第一章 线性规划

1.1 基本概念

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

例 1

- 美佳公司计划制造 I、II 两种家电产品。已知各制造一件时分别占用的设备 A，设备 B 的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况。问该公司应制造两种家电各多少件，使获取的利润为最大。

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 例 1
  - 数学模型: 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，于是

- 例 1
  - 数学模型: 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，于是

$$\max \ \ z = 2x_1 + x_2$$

- **例 1**
  - 数学模型: 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，于是

$$
\max \ z = 2x_1 + x_2
$$
$$
\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcrcr} & & 5x_2 & \le & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \le & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \le & 5 \end{array} \right.
$$

- **例 1**
  - 数学模型: 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，于是

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ & \left\{
\begin{array}{rcrcr}
 & & 5x_2 & \leq & 15 \\
6x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 5
\end{array}
\right. \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

例 1

- 数学模型: 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，于是

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcr} & & 5x_2 & \leq & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \end{array} \right. \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

  - 决策变量: x_1, x_2

例 1

- **数学模型**: **设两种家电产量分别为变量** x_1, x_2**，于是**

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 2x_1 + x_2 \\
&\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcrcr} & & 5x_2 & \leq & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \end{array} \right. \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- **决策变量**: x_1, x_2
- **目标函数**: $\max \quad z = 2x_1 + x_2$

例 1

- **数学模型**: 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，于是

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} & & 5x_2 & \leq & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

  - **决策变量**: x_1, x_2
  - **目标函数**: $\max \quad z = 2x_1 + x_2$
  - **约束条件**: $5x_2 \leq 15$, $6x_1 + 2x_2 \leq 24$, $x_1 + x_2 \leq 5$
    $x_1, x_2 \geq 0$

例 2

- 捷运公司拟在下一年度的 1-4 月的 4 个月内需租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积列于表

月份	1	2	3	4
所需仓库面积 $(100m^2)$	15	10	20	12

例 2

- 捷运公司拟在下一年度的 1-4 月的 4 个月内需租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积列于表

月份	1	2	3	4
所需仓库面积 $(100m^2)$	15	10	20	12

仓库租借费用随合同期限而定，合同期越长，折扣越大，具体数字见表

合同租借期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内的租费 (元$/100m^2$)	2800	4500	6000	7300

例 2

- 捷运公司拟在下一年度的 1-4 月的 4 个月内需租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积列于表

月份	1	2	3	4
所需仓库面积 $(100m^2)$	15	10	20	12

仓库租借费用随合同期限而定，合同期越长，折扣越大，具体数字见表

合同租借期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内的租费 (元$/100m^2$)	2800	4500	6000	7300

租借仓库的合同每月初都可办理，每份合同具体规定租用面积和期限。因此该厂可根据需要，在任何一个月初办理租借合同。每次办理时可签一份合同，也可签若干份租用面积和租借期限不同的合同。试确定该公司签订租借合同的最优决策，目的是使所付租借费用最小。

- 例 2
  - 数学模型: 设 x_{ij} 表示在第 i $(i = 1, 2, 3, 4)$ 个月初签订的租借期为 j $(j = 1, 2, 3, 4)$ 个月的仓库面积的合同，于是

- 例 2
  - 数学模型: 设 x_{ij} 表示在第 i $(i=1,2,3,4)$ 个月初签订的租借期为 j $(j=1,2,3,4)$ 个月的仓库面积的合同，于是
    - 决策变量: x_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$

例 2

- 数学模型: 设 x_{ij} 表示在第 i $(i=1,2,3,4)$ 个月初签订的租借期为 j $(j=1,2,3,4)$ 个月的仓库面积的合同，于是
  - 决策变量: x_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$
  - 目标函数:

$$\begin{aligned}\min\ z = {} & 2800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4500(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})\\ & +6000(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})+7300(x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44})\end{aligned}$$

例 2

- 数学模型: 设 x_{ij} 表示在第 i $(i=1,2,3,4)$ 个月初签订的租借期为 j $(j=1,2,3,4)$ 个月的仓库面积的合同，于是
  - 决策变量: x_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$
  - 目标函数:

$$\begin{aligned}\min\ z = & 2800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4500(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})\\ & +6000(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})+7300(x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44})\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\min\ z = & 2800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4500(x_{12}+x_{22}+x_{32})\\ & +6000(x_{13}+x_{23})+7300x_{14}\end{aligned}$$

例 2

- 数学模型: 设 x_{ij} 表示在第 i $(i=1,2,3,4)$ 个月初签订的租借期为 j $(j=1,2,3,4)$ 个月的仓库面积的合同，于是
  - 决策变量: x_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$
  - 目标函数:

$$\begin{aligned}\min\ z = {} & 2800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4500(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})\\ & +6000(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})+7300(x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44})\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\min\ z = {} & 2800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4500(x_{12}+x_{22}+x_{32})\\ & +6000(x_{13}+x_{23})+7300x_{14}\end{aligned}$$

  - 约束条件:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \geq 15\\ x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23} \geq 10\\ x_{13}+x_{14}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32} \geq 20\\ x_{14}+x_{23}+x_{32}+x_{41} \geq 12 \end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0\ (i,j=1,2,3,4)$$

课堂练习 1

- 某工厂用三种原料 (P_1, P_2, P_3) 生产三种产品 (Q_1, Q_2, Q_3)，已知的条件如表所示，试制订总利润最大的生产计划。

单位产品所需原料数量	产品 Q_1	产品 Q_2	产品 Q_3	原料可用量
原料 P_1/公斤	2	3	0	1500
原料 P_2/公斤	0	2	4	800
原料 P_3/公斤	3	2	5	2000
位产品的利润/千元	3	5	4	

1.1 基本概念

- **请写**
  - 数学模型: 设每天生产三种产品的数量，分别设为 x_1, x_2, x_3，于是

1.1 基本概念

- 请写
  - 数学模型: 设每天生产三种产品的数量，分别设为 x_1, x_2, x_3， 于是
    - 决策变量: x_1, x_2, x_3

- 请写
  - 数学模型: 设每天生产三种产品的数量，分别设为 x_1, x_2, x_3，于是
    - 决策变量: x_1, x_2, x_3
    - 目标函数: $\max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$

1.1 基本概念

请写

- 数学模型: 设每天生产三种产品的数量，分别设为 x_1, x_2, x_3，于是
  - 决策变量: x_1, x_2, x_3
  - 目标函数: $\max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$
  - 约束条件: $2x_1 + 3x_2 \leq 1500$, $2x_2 + 4x_3 \leq 800$, $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000$

请写

- **数学模型**：设每天生产三种产品的数量，分别设为 x_1, x_2, x_3，于是
  - **决策变量**：x_1, x_2, x_3
  - **目标函数**：$\max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$
  - **约束条件**：$2x_1 + 3x_2 \leq 1500$, $2x_2 + 4x_3 \leq 800$, $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000$
    $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

请写

- 数学模型：设每天生产三种产品的数量，分别设为 x_1, x_2, x_3，于是
  - 决策变量：x_1, x_2, x_3
  - 目标函数：$\max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$
  - 约束条件：$2x_1 + 3x_2 \le 1500$, $2x_2 + 4x_3 \le 800$, $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 2000$
    $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \ \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & & & \le & 1500 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & \le & 800 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \le & 2000 \end{array}\right. \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}}$$

1.1 基本概念

- 线性规划问题的数学模型
  - 三要素：目标函数，约束条件，决策变量

线性规划问题的数学模型

- 三要素：目标函数，约束条件，决策变量

$$
\begin{aligned}
&\max\ \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
&\text{s.t.}\ \left\{\begin{array}{ccccccc}
2x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 1500 \\
 & & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 800 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 2000
\end{array}\right. \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

线性规划问题的数学模型

- 三要素：目标函数，约束条件，决策变量

$$
\max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \le 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 2000 \end{cases}
$$

$$
x_1, x_2, x_3 \ge 0
$$

- 目标函数是决策变量的线性函数
- 约束条件是含决策变量的线性等式或不等式
- 决策变量的取值是连续的

线性规划问题的数学模型

- 三要素：目标函数，约束条件，决策变量

$$
\max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \end{cases}
$$

$$
x_1, x_2, x_3 \geq 0
$$

  - 目标函数是决策变量的线性函数
  - 约束条件是含决策变量的线性等式或不等式
  - 决策变量的取值是连续的

- “线性”的含义

线性规划问题的数学模型

- 三要素：目标函数，约束条件，决策变量

$$
\max \ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \end{cases}
$$

$$
x_1, x_2, x_3 \geq 0
$$

  - 目标函数是决策变量的线性函数
  - 约束条件是含决策变量的线性等式或不等式
  - 决策变量的取值是连续的

- “线性”的含义
  - 比例性：决策变量变化引起目标的改变量与决策变量改变量成正比
  - 可加性：每个决策变量对目标和约束的影响独立于其它变量
  - 连续性：每个决策变量取连续值
  - 确定性：线性规划中的参数 a_{ij}, b_i, c_j 为确定值

- 设线性规划问题的数学模型
  - **一般形式**

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

- 设线性规划问题的数学模型
  - **一般形式**

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\ \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq(=,\geq) & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq(=,\geq) & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq(=,\geq) & b_m \end{array}\right.$$

- 设线性规划问题的数学模型
  - **一般形式**

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq (=, \geq) & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq (=, \geq) & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq (=, \geq) & b_m \end{array} \right.$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

设线性规划问题的数学模型

一般形式

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq (=, \geq) & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq (=, \geq) & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq (=, \geq) & b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

简写形式

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

设线性规划问题的数学模型

一般形式

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq (=, \geq) & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq (=, \geq) & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq (=, \geq) & b_m \end{array} \right.$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

简写形式

$$\max(\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq (=, \geq) & b_i\ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j & \geq & 0\ (j = 1, \cdots, n) \end{array} \right.$$

线性规划问题的数学模型

标准形式

$$\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcl} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j & \geq & 0 \ (j = 1, \cdots, n) \end{array} \right.$$

线性规划问题的数学模型

标准形式

$$\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \ \left\{ \begin{array}{rcl} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j & \geq & 0 \ (j = 1, \cdots, n) \end{array} \right.$$

- 目标函数是求最大值
- 所有约束条件均用等式表示
- 所有决策变量均取非负数
- 所有右端项常数均为非负数

1.1 基本概念

- 非标准型转化为标准形式

目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

- 非标准型转化为标准形式

目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

- 第一步: 目标函数的转换

- 非标准型转化为标准形式

  目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

  - 第一步: 目标函数的转换

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Rightarrow \quad \max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

非标准型转化为标准形式

目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

- 第一步: 目标函数的转换

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Rightarrow \quad \max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- 第二步: 约束条件右端项常数的转换

- 非标准型转化为标准形式

目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

- 第一步: 目标函数的转换

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Rightarrow \quad \max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- 第二步: 约束条件右端项常数的转换

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ b_i < 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = -b_i$$

- 非标准型转化为标准型
  - 第三步: 约束条件不等式的转换

非标准型转化为标准型

- 第三步: 约束条件不等式的转换
  - 引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i,\ \ s_i \geq 0$$

非标准型转化为标准型

第三步: 约束条件不等式的转换

- 引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \;\; s_i \geq 0$$

- 引入剩余变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \;\; s_i \geq 0$$

非标准型转化为标准型

- 第三步: 约束条件不等式的转换
  - 引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \ \ s_i \ge 0$$

  - 引入剩余变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \ \ s_i \ge 0$$

- 第四步: 决策变量的转换

非标准型转化为标准型

第三步: 约束条件不等式的转换

- 引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \ \ s_i \geq 0$$

- 引入剩余变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \ \ s_i \geq 0$$

第四步: 决策变量的转换

- 取值无约束的转化

$$x_k\text{取值无约束} \quad \Rightarrow \quad x_k = x_k' - x_k'', \ \ x_k', x_k'' \geq 0$$

非标准型转化为标准型

第三步: 约束条件不等式的转换

- 引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \;\; s_i \geq 0$$

- 引入剩余变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \;\; s_i \geq 0$$

第四步: 决策变量的转换

- 取值无约束的转化

$$x_k\text{取值无约束} \quad \Rightarrow \quad x_k = x_k' - x_k'', \;\; x_k', x_k'' \geq 0$$

- 取值非正的转化

$$x_k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_k' = -x_k$$

- 例 1

$$
\min \ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3
$$

$$
\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr}
- & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 9 \\
- & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\
 & 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -6
\end{array} \right.
$$

$$
x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}
$$

- 例 1

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases}
-2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
-3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\
4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6
\end{cases} \\
&\quad x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}
\end{aligned}
$$

- 转化为标准型
  - 第一步: **目标函数的转换，令 $z' = -z$，于是**

- **例 1**

$$
\begin{aligned}
&\min\ \ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr}
- & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 9 \\
- & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\
 & 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -6
\end{array} \right. \\
&x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}
\end{aligned}
$$

- **转化为标准型**
  - **第一步:** 目标函数的转换，令 $z' = -z$，于是

$$
\begin{aligned}
&\max\ \ z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
&\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr}
- & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 9 \\
- & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\
 & 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -6
\end{array} \right. \\
&x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}
\end{aligned}
$$

转化为标准形式

第二步: 约束条件右端项常数的转换

$$\max \ z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}$$

第三步: 约束条件不等式的转换，引入松弛变量 x_4，剩余变量 x_5

$$\max \ z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0,\ x_2, x_4, x_5 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}$$

转化为标准型

- **第四步:** 决策变量的转换，令 $x_3 = x_3' - x_3''$，$x_3', x_3'' \geq 0$ 以及 $x_1' = -x_1$，于是

转化为标准型

- **第四步:** 决策变量的转换，令 $x_3 = x_3' - x_3''$，$x_3', x_3'' \geq 0$ 以及 $x_1' = -x_1$，于是

$$
\max\ z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5
$$

$$
\text{s.t.}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1' & + & x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & + & x_4 & & & = & 9 \\
3x_1' & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_3'' & & & - & x_5 & = & 4 \\
4x_1' & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_3'' & & & & & = & -6
\end{array}\right.
$$

$$
x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0
$$

转化为标准型

- **第四步: 决策变量的转换，令** $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_3', x_3'' \geq 0$ **以及** $x_1' = -x_1$**，于是**

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{s.t.}\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1' & + & x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & + & x_4 & & & = & 9 \\
3x_1' & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_3'' & & & - & x_5 & = & 4 \\
4x_1' & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_3'' & & & & & = & -6
\end{array}\right. \\
& x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

目标函数中也可以省略 x_4, x_5

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.}\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1' & + & x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & + & x_4 & & & = & 9 \\
3x_1' & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_3'' & & & - & x_5 & = & 4 \\
4x_1' & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_3'' & & & & & = & -6
\end{array}\right. \\
& x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

课堂练习 2

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & z = -x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ & \left\{\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & - & x_2 & \geq & -2 \\
x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 5
\end{array}\right. \\
& x_1 \geq 0,\ x_2\text{取值无约束}
\end{aligned}
$$

课堂练习 2

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$
\begin{aligned}
&\min\ \ z = -x_1 + x_2 \\
&\text{s.t.} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & \geq & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \end{array}\right. \\
&x_1 \geq 0,\ x_2\text{取值无约束}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\max\ \ z' = x_1 - x_2' + x_2'' \\
&\text{s.t.} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_2'' & & & + & x_4 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & & & & & + & x_5 & = & 5 \end{array}\right. \\
&x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

课堂练习 3

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$
\begin{aligned}
&\min\ z = 0.15x_1 + 0.25x_2 + 0.1x_3 \\
&\text{s.t.} \left\{\begin{array}{rcrcrcr}
50x_1 & + & 150x_2 & + & 90x_3 & \leq & 175 \\
 & & 100x_2 & - & 50x_3 & \leq & -30 \\
70x_1 & + & 10x_2 & & & \geq & 200 \\
30x_1 & + & 80x_2 & + & 200x_3 & \geq & 100
\end{array}\right. \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0,\ x_3\text{取值无约束}
\end{aligned}
$$

课堂练习 3

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$
\begin{aligned}
&\min\ z = 0.15x_1 + 0.25x_2 + 0.1x_3 \\
&\text{s.t.} \left\{
\begin{array}{rcrcrcr}
50x_1 & + & 150x_2 & + & 90x_3 & \le & 175 \\
 & & 100x_2 & - & 50x_3 & \le & -30 \\
70x_1 & + & 10x_2 & & & \ge & 200 \\
30x_1 & + & 80x_2 & + & 200x_3 & \ge & 100
\end{array}
\right. \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0,\ x_3\text{取值无约束}
\end{aligned}
$$

小结

线性规划问题的标准形式

$$
\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
$$

$$
\text{s.t.} \ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}
$$

小结

- 线性规划问题的标准形式

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i\ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j & \geq & 0\ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 三要素: 目标函数，约束条件，决策变量

小结

- 线性规划问题的标准形式

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i\ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j & \geq & 0\ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 三要素：目标函数，约束条件，决策变量
- 非标准型转化为标准形式

小结

- 线性规划问题的标准形式

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i \ (i = 1, \cdots, m) \\ x_j & \geq & 0 \ (j = 1, \cdots, n) \end{array} \right.$$

- 三要素: 目标函数，约束条件，决策变量
- 非标准型转化为标准形式
- 课后作业: P43, 习题 1.2

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈