

# 第一章 线性规划及单纯形法

## 1.3 单纯形法原理

修贤超

机电工程与自动化学院  
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

# 1.3 单纯形法原理

## ■ 解的概念

### □ 标准形式

$$(LP) \quad \max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

#### □ 标准形式

$$(LP) \quad \max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) & (1.3) \end{cases}$$

- 满足约束条件 (1.2) 和 (1.3) 的  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 满足 (1.1) 的可行解称为**最优解**
- 最优解所对应的函数值称为**最优值**

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

□ 设  $A$  为约束方程组 (1.2) 的  $m \times n$  ( $n > m$ ) 阶系数矩阵, 其秩为  $m$ ,  $B$  是矩阵  $A$  中的一个  $m \times m$  阶的满秩子矩阵, 记为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

- 设  $A$  为约束方程组 (1.2) 的  $m \times n$  ( $n > m$ ) 阶系数矩阵, 其秩为  $m$ ,  $B$  是矩阵  $A$  中的一个  $m \times m$  阶的满秩子矩阵, 记为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

- $B$  是线性规划问题 (LP) 的一个**基**
- $B$  中的每一个列向量  $P_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) 称为**基向量**

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

- 设  $A$  为约束方程组 (1.2) 的  $m \times n$  ( $n > m$ ) 阶系数矩阵, 其秩为  $m$ ,  $B$  是矩阵  $A$  中的一个  $m \times m$  阶的满秩子矩阵, 记为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

- $B$  是线性规划问题 (LP) 的一个**基**
- $B$  中的每一个列向量  $P_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) 称为**基向量**
- 与基向量  $P_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) 对应的变量  $x_j$  ( $j = 1, \cdots, m$ ) 称为**基变量**, 记为  $X_B = (x_1, \cdots, x_m)$
- 除基变量以外的变量称为**非基变量**, 记为  $X_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 找出线性规划问题的基、基向量和基变量

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 70x_1 + 120x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ 寻找阶为  $m$  的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为  $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$ , 非基变量为  $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 1

□ 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ 寻找阶为  $m$  的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为  $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$ , 非基变量为  $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

□ 另一个基为

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为  $\mathbf{X}_B = (x_2, x_4, x_5)^\top$ , 非基变量为  $\mathbf{X}_N = (x_1, x_3)^\top$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

- 在 (1.2) 中, 令所有非基变量  $x_{m+1}, \dots, x_n$  等于 0, 则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为线性规划问题 (LP) 的**基解**

- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为**基可行解**
- 对应于基可行解的基称为**可行基**

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 解的概念

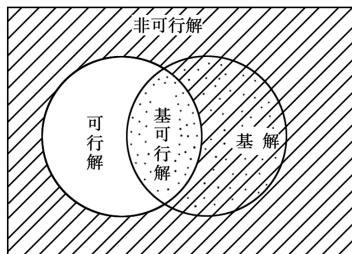
□ 在 (1.2) 中, 令所有非基变量  $x_{m+1}, \dots, x_n$  等于 0, 则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为线性规划问题 (LP) 的**基解**

□ 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为**基可行解**

□ 对应于基可行解的基称为**可行基**



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 2

□ 求出全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 例 2

□ 全部基解见下表

序号	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$z$	可行解
①	0	0	5	10	4	5	✓
②	0	4	5	2	0	17	✓
③	5	0	0	5	4	10	✓
④	0	5	5	0	-1	20	×
⑤	10	0	-5	0	4	15	×
⑥	5	2.5	0	0	0	1.5	✓
⑦	5	4	0	-3	0	22	×
⑧	2	4	3	0	0	19	✓

□ 最优解为  $(2, 4, 3, 0, 0)$ ，最优值为 19

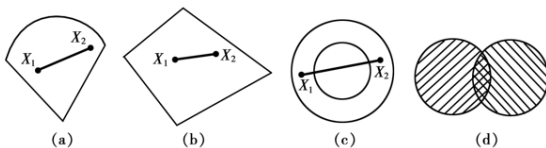
## 1.3 单纯形法原理

### ■ 凸集

□ 对于任意两点  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \Omega$ , 满足

$$\alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称  $\Omega$  为凸集。



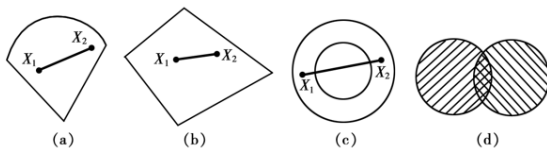
# 1.3 单纯形法原理

## ■ 凸集

□ 对于任意两点  $X_1, X_2 \in \Omega$ , 满足

$$\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称  $\Omega$  为凸集。



□ 对于凸集  $\Omega$  中的点  $X$ , 如果不存在  $X_1, X_2 \in \Omega$  使得

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称  $X$  是凸集  $\Omega$  的顶点 (极点)。



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

□ **定理 1:** 若线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

□ **定理 1:** 若线性规划问题存在可行解, 则可行域是凸集。

- (证) 记  $\Omega$  为满足线性规划问题束条件的集合

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

设  $\Omega$  内的任意两点为

$$\mathbf{X}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n})^\top, \quad \mathbf{X}_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n})^\top$$

且  $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$ , 一定满足

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{1j} = \mathbf{b}, \quad x_{1j} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} = \mathbf{b}, \quad x_{2j} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

□ **定理 1:** 若线性规划问题存在可行解, 则可行域是凸集。

- (续) 令  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  为  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  连线上任意一点, 即

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中  $x_j = \alpha x_{1j} + (1 - \alpha)x_{2j}$ 。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

□ **定理 1:** 若线性规划问题存在可行解, 则可行域是凸集。

- (续) 令  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$  为  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  连线上任意一点, 即

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中  $x_j = \alpha x_{1j} + (1 - \alpha)x_{2j}$ 。于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j (\alpha x_{1j} + (1 - \alpha)x_{2j}) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{1j} + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} - \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} \\ &= \alpha \mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

考虑  $x_{1j}, x_{2j} \geq 0, \alpha > 0, 1 - \alpha > 0$ , 可知  $x_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)$ 。于是集合中任意两点连线上的点均在集合内, 所以  $\Omega$  是凸集。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

- **引理:** 线性规划问题的可行解  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  为基可行解的充要条件是  $\mathbf{X}$  的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

- **引理:** 线性规划问题的可行解  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  为基可行解的充要条件是  $\mathbf{X}$  的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
- (必要性) 由基可行解的定义可知。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

□ **引理:** 线性规划问题的可行解  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  为基可行解的充要条件是  $\mathbf{X}$  的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

- (必要性) 由基可行解的定义可知。
- (充分性) 若向量  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$  线性独立, 则必有  $k \leq m$ 。

(1) 当  $k = m$  时,  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$  恰构成一个基, 从而

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为相应的基可行解。

(2) 当  $k < m$  时, 则一定可以从其余的列向量中取出  $m - k$  个与  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$  构成最大的线性独立向量组, 其对应的解恰为  $\mathbf{X}$ , 所以根据定义它是基可行解。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

- **定理 2:** 线性规划问题的基可行解  $X$  对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

- **定理 2:** 线性规划问题的基可行解  $X$  对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。
- **定理 3:** 若线性规划问题有最优解, 那么一定存在一个基可行解是最优解。

## 1.3 单纯形法原理

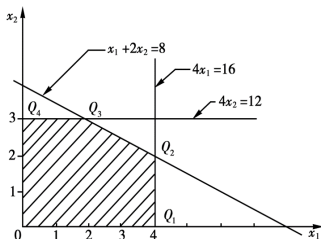
### ■ 几个基本定理

- **定理 2:** 线性规划问题的基可行解  $X$  对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。
- **定理 3:** 若线性规划问题有最优解, 那么一定存在一个基可行解是最优解。
- **定理 4:** 可行域有界, 目标函数最优值必可在顶点得到。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 几个基本定理

- **定理 2:** 线性规划问题的基可行解  $X$  对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点。
- **定理 3:** 若线性规划问题有最优解, 那么一定存在一个基可行解是最优解。
- **定理 4:** 可行域有界, 目标函数最优值必可在顶点得到。



- 虽然顶点数目是有限的, 若采用“枚举法”找所有基可行解, 然后一一比较, 最终可能找到最优解。但当  $n, m$  的数较大时, 这种办法是行不通的。

## 1.3 单纯形法原理

### ■ 单纯形法

- 先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止。

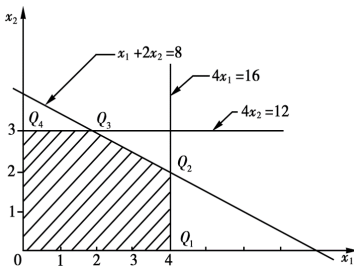
## 1.3 单纯形法原理

### ■ 单纯形法

□ 先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止。

#### □ 迭代步骤

- 第一步：求初始基可行解，列出初始单纯形表
- 第二步：最优性检验
- 第三步：从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表
- 第四步：重复二、三步，一直到计算结束为止



## 1.3 单纯形法原理

### ■ 小结

- 可行解, 最优解
- 基, 基解, 基可行解, 可行基
- 凸集, 顶点
- 解的性质
  - 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集
  - 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点
  - 若线性规划问题有最优解, 必在某顶点上得到

### ■ 课后作业: P44, 习题 1.3

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈