

# 第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

## 2.2 对偶问题的基本性质

修贤超

机电工程与自动化学院  
上海大学

[xcxiu@shu.edu.cn](mailto:xcxiu@shu.edu.cn)

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 单纯形法计算的矩阵描述

#### □ 原问题的矩阵表达

$$\begin{array}{ll} \max z = CX & \\ \text{s.t. } \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} & \implies \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max z = CX + 0X_B & \\ \text{s.t. } \begin{cases} AX + I_m X_B = b \\ X, X_s \geq 0 \end{cases} & \end{array}$$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 单纯形法计算的矩阵描述

#### □ 原问题的矩阵表达

$$\begin{array}{ll} \max z = CX & \\ \text{s.t. } \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} & \implies \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max z = CX + 0X_B & \\ \text{s.t. } \begin{cases} AX + I_m X_B = b \\ X, X_s \geq 0 \end{cases} & \end{array}$$

□  $I$  为初始基,  $X_S$  为基变量

□ 决策变量分为  $X = (X_B, X_N)$

□ 将系数矩阵  $(A, I)$  分为  $(B, N)$  两块, 其中  $B$  是基变量的系数矩阵,  $N$  是非基变量的系数矩阵

□ 将目标函数的系数  $C$  分为  $C_B, C_N$ , 分别对应于基变量  $X_B$  和非基变量  $X_N$ , 并且记作  $C = (C_B, C_N)$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 1

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 标准化

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 1

#### □ 标准化

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

#### □ 列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	$x_3$	15	0	5	1	0	0
0	$x_4$	24	6	2	0	1	0
0	$x_5$	5	1	1	0	0	1

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 1

□ 迭代前的单纯形表

项目			非基变量		基变量
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$
0	$X_S$	$b$	$B$	$N$	$I$
$\sigma$			$C_B$	$C_N$	0

□ 迭代后的单纯形表

项目			基变量	非基变量	
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$
$C_B$	$X_B$	$B^{-1}b$	$I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}$
$\sigma$			0	$C_N - C_B B^{-1}N$	$-C_B B^{-1}$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 1

□ 迭代前的单纯形表

项目			非基变量		基变量
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$
0	$X_S$	$b$	$B$	$N$	$I$
$\sigma$			$C_B$	$C_N$	0

□ 迭代后的单纯形表

项目			基变量	非基变量	
$C_B$	基	$b$	$X_B$	$X_N$	$X_S$
$C_B$	$X_B$	$B^{-1}b$	$I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}$
$\sigma$			0	$C_N - C_B B^{-1}N$	$-C_B B^{-1}$

□ 对“增广”矩阵做初等行变换

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 单纯形法计算的矩阵描述

#### □ 检验数

- 由于  $C_B - C_B I = 0$ , 于是

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

$\Downarrow$

$$C - C_B B^{-1} A \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

- 利用  $Y^T = C_B B^{-1}$ , 得到

$$A^T Y \geq C^T, \quad Y \geq 0$$



## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 单纯形法计算的矩阵描述

#### □ 检验数

- 由于  $C_B - C_B I = 0$ , 于是

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

$\Downarrow$

$$C - C_B B^{-1} A \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

- 利用  $Y^T = C_B B^{-1}$ , 得到

$$A^T Y \geq C^T, \quad Y \geq 0$$

- 将检验数  $-C_B B^{-1}$  取相反数, 即为其对偶问题的一个可行解

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 单纯形法计算的矩阵描述

#### □ 检验数

- 由于  $C_B - C_B I = 0$ , 于是

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

$\Downarrow$

$$C - C_B B^{-1} A \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0$$

- 利用  $Y^T = C_B B^{-1}$ , 得到

$$A^T Y \geq C^T, \quad Y \geq 0$$

□ 将检验数  $-C_B B^{-1}$  取相反数, 即为其对偶问题的一个可行解

□ 当原问题为最优解时, 对偶问题为可行解, 且两者具有相同的目标函数值, 即

$$w = Y^T b = C_B B^{-1} b = z$$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

- **对称性:** 对偶问题的对偶是原问题

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

□ **对称性:** 对偶问题的对偶是原问题

□ **弱对偶定理:** 若  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是原问题和对偶问题的可行解, 则存在

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}^T b$$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

□ **对称性:** 对偶问题的对偶是原问题

□ **弱对偶定理:** 若  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是原问题和对偶问题的可行解, 则存在

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}^T b$$

□ **推论 1:** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界, 反之, 对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

□ **对称性:** 对偶问题的对偶是原问题

□ **弱对偶定理:** 若  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是原问题和对偶问题的可行解, 则存在

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}^T b$$

□ **推论 1:** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界, 反之, 对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

□ **推论 2:** 若原问题有可行解且目标函数值无界, 则其对偶问题无可行解; 反之, 对偶问题有无界解, 则原问题无可行解。

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

□ **对称性:** 对偶问题的对偶是原问题

□ **弱对偶定理:** 若  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是原问题和对偶问题的可行解, 则存在

$$C\bar{X} \leq \bar{Y}^T b$$

□ **推论 1:** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界, 反之, 对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

□ **推论 2:** 若原问题有可行解且目标函数值无界, 则其对偶问题无可行解; 反之, 对偶问题有无界解, 则原问题无可行解。

□ **推论 3:** 若原问题有可行解, 对偶问题无可行解, 则原问题目标函数值无界; 反之, 对偶问题有可行解, 而原问题无可行解, 则对偶问题的目标函数值无界。

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

- **最优性定理:** 若  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是原问题和对偶问题的可行解, 且  $C\bar{X} \leq \bar{Y}^T b$ , 则他们分别是原问题和对偶问题的最优解。



## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

- **最优性定理:** 若  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是原问题和对偶问题的可行解, 且  $C\bar{X} \leq \bar{Y}^T b$ , 则他们分别是原问题和对偶问题的最优解。
- **对偶定理:** 若原问题有最优解, 对偶问题也有最优解, 且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解, 则两者均具有最优解, 且它们最优解的目标函数值相等。

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 对偶问题的基本性质

- **最优性定理:** 若  $\bar{X}, \bar{Y}$  分别是原问题和对偶问题的可行解, 且  $C\bar{X} \leq \bar{Y}^T b$ , 则他们分别是原问题和对偶问题的最优解。
- **对偶定理:** 若原问题有最优解, 对偶问题也有最优解, 且目标函数值相等。或若原问题与对偶问题均具有可行解, 则两者均具有最优解, 且它们最优解的目标函数值相等。
- **互补松弛性:** 在线性规划问题的最优解中, 若对应某一约束条件的对偶变量值为非零, 该约束条件取严格等式。反之, 若约束条件取严格不等式, 则其所对应的对偶变量一定为 0。

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 2

□ 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 \quad \quad x_2 \quad \quad x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 2

□ 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 上述问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 2

□ 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 上述问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 由第 1 个约束条件，可知对偶问题无可行解，因而无最优解，由此原问题也无最优解。

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 3

□ 已知线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1 \quad \quad x_2 \quad \quad x_3 \quad \quad x_4 \quad \quad x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

已知其对偶问题的最优解为  $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, z = 5$ , 试用对偶理论找出原问题的最优解。

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 3

#### □ 原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1 \quad \quad x_2 \quad \quad x_3 \quad \quad x_4 \quad \quad x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

#### □ 对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \leq 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \leq 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 & (5) \\ y_1 \quad \quad y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 3

□ 将  $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$  的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3, (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$



## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 3

□ 将  $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$  的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3, (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

□ 它们为严格不等式，由互补松弛性得  $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 3

□ 将  $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$  的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3, (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

□ 它们为严格不等式, 由互补松弛性得  $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$

□ 因  $y_1, y_2 \geq 0$ , 原问题的两个约束条件应取等式, 故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4, 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到  $x_1^* = 1, x_5^* = 1$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 例 3

□ 将  $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$  的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3, (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

□ 它们为严格不等式, 由互补松弛性得  $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$

□ 因  $y_1, y_2 \geq 0$ , 原问题的两个约束条件应取等式, 故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4, 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到  $x_1^* = 1, x_5^* = 1$

□ 故原问题的最优解为  $X^* = (1, 0, 0, 0, 1)^\top$ , 最优值为  $w^* = 5$

## 2.2 对偶问题的基本性质

### ■ 小结

- 对称性
- 弱对偶定理
- 最优性定理
- 对偶定理
- 互补松弛性

### ■ 课后作业: P75, 习题 2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈