第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析

2.1 线性规划的对偶理论

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

对偶问题的提出

- 两种家电各生产多少，可获最大利润？

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 设两种家电产量分别为变量 x_1, x_2，数学模型为

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} & & 5x_2 & \leq & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

对偶问题的提出

- 公司不再安排生产，而是将设备 A、设备 B 和调试工序这三种能力资源出租用于对外加工，此时公司应考虑如何确定各种资源的租价，才能获得最大利润

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 问题分析
  - 把资源租出去所获得的租金不应低于自行生产时的可获利润
  - 定价不能太高，要使租赁方能够接受

2.1 线性规划的对偶理论

对偶问题的提出

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- **决策变量**: 设 y_1, y_2, y_3 分别为出租 A, B 设备和调试工序三种资源单位时间的租金
- **决策变量**: 出租资源所得到的租金应不低于自己生产产品时的获利，否则不如自己生产为好，因此有

$$\begin{cases} \qquad\quad 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5x_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

- **决策变量**: 公司总收入为 $w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$，这也是租赁方需要付出的成本

对偶问题的提出

- **从公司的角度考虑**: 由市场经济价值规律，租价并非越高越好，因为租价太高就不会有人来租，因此应在保证出租资源所得收益不少于自己生产获利的前提下，为了使公司的竞争能力最强，应该最小化总收益

- **从租赁方的角度考虑**: 希望价格越低越好，否则另找他人。于是，能够使双方共同接受的是

$$\min \ w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} & & 6y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\ 5Y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\ Y_1 & & y_2 & & y_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

对偶问题的提出

原问题

$$\max\ \ z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\ \left\{\begin{array}{ccccc} & & 5x_2 & \leq & 15 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

对偶问题

$$\min\ \ w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$

$$\text{s.t.}\ \left\{\begin{array}{ccccccc} & & 6y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\ 5x_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

对称形式

原问题

$$
\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases}
\begin{array}{rcrcccrcl}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
x_1 & & x_2 & & \ldots & & x_n & \geq & 0
\end{array}
\end{cases}
$$

- 变量均具有非负约束
- 目标函数求极大时，约束条件均取 $\leq$ 号

对称形式

- 对偶问题

$$
\min \ \ z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_nn
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \ldots & + & a_{m1}y_n & \leq & c_1 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \ldots & + & a_{m2}y_n & \leq & c_2 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\ a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \ldots & + & a_{mn}y_m & \leq & c_m \\ y_1 & & y_2 & & \ldots & & y_m & \geq & 0 \end{cases}
$$

- 变量均具有非负约束
- 目标函数求极小时，约束条件均取 $\leq$ 号

对称形式

矩阵形式

$$
\text{(P)} \quad \max \; z = CX \qquad \text{s.t.} \begin{cases} AX & \leq & b \\ X & \geq & 0 \end{cases}
$$

$$
\text{(D)} \quad \min \; w = T^{\top}b \qquad \text{s.t.} \begin{cases} A^{\top}Y & \geq & C^{\top} \\ Y & \geq & 0 \end{cases}
$$

分析

项目	原问题	对偶问题
A	约束系数矩阵	约束系数矩阵的转置
b	约束条件的右端项向量	目标函数中的价格系数向量
C	目标函数中的价格系数向量	约束条件的右端项向量
目标函数	$\max \; z = CX$	$\min \; w = Y^{\top}b$
约束条件	$AX \leq b$	$A^{\top}Y \geq C^{\top}$
决策变量	$X \geq 0$	$Y \geq 0$

对称形式

- 例 1: 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 7 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

对称形式

- 例 1: 写出下面问题的对偶问题

$$
\max\ z = 5x_1 + 6x_2
$$
$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1\quad x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

- 对偶问题

$$
\min\ w = 7y_1 + 9y_2
$$
$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 + y_2 \ge 6 \\ y_1\quad y_2 \ge 0 \end{cases}
$$

非对称形式

- 整体思路

$$\text{非对称形式} \Longrightarrow \text{对称形式} \Longrightarrow \text{对偶问题}$$

- 情况一: 等式变不等式

$$\begin{aligned} \max \ & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \text{s.t. } & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \ i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, \ i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i, \ i = 1, \ldots, m$$

非对称形式

情况二: 不等式变不等式

- 目标函数求极小时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i,\ \ i = 1, \ldots, m$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \geq -b_i,\ \ i = 1, \ldots, m$$

- 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i,\ \ i = 1, \ldots, m$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i,\ \ i = 1, \ldots, m$$

情况三: 变量转换

- 若存在取值无约束的变量 x_k，可令

$$x_k = x_k' - x_k'',\ \ x_k', x_k'' \geq 0$$

- 若 $x_k \leq 0$，可令

$$x_k' = -x_k,\ \ x_k' \geq 0$$

例 1

- 写出下面问题的对偶问题

$$
\max \ z = 5x_1 + 6x_2
$$

$$
\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 7 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right.
$$

例 1

- 写出下面问题的对偶问题

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcrcc} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 7 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

- 对偶问题

$$\min\ w = 7y_1 + 9y_2$$
$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{rcrcc} 3y_1 & + & 4y_2 & \geq & 5 \\ -2y_1 & + & y_2 & \geq & 6 \end{array} \right.$$
$$y_1 \text{自由},\ x_2 \geq 0$$

例 2

- 写出下面问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
\text{s.t.}\ & \left\{\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & \geq & b_3
\end{array}\right. \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3\text{无约束}
\end{aligned}
$$

例 2

- 写出下面问题的对偶问题

$$
\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & \ge & b_3 \end{cases}
$$

$$
x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3\text{无约束}
$$

- 对偶问题

$$
\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & a_{31}y_3 & \ge & c_1 \\ a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & a_{32}y_3 & \le & c_2 \\ a_{13}y_1 & + & a_{23}y_2 & + & a_{33}y_3 & = & c_3 \end{cases}
$$

$$
y_1 \ge 0,\ y_2\text{无约束},\ x_3 \le 0
$$

对偶问题与原问题的

关系归纳

原问题	对偶问题
目标函数 $\max\ z$	目标函数 $\min\ w$
决策变量 n 个 决策变量 ≥ 0 决策变量 ≤ 0 决策变量无约束	约束条件 n 个 约束条件 ≤ 0 约束条件 ≥ 0 约束条件 $=$
约束条件 m 个 约束条件 ≥ 0 约束条件 ≤ 0 约束条件 $=$ 约束条件右端项向量 目标函数变量系数	决策变量 m 个 决策变量 ≤ 0 决策变量 ≥ 0 决策变量无约束 目标函数变量的系数 约束条件右端项向量

- 例 3
  - **写出下面问题的对偶问题**

$$
\begin{aligned}
&\min \ z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
&\text{s.t.} \left\{\begin{array}{rcrcrcc}
-x_1 & + & 2x_2 & & & \le & 6 \\
2x_1 & & & + & 3x_3 & \ge & 9 \\
x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 4
\end{array}\right. \\
&\quad x_1\text{无约束}, \ x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

例 3

- 写出下面问题的对偶问题

$$
\min\ z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3
$$
$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}
$$
$$
x_1\text{无约束},\ x_2, x_3 \ge 0
$$

- 对偶问题

$$
\max\ w = 6y_1 + 9y_2 + 4y_3
$$
$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \\ 2y_1 + 5y_3 \le 2 \\ 3y_2 - 2y_3 \le -3 \end{cases}
$$
$$
y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3\text{无约束}
$$

- 例 4
  - 写出下面问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
&\min \ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\
&\text{s.t.} \left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & \geq & 5 \\
2x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 4 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6
\end{array}
\right. \\
&\quad x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4\text{无约束}
\end{aligned}
$$

例 4

- 写出下面问题的对偶问题

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4\text{无约束}$$

- 对偶问题

$$\max\ w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3\text{无约束}$$

- 小结
  - 对偶问题的提出
  - 对偶问题与原问题的关系
    - 对称形式
    - 非对称形式
  - 非对称形式的原-对偶问题关系
- 课后作业: P75, 习题 2.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈