TD N°1

Analyse convexe
Calcul sous-différentiel

Exercice 1 – Enveloppe supérieure de fonctions convexes

Module A1, Proposition 10

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe pour tout $i \in \mathcal{I}$. On définit l'*enveloppe supérieure* de la famille de fonctions $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \sup\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i(x) \end{array} \right.$$

(a) Soit $(x, y) \in \operatorname{epi} f$. Montrer que $\quad \forall\, i \in \mathcal{I}, \quad y \geq f_i(x)$

(b) En déduire que $\quad (x, y) \in \operatorname{epi} f \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \in \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{epi} f_i$

(c) Justifier que $\operatorname{epi} f_i$ est convexe pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(d) Montrer que $\operatorname{epi} f$ est convexe. En déduire que f est convexe.

Exercice 2 – Fonction convexe non continue

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Quel est le domaine de f ? La fonction f est-elle continue sur $\operatorname{dom} f$?

(b) Montrer que f est convexe.

(c) Soit $x \in \operatorname{dom} f$. Que vaut $\liminf\limits_{y\to x} f(y)$?

On s'intéresse maintenant à la fonction suivante, appelée *fermeture* de f :

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \underline{f}(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

(d) Donner l'expression explicite de $\underline{f}$. Que vaut son domaine ?

(e) Montrer que $\underline{f}$ est convexe.

(f) Soit $x \in \operatorname{dom} \underline{f}$. Que vaut $\liminf\limits_{y\to x} \underline{f}(y)$?

Exercice 3 – Fonctions fortement convexes

Module A1, Propositions 14–16

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module α.

(a) Justifier que f est strictement convexe.

Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On introduit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x) - \dfrac{\alpha}{2} \|x - x^0\|^2 \end{array} \right.$$

(b) Montrer que g est convexe. En déduire que toute fonction fortement convexe est la somme d'une fonction convexe et d'une fonction quadratique.

(c) En déduire que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe, de module α, est fortement convexe, de module α.

(d) On suppose que g est différentiable. Montrer que g admet une minorante affine.

(e) En déduire que f est *coercive*, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 4 – Sous-différentiel de la norme

Soit $\mathcal{X}$ un espace de HILBERT muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de norme associée $\|\cdot\|$.

(a) Justifier que $\|\cdot\|$ est une fonction convexe.

(b) Montrer que $\|\cdot\|$ est différentiable sur $\mathcal{X}\setminus\{0\}$, de gradient

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \nabla\|\cdot\|(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

(c) Montrer que tout $p \in \mathcal{X}$ de norme inférieure ou égale à 1 est sous-gradient de $\|\cdot\|$ en 0.

(d) Montrer que, si $\|p\| > 1$, alors

$$p \in \partial\|\cdot\|(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \|p\| \geq \|p\|^2$$

(e) En déduire que le sous-différentiel de la norme $\|\cdot\|$ est la boule unité fermée pour la même norme.

Exercice 5 – Sous-différentiel de FRÉCHET, limitant

Module A2, Propositions 9 & 10

TODO Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ une fonction de domaine non vide.

(a) On suppose que f est convexe. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \partial f(x) = \hat{\partial} f(x)$$

(b) On suppose que f est différentiable en $x^0 \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$\hat{\partial} f(x^0) = \{\nabla f(x^0)\}$$

(c) On suppose que f est continûment différentiable au voisinage de $x^0 \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$