第五章 整数规划

5.5 指派问题

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

5.5 指派问题

典型的指派问题

- **指派问题**: 若干项任务需要若干个人完成，如何分配任务会使所需的时间最小或成本最低。

典型的指派问题

- **指派问题**: 若干项任务需要若干个人完成，如何分配任务会使所需的时间最小或成本最低。
- **标准形式**: n 个人，n 件事，第 i 个人做第 j 件事的费用为 c_{ij}，确定人和事之间一一对应的指派方案，使完成 n 件事的总费用最小。

典型的指派问题

- 指派问题: 若干项任务需要若干个人完成，如何分配任务会使所需的时间最小或成本最低。
- 标准形式: n 个人，n 件事，第 i 个人做第 j 件事的费用为 c_{ij}，确定人和事之间一一对应的指派方案，使完成 n 件事的总费用最小。
- 一般称 C 为指派问题的效率矩阵或系数矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

标准指派问题的数学模型

- 引入 n^2 个 0-1 变量

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \\ 0 \text{ 不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

- 标准指派问题的数学模型为

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \ldots, n) & (1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \ldots, n) & (2) \\ x_{ij} = 0 \text{或} 1 \ (i, j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

标准指派问题的数学模型

- 引入 n^2 个 0-1 变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 \text{ 指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \\ 0 \text{ 不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事}\end{cases} \quad (i,j=1,\ldots,n)$$

- 标准指派问题的数学模型为

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \ (j=1,\ldots,n) & (1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \ (i=1,\ldots,n) & (2) \\ x_{ij}=0\text{或}1 \ (i,j=1,\ldots,n)\end{cases}$$

其中 (1) 表示每件事必有且只有一个人去做，(2) 表示每个人必做且只做一件事。

例 1

- 某商业公司计划开办 5 家新商店，决定由 5 家建筑公司分别承建。已知建筑公司 A_i $(i=1,\ldots,5)$ 对新商店 B_j $(j=1,\ldots,5)$ 的建造费用的报价 (万元) 为 c_{ij} $(i,j=1,\ldots,5)$。如仅考虑节省费用，商业公司应当对 5 家建筑公司怎样分配建造任务，才能使总的建造费用最少?

建筑公司	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

例 1

引入 0-1 变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 \text{ 指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \\ 0 \text{ 不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事}\end{cases} \qquad (i,j=1,\ldots,5)$$

则问题的数学模型为

$$\min \ z = 4x_{11}+8x_{12}+\cdots+10x_{54}+6x_{55}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{5} x_{ij}=1 \ (j=1,\ldots,5) \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_{ij}=1 \ (i=1,\ldots,5) \\ x_{ij}=0\text{或}1 \ (i,j=1,\ldots,5)\end{cases}$$

例 1

- 问题的系数矩阵为

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

- 问题的其中一个 (可行) 解矩阵为

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{5\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 注意: 指派问题友 $n!$ 个可行解，且每行每列只有一个 1。

匈牙利解法

- **性质 1:** 若从指派问题的系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 的某行或某列各元素中分别减一个常数 k, 得到的新矩阵与原矩阵有相同的最优解。
- **性质 2:** 称位于不同行不同列的 0 元素为独立 0 元素，那么 n 个独立 0 元素取值为 1，其余元素取值为 0，是最优解。
- **性质 3:** 系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最少直线数。

匈牙利解法

- 性质 1: 若从指派问题的系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 的某行或某列各元素中分别减一个常数 k, 得到的新矩阵与原矩阵有相同的最优解。
- 性质 2: 称位于不同行不同列的 0 元素为独立 0 元素，那么 n 个独立 0 元素取值为 1，其余元素取值为 0，是最优解。
- 性质 3: 系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最少直线数。

解题思路

- 利用性质 1，能够将原系数矩阵变换为含有很多 0 元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。

5.5 指派问题

匈牙利解法

- **性质 1:** 若从指派问题的系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 的某行或某列各元素中分别减一个常数 k, 得到的新矩阵与原矩阵有相同的最优解。
- **性质 2:** 称位于不同行不同列的 0 元素为独立 0 元素，那么 n 个独立 0 元素取值为 1，其余元素取值为 0，是最优解。
- **性质 3:** 系数矩阵 $(c_{ij})_{n\times n}$ 中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最少直线数。

解题思路

- 利用性质 1，能够将原系数矩阵变换为含有很多 0 元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。
- 若能在新系数矩阵 $(c_{ij})'_{n\times n}$ 中找出 n 个独立 0 元素，则令解矩阵 $(x_{ij})_{n\times n}$ 中对应这 n 个独立 0 元素的元素取值为 1，其它元素取值为 0，此时目标函数 $z = C'X = 0$ 为最小值，因此 $(x_{ij})_{n\times n}$ 为含系数矩阵 $(c_{ij})'_{n\times n}$ 的指派问题的最优解，也是原问题的最优解。

- 匈牙利解法
  - 步骤一: 由性质 1，变换系数矩阵，使各行各列都出现 0 元素。
    - 先对各行元素分别减去本行中的最小元素;
    - 再对各列元素分别减去本列中最小元素。

匈牙利解法

- **步骤一**: 由性质 1，变换系数矩阵，使各行各列都出现 0 元素。
  - 先对各行元素分别减去本行中的最小元素;
  - 再对各列元素分别减去本列中最小元素。
- **步骤二**: 确定独立 0 元素。

(1) 从只有一个零元素的行开始，给这个 0 元素加圈，记作 ◎，然后划去 ◎ 所在列的其它 0 元素，记作 ϕ;

(2) 给只有一个零元素的列的零元素加圈，记作 ◎，然后划去 ◎ 所在行的其它 0 元素，记作 ϕ;

(3) 反复进行 (1),(2) 两步，直到所有 0 元素都被圈出和划掉为止;

(4) 若仍出现同行 (列) 至少有两个 0 元素的，用试探法，从剩有 0 元素最少的行 (列) 开始，比较该行各 0 元素所在列中 0 元素的数目，选择 0 元素少的那列的这个 0 元素加圈，然后划掉同行同列的其它 0 元素，可反复进行，直到所有 0 元素都被圈出和划掉为止;

(5) 画 ◎ 元素数目即为独立 0 元素数，若为 n 个，由性质 2，知得到最优解；若少于 n 个，则转入下一步。

匈牙利解法

- **步骤三:** 利用性质 3，确定能覆盖所有 0 元素的最少直线数目的直线集合。
  (1) 对没有 ◎ 的行打 ✓;
  (2) 对已打 ✓ 的行中，对 ϕ 所在列打 ✓;
  (3) 再对打有 ✓ 的列中含 ◎ 元素的行打 ✓;
  (4) 重复 (2),(3) 直到找不出新的打 ✓ 的行、列为止;
  (5) 对没有打 ✓ 的行画一横线，有打 ✓ 的列画一纵线，就得到覆盖所有 0 元素的最少直线数。

匈牙利解法

- **步骤三**: 利用性质 3，确定能覆盖所有 0 元素的最少直线数目的直线集合。
  1. (1) 对没有 ◎ 的行打 ✓;
  2. (2) 对已打 ✓ 的行中，对 ϕ 所在列打 ✓;
  3. (3) 再对打有 ✓ 的列中含 ◎ 元素的行打 ✓;
  4. (4) 重复 (2),(3) 直到找不出新的打 ✓ 的行、列为止;
  5. (5) 对没有打 ✓ 的行画一横线，有打 ✓ 的列画一纵线，就得到覆盖所有 0 元素的最少直线数。
- **步骤四**: 继续变换系数矩阵
  1. (1) 在未被直线覆盖的元素中找出一个最小元素;
  2. (2) 打 ✓ 行中各元素都减去最小元素，出现新的 0 元素;
  3. (3) 打 ✓ 列中各元素都加上最小元素。返回步骤二。

- **例 1**
  - 系数矩阵

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- **例 1**
  - 继续

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

5.5 指派问题

- 例 1
  - 得到

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \circledcirc & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \circledcirc & 5 & \phi & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \circledcirc \end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

例 1

- 重新寻找独立 0 元素

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & ◎ & 11 & 8 \\ \phi & ◎ & 6 & 6 & 2 \\ ◎ & 1 & 2 & 1 & \phi \\ 1 & \phi & 5 & ◎ & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ◎ \end{bmatrix}$$

- 因此

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1c \end{bmatrix}$$

5.5 指派问题

- 非标准形式的指派问题
  - 最大化指派问题 (用最大元素-所有元素化成最小化问题)
  - 人数和事数不等
  - 一个人可做几件事的指派问题
  - 某件事一定不能由某人做

课堂练习

- 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记做 E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁 4 人，他们将中文说明书翻译成不同语种的说明书所需的时间如下，问应指派何人去完成何种工作，使所需总时间最少？

人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

课堂练习

- 得到

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \phi & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \phi & 1 & \circledcirc & \phi \end{bmatrix}$$

- **最优值为** $\min\ z=c_{31}+c_{22}+c_{43}+c_{14}=4+4+9+11=28$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & \color{red}{4} \\ 10 & \color{red}{4} & 14 & 15 \\ \color{red}{9} & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & \color{red}{11} & 9 \end{bmatrix}$$

- **小结**
  - 典型的指派问题
  - 指派问题的标准形式
  - 标准指派问题的数学模型
  - 匈牙利解法
  - 非标准形式的指派问题
- **课后作业: P147, 习题 5.8, 5.9**

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈