第五章 整数规划

5.3 分支定界法

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

5.3 分支定界法

- **分支定界法**
  - 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法

分支定界法

- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法
- 应用范围: 求解纯整数规划和混合整数规划问题

分支定界法

- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取——分支定界法
- 应用范围：求解纯整数规划和混合整数规划问题
- 原问题 A

$$\max \ \ z = c^\top x$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

- 松弛问题 B

$$\max \ \ z = c^\top x$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法基本思想

- 分支: 若松弛问题 B 的最优解不符合整数要求，则将取值为非整数解之一的决策变量取值分区，并入松弛问题中，形成两个分支松弛问题，分别求解。依结果来调整上下界。

分支定界法基本思想

- 分支: 若松弛问题 B 的最优解不符合整数要求，则将取值为非整数解之一的决策变量取值分区，并入松弛问题中，形成两个分支松弛问题，分别求解。依结果来调整上下界。

- 设 $x_r = b_r$ 不符合整数要求，则将松弛问题 B 分为

$$\max \ z = c^\top x \qquad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x_r \ge \lceil b_r \rceil \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\max \ z = c^\top x \qquad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x_r \le \lfloor b_r \rfloor \\ x \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法基本思想

- 分支: 若松弛问题 B 的最优解不符合整数要求，则将取值为非整数解之一的决策变量取值分区，并入松弛问题中，形成两个分支松弛问题，分别求解。依结果来调整上下界。

- 设 $x_r = b_r$ 不符合整数要求，则将松弛问题 B 分为

$$\max \ z = c^\top x \qquad\qquad \max \ z = c^\top x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x_r \ge \lceil b_r \rceil \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x_r \le \lfloor b_r \rfloor \\ x \ge 0 \end{cases}$$

- 定界: 为求解纯整数规划和混合整数规划问题 A，先求出其松弛问题 B 的最优解，作为问题 A 的最优目标函数值的上界，同时选择任意整数可行解作为 A 的最优目标函数值的下界。

例 1

- 求解下述整数线性规划问题 A

$$
\max \ z = 40x_1 + 90x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}
$$

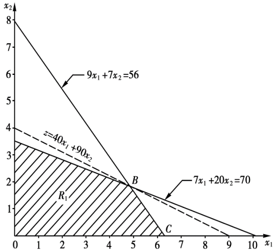
例 1

- 先不考虑整数约束，即解相应的线性规划问题 B

$$\max\ z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

问题 B 的最优解为 $x_1 = 4.81, x_2 = 1.82$，最优值为 $z_0 = 356$



不符合整数条件!

- 例 1
  - 定界: 问题 A 的最优目标函数值

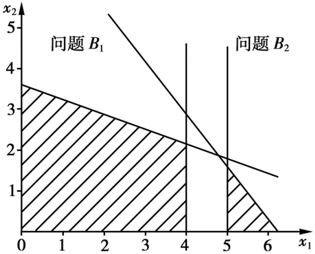
$$0 \le z^* \le 356$$

例 1

- 定界: 问题 A 的最优目标函数值

$$0 \le z^* \le 356$$

- 分支: 在问题 B 的解中，首先注意其中一个非整数变量的解，如 $x_1 = 4.81$。于是对原问题 B 增加两个约束条件 $x_1 \le 4, x_1 \ge 5$，即



  - 问题 B_1 的最优解为 $x_1 = 4.00, x_2 = 2.10$，最优值为 $z_1 = 349$
  - 问题 B_2 的最优解为 $x_1 = 5.00, x_2 = 1.57$，最优值为 $z_2 = 341$

- 例 1
  - 定界: 因 $z_1 > z_2$，故将 z 改为 349，那么必存在最优整数解，满足

$$0 \leq z^* \leq 349$$

5.3 分支定界法

例 1

- **定界**: 因 $z_1 > z_2$，故将 z 改为 349，那么必存在最优整数解，满足

$$0 \le z^* \le 349$$

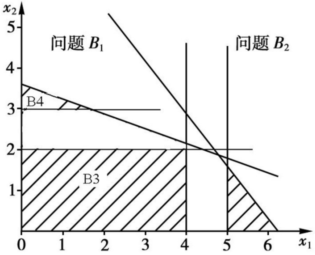
- **分支**: 因 $z_1 > z_2$，故先分解 B_1 为两支
  - 增加条件 $x_2 \le 2$，称为问题 B_3
  - 增加条件 $x_2 \ge 3$，称为问题 B_4

例 1

- 定界: 因 $z_1 > z_2$，故将 z 改为 349，那么必存在最优整数解，满足

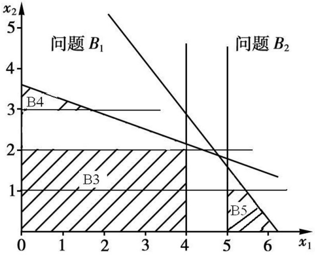
$$0 \leq z^* \leq 349$$

- 分支: 因 $z_1 > z_2$，故先分解 B_1 为两支
  - 增加条件 $x_2 \leq 2$，称为问题 B_3
  - 增加条件 $x_2 \geq 3$，称为问题 B_4
  - 舍去 $x_2 > 2$ 与 $x_2 < 3$ 之间的可行域



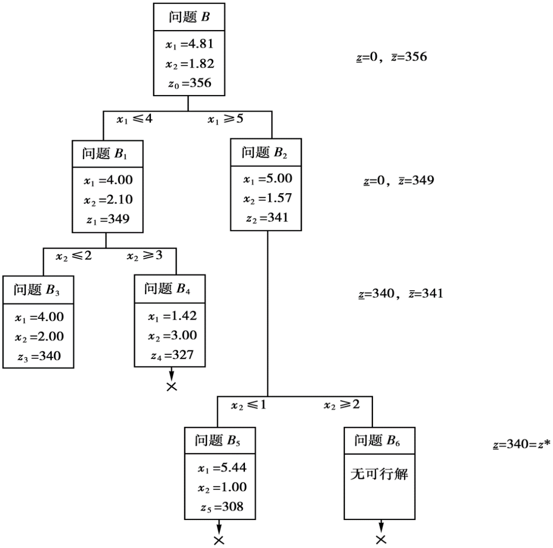
例 1

- 继续对问题 B_2 进行分解
  - 增加条件 $x_2 \le 1$，称为问题 B_5
  - 增加条件 $x_2 \ge 2$，称为问题 B_6
  - 舍去 $x_2 > 1$ 与 $x_2 < 2$ 之间的可行域



5.3 分支定界法

- 解题的过程如下



分支定界法解题步骤

- 考虑整数线性规划 (最大化) 问题 A

$$
\max \ z = c^\top x
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}
$$

分支定界法解题步骤

- 考虑整数线性规划 (最大化) 问题 A

$$\max \ z = c^{\top}x$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

- 步骤 1: 写出问题 A 的松弛问题 B

$$\max \ z = c^{\top}x$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- 分支定界法解题步骤
  - 步骤 2: 求解问题 B，可能得到以下情况之一
    - B 没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止
    - B 有最优解，并符合整数条件，B 的最优解即 A 的最优解，则停止
    - B 有最优解，但不符合整数条件，记它的目标函数值为 $\overline{z}$

分支定界法解题步骤

- 步骤 2: 求解问题 B，可能得到以下情况之一
  - B 没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止
  - B 有最优解，并符合整数条件，B 的最优解即 A 的最优解，则停止
  - B 有最优解，但不符合整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$
- 步骤 3: 用观察法找问题 A 的一个整数可行解，一般可取

$$x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$$

求得其目标函数值，并记作 $\underline{z}$。以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值，这时有

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

分支定界法解题步骤

- 步骤 4: 在问题 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $\lfloor b_j \rfloor$ 表示小于 b_j 的最大整数，以 $\lceil b_j \rceil$ 表示大于 b_j 的最小整数。构造两个约束条件

$$x_j \leq \lfloor b_j \rfloor, \; x_j \geq \lceil b_j \rceil$$

分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。

5.3 分支定界法

分支定界法解题步骤

- 步骤 4: 在问题 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $\lfloor b_j \rfloor$ 表示小于 b_j 的最大整数，以 $\lceil b_j \rceil$ 表示大于 b_j 的最小整数。构造两个约束条件

$$x_j \leq \lfloor b_j \rfloor,\ x_j \geq \lceil b_j \rceil$$

  分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。

- 步骤 5: 以每个后继问题为一分支标明求解的结果，找出最优目标函数值最大者作为新的上界。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界，若无可行解，$\underline{z} = 0$。

分支定界法解题步骤

- **步骤 4:** 在问题 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $\lfloor b_j \rfloor$ 表示小于 b_j 的最大整数，以 $\lceil b_j \rceil$ 表示大于 b_j 的最小整数。构造两个约束条件

$$x_j \leq \lfloor b_j \rfloor,\ x_j \geq \lceil b_j \rceil$$

  分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。

- **步骤 5:** 以每个后继问题为一分支标明求解的结果，找出最优目标函数值最大者作为新的上界。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界，若无可行解，$\underline{z} = 0$。

- **步骤 6:** 各分支的最优目标函数中若有小于 $\underline{z}$ 者，则剪掉这支 (用打 $\times$ 表示)，即以后不再考虑了。若大于 $\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复分支定界。一直到最后得到 z^* 为止，得最优整数解

$$x_j^*,\ j = 1, \ldots, n$$

课堂练习

- 求解下述整数线性规划问题 A

$$
\max\ z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}
$$

课堂练习

- 求解下述整数线性规划问题 A

$$\max\ z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{整数} \end{cases}$$

- 对应的松弛问题 B

$$\max\ z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

小结

- 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题
- 分支定界法是一种隐枚举法或部分枚举法，它不是一种有效算法，是枚举法基础上的改进。

小结

- 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题
- 分支定界法是一种隐枚举法或部分枚举法，它不是一种有效算法，是枚举法基础上的改进。
- “分支”为整数规划最优解的出现缩减了搜索范围
- “定界”可以提高搜索的效率
- 分支定界法解题步骤

5.3 分支定界法

- 小结
  - 用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题
  - 分支定界法是一种隐枚举法或部分枚举法，它不是一种有效算法，是枚举法基础上的改进。
  - “分支”为整数规划最优解的出现缩减了搜索范围
  - “定界”可以提高搜索的效率
  - 分支定界法解题步骤
- 课后作业: P146，习题 5.4

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈