

第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

2.1 线性规划的对偶理论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对偶问题的提出

□ 两种家电各生产多少, 可获最大利润?

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

□ 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2 , 数学模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对偶问题的提出

- 公司不再安排生产，而是将设备 A、设备 B 和调试工序这三种能力资源出租用于对外加工，此时公司应考虑如何确定各种资源的租价，才能获得最大利润

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

□ 问题分析

- 把资源租出去所获得的租金不应低于自行生产时的可获利润
- 定价不能太高，要使租赁方能够接受

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对偶问题的提出

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- **决策变量:** 设 y_1, y_2, y_3 分别为出租 A, B 设备和调试工序三种资源单位时间的租金
- **决策变量:** 出租资源所得到的租金应不低于自己生产产品时的获利, 否则不如自己生产为好, 因此有

$$\begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5x_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

- **决策变量:** 公司总收入为 $w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$, 这也是租赁方需要付出的成本

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对偶问题的提出

- **从公司的角度考虑**: 由市场经济价值规律, 租价并非越高越好, 因为租价太高就不会有人来租, 因此应在保证出租资源所得收益不少于自己生产获利的前提下, 为了使公司的竞争能力最强, 应该最小化总收益
- **从租赁方的角度考虑**: 希望价格越低越好, 否则另找他人。于是, 能够使双方共同接受的是

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对偶问题的提出

□ 原问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5x_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对称形式

□ 原问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 变量均具有**非负约束**

□ 目标函数求**极大**时，约束条件均取 \leq 号

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对称形式

□ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_n \leq c_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_n \leq c_2 \\ \dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \leq c_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 变量均具有**非负约束**

□ 目标函数求**极小**时，约束条件均取 \leq 号

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对称形式

□ 矩阵形式

$$(P) \quad \max \quad z = CX$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$(D) \quad \min \quad w = T^{\top} b$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} A^{\top} Y \geq C^{\top} \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

□ 分析

项目	原问题	对偶问题
A	约束系数矩阵	约束系数矩阵的转置
b	约束条件的右端项向量	目标函数中的价格系数向量
C	目标函数中的价格系数向量	约束条件的右端项向量
目标函数	$\max \quad z = CX$	$\min \quad w = Y^{\top} b$
约束条件	$AX \leq b$	$A^{\top} Y \geq C^{\top}$
决策变量	$X \geq 0$	$Y \geq 0$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对称形式

□ 例 1: 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对称形式

□ 例 1: 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 7y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 非对称形式

□ 整体思路

非对称形式 \implies 对称形式 \implies 对偶问题

□ 情况一：等式变不等式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

\Downarrow

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

\Downarrow

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 非对称形式

□ 情况二: 不等式变不等式

- 目标函数求极小时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

\Downarrow

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

- 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

\Downarrow

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

□ 情况三: 变量转换

- 若存在取值无约束的变量 x_k , 可令

$$x_k = x'_k - x''_k, \quad x'_k, x''_k \geq 0$$

- 若 $x_k \leq 0$, 可令

$$x'_k = -x_k, \quad x'_k \geq 0$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 1

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 1

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 7y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1 \text{ 自由}, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 2

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 2

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

□ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \leq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 = c_3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{无约束}, y_3 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 对偶问题与原问题的

□ 关系归纳

原问题	对偶问题
目标函数 $\max z$	目标函数 $\min w$
决策变量 n 个	约束条件 n 个
决策变量 ≥ 0	约束条件 ≤ 0
决策变量 ≤ 0	约束条件 ≥ 0
决策变量无约束	约束条件 $=$
约束条件 m 个	决策变量 m 个
约束条件 ≥ 0	决策变量 ≤ 0
约束条件 ≤ 0	决策变量 ≥ 0
约束条件 $=$	决策变量无约束
约束条件右端项向量	目标函数变量的系数
目标函数变量系数	约束条件右端项向量

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 3

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 \text{ 无约束, } x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 3

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 \text{无约束}, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & w = 6y_1 + 9y_2 + 4y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 2y_1 + 5y_3 \leq 2 \\ 3y_2 - 2y_3 \leq -3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 4

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 例 4

□ 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

□ 对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

2.1 线性规划的对偶理论

■ 小结

- 对偶问题的提出
- 对偶问题与原问题的关系
 - 对称形式
 - 非对称形式
- 非对称形式的原-对偶问题关系

■ 课后作业: P75, 习题 2.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈