

# 第一章 线性规划及单纯形法

## 1.3 单纯形法原理

修贤超

机电工程与自动化学院  
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

# 1.3 单纯形法原理

## ■ 解的概念

### □ 标准形式

$$(LP) \quad \max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) & (1.3) \end{cases}$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

#### □ 标准形式

$$(LP) \quad \max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) & (1.3) \end{cases}$$

- 满足约束条件 (1.2) 和 (1.3) 的  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 满足 (1.1) 的可行解称为**最优解**
- 最优解所对应的函数值称为**最优值**

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

□ 设  $A$  为约束方程组 (1.2) 的  $m \times n$  ( $n > m$ ) 阶系数矩阵, 其秩为  $m$ ,  $B$  是矩阵  $A$  中的一个  $m \times m$  阶的满秩子矩阵, 记为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

- 设  $A$  为约束方程组 (1.2) 的  $m \times n$  ( $n > m$ ) 阶系数矩阵, 其秩为  $m$ ,  $B$  是矩阵  $A$  中的一个  $m \times m$  阶的满秩子矩阵, 记为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

- $B$  是线性规划问题 (LP) 的一个**基**
- $B$  中的每一个列向量  $P_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) 称为**基向量**
- 与基向量  $P_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) 对应的变量  $x_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) 称为**基变量**, 记为  $X_B = (x_1, \cdots, x_m)$
- 除基变量以外的变量称为**非基变量**, 记为  $X_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念



$$(LP) \quad \max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

□ 在 (1.2) 中, 令所有非基变量  $\mathbf{X}_N = (x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$ , 则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为线性规划问题 (LP) 的**基解**

□ 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为**基可行解**

□ 对应于基可行解的基称为**可行基**

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 找出线性规划问题的基、基向量和基变量

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 70x_1 + 120x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 第一步：写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 第一步：写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ 第二步：寻找阶为  $m$  的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基变量为  $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$ ，非基变量为  $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 第一步：写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ 第二步：寻找阶为  $m$  的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基变量为  $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$ ，非基变量为  $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

□ 第三步：另一个基为

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基变量为  $\mathbf{X}_B = (x_2, x_4, x_5)^\top$ ，非基变量为  $\mathbf{X}_N = (x_1, x_3)^\top$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 课堂练习 1

□ 求出全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

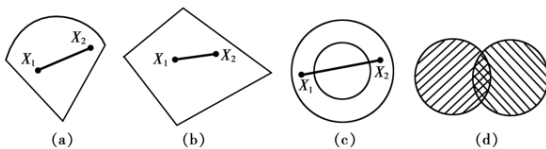
## 1.3 单纯形法原理

### ■ 凸集

□ 对于任意两点  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \Omega$ , 满足

$$\alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称  $\Omega$  为凸集。



□ 对于凸集  $\Omega$  中的点  $\mathbf{X}$ , 如果**不存在**  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \Omega$  使得

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称  $\mathbf{X}$  是凸集  $\Omega$  的顶点。

## 1.3 单纯形法原理

■ 定理 1: 若线性规划问题存在可行解, 则可行域是凸集。

□ 记  $\Omega$  为满足线性规划问题束条件的集合

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

设  $\Omega$  内的任意两点为

$$\mathbf{X}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^\top, \quad \mathbf{X}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})^\top$$

且  $\mathbf{X}^{(1)} \neq \mathbf{X}^{(2)}$ , 一定满足

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(1)} = \mathbf{b}, \quad x_j^{(1)} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(2)} = \mathbf{b}, \quad x_j^{(2)} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 定理 1

□ 令  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  为  $\mathbf{X}^{(1)}$ ,  $\mathbf{X}^{(2)}$  连线上任意一点, 即

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbf{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中  $x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1 - \alpha) x_j^{(2)}$ 。于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \left( \alpha x_j^{(1)} + (1 - \alpha) x_j^{(2)} \right) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(2)} \\ &= \alpha \mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

又因  $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $1 - \alpha > 0$ , 所以  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ )。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 定理 1

□ 令  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  为  $\mathbf{X}^{(1)}$ ,  $\mathbf{X}^{(2)}$  连线上任意一点, 即

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbf{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中  $x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1 - \alpha) x_j^{(2)}$ 。于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \left( \alpha x_j^{(1)} + (1 - \alpha) x_j^{(2)} \right) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j^{(2)} \\ &= \alpha \mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

又因  $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $1 - \alpha > 0$ , 所以  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ )。由此可见  $\mathbf{X} \in \Omega$ , 可得  $\Omega$  是凸集, 证毕。

## 1.3 单纯形法原理

- 引理 1: 线性规划问题的可行解  $X$  为基可行解的充要条件是  $X$  的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。



## 1.3 单纯形法原理

- 引理 1: 线性规划问题的可行解  $X$  为基可行解的充要条件是  $X$  的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

□ (必要性) 由基可行解的定义可知。

## 1.3 单纯形法原理

- 引理 1: 线性规划问题的可行解  $X$  为基可行解的充要条件是  $X$  的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

□ (必要性) 由基可行解的定义可知。

□ (充分性) 若向量  $P_1, \dots, P_k$  线性独立, 则必有  $k \leq m$ 。

## 1.3 单纯形法原理

- 引理 1: 线性规划问题的可行解  $\mathbf{X}$  为基可行解的充要条件是  $\mathbf{X}$  的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

□ (必要性) 由基可行解的定义可知。

□ (充分性) 若向量  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$  线性独立, 则必有  $k \leq m$ 。

(1) 当  $k = m$  时, 它们恰构成一个基, 从而

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为相应的基可行解。

(2) 当  $k < m$  时, 则一定可以从其余的列向量中取出  $m - k$  个与

$$\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$$

构成最大的线性独立向量组, 其对应的解恰为  $\mathbf{X}$ , 所以根据定义它是基可行解。

## 1.3 单纯形法原理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解  $X$  对应线性规划问题可行域的顶点。

## 1.3 单纯形法原理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解  $\mathbf{X}$  对应线性规划问题可行域的顶点。

□ 不失一般性, 假设基可行解  $\mathbf{X}$  的前  $m$  个分量为正, 于是

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b} \quad (1)$$

## 1.3 单纯形法原理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解  $\mathbf{X}$  对应线性规划问题可行域的顶点。

□ 不失一般性, 假设基可行解  $\mathbf{X}$  的前  $m$  个分量为正, 于是

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b} \quad (1)$$

□ 第一步: 若  $\mathbf{X}$  不是基可行解, 则它一定不是可行域的顶点。

根据引理 1, 若  $\mathbf{X}$  不是基可行解, 则其正分量所对应的系数列向量  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$  线性相关, 即存在不全为零的数  $\alpha_i$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) 有

$$\alpha_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{P}_m = \mathbf{0} \quad (2)$$

## 1.3 单纯形法原理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解  $\mathbf{X}$  对应线性规划问题可行域的顶点。

□ 不失一般性, 假设基可行解  $\mathbf{X}$  的前  $m$  个分量为正, 于是

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b} \quad (1)$$

□ 第一步: 若  $\mathbf{X}$  不是基可行解, 则它一定不是可行域的顶点。

根据引理 1, 若  $\mathbf{X}$  不是基可行解, 则其正分量所对应的系数列向量  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$  线性相关, 即存在不全为零的数  $\alpha_i$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) 有

$$\alpha_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{P}_m = \mathbf{0} \quad (2)$$

式(2)乘  $\mu > 0$  再分别与式(1)相加减, 得到

$$(x_1 - \mu\alpha_1)\mathbf{P}_1 + \dots + (x_m - \mu\alpha_m)\mathbf{P}_m = \mathbf{b}$$

$$(x_1 + \mu\alpha_1)\mathbf{P}_1 + \dots + (x_m + \mu\alpha_m)\mathbf{P}_m = \mathbf{b}$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 定理 2

□ 取

$$\mathbf{X}^{(1)} = [(x_1 - \mu\alpha_1), \cdots, (x_m - \mu\alpha_m), 0, \cdots, 0]$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = [(x_1 + \mu\alpha_1), \cdots, (x_m + \mu\alpha_m), 0, \cdots, 0]$$

由上式可以得到

$$\mathbf{X} = (1/2)\mathbf{X}^{(1)} + (1/2)\mathbf{X}^{(2)} \quad (3)$$

即  $\mathbf{X}$  是  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$  连线的中点。

另一方面, 当  $\mu$  充分小时, 可保证

$$x_i \pm \mu\alpha_i \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, m)$$

即  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$  是可行解, 又因(3), 这证明  $\mathbf{X}$  不是可行域  $\Omega$  的顶点。



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 定理 2

□ 第二步: 若  $\mathbf{X}$  不是可行域的顶点, 则它一定不是基可行解。

因为  $\mathbf{X}$  不是可行域  $\Omega$  的顶点, 故在可行域  $\Omega$  中可找到不同的两点

$$\mathbf{X}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^\top$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})^\top$$

使得

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbf{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

设  $\mathbf{X}$  是基可行解, 对应向量组  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$  线性独立。当  $j > m$  时, 有  $x_j = x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$ 。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 定理 2

□ 由于  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$  是可行域的两点, 应满足

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j x_j^{(1)} = \mathbf{b},$$

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j x_j^{(2)} = \mathbf{b}$$

将这两式相减, 即得

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) = \mathbf{0}$$

因  $\mathbf{X}^{(1)} \neq \mathbf{X}^{(2)}$ , 所以上式系数不全为零, 故向量组  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$  线性相关, 与假设矛盾。证毕。

## 1.3 单纯形法原理

- 定理 3: 若线性规划问题有最优解, 一定存在一个基可行解是最优解。

□ 设  $\mathbf{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^\top$  是线性规划的一个最优解。

若  $\mathbf{X}^{(0)}$  不是基可行解, 由定理 2 知  $\mathbf{X}^{(0)}$  不是顶点, 一定能在可行域内找到通过  $\mathbf{X}^{(0)}$  的直线上的另外两个点

$$\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta \geq 0, \mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta \geq 0$$

带入目标函数有

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}\mu\delta$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{C}\mu\delta$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 定理 3

□ 因  $\mathbf{CX}^{(0)}$  为目标函数的最大值，故有

$$\mathbf{CX}^{(0)} \geq \mathbf{CX}^{(0)} + \mathbf{C}\mu\delta$$

$$\mathbf{CX}^{(0)} \geq \mathbf{CX}^{(0)} - \mathbf{C}\mu\delta$$

由此  $\mathbf{C}\mu\delta = 0$ ，即有  $\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) = \mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta)$ 。

如果  $(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta)$  或  $(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta)$  仍不是基可行解，按上面的方法继续做下去，最后一定可以找到一个基可行解，其目标函数值等于  $\mathbf{CX}^{(0)}$ ，问题得证。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 单纯形法原理

- 如果线性规划问题存在最优解，那么一定有一个基可行解是最优解

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 单纯形法原理

- 如果线性规划问题存在最优解，那么一定有一个基可行解是最优解
- 单纯形法迭代的基本思路：先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 单纯形法原理

- 如果线性规划问题存在最优解，那么一定有一个基可行解是最优解
- 单纯形法迭代的基本思路：先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止
  - **第一步：**求初始基可行解，列出初始单纯形表
  - **第二步：**最优性检验
  - **第三步：**从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表
  - **第四步：**重复二、三两步，一直到计算结束为止

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 小结

- 可行解，最优解
- 基，基解，基可行解，可行基
- 凸集
- 顶点
- 解的性质
  - 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集
  - 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点
  - 若线性规划问题有最优解，必在某顶点上得到



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 小结

- 可行解, 最优解
- 基, 基解, 基可行解, 可行基
- 凸集
- 顶点
- 解的性质
  - 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集
  - 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点
  - 若线性规划问题有最优解, 必在某顶点上得到
- 课后作业: P44, 习题 1.3

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈