Assignment 1 Small Gridworld Report

一、实验要求

1. 建立Gridworld环境
2. 用Policy Evaluation和Policy Iteration的方法从随即均匀的策略得到最优策略

二、实验分析

1. Gridworld环境建立

首先初始化Gridworld环境，需要传入边长grid_len和终止状态，然后确定状态为0~$(grid\_len)^2-1$、默认折扣因子为1、全部行为为['n', 's', 'w', 'e']、奖励为设置为离开每个非终止位置获得-1的奖励，终止状态不会进行下一步所以不会有奖励。初始化所有状态的值函数为0，所有的Policy都是均匀随机（即非终止状态都为['n', 's', 'w', 'e']，终止状态则没有policy以保证终止），`self.act_trans`则会确定这四个行为会相应的如何改变状态。

```python
def __init__(self, grid_len, terminal, gamma=1):
    self.grid_len = grid_len                          # edge length of grid word
    self.states_num = grid_len ** 2                   # number of states
    self.states = [i for i in range(self.states_num)]  # all states
    self.values = [0 for i in range(self.states_num)]  # values of states
    self.terminal = terminal                          # all terminal states
    self.gamma = gamma                                # discount factor
    self.reward = -1                                  # reward
    self.actions = ['n', 's', 'w', 'e']               # all actions
    self.act_trans = {'n': -grid_len, 's': grid_len, 'w': -1, 'e': 1}
    # how action lead to state changing
    self.policy = [['n', 's', 'w', 'e'] for i in range(self.states_num)]
    # policy at each state, initially uniform
    for x in self.terminal:                           # terminate at terminal states
        self.policy[x] = []
```

下一个函数是如何通过当前状态和行为得到下一个状态，通过`self.act_trans`确定下一个位置后还要判断有没有过界，如果过界就返回回原状态。

```python
def getNextState(self, state, action):
    next_state = state + self.act_trans[action]
    # return to current state if next state is out of grid
    if next_state < 0 or next_state >= self.states_num or (
        next_state % self.grid_len != state % self.grid_len and next_state // self.grid_len != state // self.grid_len):
        next_state = state
    return next_state
```

2. Policy Evaluation和Policy Iteration

在Policy Evaluation中，首先要确定一个比较小的数θ来判断值函数有没有收敛，这里取$\theta = 0.01$。采取同步更新的方法，`self.values`中存的是前一次迭代得到的值函数，`new_values`中存的是本次的值函数，对所有的状态`state`（不包括终止状态），采取的策略存在`self.policy[state]`中，采取其中每个行为的概率都均等，由此可以算出$\pi(a|s)$，也就是代码中的`trans_prop`，然后根据行为和状态可以得到下一个状态，由贝尔曼方程，我们可以得到当前`state`新的值函数，δ存的是新旧值函数的最大差距，如果差距小于θ就认为收敛，大于就继续循环。

```python
def policyEvaluation(self):
    theta = 0.01
    delta = 1
    while delta > theta:
        delta = 0
        # synchronous backups
        new_values = [0 for i in range(self.states_num)]
        for state in self.states:
            if self.policy[state]:
                trans_prop = 1 / (len(self.policy[state]))
            for action in self.policy[state]:
                next_state = self.getNextState(state, action)
                new_values[state] += (self.reward + self.gamma * self.values[next_state]) * trans_prop
                delta = max(delta, abs(new_values[state] - self.values[state]))
         # update value function
         self.values = new_values
```

在Policy Iteration中，首先采取policy evaluation得到当前策略下收敛的值函数，然后在每个状态（不包括终止状态）选出使得值函数最大的行为，作为新的策略。如果所有状态下新的策略和旧的策略一样，说明已经是最优策略，否则就继续迭代。

```python
def policyIteration(self):
    stable = False
    while not stable:
        self.policyEvaluation()             # policy evaluation
        stable = True                       # policy improvement
        for state in self.states:
            old_policy = self.policy[state]
            if state not in self.terminal:
                # find best policy
                max_value, policy = -9e10, []
                for action in self.actions:
                    next_state = self.getNextState(state, action)
                    new_value = self.reward + self.gamma * self.values[next_state]
                    if new_value > max_value:
                        max_value = new_value
                        policy = [action]
                    elif abs(new_value - max_value) < 1e-9:
                        policy.append(action)
                # update policy
                self.policy[state] = policy
                if set(old_policy) != set(policy):
                    stable = False
```

3. 可视化/输出结果

在policy evaluation迭代过程中在命令行输出当前值函数，将函数值输出为6*6的gird，包括边界和gird中的值。

```python
def outputValue(self, k):
    print("Policy Evaluation", k, "times, Value Function:")
    for i in range(self.grid_len):
        print('\n' + '|' + ('-'*21 + '|') + ('-'*20 + '|') * 5)
        print("|", end=' ')
        for j in range(self.grid_len):
            state = i * self.grid_len + j
            print(str(self.values[state]).center(20), end='|')
    print('\n' + '|' + ('-'*21 + '|') + ('-'*20 + '|') * 5)
    print('\n')
```

在policy iteration过程中输出每次更新的policy，这里采取使用了tkinter画图，先确定每个grid的起始位置， 然后用 `canvas.create_rectangle()` 画出方格，再根据该位置的policy用 `darwArrow()` 函数在方格中心点画出箭头， `darwArrow()` 函数可以根据输入位置、箭头长度和箭头方向画出所需的箭头（由于不太相关这里没有列出函数定义）。

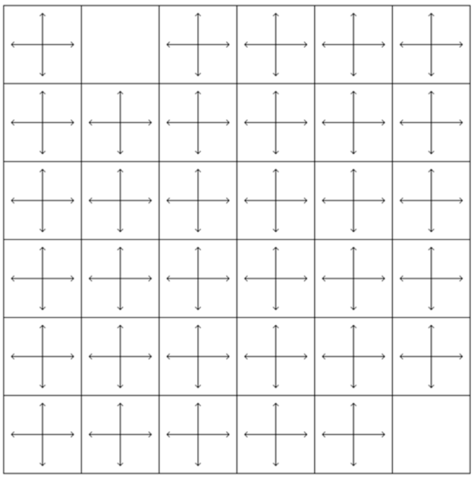
```python
def outputPolicy(self, k):
    # window and canvas
    app = Tk()
    app.title('Policy Iteration ' + str(k) + ' times, Optimal Policy:')
    canvas = Canvas(app, bg='white', width=800, height=800)
    canvas.pack()
    # draw policy
    begin_x, begin_y, edge, arrow_len = 100, 50, 100, 40
    for i in range(self.grid_len):
        for j in range(self.grid_len):
            state = i * self.grid_len + j
            print(self.policy[state], end=' ')

            x, y = begin_x + j * edge, begin_y + i * edge
            canvas.create_rectangle(x, y, x + edge, y + edge)
            for action in self.policy[state]:
                drawArrow(x + edge // 2, y + edge // 2, arrow_len, action)
    mainloop()
```

三、实验结果

1. 结果分析以及最终结果

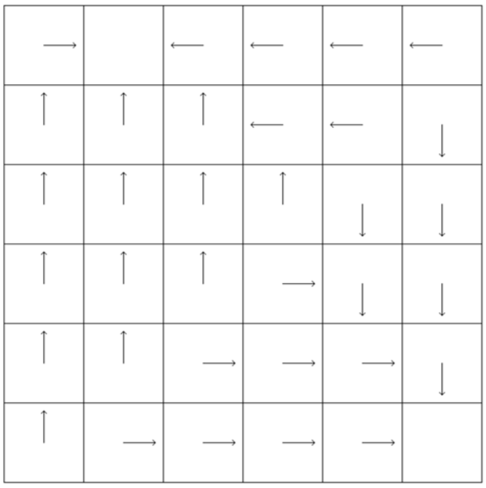
初始化时，所有状态值函数为0，非终止位置policy均匀随机，如下：

```
---------------------------------- Policy Iteration 1 times-----------
Policy Evaluation 0 times, Value Function:

|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|  0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|  0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|  0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|  0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|  0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|  0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
```



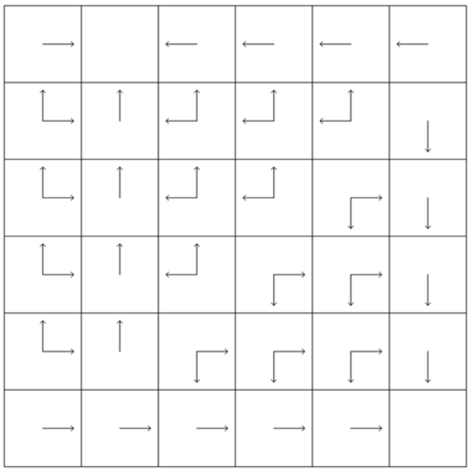
Policy Iteration第一次迭代时，Policy Evaluation迭代234次时得到左图稳定的值函数，根据新的值函数我们可以得到右图新的Policy。

```
Policy Evaluation 234 times, Value Function:

|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -18.0495 | 0.0000  | -29.0079 | -43.7364 | -51.1703 | -54.2650 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -32.1089 | -29.9490 | -39.3046 | -47.0582 | -51.5414 | -53.3941 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -44.3472 | -44.4005 | -47.2275 | -49.6796 | -50.5754 | -50.4095 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -52.5598 | -52.1060 | -51.5547 | -49.8884 | -46.7027 | -43.2905 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -57.2598 | -55.9421 | -53.0297 | -47.6481 | -39.0854 | -28.7862 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -59.3149 | -57.4091 | -53.0078 | -44.6189 | -29.2288 | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
```



Policy Iteration第二次迭代时，Policy Evaluation只迭代7次时就得到左图稳定的值函数，根据新的值函数我们可以得到右图新的Policy，其实这个时候的值函数和policy就已经是最优了，但是还没有判断是否稳定，所以会再进行一次迭代。

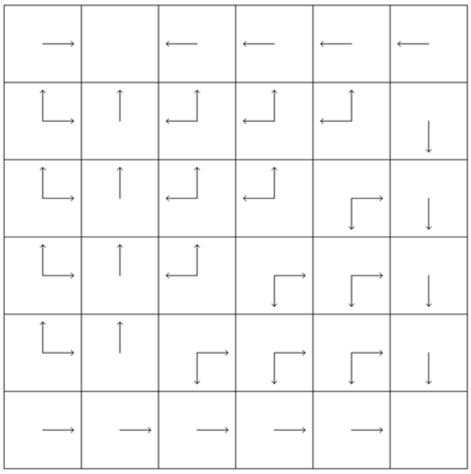
```
Policy Evaluation 7 times, Value Function:

|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -1.0000  | 0.0000  | -1.0000 | -2.0000 | -3.0000 | -4.0000 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -2.0000  | -1.0000 | -2.0000 | -3.0000 | -4.0000 | -4.0000 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -3.0000  | -2.0000 | -3.0000 | -4.0000 | -4.0000 | -3.0000 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -4.0000  | -3.0000 | -4.0000 | -4.0000 | -3.0000 | -2.0000 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -5.0000  | -4.0000 | -4.0000 | -3.0000 | -2.0000 | -1.0000 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -6.0000  | -4.0000 | -3.0000 | -2.0000 | -1.0000 | 0.0000  |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
```



Policy Iteration第三次迭代，得到的结果和上一次一样，所以可以判断policy稳定，所以这个值函数和策略就是最优的值函数和策略，因此我们得到了最终的结果：

Policy Evaluation 2 times, Value Function:

-1.0000	0.0000	-1.0000	-2.0000	-3.0000	-4.0000
-2.0000	-1.0000	-2.0000	-3.0000	-4.0000	-4.0000
-3.0000	-2.0000	-3.0000	-4.0000	-4.0000	-3.0000
-4.0000	-3.0000	-4.0000	-4.0000	-3.0000	-2.0000
-5.0000	-4.0000	-4.0000	-3.0000	-2.0000	-1.0000
-5.0000	-4.0000	-3.0000	-2.0000	-1.0000	0.0000



2. 拓展实验

2.1 折扣因子γ改变

折扣因子的改变主要会改变值函数，但一般不会影响最优策略。

gamma为0.9时Policy Iteration同样经历三轮，每轮的得出的policy都是和gamma=1时相同，但是值函数不同。

Policy Evaluation 40 times, Value Function:

-4.5647	0.0000	-5.7560	-7.9624	-8.8244	-9.1209
-6.7231	-5.9994	-7.4360	-8.4267	-8.8977	-9.0593
-8.1666	-8.0773	-8.4451	-8.7392	-8.8211	-8.7731
-8.9105	-8.8695	-8.8643	-8.7330	-8.3801	-7.9236
-9.2424	-9.1547	-8.9355	-8.4148	-7.3503	-5.7199
-9.3600	-9.2297	-8.8669	-7.9639	-5.7315	0.0000

Gamma=0.9 Policy Iteration第一次迭代 稳定值函数

Policy Evaluation 6 times, Value Function:

-1.0000	0.0000	-1.0000	-1.9000	-2.7100	-3.4390
-1.9000	-1.0000	-1.9000	-2.7100	-3.4390	-3.4390
-2.7100	-1.9000	-2.7100	-3.4390	-3.4390	-2.7100
-3.4390	-2.7100	-3.4390	-3.4390	-2.7100	-1.9000
-4.0951	-3.4390	-3.4390	-2.7100	-1.9000	-1.0000
-4.0951	-3.4390	-2.7100	-1.9000	-1.0000	0.0000

Gamma=0.9 Policy Iteration第二次迭代 稳定值函数/最优值函数

gamma变化较大时也会引起中间轮的policy发生变化，gamma=0.5时，policy iteration仍迭代三轮，但第一轮得出的policy发生变化，但是最后最优的policy仍然保持不变。gamma=0.1时迭代5轮，中间policy变化，但是最后最优policy不变。不过gamma一般也不会选这么小的数。

2.2 控制policy evaluation迭代结束的变量θ改变

theta改变时，Policy evaluation收敛的速度会改变，中间值函数的结果也会有不同，但是不影响最后最优值函数和最优策略。theta越小收敛越慢，但是值函数会更精确，考虑到policy iteration会有多次迭代，这里theta的取值可以稍微大一点

Policy Evaluation 124 times, Value Function:

-16.9776	0.0000	-27.1165	-40.8179	-47.7036	-50.5614
-30.0537	-27.9984	-36.7053	-43.9016	-48.0499	-49.7594
-41.3737	-41.4138	-44.0433	-46.3233	-47.1556	-47.0007
-48.9266	-48.5143	-48.0231	-46.5009	-43.5625	-40.4003
-53.2254	-52.0234	-49.3584	-44.4058	-36.4817	-26.9030
-55.0967	-53.3554	-49.3183	-41.5799	-27.2947	0.0000

Policy iteration k=1 theta=0.1 稳定值函数

Policy Evaluation 345 times, Value Function:

-18.1578	0.0000	-29.1989	-44.0313	-51.5205	-54.6392
-32.3165	-30.1461	-39.5672	-47.3771	-51.8942	-53.7613
-44.6476	-44.7023	-47.5492	-50.0187	-50.9209	-50.7539
-52.9269	-52.4688	-51.9115	-50.2307	-47.0199	-43.5825
-57.6674	-56.3380	-53.4006	-47.9757	-39.3485	-28.9764
-59.7411	-57.8187	-53.3806	-44.9259	-29.4242	0.0000

Policy iteration k=1 theta=0.001 稳定值函数

2.3 值函数初始值

值函数初始值改变基本上没啥影响，就是最后值函数会改变，策略都没有变，全体初始化为1时的最优值函数比全体初始化为0时整体加一。应该和更新方式相关，在我的设定里，无论是值函数还是策略函数，在终止状态都是不更新，那么初始化终止状态的值函数就是最后时的值函数。重要的不是值函数的具体值而是和其他状态值函数的差值，这才决定下一步策略往哪里走。

Policy Evaluation 2 times, Value Function:

0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	-2.0000	-3.0000
-1.0000	0.0000	-1.0000	-2.0000	-3.0000	-3.0000
-2.0000	-1.0000	-2.0000	-3.0000	-3.0000	-2.0000
-3.0000	-2.0000	-3.0000	-3.0000	-2.0000	-1.0000
-4.0000	-3.0000	-3.0000	-2.0000	-1.0000	0.0000
-4.0000	-3.0000	-2.0000	-1.0000	0.0000	1.0000

初始化value为1，最优值函数

Policy Evaluation 2 times, Value Function:

-1.0000	0.0000	-1.0000	-2.0000	-3.0000	-4.0000
-2.0000	-1.0000	-2.0000	-3.0000	-4.0000	-4.0000
-3.0000	-2.0000	-3.0000	-4.0000	-4.0000	-3.0000
-4.0000	-3.0000	-4.0000	-4.0000	-3.0000	-2.0000
-5.0000	-4.0000	-4.0000	-3.0000	-2.0000	-1.0000
-5.0000	-4.0000	-3.0000	-2.0000	-1.0000	0.0000

初始化value为0，最优值函数

后来也尝试了随机初始化为(0, 1]之间的实数，策略和而迭代次数都没有改变，也只是值函数具体的值发生变化，所以值函数初始化方式一般没有太大影响。

2.4 初始策略改变

初始策略改变影响比较大，糟糕的初始化策略可能使得值函数比较难收敛甚至无法收敛，我尝试过每个位置初始化策略都设为['n']、['n', 's']、['n', 'w']、['n', 's', 'w']，结果都迭代了上万步都没有收敛。也试过在每个位置随机选一个action，但是往往也很难收敛。所以还是不要瞎搞，老老实实从均匀随机的策略初始化吧。

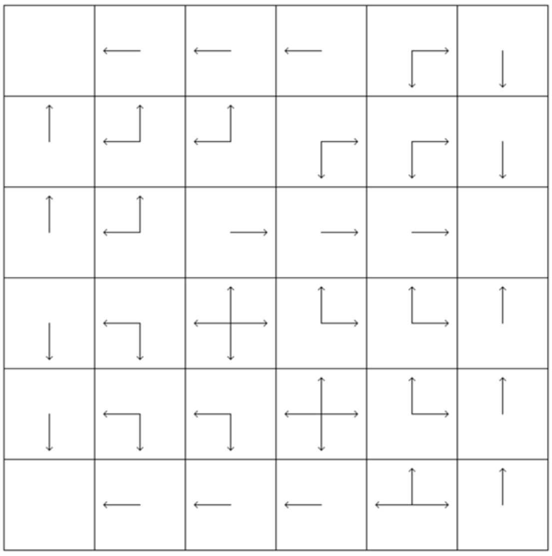
2.5 Reward改变

这个实验源于最开始我看错了题目，看成了到达终止状态奖励为1否则奖励为-1，这种理解其实就是在到达一个状态的时候获得reward。后来发现题目里并没有给出到达终止状态的奖励，所以应该理解为从每个状态离开的时候获得的reward是-1，到达终止状态后不会再离开所以不需要reward。两种做法结果上并没有多大区别，还是只有值函数数值不同，policy都是一样的。

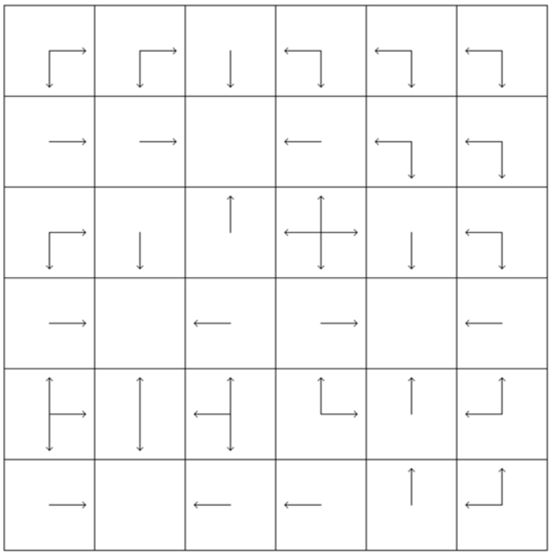
至于其他的reward改变方式，只要每一步reward都是负数，结果总是可以收敛到同一个policy。

2.6 终止状态改变

在6*6 grid下尝试了其他的终止状态得到的最优policy：



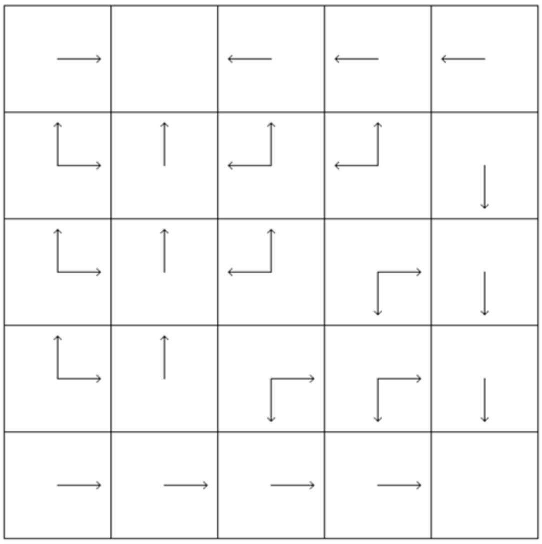
终止状态=[0, 17, 30]



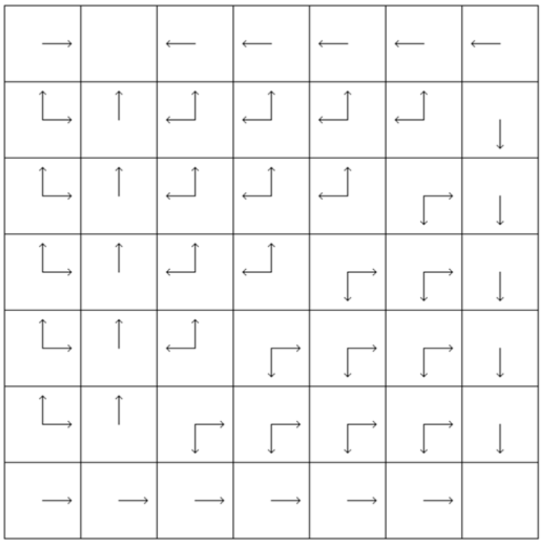
终止状态=[8, 19, 22, 31]

2.7 Gridworld方格个数改变

改成5*5 和 7*7 gird，终止状态为1、24和1、48得到的最优policy



5*5 grid



7*7 grid

可以看到终止状态相对位置类似时会有一些类似的模式，实际上中间生成的policy也有类似的模式，5*5、6*6、7*7 Gridworld policy iteration都迭代了三次，其中第一次policy evaluation比较花时间，三个迭代次数分别为141、234、358次。

2.8 Value Iteration

value iteration相当于是policy iteration中每次迭代时把policy evaluate中迭代次数简化到一次，每一次得到新的值函数后，就根据新的值函数，选可以令值函数最大的action作为新的policy，直到值函数稳定，具体代码如下，theta取0.01。

```
while delta > theta:
    delta = 0
    new_values = [0 for i in range(self.states_num)]
    for state in self.states:
```

```
        if state not in self.terminal:
            max_value, policy = -9e9, []
            for action in self.actions:
                next_state = self.getNextState(state, action)
                new_value = self.reward + self.gamma * self.values[next_state]
                if new_value > max_value:
                    max_value = new_value
                    policy = [action]
                elif abs(new_value - max_value) < 1e-9:
                    policy.append(action)
            new_values[state] = max_value
            delta = max(delta, abs(max_value - self.values[state]))
            self.policy[state] = policy
    self.values = new_values
```

value iteration速度比policy iteration快很多，在相同条件下（6*6 grid， 终止状态为1、35），value iteration只迭代了六次就得到最优策略，而policy iteration第一轮policy evaluation就迭代了234次。代码量上value iteration也更胜一筹。