

## 实验 D1 锁相放大器与弱信号测量

### 目录

实验 D1 锁相放大器与弱信号测量 .....	1
【概述】 .....	3
【背景介绍】 .....	3
基本概念 .....	3
简单滤波法 .....	7
锁相放大法 .....	8
【工作原理】 .....	9
【原理部分思考题】 .....	14
1 【实验 1】锁相放大器工作原理、基本参数与基本操作 .....	15
【实验目的】 .....	15
【实验要求】 .....	15
【仪器用具】 .....	15
1.1 用示波器观察内部信号输出（与参考信号同频同相） .....	15
1.2 测量信号R、 $\theta$ 、X、以及Y值，并验证它们之间的关系 .....	16
1.3 相敏检波器工作原理——乘法器 .....	16
1.4 相敏检波器工作原理——乘法器+低通滤波器 .....	16
1.5 （选）相敏检波器工作原理——低通滤波器参数与传递函数 .....	17
1.6 滤波器带宽对输出信号响应的影响 .....	17
1.7 外部输入参考信号（选） .....	18
1.8 强噪声背景下的弱信号检测 .....	18
【参考文献】 .....	21
2 【实验 2】电阻热噪声及玻尔兹曼常量测量 .....	22
【实验目的】 .....	22
【仪器用具】 .....	22
2.1 电阻热噪声 .....	22
2.2 测量原理 .....	23
2.3 变温测试样品盒 .....	26
2.4 数据采集与处理 .....	27
2.5 实验指引 .....	28
【参考文献】 .....	29

3 【实验3】 趋肤效应实验.....	30
【实验目的】 .....	30
【仪器用具】 .....	30
【实验原理】 .....	30
3.1 测量方法.....	32
3.2 实验对象.....	33
3.3 实验指引.....	33
【参考文献】 .....	35
附录：锁相放大器参数.....	37

**【实验安全注意事项】**

1. OE1022 锁相放大器输入端不能接入强信号；接入信号需限定在 1V 以下。
2. OE4201 压控电流源的电流输出不能直接接入 OE1022 锁相放大器的输入端。

**【概述】**

示波器是常用的信号测量工具，但当信号弱到毫伏量级时，一般的示波器就难以精确测量信号；此时，锁相放大器（Lock-in amplifier）就是一个很好的测量工具。然而，用好锁相放大器的前提是对其工作原理以及主要参数的内含有清晰的了解。一般的测量应用关心的是信号，噪声被视为干扰要被滤除；但对某些实验，噪声本身就是研究对象，也可用锁相放大器测量。针对物理学专业、尤其是精密测量物理专业特点的需求，本讲义侧重通过数学来表述锁相放大器的工作原理及常用关键参数的内含，而尽量不涉及其电路。内容覆盖信号、噪声及信噪比等基本概念、以及锁相放大技术在检测弱信号和测量噪声的应用。

**【背景介绍】****基本概念**

现代测量中，所有的物理最终都转换为电压或光强进行记录和处理，我们称之为携带被测量物理量信息的电或光信号；然而所有的测量，即使完全由机器自动执行，结果都不可避免地引入待测量以外的其他信息，如环境干扰和内部噪声，即仪器的输入信号不可避免地携带了噪声。

**1) 什么叫信号(signal)?**

一般来说，信号是信息的载体。任何携带某个现象属性或行为信息的物理量都可以视为信号，如光信号、声信号和电信号等。物理世界中的信号都是有规律地随时间或空间变化的。数学上以函数的形式 $s(t)$ 描述信号，函数发生器输出的是电信号。

对锁相放大器而言，最基本、简单的信号就是随时间变化的三角函数：

$$s(t) = a \cos(\omega_s t + \varphi) \quad (\text{D1-1})$$

它包含了三个最基本的信息，即振幅  $a$ 、角频率 $\omega_s$ 、和相位 $\varphi$ ，它对应着信号载体不同的物理含意。在实际应用中，人们往往只用到其中的一个或两个基本信息来进行信号传递或处理，而对于科学探索则所有的信息可能会被用到。(D1-1)式是在时域下对信号的描述；在频域下该信号的数学描述为：

$$s(\omega) = \begin{cases} a & (\omega = \omega_s) \\ 0 & (\omega \neq \omega_s) \end{cases} \quad (\text{D1-2})$$

可见，其形式更简单，但丢失了相位的信息。其频域图如图 D1-1b)所示。基本信号的更一般数学描述是复数形式：

$$s(t) = ae^{i(\omega_s t + \varphi)} \quad (\text{D1-3})$$

它的实部为式(D1-1)，可见式(D1-3)具有更丰富的物理内含和更简洁的数学表达。照顾习惯，

本讲义用三角函数进行表述和推导。

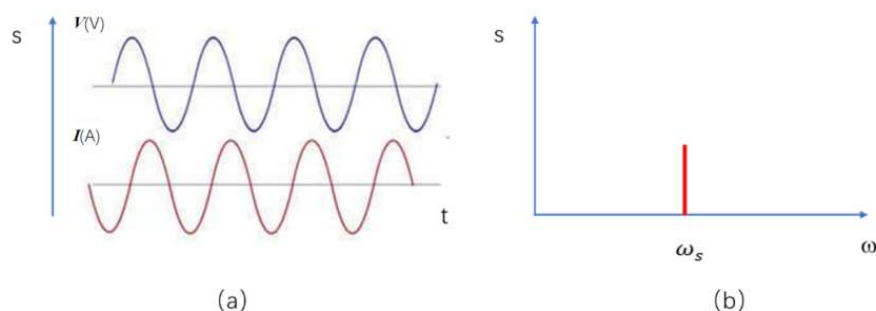


图 D1-1 正弦波电压电流信号，（a）时域表述；（b）频域表述。

## 2) 什么叫噪声(noise)?

广义地说，非待测信号本身的、对测量值的贡献都可视为噪声。它可分为来自外界的环境的有规律的声源（ $n_e(t)$ ），最典型的是市电噪声（50Hz 及其整数倍频）；以及来自被测量对象本身的噪声，如随机噪声或白噪声（ $n_T(t)$ ，包括热噪声和散粒噪声），甚至来自测量仪器本身的噪声；它们都混合在待测信号的测量值中，被视为对信号的干扰、与待测信号相冲突的无用信息。

从物理角度来看，物理量包含无规、随机的变化，这就是热噪声，它是自然界的内禀的性质。当这种内禀噪声被当作研究对象（如微波背景辐射）时，它就是有用的信号。在实际实验中，随机噪声也存在于测量电子器件（如 PN 结的散弹噪声）和电路中，它在时域和频域都呈均匀分布，而它们都不是待测的信号。换句话说，**对于一项实验，无规的热噪声既可来自于实验对象本身，也可来自于测量系统，包括传感器和测量仪器。**

当待测信号频率与环境噪声频率相同，则严重影响测量结果；设计实验时应使信号频率远离环境噪声频率（如数倍于滤波器带宽之外）。为方便理解，在时域表述时，把一般噪声电压看成各种噪声电压的叠加：

$$n(t) = n_e(t) + n_T(t) + n_{1/f}(t) + n_i(t) + \dots \quad (\text{D1-4})$$

其中， $n_e(t)$ 为有规律变化的环境噪声， $n_T(t)$ 为随机噪声， $n_{1/f}(t)$ 为闪烁噪声、亦称  $1/f$  噪声，随机噪声和  $1/f$  噪声存在于仪器中（ $n_i(t)$ 为仪器噪声），也在于测量对象中。

$$n_e(t) = \sum_{i=1}^N e_i \cos(\omega_i t) \quad (\text{D1-5})$$

$$n_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} v_N(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{D1-6})$$

$$n_{1/f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{low}}^{\omega_{ig}} \sqrt{\frac{c}{\omega^p}} [\xi(\omega) + i\zeta(\omega)] e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{D1-7})$$

式中， $v_N(t)$ 或 $\xi(\omega)$ 和 $\zeta(\omega)$ 为服从正则分布的、独立的随机数（见图 D1-3）； $S(\omega) = c/\omega^p$ 为功

率谱密度； $c$  为常数， $p \sim 1$ ； $\omega_{low}$  和  $\omega_{high}$  分别为低频、高频截止圆频率，由仪器带宽决定，使积分可积。

上面表述仅涉及到与本实验相关的噪声类型（图 D1- 2）。在频域中更容易辨认哪些是我们所关注的信号  $a(\omega_s)$ 、哪些是有规律的噪声  $e_i(\omega_i)$ （如市频干扰，有稳定的频谱）；热噪声无论在时域还是频域都表现出随机特征，其长时间平均值为 0，方均根为常数，即噪声幅值。

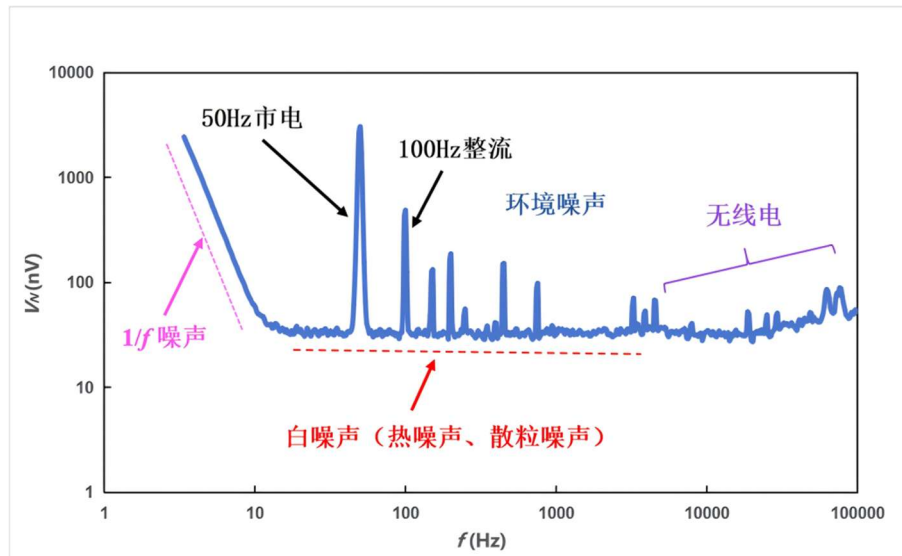


图 D1- 2 本实验涉及的 3 类噪声分布(来自实验 2 的测量结果)。



图 D1- 3 信号发生器输出的热噪声的时域波形图（上，紫色）及频域分布（下，绿色）。

### 3) 什么叫信噪比 (SNR) 及信噪改善比 (SNIR) ？

信噪比是科学与工程中常用的一种度量，用于表征相对于背景噪声的信号强度，或噪声对信号的覆盖程度，以信号强度与噪声功率或强度之比( $P_S/P_N$ )或( $I_S/I_N$ )来定义的信噪比 (signal noise ratio;  $SNR=P_S/P_N$ )。噪声以及周期为  $T$  的交流信号在足够长时间内的平均值为零，因此

平均功率正比于电压有效值的平方（类似光强正比于其电场强度的平方），则  $P_S \propto \frac{1}{mT} \int_0^{mT} V_S^2 dt = V_{S,RMS}^2$ ；同理， $P_N \propto V_{N,RMS}^2$ 。信噪比通常是跨数量级的，为方便在宽范围内表述，以每 10dB 为一个量级，取  $SNR(dB) = 10 \lg(P_S/P_N)$ ，以分贝（dB）为单位来衡量信噪比；以每 20dB 为一个量级换算为基于电压定义的信噪比  $SNR(dB) = 20 \lg(V_{S,RMS}/V_{N,RMS})$ 。

在频域，对信号带宽  $\Delta f_S$  和噪声带宽  $\Delta f_N$ ，参考式(D1-37)和式(D1-38)：

$$SNR(dB) = 10 \lg \left( \frac{V_{S,RMS}^2}{S_N(f) \Delta f_N} \right) \quad (D1-8)$$

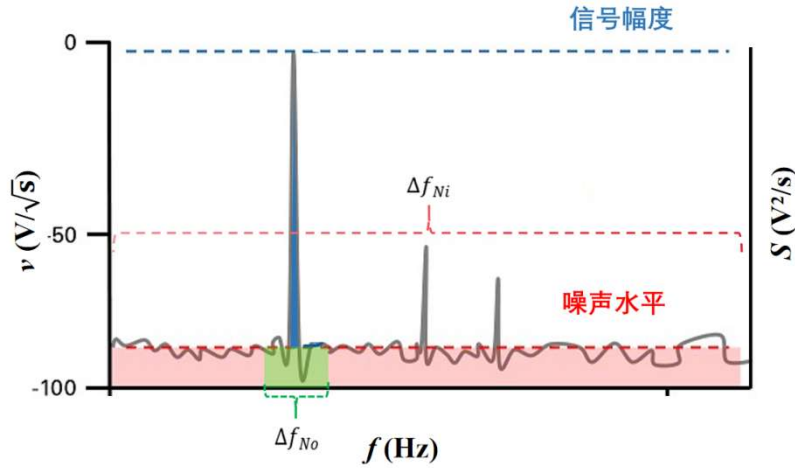


图 D1-4 频域中 SNR 的概念示意图

式中， $S_N(f)$  为噪声谱密度。通过滤波信号处理可提高信噪比，其本质是缩小了噪声的积分范围，滤波器带宽越窄，噪声积分面积越小，则信噪比越高。为反映信号质量改善的程度，定义信噪改善比 SNIR（signal noise improvement ratio）：

$$SNIR = \frac{SNR_o}{SNR_i} = \frac{\Delta f_{Ni}}{\Delta f_{No}} \quad (D1-9)$$

或：

$$SNIR(dB) = SNR_o(dB) - SNR_i(dB)$$

式中， $SNR_o$  是经过处理（系统输出端）的信噪比， $SNR_i$  是未经过处理（系统输入端）的信噪比；对随机噪声，其谱密度为常数，得等式右边项，其中， $\Delta f_{Ni}$  和  $\Delta f_{No}$  分别为输入等效噪声带宽和检波后输出的等效噪声带宽（参见实验 2 测量原理部分）。SNIR 越大，表明系统抑制噪声的能力越强。

**“微弱信号”** 多指相对于噪声而言幅度很小的信号，特别是那些被噪声淹没的信号。只有在有效地抑制噪声的条件下放大微弱信号的幅度，才能提取出真实的信号。

提高信噪比的途径有两条：一是通过物理屏蔽来抑制环境噪声（压低强度），二是通过信号处理滤除噪声（缩小积分范围）。通常物理屏蔽的成本高，且对屏蔽体内部噪声和仪器本身噪声无效，此时信号处理方法就成为唯一的选择。那么，有什么方法可以抑制噪声，从而精确测量微弱信号呢？

## 简单滤波法

滤波法是提升信噪比的常用方法。常用的滤波器有低通滤波器，带通滤波器和带阻滤波器。但是使用滤波法测量小信号只适用于**信号与噪声频谱不重叠**的情况。

对于直流信号  $v(t) = v_{DC} + n(t)$  多次采样取平均，只要采样足够大，其平均值为直流信号  $\bar{v}(t) = v_{DC}$ 。求平均值方法是一种数字低通滤波器。

在基础物理实验中（RLC 串联交流稳态和谐振特性），我们已经做过 RC 串联电路中电容电压的幅频特性： $U_C = U/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ 。把  $U$  作为输入信号， $U_C$  作为输出信号，可见只有低频信号可以输出，这就是一个 1 阶 RC 低通滤波器（电路如图 D1-5 所示），用复数定义其传递函数  $H(\omega) = \tilde{u}_{out}/\tilde{u}_{in}$  为：

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (D1-10)$$

幅频特性为：

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (D1-11)$$

其中  $RC = 1/\omega_0$  为时间常数（参见附录）， $\omega_0$  为滤波器的截止频率。

$n$  阶 RC 低通滤波器的传递函数  $|H(\omega)|^n$ 。锁相放大器也使用低通滤波器。

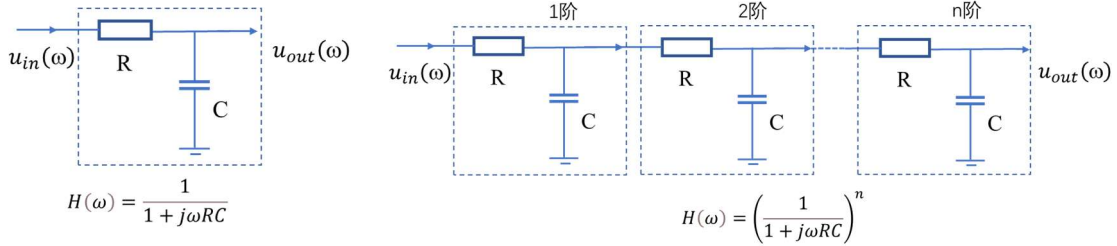


图 D1-5 一阶 RC 滤波器电路（左图）；为多级级联 RC 滤波器（右图）。

设输入信号为： $v(t) = s(t) + n(t)$ ，滤波后输出： $|H(\omega)|v(t)$ 。

$$\begin{aligned} v(t) = & a \cos(\omega_s t) + \sum_1^N e_i \cos(\omega_i t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty v_N(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{low}}^{\omega_{ig}} \sqrt{\frac{c}{\omega^p}} [\xi(\omega) + i\zeta(\omega)] e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (D1-12)$$

其中  $\omega_s$  为待检信号频率，经带通滤波（BPF）后，直观地，输出为：

$$\begin{aligned} a \cos(\omega_s t) + & \sum_{\omega_s - \Delta\omega/2}^{\omega_s + \Delta\omega/2} e_i \cos(\omega_i t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_s - \Delta\omega/2}^{\omega_s + \Delta\omega/2} v_N(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_s - \Delta\omega/2}^{\omega_s + \Delta\omega/2} \sqrt{\frac{c}{\omega^p}} [\xi(\omega) + i\zeta(\omega)] e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (D1-13)$$

其中， $\Delta\omega$  为带通宽度，可见，滤波后带通外的噪声仅在一个窄带范围或低频区域内表述（仅由式(D1-13)的右边第二、第三和第四项描述）。

若用低通滤波 (LPF(low pass filter)), 滤波后的残余噪声:

$$n_l(t) \cong \sum_0^{\omega_0} e_i \cos(\omega_i t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} v_N(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} \sqrt{\frac{c}{\omega^p}} [\xi(\omega) + i\zeta(\omega)] d\omega$$
(D1- 14)

其中,  $\omega_0$  为截止频率, 表征 LPF 的带宽; 从时域看噪声水平明显下降, 信噪比得到明显改善; 但通带内的噪声不能被滤掉。

### 锁相放大法

锁相放大器 (lock-in amplifier, LIA) 也称锁定放大器, 是通过特定的载波将湮没在噪声中的微弱信号提取出来的技术。锁相放大技术采用了频谱迁移和交流放大技术、用相敏检测器和低通滤波器来实现调制信号的解调。锁相放大器抑制噪声有三个基本出发点:

- (1) 用调制器将直流或慢变信号的频谱迁移到调制频率  $\omega_m$  处, 再进行放大, 以避开传输过程所引入的、以及放大器内部的  $1/f$  噪声的影响。
- (2) 用相敏检波器实现被调制信号的解调, 即基于相关性原理, 噪声与信号既同频又同相的概率很低, 故可用频率  $\omega_m$  和相角  $\theta$  相符检测信号。
- (3) 低通滤波器的频带可以做得很窄, 而且其频带宽度不受调制频率的影响。

对非正弦的、慢变的信号测量, 需要先对待测信号频谱进行迁移 (即调制, 如图 D1-6 (上左) 所示), 其调制过程是将低频信号  $s(t)$  乘以频率为  $\omega_m$  的正弦载波, 从而将其频谱迁移到调制频率  $\omega_m$  的附近, 之后进行选频放大, 图中的虚线表示  $1/f$  噪声和白噪声的功率谱分布。经放大后, 再用乘法器将其频谱迁移到直流 ( $\omega = 0$ ) 和倍频 ( $\omega = 2\omega_0$ ) 两边, 如图 D1-6 (上中) 所示; 再用相敏检测器 (PSD: phase sensitive detector) 将其频谱迁移到直流 ( $\omega = 0$ ) 和倍频 ( $\omega = 2\omega_0$ ) 然后用窄带低通滤波器 (LPF) 滤除噪声和倍频部分, 就得到高信噪比的放大信号, 如图 D1-6 (上右) 所示, 虚线表示 LPF 的频率响应曲线。只要 LPF 的带宽足够窄, 就能有效地改善信噪比。锁相放大器等效于一个高质量的带通滤波器。



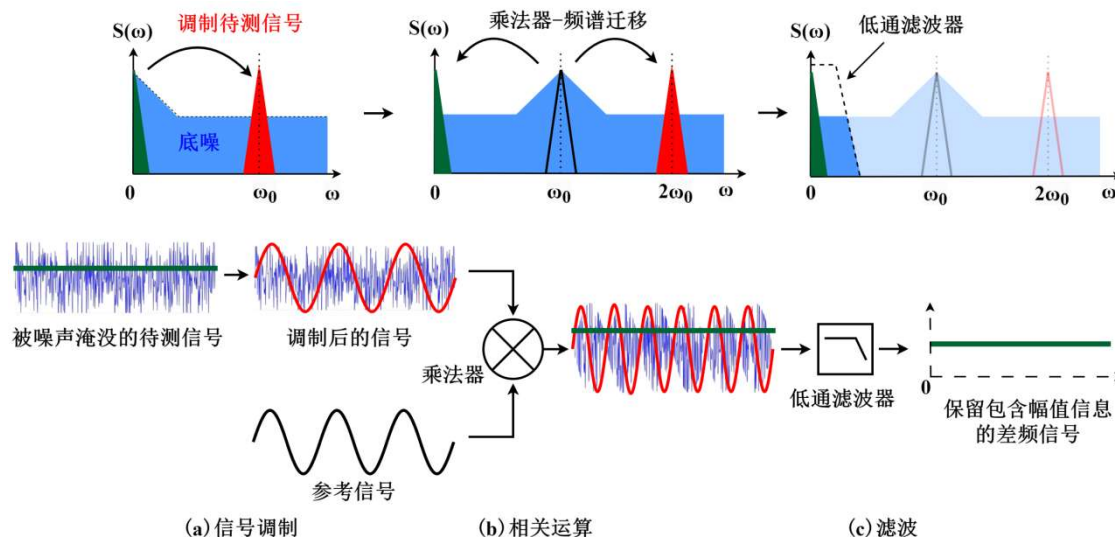


图 D1- 6 锁相放大器的工作原理

与振幅调制相比，锁相放大使用了相敏检波技术，它是锁相放大技术的特征和核心。早期的锁相放大器用锁相环技术对该载波信号进行鉴相，从而得到频率和相位与载波信号相同的参考信号（为理想的正弦信号），再用此参考信号实现解调。这就是“锁相放大器”名称的来由，其原理见图 D1- 7(a)。

相敏检波后再经过低通滤波过程，相当于一个  $Q$  值极高的窄带滤波，可以不受待测频率以外的噪声信号影响，从而使检测系统的性能大为改善。品质好的锁相放大器的等效噪声带宽可以达到  $10^{-4}\text{Hz}$ ，整体增益可以高达  $10^{10}$  以上，即把  $0.1\text{nV}$  的微弱信号可以放大到  $1.0\text{V}$  以上。

### 【工作原理】

锁相放大器的基本结构如图 D1- 7 所示。图 D1- 7(b)和(c)所示的点虚线框内, 其中信号通道、参考通道为锁相放大器的输入通道，乘法器和低通滤波器（LPF）构成锁相放大器的核心——相敏检波器（PSD: phase sensitive detector），如图 D1- 7(a)的蓝虚线框内所示。

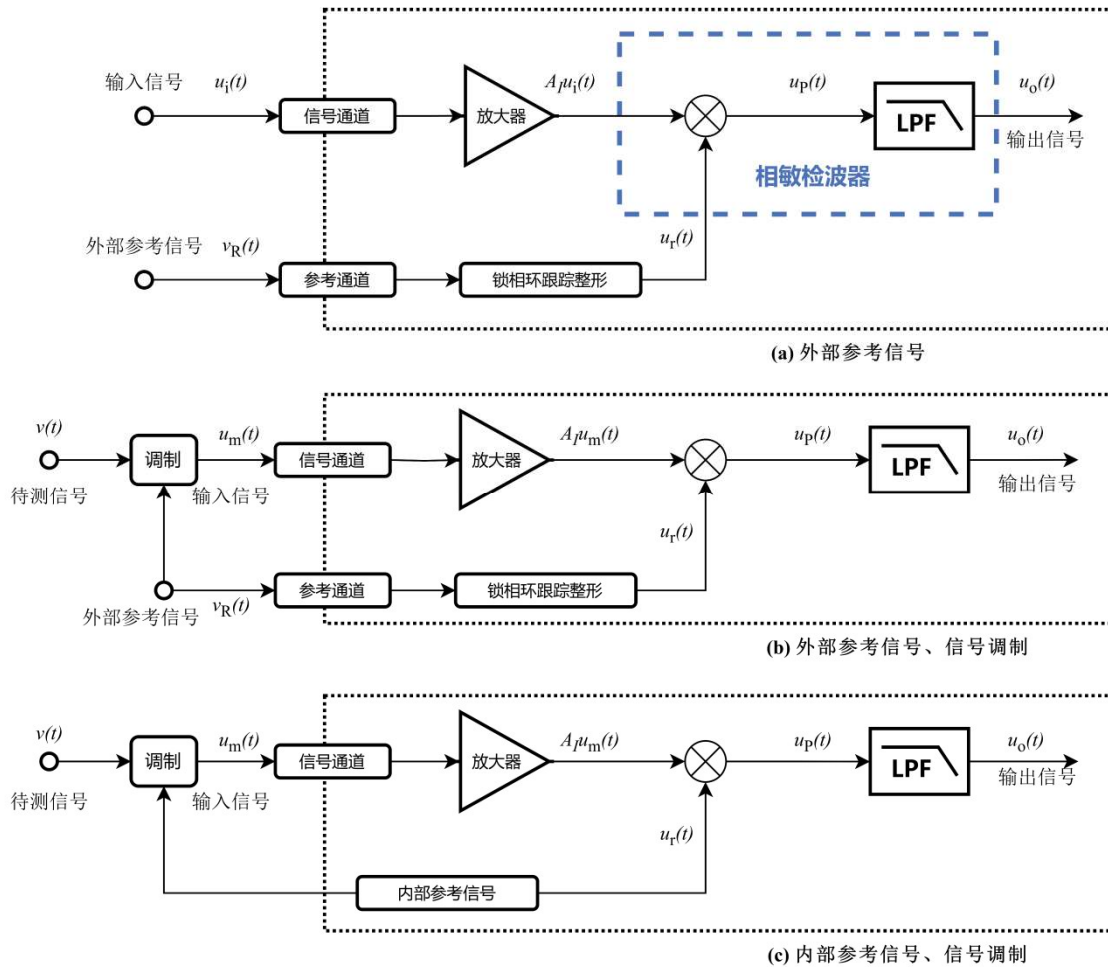


图 D1-7 锁相放大器工作原理（点虚线框内表示本实验所用的仪器）

对于三角函数信号  $u_i(t) = u_0 \sin(\omega_s t + \varphi)$ ，可直接从信号通道输入（点虚线框内的）锁相放大器（图 D1-7(a)），此时待测信号即为锁相放大器的输入信号。对于非三角函数信号或慢变信号（如直流信号），它在输入锁相放大器（如图 D1-7(b)和(c)虚线框外部分所示）前，需要被与参考信号频率相同的正弦信号所调制，参考信号  $u_r(t)$  既可以是对外部输入信号  $(v_R(t))$  整定后的正弦信号[如图 D1-7(b)]，也可以是锁相放大器内部自带参考信号源提供的正弦信号[如图 D1-7(c)]。

三角函数信号可视为一被调制的直流信号。不失一般性，下面以非三角函数信号为待测信号，用数学方式阐述锁相放大器的工作原理。对于噪声，它可以叠加在调制前的信号中（(D1-15)式所示），亦可以叠加在调制后的信号中（(D1-16)式所示）；锁相放大器信号输入端不能区分这两种情况，因而，下面推导中只考虑后者，即输入信号为三角函数，输入噪声为  $n(t)$ 。

调制前信号包含待测信号和噪声：

$$v(t) = s(t) + n(t) \quad (\text{D1-15})$$

经 $\sin(\omega_m t + \theta)$ 信号<sup>1</sup>调制后： $u_m(t) = v(t) \sin(\omega_m t + \theta)$ ；对于先调制信号再引入噪声情况，式(D1-16)给出了锁相放大器的输入信号 $u_{in}(t)$ ：

$$u_{in}(t) = u_m(t) = s(t) \sin(\omega_m t + \theta) + n(t) \quad (D1-16)$$

**放大：**输入信号仍然微弱，在经前置放大器后，信号与噪声都被同时放大了 $A_I$ 倍：

$$u_a(t) = A_I s(t) \sin(\omega_m t + \theta) + A_I n(t) \quad (D1-17)$$

**解调：**用乘法器将放大后信号 $u_a(t)$ 与参考信号 $u_r(t) = \sin(\omega_r t)$ 相乘：

$$\begin{aligned} u_{px}(t) &= u_r(t) u_a(t) = A_I [s(t) \sin(\omega_m t + \theta) \sin(\omega_r t) + n(t) \sin(\omega_r t)] \\ &= A_I \left\{ \frac{s(t)}{2} [\cos((\omega_m - \omega_r)t + \theta) - \cos((\omega_m + \omega_r)t + \theta)] + n(t) \sin(\omega_r t) \right\} \end{aligned} \quad (D1-18)$$

对于调制信号是用参考信号通过某种物理机制触发或用参考信号本身情况，参考信号与调制信号频率相同（ $\omega_m = \omega_r$ ）、相位差 $\theta$ 确定；并经过理想的低通滤波器滤去高频分量<sup>2</sup>，则滤波器输出信号为：

$$u_{ox}(t) = A_I \left[ \frac{1}{2} s(t) \cos \theta + n_x(t) \right] \quad (D1-19)$$

式中， $n_x(t)$ 为未被滤去的、与参考频率相同的“同频噪声”。对**高信噪比**情况，忽略噪声：

$$u_{ox}(t) = \frac{1}{2} A_I s(t) \cos \theta \quad (D1-20)$$

锁相放大器输出信号 $s(t)$ 有效值：

$$X = 2u_{ox}(t)/A_I = R \cos \theta \quad (D1-21)$$

为了获得完整的输入信号，需采用另一路频率相同、且与参考信号相位相差 $\pi/2$ 的信号 $u_{r1}(t) = \cos(\omega_r t)$ 作为解调信号，则通过相敏检测后此路信号与另一路信号也相差 $\pi/2$ ：

$$u_{py}(t) = \frac{1}{2} A_I s(t) [\sin((\omega_m - \omega_r)t + \theta) + \sin((\omega_m + \omega_r)t + \theta)] \quad (D1-22)$$

$$u_{oy}(t) = \frac{1}{2} A_I s(t) \sin \theta \quad (D1-23)$$

$$Y = 2u_{oy}(t)/A_I = R \sin \theta \quad (D1-24)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (D1-25)$$

定义锁相放大器输入信号相对于解调信号（图 D1-7 的参考信号）的相位差：

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_{oy}(t)}{u_{ox}(t)} \quad (D1-26)$$

<sup>1</sup> 调制信号可以是参考信号本身，也可以是通过参考信号触发生成的其他同频信号。

<sup>2</sup> 这里假设被调制前的信号 $s(t)$ 为慢变量，即信号频率 $\omega_s \ll \omega_m$ ，且要求在低通滤波器的带宽内。

这种可同时测量完整输入信号信息的锁相放大器称**双相锁相放大器**（结构如图 D1- 8 所示）；仪器实际返回相位角度范围在 $-\pi/2$  到  $\pi/2$  之间，即 $\text{atan2}(u_{oy}(t), u_{ox}(t))$ 。

滤波效果与锁相放大器参数设置（选择）有关，要用好锁相放大器，就需要对滤波器的工作原理有更深入的了解。

滤波前（或滤波器时间常数很小时），从式(D1- 18)和式(D1- 22)：

$$R(t) = s(t)|\sin(\omega_m t + \theta)| \quad (\text{D1- 27})$$

即信号项被 $|\sin(\omega_m t + \theta)|$ 所调制，其频率是被调制信号频率 $\omega_m$ 的 2 倍。对 $|\sin(\omega_m t + \theta)|$ 做

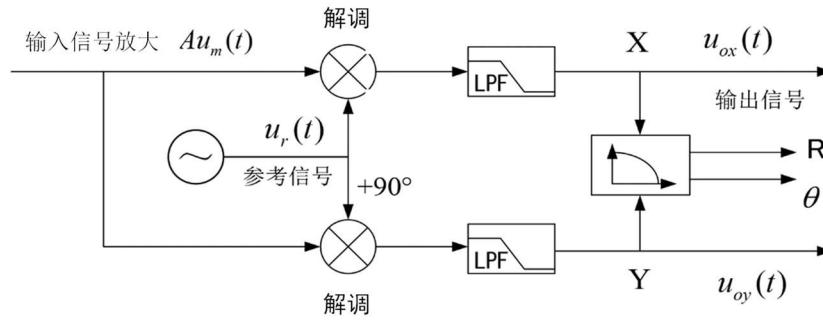


图 D1- 8 双相锁相放大器结构框图<sup>[5]</sup>

傅里叶变换，可得到该频谱，即 $2\omega_m$ 频率下的幅值和直流分量（平均值）。在信噪比较高时，此式容易被观察到（参见实验内容 1.3）。

#### 低通滤波：

将(D1- 12)在频域表述：

$$v(\omega) = \int_0^T [s(t) + n(t)]e^{-i\omega t} dt = s(\omega) + \sum_{i=1}^N e_i(\omega_i) + v_N(\omega) + \sqrt{\frac{c}{\omega^p}} \quad (\text{D1- 28})$$

式中， $T$ 为总采样时间。对慢变信号，频率 $\omega_s \ll \omega_m$ ；要求低通滤波器 LPF 带宽大于 $\omega_s$ 。

X 通道检波后的信号（式(D1- 18)）进入  $n$  阶 LPF 后，从(D1- 11)：

$$u_{ox}(t) = \frac{A_I}{2} \left[ \frac{s(t)\cos(\omega_m - \omega_r)t}{\left(1 + ((\omega_m - \omega_r)RC)^2\right)^{\frac{n}{2}}} - \frac{s(t)\cos(\omega_m + \omega_r)t}{\left(1 + ((\omega_m + \omega_r)RC)^2\right)^{\frac{n}{2}}} \right] + n_x(\omega_r) \quad (\text{D1- 29})$$

式中， $n_x(\omega_r)$ 为滤波后与 $\omega_r$ 同频噪声 X 分量。

结合实验内容，先讨论信号项（大信噪比），即忽略式(D1- 29)右边最后项。对非同频的情况（ $\omega_m \neq \omega_r$ ），只有参考频率附近（ $\omega_r \pm \omega_0$ ）的信号可以通过低通滤波器， $\omega_0 = 1/RC$ 为低通滤波器的截止频率。当 $|\Delta\omega| < \omega_0 < \omega_m + \omega_r$ 时（ $\Delta\omega = \omega_m - \omega_r$ ），式(D1- 29)中的和频项 $\cos((\omega_m + \omega_r)t + \theta)$ 被滤掉，只留下差频项 $\cos(\Delta\omega t + \theta)$ ；也就是说，只有输入信号频率在参考频率附近时才可以通过低通滤波器，这等效于一个带通滤波（可在实验内容 1.3 中体验）。

$$u_{ox}(t) = \frac{A_r s(t)}{2} \frac{\cos(\Delta\omega t + \theta)}{[1 + (\Delta\omega RC)^2]^{\frac{n}{2}}} \quad (D1-30)$$

当截止频率高 ( $\omega_0 \geq \omega_m + \omega_r$ )，即时间常数小，同频输入信号会导致输出信号项含参考频率的倍频  $2\omega_r$ ，在信噪比较高时，此倍频的正弦信号分量在滤波不充分时可被观察到（见实验内容 1.3 的 X 或 Y 输出）。【感兴趣的同学可用程序画出式(D1-30) 的幅频图】

当  $\omega_0$  足够小，即  $RC$ （或时间常数足够大）时，相当于窄带滤波器。低通滤波后留下了慢变的待测信号如式(D1-20)和式(D1-23)所示。

当频率接近 ( $\Delta\omega \approx 0$ ) 时，且选择适当的时间常数 ( $RC \gg 1/\omega_m$ ) 后，将式(D1-30) 的  $u_{ox}(t)$  与  $u_{oy}(t)$  分别代入式(D1-22)、式(D1-25)、式(D1-26)，则：

$$R(t) = \frac{s(t)}{[1 + (\Delta\omega RC)^2]^{\frac{n}{2}}} \quad (D1-31)$$

此时的  $R(t)$  稳定，但  $X(t)$  和  $Y(t)$  则因相位随时间变化 ( $\theta(t) = \Delta\omega t$ ) 而不稳定。式(D1-31)可用于检验低通滤波器的工作原理（参见实验内容 1.7，因外部仪器时钟与本地时钟存在时差，尽管设置频率相同， $\Delta\omega \neq 0$ ）。式(D1-31)与式(D1-27)的差异表明，锁相放大器工作次序是 X，Y 通道分别先滤波，再合成出 R。当  $\Delta\omega = 0$  时，式(D1-30)即为式(D1-20)。

回到**低信噪比**的情况，式(D1-29)经 LPF 后得：

$$X(\omega) = \cos \theta [s(\omega_r) + n(\omega_r)] \quad (D1-32)$$

式中  $n(\omega_r) \approx \sum_{i=1}^N \frac{e_i(\omega_i - \omega_r)}{(1 + ((\omega_i - \omega_r)RC)^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{v_N(\omega) + c/\omega^{p/2}}{(1 + ((\omega - \omega_r)RC)^2)^{\frac{n}{2}}}$ ，为参考频率  $\omega_r$  附近的同频噪声；则锁相

放大器的输出的 R 值：

$$R(t) = \sqrt{s^2(t) + n_{\omega_r}^2(t) + 2s(t)n_{\omega_r}(t)\sin(\omega_r t + \theta)} \neq s(t) + n_{\omega_r}(t) \quad (D1-33)$$

$n_{\omega_r}(t)$  为  $n(\omega_r)$  的时域表述。更多的噪声测量原理，详见【实验 2】电阻热噪声及玻尔兹曼常量测量。

锁相放大器用相敏检测器实现解调，并且实现**既检幅又检相**的功能。尽管锁相放大器已滤除了绝大部分噪声，但对同频噪声  $n_{\omega_r}(t)$  仍无能为力。在实际测量中，慢变信号的调制频率通常选择于背景噪声最低的频区。

### 为什么叫锁相放大器？

很多应用场合，锁相放大器的参考信号由外部提供（例如光学斩波器，信号发生器），称之为**外部参考模式(external)**。锁相放大器的参考通道就会将外部输入的参考信号进行放大和整形，然后通过锁相环技术，在锁相放大器内部产生一个与外部输入参考信号频率相等、相位差锁定的正弦信号，即图 D1-7(b)所示的  $u_r(t)$ 。**锁相的含义是根据外部参考，利用锁相环产生一个频率相同、相位差锁定的参考信号。**这个是锁相放大器能够进行相敏检测运算的基础。

### 【原理部分思考题】

1. 市频 50Hz 干扰通常通过电源耦合, 影响仪器的测量结果; 对于 997Hz 的待测信号, 50Hz 干扰是噪声吗? 对锁相放大器的测量会有影响吗?
2. 如何用锁相放大器检测到待测的直流信号或慢变信号? (图 D1-9 中的  $v(t)$  为直流或慢变信号)
3. 如用斩波器调制直流信号 (如光强), 被斩制后的信号 (图 D1-9 中的  $u_m(t)$  信号) 仍然包含有直流分量 (即平均值不为零), 但该直流分量随交流信号输入锁相放大器后不会被锁相放大器检测, 请从数学推导上说明。
4. 相位以及相位差的含义是什么? 锁相放大器输出的  $\theta$  是待测信号的相位还是待测信号与参考信号之间的相位差?
5. 锁相放大器的使用说明、操作视频和仿真软件另外给出, 帮助预习。
6. (选) 以上仅讨论了滤波器的幅频特性, 那么其相频特性又会是怎样呢? 在时域的时间响应特性又是怎样呢? 感兴趣的同学可以自己推导。进一步, 该相频特性会影响到相位角  $\theta$  的测量吗?

## 1 【实验 1】锁相放大器工作原理、基本参数与基本操作

### 【实验目的】

1. 了解锁相放大器工作原理和特点，理解信号、噪声、信噪比等概念。
2. 掌握锁相放大器基本参数含义及锁相放大器的基本操作，学会合理选择或调节参数（频率、相位、灵敏度、时间常数、陡降）；复习示波器的使用；
3. 掌握用锁相放大器检测弱信号方法，通过与示波器比较其检测能力了解其技术优势。

### 【实验要求】

1. 把锁相放大器作为测量工具的定位理解其工作原理。
  - 1) 基本概念：信号、噪声、信噪比；时域谱、频域谱；
  - 2) 锁相放大器工作原理：信号的调制、解调（相敏检波）、滤波的数学表述；
2. 学习合理地设置锁相放大器参数，为后面实验应用锁相放大器及时、准确、精密地获得待测微弱信号的之间获得合理的平衡。锁相放大器参数（频率、相位、灵敏度、时间常数、陡降）及其对锁相放大器测量的影响；
3. 锁相放大器操作：参数设置，用示波器观察锁相放大器通道输出结果，或用 DISPLAY 显示输出结果；
4. 在实验报告中用实验结果回答问题。
5. （选）参数设置和操作：浮地，差分（A-B）输入，外部输入参考信号（TTL 参考信号），扫频。

### 【仪器用具】

表 D1-1 弱信号检测实验仪器用具

编号	仪器用具名称	数量	主要参数（型号，规格等）	备注
1	锁相放大器	1	OE1022（系列）	
2	配套教学实验箱	1		
4	示波器	1	RIGOL DS2202A	
5	信号发生器	1	RIGOL DG4162	
6	BNC-BNC 信号线	若干		

#### 1.1 用示波器观察内部信号输出（与参考信号同频同相）

OE1022 的内部振荡器 SINE OUT 相当于函数发生器，输出正弦信号。通过它产生一个幅值为 80mVrms、频率约为 1kHz 的正弦波，并用示波器观察和记录波形及信号参数。

**提示：**当用三通分信号至示波器时，注意在示波器输入通道设置中选择输入阻抗（1M $\Omega$ ）。

**【问题 1】** 示波器是否显示出正弦波？其测量的信号参数值是否与锁相放大器的信号设置值一致？



## 1.2 测量信号 $R$ 、 $\theta$ 、 $X$ 、以及 $Y$ 值，并验证它们之间的关系

- 1) 用一条 BNC-BNC 信号线连接 OE1022 前面板 SINE OUT 输出接口和 SIGNAL IN 的 A/I 接口后,观察主界面中监测栏的 Overload 是否提示溢出:若前级输入溢出,则显示 Overload: INPUT NONE; 若放大溢出,则显示 Overload: NONE GAIN; 若同时溢出,则显示 Overload: INPUT GAIN。
- 2) 若有前级溢出时应立即减小数字信号发生器输出幅值,若有放大溢出应立即调节量程灵敏度(sensitivity)值(OE1022 输入端峰值高于 1.7V 或谷值低于-1.7V 时发生前级溢出,且默认量程灵敏度值为 100mV,因此本例中数字信号发生器输出幅值为 80mVrms 的正弦波时不会发生溢出,但是测量其他信号时要注意溢出情况)。
- 3) 调节量程灵敏度值。按下前面板 GAIN/TC 按键进入子菜单。
- 4) 按下软键 1 以选中 Sensitivity 功能,选中区域会有高亮显示,通过旋转旋钮调节 Sensitivity 值,使测量信号值尽量满偏而又不超量程。至此,我们即简单测出了从内置函数信号发生器输出的正弦波幅值大小以及相位。

【问题 2】请比较示波器的读数和锁相放大器的 $R$ 值,以理解 $R$ 值的确切含义。

- 5) 按下前面板 DISPLAY 按键进入子菜单可以挑选实时显示 $R$ 、 $\theta$ 、 $X$ 、 $Y$ 值。

【问题 3】测量数据反映出 $R$ 、 $X$ 、 $Y$ 及 $\theta$ 的之间是什么关系?是否与式(D1-21)、式(D1-24)和(D1-25)符合?

【问题 4】你使用的 OE1022 是双锁相放大器吗?为什么?

## 1.3 相敏检波器工作原理——乘法器

当低通滤波器工作在宽带宽下时,锁相放大器的输出即使反映乘法器的输出。我们通过比较该输出与式(D1-27),加深对相敏检波器工作原理的认识。

以测量一个幅值约为 50mVrms、频率约为 1kHz 的正弦波信号为例输入 OE1022 锁相放大器,将滤波器带宽调至最大(TC=10 $\mu$ s、Slope=6dB/oct),锁相放大器输出可等效于乘法器输出;将锁相放大器模拟输出(Fast channel out)连接到示波器的输入进行观察。注意信号是否超量程,调节信号幅值或量程灵敏度(sensitivity)使之在合适量程以内(本例中,量程灵敏度设置为 100mV 至 1V 之间)。

【问题 5】示波器上看到什么波形? $X$ 、 $Y$ 是正弦波吗?其相位差为多少度? $X$ 、 $Y$ 的平均值为零吗?平均值是否会随滤波器参数而改变?参照式(D1-19)和式(D1-23)讨论; $R$ 值波形是否呈现全波整流的正弦信号,其频率为多少?与 $X$ 或 $Y$ 的频率存在什么关系?请对比式(D1-27)讨论此波形。

## 1.4 相敏检波器工作原理——乘法器+低通滤波器

目的:认识被调制信号的解调过程,了解低通滤波器的作用。

设置滤波器时间常数和陡降(如表 D1-2 所示),通过示波器同时分别观察和记录锁相放大器的输入信号波形、乘法器输出(CHANNEL OUTPUT)的 $R$ 、 $X$ 、 $Y$ 波形,以及/或锁相放大



器的 $R$ 、 $X$ 、 $Y$ 读数；（提示：①对多通道示波器，两个或三个波形可叠加在一起看；②对不同的滤波器参数，应合理选择量程灵敏度）。截图或拍照记录波形。

【问题 6】当调大时间常数后，输出 $R$ 是否越来越稳定？直流分量（信号平均值）是否有改变？

【问题 7】观察示波器波形，并给出在某一陡降值下，时间常数为多少个信号周期时，才能观察到稳定的直流输出？提示：注意调节示波器 $Y$ 轴量程以提高测量振幅变化的精度。并结合式(D1-32)讨论。

表 D1- 2 低通滤波器配合乘法器解调过程探究记录

陡降 (dB/oct)	时间常数	$R$ 波形	$X$ 波形	$Y$ 波形
6	10 $\mu$ s			
	100 $\mu$ s			
	1ms			
	10ms			
	100ms			
	1s			

总结所观察到的现象，描述滤波器的工作过程。

选择并保持某个时间常数（小于输入信号周期），改变滤波器陡降（6dB/oct、12dB/oct、18dB/oct、24dB/oct），观察并记录示波器波形的变化。

【问题 8】为何在 1 阶（6dB/oct）时还没怎么起滤波效果，而到 4 阶（24dB/oct）时，则可看见明显的效果？

### 1.5 （选）相敏检波器工作原理——低通滤波器参数与传递函数

保持待测信号幅值不变，改变参考信号与待测信号间的频率差（ $\Delta\omega = 2\pi(f - f_0)$ ），观察锁相放大器输出信号的变化，可等效重建低通滤波器的传递函数。

用函数发生器产生一频率为 $f_0$ 的信号输入锁相放大器，用锁相放大器内部参考信号或函数发生器另一输出通道信号作为外部参考信号（频率为 $f_0$ ），设置锁相放大器合适的时间常数和陡降（如 TC=100ms, slope=18dB/oct），使锁相放大器输出为稳定的直流信号 $R$ （有效值）。在 $f_0$ 附近改变频率，测量锁相放大器输出 $R$ 值，得到 $R(\omega)$ 关系，其中 $\omega = 2\pi f$ 。作图 $\ln R \sim \ln \omega$ 。

【问题 9】 $R(\omega)$ 关系是否满足式(D1-32)？从而所测滤波器是否 RC 滤波器？

【提醒】如果要将示波器读数与锁相放大器读数比较，示波器的输入设置应该是 DC 还是 AC？

### 1.6 滤波器带宽对输出信号响应的影响

从上一实验内容可知，只有选择适当的、或足够长的时间常数，锁相放大才能有稳定的输出，且时间常数越大输出越稳定。那么，是否时间常数越长越好呢？

假设一种特殊的情况，待测信号幅值从 $V_1$ 瞬间变化到 $V_2$ （阶跃函数），那么，在不同的时间常数、陡降下，锁相放大器的输出信号是怎么从 $R_1$ 变化到 $R_2$ 的呢？

制定方案，观测输出信号变化 $R(t)$ 对输入信号变化（ $\Delta V = V_2 - V_1$ ）的响应：1）在某一陡降、不同时间常数下；2）在某一时间常数、不同的陡降下。

**提示：**应该如何选择量程灵敏度，使信号 $V_1$ 和 $V_2$ 在锁相放大器的量程内？

- 1) 在 OE1022 的 Gain/TC 菜单中，选择不同的时间常数和陡降（组合），
- 2) 改变 SINE OUT 信号幅度的设置，如从 0.1Vrms 至 0.6Vrms；
- 3) 观察在输入信号突变时（按下 ENTER 键后），输出信号 $R$ 对输入信号变化( $\Delta V=0.5V$ )的响应（随时间的变化）。

**【问题 10】** $R(t)$ 与时间常数和陡降有何关系？

用“START CONT”激活 chart 图以观察改变前后的曲线来确定其输出响应；也可以用 CH1 输出连接示波器：采用 fast 模式输出 $R$ 至示波器，并记录图形。

实验内容 1.3 至错误!未找到引用源。的目的是：学会选择合适的时间常数和陡降值，使得在实际测量时，既可以获得可靠的幅值（ $R$ ）输出，同时又有足够快的响应能力以捕捉 $R(t)$ 的变化。具体到自动测量时，它是选择合适的采样间隔的依据。

（选）需要缩短响应时间的可使用卡尔曼滤波器（参考文献 11. ）。。

### 1.7 外部输入参考信号（选）

用信号发生器产生正弦信号作为外部参考信号（峰值要求在 200mV 以上），并用三通将信号用 BNC 线分别接入 REF IN, 和 signal in 的 A/I, 在锁相放大器参数设置 Ref.source->external, 选择 Sine; 重复用内部参考信号做实验的操作（自己设计方案：测什么、测量参数的范围、测量点数、是否截图等）。

如果信号发生器输出电压较低，也可用 BNC 线连接信号发生器的 Sync 输出到锁相放大器的 REF IN, 并在 Ref.source->external 中选择 TTL, 以完成外部参考信号设置。

**【问题 11】**用内部参考信号效果好还是外部参考信号效果好？所检测的相位差与频率有何关系？与数学推导的结果比较。

### 1.8 强噪声背景下的弱信号检测

强噪声背景检测弱信号是本平台最基本的实验，其目的是进一步展示锁相放大技术的基本原理和抑噪能力，要求学生掌握提取深埋于强噪声中的微弱信号的锁相放大技术，结合实际操作，增强动手能力。本实验要求使用幅值为 $\mu V$ 级别的正弦波信号模拟待测信号，与白噪声混合，生成信噪比低至-80dB 合成电压，白噪声可用信号发生器产生、加法合成。亦可用教学实验箱合成。

教学实验箱自带 100mVrms 的白噪声发生器，其原理是利用双极性晶体管散粒噪声的功率特性来产生白噪声<sup>[6]</sup>；通过拨码器选择可以得到 100mVrms、10mVrms、1.0mVrms 的白噪声信号。由锁相放大器 OE1022 的 SINE OUT 以及外部的 80dB（10000 倍）信号衰减器，可以得到 100nVrms 到 5Vrms 的正弦信号。通过运放把信号与噪声相加得到不同信噪比的待测信号，然后由锁相放大器对此信号进行提取测量（原理图如图 D1-9 所示）。

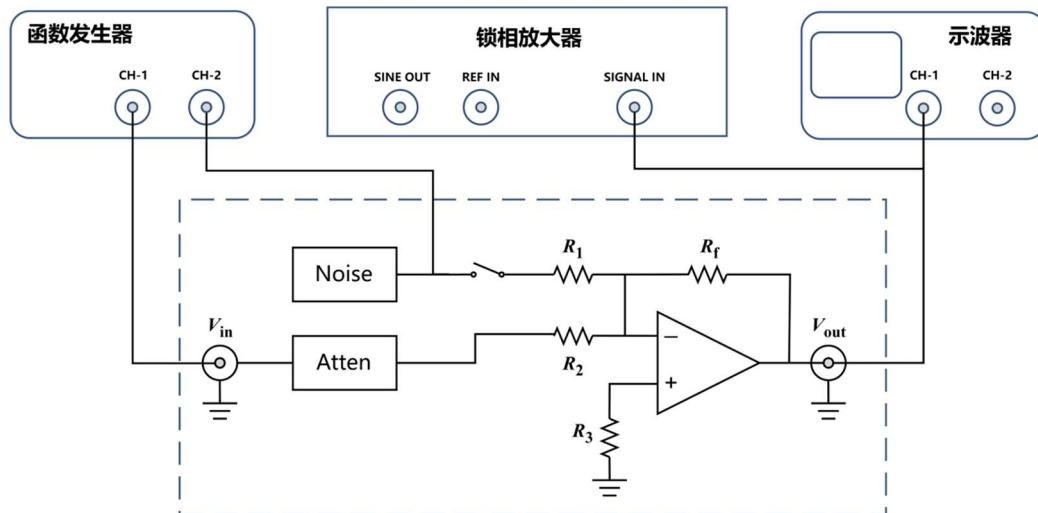


图 D1-9 强噪声背景检测弱信号实验原理图

### 信噪比评价

用示波器分别测量信号发生器输出的信号有效值 $V_{S,RMS}$ 和噪声有效值 $V_{N,RMS}$ ，计算输入信噪比 $SNR_i(dB) = 20lg(V_{S,RMS}/V_{N,RMS})$ ；选择锁相放大器时间常数和陡降，经锁相放大器输出可以用  $R/N$  计算输出信噪比 $SNR_o(dB) = 20lg(R/N)$ ；然后用式(D1-10)计算  $SNIR$ 。讨论低通滤波器带宽与  $SNIR$  的关系；带宽计算见表 D1-5。

### 实验步骤：

1. 用示波器观察教学实验箱噪声发生器输出的噪声是否白噪声？记录时域和频域图谱来说明。
2. 比较 OE1022 与示波器对不同信号强度和信噪比的测量结果，自己设计
  - (1) 用非市电倍频的频率（如 986Hz），幅值自定的正弦波信号与噪声信号叠加；
  - (2) 调节锁相放大器的量程灵敏度和 LPF 带宽，获得至少两们稳定数字的读数（3 位有效数字），记录的  $R$  值和对应的锁相放大器参数；
  - (3) 同时在示波器中通过“Math”选带通滤波器，设置信号频段（通带频率范围），并在滤波后的信号中读取有效值；截录滤波前后的波形图，分别记录所测信号值以及波形图。
  - (4) 改变 OE1022 产生正弦波有效值，在不同信噪比下重复上述测量；仅要求测量 3 种信噪比的情况，其中必须包括信噪比为-60dB 的情况。
  - (5) 观察滤波效果，分析实验结果。

【问题 12】如何获得幅值为 0.1mVrms 的正弦波输入信号？

【问题 13】对低信噪比信号或非周期噪声测量，能否用示波器的“auto”键？若通过手动调节，示波器屏宽（时间轴范围）应为多少个信号周期为宜？

【问题 14】在用示波器观察、测量信号有效值时，请注意屏幕时间轴范围应达到待观测信号完整周期的整数倍；为什么？

【问题 15】用锁相放大器测量  $R$  值时，读数应保留几位有效数字？调节锁相放大器的什么参数设置可以得到？调节锁相放大器的什么参数可以获得稳定的读数。

表 D1-3 强噪声背景检测弱信号实验记录（参考）

记录人：

日期：

仪器	输入信号信噪比	(dB)	0	-30	-80
示波器	正弦波 $V_{in}$ 幅值	(mVrms)			
	噪声信号大小	(mVrms)			
	$SNR_i$	(dB)			
	待测信号 $V_{in}$ 波形图	(照片)			
	滤波器带宽	(Hz)			
	滤波后信号有效值	(mVrms)			
	$SNR_{o,os}$	(dB)			
锁相放大器	量程灵敏度	(mV)			
	时间常数	(ms)			
	陡降	dB/oct			
	LPF 带宽	(Hz)			
	信号有效值 $R$	(mVrms)			
	噪声测量值 $N$	(mVrms)			
	$SNR_{o,lo}$	(dB)			

### 【现场预习报告思考题】

1. 如何用锁相放大器检测到待测的直流信号或慢变信号（图 D1-7 中的  $v(t)$ ）？
2. 噪声有哪些类型？一般测量对象本身的噪声是哪来的？它有什么特征？
3. 是否可以用 RIGOL DG4162 信号发生器产生白噪声取代教学实验箱产生的白噪声？如何将它与信号混合？
4. 复习用示波器测量信号的实验步骤，学习用数字示波器中的带通滤波器过滤噪声的操作。

### 【实验报告思考题】

1. 描述用教学实验箱配制不同信噪比信号的原理；实验箱生成的噪声是否为白噪声？
2. 随着信噪比的改变，信号  $R$  和相位差  $\theta$  的测量值会有什么影响？
3. 所有的噪声都可以用锁相放大器消除吗？锁相放大器的理论检测极限是多少？受什么限制？
4. 请比较锁相放大器与示波器（经过带通滤波后）测量不同信噪比信号的结果，分析两种测量仪器（方法）的优势与劣势。选择锁相放大器窄带宽的 LPF 可以降低式(D1-33)中的  $n_{\omega_r}$ ，从而提高测量值的信噪比吗？信噪比的提高与 LPF 带宽有何关系？参考式(D1-10)讨论。

### 【参考文献】

1. 高晋占. 微弱信号检测[M]. 北京：清华大学出版社, 2004 : 2.
2. 孙志斌, 陈佳圭, 锁相放大器的新进展[J]. 物理, 2006, 35(10): 879-884.
3. 郭忠凯, 李永刚, 于博丞等, 锁相放大器的研究进展[J]. 物理学报, 2023, 72(22): 224206-1-19. DOI: 10.7498/aps.72.20230579. 更正: 锁相放大器的研究进展[J]. 物理学报 2023, 72(24): 249901-1.
4. Principles of lock-in detection and the state of the art [M]. Zurich Instrument, 2016.
5. Bryan Lizon, Texas Instruments. Resolving the Signal: Introduction to Noise in Delta-Sigma ADCs[EB/OL]. <https://www.allaboutcircuits.com/industry-articles/resolving-the-signal-introduction-to-noise-in-delta-sigma-adcs/>
6. D. A. Van Baak, George Herold. Response of a lock-in amplifier to noise[J]. Am. J. Phys. , 2014, 82 (8): 785-797.
7. 陈泽宁等. 数字锁相放大器中相敏检测技术的基本原理实验[J]. 物理实验, 2018, 38(1): 22-28.
8. 王自鑫等. 基于数字锁相放大技术的强噪声背景下检测微弱信号教学实验[J]. 物理实验, 2016, 36(03): 1-4.
9. 徐正红, 赵战略. 限带白噪声发生器的研制[J]. 仪表技术与传感器, 2001, (01): 15-16.
10. OE1022 用户使用手册, [SSI-下载 \(ssi-instrument.com\)](http://ssi-instrument.com).
11. 李勇, 刘泽等. 数字锁相解调器的优化设计[J]. 北京航空航天大学学报, 2019, 45(2): 299-308.

## 2 【实验 2】电阻热噪声及玻尔兹曼常量测量

### 【实验目的】

1. 通过实验了解热噪声的特征，理解热噪声的本质及其统计特征；
2. 测出玻尔兹曼常量；
3. 学习 VISA 接口协议，通过 LabVIEW 设置锁相放大器参数和进行数据采集。

### 【仪器用具】

表 D1-4 热噪声测（玻尔兹曼常量）量仪器用具

编号	仪器用具名称	数量	主要参数（型号，规格等）	备注
1	锁相放大器	1	OE1022	
2	示波器	1	RIGOL DS2202A	
3	数字多用表	1	RIGOL DM3058E、	
4	测温仪	1	MS6514	
5	PC 机	1	LabVIEW 环境及有 VISA 接口协议	
6	可变温样品盒 (带 BNC 接头)	1	6.6k $\Omega$ 、13k $\Omega$ 、41k $\Omega$ 、66k $\Omega$ 、 98k $\Omega$ 、144k $\Omega$	选其一

### 2.1 电阻热噪声

对一个经典的系统，微观粒子都在做无规的热运动，其系统宏观性质由微观粒子的统计结果决定。一方面，粒子数变少的时候，其相对涨落增大，另一方面，当温度升高时，涨落也增大。当粒子数不至于太少时，涨落服从高斯分布，称之为热涨落；当粒子数太少时，涨落服从泊松分布。当微观粒子带电时（如金属中的电子），其热涨落产生噪声电流，噪声电流通过电阻则产生噪声电压，这一现象被 Johnson 观察到，因而被称为 Johnson 噪声或电阻热噪声。为此，在考察电子器件上的实际噪声时，无论是否上电，电子器件都会对外呈现出热噪声特性。热噪声是随机噪声，任意两个噪声信号是独立无关的；热噪声也称白噪声，其在时域和频域的表达分别如图 D1- 3(a)和(b)所示。下面从物理图像对电阻热噪声表达式做一非严格的推导。

电阻器与环境不断交换能量，当达到热平衡时，其从环境接收的能量等于向环境发射的能量。设能量交换以热辐射方式进行，则在长波极限下，即实验室可达温度（4~300K）和电磁测量频段（ $10^2 \sim 10^6 \text{Hz}$ ）下， $\hbar\omega \ll k_B T$ ，温度为 $T$ 的电阻器向环境的普朗克辐射退化为经典辐射：

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \cong k_B T \quad (\text{D1- 34})$$

式中,  $k_B=1.38\times 10^{-23}\text{J/K}$ , 为玻尔兹曼常量。同理, 电阻器从温度为  $T_e$  的环境吸收的辐射为  $k_B T_e$ , 与电磁波的频率无关。热平衡时  $T = T_e$ 。

将此辐射电磁波能量交换的图像简化为一维的电磁波的发射和接收, 以两个相互串联的电阻等效作等效描述 (如图 D1-10 所示),  $R$  为研究对象电阻,  $R_e$  为等效为环境的电阻, 则电阻器向环境辐射的平均功率等于从  $R$  输出并损耗在  $R_e$  上的噪声电功率:

$$\overline{I_N^2}(R)R_e = \left( \frac{v_N(R)}{R + R_e} \right)^2 R_e \quad (\text{D1-35})$$

其中,  $v_N(R)$  为电阻器输出 (随机电压) 的噪声强度。注意环境的噪声电压  $v_N(R_e)$  与  $v_N(R)$  独立, 不能迭加。同理从环境吸收的辐射平均功率为  $\left( \frac{v_N(R_e)}{R + R_e} \right)^2 R$ 。

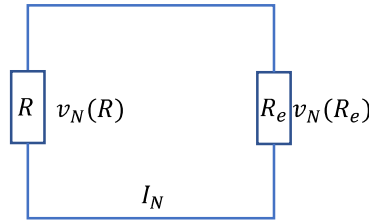


图 D1-10 电阻器与环境热交换等效电路图; 热平衡时,  $R_e = R$ 。

热平衡下,  $R_e \overline{v_N^2}(R) = R \overline{v_N^2}(R_e)$ ,  $R_e = R$ 。此时电阻器向环境辐射频率为  $f$ 、带宽为  $\Delta f$  的电磁波平均功率与从环境吸收相同频段的电磁波平均功率相等。从式 (D1-35) 得带宽  $\Delta f$  内噪声电压的时间方均值为:

$$\overline{v_N^2}(f) = 4Rk_B T \Delta f \quad (\text{D1-36})$$

定义与带宽无关的噪声的功率谱密度  $S_T(f) = \overline{v_N^2}(f)/\Delta f$ , 得其与电阻值、玻尔兹曼常量和热力学温度成正比:

$$S_T(f) = 4Rk_B T \quad (\text{D1-37})$$

## 2.2 测量原理

### 噪声测量时域表述

锁相放大器可方便测量同频噪声。但测量是在时域、按时间顺序进行, 方均根值的  $\overline{v_N^2}$  需要经过多次测量后算出。设每次在等间隔的时间点上读取一个信号  $v(t_i) = s(t_i) + n(t_i)$  (参考式 (D1-15) 和式 (D1-16)),  $s(t_i)$  为  $t_i$  时刻频率为  $f$  的信号,  $n(t_i)$  为  $t_i$  时刻的噪声, 经与信号同频率  $f$  的参考信号相敏检波后, 输出  $X$  分量<sup>[3]</sup>  $X_f(t_i) = s_x(t_i) + n_{fx}(t_i)$  (式 (D1-32)), 是包含同频噪声的信号。定义噪声强度  $X$  分量测量值:

$$v_{Nx}(f) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (X_f(t_i) - \bar{X}_f)^2}{M}} \quad (\text{D1-38})$$



其中,  $\bar{X}_j = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_j$  为输入信号的平均值,  $M$  为用于计算输入噪声值的样本数。

显然式(D1-38)表达了噪声电压有效值。当式(D1-15)中的信号  $s(t)$  为常数时<sup>3</sup>, 或  $s(t_i)$  恒定不变时且样本量  $M$  足够大 (即其平均值  $\bar{X}_f(t_i)$  可视为常数值) 时, 则式(D1-38)可写为:

$$v_{Nx}(f) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (n_{fx}(t_i))^2}{M}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\sum_{k=1}^m n_{fx_k}(t_i))^2}{M}} \quad (\text{D1-39})$$

即对  $m$  种类型或来源的噪声 (见式(D1-4)), 如果不同噪声之间存在相关性, 式(D1-39)  $\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^m n_{f_k}(t_i) n_{f_j}(t_i) \neq 0 (k \neq j)$ , 分离不同种类的噪声是困难的, 除非在输入端作物理隔离。对不相干的噪声源  $n_{f_k}(t_i)$ , (仪器的热噪声与研究对象的热噪声不相干), 式(D1-39)写为:

$$v_{Nx}(f) = \sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{\sum_{i=1}^M (n_{fx_k}(t_i))^2}{M}} \quad (\text{D1-40})$$

式(D1-40)给出了不同类型非相干噪声的迭加原理。对随机噪声,  $X$  与  $Y$  独立等价, 从式(D1-36)得热噪声的平均功率, 即输入噪声功率为  $X$  或  $Y$  分量测量功率的 2 倍:

$$\overline{v_N^2} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [n_{xT}^2(j) + n_{yT}^2(j)] = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^M n_{xT}^2(j) \quad (\text{D1-41})$$

下标  $T$  标记热噪声, 当测量次数 (样本量  $M$ ) 趋于无穷大时, 随机噪声的平均值  $\bar{n}_T = 0$ , 且式(D1-41)最右边的等式成立。有意思的是, 此时经过相敏检波后的信号的标准差  $\sigma_f$  即为同频噪声强度  $\sqrt{\overline{v_N^2}}$ 。这意味着应该通过方均根、而非算术平均来减少噪声强度的测量误差。

### 本底噪声及扣除

与所有电子仪器一样, 锁相放大器具有自身本底噪声 ( $n_B$ ), 主要来自于热噪声、温漂噪声、模数转换噪声等非相干噪声。而测量电阻  $R$  的噪声 ( $n_R$ ) 是待测热噪声 ( $n_T$ ) 与本底噪声的叠加。根据随机噪声叠加原理式(D1-40)得:

$$n_{Rx}^2(\omega) = n_{Tx}^2(\omega) + n_{Bx}^2(\omega) \quad (\text{D1-42})$$

可扣除仪器的本底噪声, 前提是测量本底噪声时与测量噪声时的条件、以及所选的锁相放大器参数相同。计及锁相放大器输入带宽修正的噪声强度:

$$n_{Tx}^2 = n_{Rx}^2 [1 + (\omega R_{in} C_{in})^2] - n_{Bx}^2 \quad (\text{D1-43})$$

其中,  $R_{in}$  和  $C_{in}$  分别为锁相放大器的输入端的等效电阻和等效电容。

<sup>3</sup> 对非恒定的输入信号, 噪声是与信号  $s(t)$  幅值相关的, 当输入信号与参考信号不严格同频时 ( $\Delta\omega \approx 0$ ), 锁相放大器会视输入信号与参考信号同频, 但相位差 ( $\theta + \Delta\omega t$ ) 随时间变化, 即使  $R$  值恒定,  $X$  也随时间变化; 由于采样数量  $M$  有限, 而相位变化周期 ( $2\pi/\Delta\omega$ ) 很长, 从式(D1-38)可知, 此时的噪声值  $N$  也随  $X$  同步变化。



【问题 1】：为什么本底噪声不必做输入带宽修正？

锁相放大器的同频噪声不能被滤掉，而该同频噪声可能包含来自非随机的环境噪声 $n_{ex}$ ，即实际测量的本底信号 $n_{Bx}^*$ 和噪声信号 $n_{Rx}^*$ 分别为： $n_{Bx}^* = n_{Bx} + n_{ex}$ 和 $n_{Rx}^* = n_{Rx} + n_{ex}$ 。若 $n_{ex}$ 平均值不随时间变化，从式(D1-39)知它不影响噪声 $N$ 的测量；若 $n_{ex}$ 平均值随时间变化而 $n_{Bx}^*$ 和 $n_{Rx}^*$ 又不能同时测量，则无法通过式(D1-42)扣除 $n_{ex}$ 。本实验在下班时段采取远程测量方法以降低 $n_{ex}$ 的影响。

测量锁相放大器本底噪声影响的方法是：对 A-B 输入，本底噪声测量有两种方式：（1）用两个 50Ω电阻（如图 D1- 11 所示）分别短接 A 和 B 输入端；（2）A、B 电缆短接。考虑到后一种方式是带同轴电缆测量的，它比前一种方式更内容引入环境噪声，但更接近实际测量装置的情况。

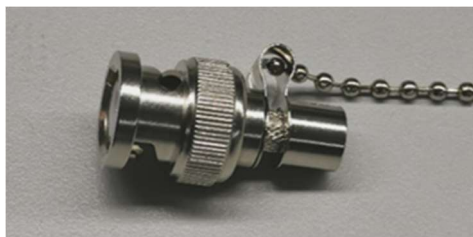


图 D1- 11 50Ω短接电阻

### 等效噪声带宽

实际滤波器带宽做不到理想的矩形（宽度为 $\Delta f_{LPF}$ ），那么，从式(D1-36)我们用谱线所包围的功率面积等于矩形面积来定义等效总噪声宽度（ $\Delta f_{LPF}$ ），等效噪声带宽  $ENBW = \Delta f_{LPF}/2$ 值详见表 D1- 5 所示，其推导详见参考文献<sup>[7]</sup>《锁相放大器噪声测量原理与教学实验设计》。

将随机变化的噪声看作幅值随机的阶跃输入信号，则窄带滤波器使输出信号延迟。定义输出信号达到阶跃的 99%视为反映输入噪声幅值，其延迟等待时间也列于表 D1- 5 中。 $X$ 稳定需要的等待时间为 $t_X$ 。

表 D1- 5 单分量等效噪声带宽（ENBW）与陡降和时间常数 $\tau$ 的对应关系

阶数 (n)	Slope (dB/oct)	ENBW (1/ $\tau$ )	X 测量等待时间 $t_X$ ( $\tau$ )
1	6	1/4	4.6
2	12	1/8	6.6
3	18	3/32	8.4
4	24	5/64	10

噪声强度 $v_N$ 表达式：

$$n_{Tx} = \sqrt{v_{Nx}^2} = \sqrt{4k_B T R \frac{1}{2} \Delta f_{LPF}} \quad (D1-44)$$

$v_N$ 测量值与仪器带宽有关，故用与仪器参数无关的噪声谱密度描述噪声性质应：

$$v_{Nx}/\sqrt{\text{ENBW}} = \sqrt{4k_B T R} \quad (\text{D1-45})$$

单位为伏特 $\sqrt{\text{秒}}$  ( $\text{Vs}^{1/2}$ )。作为参考,  $1.0\text{k}\Omega$  金属电阻在室温 ( $300\text{K}$ ) 下噪声谱密度为:

$$\sqrt{4 \times 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K} \times 300\text{K} \times 1000\Omega} = 4.07 \text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

实际测量  $S_T(f)$  时, 锁相放大器采样次数不可能无限大, 热噪声测量值的比值标准差与样本量的关系约为  $2/\sqrt{M}$ 。OE1022 锁相放大器用式 (D1-45) 计算噪声电压谱密度 ( $N$  值) 的样本量为 1024 个。受限于低通滤波器, 所测得的邻近两个  $N$  值不一定是独立无关的, 从而电压数据也未必服从正则分析<sup>[9]</sup>。因此, 建议实验时直接记录  $X$  或  $Y$ , 再通过式 (D1-41) 左边等式计算噪声强度和噪声谱密度更为清晰可靠。

### 2.3 变温测试样品盒

对变温测量, 要用到变温测试样品盒。为尽量抑制环境噪声的影响, 测量选用差分 (A-B) 输入 (如图 D1-12(a) 所示), 电缆 BNC 接头分别连接在锁相放大器的 A 和 B 端。相应地, 样品盒采用 3 个  $1/8\text{W}$  的阻值为  $R$  的色环电阻, 以“三角”对称连接方式解决因锁相放大器输入电阻所带来的输入带宽变窄的问题, 其等效电阻为  $2/3R$ ; 影响输入带宽的  $R_{in}$  约为  $2/3R$ ,  $C_{in}$  约为电缆电容 (室温下约为  $96\text{pF/m}$ )、锁相放大器输入电容 ( $25\text{pF}$ ), 与包括连接器和样品盒在内的电容并联后值的一半 (约  $68\text{pF}$ )。低温测量时, 将样品盒插入盛有液氮的容器内, 通过调节插入深度来调节电阻段的温度, 并通过 MS6514 测温仪测量热电偶 (T 型) 的读数。

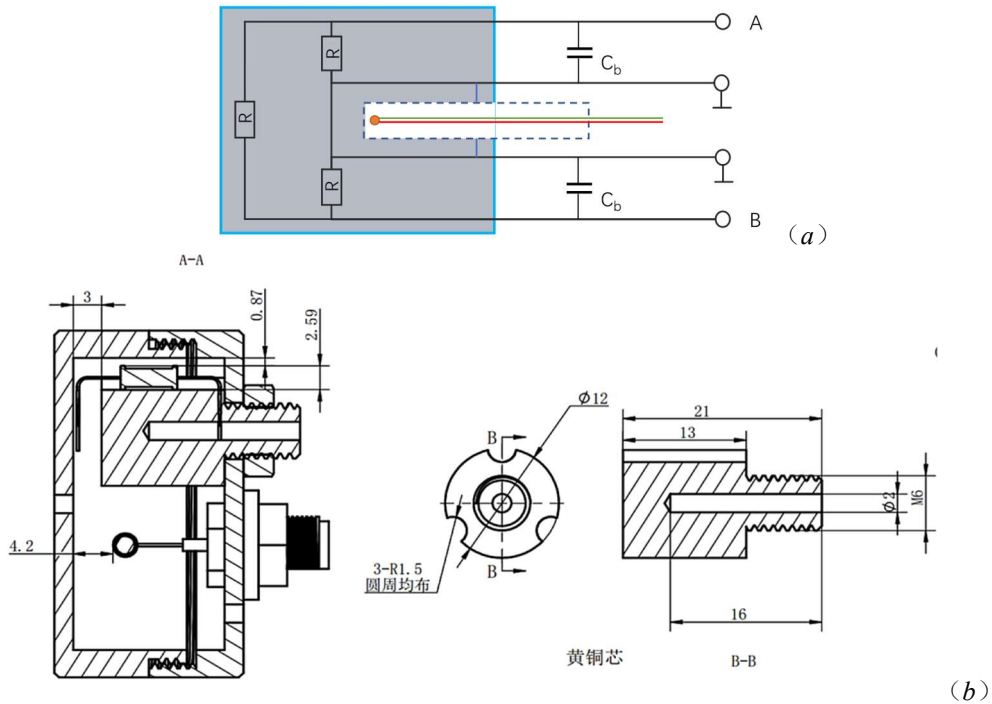


图 D1-12 电阻热噪声测量变温测试样品盒。(a) 双 BNC 接头杆电路, 虚线表示对热电偶 (T 型) 进行屏蔽, 灰色为金属屏蔽壳; (b) 结构工程图。

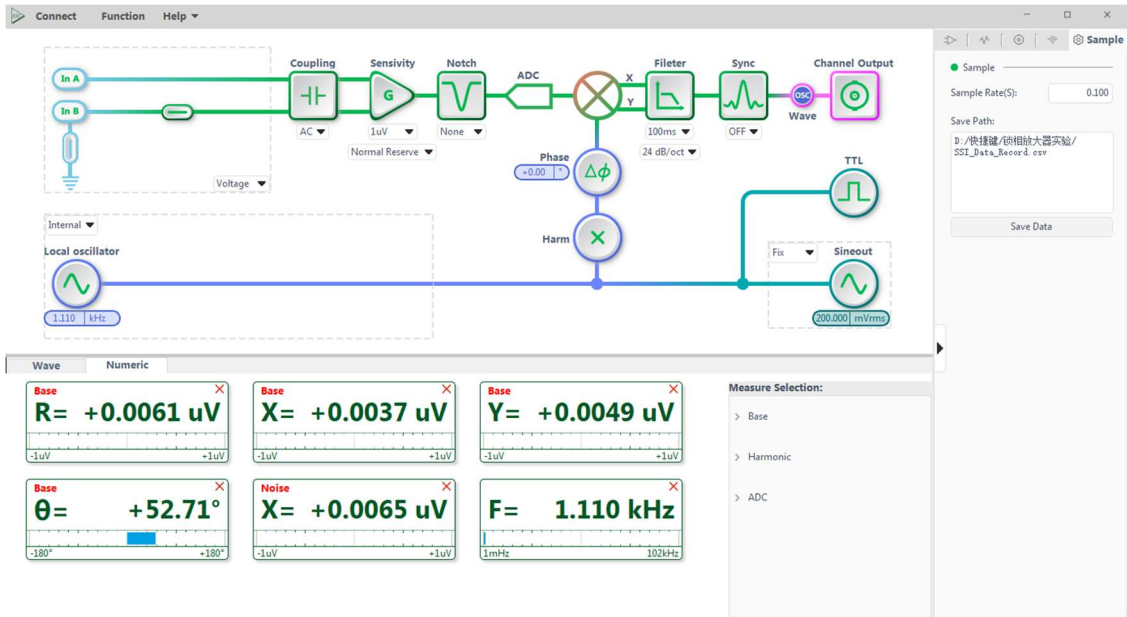
## 2.4 数据采集与处理

### 参数选择

在本实验测量中，不同的参数对应于锁相放大器不同工作环节对本底噪声的贡献大小，正确选择锁相放大器参数可降低仪器的本底噪声，从而对精确测量热噪声十分重要。电阻的热噪声是我们的研究对象，因而它是“信号”，而来自于锁相放大器前级（输入、模拟放大器）的噪声则不是我们所要的“信号”，此外，放大后的模数转换也会产生噪声，为减少这部分的噪声的贡献，应尽量提高前置放大器的增益，OE1022 锁相放大器在  $1\mu\text{V}$  以下满量程灵敏度的模数转换噪声一样，因此，满量程灵敏度应选为  $1\mu\text{V}$ ；另一方面，热噪声幅值小，动态储备应选“Low Noise”。由于测量装置不可能完全屏蔽环境干扰，选择太大的带宽容易引入近频的环境噪声，因此建议  $\text{Slope} > 12\text{dB/oct}$ 。

为保证所采集的每个数据是独立的并且不失真，应选择合适的采样的时间间隔。例如：当选时间常数  $\tau$  为  $30\text{ms}$ 、 $\text{Slope}$  为  $18\text{dB/oct}$  时， $\text{ENBW}$  为  $3/32\text{ Hz}$ ， $X$  值的测量等待时间或时间间隔约为  $8.4\tau$ （即  $\sim 250\text{ms}$ ，见表 D1- 5）， $X$ 、 $Y$  值同时采样  $10^3$  个需要时间约为 4.5 分钟。

OE1022的LabVIEW采集程序界面如图D1- 13所示。



图D1- 13 OE1022数字锁相放大器控制平台界面（新版）

将上位PC机与锁相放大器相连，利用OE1022专用的LabVIEW上位机采集程序对锁相放大器测量结果进行采样，采集当前锁相放大器测到的 $X$ 值和 $Y$ 值。采样间隔和保存路径在界面右上角“sample”选项卡中设置；锁相放大器参数在界面上方原理图内相关图标下的选单中设置。

**【提醒】** 要用万用表测量在测温度下的电阻值，用于输入电阻计算和玻尔兹曼常量计算。

**【思考题】**

- 1 样品盒及传输电缆是否会对本底有贡献？用实验现象回答：处于不同环境（如人的触碰、

或插入液氮瓶后) 是否对测量产生影响?

2. 采样时间间隔 $\Delta t$ 约为多少个时间常数时,  $X$ 任意相邻采样读数 $X(t)$ 与 $X(t + \Delta t)$ 可视为独立无关的? 如何验证? 如想缩短测量时间并要求采样读数保持随机噪声特性, 选择时间常数为多长合适?

## 2.5 实验指引

### 实验方案准备 (场外)

设计通过电阻热噪声谱密度测量玻尔兹曼常量 $k_B$ 的实验方案:

1. 目的: 通过测量电阻热噪声精密测量玻尔兹曼常量 $k_B$ ;
2. 原理: 热噪声的统计特性、输入带宽修正、仪器本底扣除、以及如何算出 $k_B$ ;
3. 分析影响 $k_B$ 测量精度的因素: 通过噪声谱密度反算**玻尔兹曼常量**的公式, 分别就温度、电阻、电阻噪声谱密度、和本底噪声谱密度测量的不确定性对所测 $k_B$ 不确定度的贡献做误差传递分析(参考文献<sup>[9]</sup>), 哪个因素影响最大?
4. 选择电阻(测量样品盒), 选择测量温度点, 给出达到设计温度的方案;
5. (选) 如何与同班组的同学分配频率点;
6. 选择合适的仪器参数(动态储备、量程灵敏度等, 请给出具体数值), 确定时间常数、陡降、采样频率和测量时间;
7. (选) 在测量所选参量前或后, 是否需要对锁相放大器进行校正? 如何校正?
8. 如何辨别在某频率下测量到的噪声是电阻本身的热噪声还是带有环境噪声?
9. 写出实验步骤, 包括**制定数据(含数据文件)记录表格, 包括电子数据文件命名**;

### 实验准备 (现场)

接线前和测量后请用万用表测量样品电阻, 以确认所在温度下其电阻值与标记的一致, 并用于数据处理。

在实验室先将线路接好; 分别打开所用锁相放大器的 LabVIEW 测量界面, 以及 MS6514 测温仪测量界面, 确认都可正常测量。选择合适的仪器参数。注意热电偶选“T 型”。

通过调节样品盒离液氮液面距离, 使样品自然稳定到某温度。

### 远程测量

测量时间在下班以后, 建议在 19:00 至 24:00 之间, 通过远程桌面设置参数, 记录数据、重命名为自己的数据, 发回给自己。

### 数据处理

1. 如何说明所采数据 $X$ 或 $Y$ 是随机噪声? 如何判断 $X$ 的采样是独立的?(提示:  $X$ - $Y$ 数据相关性、 $X$ 或 $Y$ 数据自相关性, 数据是否正则分布, 简化卡方值。)
2. 提示数据处理流程: 计算噪声强度、电阻热噪声测量值的输入带宽修正、扣除本底噪声获得热噪声、噪声功率谱密度计算、玻尔兹曼常量计算, 误差分析。

- 共用 $X$ 和 $Y$ 数据处理得到的 $k_B$ 值求平均是否可以降低其随机误差？

### 实验报告

- 独立完成实验报告，要**标识**合作队员负责的部分，也可**引用**非合作队员的实验数据以支持该实验报告中的观点或结论；要求提供测量原始数据，包括机采数据及对应的仪器参数设置和采样时间间隔；并给出数据处理过程；
- 用数据（图）表示热噪声的独立随机性；给出对应简化卡方值；
- 对 A-B 差分输入做输入带宽修正，其等效输入电阻、电容怎么取？
- 经输入带宽修正后的噪声谱密度是否符合热噪声的频谱特征（与频率无关）？
- 能否通过噪声谱密度计算不同频率下的 $k_B$ 值及其算术平均值 $\bar{k}_B$ ？
- 结合测量数据完善误差分析，（提示：本底噪声与仪器和测量时段有关，输入带宽修正因子与电缆温度有关）；

### 【参考文献】

- 贾莲莲, 贺子芸, 曾迪昂, 王自鑫, 蔡志岗. 基于数字锁相放大器测量电阻热噪声[J]. 物理实验, 2018, 38(12):1-5.
- H. Nyquist, Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors, Phys.Rev., 32(1928)110.
- J-I Izpura, Revisiting the Classics to Recover the Physical Sense in Electrical Noise, J Modern Physics, 2(2011)457-462.
- John R. Taylor, (王中宇等译). 误差分析导论——物理测量中的不确定度, 高等教育出版社, 2005 年 11 月第一版 (图字: 01-2014-4799)
- <https://www.ssi-instrument.com/OE1022D.html>.
- ZHOU Z, HU P, ZHOU X, et al. Electromagnetic Shielding Performance Measurement for Braided-Shield Power Cables at Low Frequency Regimes[J]. Measurement Science Review. 2020, 20(5): 224-229.
- 何振辉. 锁相放大器噪声测量原理与教学实验设计[J]. 大学物理, 2022, 41(11):22-27.
- 申玉宽, 何振辉. 不同温度下电阻热噪声测量方案与电磁屏蔽的改进[J]. 大学物理实验, 2023,36(2):54-58. DOI: 10.16854/j.cnki.cn22-1228.2023.02.012.
- 李佳明, 申玉宽, 张浩毅, 王媛, 何振辉. 电阻热噪声测量玻尔兹曼常量的教学探索[J]. 物理实验, 2023,43(8):29-35.
- T. Kouh, U. Kemiktarak, O. Basarir, C. Lissandrello, K. L. Ekinci, Measuring Gaussian noise using a lock-in amplifier[J]. Am. J. Phys. 2014, 82 (8): 778–784. doi.org/10.1119/1.4873694.

### 3 【实验 3】趋肤效应实验

#### 【实验目的】

1. 了解用锁相放大器测量微小交流电阻及其变化的方法，熟悉锁相放大器参数的正确设置；
2. 理解相位的物理含义，掌握电压与电流之间相位差的测量方法，学习从具体器件上分离电阻、电感、电容；
3. 从实验中学习趋肤效应；
4. 学习通过 LabVIEW 界面设置锁相放大器参数和进行数据采集。

#### 【仪器用具】

表 D1-6 微小交流电阻测量仪器用具

编号	仪器用具名称	数量	主要参数（型号，规格等）	备注
1	锁相放大器	1	OE1022	
2	压控电流源	1	OE4201	
3	示波器	1	RIGOL DS2202A	（选）
4	数字多用表	1	RIGOL DM3058E	（选）
5	BNC-BNC 信号线	若干		
6	PC 机	1	LabVIEW 环境及有 VISA 接口协议	
7	取样电阻	1	1.0Ω（带散热片厚膜电阻）	
8	音频线绕制电阻	2	500mm 长的φ1.0 线、顺绕或折绕	（选）
9	实心线绕制电阻	2	100cm 长的φ1.8、φ2.5 双绞线、折绕线	

#### 【实验原理】

当电流通过导体时，在导体外空间产生电磁场，当通过导体的是交变电流时，导体外空间的电磁场也以相同的频率交替变化，根据电磁感应定律，则导体内会感应出电流阻止或屏蔽这一变化，从而减弱导体内部的电磁场，使电磁场和电流分布趋向于导体表面，此时导电横截面积减少、电阻增加；当电流变化频率越高，屏蔽效应越强，磁场穿透（及电流分布）区域越窄，从而电阻越高。这一现象称为**趋肤效应**，该穿透深度亦称趋肤深度<sup>[1]</sup>。

$$\delta(f) = \sqrt{2/\omega\mu\sigma} \quad (\text{D1-46})$$

式中， $\omega = 2\pi f$ 为角频率， $\mu$ 为导体磁导率（H/m）， $\sigma$ 为导体电导率（S/m）。

对圆柱形导体（如导线），采用极坐标热传导方程就弱趋肤效应和强趋肤应分别求解圆线电阻随频率的变化<sup>[2]</sup>。对弱趋肤效应（ $\delta \gg a$ ），



$$R(f) = R_0 \left( 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\sigma \omega \mu a^2}{4} \right)^2 \right) \quad (\text{D1-47})^4$$

式中,  $R_0 = R(f=0) = l/\pi a^2 \sigma$ ,  $a$  为圆导线半径,  $l$  为线长。对强趋肤效应 ( $\delta \ll a$ ),

$$R_s = \frac{R_0 a}{2\delta} = R_0 \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (\text{D1-48})$$

与参考文献 3 中公式 (13) 一致。对高频极限, 趋肤深度可通过电阻值算得:

$$\delta(f) = \frac{a R_0}{2 R_s} \quad (\text{D1-49})$$

式中,  $R_0$  为导线直流电阻 (对特定线径的导线, 可近似为低于某一特定频率以下的低频电阻),  $R_s$  为趋肤效应导致的电阻, 该电阻值应为按图 D1-14 等效电路对分布电容、电感分离后的纯电阻:

$$R_s = R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 R e^2 \omega^2 C^2 (1 - \omega^2 C L)^2}}{2 R e \omega^2 C^2} \quad (\text{D1-50})$$

式中,  $R e$  为交流阻抗测量值实部:

$$R e = \frac{R}{(1 - \omega^2 L C)^2 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{V_x}{i_0} \quad (\text{D1-51})$$

$$X e = \omega \frac{L(1 - \omega^2 L C)^2 - R^2 C}{(1 - \omega^2 L C)^2 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{V_y}{i_0} \quad (\text{D1-52})$$

其中,  $R$ 、 $C$ 、 $L$  为导体阻抗等效电路中的电阻、电容、电感 (见图 D1-12)。而分布电容、电感则通过分组寻优获得 (详见参考文献 3, 公式(17)以及文中图 6 的计算流程)。

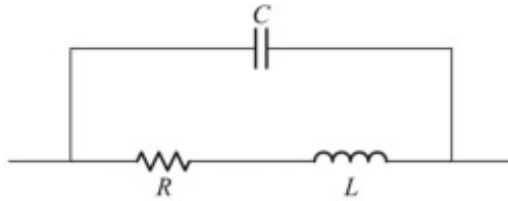


图 D1-14 导体阻抗等效电路

为降低从阻抗中分离电阻  $R$  的难度, 实验设计上应尽量降低  $C$  和  $L$ 。对于半径为 1mm, 长度为 1m 的圆铜导线, 其电阻小于  $0.01\Omega$ , 实测双绞线电容值  $C_{tw} < 50\text{pF}$ , 折绕线电容值  $C_{fw} < 5\text{pF}$ , 对 OE1022 最高频率 (102kHz), 则  $\omega^2 R^2 C_{tw}^2 < 1 \times 10^{-13}$ ,  $\omega^2 R^2 C_{fw}^2 < 1 \times 10^{-15}$ , 可以忽略。式(D1-52)简化为:

$$R = R e (1 - \omega^2 L C)^2 \quad (\text{D1-53})$$

$L$  可以通过线性拟合虚部与频率关系  $X e(f)$  的斜率获得。实测双绞线电感  $L_{tw} \leq 0.5\mu\text{H}$ , 折绕线电感  $L_{fw} \leq 1.0\mu\text{H}$ , 则式中  $(1 - \omega^2 L C)^2 \approx 1 - 1 \times 10^{-10}$ , 则进一步简化为:

$$R = R e \quad (\text{D1-54})$$

<sup>4</sup> 已将原公式的高斯单位制转换为国际单位制。

测量趋肤效应的本质是测量导体的交流电阻，需与待样品的电感和电容分离；进而获得该电阻随频率的变化关系。样品金属导线电阻阻值在 10 微欧量级，其随频率的变化量也在相当的量级；另一方面，导体电阻对温度变化敏感，因而需排除因频率变化带来的导体温度变化，施加电流最好小于 10mA。此时样品上的电压降很小，信噪比低，用锁相放大器测量可发挥其在极低信噪比中检出信号的能力。用锁相放大器提取交流阻抗的实部是实验的关键。

对微小电阻测量，以下因素应在实验设计中尽量消除：（1）引线阻抗（含电阻、分布电容和电感），（2）接触电阻，（3）测量仪器的内阻。

### 3.1 测量方法

两引线测量电阻时，不可避免地引入了引线电阻和接触电阻。当测量小电阻时，引线电阻和接触电阻对误差的贡献大，不能被忽略。为消除引线电阻、接触电阻，可采用四引线法测量电阻；因电压表的输入阻抗大（10MΩ量级），流过电压表测量引线的电流小，即接触电阻和引线电阻所造成的电压降小，可以忽略。对直流四引线法测量电阻：

$$R = \frac{V_+ - V_-}{2I} \quad (\text{D1-55})$$

其中， $V_+$ 为正向电流时测量到的电压降， $V_-$ 为反向电流时测量到的电压降， $V_T$ 为温差电势， $V_C$ 为接触电势。对于交流四引线法测量，电流方向本身就是正、反向变化的，接触电势与热电势被消除。然而，导线或电缆的电容、电感影响测量；如果降低测量频率，又会引入低频（ $1/f$ ）噪声；当该影响是稳定时，可以视为本底扣除。对于精密测量，引线自然越短越好。

如图 D1-15 所示连接样品到 OE4201 压控电流源和 OE1022D 双通道锁相放大器。为避免短路，A/I 输入模式应采用（A-B）差分输入（如图 D1-15 所示接线）。

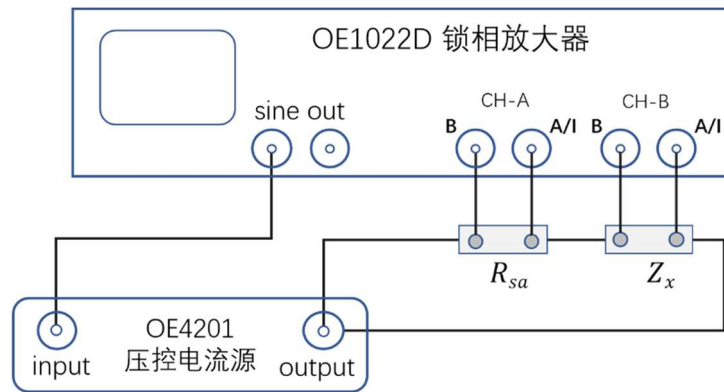


图 D1-15 双通道锁相放大器（OE1022D）测量小阻抗的原理图。（ $R_{sa}$ 为厚膜电阻）

电流源输出：

$$\tilde{I} = I_s e^{i(\omega t + \theta_I)} = \frac{V_A}{R_{sa}} e^{i(\omega t + \theta_I)} \quad (\text{D1-56})$$

其中， $V_A$ 为通道 A 测量的电压幅值。样品两端的电压为：

$$\tilde{V}_x = V_B e^{i(\omega t + \theta_V)} \quad (\text{D1-57})$$



其中,  $V_B$  为通道 B 测量的电压幅值,  $\theta_V$  和  $\theta_I$  分别是样品电压和电流的相位差; 从式(D1-56)和(D1-57)中计算出阻抗值:

$$\tilde{R} = \frac{V_B e^{i(\omega t + \theta_V)}}{I_S e^{i(\omega t + \theta_I)}} = \frac{V_B}{I_S} [\cos(\theta_V - \theta_I) + i \sin(\theta_V - \theta_I)] \quad (\text{D1-58})$$

式中的交流阻抗实部  $Re = (V_B/V_A)R_{sa} \cos(\theta_V - \theta_I)$  由(D1-51)给出。

**【思考题】** 能否用交流电桥测量趋肤效应?

### 3.2 实验对象

实验室提供用音频线和实心电线绕制样品(见【仪器用具】), 为降低电感值采用双绞线或空间折绕样品, 但实际样品仍有分布电感、电容, 式 D1-55 的分离只是近似。图 D1-14 描述的等效电路近似成立的条件是, 对应测量频率下的电磁波波长远大于样品尺寸, OE1022 锁相放大器提供的最高频率约为  $10^5 \text{ Hz}$ , 对应电磁波波长约  $3000 \text{ m}$ ; 而本实验提供样品尺寸为  $10^{-1} \sim 10^0 \text{ m}$ , 可满足要求。实验室提供的不同线径导线绕制的样品目的在于展示线径对相同频段的趋肤效应有不同抑制作用。参加实验的同学也可以用自制样品做实验。

### 3.3 实验指引

#### 实验方案(场外)

按设计型实验要求撰写实验方案。锁相放大器的优势是超强的信号提取能力, 相对于直流法, 其测量结果包含更多的信息, 如相位信息。预习使用 OE1022 锁相放大器 PC 界面设置仪器参数和自动采集实验数据; 选择或自制实验样品。

按以下指引设计微小电阻的测量方案:

1. 目的: 精确测量你所选择的样品的纯电阻, 并研究其与测量频率的关系是否符合趋肤效应。
2. 仪器用具: 只写与本实验方案有关仪器和样品(不少于 2 种不同线径的样品)。
3. 原理(不超过 1000 字, 不剪贴): 确定测量方法, 基于此方法和所选择样品建模, 画出其近似等效电路图并写出待测量的表达式; 描述如何从交流阻抗中分离出小电阻  $R$ 、小电感  $L$ 、小电容  $C$  等阻抗等。
4. (选) 分析影响测量精度的因素, 通过小电阻的表达式, 分别就交流电流、电压的稳定性和不确定度对小电阻分离不确定度贡献做误差传递分析, 分析影响最大的因素?
5. (选) 查阅手册, 分析是否需要压控电流源和锁相放大器(在测量所选参数下)进行校正? 如果要, 如何校正?
6. 如何测量稳流源输出电流的相位? **【警告: 不能将电流源的输出直接接入锁相放大器的输入端测电流。】**
7. 参考下面实验报告要求制定测量方案, 给出仪器及其与待测样品连接的示意图(参

考图 D1-15)，确定待测物理量（电压、电流、频率等）；【OE4201 输出与 $R_{sa}$ 和 $Z_x$ 的接线相同，单通道锁相放大器需分别测 $R_{sa}$ 和 $Z_x$ 电压。】

8. 参考附录表格**制定数据记录表格，含数据文件命名**；预选合适的仪器参数并将具体数值填入表内（实验时另记实际设置参数，可能与方案设计的不一樣。）；
9. 参考下一节**实验现场操作**，写出主要操作步骤，建议采用自动测量方案；
10. 给出数据处理方案，如从记录的平稳数据中取多点平均以降低统计误差；（选）用寻优法获得最优分布电感值 $L$ 和分布电容值 $C$ 。

### 实验现场

1. 检查确认样品、仪器用具齐备；
2. 通过实验判断用于测量电流相位的取样电阻（ $R_{sa}$ ，厚膜电阻）是纯电阻，（提示：可测量 $R_{sa}(\omega)$ 是否不随频率变化）；
3. （选）用数字万用表 DM3058E 校正 OE4201 压控电流源的输出电流振幅；
4. 按实验方案的示意图接好线路，拍照记录（计入原始记录）；
5. 通过 PC 的 LabVIEW 界面的扫频功能自动测量<sup>5</sup>。

注意刚改变仪器参数（如频率）时，显示数据会跳跃，此非所需数据。需合理设置 sweep 参数，如**扫频步进时间**（与低通滤波器参数有关）、**采样率**（时间间隔）等，可避开该跳跃，获得稳定可靠的数据。

6. 保存数据（计入原始记录）：点击“保存数据”按键，按键显示“保存中...”，数据会以 Excel 文件格式保存于程序路径；完成测量后，再点击“保存中...”按键，数据文件才能打开。
7. 对单通道锁相放大器，则将单通道输入先连接 $R_{sa}$ 测电压（以获得电流大小及其 $\theta_I$ ），再连接 $Z_x$ 测电压（共测量两次）。
8. 数据预处理、作图初步确认；教师签名。
9. 整理还原实验桌面（拍照计入原始记录）。

### 实验报告

1. **独立完成实验报告**，要**标识**合作队员负责的部分，也可**引用**非合作队员的实验数据以支持该实验报告中的观点或结论；
2. 通过幅频特性和相频特性分析等方法，分离实部 $Re(f)$ 和虚部 $Xe(f)$ ，再分离出不同类型的阻抗值及其随频率变化关系 $[R(f)$ 、和 $L(f)$ 、（选） $C(f)$ ]，用实验结果讨论模型近似的前提条件是否成立（系统误差分析）。
3. 在同一图中展示<sup>6</sup>各样品电阻随频率的变化关系 $R(f)$ ，定性判断是否存在趋肤效应；然后（1）向低频端外推获得直流电阻 $R_{f=0}$ ，它与用数字多用表四引线法测量的直流电阻相同吗？（2）通过此值，尝试估算该铜线的电导率，其值符合纯紫铜材料的电

<sup>5</sup> 提醒：通道 B 的内部参考信号选与通道 A 的相同。

<sup>6</sup> 提示：用双对数坐标。

导率吗？（3） $R(f)$ 是否满足式(D1-48)和式(D1-49)?（4）如何找出现趋肤效应的起始频率（ $f_0$ ）<sup>7</sup>? 展示趋肤深度随频率变化关系 $\delta(f)$ 。以上需列出数据处理过程，包括用数据及数据拟合讨论出现趋肤效应后的 $R(f)$ 的定量关系；且讨论铜线线径与直流电阻、与起始频率的关系是否满足理论关系。

- 4. 通过误差分析（定量）：包括，1）分离  $R$ 、 $L$ 、 $C$  方法或模型近似带来的误差；2）如何确定扫频模式下，所测的值为稳定后的值，否则偏差有多大？3）给出样品纯电阻测量的不确定度、有效数字；4）实验中是否观察到反常现象？分析可能原因及其对误差的影响。
- 5. （选）讨论测量结果的可信度，给出改进方案。
- 6. （选）通过 $R(f)$ 求所测导线材料的相对磁导率 $\mu_r$ 。
- 7. 结论
- 8. 在附录提供测量原始记录，包括机采数据名及仪器参数（扫描版）；

【参考文献】

1. 郭硕鸿,《电动力学》(第三版),高等教育出版社, ISBN978-7-04-023924-9, 124-128.

2. L.D.Landau and E.M.Lifshitz, ELECTRODYNAMICS OF CONTINUOUS MEDIA, translated from the Russian by J.B.Sykes, J.S.Bell and M.J.Kearsley, second edition revised and enlarged by E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii, PERGAMON PRESS, p208-210.

3. 周荣浩, 杨勇, 张庆, 田发宝. 金属高频电阻及测量修正方法[J], 大学物理, 2020,39(9): 34-40.

表 D1- 7 趋肤效应实验原始记录			
桌号		记录人（签名）：	
样品名		取样电阻名 $R_{sa}$	厚膜电阻
输入方式	A-B	$R_{sa}$ （ $\Omega$ ）	1.0
动态储备		频率/范围（Hz）	66~99999
量程灵敏度（mV）		扫频步进时间（s）	3.0
时间常数（ms）	100	采样时间间隔（s）	0.5
陡降（dB/oct）	24	参考信号幅值（ $V_{RMS}$ ）	0.1V
数据文件名 1			
数据文件名 2			

<sup>7</sup> 思考：能否通过 D1-47 式、以及 $\delta = a$ 定义 $f_0$ ，即 $f_0 = 1/\pi\mu\sigma a^2$ ? 为什么？



## 附录：锁相放大器参数

对应于锁相放大器工作原理的各个阶段，锁相放大器提供一系列可调参数，合理配置这些参数，是获得优质测量结果的前提。

量程灵敏度（Sensitivity）与满刻度输出时的输入电平 FS（Full Scale Input Level）

量程灵敏度（简称灵敏度）直观给出了前面板当前数字显示的量程。对应于锁相放大器的前级放大器的交流放大增益与相敏检波器（PSD）解调增益，即式(D1-17) 式中的 $A_I$ 。对于模拟输出，OE1022 锁相放大器的输出通道（output）的增益为 10V/灵敏度。例如，对 100mV 的灵敏度设置，输出通道的增益为 100。OE1022 锁相放大器的最大逻辑增益为  $10^7$ ，即对于 1 $\mu$ V 以下的量程灵敏度，其增益与 1 $\mu$ V 档相同。

FS 有时也称为满刻度灵敏度（Full Scale Sensitivity），它是用来表征锁相放大器测量灵敏度的，拥有电压的量纲，与系统的总增益有关，如下式：

$$FS = OUT_{max} / A_{total}$$

其中， $OUT_{max}$  表示输出满刻度值， $A_{total}$  表示系统的总增益能力。对 OE1022， $OUT_{max}=10V$ ，当  $A_{total}=10^7$  时，系统的 FS 即为 1.0 $\mu$ V。

时间常数（Time Constant）和陡降（Slope）

时间常数和陡降表征锁相放大器经相敏检测后的低通滤波器带宽。典型的低通滤波器如图 D1- 5 所示的 n 阶 RC 滤波器（见提高信噪比的途径有两条：一是通过物理屏蔽来抑制环境噪声（压低强度），二是通过信号处理滤除噪声（缩小积分范围）。通常物理屏蔽的成本高，且对屏蔽体内部噪声和仪器本身噪声无效，此时信号处理方法就成为唯一的选择。那么，有什么方法可以抑制噪声，从而精确测量微弱信号呢？

简单滤波法）。降低其带宽的简单办法就是增加其数量并串联起来（称之为级联），1 阶 RC 滤波器的个数称为级联阶数。增加滤波器的级联阶数虽然可提高输出的信噪比，但其等效的时间常数也增加了。

先看 1 阶 RC 滤波器，对半功率点， $|H(\omega)|^2 = 1/2$ ，则信号衰减  $20\lg(2^{-1/2}) \cong -3dB$ ，因此，亦称此带宽为 -3dB 带宽。此时，截止角频率  $\omega_0 RC = 1$ ，定义时间常数：

$$TC = \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{1}{\omega_0}$$

即时间常数为 1 秒时，-3dB 的截止频率  $f_0 = 0.16Hz$ 。时间常数可在信号跃变响应上有更直接的体现。

1 阶 RC 滤波器对上升  $\Delta u_{in}$  和下降  $\Delta u_{in}$  阶跃函数的响应分别为<sup>8</sup>：

<sup>8</sup> 参见电磁学 RC 电路暂态过程。

$$\Delta u_{\uparrow out} = \Delta u_{\uparrow in}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \Delta u_{\downarrow out} = \Delta u_{\downarrow in}e^{-\frac{t}{RC}},$$

定义输出信号升到最大值的  $(1 - 1/e)$  倍或降到最大值的  $1/e$  倍所需要的时间为响应时间常数TC, 则  $TC = RC$ 。其阶跃响应图如图 D1- 16 所示。

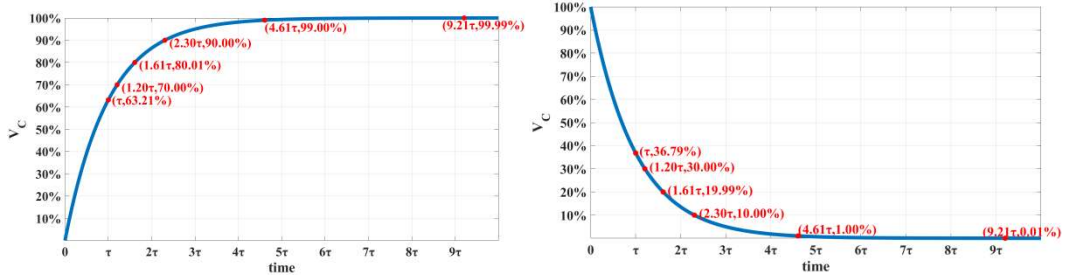


图 D1- 16 时间常数 TC 的阶跃响应表示<sup>[7]</sup>

对  $n$  阶滤波器：其阶跃响应涉及高阶微分方程，求解比较复杂，不在此详述。

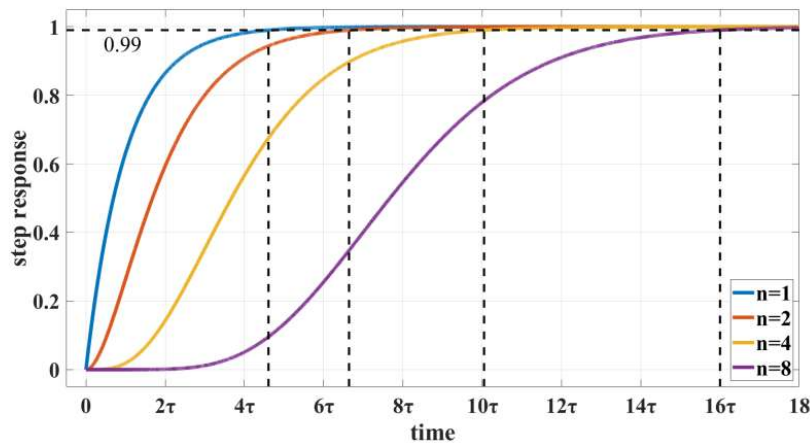


图 D1- 17 阶数  $n=1、2、4、8$  时的时域阶跃响应

如图 D1- 17 所示，当滤波器的时间常数TC一定，阶数  $n$  分别为 1、2、4、8 时，系统的输入从最小值逐渐增加后稳定到最大值的 99%所用的时间。级联阶数越高，信号响应越慢，等效时间常数越大。

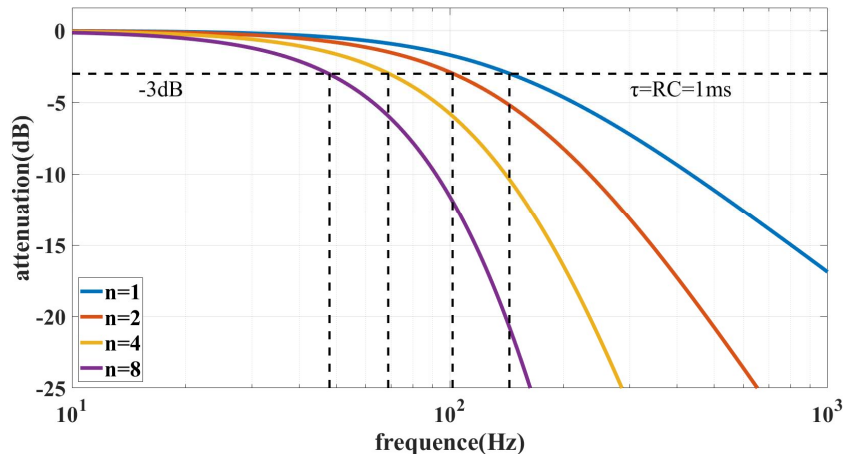


图 D1-18 阶数  $n=1、2、4、8$  时的陡降

RC 滤波效果可直观地用衰减斜率 (slope) 表征 (见图 D1-18)。在频域用双对数坐标画出  $n$  阶级联 RC 滤波器输出信号随频率变化, 在衰减段 ( $\omega \sim \omega_0$ ) 的斜率绝对值等于滤波器级联阶数  $n$ 。例如, 频段窗口 (从  $\omega_0$  到  $2\omega_0$ ) 内定义以 2 为底的对数  $\log_2$  乘以 6 所得的斜率 (dB/oct) :

$$\text{Slope} = -6 \frac{\log_2(H(2a\omega_0)) - \log_2(H(a\omega_0))}{\log_2(2a\omega_0) - \log_2(a\omega_0)} = -6n$$

来反映信号变化的斜率来表征滤波效果, 也称滤波器的分频斜率。亦可对频段窗口 (从  $\omega_0$  到  $10\omega_0$ ) 内取以 10 为底的对数  $\log_{10}$ , 得以 (dB/dec) 为单位的陡降斜率。可见, 在频域变化越陡的信号, 在时域响应越慢。对于级联低通滤波器, 输出信号稳定时间是由当前设置的时间常数大小和滤波器阶数共同决定的。

OE1022 锁相放大器中低通滤波器是用数字滤波器实现的, 可选择 1 至 4 阶低通滤波器级联的结构, 分别对应 6dB、12dB、18dB、24dB 四种陡降。

选时间常数 TC, 等效于选择滤波器的 R 或 C, 它决定了一阶滤波器的带宽; 选陡降等于选择级联 RC 滤波器的阶数  $n$ , 它决定了带通“窗口”边缘的陡度。可以简单地认为, 时间常数越大, 阶数越高, 输出的带宽就越小, 显示的测量幅度、相位等值就越稳定; 阶数的影响只有在带宽附近才会敏感。然而, 过大的时间常数会抹平输入信号 (随时间) 的变化信息。在实际应用中, 需要根据输入信号随时间变化的情况, 协调时间常数、测量精度与信噪比之间的平衡。

### 过载电平 OVL (Overload)

OVL 定义为锁相放大器任一级出现过载或临界过载时的输入电平。因为微弱信号检测通常处理的是信噪比较低的输入, 所以过载往往出现在噪声电压出现尖峰时。因此, 可以将 OVL 理解为系统允许的最大输入噪声电压电平, 即系统的最大噪声容限。

另外, FS 作为最大输出时按照增益对应到输入端的电平, 正常情况下可以理解为有用信号值, 而 OVL 则是指的噪声容限, 因此要求 OVL 必须远远大于 FS, 这样才能充分发挥锁相放大器从噪声中提取信号的能力。

实际使用时, OVL 的当前状态在锁相放大器前面板显示器上显示, 输入电平过载时显示为红色, 此时需要调大动态储备 (下面介绍) 或量程 (即调低增益) 来恢复正常状态。学习使用详见实验内容 1.8 强噪声背景下的弱信号检测, 和【实验 2】电阻热噪声及玻尔兹曼常量测量。

### 动态储备 DR (Dynamic Reserve)

动态储备 DR 定义为过载电平 OVL 与满刻度输出时的输入电平 FS 比值的分贝数:

$$DR=20\lg(OVL/FS)(dB)$$

若动态储备为 100 dB，表示系统能容忍的噪声可以比有用信号高出  $10^5$  倍。

实际上动态储备容量应该保证整个测量过程中不发生过载，过载还可能出现在前置放大器的输入端和 DC 放大器的信号输出端，可以通过调整增益分配来实现高动态储备。

动态储备与噪声频率有关。在参考频率处的动态储备为 0，远离参考频率时动态储备增加，离参考频率足够远时，动态储备可达到最大值。参考频率附近的动态储备对仪器噪声容限极其重要，增加低通滤波器的级数可以提高滤波效果，从而增加参考频率附近的动态储备。

上述三项性能指标之间关系可用图 D1-17 来表示，即  $ITDR = ODR + DR$ 。

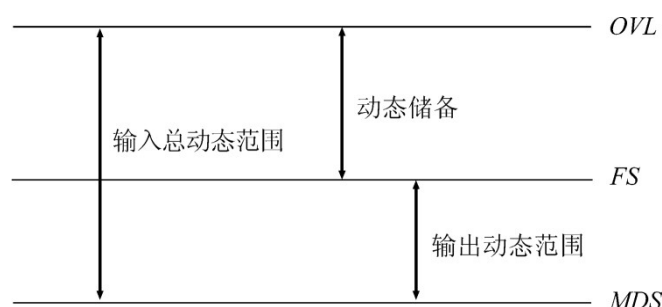


图 D1-19 锁相放大器的动态特性

在 OE1022 数字锁相放大器中，高动态储备不会增加输出误差和漂移，但是会增加输出噪声。如果在模数转换器（ADC）前的模拟放大器增益足够大，则其被放大的噪声比转换器的噪声还大，输出主要受输入噪声影响。因此，增大模拟增益并不能减小输出噪声。在分辨率要求极高的情况下，增益增大也不能提高信噪比，但降低增益可以提高动态储备。如果输入噪声小（如热噪声），则应降低动态储备。详见【实验 2】电阻热噪声及玻尔兹曼常量测量。