

第一章 线性规划及单纯形法

1.2 图解法

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

1.2 图解法

■ 线性规划问题的数学模型

□ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 图解法

■ 线性规划问题的数学模型

□ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

□ 满足约束条件的 x_j ($j = 1, \dots, n$) 称为可行解

1.2 图解法

■ 线性规划问题的数学模型

□ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

□ 满足约束条件的 $x_j \ (j = 1, \dots, n)$ 称为**可行解**

□ 全部可行解的集合称为**可行域**

1.2 图解法

■ 线性规划问题的数学模型

□ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

- 满足约束条件的 x_j ($j = 1, \dots, n$) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 使目标函数达到最优的可行解称为**最优解**

1.2 图解法

■ 适用范围

□ 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 图解法

■ 适用范围

□ 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 & = & b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

1.2 图解法

■ 适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

- **第一步:** 建立平面直角坐标系

1.2 图解法

■ 适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

- **第一步:** 建立平面直角坐标系
- **第二步:** 图示约束条件, 找出可行域

1.2 图解法

■ 适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

- **第一步:** 建立平面直角坐标系
- **第二步:** 图示约束条件, 找出可行域
- **第三步:** 图示目标函数

1.2 图解法

■ 适用范围

- 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

- **第一步:** 建立平面直角坐标系
- **第二步:** 图示约束条件, 找出可行域
- **第三步:** 图示目标函数
- **第四步:** 确定最优解

1.2 图解法

■ 例 1

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 图解法

■ 例 1

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{array}{ll}\max & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

- 决策变量: x_1, x_2

1.2 图解法

■ 例 1

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量: x_1, x_2
- 目标函数: $\max z = 2x_1 + 3x_2$

1.2 图解法

■ 例 1

□ 用图解法求解线性规划问题

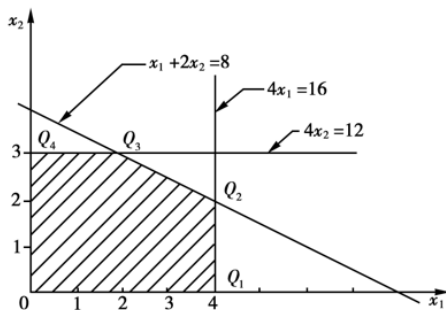
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量: x_1, x_2
- 目标函数: $\max z = 2x_1 + 3x_2$
- 约束条件: $x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 16, 4x_2 \leq 12, x_1, x_2 \geq 0$

1.2 图解法

■ 具体步骤

- **第一步:** 建立平面直角坐标系
- **第二步:** 图示约束条件, 找出可行域



1.2 图解法

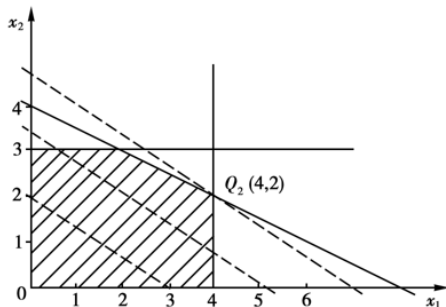
■ 具体步骤

- **第一步:** 建立平面直角坐标系
- **第二步:** 图示约束条件, 找出可行域
- **第三步:** 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

1.2 图解法

■ 具体步骤

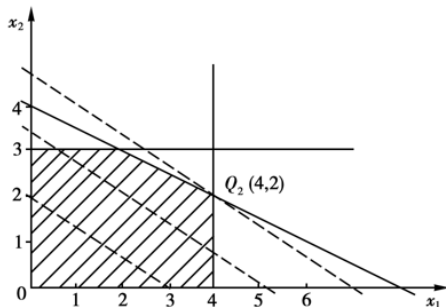
- **第一步:** 建立平面直角坐标系
- **第二步:** 图示约束条件, 找出可行域
- **第三步:** 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$



1.2 图解法

■ 具体步骤

- **第一步:** 建立平面直角坐标系
- **第二步:** 图示约束条件, 找出可行域
- **第三步:** 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$



- **第四步:** 确定最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$, 最优值为 $z = 14$

1.2 图解法

- 无穷多最优解 (多重最优解)

1.2 图解法

■ 无穷多最优解 (多重最优解)

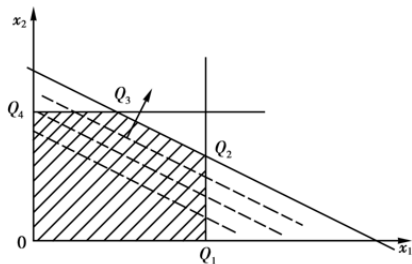
- 目标函数的直线族与约束条件平行

1.2 图解法

■ 无穷多最优解 (多重最优解)

□ 目标函数的直线族与约束条件平行

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



1.2 图解法

■ 无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

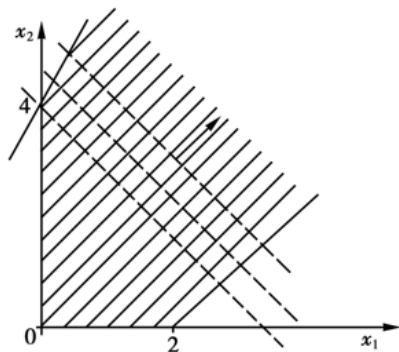
1.2 图解法

■ 无界解

□ 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



1.2 图解法

■ 无可行解

- 当存在矛盾的约束条件时，为无可行域。

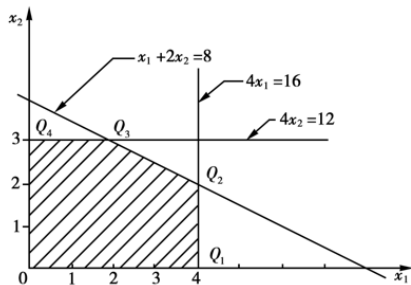
1.2 图解法

■ 无可行解

□ 当存在矛盾的约束条件时，为无可行域。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



1.2 图解法

■ 课堂练习 1

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

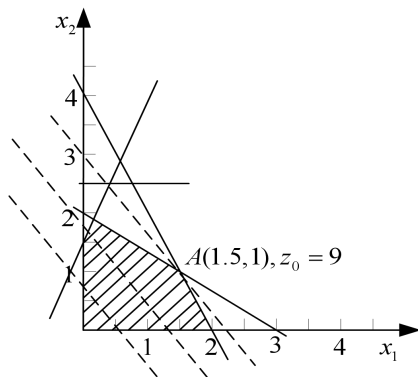
1.2 图解法

■ 课堂练习 1

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



1.2 图解法

■ 课堂练习 2

□ 用图解法求解线性规划问题

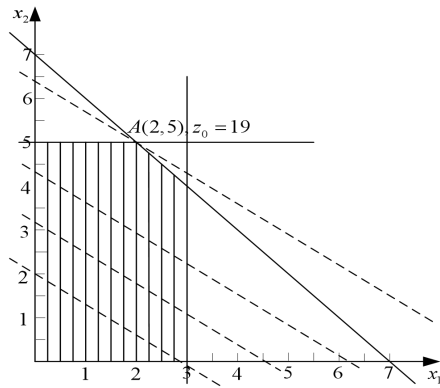
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 图解法

■ 课堂练习 2

□ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 4x_1 \leq 12 \\ 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



1.2 图解法

■ 小结

□ 解的存在性

- 有最优解: 唯一解, 无穷多解
- 无最优解: 无界解, 无可行解

□ 可行域为凸集

□ 若有最优解, 定可在可行域的顶点得到

□ 可以找到所有的顶点, 比较其对应的目标函数值的大小

1.2 图解法

■ 小结

□ 解的存在性

- 有最优解: 唯一解, 无穷多解
- 无最优解: 无界解, 无可行解

□ 可行域为凸集

□ 若有最优解, 定可在可行域的顶点得到

□ 可以找到所有的顶点, 比较其对应的目标函数值的大小

■ 课后作业: P43, 习题 1.1

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈