\big) \in \partial g\,\big(\operatorname{prox}_{\tau f}(p^*)\big)$$

  Par ailleurs, la convexité de f permet d'écrire que

$$-\frac{1}{\tau}\,\big(\operatorname{prox}_{\tau f}(p^*) - p^*\big) \in \partial f\,\big(\operatorname{prox}_{\tau f}(p^*)\big)$$

  Il s'ensuit que

$$p^* = T(p^*) \qquad \iff \qquad 0 \in \partial f\,\big(\operatorname{prox}_{\tau f}(p^*)\big) + \partial g\,\big(\operatorname{prox}_{\tau f}(p^*)\big)$$

- **Réciproque.** Puisque les relations établies dans le sens direct sont équivalentes, il suffit de montrer l'existence d'un point p^* tel que $x^* = \operatorname{prox}_{\tau f}(p^*)$. On peut vérifier que, pour tout $p \in \partial f(x^*)$, le point

$$x^* = p^* + \tau\, p$$

  convient, en utilisant la caractérisation du point proximal. ■

Montrons que les opérateurs T et T_λ ont même points fixes.

Proposition 10 (Point fixe de T_λ)

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. Soit $\tau > 0$. On définit

$$T : p \mapsto 2\, \operatorname{prox}_{\tau g}\,\big(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p) - p\big) - \big(2\, \operatorname{prox}_{\tau f}(p) - p\big)$$

Soit $\lambda \in \,]\,0\,;1\,[$. On pose $\qquad T_\lambda = (1 - \lambda)\, \mathrm{Id} + \lambda\, T$

Alors T et T_λ ont mêmes points fixes.

Démonstration : Soit $p^* \in \mathcal{X}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} T_\lambda(p^*) = p^* & \iff & (1-\lambda)\,p^* + \lambda\,T(p^*) = p^* \\ & \iff & -\lambda\,p^* + \lambda\,T(p^*) \\ T_\lambda(p^*) = p^* & \iff & p^* = T(p^*) \end{array}$$

ce qui démontre le résultat souhaité. ■

Les deux propositions précédentes justifient que l'on s'intéresse à trouver les points fixes de $T_{\mu/2}$. On peut montrer que cet opérateur est 1-lipschitzien. On commence par démontrer un premier lemme :

Lemme 2

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction **convexe**, s.c.i. et propre. On définit

$$R_f = 2\,\mathrm{prox}_f - \mathrm{Id}$$

Alors R_f est 1-lipschitzien.

Démonstration : On rappelle que l'opérateur proximal est fermement non expansif (proposition 7 du module A5), c'est-à-dire qu'il vérifie

$$\forall\,(x,z) \in \mathcal{X}^2, \qquad \langle \mathrm{prox}_f(x) - \mathrm{prox}_f(z), x - z\rangle \geq \|\,\mathrm{prox}_f(x) - \mathrm{prox}_f(z)\|^2$$

Soit $(X,Y) \in \mathcal{X}^2$. Il est aisé de vérifier que

$$\|X\|^2 - \|2\,Y - X\|^2 = 2\left(\|X\|^2 - \|X - Y\|^2 - \|Y\|^2\right)$$

Soit $(x,z) \in \mathcal{X}^2$. On a donc

$$\|R_f(x) - R_f(z)\|^2 = \|2\,(\mathrm{prox}_f(x) - \mathrm{prox}_f(z)) - (x - z)\|^2$$

On pose $X = x - z$ et $Y = \mathrm{prox}_f(x) - \mathrm{prox}_f(z)$. La ferme non-expansivité de prox_f s'écrit donc

$$\langle Y, X\rangle \geq \|Y\|^2 \qquad \text{soit} \qquad -\|Y\|^2 \geq \|Y\|^2 - 2\,\langle Y, X\rangle$$

En ajoutant $\|X\|^2 - \|X - Y\|^2$ dans cette inégalité, puis en développant $\|X - Y\|^2$, on obtient

$$\|X\|^2 - \|X - Y\|^2 - \|Y\|^2 \geq \|X\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2 + 2\,\langle Y, X\rangle + \|Y\|^2 - 2\,\langle Y, X\rangle = 0$$

Autrement dit, $\|X\|^2 - \|2\,Y - X\|^2 \geq 0$, ce qui, en remplaçant X et Y par leur définition respective, assure le caractère 1-lipschitzien de R_f. ■

> La même démonstration permet de prouver que ce résultat reste vrai si on remplace prox_f par n'importe quel opérateur fermement non-expansif.

Par composition, puisque $T = R_{\tau g} \circ R_{\tau f}$, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. Soit $\tau > 0$. On définit

$$T : p \mapsto 2\,\mathrm{prox}_{\tau g}\left(2\,\mathrm{prox}_{\tau f}(p) - p\right) - \left(2\,\mathrm{prox}_{\tau f}(p) - p\right)$$

Alors T est 1-lipschitzien.

Proposition 11

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. Soit $\tau > 0$. On définit

$$T : p \mapsto 2\,\mathrm{prox}_{\tau g}\left(2\,\mathrm{prox}_{\tau f}(p) - p\right) - \left(2\,\mathrm{prox}_{\tau f}(p) - p\right)$$

Soit $\lambda \in \,]\,0\,;1\,[$. On pose $\qquad T_\lambda = (1-\lambda)\,\mathrm{Id} + \lambda\,T$

Alors T_λ est 1-lipschitzien. Par ailleurs, si $\lambda = 1/2$, alors T_λ est fermement non-expansif, c'est-à-dire que

$$\forall\,(p,q) \in \mathcal{X}^2, \qquad \|T_\lambda(p) - T_\lambda(q)\|^2 \leq \langle T_\lambda(p) - T_\lambda(q), p - q\rangle$$

Démonstration : Démontrons séparément les deux affirmations.

- T_λ **est 1-lipschitzien.** D'après le corollaire 3, on a pour tout $(p,q) \in \mathcal{X}^2$

$$\|T_\lambda(p) - T_\lambda(q)\| \leq (1-\lambda)\,\|p-q\| + \lambda\,\|T(p) - T(q)\| \leq (1-\lambda)\,\|p-q\| + \lambda\,\|p-q\|$$

- $T_{1/2}$ **est est fermement non-expansif.** On commence par établir une relation plus générale, appelée relation de Fejér :

$$\forall\,(p,q) \in \mathcal{X}^2, \quad \|T_\lambda(p) - T_\lambda(q)\|^2 \leq \|p-q\|^2 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\,\|(\mathrm{Id} - T_\lambda)(p) - (\mathrm{Id} - T_\lambda)(q)\|^2$$

Commençons par noter que

$$\forall\,p \in \mathcal{X}, \qquad (\mathrm{Id} - T_\lambda)(p) = \lambda\,(\mathrm{Id} - T)(p)$$

Soit $(p,q) \in \mathcal{X}^2$. Par définition de T_λ, on a

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(p) - T_\lambda(q)\|^2 &= \|p - q - (\mathrm{Id} - T_\lambda)(p) + (\mathrm{Id} - T_\lambda)(q)\|^2 \\ &= \|p - q\|^2 - 2\,\langle p - q, (\mathrm{Id} - T_\lambda)(p) - (\mathrm{Id} - T_\lambda)(q)\rangle \\ &\quad + \|(\mathrm{Id} - T_\lambda)(p) - (\mathrm{Id} - T_\lambda)(q)\|^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$2\,\langle X, Y\rangle = \frac{1}{\lambda}\,\|X\|^2 + \lambda\,\|Y\|^2 - \|X - \lambda\,Y\|^2$$

on obtient que

$$\begin{aligned} 2\,\langle p - q, (\mathrm{Id} - T_\lambda)(p) - (\mathrm{Id} - T_\lambda)(q)\rangle = {} & \frac{1}{\lambda}\,\|(\mathrm{Id} - T_\lambda)(p) - (\mathrm{Id} - T_\lambda)(q)\|^2 \\ & + \lambda\,\|p - q\|^2 - \lambda\,\|T(p) - T(q)\|^2 \end{aligned}$$

Le caractère lipschitzien de T permet d'obtenir la minoration annoncée. On conclut cette preuve en l'appliquant à $\lambda = 1/2$. ■

On peut à présent démontrer le premier résultat suivant :

Proposition 12

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. On suppose qu'il existe $x^* \in \mathcal{X}$ tel que $0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)$. Soit $\tau > 0$. Soit $((x_k, p_{k+1/2}, p_k))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite générée par l'algorithme

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} &= \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k) \\ p_{k+1/2} &= \operatorname{prox}_{\tau g}(2\, x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} &= p_k + \mu\left(p_{k+1/2} - x_{k+1}\right) \end{cases}$$

Alors la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. De plus,

$$\lim_{k\to+\infty} \|p_{k+1} - p_k\| = 0$$

Démonstration : Rappelons que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad p_{k+1} = T_{\mu/2}(p_k)$$

- **La suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.** D'après la proposition 9, T admet un point fixe p^*. Puisque T et $T_{\mu/2}$ partagent mêmes points fixes, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

  $$\|p_{k+1} - p^*\|^2 = \|T_{\mu/2}(p_k) - T_{\mu/2}(p^*)\|^2$$

  La relation de Fejér, établie dans la preuve précédente, assure que

  $$\|T_{\mu/2}(p_k) - T_{\mu/2}(p^*)\|^2 \leq \|p_k - p^*\|^2 - \frac{2-\mu}{\mu}\, \|p_{k+1} - p_k\|^2$$

  On en déduit en particulier que la suite des $\|p_{k+1} - p^*\|^2$ est décroissante ; comme elle est minorée, on en déduit qu'elle converge. Par conséquent, la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- **La suite $(\|p_{k+1} - p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.** Il suffit de sommer l'inégalité établie au point précédent pour k entre 0 et $K-1$:

  $$\|p_K - p^*\|^2 \leq \|p_0 - p^*\|^2 - \frac{2-\mu}{\mu} \sum_{k=0}^{K-1} \|p_{k+1} - p_k\|^2$$

  Ainsi, la série de terme général $\|p_{k+1} - p_k\|^2$ converge absolument ; la suite des $\|p_{k+1} - p_k\|^2$ converge donc vers 0. ■

Remarque : La proposition 12 implique en particulier que la suite des p_k admet une sous-suite convergente. Par ailleurs, en reprenant les calculs de la preuve précédente, et en utilisant la monotonie de la suite $\|p_{k+1} - p_k\|$, on peut facilement établir le taux suivant :

$$\|p_k - p_{k-1}\|^2 \leq \frac{(2-\mu)\, \|p_0 - p^*\|^2}{\mu}\, \frac{1}{k}$$

Ce résultat est particulièrement utile si l'on est capable d'estimer (même grossièrement) la distance de p_0 aux minimiseurs de J. En effet, ce taux permet alors notamment de définir un critère d'arrêt, basé sur la distance entre deux points consécutifs.

On s'intéresse maintenant au cas où f est régulière et fortement convexe. La CNS d'optimalité du premier ordre assure que :

$$\frac{p_k - x_{k+1}}{\tau} \in \partial f(x_{k+1})$$

Si f est $L_{\nabla f}$-régulière, alors (lemme de descente, proposition 4 du module A4) :

$$f(x) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), x - z\rangle + \langle \nabla f(x) - \nabla f(z), x - z\rangle - \frac{L}{2}\, \|x - z\|^2$$

Si f est fortement convexe de module α, alors :

$$f(x) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), x - z\rangle + \frac{\alpha}{2}\, \|x - z\|^2$$

Proposition 13 (Cas régulier)

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. On suppose qu'il existe $x^* \in \mathcal{X}$ tel que $0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)$. On suppose que f est $L_{\nabla f}$-régulière et fortement convexe, de module α. Soit $\tau > 0$. Soit $((x_k, p_{k+1/2}, p_k))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite générée par l'algorithme

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} &= \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k) \\ p_{k+1/2} &= \operatorname{prox}_{\tau g}(2\, x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} &= p_k + \mu\left(p_{k+1/2} - x_{k+1}\right) \end{cases}$$

Alors la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers p^* et il existe $C \in \,]\,0\,;1\,[\,$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|p_k - p^*\| \leq C^k\, \|p_0 - p^*\|$$

Remarque : On dit que la convergence de $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est linéaire.

Démonstration : Rappelons que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad p_{k+1} = T_{\mu/2}(p_k)$$

- **La suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.** D'après la proposition 9, T admet un point fixe p^*. Puisque T et $T_{\mu/2}$ partagent mêmes points fixes, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

  $$\|p_{k+1} - p^*\|^2 = \|T_{\mu/2}(p_k) - T_{\mu/2}(p^*)\|^2$$

  La relation de Fejér, établie dans la preuve précédente, assure que

  $$\|T_{\mu/2}(p_k) - T_{\mu/2}(p^*)\|^2 \leq \|p_k - p^*\|^2 - \frac{2-\mu}{\mu}\, \|p_{k+1} - p_k\|^2$$

  On en déduit en particulier que la suite des $\|p_{k+1} - p^*\|^2$ est décroissante ; comme elle est minorée, on en déduit qu'elle converge. Par conséquent, la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- **La suite $(\|p_{k+1} - p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.** Il suffit de sommer l'inégalité établie au point précédent pour k entre 0 et $K-1$:

  $$\|p_K - p^*\|^2 \leq \|p_0 - p^*\|^2 - \frac{2-\mu}{\mu} \sum_{k=0}^{K-1} \|p_{k+1} - p_k\|^2$$

  Ainsi, la série de terme général $\|p_{k+1} - p_k\|^2$ converge absolument ; la suite des $\|p_{k+1} - p_k\|^2$ converge donc vers 0. ■

Lorsque f est régulière, on peut en réalité démontrer que l'algorithme DRS converge avec les mêmes taux que l'algorithme FBS appliqué au même problème. Le choix d'appliquer l'un ou l'autre de ces deux algorithmes se pose lorsque la constante de LIPSCHITZ de ∇f n'est pas connue ; en effet, dans cette situation, l'algorithme FBS peut être appliqué, à condition d'ajouter une étape de recherche linéaire afin de calculer le pas de temps τ optimal. Cette étape supplémentaire peut être coûteuse en calculs ; il s'agit alors de comparer le coût de la recherche linéaire et celui de l'évaluation de prox_f pour décider du choix du meilleur algorithme.

Lorsque $\mu = 1$, on peut démontrer, en utilisant des outils dépassant le cadre de ce cours, que l'algorithme DRS est équivalent à l'algorithme FBS appliqué à une autre fonction convexe. Certaines propriétés de convergence peuvent alors être déduites de cette observation.

3.4 Exemples d'application

On s'intéresse à deux applications génériques de la méthode de DOUGLAS–RACHFORD.

Une première application très classique de la méthode de DOUGLAS–RACHFORD est un problème courant en optimisation : la recherche d'un point admissible d'un problème d'optimisation (en anglais, *feasibility problem*). La connaissance d'un tel point peut-être utile, en particulier pour initialiser des méthodes qui auraient besoin d'être initialisée avec un point admissible.

La méthode de DOUGLAS–RACHFORD peut être utilisée pour les problèmes d'optimisation dont l'ensemble admissible s'écrivent comme l'intersection de deux ensembles convexes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Le problème de la recherche d'un point admissible est donc le problème suivant :

$$\text{Trouver } x \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$$

Pour pouvoir appliquer la méthode de DOUGLAS–RACHFORD, il faut supposer que les projections sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont calculables. Les itérations de cette méthode s'écrivent donc :

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} &= \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(p_k) \\ p_{k+1/2} &= \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(2\,x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} &= p_k + \big(p_{k+1/2} - x_{k+1}\big) \end{cases}$$

Il faut noter que, pour toute itération k, ni le point x_{k+1} ni le point p_{k+1} n'est admissible, puisque, dans le cas contraire, l'algorithme s'arrêterait.

EXERCICE

Application numérique. Comparer numériquement l'algorithme DRS et la méthode de la projection alternée.

Une autre famille d'applications possible concerne la minimisation d'une fonction convexe simple sur un convexe fermé non vide :

$$\min_{x \in \mathcal{C}} f(x)$$

Cette fois, f est une fonction simple (non nécessairement différentiable, et encore moins régulière) et $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe, fermé et non vide. Ainsi, ce problème peut

s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation non contraint en introduisant l'indicatrice de $\mathcal{C}$:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + \chi_{\mathcal{C}}(x)$$

Si la projection sur $\mathcal{C}$ est calculable pour tout point $x \in \mathcal{X}$, alors les itérées DR s'écrivent

$$p_0 \in \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} &= \operatorname{prox}_{\tau f}(p_k) \\ p_{k+1/2} &= \operatorname{proj}_{\mathcal{C}}(2\,x_{k+1} - p_k) \\ p_{k+1} &= p_k + \big(p_{k+1/2} - x_{k+1}\big) \end{cases}$$

4 Éclatement de type DYKSTRA

4.1 Position du problème

Dans cette section, on s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ f(x) + h(x) + \frac{1}{2}\,\|x - r\|^2 \right\} \tag{$\mathcal{P}_{\text{DYKSTRA}}$}$$

où $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont des fonctions convexes, s.c.i. et propres et $r \in \mathcal{X}$. Il s'agit donc d'un problème de la forme ($\mathcal{P}$) dans le cas particulier où g est fortement convexe, puisqu'il se décompose alors de la manière suivante :

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad g(x) = h(x) + \frac{1}{2}\,\|x - r\|^2$$

On suppose que f et h sont simples ; en particulier, notons que, puisque

$$g(x) + \frac{1}{2}\,\|x - x^0\|^2 = h(x) + \left\| x - \frac{x^0 + r}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2}\,\|r\|^2 - \left\| \frac{x^0 + r}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2}\,\|x^0\|^2$$

il s'ensuit que h est simple si et seulement si g est simple.

4.2 Algorithme

Soit $x \in \mathcal{X}$. Par hypothèse sur les fonctions f et h, on a les identités $f = f^{**}$ et $h = h^{**}$; autrement dit, pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) + h(x) &= \sup_{y_1 \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y_1, x \rangle - f^*(y_1) \Big\} + \sup_{y_2 \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y_2, x \rangle - h^*(y_2) \Big\} \\ &= \sup_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \Big\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \Big\} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \Big\{ f(x) + g(x) \Big\} = \min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) + \frac{1}{2}\,\|x - r\|^2 \right\}$$

Définissons la fonction de couplage

$$\mathcal{L}(x; y_1, y_2) = \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) + \frac{1}{2}\,\|x - r\|^2$$

Puisque pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2$, on a

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle + \frac{1}{2}\,\|x - r\|^2 \right\} = \frac{1}{2}\,\|r\|^2 - \frac{1}{2}\,\|y_1 + y_2 - r\|^2$$

le problème dual associé à cette fonction de couplage est le problème de maximisation suivant :

$$\max_{(y_1,y_2)\in\mathcal{X}^2} \left\{ -f^*(y_1) - h^*(y_2) - \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - r\|^2 \right\} \qquad (\mathcal{D}_{\text{Dykstra}})$$

Intéressons-nous aux solutions (y_1^*, y_2^*) de ce problème de maximisation **concave** ; la CNS d'optimalité du premier ordre assure qu'elles sont caractérisées par le système d'inclusion suivant :

$$\begin{cases} r - y_1^* - y_2^* \in \partial f^*(y_1^*) \\ r - y_1^* - y_2^* \in \partial h^*(y_2^*) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y_1^* \in \partial f(r - y_1^* - y_2^*) \\ y_2^* \in \partial h(r - y_1^* - y_2^*) \end{cases}$$

En utilisant l'inclusion $\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)$, il s'ensuit que

$$y_1^* + y_2^* + (r - y_1^* - y_2^*) - r = 0 \in \partial J(r - y_1^* - y_2^*)$$

Autrement dit, si le problème dual $\mathcal{D}_{\text{Dysktra}}$) admet une solution (y_1^*, y_2^*), alors le point

$$x^* = r - y_1^* - y_2^*$$

est une solution du problème (primal) $(\mathcal{P}_{\text{Dykstra}})$.

Le principe de l'algorithme de Dykstra pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{Dykstra}})$ cherche donc à résoudre le problème de minimisation (équivalent) dual $(\mathcal{D}_{\text{Dykstra}})$. Cette résolution peut être, en général, réalisée en appliquant un algorithme de type *descentes par blocs*, que nous verrons plus en détails au cours prochain. Suivant la méthode de résolution choisie, on obtient des algorithmes différents.

Si on choisit la méthode de minimisation alternée, qui consiste, comme son nom l'indique, à alterner des minimisations des fonctions partielles, on a l'algorithme suivant dans le domaine dual :

$$((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (y_1)_{k+1} = \operatorname*{argmin}_{y_1\in\mathcal{X}} \left\{ f^*(y_1) + \frac{1}{2}\|y_1 + (y_2)_k - r\|^2 \right\} \\ (y_2)_{k+1} = \operatorname*{argmin}_{y_2\in\mathcal{X}} \left\{ h^*(y_2) + \frac{1}{2}\|(y_1)_{k+1} + y_2 - r\|^2 \right\} \end{cases}$$

On reconnaît dans l'algorithme précédent l'expression des opérateurs proximaux des conjuguées convexes f^* et h^*, de sorte que l'algorithme s'écrit

$$((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_1)_{k+1} = \operatorname{prox}_{f^*}\left(r - (y_2)_k\right) \\ (y_2)_{k+1} = \operatorname{prox}_{h^*}\left(r - (y_1)_{k+1}\right) \end{cases}$$

En utilisant l'identité de Moreau, on peut réécrire les itérations de l'algorithme

$$((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_1)_{k+1} = r - (y_2)_k - \operatorname{prox}_f\left(r - (y_2)_k\right) \\ (y_2)_{k+1} = r - (y_1)_{k+1} - \operatorname{prox}_h\left(r - (y_1)_{k+1}\right) \end{cases}$$

On peut alors introduire la variable x_k, définie à partir du lien entre x^* et (y_1^*, y_2^*) :

$$x_{k+1} = r - (y_1)_{k+1} - (y_2)_{k+1}$$

En introduisant une quatrième variable, on peut alors réécrire l'algorithme sous la forme

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_2)_{k+1} & = z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} & = \operatorname{prox}_f(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} & = x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} & = \operatorname{prox}_h(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

4.3 Propriétés de convergence

L'étude de la convergence de cet algorithme repose sur des résultats de convergence qui seront établis dans le module suivant.

Posons pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2$

$$E(y_1, y_2) = f^*(y_1) + h^*(y_2) + \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - r\|^2$$

Notons que la fonction E est visiblement fortement convexe, donc coercive. En particulier, elle est biconvexe, et son domaine vérifie

$$\operatorname{dom} E = \operatorname{dom} f^* \times \operatorname{dom} h^*$$

Lemme 3

Soit $f : \mathcal{X}_1 \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X}_2 \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_2)_{k+1} & = z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} & = \operatorname{prox}_f(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} & = x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} & = \operatorname{prox}_h(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

Alors la suites $(E((y_1)_{k+1}, (y_2)_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(E((y_1)_{k+1}, (y_2)_{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergent vers la même limite.

Démonstration : On applique la proposition 1 du module B5, appliquée au problème dual de minimisation de E. ■

Proposition 14

Soit $f : \mathcal{X}_1 \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X}_2 \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions **convexes**, s.c.i. et propres. Soit $r \in \mathcal{X}$. On pose

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = f(x) + h(x) + \frac{1}{2}\|x - r\|^2$$

On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} (y_2)_{k+1} & = z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} & = \operatorname{prox}_f(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} & = x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} & = \operatorname{prox}_h(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

Alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et admet une sous-suite qui converge. Par ailleurs, la limite x^* de toute sous-suite convergente de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un minimiseur de J.

Démonstration : Il s'agit d'une application de la proposition 2 du module B5, appliquée au problème dual de minimisation de E. ■

4.4 Exemple d'applications

À nouveau, une application historique de l'algorithme de Dykstra est la projection sur l'intersection de deux convexes (on parle d'ailleurs parfois de l'*algorithme de projection de* Dysktra). Ce problème s'écrit

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) \right\}$$

où $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{X}$ sont deux ensembles convexes fermés non vides, d'intersection non vide. L'algorithme de Dykstra s'écrit alors

$$\begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathcal{X}^2 \\ ((y_1)_0, (y_2)_0) \in \mathcal{X}^2 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} (y_2)_{k+1} & = z_k + (y_2)_k - x_k \\ z_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(x_k + (y_1)_k) \\ (y_1)_{k+1} & = x_k + (y_1)_k - z_{k+1} \\ x_{k+1} & = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(z_{k+1} + (y_2)_{k+1}) \end{cases}$$

Il est classique de choisir pour initialisation

$$x_0 = z_0 = r \qquad \text{et} \qquad (y_1)_0 = (y_2)_0 = 0$$

Par définition de la projection, on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_k \in \mathcal{C}_2 \qquad \text{et} \qquad z_k \in \mathcal{C}_1$$

et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un point appartenant à l'intersection $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Une autre application est l'évaluation de l'opérateur proximal de la somme de deux fonctions simples. En effet, on reconnaît dans le problème $(\mathcal{P}_{\text{Dykstra}})$ l'expression du point proximal $\operatorname{prox}_{f+h}(r)$. L'algorithme de Dykstra permet alors de générer une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers ce point proximal.

Pour aller plus loin

Problèmes d'optimisation non lisse et non convexe. L'intérêt principal des méthodes présentées ici se révèle pour des problèmes plus généraux non lisses (dans le sens non différentiables ou non régulières). Parmi ces problèmes, on pourra citer les problèmes d'optimisation sous contraintes (la présence des contraintes rendant automatiquement le problème non contraint non lisse). Les trois méthodes présentées dans ce module sont donc très fréquemment utilisées dans les applications.

Accélération par inertie. La méthode FBS peut être accélérée de manière optimale à l'aide d'une stratégie d'extrapolation de type Nesterov. L'algorithme qui en résulte est connu sous le nom de méthode FISTA (module B7).

Descentes par coordonnées. L'analyse de la convergence de l'algorithme de Dykstra repose sur celle de l'algorithme des descentes par coordonnées, qui sera étudiée dans le module B5. Cette méthode fait partie d'une famille de méthodes dites d'éclatement par coordonnées. L'idée est, au lieu de décomposer le traitement sur les parties de la fonction objectif, de le décomposer sur la variable sur laquelle on minimise.