

第一章 线性规划及单纯形法

1.5 单纯形法的进一步讨论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 单纯形法计算步骤

□ 考虑求解线性规划问题

$$\begin{array}{ll}\max & z = -3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 单纯形法计算步骤

□ 考虑求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 没有可作为初始基的单位矩阵

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 大 M 法

□ 第 1 步：标准化

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 \quad \quad x_2 \quad \quad x_3 \quad \quad x_4 \quad \quad x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 大 M 法

□ 第 1 步：标准化

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 第 2 步：增加人工变量 x_6, x_7

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_7 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 大 M 法

□ 第 3 步：用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0	$-M$	$-M$
\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
$-M$	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			-3-2M	4M	1	0	-M	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
$c_j - z_j$			-3+6M	0	1+4M	0	3M	-4M	0

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 大 M 法

□ 第 3 步：用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0	$-M$	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	0	0	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	x_2	3	0	1	$1/3$	0	0	0	$1/3$
-3	x_1	1	1	0	$[2/3]$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/6$
$c_j - z_j$			0	0	3	0	$3/2$	$-3/2 - M$	$1/2 - M$
0	x_4	0	0	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
0	x_2	$5/2$	$-1/2$	1	0	0	$-1/4$	$1/4$	$1/4$
1	x_3	$3/2$	$3/2$	0	1	0	$3/4$	$-3/4$	$1/4$
$c_j - z_j$			$-9/2$	0	0	0	$-3/4$	$3/4 - M$	$-1/4 - M$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 例 3

□ 用大 M 法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 = 14 \\ x_2 \geq 22 \\ x_1 \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 例 3

□ 用大 M 法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 = 14 \\ x_2 \geq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 标准化, 增加人工变量

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 120 \\ x_1 + x_6 = 14 \\ x_2 - x_5 + x_7 = 22 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 大 M 法

□ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			6	4	0	0	0	$-M$	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_3	100	2	3	1	0	0	0	0
0	x_4	120	4	2	0	1	0	0	0
$-M$	x_6	14	[1]	0	0	0	0	1	0
$-M$	x_7	22	0	1	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			M+6	$M+4$	0	0	$-M$	0	0
0	x_3	72	0	3	1	0	0	-2	0
0	x_4	64	0	2	0	1	0	-4	0
6	x_1	14	1	0	0	0	0	1	0
$-M$	x_7	22	0	[1]	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			0	$M+4$	0	0	$-M$	$-6-M$	0

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 大 M 法

□ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			6	4	0	0	0	$-M$	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_3	6	0	0	1	0	[3]	-2	-3
0	x_4	20	0	0	0	1	2	-4	-2
6	x_1	14	1	0	0	0	0	1	0
4	x_2	22	0	1	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			0	0	0	0	4	$-6 - M$	$-4 - M$
0	x_5	2	0	0	1/3	0	1	-2/3	-1
0	x_4	16	0	0	-2/3	1	0	-8/3	0
6	x_1	14	1	0	0	0	0	1	0
4	x_2	24	0	1	1/3	0	0	-2/3	0
$c_j - z_j$			0	0	-4/3	0	0	$-10/3 - M$	$-M$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 两阶段法: 克服计算机处理 M 的困难 (精度—误差)

□ 求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ **第一阶段** 寻找原问题的一个基本可行解

$$\min \quad w = x_6 + x_7$$

□ **第二阶段** 得到原问题的最优解

$$\min \quad z = -3x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 两阶段法

□ 第一阶段

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0	-1	-1
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
-1	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
-1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			-2	4	0	0	-1	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
-1	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
$c_j - z_j$			6	0	4	0	3	-4	0
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_7	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6
$c_j - z_j$			0	0	0	0	0	-1	1

1.5 单纯形法的进一步讨论

■ 两阶段法

□ 第二阶段

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0
0	x_7	1	1	0	[2/3]	0	1/2
$c_j - z_j$			0	0	3	0	3/2
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4
$c_j - z_j$			-9/2	0	4	0	-3/4

1.5 单纯形法的进一步讨论

- 小结

- 大 M 法

- 两阶段法

- 课后作业: P44, 习题 1.6

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈