第一章 线性规划及单纯形法

1.3 单纯形法原理

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

解的概念

标准形式

$$
\text{(LP)} \quad \max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \cdots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \cdots, n) & (1.3) \end{cases}
$$

解的概念

- 标准形式

$$
\text{(LP)} \quad \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \cdots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \cdots, n) & (1.3) \end{cases}
$$

- 满足约束条件 (1.2) 和 (1.3) 的 $x_j \ (j = 1, \cdots, n)$ 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 满足 (1.1) 的可行解称为**最优解**
- 最优解所对应的函数值称为**最优值**

解的概念

- 设 $\mathbf{A}$ 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n$ $(n > m)$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\mathbf{B}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，记为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m)$$

解的概念

- 设 $\mathbf{A}$ 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n$ $(n > m)$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\mathbf{B}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，记为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m)$$

- $\mathbf{B}$ 是线性规划问题 (LP) 的一个基
- $\mathbf{B}$ 中的每一个列向量 $\mathbf{P}_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ 称为基向量

1.3 单纯形法原理

解的概念

- 设 $\mathbf{A}$ 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n\ (n > m)$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\mathbf{B}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，记为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m)$$

- $\mathbf{B}$ 是线性规划问题 (LP) 的一个基
- $\mathbf{B}$ 中的每一个列向量 $\mathbf{P}_j\ (j = 1, \cdots, m)$ 称为基向量
- 与基向量 $\mathbf{P}_j\ (j = 1, \cdots, m)$ 对应的变量 $x_j\ (j = 1, \cdots, m)$ 称为基变量，记为 $\mathbf{X}_B = (x_1, \cdots, x_m)$
- 除基变量以外的变量称为非基变量，记为 $\mathbf{X}_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$

例 1

- 找出线性规划问题的基、基向量和基变量

$$\max \quad z = 70x_1 + 120x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- 例 1
  - 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 1

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 寻找阶为 m 的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$，非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

例 1

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 寻找阶为 m 的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$，非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

- 另一个基为

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_2, x_4, x_5)^\top$, 非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_3)^\top$

解的概念

- 在 (1.2) 中，令所有非基变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 等于 0，则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^\top$$

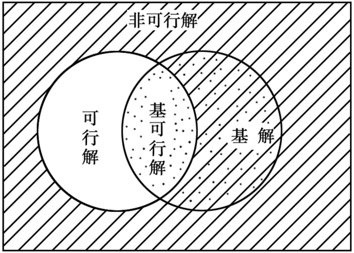
  为线性规划问题 (LP) 的基解
- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为基可行解
- 对应于基可行解的基称为可行基

解的概念

- 在 (1.2) 中，令所有非基变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 等于 0，则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^\top$$

  为线性规划问题 (LP) 的基解
- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为基可行解
- 对应于基可行解的基称为可行基



- 例 2
  - 求出全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

例 2

- 全部基解见下表

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	可行解
①	0	0	5	10	4	5	✓
②	0	4	5	2	0	17	✓
③	5	0	0	5	4	10	✓
④	0	5	5	0	-1	20	×
⑤	10	0	-5	0	4	15	×
⑥	5	2.5	0	0	0	1.5	✓
⑦	5	4	0	-3	0	22	×
⑧	2	4	3	0	0	19	✓

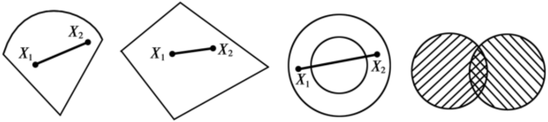
- 最优解为 $(2, 4, 3, 0, 0)$，最优值为 19

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2 \in \Omega$，满足

$$\alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



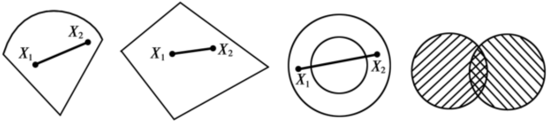
(a) (b) (c) (d)

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \Omega$，满足

$$\alpha\mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



(a) (b) (c) (d)

- 对于凸集 Ω 中的点 $\mathbf{X}$，如果不存在 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \Omega$ 使得

$$\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 $\mathbf{X}$ 是凸集 Ω 的顶点 (极点)。

- 几个基本定理
  - 定理 1: 若线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集。

几个基本定理

- 定理 1: 若线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集。
  - (证) 记 Ω 为满足线性规划问题束条件的集合

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b},\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

设 Ω 内的任意两点为

$$\mathbf{X}_1 = (x_{11}, \cdots, x_{1n})^\top,\ \mathbf{X}_2 = (x_{21}, \cdots, x_{2n})^\top$$

且 $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$，一定满足

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_{1j} = \mathbf{b},\ x_{1j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_{2j} = \mathbf{b},\ x_{2j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

几个基本定理

- 定理 1: 若线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集。
  - (续) 令 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^\top$ 为 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$ 连线上任意一点，即

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中 $x_j = \alpha x_{1j} + (1-\alpha) x_{2j}$。

几个基本定理

定理 1: 若线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集。

- (续) 令 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^\top$ 为 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$ 连线上任意一点，即

$$\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2 \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中 $x_j = \alpha x_{1j} + (1-\alpha)x_{2j}$。于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j \left(\alpha x_{1j} + (1-\alpha)x_{2j}\right) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_{1j} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_{2j} - \alpha \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_{2j} \\ &= \alpha\mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

考虑 $x_{1j}, x_{2j} \geq 0$, $\alpha > 0$, $1-\alpha > 0$，可知 $x_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$。于是集合中任意两点连线上的点均在集合内，所以 Ω 是凸集。

几个基本定理

- 引理: 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X}=(x_1,x_2\ldots,x_n)^\top$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

几个基本定理

- **引理:** 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)^\top$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
  - (必要性) 由基可行解的定义可知。

几个基本定理

- 引理: 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X}=(x_1,x_2\ldots,x_n)^\top$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
  - (必要性) 由基可行解的定义可知。
  - (充分性) 若向量 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k$ 线性独立，则必有 $k\leq m$。

    (1) 当 $k=m$ 时，$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k$ 恰构成一个基，从而

    $$\mathbf{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^\top$$

    为相应的基可行解。

    (2) 当 $k<m$ 时，则一定可以从其余的列向量中取出 $m-k$ 个与 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k$ 构成最大的线性独立向量组，其对应的解恰为 $\mathbf{X}$，所以根据定义它是基可行解。

几个基本定理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。

几个基本定理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。
- 定理 3: 若线性规划问题有最优解，那么一定存在一个基可行解是最优解。

1.3 单纯形法原理

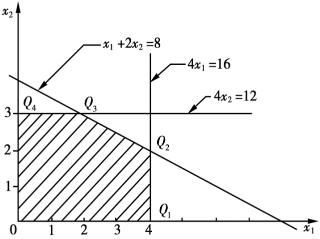
几个基本定理

- **定理 2:** 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。
- **定理 3:** 若线性规划问题有最优解，那么一定存在一个基可行解是最优解。
- **定理 4:** 可行域有界，目标函数最优值必可在顶点得到。

1.3 单纯形法原理

几个基本定理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。
- 定理 3: 若线性规划问题有最优解，那么一定存在一个基可行解是最优解。
- 定理 4: 可行域有界，目标函数最优值必可在顶点得到。



- 虽然顶点数目是有限的，若采用“枚举法”找所有基可行解，然后一一比较，最终可能找到最优解。但当 n, m 的数较大时，这种办法是行不通的。

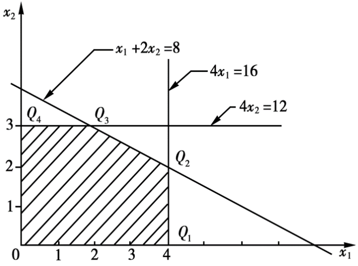
1.3 单纯形法原理

单纯形法

- 先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止。

单纯形法

- 先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止。
- 迭代步骤
  - 第一步：求初始基可行解，列出初始单纯形表
  - 第二步：最优性检验
  - 第三步：从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表
  - 第四步：重复二、三步，一直到计算结束为止



小结

- 可行解，最优解
- 基，基解，基可行解，可行基
- 凸集，顶点
- 解的性质
  - 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集
  - 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点
  - 若线性规划问题有最优解，必在某顶点上得到

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈