凸集

文再文

北京大学北京国际数学研究中心

教材《最优化：建模、算法与理论》配套电子教案

http://bicmr.pku.edu.cn/~wenzw/optbook.html

致谢：本教案由丁思哲协助准备

提纲

向量范数的定义

定义

令记号$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$是一种非负函数，如果它满足:

- 正定性: 对于$\forall v \in \mathbb{R}^n$, 有$\|v\| \geqslant 0$, 且$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_{n\times 1}$;
- 齐次性: 对于$\forall v \in \mathbb{R}^n$和$\alpha \in \mathbb{R}$, 有$\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$;
- 三角不等式: 对于$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, 均成立$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

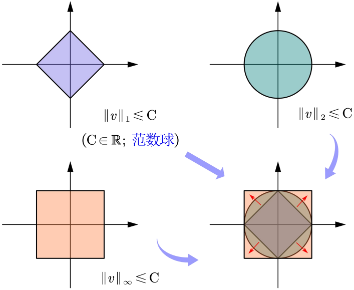
则称$\|\cdot\|$是定义在向量空间$\mathbb{R}^n$上的向量范数.

最常用的向量范数即我们熟知的ℓ_p范数(其中$p \geqslant 1$):

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \quad \|v\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |v_j|.$$

柯西不等式: 设$a, b \in \mathbb{R}^n$, 则$|a^{\mathrm{T}} b| \leqslant \|a\|_2 \, \|b\|_2$, 且等号成立的条件是$a$与$b$线性相关.

向量范数的定义



容易看出, $p=\infty$时, 有关"最大值"的定义要求向量的分量是有限的. 在一般化的空间中, 这一要求很可能不成立, 此时我们只需将"最大值"更换成"上确界"即可.

向量范数度量的是v与零点之间的距离. 在实际应用时, 我们通常使用$p=1,2,\infty$的情形, 即分别使用$\|v\|_1, \|v\|_2, \|v\|_\infty$度量$v$在不同意义下的距离, 这是因为它们具有鲜明的度量特征.

左图是它们各自的范数球实例, 请想一想不同范数所度量的距离分别具有怎样的特征? 这些特征分别适用于度量什么情形?

矩阵范数

矩阵范数可以由向量范数的定义推广得到。常见的矩阵范数有：

- $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |A_{ij}|$
- $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2} = \sqrt{\mathbf{Tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)}$
- 算子范数是一类特殊的矩阵范数, 它由向量范数诱导得到:

$$\|A\|_{(m,n)} = \max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{(n)}=1} \|Ax\|_{(m)} .$$

  - $p = 1$时, $\|A\|_{p=1} = \max\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.
  - $p = 2$时, $\|A\|_{p=2} = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$, 又称为$A$的谱范数.
  - $p = \infty$时, $\|A\|_{p=\infty} = \max\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

- **核范数定义为**

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i,$$

其中$\sigma_i(i=1,\cdots,r)$为A的所有非零奇异值, $r = \mathbf{rank}\,(A)$.

- **矩阵A,B的内积定义为**

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(AB^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

- **柯西不等式**: 设$A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则

$$|\langle A, B\rangle| \leqslant \|A\|_F \|B\|_F,$$

等号成立当且仅当A和B线性相关.

提纲

在$\mathbb{R}^n$空间中，经过不同的两点x_1, x_2可以确定一条直线，其方程为

$$y = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}.$$

特别，当$0 \leqslant \theta \leqslant 1$时，直线退化为以$x_1, x_2$为端点的线段.

定义

仿射集 如果过集合$\mathcal{C}$中的任意两点的直线都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为**仿射集**，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

例 线性方程组$Ax = b$的解集$\mathcal{X}$是仿射集，因为$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}(x_1 \neq x_2)$均满足$\theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 = b$.
反之，任何仿射集均可表示为某一线性方程组的解集.

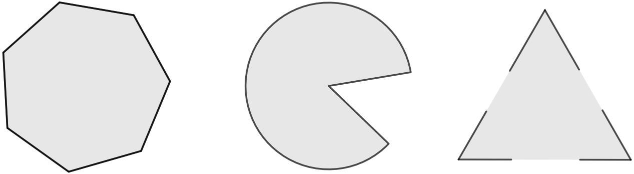
凸集的几何定义

定义

凸集 如果连接集合$\mathcal{C}$中的任意两点的线段都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为**凸集**，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

仿射集当然都是凸集.



(a) (b) (c)

例 在左图中我们列出了一些凸集、非凸集的例子. 其中(a)为凸集, (b)和(c)均为非凸集.

凸集的性质

定理

- 若$\mathcal{S}$是凸集，则$k\mathcal{S}=\{ks|k\in\mathbb{R},s\in\mathcal{S}\}$是凸集.
- 若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S}+\mathcal{T}=\{s+t|s\in\mathcal{S},t\in\mathcal{T}\}$是凸集.
- 若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$是凸集.
- 凸集的内部和闭包都是凸集.

上述定理前2点在凸集定义前提下是显然的. 我们简述第3点为何成立.

证明: 设$x,y\in\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$且$\theta\in[0,1]$. 由于$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均为凸集，则

$$\theta x+(1-\theta)y\in\mathcal{S}\cap\mathcal{T},$$

这证明$\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$是凸集.

实际上，任意多凸集的交都是凸集. 该结论在证明复杂集合是凸集时非常有用，因为我们可以考虑将其视为任意个凸集的交.

凸组合和凸包

从凸集中可以引出凸组合和凸包的概念.

定义

凸组合　形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k.$$

的点称为$x_1, \cdots, x_k$的凸组合.

定义

凸包　集合$\mathcal{S}$的所有点的凸组合构成的点集为$\mathcal{S}$的凸包, 记为$\mathbf{conv}\mathcal{S}$.

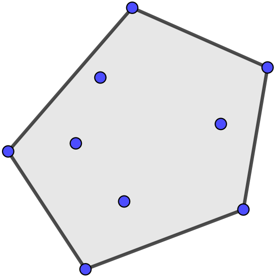
定理

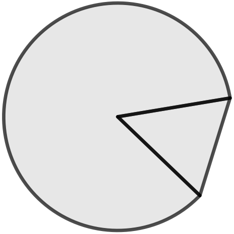
凸集和凸包的关系　若$\mathbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$, 则$\mathcal{S}$是凸集; 反之亦然.

上述定理并不显然, 请尝试证明.　(提示: 用数学归纳法)

凸包的例子

例　在下图中我们列出了一些离散点集和连续点集的凸包. 其中, 左子图为离散点集的凸包, 右子图为扇形连续点集的凸包.





conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集

定理

conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集.

证明　由凸包的定义可知, $\mathcal{S} \in \mathbf{conv}\mathcal{S}$, 并且conv$\mathcal{S}$是凸集.
若再设$\mathcal{X}$是另一凸集且满足$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathbf{conv}\mathcal{S}$, 下面我们需要证明只可能是$\mathcal{X} = \mathbf{conv}\mathcal{S}$. 为证明此结论, 我们先证明一个重要的命题, 从而直接导出本定理的成立.

定理

对于任意向量集$\mathcal{S}$, conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的一切凸集的交集.

证明　令$\mathcal{X}$表示包含$\mathcal{S}$的所有凸集的交集. 我们之前证明, 凸集的交是凸集, 因此$\mathcal{X}$是凸集. 因为conv$\mathcal{S}$是一个凸集且包含$\mathcal{S}$, 则$\mathcal{X} \subseteq \mathbf{conv}\mathcal{S}$.
另一方面, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, 因此$\mathbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathbf{conv}\mathcal{X}$.
再由凸集和凸包的关系得到$\mathbf{conv}\mathcal{X} = \mathcal{X}$, 得到$\mathbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$.
综上有$\mathcal{X} = \mathbf{conv}\mathcal{S}$.

仿射包

仿射集和凸集的定义很像, 除了θ的范围有所不同. 受此启发, 从凸组合和凸包的定义中可以自然引出仿射组合和仿射包的概念.

定义

仿射组合　形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, k.$$

的点称为$x_1, \cdots, x_k$的仿射组合.

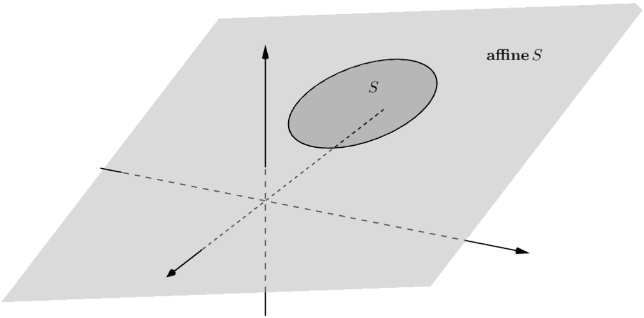
定义

仿射包　集合$\mathcal{S}$的所有点的仿射组合构成的点集为$\mathcal{S}$的仿射包, 记为$\mathbf{affine}\mathcal{S}$.

$\mathbf{affine}\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小仿射集.

$\mathbb{R}^3$中仿射包的例子

例　下图为$\mathbb{R}^3$中圆盘S的仿射包示意图，可见仿射包直接将原集合拓展为了其所在的全平面.



相比于凸组合和仿射组合，锥组合不要求系数的和为1，因此一般而言锥组合都是开放的.

定义

锥组合 形如

$$x=\theta_1x_1+\cdots+\theta_kx_k,\theta_i>0(i=1,\cdots,k).$$

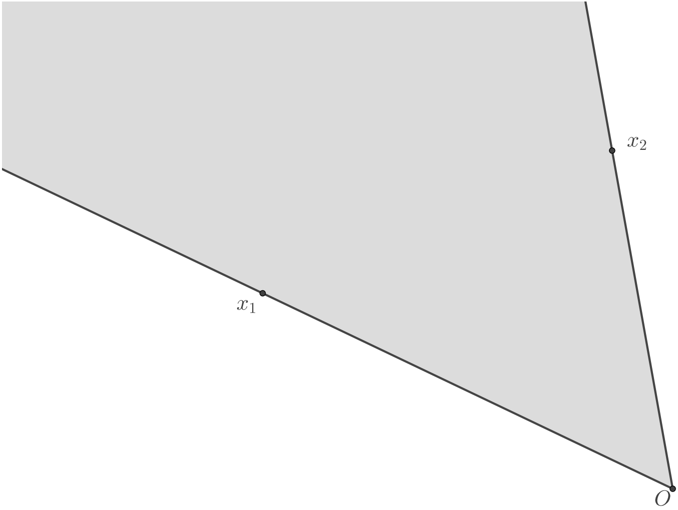
的点称为$x_1,\cdots,x_k$的锥组合.

定义

凸锥 若集合$\mathcal{S}$中任意点的锥组合都在$\mathcal{S}$中，则称$\mathcal{S}$为凸锥.

凸锥的例

例　下图显示了$\mathbb{R}^2$中两点x_1, x_2的凸锥. 可见$\mathbb{R}^2$中若两点不与原点O共线, 则其形成的凸锥为一个半径无穷的圆的扇形部分.



提纲

超平面和半空间

定义

超平面 任取非零向量$a \in \mathbb{R}^n$, 形如

$$\{x | a^{\mathrm{T}} x = b\}$$

的集合称为超平面.

定义

半空间 任取非零向量$a \in \mathbb{R}^n$, 形如

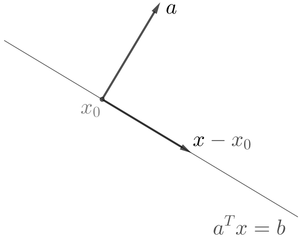
$$\{x | a^{\mathrm{T}} x \leqslant b\}$$

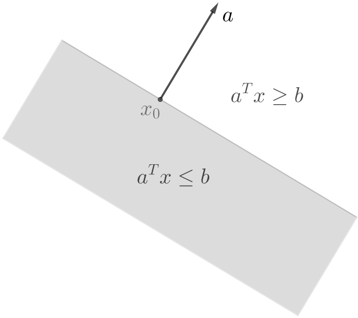
的集合称为半空间.

超平面是仿射集和凸集, 半空间是凸集但不是仿射集.

超平面和半空间的例

例　下图是$\mathbb{R}^2$中超平面和半空间的例子. 其中, 左子图为超平面, 其为一条直线; 右子图为半空间.





我们把满足线性等式和不等式组的点的集合称为多面体, 即

$$\{x|Ax \leqslant b, Cx = d\},$$

其中$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x \leqslant y$表示向量x的每个分量都小于等于y的对应分量.

多面体是有限个半空间和超平面的交, 因此由凸集的性质可知, 其为凸集.

范数球、椭球

如下定义的球和椭球也是常见的凸集.

定义

球 设空间中到某一定点x_c(称为中心)的距离小于等于定值r(称为半径)的点的集合为(范数)球, 即

$$\mathrm{B}(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\| \leqslant r\} = \{x_c + ru \mid \|u\| \leqslant 1\}.$$

一般而言, 我们使用$\|\cdot\|_2$度量距离, 即使用2-范数球.

定义

椭球 设形如

$$\left\{x \mid (x - x_c)^{\mathrm{T}} P^{-1} (x - x_c) \leqslant 1\right\} = \{x_c + Au \mid \|u\|_2 \leqslant 1\}$$

的集合为椭球, 其中x_c为椭球中心, P对称正定, 且A非奇异.

范数锥

球和椭球的范围取决于x的范围，而锥的范围则同时取决于x和控制径t的范围.

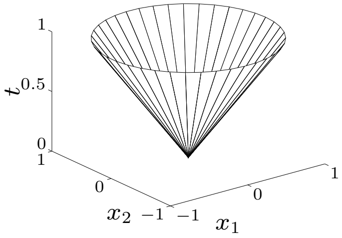
定义

范数锥 形如

$$\{(x,t) \mid \|x\| \leqslant t\}$$

的集合为范数锥.

锥是凸集. 同时，使用$\|\cdot\|_2$度量距离的锥为二次锥，也称冰淇淋锥。



特殊矩阵集合和(半)正定锥

我们介绍3类矩阵的集合.

定义

对称矩阵集合 记$\mathcal{S}^n$为$n\times n$对称矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}^n=\left\{X\in\mathbb{R}^{n\times n}|X^{\mathrm{T}}=X\right\}.$$

定义

半正定矩阵集合 记$\mathcal{S}^n_+$为$n\times n$半正定矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}^n_+=\{X\in\mathcal{S}^n|X\succeq 0\}.$$

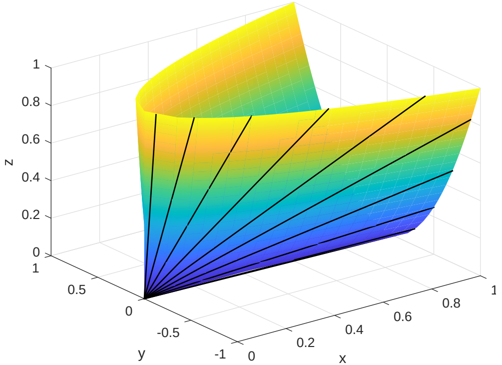
定义

正定矩阵集合 记$\mathcal{S}^n_{++}$为$n\times n$正定矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}^n_{++}=\{X\in\mathcal{S}^n|X\succ 0\}.$$

半正定锥的例子

我们一般称$\mathcal{S}^n_+$为半正定锥. 下图是二维半正定锥的几何形状.



由图可知, 二维半正定锥的实际范围是

$$\left\{(x, y, z) \,|x \geqslant 0, z \geqslant 0, xz \geqslant y^2\right\}.$$

这实际上可以由半正定矩阵的性质直接得到:

对于矩阵$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, 其特征值应全部大于等于0, 由此可推出

$$x \geqslant 0, z \geqslant 0, xz \geqslant y^2.$$

提纲

仿射变换的保凸性

仿射变换(缩放、平移、投影等)也是保凸的.

定理

仿射变换的保凸性 设$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是仿射变换, 即$f(x) = Ax + b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$, 则

- 凸集在f下的像是凸集:

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \text{是凸集} \Rightarrow f(\mathcal{S}) = \{f(x) | x \in \mathcal{S}\} \text{ 是凸集.}$$

- 凸集在f下的原像是凸集:

$$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^m \text{是凸集} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) = \{x | f(x) \in \mathcal{C}\} \text{ 是凸集.}$$

例 线性矩阵不等式的解集

$$\{x|x_1A_1+\cdots+x_mA_m\preceq B\}\,(A_i,i=1,\cdots,m,B\in\mathcal{S}^p)$$

是凸集. 这由仿射变换可以直接得到.

例 双曲锥

$$\left\{x|x^{\mathrm{T}}Px\leqslant\left(c^{\mathrm{T}}x\right)^2,c^{\mathrm{T}}x\geqslant 0,P\in\mathcal{S}_+^n\right\}$$

是凸集.

证明: 双曲锥可以转化为二阶锥

$$\{x|\,\|Ax\|_2\leqslant c^{\mathrm{T}}x,c^{\mathrm{T}}x\geqslant 0,A^{\mathrm{T}}A=P\},$$

而二阶锥可由二次锥$\{(x,t)\,|\,\|x\|_2\leqslant t,t\geqslant 0\}$经过仿射变换得到, 因此二阶锥、二次锥均为凸集.

透视变换和分式线性变换的保凸性

- 透视变换 $P:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$:

$$P(x,t)=x/t,\quad \mathrm{dom}P=\{(x,t)\mid t>0\}.$$

透视变换下凸集的像和原像是凸集。

- 分式线性变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$:

$$f(x)=\frac{Ax+b}{c^{\mathrm{T}}x+d},\quad \mathbf{dom}f=\{x\mid c^{\mathrm{T}}x+d>0\}$$

分式线性变换下凸集的像和原像是凸集。

提纲

分离超平面定理

超平面是空间中一类特殊的凸集(仿射集), 可以证明$\mathbb{R}^n$空间中的超平面恰好是$n-1$维的. 我们可以用超平面分离不相交的凸集.

定理

分离超平面定理 如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集, 则存在非零向量a和常数b, 使得

$$a^{\mathrm{T}}x \leqslant b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

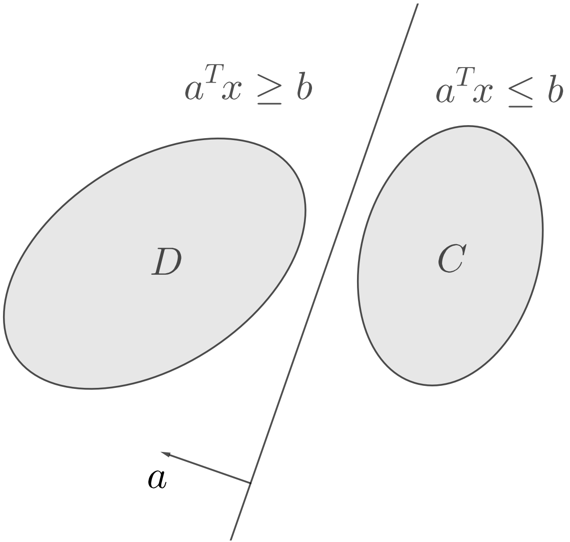
$$a^{\mathrm{T}}x \geqslant b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$.

超平面分离定理表明, 如果要软划分$\mathbb{R}^n$中的2个凸集, 则只需要求得一个适当的超平面即可. 这在分类问题中属于很容易解决的问题. 实际上, 如果有任何一个集合不是凸集, 则定理一般不成立, 此时我们若要划分不同的集合, 则一般需要使用更加复杂的平面.

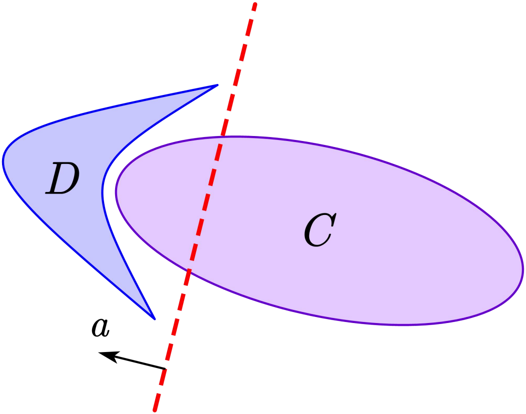
分离超平面的示意

例 下图是$\mathbb{R}^2$中的2个凸集，我们使用超平面即可轻松划分.



分离超平面的示意

例　下图是$\mathbb{R}^2$中的两个集合，其中一个不为凸集．我们无法使用超平面对其划分，而必须使用更加复杂的平面．这就给划分问题带来了巨大的挑战．



分离超平面定理证明

这里仅考虑一个特殊情形。假设存在$c \in C$和$d \in D$ 使得:

$$\|c-d\|_2 = \mathbf{dist}(C,D) = \inf\{\|u-v\|_2 \mid u \in C, v \in D\} > 0.$$

定义$a = d - c$, $b = (\|d\|_2^2 - \|c\|_2^2)/2$和

$$f(x) = a^{\mathrm{T}}x - b = (d-c)^{\mathrm{T}}(x - (d+c)/2).$$

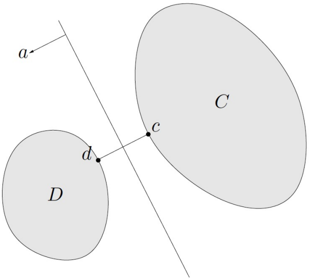
以下证: $f(x) \le 0, \forall x \in C$且$f(x) \ge 0, \forall x \in D$，即给出了分离超平面。

- 先证$f(x) \ge 0, \forall x \in D$。其它情形类似。
- 假设存在$u \in D$，使得

$$f(u) = (d-c)^{\mathrm{T}}(u - (d+c)/2) < 0.$$

可以将$f(u)$写成:

$$f(u) = (d-c)^{\mathrm{T}}(u-d) + \|d-c\|_2^2/2.$$



分离超平面定理证明

- 因此有：
$$(d-c)^{\mathrm{T}}(u-d)<0.$$
- 对于$t\in[0,1]$，构造d与u的凸组合$z(t)=d+t(u-d)$，因此$z(t)$也在集合D里. 由于
$$\frac{d}{dt}\|z(t)-c\|_2^2|_{t=0}=2(d-c)^{\mathrm{T}}(u-d)<0,$$
因此存在充分小的$t_1\in(0,1]$，使得
$$\|z(t_1)-c\|_2<\|d-c\|_2.$$
这意味着点$z(t_1)$到c的距离比d近，矛盾。

严格分离定理

我们在超平面分离时提到了软划分的概念，其表明若集合仅是凸集，则定理中等号可能成立，即某一凸集与超平面相交(请尝试举一个简单例子). 很多时候进一步要求超平面与任何凸集都不交，为此我们需要加强定理的条件.

定理

严格分离定理　如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，且$\mathcal{C}$是闭集，$\mathcal{D}$是紧集，则存在非零向量a和常数b，使得

$$a^{\mathrm{T}}x < b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

$$a^{\mathrm{T}}x > b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$严格分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$.

此定理的退化形式即$\mathcal{D}$退化为单点集$\{x_0\}$. 此时课本中的定理成立.

支撑超平面

上述严格分离定理的退化形式要求$x_0 \notin C$. 当点x_0恰好落在C的边界上时(此时不满足"不相交"的条件), 我们可以构造超平面.

定义

支撑超平面　给定集合C以及边界上的点x_0, 如果$a \neq 0$满足$a^\mathrm{T} x \leqslant a^\mathrm{T} x_0, \forall x \in C$, 那么称集合

$$\{x | a^\mathrm{T} x = a^\mathrm{T} x_0\}$$

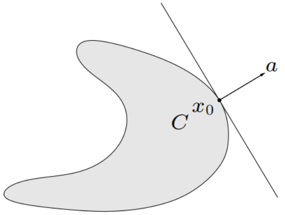
为C在边界点x_0处的支撑超平面.

根据定义, 点x_0和集合C也被该超平面分开.
从集合上而言, 超平面$\{x | a^\mathrm{T} x = a^\mathrm{T} x_0\}$与集合$C$在点$x_0$处相切, 并且半空间$\{x | a^\mathrm{T} x \leqslant a^\mathrm{T} x_0\}$包含$C$.

注意根据凸集成立的分离超平面定理, 凸集上任何的边界点都满足支撑超平面存在的条件, 则对于凸集成立如下的定理.

定理

支撑超平面定理 若C是凸集, 则C的任意边界点处都存在支撑超平面.



支撑超平面定理有非常强的几何直观: 给定一个平面后, 可把凸集边界上的任意一点当成支撑点, 将凸集放在该平面上.

这也是凸集的特殊性质, 一般的集合甚至无法保证存在平面上的支撑点.

提纲

适当锥

我们知道锥是凸集. 一个凸锥$K \subseteq \mathbb{R}^n$是适当锥, 当其还满足

- K是闭集;
- K是实心的, 即$\mathbf{int}K \neq \emptyset$;
- K是尖的, 即内部不含有直线: 若$x \in K, -x \in K$, 则一定有$x = 0$.

例　非负卦限$K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n\}$ 是适当锥.

例　半正定锥$K = \mathcal{S}^n_+$是适当锥.

例　$[0, 1]$上的有限非负多项式

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \geqslant 0, \forall t \in [0, 1]\right\}$$

是适当锥.

广义不等式

广义不等式是一种偏序(不必要保证所有对象都具有可比较性)关系，可以使用适当锥诱导.

定义

广义不等式　对于适当锥K, 定义偏序广义不等式为

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K,$$

严格偏序广义不等式为

$$x \prec_K y \iff y - x \in \mathbf{int} K.$$

例　坐标分量不等式($K = \mathbb{R}^n_+$)

$$x \preceq_{\mathbb{R}^n_+} y \iff y_i \geqslant x_i.$$

例　矩阵不等式($K = \mathcal{S}^n_+$)

$$X \preceq_{\mathcal{S}^n_+} Y \iff Y - X\text{半正定}.$$

$\preceq_K$的诸多性质在$\mathbb{R}$中与$\leqslant$类似.

定理

广义不等式的性质 记$\preceq_K$是定义于适当锥K上的广义不等式, 则

- 自反性: $x \preceq_K x$;
- 反对称性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K x$, 则$x = y$;
- 传递性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K z$, 则$x \preceq_K z$;
- 可加性: 若$x \preceq_K y$且$u \preceq_K v$, 则$x + u \preceq_K y + v$;
- 非负缩放: 若$x \preceq_K y$且$\alpha \geqslant 0$, 则$\alpha x \preceq_K \alpha y$.

利用偏序关系和广义不等式的定义可以轻松证明上述性质.

设K是一个锥.

定义

对偶锥 令锥K为全空间Ω的子集，则K的对偶锥为

$$K^* = \{y \in \Omega | \langle x, y\rangle \geqslant 0, \forall x \in K\}.$$

对偶锥是相对于锥K定义的，因此我们知道锥的同时也可以求出对偶锥.
我们将对偶锥为自身的锥称为自对偶锥

例 $K = \mathbb{R}^n_+$的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

例(请自证) $K = \mathcal{S}^n_+$的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

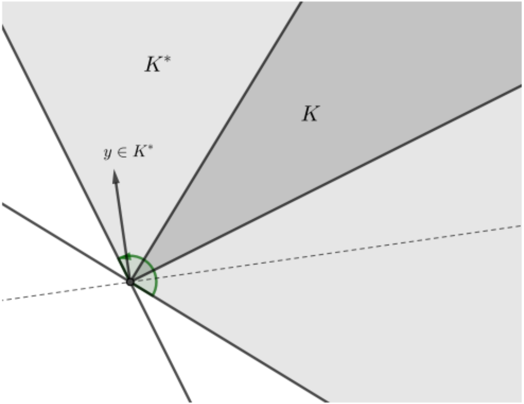
例(请自证) 锥$K = \left\{(x, t) \mid \|x\|_p \leqslant t, t > 0, p \geqslant 1\right\}$的对偶锥是

$$K^* = \left\{(x, t) \mid \|x\|_q \leqslant t, t > 0, q \geqslant 1, (p, q)\text{共轭}\right\}.$$

例 上例中二次锥的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

对偶锥

例　我们在下图中给出了一个$\mathbb{R}^2$平面上的一个例子. 图中深色区域表示锥K, 根据对偶锥的定义, K^*中的向量和K中所有向量夹角均为锐角或直角. 因此, 对偶锥K^*为图中的浅色区域.
注意, 在这个例子中, K也为K^*的一部分.



下面我们简单列举对偶锥满足的性质, 这是很重要的.

定理

对偶锥的性质 设K是一锥, K^*是其对偶锥, 则满足

- K^*是锥(哪怕K不是锥也成立);
- K^*始终是闭集, 且是凸集;
- 若$\mathbf{int}K \neq \oslash$, 则$K^*$是尖的, 即内部不含有直线;
- 若K是尖的, 则$\mathring{K}^* \neq \oslash$;
- 若K是适当锥, 则K^*是适当锥;
- (二次对偶)K^{**}是K的凸包. 特别, 若K是凸且闭的, 则$K^{**} = K$.

对偶锥诱导的广义不等式

既然适当锥的对偶锥仍是适当锥，则可以用适当锥K的对偶锥K^*也可以诱导广义不等式。我们在下文简称其为"对偶广义不等式"。

定义

对偶广义不等式　适当锥的对偶锥K^*可定义广义不等式

$$x \preceq_{K^*} y \Longleftrightarrow y - x \in K^*,$$

其满足性质：

- $x \preceq_K y \Longleftrightarrow \lambda^\mathrm{T} x \leqslant \lambda^\mathrm{T} y, \forall \lambda \succeq_{K^*} 0;$
- $y \succeq_{K^*} 0 \Longleftrightarrow y^\mathrm{T} x \geqslant 0, \forall x \succeq_K 0.$

使用对偶广义不等式的好处是，对偶锥始终是闭且凸的，并可将一个偏序问题转换为满足一个偏序条件的全序问题。