第十二章 对策论

12.3 矩阵对策的解法

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

12.3 矩阵对策的解法

图解法

- 主要用于求解赢得矩阵为 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 阶的对策问题
- 从几何上理解对策论的思想

图解法

- 主要用于求解赢得矩阵为 $2\times n$ 或 $m\times 2$ 阶的对策问题
- 从几何上理解对策论的思想
- 例 1: 用图解法求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

  以及 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$
- 例 2: 用图解法求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 6 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

  以及 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $S_2=\{\beta_1,\beta_2\}$

方程组法

- **定理 4:** 设 $x^* \in S_1^*$ 和 $y^* \in S_2^*$，则 (x^*, y^*) 为对策 G 的解的充要条件是: 存在数 v，使得 x^* 和 y^* 分别是以下不等式组的解

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq v, \ j = 1, \ldots, n \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq v, \ i = 1, \ldots, m \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2}$$

且 $v = V_G$。

- 求矩阵对策解 (x^*, y^*) 的问题等价于求解不等式组(1)和(2)

方程组法

- **定理 4:** 若最优策略中的 x^* 和 y^* 均不为零，则上述两不等式组的求解问题转化为下面两个方程组的求解问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i = v, \ \ j = 1, \ldots, n \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j = v, \ \ i = 1, \ldots, m \\ \sum_j y_j = 1 \end{cases} \tag{4}$$

  且 $v = V_G$。

- 若最优策略中的 x^* 和 y^* 均不为零
  - 若方程组(3)和(4)存在非负解 x^* 和 y^*，便求得了对策的一个解；
  - 若这两个方程组不存在非负解，则可视具体情况，将式(3)和(4)中的某些等式改成不等式，继续试求解，直至求得对策的解。
- 若最优策略的某些分量为零，则式(3)和(4)可能无解

方程组法

- 针对赢得矩阵为 2×2 阶的对策问题

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

如果 A 有鞍点，则很容易求出各局中人的最优纯策略；如果 A 没有鞍点，则可以证明各局中人最优混合策略中的 x^* 和 y^* 均大于零，于是，为求最优混合策略可求下列方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 = v \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

方程组法

- 一定有严格的非负解（也就是两个局中人的最优策略）

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$v^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = V_G$$

方程组法

- 优超: 给定矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，A 是 $m\times n$ 的矩阵，如果

$$a_{kj}\geq a_{lj},\ j=1,1,\ldots,n$$

则称局中人 1 的策略 k 优超于策略 l。如果

$$a_{ik}\geq a_{il},\ i=1,1,\ldots,m$$

则称局中人 2 的策略 k 优超于策略 l。

- 局中人 1 的策略 k 优超于策略 l 则说明对局中人 1 而言当其采用策略 k，无论局中人 2 采用任何策略，其获得都比采用策略 l 来的好。因而策略 l 出现的概率为 0，可以在赢得矩阵中删除该策略对应的行。

例 11

- 求解矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- **线性规划法**
  - **定理 5:** 对任一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，一定存在混合策略意义下的解。

线性规划法

- **定理 5:** 对任一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，一定存在混合策略意义下的解。
- 由定理 3，只要证明存在 $x^*\in S_1^*$ 和 $y^*\in S_2^*$ 使得定理 3 中公式成立。为此，考虑如下两个线性规划问题

$$
\text{(P)}\quad \max\ w
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_i a_{ij}x_i \geq w,\ \ j=1,\ldots,n\\ \sum_i x_i=1\\ x_i\geq 0,\ \ i=1,\ldots,m\end{cases}
$$

和

$$
\text{(D)}\quad \min\ v
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_j a_{ij}y_j \leq v,\ \ i=1,\ldots,m\\ \sum_j y_j=1\\ y_j\geq 0,\ \ j=1,\ldots,n\end{cases}
$$

线性规划法

- 在问题 (P) 中，令 (根据定理 7，不妨设 $w>0$)

$$x_i{}' = \frac{x_i}{v},\ i = 1, \ldots, m$$

则 (P) 的约束条件变为

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i^{'} \geq 1,\ j = 1, \ldots, n \\ \sum_i x_i^{'} = \frac{1}{w} \\ x_i^{'} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

则该不等式即等价于线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_i x_i^{'} \\ \text{s.t.}\ & \begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i^{'} \leq 1,\ j = 1, \ldots, n \\ x_i^{'} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m \end{cases} \end{aligned}$$

- 线性规划法
  - 同理，作变换

$$y_j{}' = \frac{x_j}{v},\ j = 1, \ldots, n$$

则 (D) 等价于线性规划问题

$$\max \ \sum_j y_j^{'}$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j^{'} \le 1,\ i = 1, \ldots, m \\ y_j^{'} \ge 0,\ j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

12.3 矩阵对策的解法

- 小结
  - 图解法
  - 方程组法
  - 线性规划法
- 课后作业: P376, 习题 12.1, 12.2, 12.3

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈