

Algorithmes stochastiques

Martingales

A. Godichon-Baggioni

I. Martingales réelles

DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition

- On appelle *filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{A} .
- On dit qu'une suite de v.a (X_n) est adaptée à la filtration (\mathcal{F}_n) si pour tout n , X_n est \mathcal{F}_n -mesurable.

Définition

Soit $M = (M_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. On dit que M est une martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ si pour tout $n \geq 0$, M_n est \mathcal{F}_n -mesurable et

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n.$$

THÉORÈME DE ROBBINS-SIEGMUND

Théorème (Robbins-Siegmund)

Soit (V_n) , (A_n) , (B_n) , (C_n) trois suites de variables aléatoires positives adaptées à une filtration (\mathcal{F}_n) . On suppose que

$$\mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq (1 + A_n) V_n + B_n - C_n$$

et que les suites (A_n) et (B_n) vérifient

$$\sum_{n \geq 0} A_n < +\infty \quad p.s. \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} B_n < +\infty \quad p.s.$$

Alors V_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie et

$$\sum_{n \geq 0} C_n < +\infty \quad p.s.$$

ESTIMATION EN LIGNE DES QUANTILES

On considère x_p le quantile d'ordre $p \in (0, 1)$ de X . On peut construire l'estimateur en ligne

$$m_{n+1} = m_n - \gamma_{n+1} (\mathbf{1}_{X_{n+1} \leq m_n} - p)$$

avec

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty.$$

Si la fonction de répartition F_X est strictement croissante au voisinage de x_p , alors

$$m_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} x_p.$$

ESTIMATION EN LIGNE DES QUANTILES

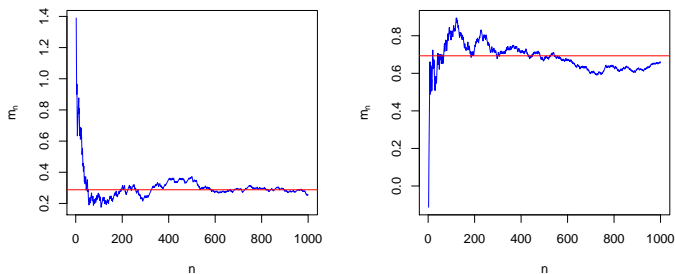


FIGURE – Evolution de l'estimation des quantiles d'ordre 0.25 (à gauche) et 0.75 à droite pour la loi exponentielle de paramètre 1.

LOIS DES GRANDS NOMBRES

Définition

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable. On appelle processus croissant associé à (M_n) la suite $(\langle M \rangle_n)$ définie par $\langle M \rangle_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$ par

$$\langle M \rangle_{n+1} = \langle M \rangle_n + \mathbb{E} \left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n \right].$$

Soit $\xi_{k+1} = M_{k+1} - M_k$, on a

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\xi_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}].$$

1ÈRE LOI DES GRANDS NOMBRES

Théorème (1ère loi des grands nombres)

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable.

1. *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n < +\infty$ presque sûrement, alors (M_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie M_∞ .*
2. *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n = +\infty$, alors $\left(\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \right)$ converge presque sûrement vers 0.*

APPLICATION AU BANDIT À DEUX BRAS

On considère une machine à sous avec deux bras A et B .

- ▶ Le bras A permet un gain de 1 ou 0 avec probabilité $\theta_A \in (0, 1)$ ou $1 - \theta_A$.
- ▶ Le bras B permet un gain de 1 ou 0 avec probabilité $\theta_B \in (0, 1)$ ou $1 - \theta_B$.

Au temps n :

- ▶ Choix d'un levier : $U_n = A$ ou B .
- ▶ On note X_n le gain au temps n .

Objectif : Maximiser le gain moyen asymptotique, i.e trouver une stratégie (U_n) telle que

$$G_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \max \{ \theta_A, \theta_B \}.$$

APPLICATION AU BANDIT À DEUX BRAS

1. Donner la loi de $X_n|U_n$.
2. Soient $N_{A,n} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{U_k=A}$, $N_{B,n} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{U_k=B}$ et

$$M_n = \sum_{k=1}^n X_k - \theta_A N_{A,n} - \theta_B N_{B,n}.$$

- 2.1 Montrer que M_n est une martingale par rapport à la filtration (\mathcal{F}_n) avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_{n+1})$.
- 2.2 Calculer le crochet de M_n . Que pouvez-vous en déduire?
3. Soient l_A, l_B tels que $\frac{N_{A,n}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} l_A$ et $\frac{N_{B,n}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} l_B$.

Montrer que

$$G_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} \theta_A l_A + \theta_B l_B$$

2ÈME LOI DES GRANDS NOMBRES

Théorème (2ème loi des grands nombres)

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable.

1. Si $\langle M \rangle_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$, pour tout $\delta > 0$,

$$M_n^2 = o\left(\langle M \rangle_n \ln(\langle M \rangle_n^{1+\delta})\right) \quad p.s.$$

2. Si de plus il existe $a > 2$ et $b > 0$ tels que

$$\forall n, \quad \mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n|^a | \mathcal{F}_n] \leq b \left(\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n] \right)^{a/2} \quad p.s.$$

alors

$$M_n^2 = O(\langle M \rangle_n \ln(\langle M \rangle_n)) \quad p.s.$$

2ÈME LOI DES GRANDS NOMBRES

Exemple : Soit (ξ_k) une suite de différences de martingale et $M_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Si il existe C tel que pour tout k , $\mathbb{E} [\xi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \leq C$, alors

$$M_n^2 = o\left(n (\ln n)^{1+\delta}\right) \quad p.s$$

Si de plus il existe a, C_a tels que pour tout k , $\mathbb{E} [\xi_k^a | \mathcal{F}_{k-1}] \leq C_a$, alors

$$M_n^2 = O(n \ln n) \quad p.s.$$

Exercice : A l'aide du théorème de Robbins-Siegmund, montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$M_n^2 = o\left(n (\ln n)^{1+\delta}\right) \quad p.s$$

APPLICATION AU BANDIT À DEUX BRAS

Rappel :

$$M_n = \sum_{k=1}^n X_k - \theta_A N_{A,n} - \theta_B N_{B,n}$$

Montrer que

$$M_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad p.s.$$

ESTIMATION EN LIGNE DES QUANTILES

Si X admet une densité f et que $f(m) > 0$, alors

$$|m_n - m|^2 = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) \quad p.s.$$

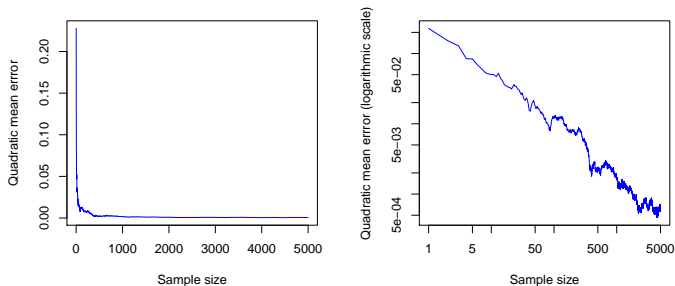


FIGURE – Evolution de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs en ligne de la médiane d'une loi exponentielle de paramètre 1.

THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Théorème

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable et a_n une suite positive, croissante et divergente. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. *Il existe σ^2 tel que*

$$a_n^{-1} \langle M \rangle_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

2. *Condition de Lindeberg : pour tout $\epsilon > 0$,*

$$a_n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[(M_k - M_{k-1})^2 \mathbf{1}_{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon \sqrt{a_n}} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

CONDITION DE LYAPUNOV

Condition de Lyapunov : Il existe $a > 2$ tel que

$$a_n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [|M_k - M_{k-1}|^a | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Condition de Lyapunov \implies condition de Lindeberg.

Exercice : On note $\xi_k = M_k - M_{k-1}$ et on suppose $a_n = n$.
Montrer que si il existe $a > 2, C_a \geq 0$ tels que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E} [|\xi_k|^a | \mathcal{F}_{k-1}] \leq C,$$

alors la condition de Lindeberg est vérifiée.

APPLICATION AU BANDIT À DEUX BRAS

On considère les estimateurs

$$\theta_{A,n} = \frac{1}{N_{A,n}} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=1, U_k=A} \quad \text{et} \quad \theta_{B,n} = \frac{1}{N_{B,n}} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=1, U_k=B}$$

et

$$M_{A,n} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=1, U_k=A} - \theta_A N_{A,n}$$

1. Montrer que $M_{A,n}$ est une martingale.
2. Calculer son crochet. Que pouvez-vous en déduire?
3. On suppose $\frac{N_{A,n}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} l_A > 0$.
 - 3.1 Appliquer le TLC.
 - 3.2 Que pouvez-vous en déduire?

BANDIT À DEUX BRAS ET EFFICACITÉ ASYMPTOTIQUE

On considère

- Une suite strictement croissante d'entiers (c_n) .
- $I_c = \{c_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

On considère la stratégie suivante :

$$U_n = \begin{cases} A & \text{si } \theta_{A,n-1} \geq \theta_{B,n-1} \text{ et } n \notin I_c \\ B & \text{si } \theta_{B,n-1} > \theta_{A,n-1} \text{ et } n \notin I_c \\ A & \text{si } \exists k \geq 1, n = c_{2k} \\ B & \text{si } \exists k \geq 0, n = c_{2k+1} \end{cases}$$

Montrer que $\theta_{A,n}$ et $\theta_{B,n}$ sont consistants.

BANDIT À DEUX BRAS ET EFFICACITÉ ASYMPTOTIQUE

On suppose $\theta_A > \theta_B$.

1. On suppose $n = o(c_n)$.

1.1 Montrer que $\frac{N_{B,n}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$.

1.2 Que pouvez vous en conclure ?

2. On suppose $n^2 = o(c_n)$ et on rappelle

$$G_n - l_A \theta_A - l_B \theta_B = \frac{1}{n} M_n - \theta_A \left(\frac{N_{A,n}}{n} - l_A \right) - \theta_B \left(\frac{N_{B,n}}{n} - l_B \right).$$

2.1 Appliquer le TLC à M_n .

2.2 Montrer que $\frac{N_{B,n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$.

2.3 Conclure.

ESTIMATION EN LIGNE DES QUANTILES

On a

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} (m_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{p(1-p)}{2f(m)} \right),$$

ce que l'on peut réécrire comme

$$Q_n := \frac{\sqrt{2f(m)}}{c_\gamma \sqrt{p(1-p)}} n^{\alpha/2} (m_n - m) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

ESTIMATION EN LIGNE DES QUANTILES

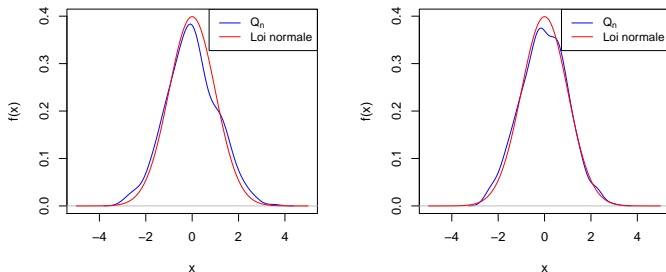


FIGURE – Comparaison de la densité de Q_n , pour $n = 500$ (à gauche) et $n = 5000$ (à droite), et de la densité d'une loi normale centrée réduite.

II. Martingales vectorielles

DÉFINITION

Définition

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ une filtration.

- (M_n) est une martingale de carré intégrable si

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n.$$

- Le crochet de (M_n) est le processus $(\langle M \rangle_n)$ défini par $\langle M \rangle_0 = M_0 M_0^T$ et $\langle M \rangle_n = \langle M \rangle_{n-1} + \Delta_n$ avec

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \mathbb{E} \left[(M_n - M_{n-1}) (M_n - M_{n-1})^T \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbb{E} [M_n M_n^T \mid \mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1} M_{n-1}^T. \end{aligned}$$

VITESSE DE CONVERGENCE

Théorème

Soit (ξ_k) une suite de différences de martingales et $M_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Si il existe une constante positive C telle que pour tout k ,

$\mathbb{E} \left[\|\xi_k\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \leq C$, alors pour tout $\delta > 0$,

$$\left\| \frac{1}{n} M_n \right\|^2 = o \left(\frac{(\ln n)^{1+\delta}}{n} \right) \quad p.s.$$

LOI DES GRANDS NOMBRES

Théorème

Soit (ξ_k) une suite de différences de martingale et $M_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. On suppose qu'il existe une matrice Γ telle que

$$n^{-1} \langle M \rangle_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \Gamma$$

et qu'il existe $\eta > 0$, C_η tels que $\mathbb{E} \left[\|\xi_k\|^{2+\eta} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \leq C_\eta$. Alors

$$\left\| \frac{1}{n} M_n \right\|^2 = O \left(\frac{\ln n}{n} \right) \quad p.s.$$

THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Théorème (Théorème Central Limite)

Soit (M_n) une martingale de carré intégrable et on suppose qu'il existe une suite croissante et divergente a_n et une matrice Γ telles que

1. $a_n^{-1} \langle M \rangle_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \Gamma,$
2. la condition de Lindeberg est satisfaite, i.e pour tout $\epsilon > 0,$

$$a_n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\|M_k - M_{k-1}\|^2 \mathbf{1}_{\|M_k - M_{k-1}\| \geq \epsilon a_n^{1/2}} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Alors

$$a_n^{-1/2} M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$

THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Corollaire

Soit $M_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, où (ξ_n) est une suite de différences de martingale adaptée à la filtration. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. Il existe une matrice Γ telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\xi_k \xi_k^T | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \Gamma$$

2. Il existe des constantes positives $a > 2$ et C_a telles que $\mathbb{E} [\|\xi_k\|^a | \mathcal{F}_{k-1}] \leq C_a$.

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$