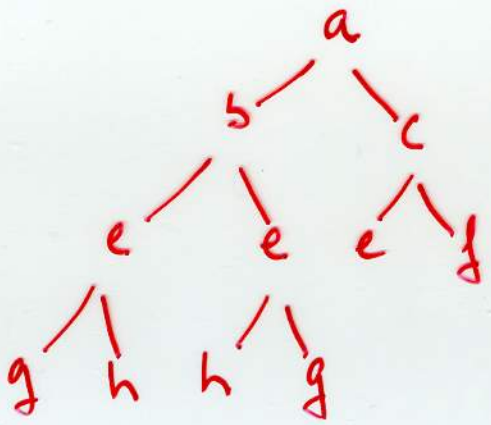
ARBOLES BINARIOS PARCIALMENTE ORDENADOS (APO)

Definición

Un árbol binario se dice que es un APO si cumple la condición de que la etiqueta de cada nodo es menor o igual(*) que las etiquetas de los hijos(*), manteniéndose tan balanceado como sea posible (*) (hojas empujadas a la izqda)

Ejemplo



Solo nos interesan funciones para:

- insertar elementos
- borrar el elemento mínimo

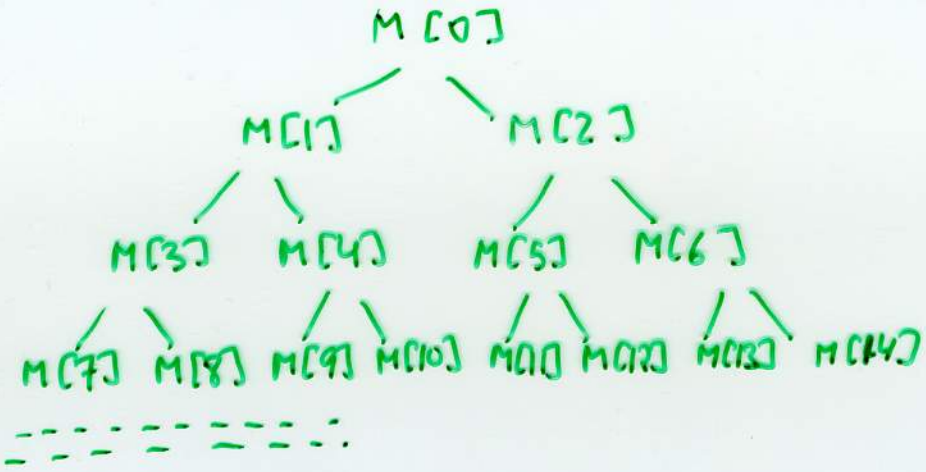
Los APO son útiles para Ordenación

↓

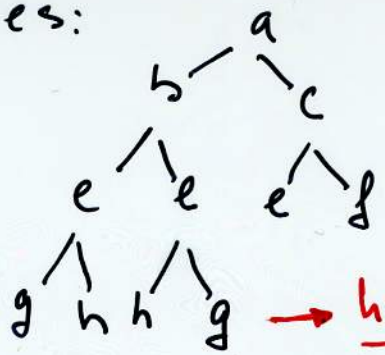
heapsort

La representación que usaremos para los ABO es la de **MONTON** (HEAP)

Un **MONTON** M, para nosotros será un vector en el que guardaremos el ABO por niveles, de forma que si existen n nodos, M[0] alojará la raiz, y el hijo izquierdo de un nodo M[K] (si existe) estará en M[2K+1] y el hijo derecho (si existe) en M[2K+2](*)

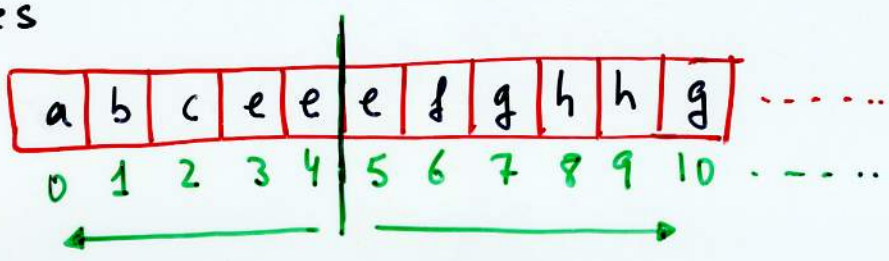


P. ej. si el ABO es:



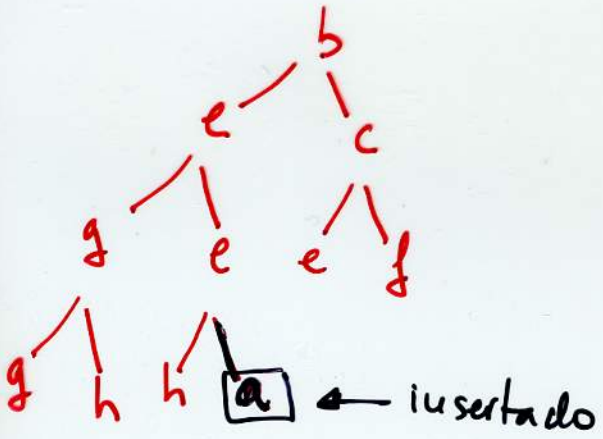
→ hojas empujadas a la izqda

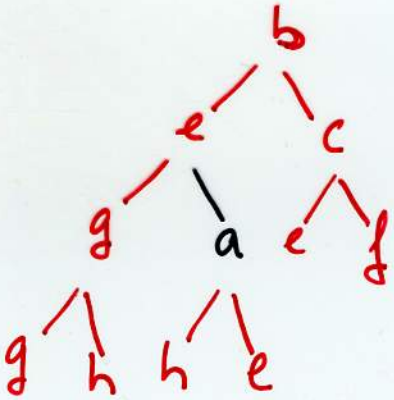
el vector es

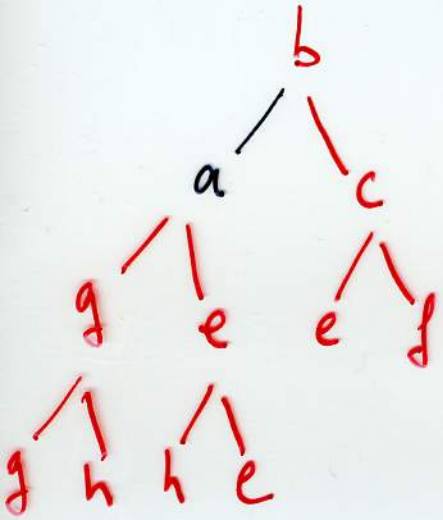


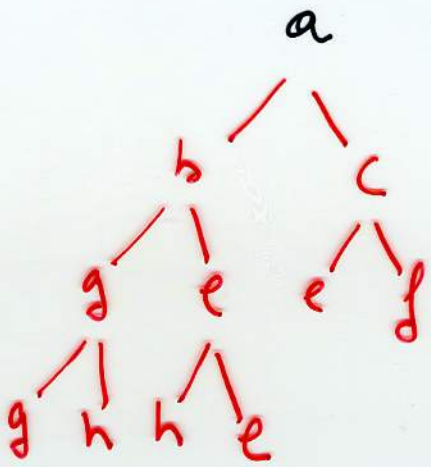
(*) EQUIVALENTE A DECIR QUE EL PADRE DE M[K] ES $M\left[\frac{(K-1)}{2}\right]$ VALIDO

Inserción



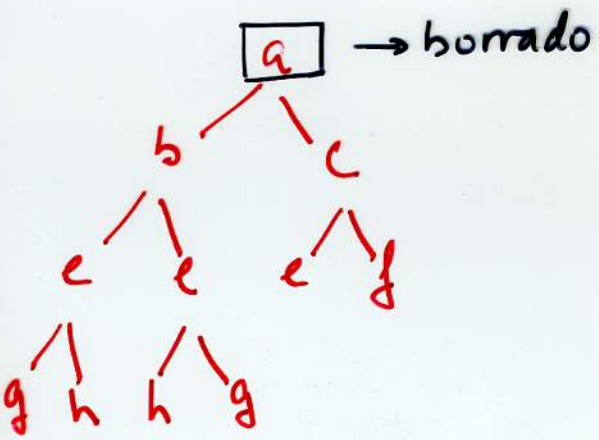


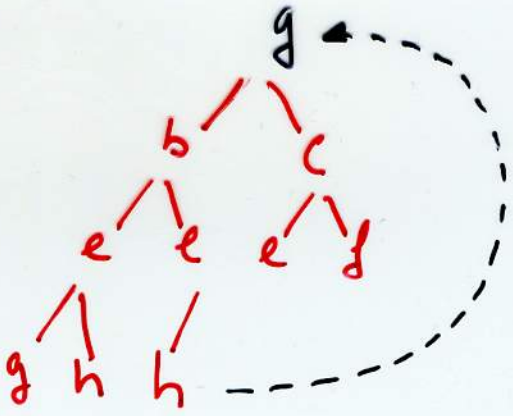


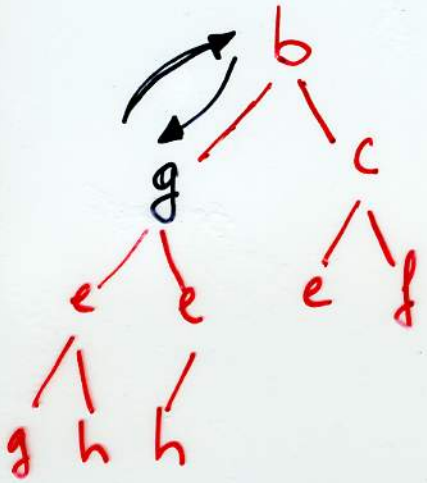


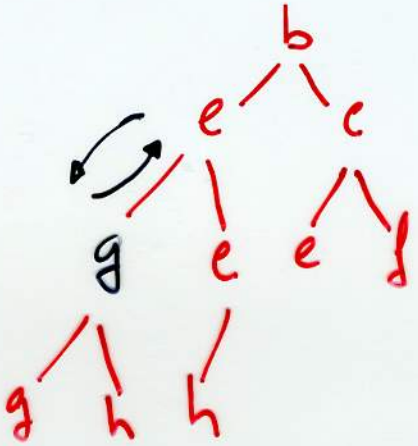
$O(\log_2 n)$

Borrado









Todas estas operaciones pueden hacerse gracias a la idea de tener las hojas en el ABO empujadas hacia la izq^da.

$$O(\log_2(n))$$

```
/* Fichero: APO.h */

#ifndef __APO_h__
#define __APO_h__

/**
@memo T.D.A. APO
@doc Definición:
```

Una instancia a del tipo de dato abstracto *Apo* sobre un dominio *Tbase* es un árbol binario con etiquetas en *Tbase* y un orden parcial que consiste en que la etiqueta de un nodo es menor o igual que la de sus descendientes. Para poder gestionarlo, debe existir la operacin *menor*($<$) para el tipo *Tbase*.

```
template <class Tbase>
class Apo {
private:
/**
@name Implementación de T.D.A. ABB
@memo Parte privada. */

Tbase *vec;
/**
@memo Matriz de elementos
@doc En la matriz vec se almacenan los elementos del Apo.  */

int nelementos;
/**
@memo Número de elementos
@doc Este entero almacena el número de elementos del Apo, es decir, el Apo se almacena en las posiciones desde la 0 a nelementos-1.  */
```

int Maxelementos;
/**
@memo Capacidad de almacenamiento
@doc En este entero se indica la cantidad de posiciones que hay reservadas en la matriz *vec*, que obviamente tiene que ser mayor o igual a *nelementos* */

void expandir(int nelem);
/**
@memo Aumenta la capacidad de almacenamiento
@param nelem: Nuevo número de casillas reservadas para la matriz *vec* $nelementos \leq nelem$
@doc Asigna un bloque de memoria para *nelem* elementos para almacenar la matriz *vec*. Al terminar, *vec* apunta a un bloque con esa capacidad, conservando el contenido anterior y el miembro *Maxelementos* vale *nelem*. Sin embargo, si *nelem* es menor o igual que Maxelementos no hace nada. */

/** *@name* **Invariante de la representación**
@memo Inv. de Apo
@doc El invariante para un apo a es

$a.nelementos <= a.Maxelementos$

a.vec apunta a un bloque de memoria reservada de *a.Maxelementos*.

$\forall i, j$ tal que $0 \leq i < j < a.nelementos$ y (j=2*i+1 o j=2*i+2) a.vec[i]$\leq$a.vec[j]

*/

/** *@name* **Función de abstracción**
@memo F.A. de Apo.
@doc
Sea *T* un árbol parcialmente ordenado sobre el tipo *Tbase*. Diremos que el subárbol a partir de la posicin *i* es:

Si $0 \leq i < nelementos$ el que tiene como elemento raiz el valor *T.vec[i]* y como subárboles izquierda y derecha, los subárboles a partir de *i*2+1* y *i*2+2*. En caso contrario ($i \geq nelementos$), el árbol vacio.

El árbol *T*, del conjunto de valores en la representación se aplica al árbol a partir de la posición 0.

*/

public:
@name **Operaciones de T.D.A. Apo**
@memo **Operaciones sobre Apo**

*/

Apo();
/**
@memo Constructor por defecto
@doc Reserva los recursos e iniciliza el árbol a vacío {}. La operación se realiza en tiempo O(1). */

Apo(int tam);
/**
@memo Constructor con tamaño
@param tam: número de elementos que se espera pueda llegar a tener el árbol.
@doc Reserva los recursos e inicializa el Arbol a vacio. La operación se realiza en tiempo $O(tam)$. */

Apo (**const** Apo<Tbase>& a);
/**
@memo Constructor de copia
@param a: Apo a copiar
@doc Construye el árbol duplicando el contenido de *a* en el árbol receptor. La operación se realiza en tiempo O(n), donde *n* es el número de elementos de *a*. */

~Apo();
/**
@memo Destructor
@doc Libera los recursos ocupados por el árbol receptor. La operación se realiza en tiempo O(n) donde *n* es el número de elementos del árbol receptor. */

Apo<Tbase>& operator=(**const** Apo<Tbase> &a);
/**
@memo Asignación
@param a: Apo a copiar
@return Referencia al árbol receptor.
@doc Asigna el valor del árbol duplicando el contenido de *a* en el árbol receptor. La operación se realiza en tiempo O(n), donde *n* es el número de elementos de *a*. */

const Tbase& minimo() **const**;
/**
@memo Mínimo elemento almacenado
@return referencia constante al elemento que es mínimo en el árbol receptor.
@precondition El árbol no está vacio
@doc Devuelve una referencia al elemento más pequeño de los almacenados en el árbol receptor. La operación se realiza en tiempo O(1). */

void borrar_minimo();
/**
@memo Elimina el mínimo
@precondition El árbol no está vacio
@doc Elimina del árbol receptor el elemento más pequeño. La operación se realiza en tiempo $O(logn)$. */

void insertar (const Tbase& el);
/**
@memo Insertar un elemento
@param el: nuevo elemento a insertar
@doc Inserta el elemento *el* en el árbol receptor. La operación se realiza en tiempo $O(logn)$. */

```
void clear();
/**
@memo Borra todos los elementos
@doc Borra todos los elementos del árbol receptor. Cuando termina, el árbol está vacio.
La operación se realiza en tiempo O(1).  */

int size() const;
/**
@memo Número de elementos
@return El número de elementos del árbol receptor.
@doc La operación se realiza en tiempo O(1).  */

bool empty() const;
/**
@memo Vacio
@return Devuelve true si el número de elementos del árbol receptor es cero, false en otro caso.
@doc La operación se realiza en tiempo O(1).  */

};
```

```
/*  IMPLEMENTACION DE LAS FUNCIONES  *

#include <cassert>
/*-------------------------------------------------*/
// FUNCIONES PRIVADAS
/*-------------------------------------------------*/


template <class Tbase>
void Apo<Tbase>::expandir (int nelem)
{
  Tbase *aux;
  int i;

  if (nelem>Maxelementos) {
    aux= new Tbase[nelem];
    for (i=0;i<nelementos;i++)
      aux[i]=vec[i];
    delete[] vec;
    vec= aux;
    Maxelementos=nelem;
  }
}
/*----------------------------------------- */
```

```
/*-------------------------------------------------*/
// FUNCIONES PUBLICAS
/*-------------------------------------------------*/


template <class Tbase>
Apo<Tbase>::Apo()
{
  vec= new Tbase;
  nelementos= 0;
  Maxelementos= 1;
}
/*---------------------------------------- */

template <class Tbase>
Apo<Tbase>::Apo(int tam)
{
  vec= new Tbase[tam];
  nelementos= 0;
  Maxelementos= tam;
}
/*---------------------------------------- */
```

```
template <class Tbase>
Apo<Tbase>::Apo (const Apo<Tbase>& a)
{
  int i,aux;

  aux=a.nelementos;
  if (aux==0) aux=1;
  vec= new Tbase[aux];
  nelementos= a.nelementos;
  Maxelementos= aux;
  for (i=0;i<nelementos;i++)
      vec[i]= a.vec[i];
}
/*---------------------------------------- */
```

```
template <class Tbase>
inline Apo<Tbase>::~Apo()
{
  delete[] vec;
}
/*_____________________________________ */

template <class Tbase>
Apo<Tbase>& Apo<Tbase>::operator=(const
                                  Apo<Tbase> &a)
{
  int i;

  if (this!=&a) {
    delete[] vec;
    vec= new Tbase[a.nelementos];
    nelementos= a.nelementos;
    Maxelementos= a.nelementos;
    for (i=0;i<nelementos;i++)
      vec[i]= a.vec[i];
  }
  return *this;
}
/*_____________________________________ */
```

```
template <class Tbase>
inline const Tbase& Apo<Tbase>::minimo() const
{
  assert(nelementos>0);
  return vec[0];
}
/*---------------------------------------- */
```

```
template <class Tbase>
void Apo<Tbase>::insertar (const Tbase& el)
{
  int pos;
  Tbase aux;

  if (nelementos==Maxelementos)
    expandir(2*Maxelementos);

  nelementos++;
  pos=nelementos-1;
  vec[pos]=el;
  while((pos>0) && (vec[pos]<vec[(pos-1)/2])) {
    aux= vec[pos];
    vec[pos]=vec[(pos-1)/2];
    vec[(pos-1)/2]= aux;
    pos= (pos-1)/2;
  }

}
/*_____________________________________ */
```

```
template <class Tbase>
void Apo<Tbase>::borrar_minimo()
{
  int pos,pos_min, ultimo;
  bool acabar;
  Tbase aux;

  assert(nelementos>0);
  vec[0]=vec[nelementos-1];
  nelementos--;
  if (nelementos>1) {
    ultimo= nelementos-1;
    pos=0;
    acabar= false;
    while(pos<=(ultimo-1)/2 && !acabar) {
      if (2*pos+1==ultimo)
pos_min=2*pos+1;
      else if (vec[2*pos+1]<vec[2*pos+2])
pos_min= 2*pos+1;
      else pos_min= 2*pos+2;
```

```
      if (vec[pos_min]<vec[pos]){
aux= vec[pos]; // swap..se puede mejorar
vec[pos]=vec[pos_min];
vec[pos_min]= aux;
pos=pos_min;
      }
      else acabar= true;
    }
  }
}
/*_____________________________________ */
```

```
template <class Tbase>
inline void Apo<Tbase>::clear()
{
  nelementos=0;
}
/*_____________________________________ */

template <class Tbase>
inline int Apo<Tbase>::size() const
{
  return nelementos;
}
/*_____________________________________ */

template <class Tbase>
inline bool Apo<Tbase>::empty() const
{
  return nelementos==0;
}
/*_____________________________________ */

#endif

/*   Fin Fichero: Apo.h   */
```

Algoritmo de ordenación Heapsort

```
#include <ctime>
#include <iostream>
#include <Apo.h>

int main()
  {
    Apo<int>  a(100.000);
    int i;
    srand(time(NULL));
    for (i=0; i<100.000 ; i+=2)
       a.insertar((int)(1.000.0 * rand()/RAND_MAX));
    while (!a.empty()) {
            cout << a.minimo() << ' ';
            a.borrar_minimo();
     }
    cout << endl;
   return 0;
}
```