Sayısal Analiz

2.Hafta

Doç. Dr. Kazım HANBAY

Sayısal Analizde Kök Bulma Yöntemleri

İkinci derecede polinomlar, eksik terimli üçüncü dereceden polinomlar veya katsayıları uygun olan dört veya beşinci derecen polinomlar kolayca çözülebilirken, daha üst derece polinomları, trigonometrik ve eksponansiyel terimler içeren denklemleri analitik yöntemlerle çözmek neredeyse imkansızdır. Bu tür denklemleri çözmek için farklı sayısal yöntemler vardır.

Basit iterasyon, ikiye bölme, Newthon-Raphson ve kiriş yöntemi en bilinen sayısal yöntemlerdir. Bu derste bazılarına değinilecektir.

Sayısal Analizde Kök Bulma Yöntemleri

- İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:
- Bu yöntem, "ikiye bölme yöntemi", "yarılama yöntemi", "orta nokta yöntemi" ya da İngilizce ismiyle "bisection method" olarak bilinen yöntemdir.
- Elimizde bir fonksiyon formülü olduğunu, fonksiyon eğrisinin nereden geçtiğini bilmediğimizi, ancak kökü aradığımızı düşünelim. Pek çok fonksiyon için fonksiyon kökünü bulmanın ilk yöntemi analitik çözüm uygulamaktır. Sonuca güçlü bir yöntem ile ulaşır ve kökün kesin olarak değerini bulabiliriz. Fonksiyon için analitik çözüm yapılamıyor ise sayısal çözüm yöntemleri uygulanır.

Basit İterasyon Yöntemi

$f(x)$ fonksiyonunun köklerini bulmak için $f(x) = 0$ denkliği

$x = g(x)$

durumuna getirilir. Bu eşitliğin anlamı aşağıdaki grafiklerden de görüldüğü gibi $y =$x doğrusu ile $y = g(x)$ fonksiyonunun kesim noktasını bulmaktır. $x = x_0$ bilinen başlangıç değeri için $g(x_0)$ bulunarak x in yeni değeri

$x_1 = g(x_0)$ olarak alınır. İşlemler tekrarlanırsa

$$
\begin{gathered}
x_1 = g(x_0) \\
x_2 = g(x_1) \\
. \\
. \\
x_n = g(x_n)
\end{gathered}
$$

Elde edilir

Basit İterasyon Yöntemi

Herbir işlem sonucunda yeni bir x_k yaklaşımı elde edilir. Eğer Bir önceki şekilde $|x_{n+1} - x_n|$ farkı giderek küçülüyorsa çözüm yakınsak olur. İşlemler verilen bir hata değerine kadar devam ettirilir. Eğer fark giderek büyüyorsa çözüm ıraksak olur ve başka çözüm yolu denenmelidir.

Basit İterasyon Yöntemi

- Örnek: $f(x) = 4e^{-0.5x} - x$ denkleminin kökünü $x_0 = 3$ başlangıç değeri için 0.05 mutlak hata ile bulunuz.
- Verilen $f(x)$ fonksiyonu $x = g(x)$ şekline sokulursa

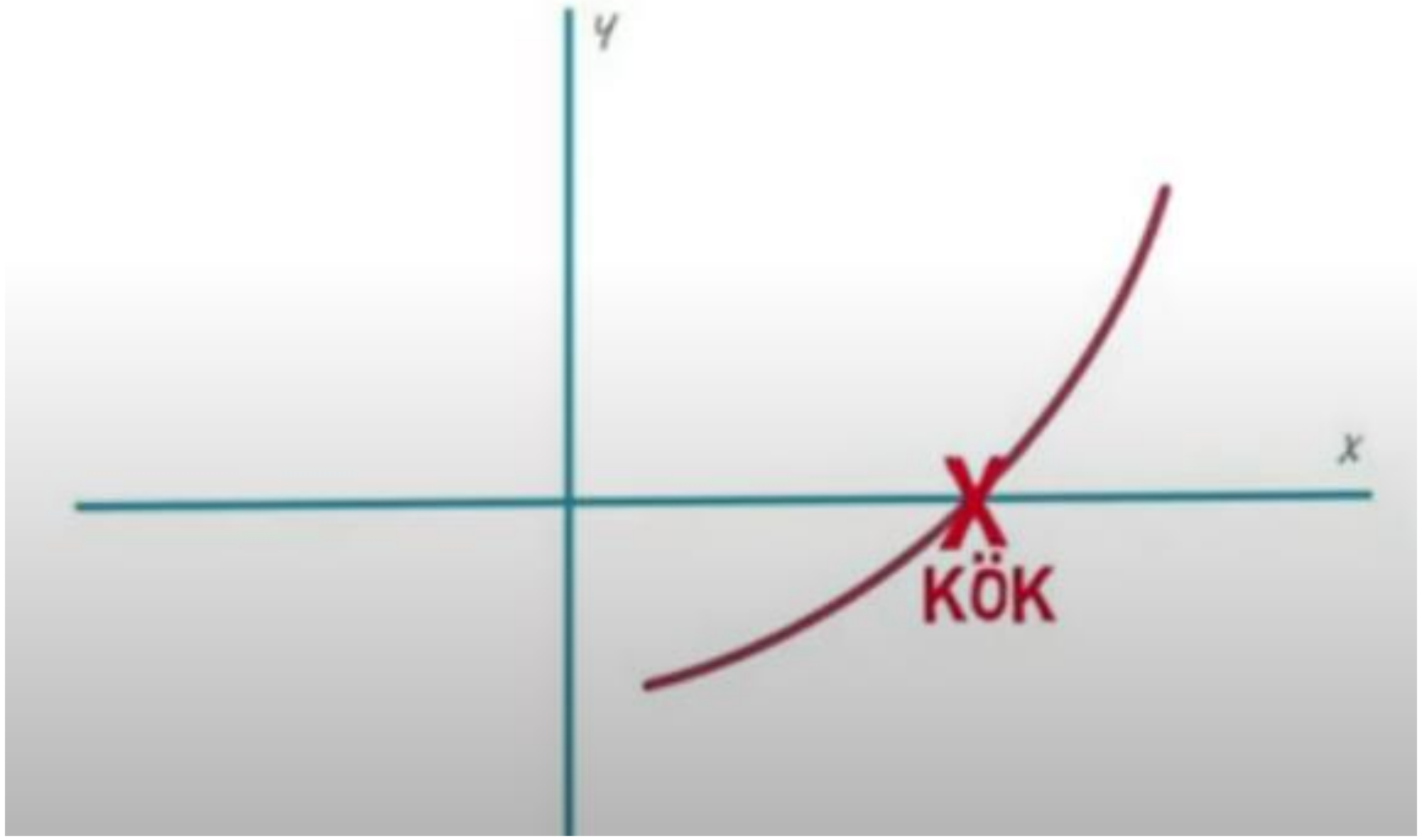
$x = 4e^{-0.5x}$ elde edilir. Yani $g(x) = 4e^{-0.5x}$ alınır. Buna göre çözüm aşağıdaki gibi olur.

$x_{n+1} = g(x_n) = 4e^{-0.5x_n}$, n=1,2, ...

x	$x_{n+1} = g(x_n)$	$\boldsymbol{h} = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
3	0.89	2.11
0.89	2.56	1.67
2.56	1.11	1.45
.	.	.
.	.	.
1.7	1.7	25.İterasyondan sonra 0.05 hata ile kök 1.7 bulunur

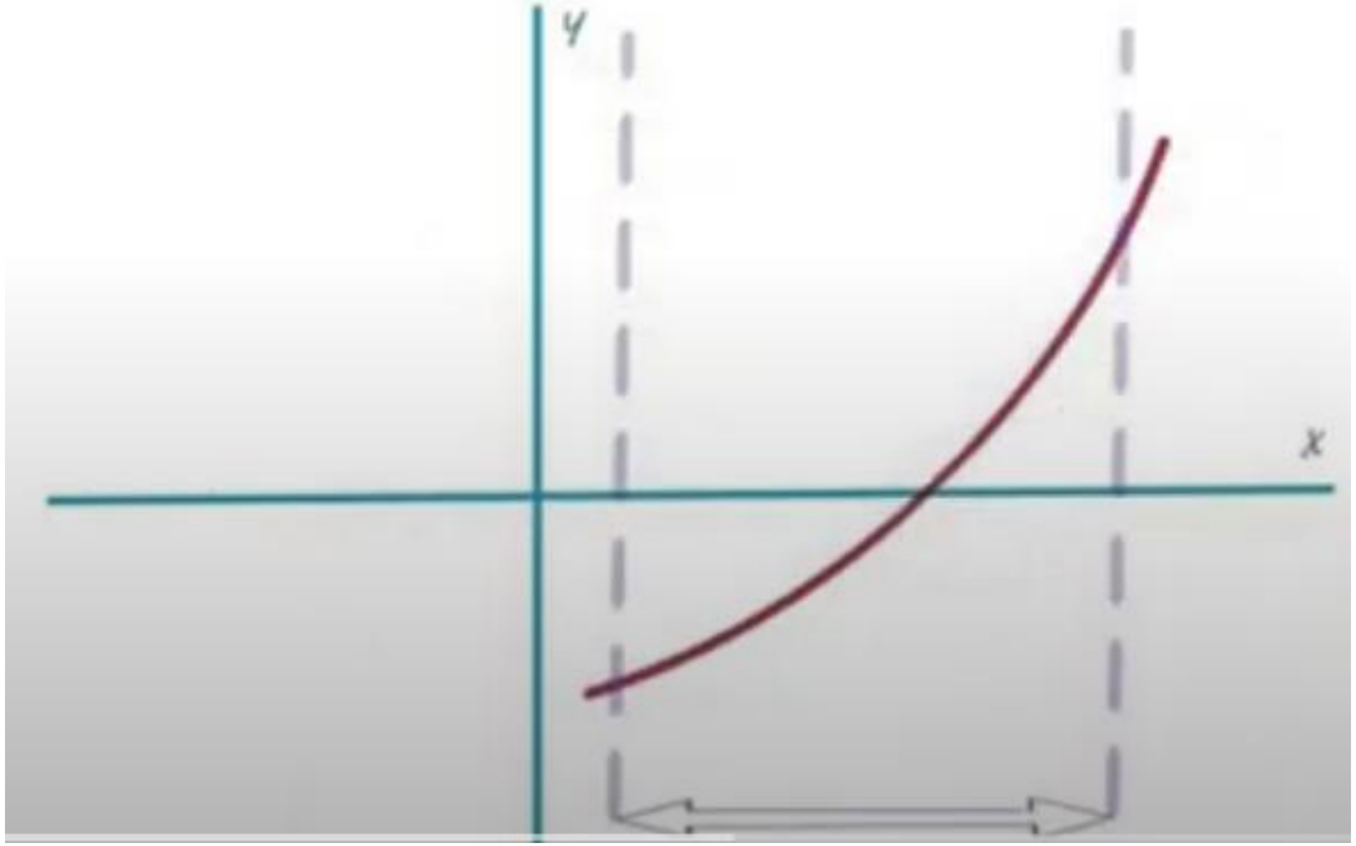
İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Fonksiyon için analitik çözüm yapılamıyor ise sayısal çözüm yöntemleri uygulanır. sayısal çözüm ile kökü bulmak ya da köke mümkün olduğu kadar yakınsamak amaçlanır.

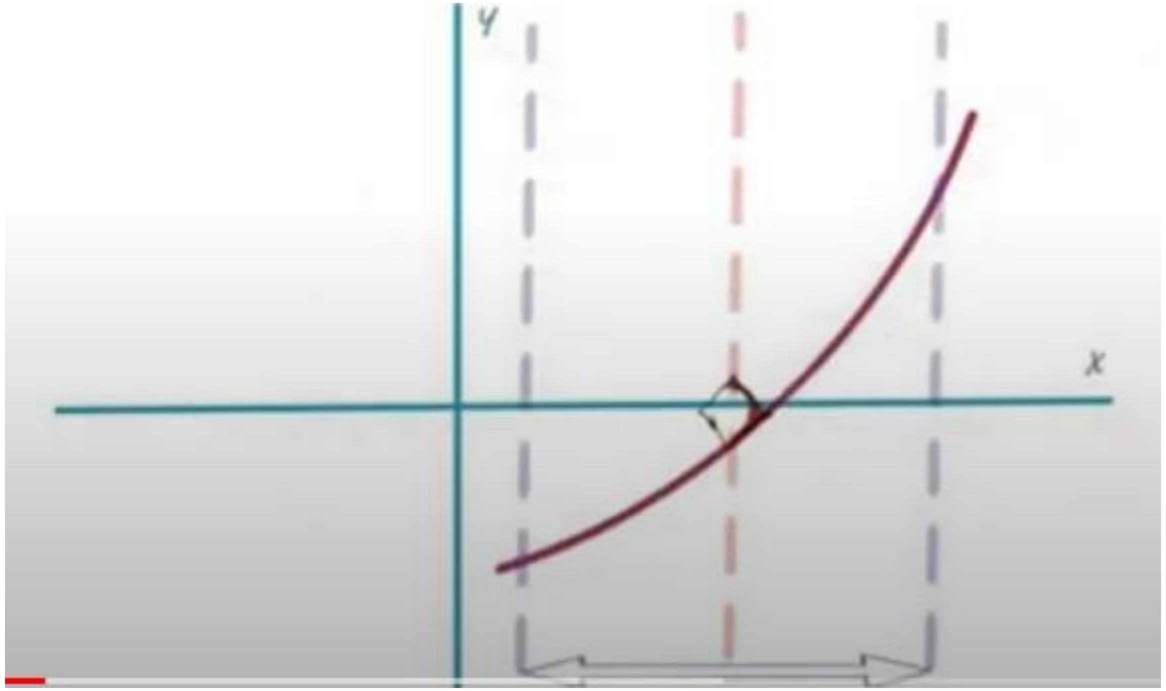


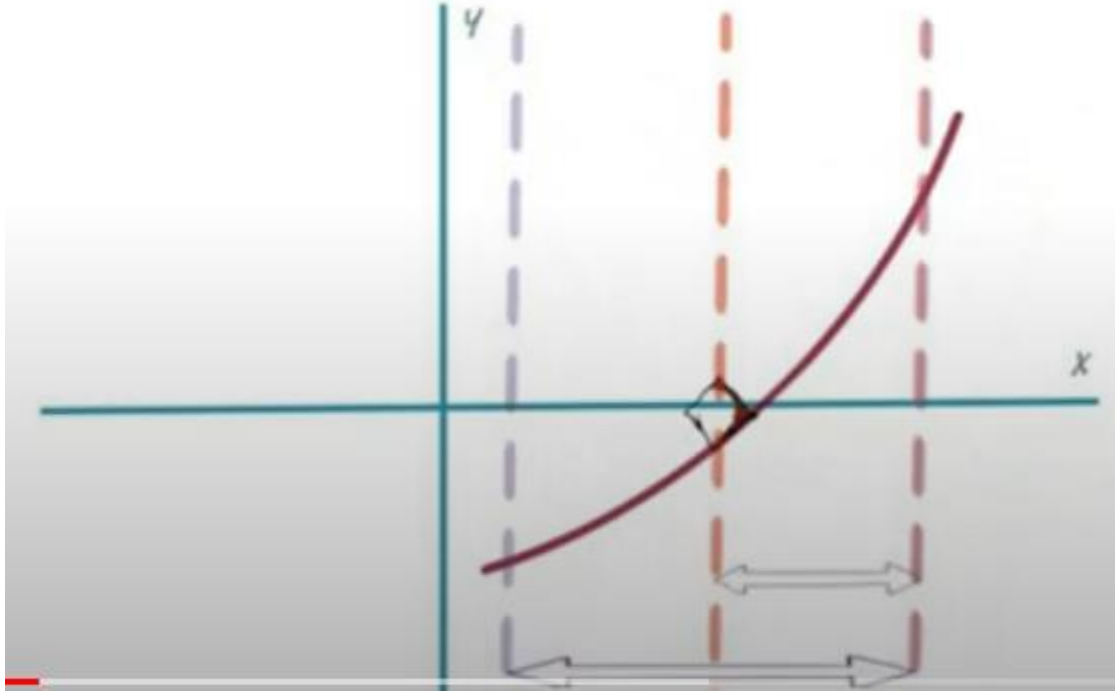
İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Sayısal çözüm iteratif olarak, yani birbirini tekrar eden işlemler olarak uygulanır. Her iterasyonda, yani her adımda, köke biraz daha yakınsanır, doğruluk biraz daha artar. Bu durumda, problem köke yakınsama problemidir. Tatmin edici bir doğrulukla sonuç elde edildiğinde süreç durdurulur. Analitik çözümü olmayan fonksiyonlar için sayısal çözüm iyi bir yaklaşımdır.

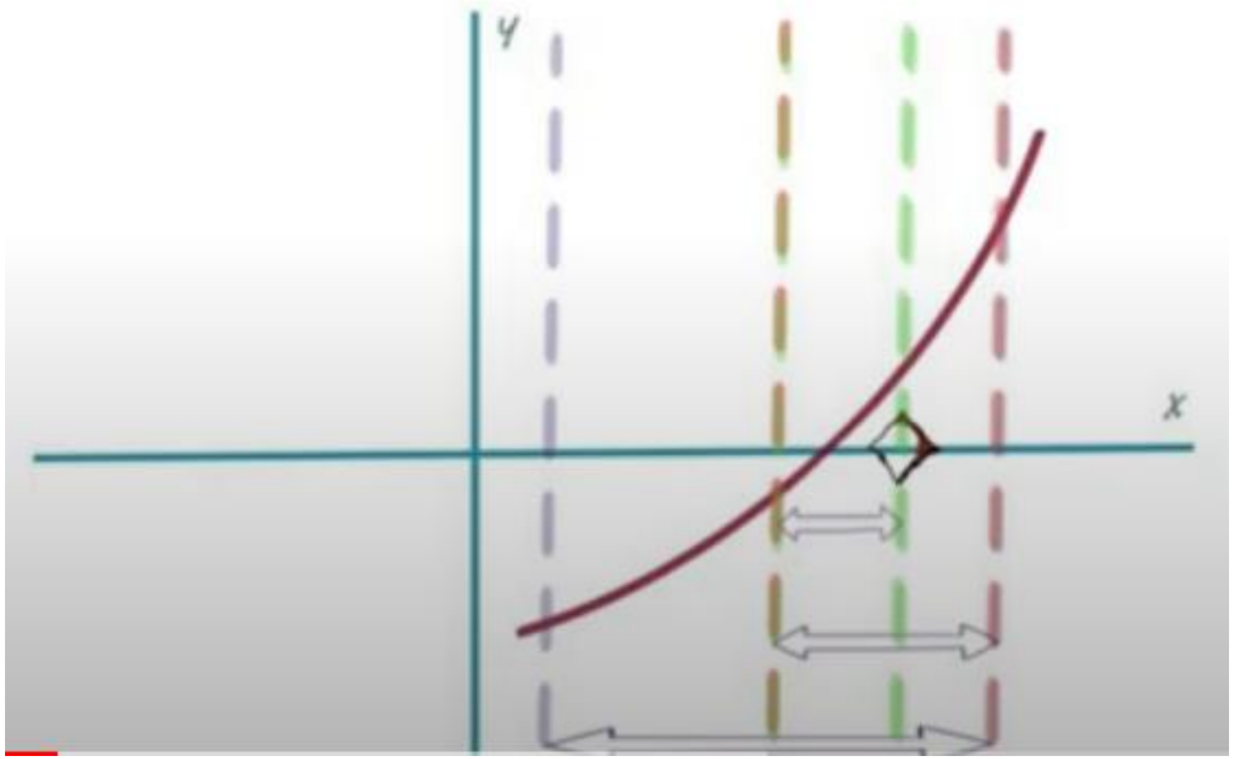


İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:





İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:



Artık problem iyice köke yakınsama problemidir ve istenen hata değerini elde edene kadar iteratif olarak işlemler yürütülür.

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Elimizde aşağıdaki gibi karmaşık fonksiyonlar olduğunu ve bu fonksiyonların köklerini aradığımızı farz edelim;

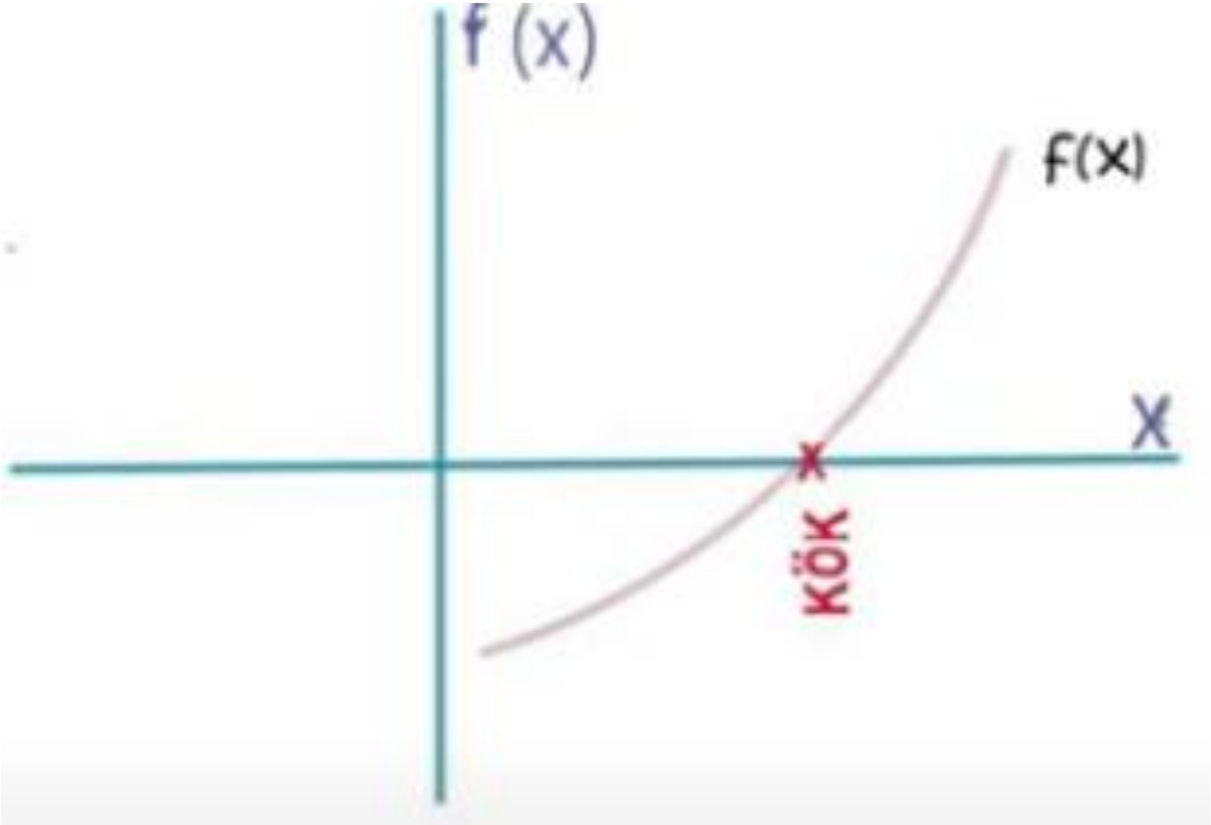
$$f(x) = 7x.sin4x - x^3 + e^{3x} + lnx$$

$$f(x) = 4e^{3x} + tan3x - 5ln5x + 2x^4$$

Bu fonksiyonlarda analitik çözüm???

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Amacımız fonksiyonun kökünü yani x-ekseninini kestiği noktayı bulmaktır. Ya da fonksiyon kökünü yüksek doğrulukla tahmin etmektir.

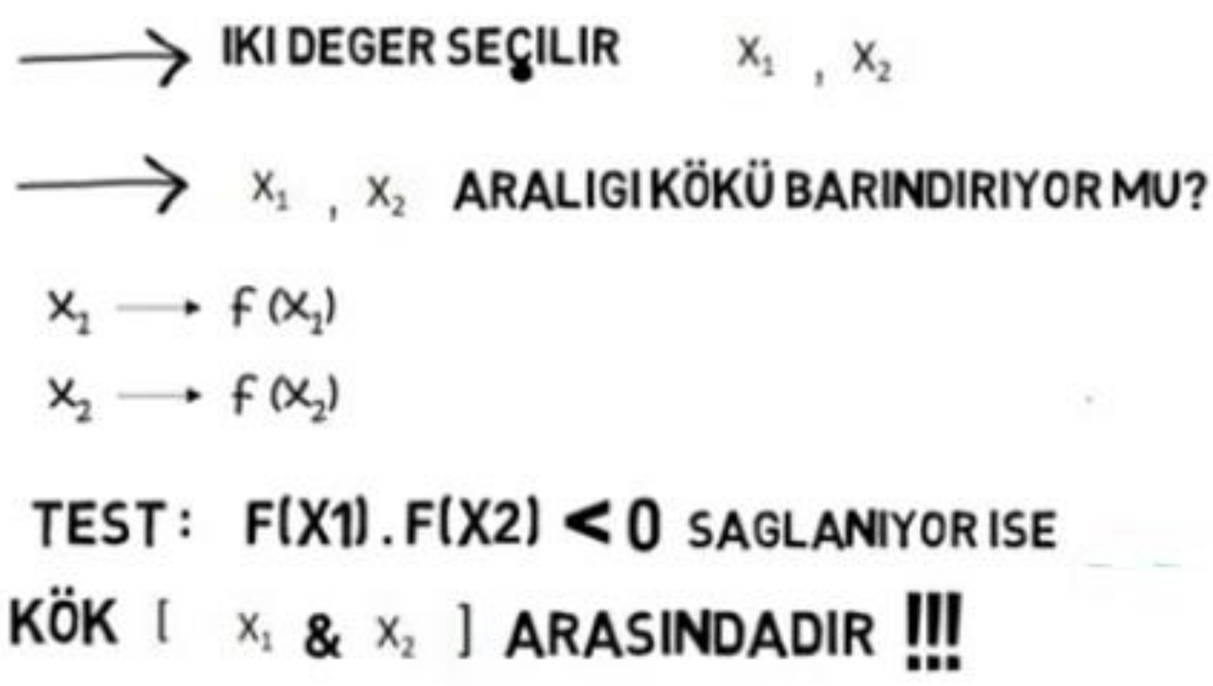


İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Grafikte gösterilen fonksiyon eğrisini bilmediğimizi varsayın, şimdi ikiye bölme yönteminin bu fonksiyonun kökünü, yani x eksenini kestiği noktayı bulmak üzere nasıl bir yaklaşım kullandığını göreceğiz. İlk önce rastgele iki değer seçilir. Fonksiyona baktığımızda kökün alabileceği bir değer olarak, aklımızda bir fikir beliriyorsa tahmini olarak o civarda sayılar seçebilir, iyi başlangıç değerlerinde sürece başlayabiliriz. Ancak bir fikrimiz yok ise herhangi iki değer alarak işleme başlarız. Bu iki değere x1 ve x2 diyelim. Bu yöntemin uygulanabilirliğinin sağlanması için başlangıç değeri olarak aldığımız iki değerinin her zaman kökü barındıran bir aralık sağlaması gerekmektedir. Kök bu iki değerin arasında ise işleme devam edilir, ancak değil ise yeni iki başlangıç değeri alınır.

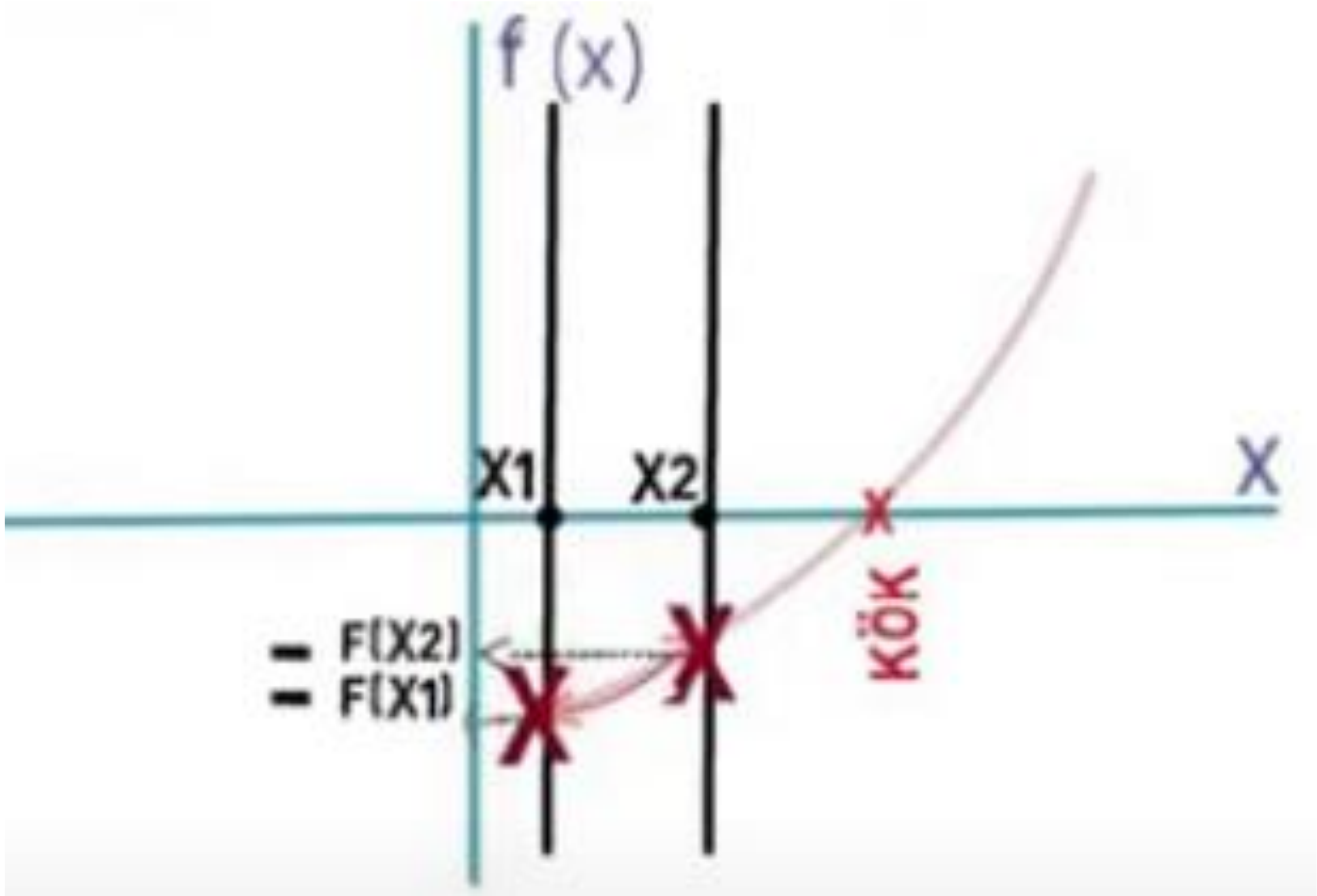
İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Kökün bu iki değer arasında olup olmadığının anlaşılması için yapılan işlem ise şudur: Elimizde fonksiyon denklemi olduğuna göre x1'i ve x2'yi denklemde yerine koyarak f(x1) fonksiyon değerini ve f(x2) fonksiyon değerini buluruz. f(x1) ve f(x2)'nin çarpımı sıfırdan küçük ise kök x1 - x2 aralığındadır. Bu şart için gereken eşitsizliği kısaca göz gezdirirsek,



İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

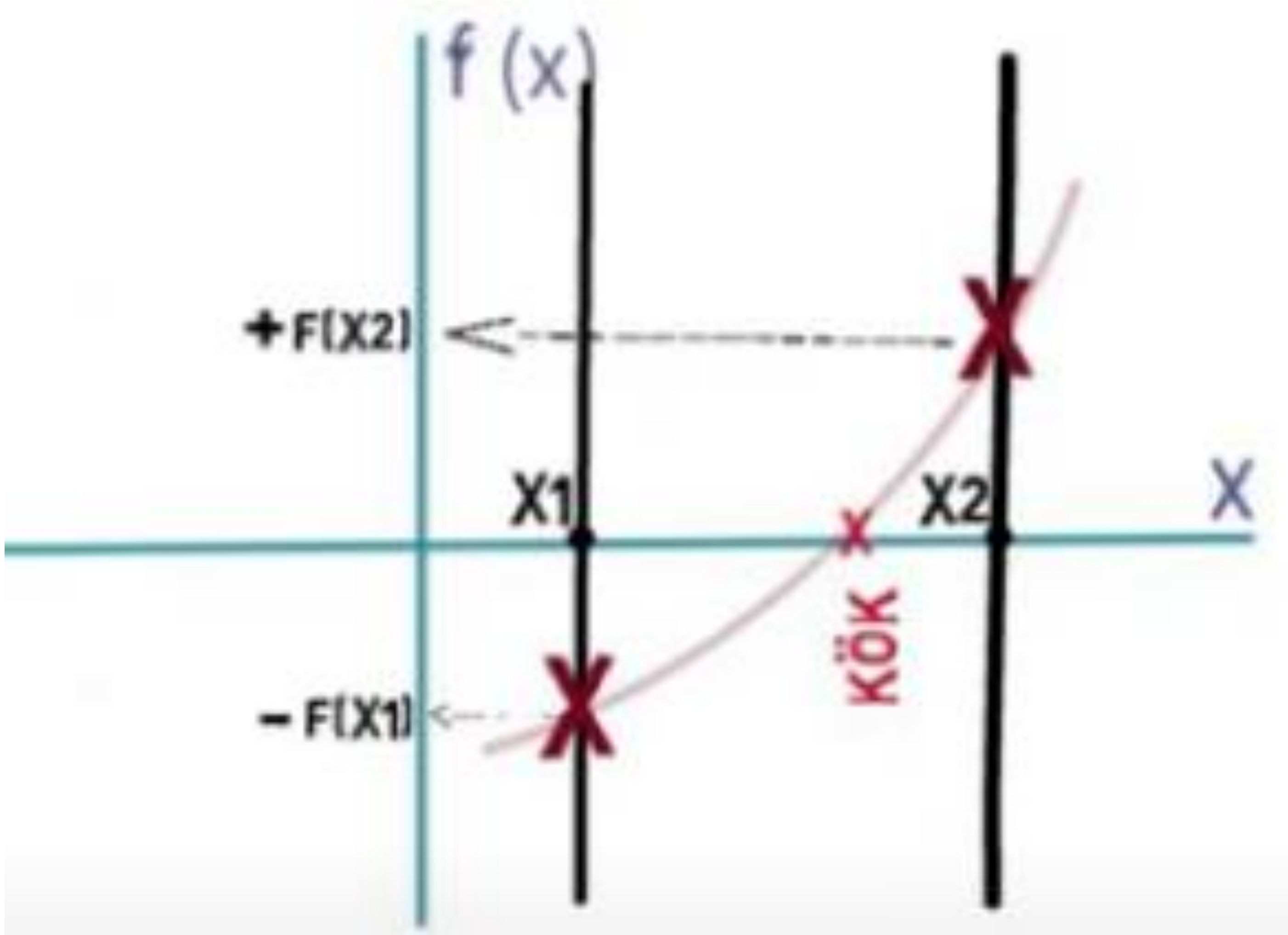
Grafik varsa önce yanlış iki X değeri seçip f(x) değerlerini hesapladığımızda her iki f(x) değeri negatif geleceği için kök seçilen x1 ve x2 değerleri arasında değildir sonucuna varılır.



İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

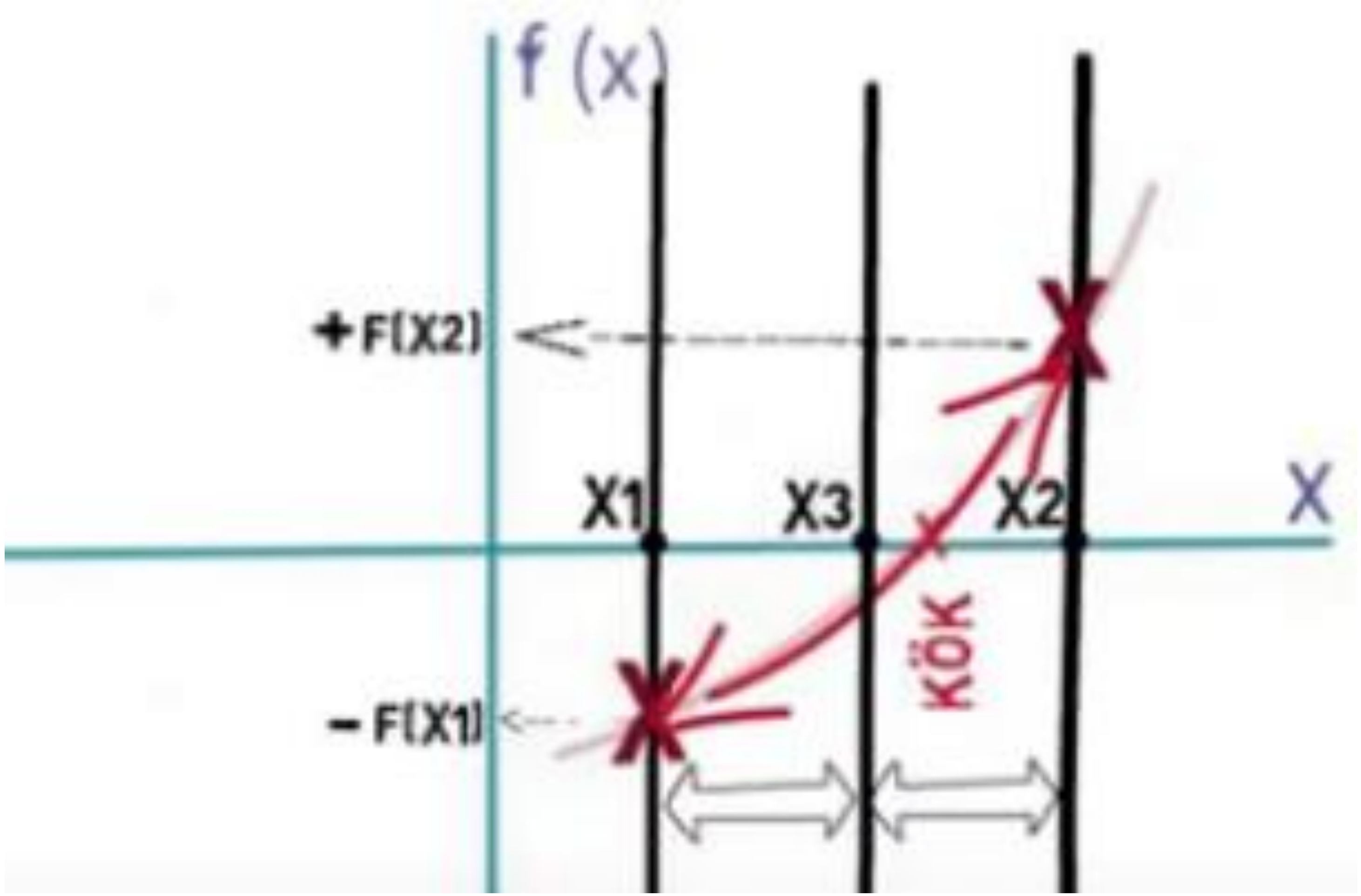
Şekildeki gibi iki faklı X değeri seçildiğinde f(x) değerlerinin işaretleri farklı olacaktır. Yani $f(x1).f(x2) < 0$ şartı sağlanır .

Buradan hareketle kökün bu iki değer arasında olduğu anlaşılacaktır.



İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Burada olduğu gibi seçilen değerlerin uygunluğu tespit edilip, kökü barındırdığı anlaşıldıktan sonra, kök tahmini yapılır. İkiye bölme yönteminde, tahmin aralığı ikiye bölünerek, yani yarılanarak orta nokta alınır, ve bu şekilde ilk kök tahmini gerçekleştirilmiş olur. Orta noktaya, yani birinci kök tahminine x3 denir.



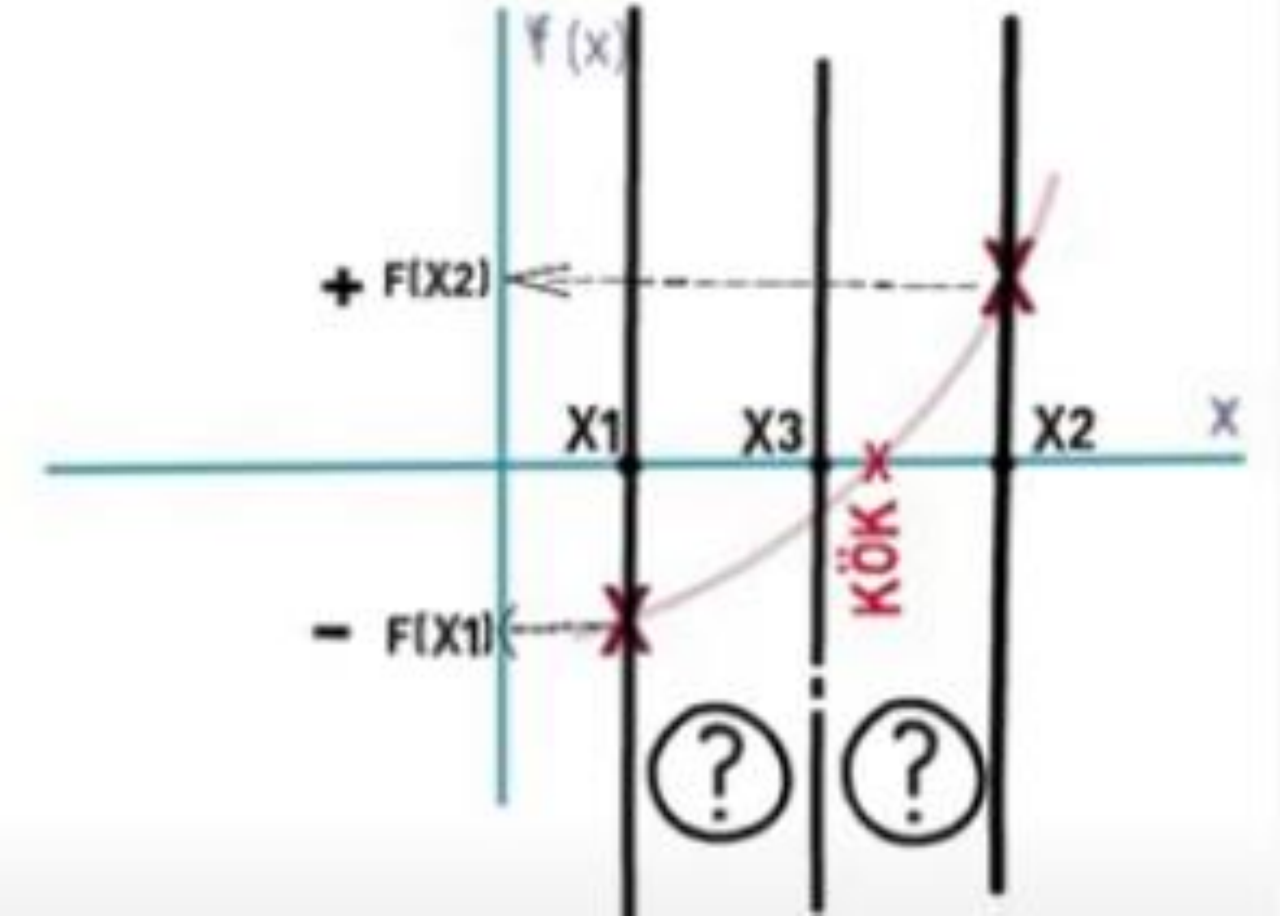
İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Sayısal analiz yöntemleri iteratif yaklaşımlardır. Bu nedenle, kök tahminindeki doğruluğu arttırmak için ikinci iterasyona geçilir.

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

2. İterasyon:

İkinci iterasyonun ilk işlemi olarak kök tahmininin yapılacağı aralık belirlenir. Birinci kök tahmini olan x3, x1 - x2 aralığını iki eşit parçaya bölmüştü. İkinci iterasyonda bu iki aralıktan biri, yani x1 - x3 veya x3 - x2 aralığından biri seçilerek devam edilir. Hangi aralığın seçileceğine ilk iterasyonda yapılan işaret testi ile karar verilir.

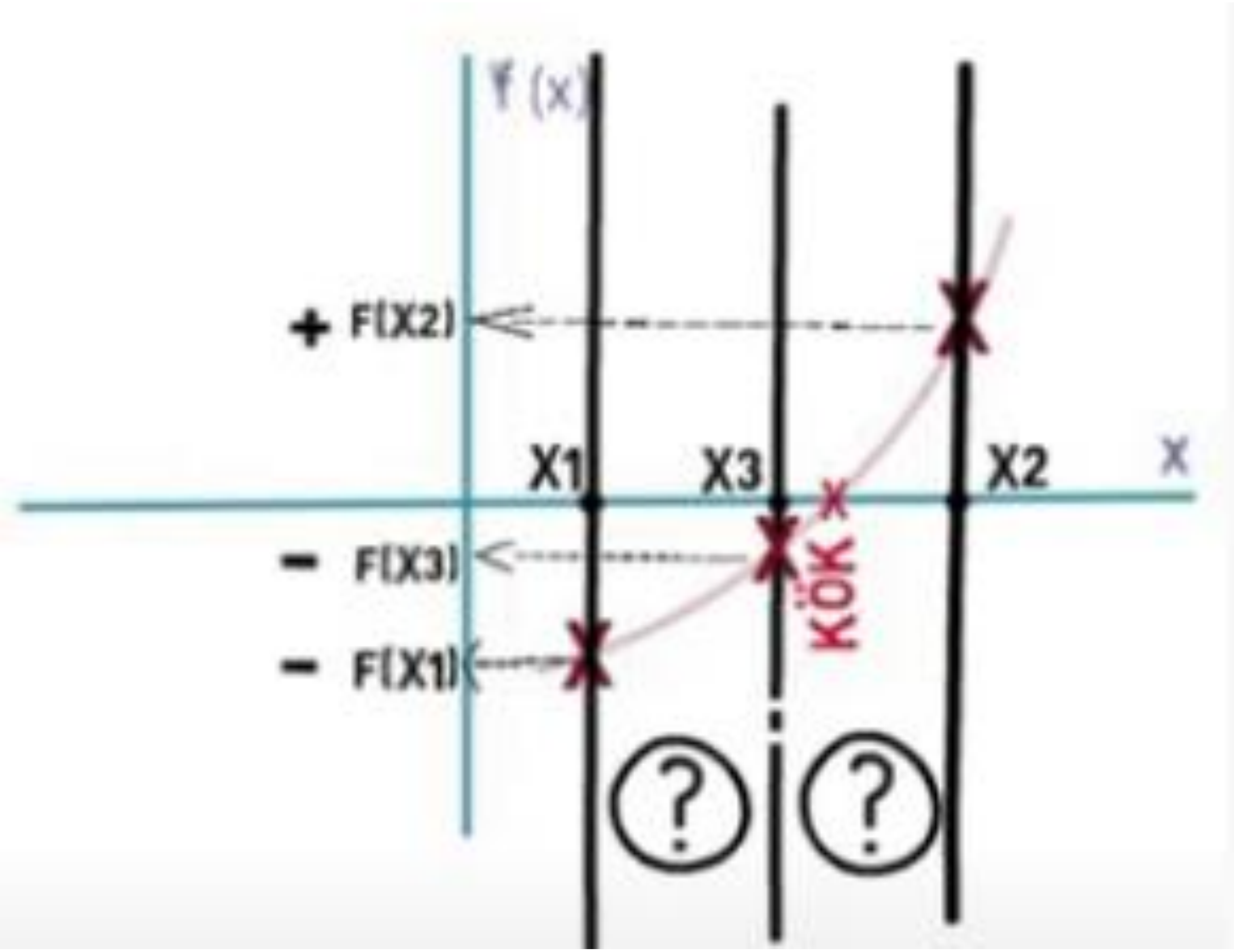


İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

2. İterasyon:

İşaret testinde kullanılan eşitsizliklerden hangisinin sağlandığının anlaşılması için yapılması gereken ilk işlem, x3 değerinin fonksiyon değerinin hesaplanmasıdır. f(x3) hesaplandıktan sonra aralık tespiti kolayca yapılabilir.

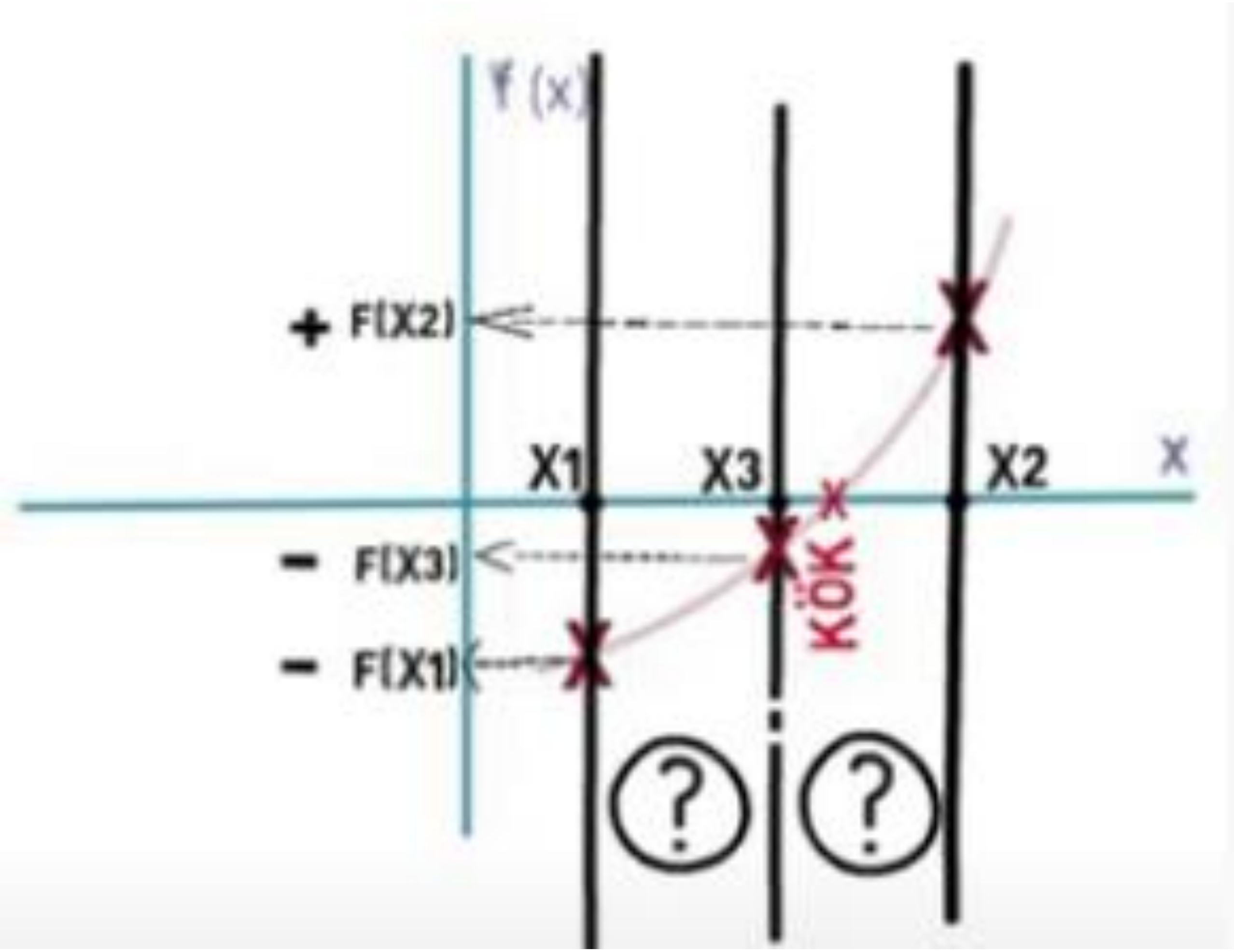
Görüldüğü gibi f(x3) negatif!!



İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

2. İterasyon:

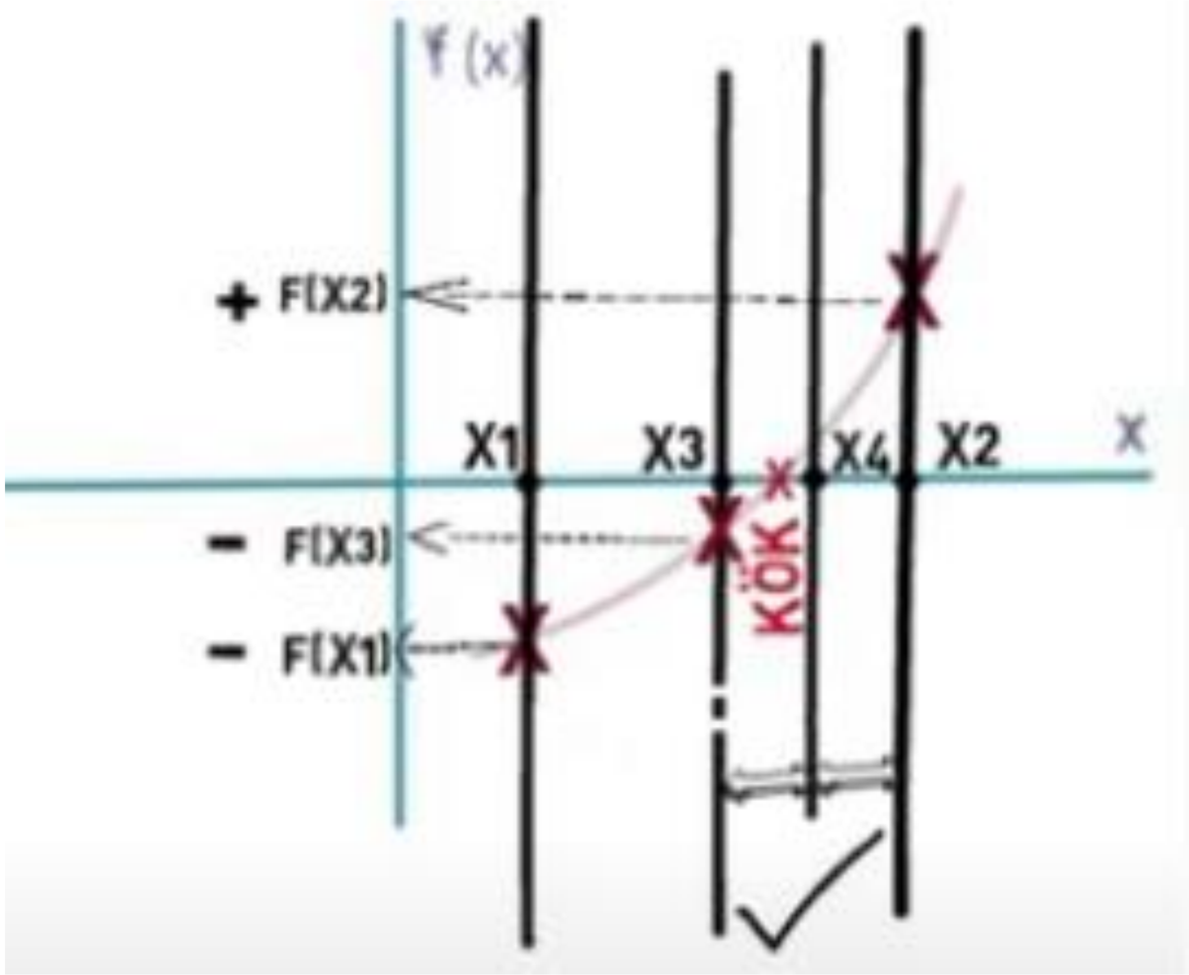
Şimdi bunu grafik üzerinde değerlendirelim. f(x3) görüldüğü gibi negatif fonksiyon değerine sahip olup, f(x1) negatif, f(x3) negatif ve f(x2) pozitif olduğu için kök barındıran aralığın *x3 - x2 aralığı* olduğu anlaşılır. Fonksiyon eğrisinin de x eksenini bu aralıkta kestiği görülmektedir.



İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

<u>2. İterasyon:</u>

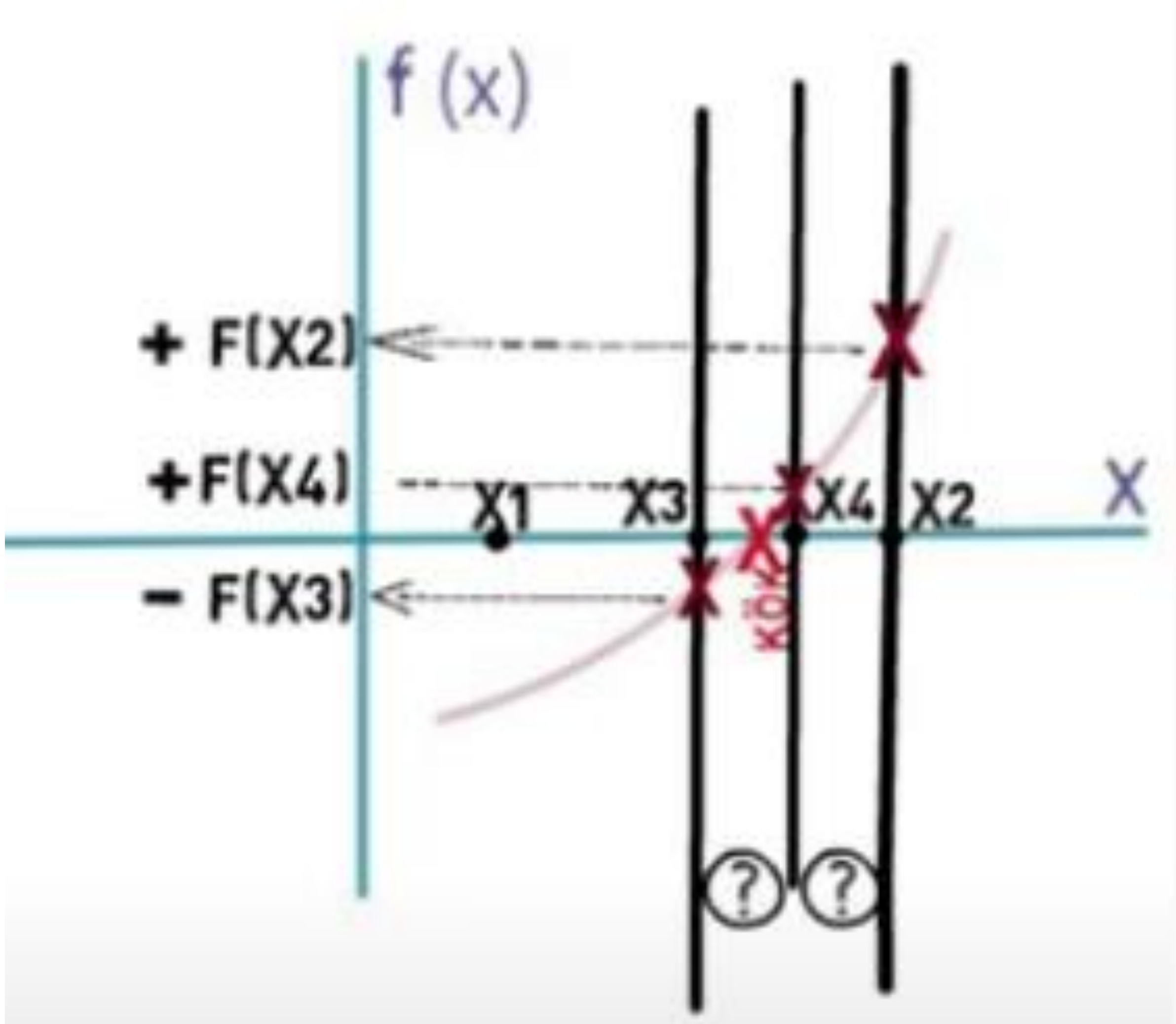
Kökün tahmin edileceği aralık tespit edildiğine göre, bu yöntemin tahmin kuralı uygulanır, ve x3 - x2 aralığının orta noktası, kök tahmini olarak alınır. Orta noktaya x4 diyelim. x4, ikinci kök tahminidir. Grafikte görüldüğü gibi ikinci kök tahmini olan x4 de, x3 ile x2 aralığını eşit iki parçaya bölmektedir. Birinci iterasyon sonucuna göre daha daralmış bir aralıkta yapılan ve daha doğruluklu bir kök tahmini ile, ikinci iterasyonu tamamladık.



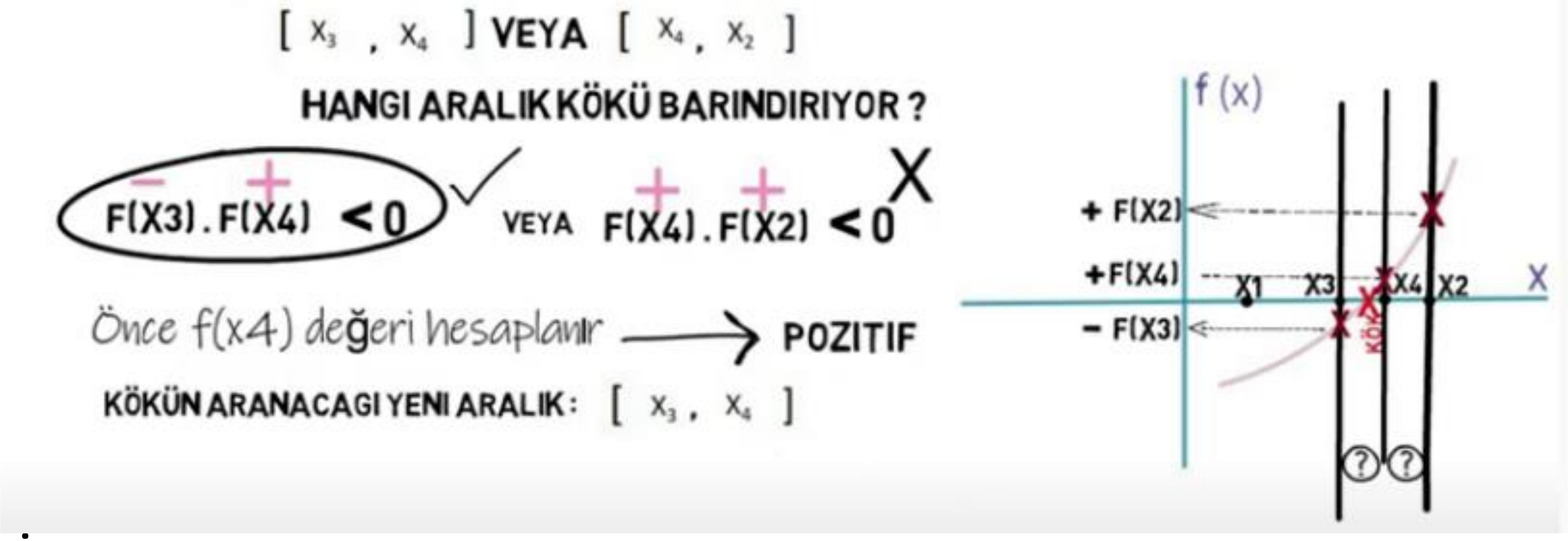
İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

3. İterasyon:

İşlemler tamamen aynı şekilde tekrarlanır. İlk önce son kök tahmininin ikiye bölmüş olduğu x3 - x2 aralığında, x3 - x4 veya x4 - x2 aralıklarından biri seçilir. Bunlardan hangisinin kökü barındırdığını anlamak için işaret testi yapılır. İşaret testine başlamadan önce son kök tahmini olan x4'ün fonksiyon değeri hesaplanmalıdır. Bu fonksiyon için x4'ün pozitif değere sahip olduğu görülmektedir.



İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:



3. İterasyon:

Bu durumda, fonksiyon değerlerinden biri negatif biri pozitif olan ***x3 - x4*** aralığı kökü barındıran yeni aralık olarak tespit edilir. Kökün aranacağı bu yeni aralığın orta noktası üçüncü kök tahminidir. Üçüncü iterasyondaki kök tahminini x5 olarak işaretleyelim. Her iterasyonda köke daha fazla yaklaşıldığı grafikte de görülmektedir. Yöntem gerekli doğru daha ulaşana kadar veya arzulanan iterasyon sayısına ulaşılana kadar devam ettirilir.

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Örnek: $x^3 + 2x - 2 = 0$ denkleminin [0,1] aralığında kökünü ikiye bölme metodu ile 4 iterasyonda gerçekleştiriniz.

İt.no	X_alt	X_üst	f(x_üst)	f(x_alt)	X_kök	f(x_kök)
1						
2						
3						
4						

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

$$x^3 + 2x - 2 = 0$$

İşaret testine dikkat!!

$x_{alt}: 0$ $\qquad$ $x_{üst}: 1$

f(0)= $0^3 + 2.0 - 2 = -2$ $\qquad$ f(1)= $1^3 + 2.1 - 2 = 1$ $\qquad$ $f(0).f(1) < 0$ ✓

1. kök tahmini : $x_{kök} = \dfrac{x_{alt} + x_{üst}}{2}$ ➡ $x_1 = \dfrac{0+1}{2} = 0.5$ BIRINCI KÖK TAHMINI

İt.no	x_alt	f(x_alt)	x_üst	f(x_üst)	x_kök	f(x_kök)
1	0	-2	1	1	0.5	

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Şimdi yeni kök aralığını bulmak için bulduğumuz x1 değerini kullanarak f(x1) değerini hesaplamalıyız. Daha sonra tabloya işleriz

HANGI ARALIK? $x_{alt}: 0$ $\quad x_1: 0.5$ $\quad x_{üst}: 1$

→ $f(0) = -2$ $\quad f(0.5) = (0.5)^3 + 2.(0.5) - 2 = -0.875$ $\quad f(1) = 1$

$\cancel{f(\overset{-}{0}).f(\overset{-}{0.5}) < 0}$ $\qquad f(\overset{-}{0.5}).f(\overset{+}{1}) < 0$ ✓

İt.no	x_alt	f(x_alt)	x_üst	f(x_üst)	x_kök	f(x_kök)
1	0	-2	1	1	0.5	
2	0.5	-0.875	1	1		

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

Şimdi belirlenen yeni aralıkta kök tahmini için yöntemin formülü kullanılır.

İkinci kök tahmini: $x_{kök} = \frac{x_{alt}+x_{\text{üst}}}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$

Bu tahmini de tabloya işlersek;

İt.no	x_alt	f(x_alt)	x_üst	f(x_üst)	x_kök	f(x_kök)
1	0	-2	1	1	0.5	-0.875
2	0.5	-0.875	1	1	0.75	-0.078

İkiye Bölme (Bisection) Yönemi:

HANGI ARALIK? $x_{alt}: 0.5$ $x_2: 0.75$ $x_{üst}: 1$

$\longrightarrow$ $f(0.5) = -0.875$ $f(0.75) = (0.75)^3 + 2.(0.75) - 2 = -0.078$ $f(1) = 1$

$\cancel{f(0.5).f(0.75) < 0}$ $f(0.75).f(1) < 0$ ✓

3. kök tahmini: $x_{kök} = \frac{x_{alt} + x_{üst}}{2}$ ➡ $x_3 = \frac{0.75 + 1}{2} = 0.875$ UCUNCU KÖK TAHMINI

İt.no	x_alt	f(x_alt)	x_üst	f(x_üst)	x_kök	f(x_kök)
1	0	-2	1	1	0.5	-0.875
2	0.5	-0.875	1	1	0.75	-0.078
3	0.75	-0.078	1	1	0.875	

İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi:

HANGI ARALIK? $x_{alt}: 0.75$ $x_3: 0.875$ $x_{üst}: 1$

$\longrightarrow$ $f(0.75) = -0.078$ $f(0.875) = (0.875)^3 + 2.(0.875) - 2 = 0.419$ $f(1) = 1$

$f\,\boxed{\overset{-}{(0.75)}.\overset{+}{f(0.875)}} < 0$ ✓ $\cancel{\overset{+}{f(0.875)}.\overset{+}{f(1)} < 0}$

4. kök tahmini : $x_{kök} = \frac{x_{alt}+x_{üst}}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{0.75+0.875}{2} = 0.812$ **DORDUNCU KÖK TAHMINI**

İt.no	x_alt	f(x_alt)	x_üst	f(x_üst)	x_kök	f(x_kök)
1	0	-2	1	1	0.5	-0.875
2	0.5	-0.875	1	1	0.75	-0.078
3	0.75	-0.078	1	1	0.875	0.419
4	0.75	-0.078	0.875	0.419	0.812	

1. kök tahmini : $x_{kök} = \frac{x_{alt} + x_{üst}}{2}$ ➡ $x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$ BIRINCI KÖK TAHMINI

HANGI ARALIK? x_{alt} : 0 x_1: 0.5 $x_{üst}$: 1

→ f(0) = -2 f(0.5)= $(0.5)^3 + 2.(0.5) - 2 = -0.875$ f(1) = 1

$\cancel{f(0).f(0.5) < 0}$ $\boxed{f(0.5).f(1)} < 0$ ✓

2. kök tahmini : $x_{kök} = \frac{x_{alt} + x_{üst}}{2}$ ➡ $x_2 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$ IKINCI KÖK TAHMINI

HANGI ARALIK? x_{alt}: 0.5 x_2: 0.75 $x_{üst}$: 1

→ f(0.5) = - 0.875 f(0.75)= $(0.75)^3 + 2.(0.75) - 2 = -0.078$ f(1) = 1

$\cancel{f(0.5).f(0.75) < 0}$ $\boxed{f(0.75).f(1)} < 0$ ✓

3. kök tahmini : $x_{kök} = \frac{x_{alt} + x_{üst}}{2}$ ➡ $x_3 = \frac{0.75+1}{2} = 0.875$ UCUNCU KÖK TAHMINI

HANGI ARALIK? x_{alt} : 0.75 x_3: 0.875 $x_{üst}$: 1

→ f(0.75) = - 0.078 f(0.875)= $(0.875)^3 + 2.(0.875) - 2 = 0.419$ f(1) = 1

$\boxed{f(0.75).f(0.875)} < 0$ ✓ $\cancel{f(0.875).f(1) < 0}$

4. kök tahmini : $x_{kök} = \frac{x_{alt} + x_{üst}}{2}$ ➡ $x_4 = \frac{0.75 + 0.875}{2} = 0.812$ DORDUNCU KÖK TAHMINI

ÖDEV

1) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ denkleminin [2,4] aralığında kökünü ikiye bölme metodu ile 4 iterasyonda gerçekleştiriniz. Bulunan çözümün kodunu hazır fonksiyon kullanmadan yazınız.

2) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin [1,2] aralığında kökünü ikiye bölme metodu ile 4 iterasyonda gerçekleştiriniz. Bulunan çözümün kodunu hazır fonksiyon kullanmadan yazınız. Çözüme bağıl hata payı $\varepsilon = 10^{-6}$ olana kadar devam ediniz.

Kaynaklar:

- Sayısal Analiz Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Zekeriya Girgin
- Sayısal Analiz Ders Notları, Arzu ERDEM.
- Sayısal çözümleme, Sefa Akpınar, Hasan Kürüm.