

第一章 线性规划及单纯形法

1.4 单纯形法计算步骤

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

1.4 单纯形法计算步骤

■ 单纯形表

□ 考虑约束条件

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 单纯形表

□ 考虑约束条件

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

□ 为了便于理解计算关系，设计单纯形表

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 单纯形表

□ 检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$

$c_j \rightarrow$			c_1	\cdots	c_m	\cdots	c_j	\cdots	c_n
\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	\cdots	x_m	\cdots	x_j	\cdots	x_n
c_1	x_1	b_1	1	\cdots	0	\cdots	a_{1j}	\cdots	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	\cdots	0	\cdots	a_{2j}	\cdots	a_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots
c_m	x_m	b_m	0	\cdots	1	\cdots	a_{mj}	\cdots	a_{mn}
$c_j - z_j$			0	\cdots	0	\cdots	σ_j	\cdots	σ_n

1.4 单纯形法计算步骤

■ 基本步骤

□ **第 1 步**: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表

1.4 单纯形法计算步骤

■ 基本步骤

- 第 1 步: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表
- 第 2 步: 最优性检验, 计算各非基变量 x_j 的检验数

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$$

- 如果所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 且基变量中不含有人工变量时, 则停止迭代, 得到最优解
- 如果存在 $\sigma_j > 0$, 且有 $P_j \leq 0$, 则停止迭代, 问题为无界解
- 否则转 3 步

1.4 单纯形法计算步骤

■ 基本步骤

□ **第3步:** 基可行解转化。从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表

- 确定换入变量 x_k (最大增加原则)

$$\sigma_k = \max_j \{ \sigma_j \mid \sigma_j > 0 \}$$

- 确定换出变量 x_l (最小比值原则)

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定 x_l 为换出变量, a_{lk} 为主元

- 用换入变量 x_k 替换基变量中的换出变量 x_l , 得到一个新的基 $(P_1, \dots, P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, \dots, P_m)$, 进行初等变换

1.4 单纯形法计算步骤

■ 基本步骤

□ **第 3 步:** 基可行解转化。从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表

- 确定换入变量 x_k (最大增加原则)

$$\sigma_k = \max_j \{ \sigma_j \mid \sigma_j > 0 \}$$

- 确定换出变量 x_l (最小比值原则)

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定 x_l 为换出变量, a_{lk} 为主元

- 用换入变量 x_k 替换基变量中的换出变量 x_l , 得到一个新的基 $(P_1, \dots, P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, \dots, P_m)$, 进行初等变换

□ **第 4 步:** 重复 2、3 两步, 一直到计算结束为止

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 标准化

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 第 1 步: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 第 1 步: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

□ 第 2 步: 检验数大于零, 因此初始基可行解不是最优解

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_1 > \sigma_2$, 确定 x_1 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ \infty, \frac{24}{6}, \frac{5}{1} \right\} = 4$, 因此确定 6 为主元素
- x_4 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	$\underline{x_4}$	24	[6]	2	0	1	0
0	$\underline{x_5}$	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

	$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
	\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
□	0	x_3	15	0	5	1	0	0
	0	$\underline{x_4}$	24	[6]	2	0	1	0
	0	x_5	5	1	1	0	0	1
	$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

⇓

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	2/6	0	1/6	0
0	x_5	1	0	4/6	0	-1/6	1
$c_j - z_j$			0	1/3	0	-1/3	0

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_2 > 0$, 确定 x_2 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ \frac{15}{5}, \frac{1}{2/3}, \frac{5}{4/6} \right\} = \frac{30}{4}$, 因此确定 4/6 为主元素
- x_5 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	2/6	0	1/6	0
0	$\underline{x_5}$	1	0	[4/6]	0	-1/6	1
$c_j - z_j$			0	1/3	0	-1/3	0

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到最优解

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$15/2$	0	0	1	$5/4$	$-15/2$
2	x_1	$7/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
1	x_2	$3/2$	0	1	0	$-1/4$	$3/2$
$c_j - z_j$			0	0	0	$-1/4$	-1.2

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 1

□ 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到最优解

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$15/2$	0	0	1	$5/4$	$-15/2$
2	x_1	$7/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
1	x_2	$3/2$	0	1	0	$-1/4$	$3/2$
$c_j - z_j$			0	0	0	$-1/4$	-1.2

□ 代入目标函数得最优值 $z = 2x_1 + x_2 = 17/2$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 标准化

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 第 1 步: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	12	0	4	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

□ 第 2 步: 检验数大于零, 因此初始基可行解不是最优解

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_2 > \sigma_1$, 确定 x_2 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ \frac{8}{2}, \infty, \frac{12}{4} \right\} = 3$, 因此确定 4 为主元素
- x_5 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	$\underline{x_5}$	12	0	[4]	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

	$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
	\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
□	0	x_3	8	1	2	1	0	0
	0	x_4	16	4	0	0	1	0
	0	$\underline{x_5}$	12	0	[4]	0	0	1
	$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

⇓

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_1 > 0$, 确定 x_1 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{16}{4}, \infty \right\} = 2$, 因此确定 1 为主元素
- x_3 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	<u>x_1</u>	x_2	x_3	x_4	x_5
0	<u>x_3</u>	2	[1]	0	1	0	-1/2
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4
$c_j - z_j$			2	0	0	0	-3/4

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

	$c_j \rightarrow$		2	3	0	0	0	
	\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
□	0	$\underline{x_3}$	2	[1]	0	1	0	$-1/2$
	0	x_4	16	4	0	0	1	0
	3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
	$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

⇓

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	8	0	0	-4	1	2
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_5 > 0$, 确定 x_5 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ -\frac{8}{2}, \frac{3}{1/4} \right\} = 4$, 因此确定 2 为主元素
- x_4 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

⇓

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1
3	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0
$c_j - z_j$			0	0	$-3/2$	$-1/8$	0

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到最优解

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	-1/8	0

1.4 单纯形法计算步骤

■ 例 2

□ 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到最优解

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
\mathbf{C}_B	\mathbf{X}_B	\mathbf{b}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	-1/8	0

□ 基可行解 $X = (4, 2, 0, 0, 4)^\top$ 是最优解

□ 代入目标函数得最优值 $z = 2x_1 + 3x_2 = 14$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 课堂练习 1

□ 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 50x_1 + 100x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 300 \\ 2x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_2 \leq 250 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 课堂练习 1

□ 经过分析得到

$c_j \rightarrow$			50	100	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
50	x_1	50	1	0	1	0	-1
0	x_4	50	0	0	-2	1	1
100	x_2	250	0	1	0	0	1
$c_j - z_j$			0	0	-50	0	-50

□ 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到最优解

□ 基可行解 $X = (50, 250, 0, 50, 0)^\top$ 是最优解

□ 代入目标函数得最优值 $z = 50x_1 + 100x_2 = 27500$

1.4 单纯形法计算步骤

■ 小结

- 第 1 步: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表
- 第 2 步: 最优性检验, 计算 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$
- 第 3 步: 基可行解转化
- 第 4 步: 重复 2、3 两步, 一直到计算结束为止

■ 课后作业: P44, 习题 1.3

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈