

Chap 1 - Expérience aléatoire et probabilité

σ -algèbre Une famille \mathcal{F} de sous ensembles de Ω vérifiant

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- ii) Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$
- iii) Si $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

Probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) . Une application \mathbb{P} de \mathcal{F} dans \mathbb{R} tq

- i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- ii) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}$
- iii) Si $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$, deux à deux disjoints, alors $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

Combinatoire

nb de *Permutations* de n éléments : $n!$

nb de *Permutations r-distinctes* de n éléments : $\frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$

nb d'Arrangements de p parmi n : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

nb de *Combinaisons* de p parmi n : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (pas d'ordre)

Chap 2 - Formules remarquables

Probabilités totales $\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$

Formule de Bayes $\mathbb{P}(A_n|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$

Formule de Poincaré $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i)$

Formule des produits disjoints $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1^c A_2) + \mathbb{P}(A_1^c A_2^c A_3) + \dots + \mathbb{P}(A_1^c A_2^c \dots A_{n-1}^c A_n)$

Chap 3 - Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique et moments : définitions

espérance : $\mathbb{E}[X] = \sum_x x \mathbb{P}(X = x)$ si $\sum_x |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty$

moment d'ordre n : $\mathbb{E}[X^n] = \sum_x x^n \mathbb{P}(X = x)$

variance : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

moment centré d'ordre r : $\mu_r = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^r]$

Propriétés (également valables pour les v.a réelles)

$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ si X, Y indépendants

$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

$\text{Var}(\sum_i X_i) = \sum_i \text{Var}(X_i)$ si les X_i sont indépendants

Somme de deux v.a.d indépendantes

Produit de convolution $c_n = (a_n) * (b_n) = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Somme de deux v.a. $\mathbb{P}(X + Y = n) = (p_X * p_Y)(n)$

Fonctions génératrices

$g(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i s^i$

$\mathbb{E}[X] = g'(1); \text{Var}(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$

Lois	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}[X]$	$\text{Var}[X]$	$g(s)$
$B(p)$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$	$1 - p + ps$
$b(n, p)$	$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$	$(1 - p + ps)^n$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(-\lambda + \lambda s)$
$G(p)$	$p(1 - p)^{k-1}$	$1/p$	$(1 - p)/p^2$	$ps/(1 - s + ps)$

FIGURE 1 – Caractéristiques des lois discrètes usuelles

Chap 4 - Variable aléatoire réelle

Propriétés essentielles

Fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Espérance $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$ si abs. continue.

Médiane $M \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\mathbb{P}(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$

X abs. continue $\Leftrightarrow \forall \phi$ borélienne : $\mathbb{E}[\phi \circ X] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_X(x) dx$

Fonction génératrice des moments

$M(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(tx) f_X(x) dx$

$M^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$

Si M est définie sur $] - a, a[$, $a > 0$:

- X possède des moments finis de tous ordres
- $M(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}[X^k]$

Lois	f_X	$\mathbb{E}[X]$	$\text{Var}[X]$	$M(t)$
unif.	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
normale	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right\}$
exp.	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t)$
gamma	$\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	α/λ	α/λ^2	$(\lambda/(\lambda - t))^\alpha$

FIGURE 2 – Caractéristiques de quelques variables continues

Loi normale ou de Gauss

Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes alors $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Inégalités

Bienaymé-Tchebichev $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$

Cauchy-Schwarz $(\mathbb{E}[XY])^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]$

Jensen $\mathbb{E}[\phi(X)] \geq \phi(\mathbb{E}[X])$ si ϕ est convexe sur \mathbb{R}

Chap 5 - Variable aléatoire vectorielle

Covariance - définition et propriétés

Covariance $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$
- Si X et Y indépendants, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$

- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

Lois, densités, fonctions de répartition

Soient $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ une v.a. vectorielle et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$
f. de répartition $F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$
f. de densité $f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^d F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \dots \partial x_d}$
relation densité/f.d.r $F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$
f. de répartition marginale $F_i(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty)$
densité marginale pour calculer $f_i(x)$ on fixe x et on intègre $f(x_1, \dots, x_d)$ par rapport aux autres variables.

Espérance et matrice de covariance

espérance $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])'$
matrice de covariance $K = (K_{ij})_{i,j=1,\dots,d} = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,\dots,d}$

Transformation d'une v.a Soit $Y = g(X)$, on a

$f_Y(y) = f_X \circ g^{-1}(y) \left| \frac{dg^{-1}}{dy} \right| \mathbb{1}_F(y)$

Transformation vectorielle Soit $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ de \mathbb{R}^d , on a
 $f_Y(y) = f_X \circ \mathbf{g}^{-1}(y) |DJ_{\mathbf{g}^{-1}}(y)| \mathbb{1}_F(y)$ avec $DJ_{\mathbf{g}^{-1}} = (DJ_{\mathbf{g}})^{-1}$

$$DJ_{\mathbf{g}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

Vecteur aléatoire gaussien

Définition La v.a.v. \mathbf{X} de \mathbb{R}^d est dite gaussienne si la v.a. $a_1 X_1 + \dots + a_d X_d$ est gaussienne pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ fixé.
chacun des X_i est gaussien;
 $\mathbf{g} \circ \mathbf{X}$ est gaussienne si \mathbf{g} est affine de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^m ;
Si $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + b$, alors $K_Y = BK_X B'$;
Si les X_i sont gaussiens et indépendantes, \mathbf{X} est gaussien.
Si \mathbf{X} est un vecteur gaussien, K_X est non-singulière \Leftrightarrow

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} (\det K_X)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)' K_X^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right\}$$

Chap 6 - Indépendance et conditionnement

Indépendance de n v.a. X_1, \dots, X_n

v.a. discrètes $p(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \times \dots \times p_n(x_n)$
v.a. continues $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \times \dots \times F_n(x_n)$
v.a. à densité $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \times \dots \times f_n(x_n)$
n'importe $\mathbb{E}[h_1(X_1) \times \dots \times h_n(X_n)] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[h_i(X_i)]$

Somme de deux v.a.r indépendantes

$$\begin{aligned} &F_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}} F_X(u-y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(u-x) dF_X(x) \\ &M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) \end{aligned}$$

Loi conditionnelle

discret $\mathbb{E}[Y|X = x] = \sum_{y \in E} y \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \sum_{y \in E} y p_{Y|X}(y)$
continu Soit $f(x, y)$ la densité jointe du couple,

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^y f(x, v) dv$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x, v) dv}$$

espérance $\mathbb{E}[Y|X = x] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy$
variance $\text{Var}[Y|X = x] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_{Y|X}(y|x) dy - (\mathbb{E}[Y|X = x])^2$

Espérance conditionnelle

linéarité $\mathbb{E}[aX + bY|Z] = a\mathbb{E}[X|Z] + b\mathbb{E}[Y|Z]$.
indépendance $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$ si X et Y sont ind. (réciproque fausse).
théorème de l'espérance totale $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$
 $\mathbb{E}[h(X)Y|X] = h(X)\mathbb{E}[Y|X]$
 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, Z, V]|X, Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, Z]]$.
Lemme de Wald $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$ où $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$, $N \in \mathbb{N}^*$ et X_i iid

Variance conditionnelle

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y|X) &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X] = \mathbb{E}(Y^2|X) - [\mathbb{E}(Y|X)]^2 \\ \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] \end{aligned}$$

Chap 7 - Convergence stochastique

Convergence presque-sure Si $\mathbb{P}\left(\omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\right) = 1$, X_n converge presque sûrement vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

Convergence en moyenne quadratique Soient $\mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$ et $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$, si $\mathbb{E}[|X_n - X|^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, X_n converge en moyenne quadratique vers X et on note $X_n \xrightarrow{m.q.} X$.

Convergence en probabilité Si $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, X_n converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{p} X$.

Convergence en loi Si $F_n \rightarrow F$ en tout point de continuité de F , X_n converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Loi faible des grands nombres Soient les X_i i.i.d. tels que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, alors $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \mathbb{E}(X_1)$

Loi forte des grands nombres Soient les X_i i.i.d. et $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$. On a $\mathbb{E}|X_1| < \infty \Leftrightarrow S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$

Théorème de la limite centrale Soient les X_i i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2 , alors $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \sqrt{n} \left(\frac{S_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$

Fonction caractéristique d'une v.a.r : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$
— si $Y = aX + b$, alors $\varphi_Y(t) = \exp(itb) \varphi_X(at)$
— $\varphi_X(0) = 1, |\varphi_X(t)| \leq 1, \varphi(-t) = \overline{\varphi}(t)$

Lois	Fct caractéristiques
Bernoulli $B(p)$	$pe^{it} + (1 - p)$
Binomiale $b(n, p)$	$(pe^{it} + (1 - p))^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\exp(-\lambda(1 - \exp it))$
Uniforme sur $[0,1]$	$(\exp it - 1)/it$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	$\exp(it\mu - \sigma^2 t^2/2)$
Exponentielle $E(\lambda)$	$\lambda/(\lambda - it)$