

第五章 整数规划

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 整数规划问题的提出

- 例 1: 某厂利用集装箱托运甲、乙两种货物, 每箱体积、重量、可获得利润及托运限制如下。问两种货物各托运多少箱使利润最大?

项目	体积	重量	利润
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 整数规划问题的提出

- 例 1: 某厂利用集装箱托运甲、乙两种货物, 每箱体积、重量、可获利润及托运限制如下。问两种货物各托运多少箱使利润最大?

项目	体积	重量	利润
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

- 设两种货物分别托运 x_1, x_2 , 于是

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

- 整数规划是指要求部分或全部决策变量的取值为整数的规划

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 整数线性规划问题的数学模型

□ 线性规划 v.s. 整数线性规划

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ \textcolor{red}{x_j \text{ 中部分或全部为整数}} \end{cases} \end{aligned}$$

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 整数线性规划问题的类型

- **纯整数线性规划**: 全部决策变量都必须取整数值
- **0-1 型整数线性规划**: 决策变量只能取值 0 或 1
- **混合整数线性规划**: 决策变量中一部分必须取整数值, 另一部分可以不取整数值

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ x_j \text{ 中部分或全部为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 纯整数线性规划问题

- 例 2: 某服务部门各时段（每 2h 为一时段）需要的服务员人数见下表。按规定，服务员连续工作 8h（即四个时段）为一班。现要求安排服务员的工作时间，使服务部门服务员总数最少。

时段	1	2	3	4	5	6	7	8
服务员最少数目	10	8	9	11	13	8	5	3

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 纯整数线性规划问题

- 设在第 j 时段开始时上班的服务员人数为 x_j 。由于第 j 时段开始时上班的服务员将在第 $(j+3)$ 时段结束时下班，故决策变量只需考虑 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ，于是数学模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 11 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 13 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geq 8 \\ x_4 + x_5 \geq 5 \\ x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 0-1 型整数线性规划

□ 例 2: 现有资金总额为 B 。可供选择的投资项目有 n 个, 项目 j 所需投资额和预期收益分别为 a_j 和 c_j ($j = 1, \dots, n$)。此外, 因种种原因, 有 3 个附加条件:

- 若选择项目 1 必须同时选择项目 2, 反之, 不一定
- 项目 3 和项目 4 中至少选择一个
- 项目 5、6、7 中恰好选择两个

应当怎样选择投资项目, 才能使总预期收益最大?

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 0-1 型整数线性规划

□ 每一个投资项目都有被选择和不被选择两种可能，为此令

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{对项目 } j \text{ 投资} \\ 0 & \text{对项目 } j \text{ 不投资} \end{cases}$$

于是，问题可表示为

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq B \\ x_2 \geq x_1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 2 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 混合整数线性规划

- 例 3: 工厂 A_1 和 A_2 生产某种物资, 由于该种物资供不应求, 故需要再建一家工厂。相应建设方案有 A_3 和 A_4 两个。这种物资的需求地有 B_1, B_2, B_3, B_4 四个。各工厂年生产能力、各地年需求量、各厂至各需求地的单位物资运费 c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) 如下

工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	生产能力 (kt/年)
A_1	2	9	3	4	400
A_2	8	3	5	7	600
A_3	7	6	1	2	200
A_4	4	5	2	5	200
需求量 (kt/年)	350	400	300	150	

工厂 A_3 和 A_4 的生产费用估计为 1200 万元或 1500 万元。现要决定应该建设工厂 A_3 还是 A_4 , 才能使今后每年的总费用 (包括物资运费和新工厂的生产费用) 最少。

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 混合整数线性规划

□ 设 x_{ij} 为由 A_i 送往 B_j 的物资数量, 令

$$y = \begin{cases} 1 & \text{若建工厂 } A_3 \\ 0 & \text{若建工厂 } A_4 \end{cases}$$

$$\min z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} + [1200y + 1500(1 - y)]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 350 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 400 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 150 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 400 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 600 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200y \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 200(1 - y) \\ x_{ij} \geq 0, y = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 整数线性规划求解方法探讨

□ 原问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

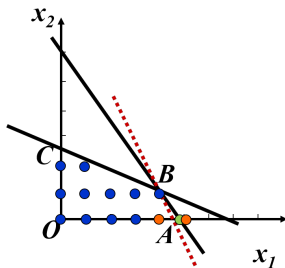
□ 松弛问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 整数线性规划求解方法探讨

- 求松弛问题 (不考虑整数条件) 的最优解为 $A(4.8, 0)$, 最优值 $z = 96$
- 求原问题的最优解
 - 设想一：将松弛问题的最优解进行四舍五入, 即 $(5, 0)$
 - 设想二：将松弛问题的最优解向下取整, 即 $(4, 0)$, $z = 80$



- 原问题的最优解 $B(4, 1)$, 最优值 $z = 90$

5.1 整数规划的数学模型及解的特点

■ 课堂练习

□ 求解下述整数线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 13x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \leq 40 \\ 11x_1 - 8x_2 \leq 82 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

1.1 线性规划问题及其数学模型

■ 小结

- 整数规划的几种类型
 - 纯整数线性规划
 - 混合整数线性规划
 - 0-1 型整数线性规划

1.1 线性规划问题及其数学模型

■ 小结

□ 整数规划的几种类型

- 纯整数线性规划
- 混合整数线性规划
- 0-1 型整数线性规划

□ 解的特点

- 最优解不一定在顶点上达到
- 最优解不一定是相应线性规划的最优解“化整”的整数解
- 最优解不一定是相应线性规划最优解的临近点
- 整数可行解远多于顶点，枚举法不可取

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈