第二章 线性规划

2.6 对偶性质

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

单纯形法计算的矩阵描述

原问题的矩阵表达

$$
\max\ z = CX \qquad \Longrightarrow \qquad \max\ z = CX + 0X_B
$$

$$
\text{s.t.}\left\{\begin{array}{rcc} AX & \le & b \\ X & \ge & 0 \end{array}\right. \qquad\qquad \text{s.t.}\left\{\begin{array}{rcc} AX + I_m X_B & = & b \\ X, X_s & \ge & 0 \end{array}\right.
$$

单纯形法计算的矩阵描述

- 原问题的矩阵表达

$$\max \ z = CX \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \max \ z = CX + 0X_B$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} AX & \leq & b \\ X & \geq & 0 \end{cases} \qquad\qquad\qquad \text{s.t.} \begin{cases} AX + I_m X_B & = & b \\ X, X_s & \geq & 0 \end{cases}$$

- I 为初始基，X_S 为基变量
- 决策变量分为 $X = (X_B, X_N)$
- 将系数矩阵 (A, I) 分为 (B, N) 两块，其中 B 是基变量的系数矩阵，N 是非基变量的系数矩阵
- 将目标函数的系数 C 分为 C_B，C_N，分别对应于基变量 X_B 和非基变量 X_N，并且记作 $C = (C_B, C_N)$

例 1

- 写出下面问题的对偶问题

$$
\max\ z = 2x_1 + x_2
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} & & 5x_2 & \le & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \le & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \le & 5 \\ x_1 & & x_2 & \ge & 0 \end{cases}
$$

- 标准化

$$
\max\ z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} & & 5x_2 & + & x_3 & & & & & = & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 24 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \ge & 0 \end{cases}
$$

例 1

标准化

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \quad\quad\ \ 5x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad\ \ = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad = 24 \\ \ \ x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad + x_5 = 5 \\ \ \ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1

2.6 对偶性质

例 1

迭代前的单纯形表

项目			非基变量		基变量
C_B	基	b	X_B	X_N	X_S
0	X_S	b	B	N	I
σ			C_B	C_N	0

迭代后的单纯形表

项目			基变量	非基变量	
C_B	基	b	X_B	X_N	X_S
C_B	X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
σ			0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$

例 1

- 迭代前的单纯形表

项目			非基变量		基变量
C_B	基	b	X_B	X_N	X_S
0	X_S	b	B	N	I
σ			C_B	C_N	0

- 迭代后的单纯形表

项目			基变量	非基变量	
C_B	基	b	X_B	X_N	X_S
C_B	X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
σ			0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$

- 对“增广”矩阵做初等行变换

单纯形法计算的矩阵描述

检验数

- 由于 $C_B - C_B I = 0$，于是

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$
$$\Downarrow$$
$$C - C_B B^{-1} A \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

- 利用 $Y^\top = C_B B^{-1}$，得到

$$A^\top Y \geq C^\top, \ Y \geq 0$$

单纯形法计算的矩阵描述

检验数

- 由于 $C_B - C_B I = 0$，于是

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$
$$\Downarrow$$
$$C - C_B B^{-1} A \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

- 利用 $Y^\top = C_B B^{-1}$，得到

$$A^\top Y \geq C^\top, \; Y \geq 0$$

将检验数 $-C_B B^{-1}$ 取相反数，即为其对偶问题的一个可行解

单纯形法计算的矩阵描述

- 检验数
  - 由于 $C_B - C_B I = 0$，于是

$$C_N - C_B B^{-1} N \le 0, \quad -C_B B^{-1} \le 0$$
$$\Downarrow$$
$$C - C_B B^{-1} A \le 0, \quad -C_B B^{-1} \le 0$$

  - 利用 $Y^\top = C_B B^{-1}$，得到

$$A^\top Y \ge C^\top, \ Y \ge 0$$

- 将检验数 $-C_B B^{-1}$ 取相反数，即为其对偶问题的一个可行解
- 当原问题为最优解时，对偶问题为可行解，且两者具有相同的目标函数值，即

$$w = Y^\top b = C_B B^{-1} b = z$$

2.6 对偶性质

- 对偶问题的基本性质
  - 对称性: 对偶问题的对偶是原问题

2.6 对偶性质

- 对偶问题的基本性质
  - **对称性**: 对偶问题的对偶是原问题
  - **弱对偶定理**: 若 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则存在

$$C\overline{X} \leq \overline{Y}^{\top} b$$

2.6 对偶性质

- 对偶问题的基本性质
  - 对称性: 对偶问题的对偶是原问题
  - 弱对偶定理: 若 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则存在

$$C\overline{X} \leq \overline{Y}^{\top} b$$

  - 推论 1: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界，反之，对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

2.6 对偶性质

对偶问题的基本性质

- **对称性**: 对偶问题的对偶是原问题
- **弱对偶定理**: 若 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则存在

$$C\overline{X} \leq \overline{Y}^\top b$$

- **推论 1**: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界，反之，对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。
- **推论 2**: 若原问题有可行解且目标函数值无界，则其对偶问题无可行解；反之，对偶问题有无界解，则原问题无可行解。

对偶问题的基本性质

- **对称性**: 对偶问题的对偶是原问题
- **弱对偶定理**: 若 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，则存在

$$C\overline{X} \leq \overline{Y}^{\top} b$$

- **推论 1**: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界，反之，对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。
- **推论 2**: 若原问题有可行解且目标函数值无界，则其对偶问题无可行解；反之，对偶问题有无界解，则原问题无可行解。
- **推论 3**: 若原问题有可行解，对偶问题无可行解，则原问题目标函数值无界；反之，对偶问题有可行解，而原问题无可行解，则对偶问题的目标函数值无界。

对偶问题的基本性质

- **最优性定理:** 若 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，且 $C\overline{X} \leq \overline{Y}^{\top} b$，则他们分别是原问题和对偶问题的最优解。

对偶问题的基本性质

- **最优性定理**: 若 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，且 $C\overline{X} \leq \overline{Y}^{\top} b$，则他们分别是原问题和对偶问题的最优解。
- **对偶定理**: 若原问题有最优解，对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

2.6 对偶性质

对偶问题的基本性质

- **最优性定理**: 若 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，且 $C\overline{X} \leq \overline{Y}^\top b$，则他们分别是原问题和对偶问题的最优解。
- **对偶定理**: 若原问题有最优解，对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。
- **互补松弛性**: 在线性规划问题的最优解中，若对应某一约束条件的对偶变量值为非零，该约束条件取严格等式。反之，若约束条件取严格不等式，则其所对应的对偶变量一定为 0。

例 2

- 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$
\max \ z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \le & 1 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & \ge & 0 \end{array} \right.
$$

例 2

- 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\max \ z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 上述问题的对偶问题

$$\min \ w = 2y_1 + y_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1 \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$$

例 2

- 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$
\max\ z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

- 上述问题的对偶问题

$$
\min\ w = 2y_1 + y_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1 \quad y_2 \ge 0 \end{cases}
$$

- 由第 1 个约束条件，可知对偶问题无可行解，因而无最优解，由此原问题也无最优解。

例 3

- 已知线性规划问题

$$
\min \ w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5
$$

$$
\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.
$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, z = 5$，试用对偶理论找出原问题的最优解。

例 3

原问题

$$\min \ w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq & 0 \end{array} \end{cases}$$

对偶问题

$$\max \ z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \begin{array}{cccccc} y_1 & + & 2y_2 & \leq & 2 & (1) \\ y_1 & - & y_2 & \leq & 3 & (2) \\ 2y_1 & + & 3y_2 & \leq & 5 & (3) \\ y_1 & + & y_2 & \leq & 2 & (4) \\ 3y_1 & + & y_2 & \leq & 3 & (5) \\ y_1 & & y_2 & \geq & 0 & \end{array} \end{cases}$$

- 例 3
  - 将 $y_1^*=4/5, y_2^*=3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2)=1/5<3,\ (3)=17/5<5,(4)=7/5<2$$

例 3

- 将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3,\ (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

- 它们为严格不等式，由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$

例 3

- 将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3,\ (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

- 它们为严格不等式，由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$
- 因 $y_1, y_2 \geq 0$，原问题的两个约束条件应取等式，故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4,\ 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1,\ x_5^* = 1$

- 例 3
  - 将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3,\ (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

  - 它们为严格不等式，由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$
  - 因 $y_1, y_2 \geq 0$，原问题的两个约束条件应取等式，故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4,\ 2x_1^* + x_5^* = 3$$

    求解后得到 $x_1^* = 1,\ x_5^* = 1$
  - 故原问题的最优解为 $X^* = (1, 0, 0, 0, 1)^\top$，最优值为 $w^* = 5$

- 小结
  - 对称性
  - 弱对偶定理
  - 最优性定理
  - 对偶定理
  - 互补松弛性
- 课后作业: P75, 习题 2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈