第五章 整数规划

5.4 0-1 型整数规划

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

5.4 0-1 型整数规划

0-1 变量的概念

- 0-1 变量是一种逻辑变量，常用来表示系统处于某个特定状态，或者决策时是否取某个特定方案。例如

$$x = \begin{cases} 1 \text{ 若选择决策方案 P} \\ 0 \text{ 若不选择决策方案 P} \end{cases}$$

0-1 变量的概念

- 0-1 变量是一种逻辑变量，常用来表示系统处于某个特定状态，或者决策时是否取某个特定方案。例如

$$x = \begin{cases} 1 \text{ 若选择决策方案 P} \\ 0 \text{ 若不选择决策方案 P} \end{cases}$$

- 若多项要素 $E_1, \ldots, E_n$ 中每项要素均有两种选择 A_j 和 $\overline{A}_j$，则可令

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ 若} E_j \text{选择} A_j \\ 0 \text{ 若} E_j \text{不选择} \overline{A}_j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

0-1 变量的概念

- 0-1 变量是一种逻辑变量，常用来表示系统处于某个特定状态，或者决策时是否取某个特定方案。例如

$$x = \begin{cases} 1 \text{ 若选择决策方案 P} \\ 0 \text{ 若不选择决策方案 P} \end{cases}$$

- 若多项要素 $E_1, \ldots, E_n$ 中每项要素均有两种选择 A_j 和 $\overline{A}_j$，则可令

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ 若} E_j \text{选择} A_j \\ 0 \text{ 若} E_j \text{不选择} \overline{A}_j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

- 若变量取多个整数值，则可以用一组 0-1 变量来取代该变量。例如，变量 x 取 0 与 9 之间的任意整数，则可令

$$x = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + 2^2 x_2 + 2^3 x_3 \leq 9$$

这时 x 可用 4 个 0-1 变量 x_0, x_1, x_2, x_3 来代替

相互排斥的约束条件问题

- 工序 B 每周工时的约束条件

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \leq 150 \quad (1)$$

工序 B 的新加工方式，对应的每周工时约束条件

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 120 \quad (2)$$

只能从两种加工方式中选择一种，则式 (1) 和 (2) 就成为两个相互排斥的约束条件。

相互排斥的约束条件问题

- 工序 B 每周工时的约束条件

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150 \quad (1)$$

工序 B 的新加工方式，对应的每周工时约束条件

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120 \quad (2)$$

只能从两种加工方式中选择一种，则式 (1) 和 (2) 就成为两个相互排斥的约束条件。

- 如何将相互排斥的约束条件统一起来？

相互排斥的约束条件问题

- 引入 0-1 变量

$$y_1 = \begin{cases} 0 \text{ 若工序 B 采用原加工方式} \\ 1 \text{ 若工序 B 不采用原加工方式} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 0 \text{ 若工序 B 采用新加工方式} \\ 1 \text{ 若工序 B 不采用新加工方式} \end{cases}$$

- 相互排斥的约束条件 (1) 和 (2) 就可以通过下式统一起来

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 0.5x_2 \leq 150 + My_1 \\ 0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 120 + My_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

其中 M 为充分大的数

相互排斥的约束条件问题

- 一般地，若需要从 p 个约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \ (i = 1, \ldots, p)$$

中恰好选择 q $(q < p)$ 个约束条件，则可以引入 p 个 0-1 变量

$$y_i = \begin{cases} 0 \text{ 若选择第 } i \text{ 个约束条件} \\ 1 \text{ 若不选择第 } i \text{ 个约束条件} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, p)$$

那么，通过下式就可以将所有约束条件统一起来

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i + My_i \\ \sum\limits_{i=1}^{p} y_i = p - q \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, p)$$

固定费用问题

- 有三种资源被用于生产三种产品，资源量、产品单件可变费用及售价、资源单耗量及组织三种产品生产的固定费用见下表。要求制定一个生产计划，使总收益为最大。

资源	I	II	III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单价	8	10	12	

固定费用问题

- 有三种资源被用于生产三种产品，资源量、产品单件可变费用及售价、资源单耗量及组织三种产品生产的固定费用见下表。要求制定一个生产计划，使总收益为最大。

资源	I	II	III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单价	8	10	12	

- 设 x_j 为生产第 j 种产品的产量，$j = 1, 2, 3$，引入 0-1 变量

$$y_j = \begin{cases} 1 \text{ 若生产第 } j \text{ 种产品} \\ 0 \text{ 若不生产第 } j \text{ 种产品} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

固定费用问题

- 整数规划模型为

$$\max\ z = 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3 - 4x_1 - 5x_2 - 6x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100 \\ x_1 \le M_1 y_1 \\ x_2 \le M_2 y_2 \\ x_3 \le M_3 y_3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\text{且为整数} \\ y_1, y_2, y_3 = 0\text{或}1 \end{cases}$$

固定费用问题

- 整数规划模型为

$$\max\ \ z = 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3 - 4x_1 - 5x_2 - 6x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100 \\ x_1 \le M_1 y_1 \\ x_2 \le M_2 y_2 \\ x_3 \le M_3 y_3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\text{且为整数} \\ y_1, y_2, y_3 = 0\text{或}1 \end{cases}$$

- 若生产第 j 种产品，其产量 $x_j > 0$，则知 $y_j = 1$
- 若不生产第 j 种产品，其产量 $x_j = 0$，则知 $y_j = 0$ 或 1，但 $y_j = 1$ 不利于目标函数最大化，若想获取最优解必然取 $y_j = 0$

工件排序问题

- 用 4 台机床加工三件产品。各产品的机床加工顺序，以及产品 i 在机床 j 上的加工工时 a_{ij} 列于下表。由于某种原因，产品 2 的加工总时间不得超过 d。现要求确定个件产品在机床上的加工方案，使在最短的时间内加工完全部产品。

产品 1	a_{11} 机床 1	$\longrightarrow$	a_{13} 机床 3	a_{14} 机床 4
产品 2	a_{21} 机床 1	a_{22} 机床 2	$\longrightarrow$	a_{24} 机床 4
产品 3	$\longrightarrow$	a_{32} 机床 2	a_{33} 机床 3	$\longrightarrow$

工件排序问题

- 设 x_{ij} 表示产品 i 在机床 j 上开始加工的时间，$i, j = 1, 2, 3$。引入 0-1 变量

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{先加工某件产品} \\ 1 & \text{先加工另一件产品} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

- 同一件产品在不同机床上的加工顺序约束，即同一件产品在下一台机床上加工的开始时间不得早于在上一台机床上加工的结束时间。
  - 产品 1: $x_{11} + a_{11} \le x_{13}$ 及 $x_{13} + a_{13} \le x_{14}$
  - 产品 2: $x_{21} + a_{21} \le x_{22}$ 及 $x_{22} + a_{22} \le x_{24}$
  - 产品 3: $x_{32} + a_{32} \le x_{33}$

工件排序问题

- 每一台机床对不同产品的加工顺序约束，即同一台机床，如已开始的产品加工尚未结束，则不能开始另一件产品的加工。
  - 机床 1: $x_{11}+a_{11}\leq x_{21}+My_1$ 及 $x_{21}+a_{21}\leq x_{11}+M(1-y_1)$
  - 机床 2: $x_{22}+a_{22}\leq x_{32}+My_2$ 及 $x_{32}+a_{32}\leq x_{22}+M(1-y_2)$
  - 机床 3: $x_{13}+a_{13}\leq x_{33}+My_3$ 及 $x_{33}+a_{33}\leq x_{13}+M(1-y_3)$
  - 机床 4: $x_{14}+a_{14}\leq x_{24}+My_4$ 及 $x_{24}+a_{24}\leq x_{14}+M(1-y_4)$
- 产品 2 的加工总时间约束

$$x_{24}+a_{24}-x_{21}\leq d$$

- 目标函数

$$W=\max(x_{14}+a_{14},x_{24}+a_{24},x_{33}+a_{33})$$

0-1 型整数规划的解法

- 若含有 n 个变量，则可以产生 2^n 个可能的变量组合，采用完全枚举法几乎是不可能的。

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(\ge,=)\ b_i,\ \ i=1,\ldots,m\\ x_j\ge 0,\ \ j=1,\ldots,n\\ x_j=0\text{或}1\end{cases}$$

0-1 型整数规划的解法

- 若含有 n 个变量，则可以产生 2^n 个可能的变量组合，采用完全枚举法几乎是不可能的。

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge,=)\ b_i,\ i=1,\ldots,m \\ x_j \ge 0,\ j=1,\ldots,n \\ x_j = 0\text{或}1 \end{cases}$$

- 隐枚举法: 只检查变量取值组合的一部分就能找到问题的最优解

0-1 型整数规划的解法

- 若含有 n 个变量，则可以产生 2^n 个可能的变量组合，采用完全枚举法几乎是不可能的。

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i,\ \ i = 1, \ldots, m \\ x_j \ge 0,\ \ j = 1, \ldots, n \\ x_j = 0 \text{或} 1 \end{cases}$$

- 隐枚举法: 只检查变量取值组合的一部分就能找到问题的最优解
- 过滤条件: 目标函数值优于计算过的可行解目标函数值。

0-1 型整数规划的解法

- 若含有 n 个变量，则可以产生 2^n 个可能的变量组合，采用完全枚举法几乎是不可能的。

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\ b_i, & i = 1, \ldots, m \\ x_j \ge 0, & j = 1, \ldots, n \\ x_j = 0\text{或}1 \end{cases}$$

- 隐枚举法: 只检查变量取值组合的一部分就能找到问题的最优解
- 过滤条件: 目标函数值优于计算过的可行解目标函数值。
- 解题关键: 寻找可行解，产生过滤条件

例 1

- 试用隐枚举法求解下述问题

$$\max \ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \leq 6 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 & (5) \end{cases}$$

例 1

- 求解过程如下

(x_1, x_2, x_3)	z 值	(1)	(2)	(3)	(4)	过滤条件
$(0,0,0)$	0	✓	✓	✓	✓	$z \geq 0$
$(0,0,1)$	5	✓	✓	✓	✓	$z \geq 5$
$(0,1,0)$	-2					
$(0,1,1)$	3					
$(1,0,0)$	3					
$(1,0,1)$	8	✓	✓	✓	✓	$z \geq 8$
$(1,1,0)$	1					
$(1,1,1)$	6					

0-1 型整数规划的解法

- 对于最大化问题，常按目标函数中各变量系数的递增排序 (最小化则递减)，这样最优解容易比较早发现。
- 例 1 可以写成

$$\max \ z = 5x_3 + 3x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_3 + x_1 + 2x_2 \le 2 & (1) \\ x_3 + x_1 + 4x_2 \le 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ x_3 + 4x_2 \le 6 & (4) \\ x_3, x_1, x_2 = 0\text{或}1 & (5) \end{cases}$$

- 求解过程如下

(x_3, x_1, x_2)	z 值	(1)	(2)	(3)	(4)	过滤条件
$(0,0,0)$	0	✓	✓	✓	✓	$z \ge 0$
$(1,0,0)$	5	✓	✓	✓	✓	$z \ge 5$
$(1,1,0)$	8	✓	✓	✓	✓	$z \ge 8$

- 小结
  - 0-1 变量的概念
  - 0-1 变量的实际应用
    - 相互排斥的约束条件问题
    - 固定费用问题
    - 工件排序问题
  - 0-1 型整数规划的解法
    - 隐枚举法
    - 过滤条件
- 课后作业: P146, 习题 5.5

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈