第一章 线性规划及单纯形法

1.2 图解法

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

线性规划问题的数学模型

- 标准形式

$$\max\ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

- 满足约束条件的 x_j $(j = 1, \cdots, n)$ 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 使目标函数达到最优的可行解称为**最优解**

适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,\ i = 1,\cdots,m \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases}$$

具体步骤

1.2 图解法

适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$\text{s.t.} \ \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ i = 1, \cdots, m \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases}$$

具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件，找出可行域
- 第三步: 图示目标函数
- 第四步: 确定最优解

1.2 图解法

例 1

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

例 1

用图解法求解线性规划问题

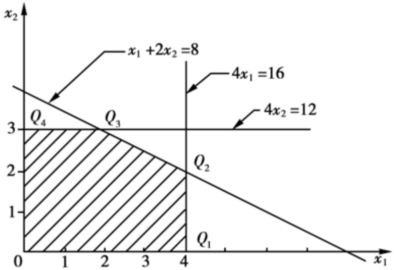
$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- **决策变量**: x_1, x_2
- **目标函数**: $\max \ z = 2x_1 + 3x_2$
- **约束条件**: $x_1 + 2x_2 \le 8$, $4x_1 \le 16$, $4x_2 \le 12$， $x_1, x_2 \ge 0$

具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件，找出可行域

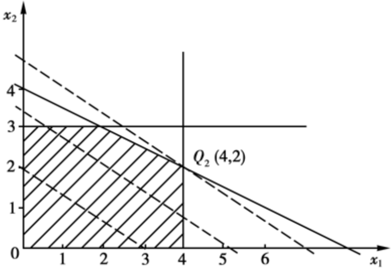


1.2 图解法

- 具体步骤
  - 第一步: 建立平面直角坐标系
  - 第二步: 图示约束条件，找出可行域
  - 第三步: 图示目标函数 $\max \ z = 2x_1 + 3x_2$

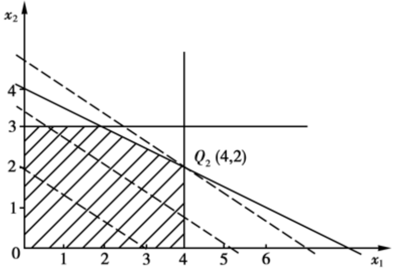
具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件，找出可行域
- 第三步: 图示目标函数 $\max \ z = 2x_1 + 3x_2$



具体步骤

- 第一步：建立平面直角坐标系
- 第二步：图示约束条件，找出可行域
- 第三步：图示目标函数 $\max \ z = 2x_1 + 3x_2$



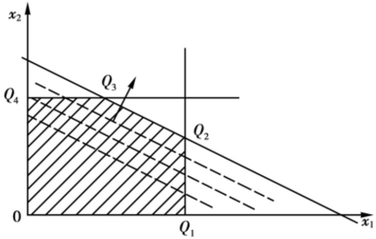
- 第四步：确定最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$，最优值为 $z = 14$

无穷多最优解 (多重最优解)

- 目标函数的直线族与约束条件平行

$$\max \quad z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

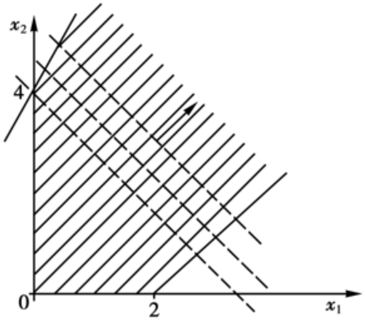


无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

$$
\max \quad z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

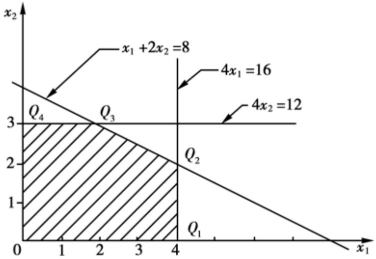


无可行解

- 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



- 课堂练习 1
  - 用图解法求解线性规划问题

$$
\max \; z = 4x_1 + 3x_2
$$

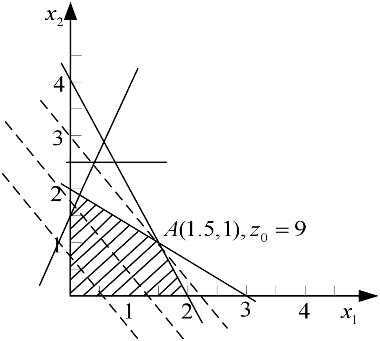
$$
\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

课堂练习 1

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



课堂练习 2

- 用图解法求解线性规划问题

$$
\max \; z = 2x_1 + 3x_2
$$

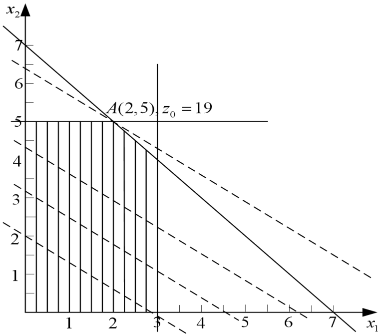
$$
\text{s.t.} \; \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

课堂练习 2

- 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 4x_1 \le 12 \\ 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



小结

- 解的存在性
  - 有最优解: 唯一解，无穷多解
  - 无最优解: 无界解，无可行解
- 可行域为凸集
- 若有最优解，定可在可行域的顶点得到
- 可以找到所有的顶点，比较其对应的目标函数值的大小

- 小结
  - 解的存在性
    - 有最优解: 唯一解，无穷多解
    - 无最优解: 无界解，无可行解
  - 可行域为凸集
  - 若有最优解，定可在可行域的顶点得到
  - 可以找到所有的顶点，比较其对应的目标函数值的大小
- 课后作业: P43, 习题 1.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈