

第一章 线性规划及单纯形法

1.2 图解法

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

1.2 图解法

■ 线性规划问题的数学模型

□ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

- 满足约束条件的 x_j ($j = 1, \dots, n$) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 使目标函数达到最优的可行解称为**最优解**

1.2 图解法

■ 适用范围

□ 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

1.2 图解法

■ 适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数
- 第四步: 确定最优解

1.2 图解法

■ 例 1

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 图解法

■ 例 1

□ 用图解法求解线性规划问题

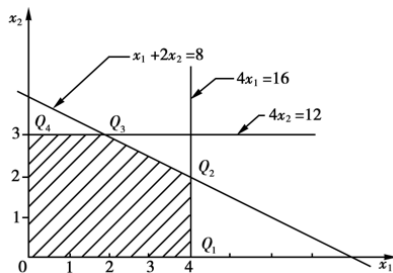
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量: x_1, x_2
- 目标函数: $\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$
- 约束条件: $x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 16, 4x_2 \leq 12, x_1, x_2 \geq 0$

1.2 图解法

■ 具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域



1.2 图解法

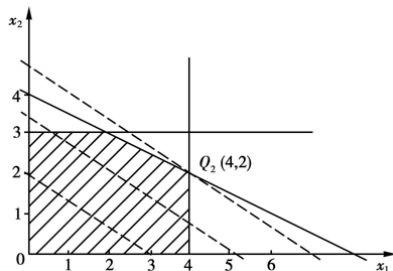
■ 具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

1.2 图解法

■ 具体步骤

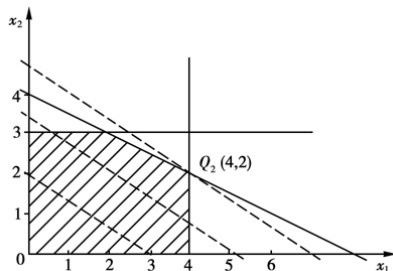
- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$



1.2 图解法

■ 具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$



- 第四步: 确定最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$, 最优值为 $z = 14$

1.2 图解法

■ 无穷多最优解 (多重最优解)

□ 目标函数的直线族与约束条件平行

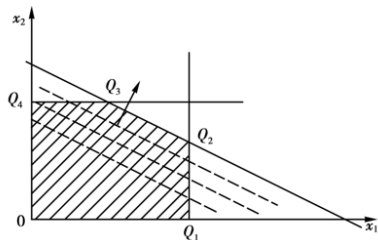
$$\begin{array}{ll}\max & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

1.2 图解法

■ 无穷多最优解 (多重最优解)

□ 目标函数的直线族与约束条件平行

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



1.2 图解法

■ 无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

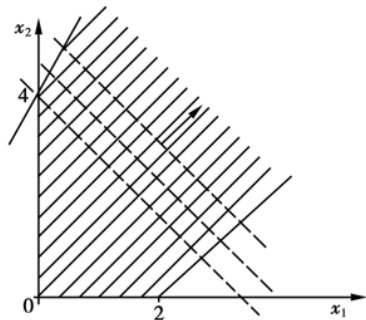
$$\begin{array}{ll}\max & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

1.2 图解法

■ 无界解

□ 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



1.2 图解法

■ 无可行解

□ 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

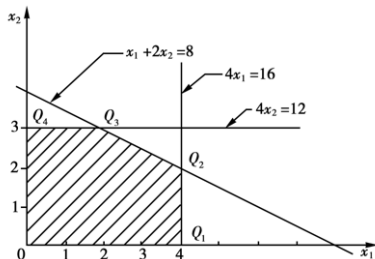
$$\begin{array}{ll}\max & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

1.2 图解法

■ 无可行解

□ 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

$$\begin{array}{ll}\max & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$



1.2 图解法

■ 课堂练习 1

□ 用图解法求解线性规划问题

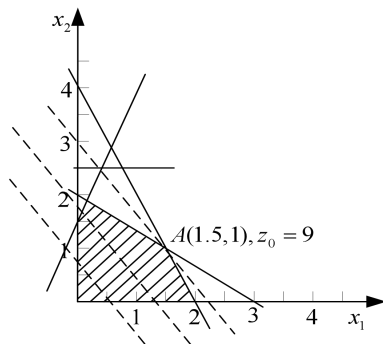
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 图解法

■ 课堂练习 1

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



1.2 图解法

■ 课堂练习 2

□ 用图解法求解线性规划问题

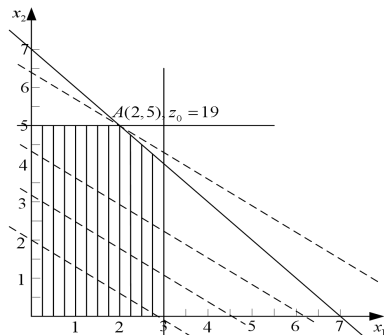
$$\begin{array}{ll}\max & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

1.2 图解法

■ 课堂练习 2

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



1.2 图解法

■ 凸集

□ 对于任意两点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$, 满足

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。

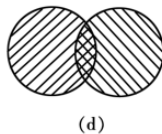
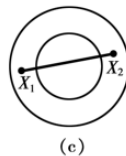
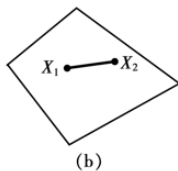
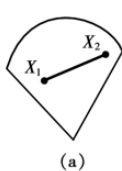
1.2 图解法

■ 凸集

□ 对于任意两点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$, 满足

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



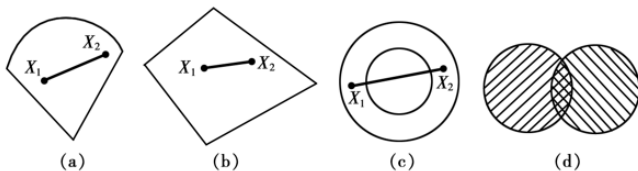
1.2 图解法

■ 凸集

□ 对于任意两点 $x_1, x_2 \in \Omega$, 满足

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



□ 任何两个凸集的交集一定是凸集

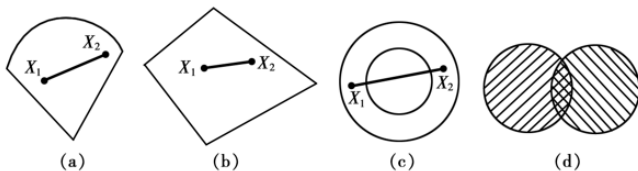
1.2 图解法

■ 凸集

□ 对于任意两点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$, 满足

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



□ 任何两个凸集的**交集**一定是凸集

□ 任何两个凸集的**并集**不一定是凸集

1.2 图解法

■ 顶点

□ 对于凸集 Ω 中的点 x , 如果**不存在** $x_1, x_2 \in \Omega$ 使得

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 x 是凸集 Ω 的顶点。

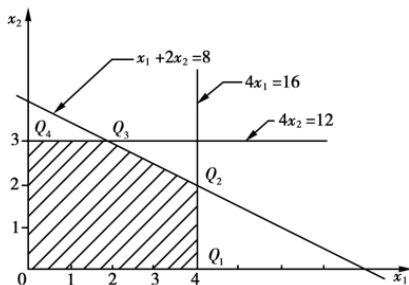
1.2 图解法

■ 顶点

□ 对于凸集 Ω 中的点 x , 如果不存在 $x_1, x_2 \in \Omega$ 使得

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 x 是凸集 Ω 的顶点。



1.2 图解法

■ 启示

- 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。

1.2 图解法

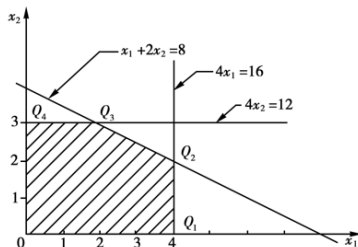
■ 启示

- 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。
- 若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一（如果有无穷多的话）一定是可行域的凸集的某个顶点。

1.2 图解法

■ 启示

- 若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个**凸集**。
- 若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一（如果有无穷多的话）一定是可行域的凸集的某个**顶点**。
- 解题思路是，先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值。比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大，如果为否，则该顶点就是最优解的点或最优解的点之一，否则转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点，重复上述过程，一直到找出使目标函数值达到最大的顶点为止。



1.2 图解法

■ 小结

□ 标准形式

- 可行解
- 可行域
- 最优解

1.2 图解法

■ 小结

□ 标准形式

- 可行解
- 可行域
- 最优解

□ 解的存在性

- 唯一解
- 无穷多解
- 无界解
- 无可行解

1.2 图解法

■ 小结

□ 标准形式

- 可行解
- 可行域
- 最优解

□ 解的存在性

- 唯一解
- 无穷多解
- 无界解
- 无可行解

■ 课后作业: P43, 习题 1.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈