第一章 线性规划及单纯形法

1.4 单纯形法计算步骤

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

单纯形表

考虑约束条件

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & & & & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & x_2 & & & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & \ddots & & + & & & & & & & \\
 & & & x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

单纯形表

- 考虑约束条件

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & & & & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
& x_2 & & & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
& & \ddots & & + & & & & & & & \\
& & & x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}$$

- 为了便于理解计算关系，设计单纯形表

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,n} \\
0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,n}
\end{bmatrix}$$

单纯形表

- **检验数** $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}
$c_j - z_j$			0	$\cdots$	0	$\cdots$	σ_j	$\cdots$	σ_n

基本步骤

- 第 1 步: 求初始基可行解，列出初始单纯形表

基本步骤

- 第 1 步: 求初始基可行解，列出初始单纯形表
- 第 2 步: 最优性检验，计算各非基变量 x_j 的检验数

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

- 如果所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，且基变量中不含有人工变量时，则停止迭代，得到最优解
- 如果存在 $\sigma_j > 0$，且有 $P_j \leq 0$，则停止迭代，问题为无界解
- 否则转 3 步

基本步骤

- **第 3 步**: 基可行解转化。从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表
  - 确定换入变量 x_k（最大增加原则）

$$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$$

  - 确定换出变量 x_l（最小比值原则）

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

    确定 x_l 为换出变量，a_{lk} 为主元

  - 用换入变量 x_k 替换基变量中的换出变量 x_l，得到一个新的基 $(P_1, \ldots, P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, \ldots, P_m)$，进行初等变换

基本步骤

- **第 3 步**: 基可行解转化。从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表
  - 确定换入变量 x_k（最大增加原则）

$$\sigma_k = \max_j \ \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$$

  - 确定换出变量 x_l（最小比值原则）

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

    确定 x_l 为换出变量，a_{lk} 为主元
  - 用换入变量 x_k 替换基变量中的换出变量 x_l，得到一个新的基 $(P_1, \ldots, P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, \ldots, P_m)$，进行初等变换
- **第 4 步**: 重复 2、3 两步，一直到计算结束为止

- **例 1**
  - 用单纯形法求解线性规划问题

$$
\max \quad z = 2x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases}
 & & 5x_2 & \le & 15 \\
6x_1 & + & 2x_2 & \le & 24 \\
x_1 & + & x_2 & \le & 5 \\
x_1 & & x_2 & \ge & 0
\end{cases}
$$

例 1

- 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\ \left\{\begin{array}{rcrcl} & & 5x_2 & \leq & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

- 标准化

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & 5x_2 & + & x_3 & & & & & = & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 24 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

- 例 1
  - 第 1 步: 求初始基可行解，列出初始单纯形表

$c_j \to$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

- 例 1
  - 第 1 步: 求初始基可行解，列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

  - 第 2 步: 检验数大于零，因此初始基可行解不是最优解

例 1

第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_1 > \sigma_2$，确定 x_1 为换入变量
- $\theta = \min\left\{\infty, \frac{24}{6}, \frac{5}{1}\right\} = 4$, 因此确定 6 为主元素
- x_4 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	$\underline{x_4}$	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

- 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	$\underline{x_4}$	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

$$\Downarrow$$

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	$2/6$	0	$1/6$	0
0	x_5	1	0	$4/6$	0	$-1/6$	1
$c_j - z_j$			0	$1/3$	0	$-1/3$	0

例 1

第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_2 > 0$，确定 x_2 为换入变量
- $\theta = \min\left\{\frac{15}{5}, \frac{1}{2/3}, \frac{5}{4/6}\right\} = \frac{30}{4}$，因此确定 $4/6$ 为主元素
- x_5 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	$2/6$	0	$1/6$	0
0	$\underline{x_5}$	1	0	$[4/6]$	0	$-1/6$	1
$c_j - z_j$			0	$1/3$	0	$-1/3$	0

- **例 1**
  - 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \le 0$，得到最优解

$c_j \to$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$15/2$	0	0	1	$5/4$	$-15/2$
2	x_1	$7/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
1	x_2	$3/2$	0	1	0	$-1/4$	$3/2$
$c_j - z_j$			0	0	0	$-1/4$	-1.2

例 1

- 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，得到最优解

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$15/2$	0	0	1	$5/4$	$-15/2$
2	x_1	$7/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
1	x_2	$3/2$	0	1	0	$-1/4$	$3/2$
$c_j - z_j$			0	0	0	$-1/4$	-1.2

- 代入目标函数得最优值 $z = 2x_1 + x_2 = 17/2$

- 例 2
  - 用单纯形法求解线性规划问题

$$
\max \quad z = 2x_1 + 3x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases}
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\
4x_1 & & & \leq & 16 \\
 & & 4x_2 & \leq & 12 \\
x_1 & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\end{cases}
$$

例 2

- 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1\quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 标准化

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4\quad x_5 \ge 0 \end{cases}$$

例 2

- 第 1 步：求初始基可行解，列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	12	0	4	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

- 第 2 步：检验数大于零，因此初始基可行解不是最优解

1.4 单纯形法计算步骤

例 2

第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_2 > \sigma_1$，确定 x_2 为换入变量
- $\theta = \min\left\{\frac{8}{2}, \infty, \frac{12}{4}\right\} = 3$, 因此确定 4 为主元素
- x_5 为换出变量

$c_j \to$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	$\underline{x_5}$	12	0	$[4]$	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

- 例 2

$c_j \to$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	$\underline{x_5}$	12	0	[4]	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

$$\Downarrow$$

$c_j \to$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

例 2

第 3 步: 基可行解的转换

- 因 $\sigma_1 > 0$，确定 x_1 为换入变量
- $\theta = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{16}{4}, \infty\right\} = 2$, 因此确定 1 为主元素
- x_3 为换出变量

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\underline{x_3}$	2	[1]	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

- 例 2

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\underline{x_3}$	2	[1]	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

$$\Downarrow$$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	8	0	0	-4	1	2
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

- 例 2
  - 第 3 步: 基可行解的转换
    - 因 $\sigma_5 > 0$，确定 x_5 为换入变量
    - $\theta = \min\left\{-, \frac{8}{2}, \frac{3}{1/4}\right\} = 4$, 因此确定 2 为主元素
    - x_4 为换出变量

$c_j \to$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

例 2

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

$$\Downarrow$$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1
3	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	$-1/8$	0

- 例 2
  - 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，得到最优解

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	$-1/8$	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	$-1/8$	0

- 例 2
  - 第 4 步: 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，得到最优解

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1
3	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	$-1/8$	0

  - 基可行解 $X = (4, 2, 0, 0, 4)^\top$ 是最优解
  - 代入目标函数得最优值 $z = 2x_1 + 3x_2 = 14$

- 课堂练习 1
  - 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max\ z = 50x_1 + 100x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 \le 300 \\ 2x_1 + x_2 \le 400 \\ x_2 \le 250 \\ x_1\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

课堂练习 1

- 经过分析得到

$c_j \rightarrow$			50	100	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
50	x_1	50	1	0	1	0	-1
0	x_4	50	0	0	-2	1	1
100	x_2	250	0	1	0	0	1
$c_j - z_j$			0	0	-50	0	-50

- 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$，得到最优解
- 基可行解 $X = (50, 250, 0, 50, 0)^\top$ 是最优解
- 代入目标函数得最优值 $z = 50x_1 + 100x_2 = 27500$

1.4 单纯形法计算步骤

- 小结
  - 第 1 步: 求初始基可行解，列出初始单纯形表
  - 第 2 步: 最优性检验，计算 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$
  - 第 3 步: 基可行解转化
  - 第 4 步: 重复 2、3 两步，一直到计算结束为止
- 课后作业: P44, 习题 1.3

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈