第一章 线性规划及单纯形法

1.3 单纯形法原理

修贤超

机电工程与自动化学院
上海大学

xcxiu@shu.edu.cn

1.3 单纯形法原理

解的概念

标准形式

$$(\mathrm{LP}) \quad \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \cdots, m & (1.2) \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n & (1.3) \end{cases}$$

解的概念

- 标准形式

$$
\text{(LP)} \quad \max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \cdots, m & (1.2) \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \cdots, n & (1.3) \end{cases}
$$

- 满足约束条件 (1.2) 和 (1.3) 的 x_j $(j = 1, \cdots, n)$ 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 满足 (1.1) 的可行解称为**最优解**
- 最优解所对应的函数值称为**最优值**

解的概念

- 设 $\mathbf{A}$ 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n$ $(n > m)$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\mathbf{B}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，记为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m)$$

1.3 单纯形法原理

解的概念

- 设 $\mathbf{A}$ 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n$ $(n > m)$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\mathbf{B}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，记为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m)$$

- $\mathbf{B}$ 是线性规划问题 (LP) 的一个基
- $\mathbf{B}$ 中的每一个列向量 $\mathbf{P}_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ 称为基向量
- 与基向量 $\mathbf{P}_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ 对应的变量 x_j $(j = 1, \cdots, m)$ 称为基变量，记为 $\mathbf{X}_B = (x_1, \cdots, x_m)$
- 除基变量以外的变量称为非基变量，记为 $\mathbf{X}_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$

解的概念

$$\text{(LP)} \quad \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \cdots, m & (1.2) \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n & (1.3) \end{cases}$$

- 在约束方程组 (1.2) 中，令所有非基变量 $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$，则称 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^\top$ 为线性规划问题 (LP) 的基解
- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为基可行解
- 对应于基可行解的基称为可行基

解的概念

$$
\text{(LP)} \quad \max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \cdots, m & (1.2) \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \cdots, n & (1.3) \end{cases}
$$

- 在约束方程组 (1.2) 中，令所有非基变量 $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$，则称 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^\top$ 为线性规划问题 (LP) 的基解
- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为基可行解
- 对应于基可行解的基称为可行基

- 例 1
  - 找出线性规划问题的基、基向量和基变量

$$
\max\ z = 70x_1 + 120x_2
$$

$$
\text{s.t.}\ \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}
$$

- 例 1
  - 第一步: 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 1

- 第一步: 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 第二步: 寻找阶为 m 的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$, 非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

例 1

- 第一步: 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 第二步: 寻找阶为 m 的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$，非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

- 第三步: 另一个基为

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_2, x_4, x_5)^\top$, 非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_3)^\top$

课堂练习 1

- 求出全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)} \in \Omega$，满足

$$\alpha\mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

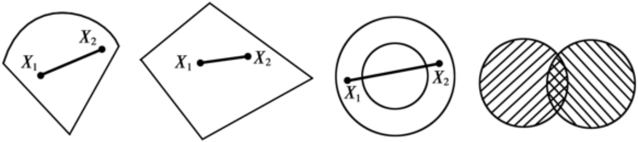
则称 Ω 为凸集。

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{X}^{(1)}$，$\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega$，满足

$$\alpha \mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



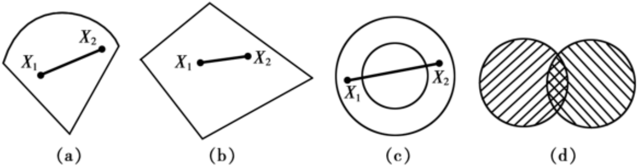
(a) (b) (c) (d)

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega$，满足

$$\alpha \mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 Ω 为凸集。



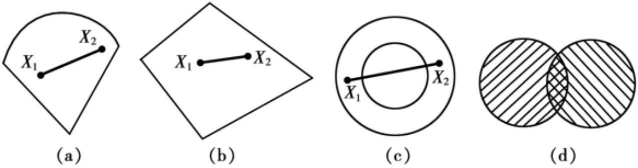
- 任何两个凸集的交集一定是凸集

凸集

- 对于任意两点 $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega$，满足

$$\alpha\mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

  则称 Ω 为凸集。



- 任何两个凸集的交集一定是凸集
- 任何两个凸集的并集不一定是凸集

顶点

- 对于凸集 Ω 中的点 $\mathbf{X}$，如果不存在$\mathbf{X}^{(1)}$，$\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega$ 使得

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

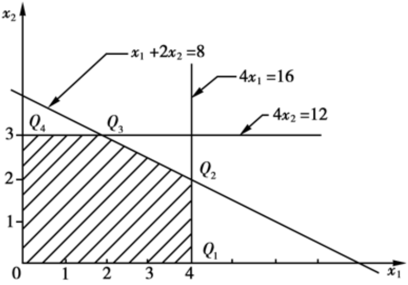
  则称 $\mathbf{X}$ 是凸集 Ω 的顶点。

顶点

- 对于凸集 Ω 中的点 $\mathbf{X}$，如果不存在$\mathbf{X}^{(1)}$，$\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega$ 使得

$$\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 $\mathbf{X}$ 是凸集 Ω 的顶点。



- 定理 1: 若线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集。
  - 记 Ω 为满足线性规划问题束条件的集合

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b},\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

设 Ω 内的任意两点为

$$\mathbf{X}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})^\top,\ \mathbf{X}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})^\top$$

且 $\mathbf{X}^{(1)} \neq \mathbf{X}^{(2)}$，一定满足

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(1)} = \mathbf{b},\ x_j^{(1)} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(2)} = \mathbf{b},\ x_j^{(2)} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

- **定理 1**
  - 令 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^\top$ 为 $\mathbf{X}^{(1)}$，$\mathbf{X}^{(2)}$ 连线上任意一点，即

$$\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中 $x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha)x_j^{(2)}$。于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j \left(\alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha)x_j^{(2)}\right) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(2)} \\ &= \alpha\mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

又因 $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0$, $\alpha > 0$, $1-\alpha > 0$，所以 $x_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$。

定理 1

- 令 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^\top$ 为 $\mathbf{X}^{(1)}$，$\mathbf{X}^{(2)}$ 连线上任意一点，即

$$\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中 $x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha)x_j^{(2)}$。于是

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j \left(\alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha)x_j^{(2)}\right) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j^{(2)} \\
&= \alpha\mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha\mathbf{b} \\
&= \mathbf{b}
\end{aligned}$$

又因 $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0$, $\alpha > 0$, $1-\alpha > 0$，所以 $x_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$。
由此可见 $\mathbf{X} \in \Omega$，可得 Ω 是凸集，证毕。

1.3 单纯形法原理

- 引理 1: 线性规划问题的可行解 X 为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

- 引理 1: 线性规划问题的可行解 X 为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
  - (必要性) 由基可行解的定义可知。

- 引理 1: 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X}$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
  - (必要性) 由基可行解的定义可知。
  - (充分性) 若向量 $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_k$ 线性独立，则必有 $k \leq m$。

- 引理 1: 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X}$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
  - (必要性) 由基可行解的定义可知。
  - (充分性) 若向量 $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_k$ 线性独立，则必有 $k \leq m$。

    (1) 当 $k = m$ 时，它们恰构成一个基，从而

    $$\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^\top$$

    为相应的基可行解。

    (2) 当 $k < m$ 时，则一定可以从其余的列向量中取出 $m - k$ 个与

    $$\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_k$$

    构成最大的线性独立向量组，其对应的解恰为 $\mathbf{X}$，所以根据定义它是基可行解。

1.3 单纯形法原理

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域的顶点。

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域的顶点。
  - 不失一般性，假设基可行解 $\mathbf{X}$ 的前 m 个分量为正，于是

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b} \tag{1}$$

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域的顶点。
  - 不失一般性，假设基可行解 $\mathbf{X}$ 的前 m 个分量为正，于是

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b} \tag{1}$$

  - 第一步: 若 $\mathbf{X}$ 不是基可行解，则它一定不是可行域的顶点。
    根据引理 1，若 $\mathbf{X}$ 不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量 $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m$ 线性相关，即存在不全为零的数 α_i, $(i = 1, \cdots, m)$ 有

$$\alpha_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{P}_m = 0 \tag{2}$$

- 定理 2: 线性规划问题的基可行解 $\mathbf{X}$ 对应线性规划问题可行域的顶点。
  - 不失一般性，假设基可行解 $\mathbf{X}$ 的前 m 个分量为正，于是

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b} \tag{1}$$

  - 第一步: 若 $\mathbf{X}$ 不是基可行解，则它一定不是可行域的顶点。

    根据引理 1，若 $\mathbf{X}$ 不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量 $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m$ 线性相关，即存在不全为零的数 α_i, $(i = 1, \cdots, m)$ 有

$$\alpha_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{P}_m = 0 \tag{2}$$

式(2)乘 $\mu > 0$ 再分别与式(1)相加减，得到

$$(x_1 - \mu\alpha_1)\mathbf{P}_1 + \cdots + (x_m - \mu\alpha_m)\mathbf{P}_m = \mathbf{b}$$
$$(x_1 + \mu\alpha_1)\mathbf{P}_1 + \cdots + (x_m + \mu\alpha_m)\mathbf{P}_m = \mathbf{b}$$

定理 2

- 取

$$\mathbf{X}^{(1)} = [(x_1 - \mu\alpha_1), \cdots, (x_m - \mu\alpha_m), 0, \cdots, 0]$$
$$\mathbf{X}^{(2)} = [(x_1 + \mu\alpha_1), \cdots, (x_m + \mu\alpha_m), 0, \cdots, 0]$$

由上式可以得到

$$\mathbf{X} = (1/2)\mathbf{X}^{(1)} + (1/2)\mathbf{X}^{(2)} \tag{3}$$

即 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ 连线的中点。

另一方面，当 μ 充分小时，可保证

$$x_i \pm \mu\alpha_i \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, m)$$

即 $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ 是可行解，又因(3)，这证明 $\mathbf{X}$ 不是可行域 Ω 的顶点。

定理 2

- 第二步: 若 $\mathbf{X}$ 不是可行域的顶点，则它一定不是基可行解。

  因为 $\mathbf{X}$ 不是可行域 Ω 的顶点，故在可行域 Ω 中可找到不同的两点

$$\mathbf{X}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})^\top$$
$$\mathbf{X}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})^\top$$

  使得

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbf{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

  设 $\mathbf{X}$ 是基可行解，对应向量组 $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m$ 线性独立。当 $j > m$ 时，有 $x_j = x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$。

定理 2

- 由于 $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ 是可行域的两点，应满足

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j x_j^{(1)} = \mathbf{b},$$
$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j x_j^{(2)} = \mathbf{b}$$

将这两式相减，即得

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}_j (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) = \mathbf{0}$$

因 $\mathbf{X}^{(1)} \neq \mathbf{X}^{(2)}$，所以上式系数不全为零，故向量组 $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_m$ 线性相关，与假设矛盾。证毕。

- 定理 3: 若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解。
  - 设 $\mathbf{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^\top$ 是线性规划的一个最优解。
    若 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不是基可行解，由定理 2 知 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不是顶点，一定能在可行域内找到通过 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的直线上的另外两个点

$$\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta \geq 0,\ \mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta \geq 0$$

    带入目标函数有

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}\mu\delta$$
$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{C}\mu\delta$$

- 定理 3
  - 因 $\mathbf{CX}^{(0)}$ 为目标函数的最大值，故有

$$\mathbf{CX}^{(0)} \geq \mathbf{CX}^{(0)} + \mathbf{C}\mu\delta$$
$$\mathbf{CX}^{(0)} \geq \mathbf{CX}^{(0)} - \mathbf{C}\mu\delta$$

由此 $\mathbf{C}\mu\delta = 0$, 即有 $\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) = \mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta)$。

如果 $(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta)$ 或 $(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta)$ 仍不是基可行解，按上面的方法继续做下去，最后一定可以找到一个基可行解，其目标函数值等于 $\mathbf{CX}^{(0)}$，问题得证。

- **单纯形法原理**
  - 如果线性规划问题存在最优解，那么一定有一个基可行解是最优解

单纯形法原理

- 如果线性规划问题存在最优解，那么一定有一个基可行解是最优解
- 单纯形法迭代的基本思路：先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止

单纯形法原理

- 如果线性规划问题存在最优解，那么一定有一个基可行解是最优解
- 单纯形法迭代的基本思路: 先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，一直找到最优解为止
  - 第一步: 求初始基可行解，列出初始单纯形表
  - 第二步: 最优性检验
  - 第三步: 从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表
  - 第四步: 重复二、三两步，一直到计算结束为止

小结

- 可行解，最优解
- 基，基解，基可行解，可行基
- 凸集
- 顶点
- 解的性质
  - 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集
  - 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点
  - 若线性规划问题有最优解，必在某顶点上得到

小结

- 可行解，最优解
- 基，基解，基可行解，可行基
- 凸集
- 顶点
- 解的性质
  - 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集
  - 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点
  - 若线性规划问题有最优解，必在某顶点上得到
- 课后作业：P44，习题 1.3

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈