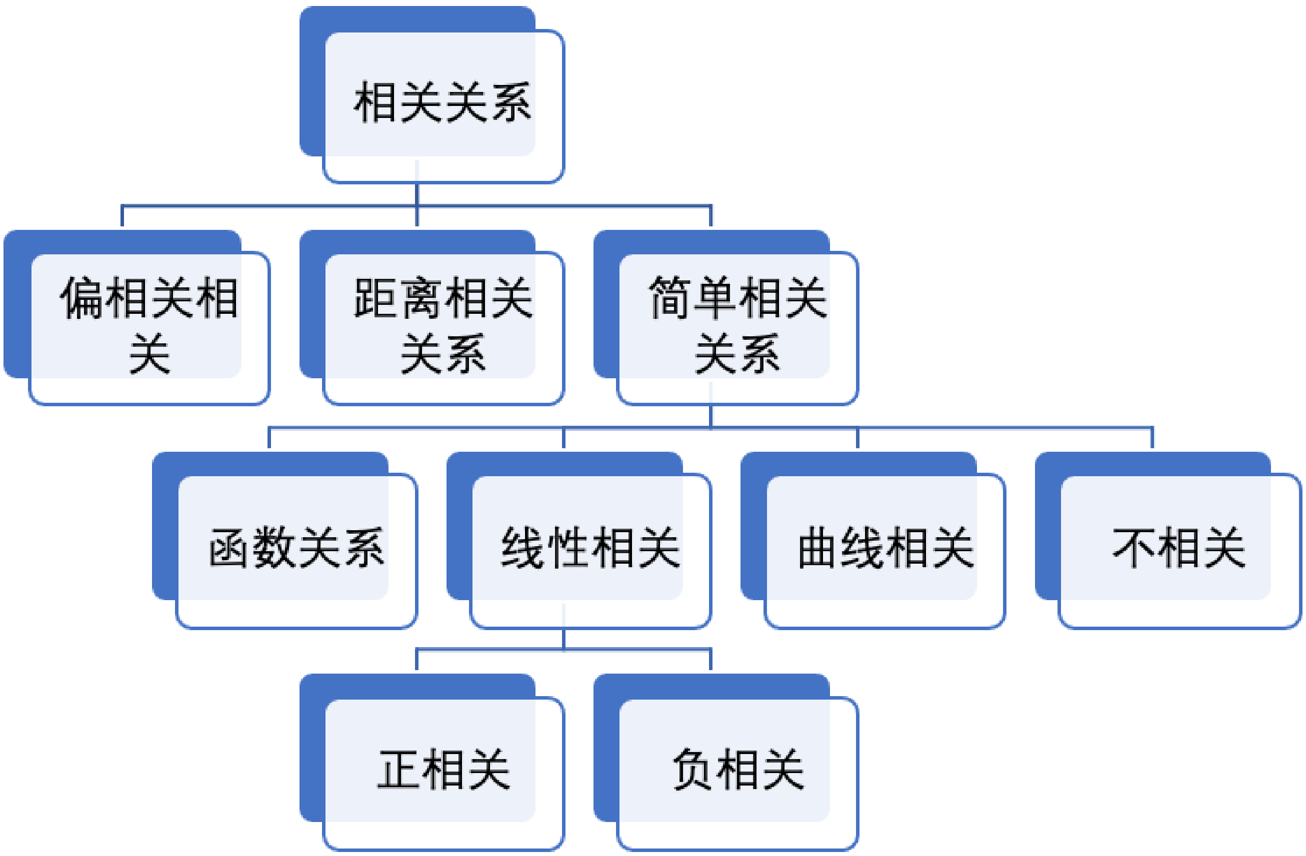
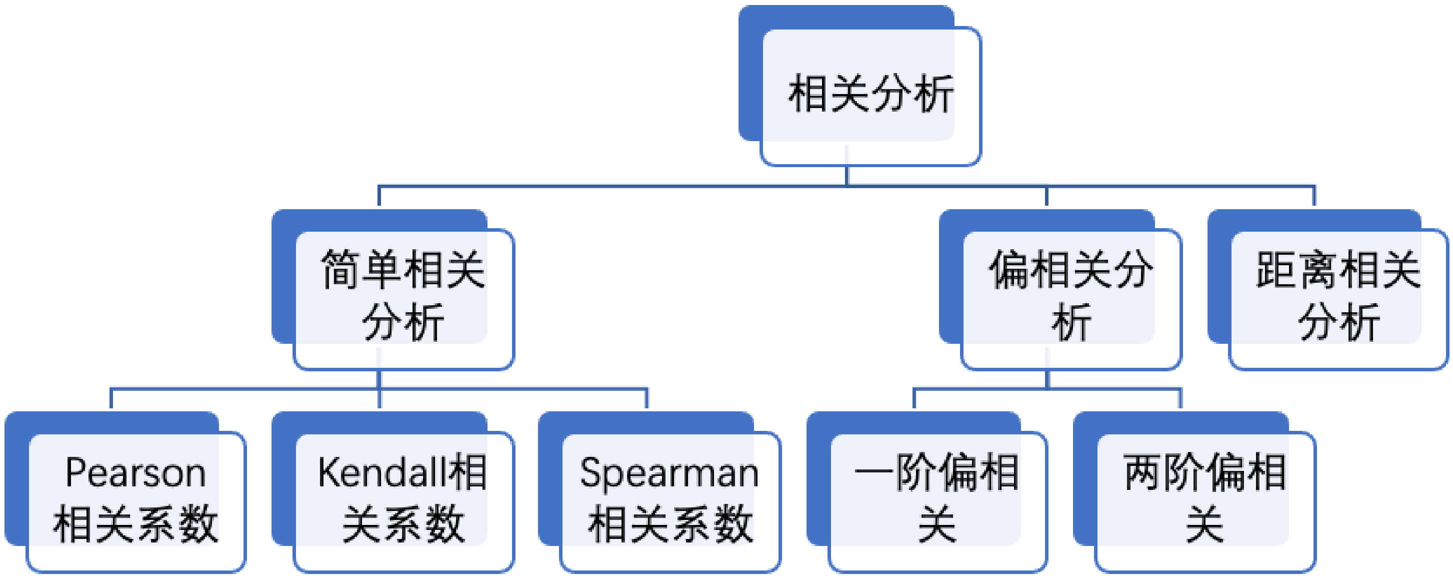
# 第1章 特征相关性分析

## 1.1 特征相关性分析方法概述

常见的特征之间的关系如下图：




常见的分析方法如下图：




# 常用特征相关性分析方法

## 1.1.1 信息增益

### 熵及信息增益

熵在信息论和概率论中对信息不确定性的度量，记作：

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)I(x_i) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)log_b p(x_i)$$

熵只依赖于X的分布，和X的取值没有关系，熵越大，代表X=x(i)的不确定性越大。

条件熵定义为随机变量X在给定条件下随机变量Y的条件熵：

$$H(Y|X) = \sum_{x} p(x)H(Y|X = x)$$

信息增益是在决策树算法中用来选择特征的指标，信息增益越大，则这个特征的选择性越好。

$$IG(Y|X) = H(Y) - H(Y|X)$$

### 信息增益算法

对于分类模型的训练集合D, |D|为样本数量，类别总数为K，$C_k$为类别为k的样本数量，另有特征A，有n个取值，并将训练集D划分为n个子集。

D的经验熵为：

$$H(D) = -\sum_{k=1}^{K} \frac{|C_k|}{|D|} log_2 \frac{|C_k|}{|D|}$$

选定特征A的经验条件熵为：

$$H(D|A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|D_i|}{|D|} H(D_i) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{|D_i|}{|D|} \sum_{k=1}^{K} \frac{|D_{ik}|}{|D_i|} log_2 \frac{|D_{ik}|}{D_i}$$

信息增益的计算方式仍然如下：

$$g(D, A) = H(D) - H(D|A)$$

## 连续值的信息增益计算

参考：https://blog.csdn.net/u012328159/article/details/79413610

现实中经常遇到连续值的特征，对这类特征计算信息增益的时候，可以先将连续值划分成离散值，再进行计算。

也许还有其他的方法，大家可以挖掘一下。

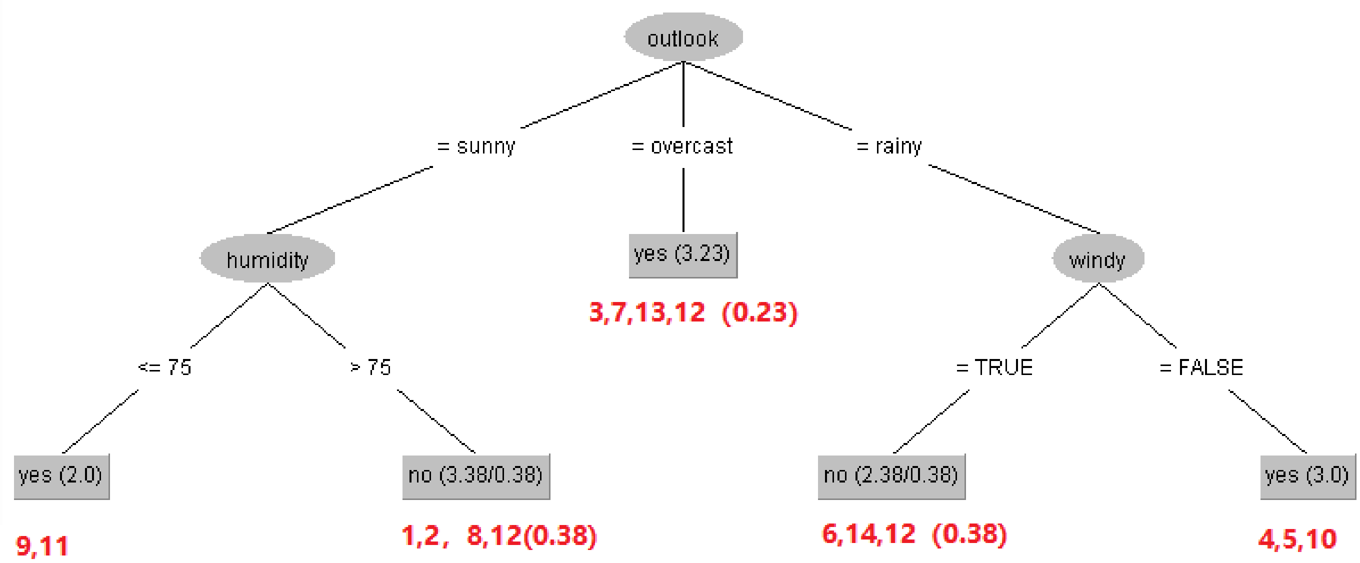
## 缺失值的处理

参考：https://blog.csdn.net/u012328159/article/details/79413610

C4.5中采用的方法是：测试样本在该属性值上有缺失值，那么就同时探查（计算）所有分支，然后算每个类别的概率，取概率最大的类别赋值给该样本。

| no | outlook | temperature | humidity | windy | play |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | sunny | 85 | 85 | FALSE | no |
| 2 | sunny | 80 | 90 | TRUE | no |
| 3 | overcast | 83 | 86 | FALSE | yes |
| 4 | rainy | 70 | 96 | FALSE | yes |
| 5 | rainy | 68 | 80 | FALSE | yes |
| 6 | rainy | 65 | 70 | TRUE | no |
| 7 | overcast | 64 | 65 | TRUE | yes |
| 8 | sunny | 72 | 95 | FALSE | no |
| 9 | sunny | 69 | 70 | FALSE | yes |
| 10 | rainy | 75 | 80 | FALSE | yes |
| 11 | sunny | 75 | 70 | TRUE | yes |
| 12 | ? | 72 | 90 | TRUE | yes |
| 13 | overcast | 81 | 75 | FALSE | yes |
| 14 | rainy | 71 | 91 | TRUE | no |

注意，编号12的样本属性outlook上有缺失值，我们基于上面介绍的构造决策树的方法来构造一颗决策树（C4.5用信息增益率，除此之外，构造方法与上述方法一致），构造出来的决策树为：




上图中，红色数字表示样本编号，括号内的值表示样本12的权重。叶结点中的数值（N/E），比如no(3.38/0.38)表示这个叶子节点被标记为no也就是don't play，3.38=1+1+0.38，编号1,2的样本没有缺失值，权重为1进来的，编号12进入到这个叶结点时权重为0.38。

如果，此时我们有一条样本：outlook=sunny, temperature=70, humidity=?, windy=false 能够看出这条样本的属性humidity是缺失的，那么构建好的决策怎么对这个样本分类?

首先这个样本的outlook为sunny，肯定会进入到“humidity”这个节点里，因为该样本humidity属性值缺失，两个分支都有可能进入：

```
如果humidity<=75，则类别为play。
如果humidity>75，don't play的概率为3/3.38=88.7%，play的概率为0.38/3.38=11.3%。
```

大家肯定有一点疑惑，就是上面humidity>75里，明明叶结点的label为no啊，那应该是don't play啊，怎么还有don't play和paly的概率，这是Quinlan的定义，上面的（N/E）中，N，E的定义分别是：

```
N表示该叶节点中所包含的总样本数（总权重更恰当点）
E表示与该叶节点的类别不同的样本数（权重），比如上面第二个叶结点的label为no（dont play），包含的样本数
```

那么根据上面介绍的，此时同时探查（计算）所有分支，然后算每个类别的概率，取概率最大的类别赋值给该样本。这里humidity下就有两个分支，<=75 => yes 和 >75 =>no。下面分别计算这两个类别的概率：

yes（play）： 2.0/5.38 * 100% + 3.38/5.38 * 11.3% = 44.27%

no（don't play）: 3.38/5.38 * 88.7% = 55.73%

因此no的概率更大，所以该测试样本的类别被指派为no，即don't play。

## 1.2 Pearson相关系数

https://blog.csdn.net/qq_30142403/article/details/82350628

皮尔逊相关也称为积差相关（或积矩相关）是英国统计学家皮尔逊于20世纪提出的一种计算直线相关的方法。

Pearson相关系数：对定距连续变量的数据进行计算。是介于-1和1之间的值，用于描述两组线性的数据一同变化移动的趋势

Pearson相关系数依赖于以下五个假设：

- 假设1：两个变量都是连续变量。
- 假设2：两个连续变量应当是配对的，即来源于同一个个体。
- 假设3：两个连续变量之间存在线性关系，通常做散点图检验该假设。
- 假设4：两个变量均没有明显的异常值。Pearson相关系数易受异常值影响。
- 假设5：两个变量符合双变量正态分布。

Pearson相关系数有四个等价的公式：

公式一：

$$\rho_{X,Y} = \frac{conv(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-E^2(X)}\sqrt{E(Y^2)-E^2(Y)}}$$

从这个式子可以看出，如果X,Y正相关，相关系数应该是正的，而且相关性越高，相关系数也越大。

公式二：

$$\rho_{X,Y} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

这里N是变量取值的数量

公式三：

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sum(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sqrt{(\sum(X-\overline{X})^2 \sum(Y-\overline{Y})^2}}$$

公式四：

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sum XY - \frac{1}{N}\sum X \sum Y}{\sqrt{(\sum X^2 - \frac{1}{N}(\sum X)^2)(\sum Y^2 - \frac{1}{N}(\sum Y)^2)}}$$

很明显公式四和公式二基本是一样的形式。

Pearson相关系数有以下几个特点：

- 当两个变量的线性关系增强时，相关系数趋于1或-1；
- 当其中一个变量增大时，另一个变量也跟着增大，则两个变量正相关 ，相关系数大于0；
- 当其中一个变量增大时，另一个变量却跟着减小，则两个变量负相关，则相关系数小于0；
- 当两个变量的相关系数等于0时，则表明两个变量之间不存在线性相关关系）

## 1.2 Spearman秩相关系数

Spearman秩相关系数：是度量两个变量之间的统计相关性的指标，用来评估当前单调函数来描述俩个变量之间的关系有多好。

- 在没有重复数据的情况下，如果一个变量是另一个变量的严格单调函数，二者之间的spearman秩相关系数就是1或+1 ，称为完全soearman相关
- 如果其中一个变量增大时，另一个变量也跟着增大时，则spearman秩相关系数时正的
- 如果其中一个变量增大时，另一个变量却跟着减少时，则spearman秩相关系数时负的
- 如果其中一个变量变化时候，另一个变量没有变化，spearman秩相关系为0

随着两个变量越来越接近严格单调函数时，spearman秩相关系数在数值上越来越大。

## 1.2 Kendall相关系数

Kendall（肯德尔等级）相关系数：肯德尔相关系数是一个用来测量两个随机变量相关性的统计值。

一个肯德尔检验是一个无参数假设检验，它使用计算而得的相关系数去检验两个随机变量的统计依赖性。肯德尔相关系数的取值范围在-1到1之间，

- 当τ为1时，表示两个随机变量拥有一致的等级相关性；
- 当τ为-1时，表示两个随机变量拥有完全相反的等级相关性；
- 当τ为0时，表示两个随机变量是相互独立的。

## 一些Tips

1.两个连续变量间呈线性相关时，使用Pearson积差相关系数，
2. 不满足积差相关分析的适用条件时，使用Spearman秩相关系数来描述.

3.Kendall’s tau-b等级相关系数：用于反映分类变量相关性的指标，适用于两个分类变量均为有序分类的情况。对相关的有序变量进行非参数相关检验；取值范围在-1-1之间，此检验适合于正方形表格；
4.计算积距pearson相关系数，连续性变量才可采用;
5. 计算Spearman秩相关系数，适合于定序变量或不满足正态分布假设的等间隔数据;
6.计算Kendall秩相关系数，适合于定序变量或不满足正态分布假设的等间隔数据。
7. 计算相关系数：当资料不服从双变量正态分布或总体分布未知，或原始数据用等级表示时，宜用spearman或kendall相关
8.Pearson 相关复选项 积差相关计算连续变量或是等间距测度的变量间的相关分析
9. Kendall 复选项 等级相关 计算分类变量间的秩相关，适用于合并等级资料
10.Spearman 复选项 等级相关计算斯皮尔曼相关，适用于连续等级资料

## 1.2 信息熵

# 特征相关性的工具及实践

## 在Hive中计算信息增益

网上说用cube可以计算信息增益，不过没看懂，在我们的平台上好像也跑不了
参考 https://zhuanlan.zhihu.com/p/26461634

待确认。

从逻辑上看，某个特征的信息增益计算应该不是很复杂，但是在sql里运行还是挺麻烦的。

- 计算某个特征的值 用distinct
- 计算label的值 用distinct
- 对于所有的特征值，分别执行下列计算
    - 取出该特征值下所有的label
    - 按label的值进行分组，