第一章 线性规划及单纯形法

1.2 图解法

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

线性规划问题的数学模型

- 标准形式

$$\max\ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0\ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 满足约束条件的 $x_j\ (j = 1, \cdots, n)$ 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 使目标函数达到最优的可行解称为**最优解**

- 适用范围
  - 只有两个变量的线性规划问题

$$\max \ z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 具体步骤

1.2 图解法

- **适用范围**
  - 只有两个变量的线性规划问题

$$
\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

- **具体步骤**
  - 第一步: 建立平面直角坐标系
  - 第二步: 图示约束条件，找出可行域
  - 第三步: 图示目标函数
  - 第四步: 确定最优解

例 1

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例 1

- 用图解法求解线性规划问题

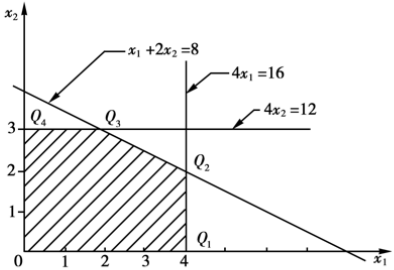
$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **决策变量**: x_1, x_2
- **目标函数**: $\max \ z = 2x_1 + 3x_2$
- **约束条件**: $x_1 + 2x_2 \leq 8$, $4x_1 \leq 16$, $4x_2 \leq 12$，$x_1, x_2 \geq 0$

具体步骤

- 第一步：建立平面直角坐标系
- 第二步：图示约束条件，找出可行域

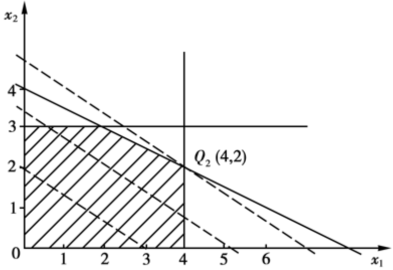


1.2 图解法

- 具体步骤
  - 第一步: 建立平面直角坐标系
  - 第二步: 图示约束条件，找出可行域
  - 第三步: 图示目标函数 $\max \ z = 2x_1 + 3x_2$

具体步骤

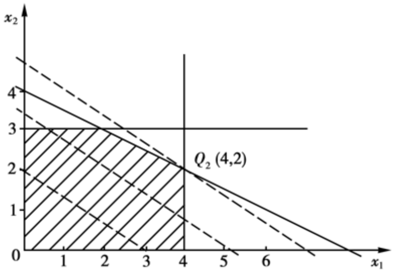
- 第一步：建立平面直角坐标系
- 第二步：图示约束条件，找出可行域
- 第三步：图示目标函数 $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$



1.2 图解法

具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件，找出可行域
- 第三步: 图示目标函数 $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$



- 第四步: 确定最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$，最优值为 $z = 14$

1.2 图解法

- 无穷多最优解 (多重最优解)
  - 目标函数的直线族与约束条件平行

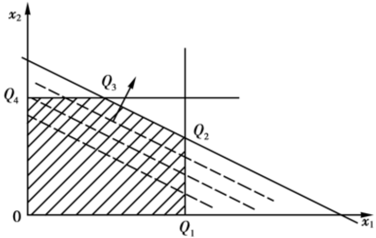
$$
\max \ z = 2x_1 + 4x_2
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

- 无穷多最优解 (多重最优解)
  - 目标函数的直线族与约束条件平行

$$
\max \quad z = 2x_1 + 4x_2
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$



无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

$$\max \ z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

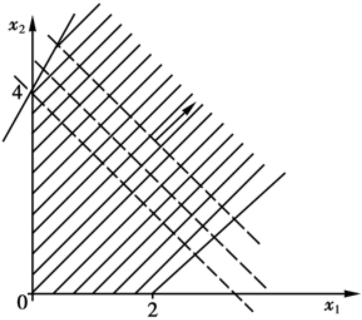
1.2 图解法

无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

$$
\max \ z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$



无可行解

- 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2$$

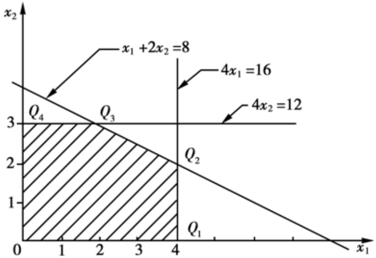
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

无可行解

- 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



课堂练习 1

- 用图解法求解线性规划问题

$$
\max \quad z = 4x_1 + 3x_2
$$

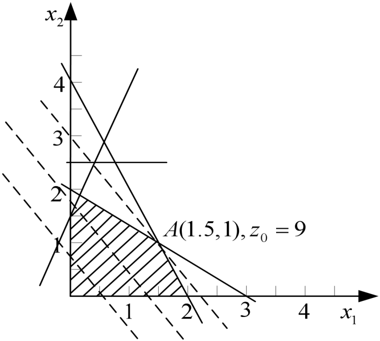
$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

课堂练习 1

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max \ z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



- 课堂练习 2
  - **用图解法求解线性规划问题**

$$
\max \; z = 2x_1 + 3x_2
$$

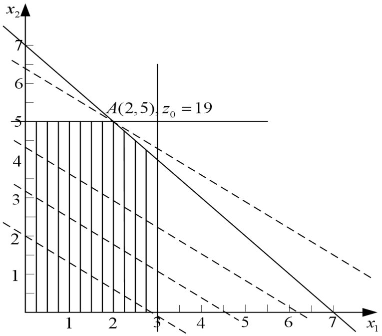
$$
\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

课堂练习 2

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 4x_1 \le 12 \\ 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2 \in \Omega$，满足

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

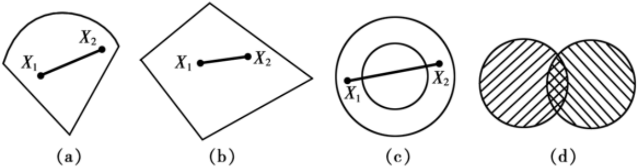
则称 Ω 为凸集。

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2 \in \Omega$，满足

$$\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。

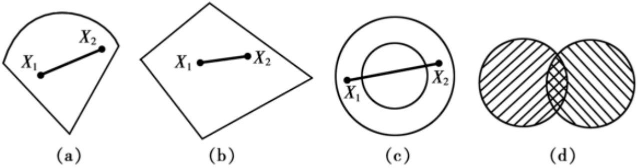


凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2 \in \Omega$，满足

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



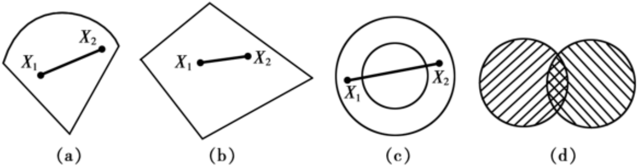
- 任何两个凸集的交集一定是凸集

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2 \in \Omega$，满足

$$\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

  则称 Ω 为凸集。



- 任何两个凸集的交集一定是凸集
- 任何两个凸集的并集不一定是凸集

顶点

- 对于凸集 Ω 中的点 $\mathbf{x}$，如果不存在$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2 \in \Omega$ 使得

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

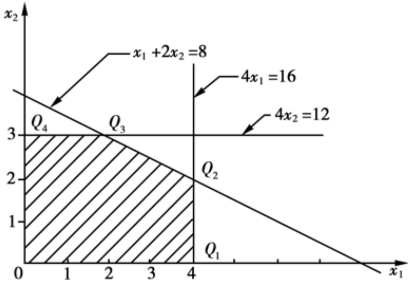
则称 $\mathbf{x}$ 是凸集 Ω 的顶点。

顶点

- 对于凸集 Ω 中的点 $\mathbf{x}$，如果不存在$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2 \in \Omega$ 使得

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 $\mathbf{x}$ 是凸集 Ω 的顶点。



1.2 图解法

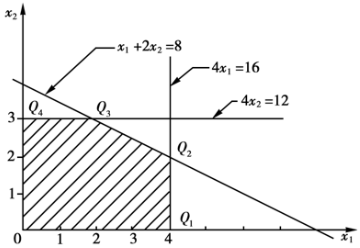
- 启示
  - 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。

启示

- 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。
- 若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一（如果有无穷多的话）一定是可行域的凸集的某个顶点。

启示

- 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。
- 若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一（如果有无穷多的话）一定是可行域的凸集的某个顶点。
- 解题思路是，先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值。比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大，如果为否，则该顶点就是最优解的点或最优解的点之一，否则转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点，重复上述过程，一直到找出使目标函数值达到最大的顶点为止。



1.2 图解法

- 小结
  - 标准形式
    - 可行解
    - 可行域
    - 最优解

1.2 图解法

小结

- 标准形式
  - 可行解
  - 可行域
  - 最优解
- 解的存在性
  - 唯一解
  - 无穷多解
  - 无界解
  - 无可行解

1.2 图解法

- 小结
  - 标准形式
    - 可行解
    - 可行域
    - 最优解
  - 解的存在性
    - 唯一解
    - 无穷多解
    - 无界解
    - 无可行解
- 课后作业: P43, 习题 1.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈