Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

- **İki Matrisin Toplamı:** A ve B boyutları aynı olan iki matris olsun. $A+B$ toplamı, matrislerin karşılıklı elemanlarının toplamı olarak oluşan bir matristir ve $C=A+B$ şeklinde ifade edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.7.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 6 & -3\\ 5 & 4 & 8\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 7\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix} \quad \text{ise}$$

$$C=\begin{bmatrix}1+0 & 2+4 & 5+6\\ 4+3 & 6+5 & -3+7\\ 5+2 & 4+1 & 8+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 6 & 11\\ 7 & 11 & 4\\ 7 & 5 & 12\end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi A 3×3 ve B 3×3 boyutlu matrisler olup karşılıklı elemanları toplanmış ve aynı boyutlu bir C 3×3 matrisinin aynı pozisyondaki elemanlarını oluşturmuştur.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.8.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- A 2×2, B 2×3 matrislerdir. Boyutları farklı olduğundan $A+B$ toplamı mümkün değildir.
- İki matrisin birbirinden çıkarılması için toplama özelliklerinin olması gerekir. Gerçekte iki matrisin birbirinden çıkarılması demek, bu matrislerden birinin (-1) ile çarpılıp diğeriyle toplanması demektir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\,\mathbf{B}$$

- İki matrisin birbirinden çıkarılmasında da matrislerin karşılıklı elemanları çıkarılır.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.9.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

ise C = A – B

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 & 7-1 \\ 8-2 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

1.3.3. Matrisin bir sayı (skalar) ile çarpımı

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. *A* matrisinin *k* ile belirtilen bir sayı (skalar) ile çarpımı olan *kA* matrisi, *A*'nın her elemanının *Ak* ile çarpılmasıyla elde edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.10.

$$3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ çarpımını elde ediniz?

$$3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 15 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.11.

$$-5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ çarpımını elde ediniz?

$$-5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 10 \\ -20 & -25 & -15 \\ 15 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

1.3.4 Matris toplamının ve skala çarpımının özellikleri

A, B ve C $m \times n$ boyutlu matrisler a ve b reel sayılar ise, aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $a(A + B) = aA + aB$

d) $(a + b)A = aA + bA$

e) $a(bA) = (ab)A$

f) ***Eğer $A_{m \times n}$ tüm elemanları sıfır olan $m \times n$ boyutlu bir matris ise $A + 0 = 0 + A$'dır.***

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

1.3.5 İki Matrisin Çarpımı

- Eğer $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ ve $B=[b_{ij}]$ $n \times p$ boyutlu matrisler ise A ve B'nin çarpımı $AB = C = [c_{ij}]$ $m \times p$ boyutlu bir matristir. Burada çarpımın gerçekleşebilmesi için A matrisinin sütun sayısı (n) ile B matrisinin satır sayısı (n)'nın aynı olması gerekir.
- Örneğin A matrisi 4×3 ve B matrisi 3×5 boyutlu matrisler ise $A \cdot B$ mümkündür ve $AB = C$ matrisi 4×5 boyutlu bir matristir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Eğer *A* matrisi 4×3 ve *B* matrisi 2×5 boyutlu ise *A* matrisinin sütun sayısı (n=3) ile *B* matrisinin satır sayısı (n=2) aynı olmadığından matrislerin çarpım işlemi gerçekleşmez.

$A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrislerinin çarpımı sonucunda (AB) oluşan $C=[c_{ij}]$ matrisinin elemanları,

$$c_{ij} = \sum_{k=-}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

eşitliği yardımıyla elde edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

- Çarpım işleminin nasıl gerçekleştiğini anlayabilmek için ilgili matris çarpımını şekildeki gibi yazarsak A matrisinin i'inci sıra elemanları ile B matrisinin j'inci sütun elemanlarının çarpımlarının toplamı bize C matrisinin cij'inci elemanını verecektir.
- C matrisinin diğer elemanları da benzer şekilde A matrisinin ilgili satır elemanları ile B matrisinin ilgili sütun elemanlarının çarpımının toplamı şeklinde elde edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1j} \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2j} \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nj} \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} = C$$

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.13.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilmiş olsun. A 2×3 ve B 3×4 matris olduğundan $AB = C$ çarpımı mümkündür. C matrisinin boyutu 2×4'tür.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}$$

çarpımı sonucunda elde edilen *C* matrisinin elemanlarını elde etmek için, *A* matrisinin 1. sırası ile *B* matrisinin 1. sütun elemanları çarpımının toplamı bize *C* matrisinin c_{11} elemanını verir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Bu durum aşağıda gösterilmiştir. Örneğin c11 elemanı,

$$\mathbf{c11 = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12}$$

şeklinde elde edilir. c12 elemanını elde etmek için *A* matrisinin 1.sıra elemanları ile *B* matrisinin 2.sütun elemanlarının çarpımlarının toplamı gerekir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Bu durum

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}$$

matris çarpımı göz önüne alındığında
$\mathbf{c_{12} = (1 \cdot 1) + (2 \cdot (-1)) + (4 \cdot 7) = 27}$
olarak elde edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Benzer şekilde *C* matrisinin ikinci satır elemanlarını elde etmek için *A* matrisinin 2.sıra elemanları sırasıyla *B* matrisinin 1.sütun, 2.sütun ve diğer sütun elemanları ile ayrı ayrı çarpılarak toplamlarının elde edilmesi ile bulunur. Örneğin c_{23} elemanı elde etmek için *A* matrisinin 2.satırı ile *B* matrisinin 3.sütun elemanları çarpımının toplamı elde edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}$$

$c_{23} = (2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$

Tüm satır sütun elemanları çarpım toplamı gerçekleştiğinde *AB* çarpımı sonucu

$$AB = C = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$ olarak elde edilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

1.3.6. Matris Çarpımının Özellikleri

A, B ve C matrislerinin boyutlarının çarpma işlemlerinin gerçekleşeceği şekilde olduğu varsayılmaktadır.

a) $A\,(BC) = (AB)C$

b) $A\,(B + C) = AB + AC$

c) $(A + B)\,C = AC + BC$

d) $a\,(AB) = (aA)B = A(aB)$

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

1.3.7. Özel Matrisler

Sıfır Matris: Tüm elemanları sıfır olan matristir. Eğer ele alınan sıfır matris $m \times n$ boyutlu ise ${}_{m}0_{n}$ şeklinde yazılmalıdır.

Transpoze Matris: Bir matrisin transpozesini elde etmek için matrisin satır ve sütunları yer değiştirir. Eğer matrisimiz A ise transpozesi A^{T}'dir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.16.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin transpozesini elde ediniz.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Görüldüğü gibi A matrisinin 1.sıra elemanları A^T matrisinin 1.sütun elemanları, A matrisinin 2.sıra elemanları A^T matrisinin 2.sütun elemanları olarak yer değiştirmiştir.

Kare Matris: Satırlarının sayısı sütunlarının sayısına eşit olan matrise **kare matris** denir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.17.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır ve sütun sayıları $m=n=3$ olduğundan bir kare matristir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Asal Köşegen:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kare matrisini gözönüne alalım.

Burada a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} elemanlarına **asal köşegen** elemanları denir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.18.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

kare matrisinde $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ ve $a_{33} = 9$ elemanları asal köşegen elemanlarıdır.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Köşegen Matris: *Asal köşegen dışında kalan elemanları sıfır olan kare matrise köşegen matris denir.*

Örnek: 1.19.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

kare matrisinin asal köşegen dışında kalan elemanları sıfır olduğundan köşegen matristir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Skalar Matris: Asal köşegen elemanları birbirine eşit olan köşegen matrise **skalar matris** denir.

Örnek: 1.20.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

köşegen matrisinin asal elemanları $a_n = 3$, $a_{22} = 3$, a_{33} değere (3) eşit olduğundan **skalar matristir**.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Birim Matris: Köşegen bir matriste asal köşegen elemanları 1'e eşitse bu matrise **birim matris** denir.
Eğer matris $n \times n$ boyutlu ile bu I_n ile gösterilir.

Örnek: 1.21.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi bir birim matris olup I_3 olarak gösterilir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Üç Köşegenli Matris: Bir kare matrisin asal köşegeni ve ona bitişik köşegenlerdeki elemanları hariç diğer elemanları sıfır ise bu matrise **Üç Köşegenli Matris** (tridiogonal) adı verilir. Bu köşegenlerin bazı elemanları (tümü değil), sıfır değeri olabilir.

Örnek: 1.22.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi **üç köşegenli** bir matristir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Üst Üçgen Matris: Bir kare matrisin asal köşegeninin altında kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **üst üçgen matris** denir.

Örnek: 1.23.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

matrisi, asal köşegenin altında kalan elemanları sıfır olduğundan **üst üçgen matris**’tir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Alt Üçgen Matris: Bir kare matrisin asal köşegeninin üstünde kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **alt üçgen matris** denir.

Örnek: 1.24.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi,asal köşegen üstünde kalan elemanları sıfır olduğundan **alt üçgen** m**atris**'tir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Simetrik Matris: Bir kare matriste $A^T=A$ ise matris **simetrik matris**'tir denir. Yani transpozu kendisine eşit olan matristir.

Örnek: 1.25.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$ matrisinin transpozesi alındığında

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$A^T=A$ olduğundan A matrisi **simetrik matris**'tir denir. Örneklerden de görüldüğü gibi asal köşegene göre simetrik elemanlar birbirine eşittir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Bölüm 2

2.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Notasyonu Gösterimi
2.2. Satır Eşdeğer Matrisler
2.3. Gauss ve Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemleri
2.4. Ters Matris
2.5. Matris Tersi Yöntemi Kullanarak Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

2.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Notasyonu Gösterimi

m eşitlik (denklem) ve n bilinmiyenden oluşan

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 \ldots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Lineer denklem sistemini gözönüne alalım. Daha önce de belirtildiği gibi x_1, x_2, ..., x_n bilinmeyenleri, a'lar ve b'ler ise sabitleri ifade etmektedir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Lineer denklem sistemi matrisler ile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ katsayılar matrisi,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ bilinmeyenler Sütun matrisi,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ sabitler Sütun matrisi,

olmak üzere

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

2.1.1. Arttırılmış (Augmented) Matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = [A \vdots B]$$

matrisine arttırılmış matris denir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.1.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Lineer denklem sistemi verilmektedir.

a) Sisteme ilişkin katsayılar matrisini elde ediniz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Arttırılmış matrisi elde ediniz.

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

c) Sistemi matris notasyonu yardımıyla ifade ediniz.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.2.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18
\end{aligned}
$$

Lineer denklem sistemini matrisler yardımıyla ifade ediniz.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Verilen Lineer denklem sistemi matris gösterimi yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

şeklinde ifade edilir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.3.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad &= \ 6 \end{aligned}$$

Lineer denklem sistemini matris notasyonu şeklinde ifade ediniz.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Verilen sistem matris gösterimi yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

şeklinde ifade edilir. Verilen lineer denklem sistemine ilişkin arttırılmış matris $[A \vdots B]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & \vdots & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

2.2. Satır Eşdeğer Matrisler

2.2.1. Elementer Satır İşlemleri Tanımı

Bir A matrisindeki elementer satır işlemleri aşağıdaki işlemlerden biri olarak tanımlanmaktadır.

A) A matrisinin herhangi bir satırının (örneğin i'nci satırı) sıfırdan farklı bir sabit (k) ile çarpımı. Ri, i'inci satırı belirtiyorsa bu satırın k sabiti ile çarpımı sonucu i'inci satır $Ri \rightarrow kRi$ şeklinde olacaktır.

B) A matrisinin herhangi iki satırının, örneğin i'inci ve j'inci satırlarının yerlerinin değiştirilmesi. Bu durum $Ri \leftrightarrow Rj$ şeklinde gösterilebilir.

C) A matrisinin herhangi bir satırının sıfırdan farklı bir k sabiti ile çarpılıp (örneğin j'inci satırının Rj) i'inci satırına (Ri) eklenmesi. Bu durum $Ri \rightarrow Ri + k\,Rj$ şeklinde gösterilir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.4.

Elementer sıra işlemleri yardımıyla aşağıda verilen lineer denklem sistemini satır eşdeğer denklem sistemleri halinde ifade ediniz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Lineer denklem sistemine ilişkin

Arttırılmış matris

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Lineer Denklem Sistemi

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Burada A matrisinin 2.satırı 2 sabiti ile çarpılmaktadır (R2 → 2R2). Oluşan lineer denklem sistemi ile verilen lineer denklem sisteminin çözüm kümeleri aynıdır.

Benzer şekilde eğer A matrisinin herhangi iki satırı örneğin 1.satır ile 2.satırı yer değiştirecek olursa (R1 ↔ R2) yeni arttırılmış matris ve lineer denklem sistemimiz

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Eğer 2.satırı –3 ile çarpar 3.satıra eklersek (R3 $\rightarrow$ R3 – 3R2) bu işlemler sonucu verilen arttırılmış matrisimiz ve lineer denklem sistemi

$$A \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 11 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + \quad x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - \quad 3x_3 &= 6 \\ -5x_2 + 11x_3 &= -10 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Matrislere ilişkin elementer satır dönüşümleri (işlemleri) yapıldığında her defasında A matrisinin başından başlama zorunluluğu yoktur.

Örnek: 2.5.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18
\end{aligned}
$$

lineer denklem sisteminin elementer satır dönüşümleri yardımıyla eşdeğer sistemlerini oluşturalım.
Verilen sisteme ilişkin arttırılmış matris ve denklem sistemini aşağıda belirtildiği şekilde yazalım.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Arttırılmış Sistem

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Lineer Denklem Sistemi

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ - x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 5x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 6x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Yukarıda önce R1→ R1+ R3 daha sonra R3→- R3 elementer satır işlemleri bir önceki matris üzerine gerçekleştirilmiştir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_2 \leftrightarrow R_4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 6x_3 &= -10 \\ 5x_3 &= 13 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_4 \to R_4 - R_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 5x_3 &= 14 \\ x_2 - x_3 &= 3 \\ 5x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 3 \\ 5x_3 &= 13 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_3 \to \frac{R_3}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{28}{5} \\ x_3 &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnekten de görüldüğü gibi her aşamada elde edilen matrisler (dolayısıyla lineer denklem sistemi) birbirine satır eşdeğer olup sistemin aynı çözüm kümesine sahiptirler.

Örneğin verilen

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

sisteminin çözüm kümesi ile, son aşamada elde edilen,

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = \frac{28}{5}$$
$$x_3 = \frac{13}{5}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi aynı olup

$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{28}{5}, x_3 = \frac{13}{5}$ yani $(1, \frac{28}{5}, \frac{13}{5})$'tir.

2.2.2. Bir matrisin satır eşdeğer matris şeklinde ifade edilmesi

Bir matris eğer aşağıda belirtilen kurallar sağlanırsa satır eşdeğer matris (Row echelon form) şeklindedir denir.

a) Sadece sıfırlardan oluşan satırlar mevcutsa bunlar matrisin en altındadır.

b) Sıfırlardan oluşan satırlardan farklı satırlarda ilk sıfırdan farklı eleman değeri 1'dir.

c) Her bir satırdaki ilk sıfırdan farklı 1 değeri, bir önceki satırdaki sıfırdan farklı ilk 1 elemanının sağında yer alır.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır eşdeğer matris şeklinde olup olmadığını ifade ediniz.

Görüldüğü gibi 1.sıranın ilk sıfırdan farklı elemanı 1'dir. İkinci satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 olup bu birinci satırda yer alan 1 elemanının sağındadır.
Üçüncü satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 olup, bu ikinci sıradaki 1'in sağında yer almaktadır.
Bu şartlar verilen matrisin satır eşdeğer matris şeklinde olduğunu göstermektedir.

Örnek: 2.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır eşdeğer matris şeklinde olup olmadığını ifade ediniz.

1.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'dir.
2.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 olup, bu değer bir önceki satırdaki 1 elemanının sağında yer almaktadır.
3.satırın tüm elemanları sıfır olup matrisin en alt satırını oluşturmaktadır.
Dolayısıyla verilen matris satır eşdeğer matris şeklinde ifade edilmiştir.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde 2. satır elemanlarının tümü sıfır olduğundan ve bu satır matrisin son satırı olarak yer almadığından verilen matris satır eşdeğer matris olarak ifade edilmemiştir.

Daha önce belirtilen üç kurala ek olarak eğer bir satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'in bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfır ise, verilen matris satır indirgenmiş eşdeğer matris (row reduced echelon) şeklindedir denir.

Örnek: 2.9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır indirgenmiş matris şeklinde olup olmadığını kontrol ediniz.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

1.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu elemanın bulunduğu 1.sütundaki diğer elemanlar sıfırdır.
2.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu eleman bir önceki satırdaki 1'in sağında yer almakta ve sütunundaki diğer elemanlar sıfırdır.
3.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu 2.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'in sağında yer almakta ve ilgili sütunun diğer elemanları sıfırdır.
Bu durumda verilen matris satır indirgenmiş matris şeklindedir denir.

Örnek: 2.10.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinde, 2.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 fakat bu elemanın bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfır olmadığından (burada -2 bulunmaktadır) ilgili matris satır indirgenmiş matris şeklinde değildir denir.
Elementer satır dönüşümleri yardımıyla verilen bir matris satır indirgenmiş matris şekle dönüştürülebilir.

Örnek: 2.11.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini elementer satır dönüşümleri yardımıyla satır indirgenmiş matris şekle dönüştürünüz.

Bölüm 2

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2}R_3]{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi verilen matris satır indirgenmiş matris şekle dönüştürülmüştür.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Bölüm 2

2.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Notasyonu Gösterimi
2.2. Satır Eşdeğer Matrisler
2.3. Gauss ve Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemleri
2.4. Ters Matris
2.5. Matris Tersi Yöntemi Kullanarak Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

2.3. Gauss ve Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemleri

Lineer denklem sistemlerinin çözümünü elde etmede kullanılan birçok yöntem vardır. İzleyen kısımlarda bu yöntemlerden ikisi olan Gauss ve Gauss-Jordan yöntemleri tanıtılacaktır. Burada $n \times n$ boyutlu lineer denklem sistemleri ele alınacaktır. Daha sonraki bölümlerde $m \times n$ boyutlu lineer denklem sistemlerinin çözümlerinden bahsedilecektir.

2.3.1. Gauss Yöntemi

$$\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & + a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}$$

şeklinde verilen bir lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi A'nın

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

ve arttırılmış matrisin $[A \vdots B]$'nin

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlandığı önceki bölümde ele alınmıştı.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Elementer satır dönüşümleri yardımıyla arttırılmış matris $[A \vdots B]$ 'nin A katsayılar kısmı asal köşegen elemanlar 1 olan bir üst üçgen matris haline dönüştürülürse $[A \vdots B]$ matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \vdots & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{bmatrix}$$

şeklini alır.

Verilen $[A \vdots B]$ katsayılar matrisinin elementer satır dönüşümleri yardımıyla yukarıda belirtilen eşdeğer bir $[A^* \vdots B^*]$ matrisine dönüştürülerek lineer denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi işlemi **Gauss Eliminasyon Yöntemi** olarak bilinmektedir.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.12.

Gauss Eliminasyon yöntemini kullanarak

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Sisteme ilişkin arttırılmış matrise elementer satır dönüşümleri uygulanırsa $[A \vdots B]$ matrisinin *A* katsayılar kısmı,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 7R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{49}{5} & -\frac{14}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{5}{49}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

asal köşegen elemanları 1 olan bir üst üçgen matris haline dönüşür.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$[A \vdots B]$ matrisinin satır dönüşümleri İle elde edilen eşdeğer matrisi gözönüne alınırsa,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - \quad x_3 &= 2 \\ x_2 + \frac{7}{5}x_3 &= -\frac{7}{5} \\ x_3 &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi haline dönüştürülür.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

x_3 değeri, ikinci eşitlikte yerine konursa,

$$x_2 + \frac{7}{5}\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{7}{5}$$

elde edilir.

$$x_2 = -1$$

$x_2 = -1$ ve $x_3 = -\frac{2}{7}$ değerleri birinci eşitlikte yerine konursa,

$x_1 - 2\,(-1) - (-\frac{2}{7}) = 2$ eşitliğinden, $x_1 = -\frac{2}{7}$ elde edilir.

Dolayısıyla verilen Lineer denklem sisteminin çözüm kümesi

$(-\frac{2}{7},\ -1,\ -\frac{2}{7})$ olarak bulunur.

2.3.2. Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisinin, elementer satır dönüşümleri yardımıyla, asal köşegen elemanları 1 olan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^* \\ 0 & 0 & 1\dots & 0 & b_3^* \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{bmatrix}$$

matrise dönüştürüldüğünü varsayalım.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Verilen $[A \vdots B]$ katsayılar matrisinin elementer satır dönüşümleri yardımıyla yukarıda verilen eşdeğer bir matrise dönüştürülerek lineer denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi işlemi **Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi** olarak bilinmektedir.

Örnek: 2.14.

Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi yardımıyla

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Sisteme ilişkin arttırılmış matris

$$[A \vdots B]=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

dir. Bu matrise elementer satır dönüşümleri uygulanırsa,

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

-1/2 ye dikkat.
Aslında bu aşamada asal köşegen oluştuğu için çözüm bitirilebilir.

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Elde edilen bu eşdeğer matris yardımıyla

$$
\begin{aligned}
1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 &= 2 \\
0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 &= 2 \\
0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ ve $x_3 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla çözüm kümemiz (2, 2, 0)'dır.

2.4. Ters Matris

2.4.1. Matris tersinin tanımı

A ve *B* $n\times n$ boyutlu matrisler olsun. *A* ve *B* matrisleri

$AB = BA = I_n$ bağıntısını sağlıyorsa *B*'ye *A*'nın tersi denir

ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. *A* da *B*'nin tersidir ve $A = B^{-1}$ yazılır.

Her $n\times n$ boyutlu bir kare matrisin tersinin mevcut olması gerekmez.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.15.

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin birbirinin tersi olduğunu gösteriniz.

$$\begin{array}{cc} A & B \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\begin{array}{cc} B & A \\ \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

yani $AB = BA = I_2$ olduğundan

$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ matrisinin tersidir.

Bu durum $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Benzer şekilde

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ matrisi $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi

olup $A = B^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Bir kare matrisin örneğin $n \times n$ boyutlu A matrisinin

tersi A^{-1} matrisini elde etmek için $[A \vdots I]$ matrisi elementer

satır dönüşümleri yardımıyla $[I \vdots B]$ matrisi haline

dönüştürülür. Burada $B = A^{-1}$'dir.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek: 2.16.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersini $[A \vdots I] \rightarrow [I \vdots A^{-1}]$ yöntemini kullanarak elde ediniz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{R_3}{4}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Görüldüğü gibi $[A \vdots I]$ matrisi elementer satır dönüşümleri yardımıyla $[I \vdots A^{-1}]$ matrisine dönüştürülmüştür.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Bu işlemler sonucunda *A* matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

2.4.2. Ters Matrislerin Özellikleri

Özellik 1. Her ne kadar genelde matris çarpımı komütatif değilse de (yani $AB \neq BA$), eğer $B = A^{-1}$ ise, $AA^{-1} = A^{-1}A$'dır.

Özellik 2. Bir matrisin tersi mevcut ise, bu bir tanedir.

Özellik 3. A ve B aynı boyutlu tersi alınabilir matrislerse, (AB)'nin tersi elde edilebilir ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$'dir.

Örnek: 2.18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise tersinin } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olduğunu doğrulayınız.

Bölüm 2 Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Eğer A^{-1}, *A* matrisinin tersi ise $AA^{-1} = I$ kuralı gerçekleşmelidir.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}} \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1\left(\frac{7}{4}\right)+1(-1)+1\left(\frac{1}{4}\right), & 1\left(\frac{1}{4}\right)+1(0)+1\left(-\frac{1}{4}\right), & 1\left(-\frac{5}{4}\right)+1(1)+1\left(\frac{1}{4}\right) \\ 2\left(\frac{7}{4}\right)+3(-1)-2\left(\frac{1}{4}\right), & 2\left(\frac{1}{4}\right)+3(0)-2\left(-\frac{1}{4}\right), & 2\left(-\frac{5}{4}\right)+3(1)-2\left(\frac{1}{4}\right) \\ 1\left(\frac{7}{4}\right)+2(-1)+1\left(\frac{1}{4}\right), & 1\left(\frac{1}{4}\right)+2(0)+1\left(-\frac{1}{4}\right), & 1\left(-\frac{5}{4}\right)+2(1)+1\left(\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \overset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

elde edilir. Dolayısıyla A^{-1} verilen *A* matrisinin tersidir.

Değişmeli Matrisler

A ve B matrislerine eğer $AB = BA$ ise **değişmeli** denir. Bu koşul sadece aynı mertebeden kare matrisler için uygulanır. Örneğin kabul edelim ki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman

$$AB = \begin{bmatrix} 5+12 & 4+22 \\ 15+24 & 12+44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{bmatrix}$$

ve

$$BA = \begin{bmatrix} 5+12 & 10+16 \\ 6+33 & 12+44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{bmatrix}$$

$AB = BA$ olduğundan matrisler değişmelidir.

Bir Matrisin İzi

$A = (a_{ij})$ bir n-kare matris olsun. A nın köşegen (veya ana (esas) köşegen) $a_{11}, a_{22}, ..., a_{mm}$ elemanlarından oluşur. A nın izi izA yazılır ve köşegen elemanlarının toplamıdır, yani

$$izA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{mm} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

dir.

Örnek 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & \frac{3}{2} & 6 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

matrisinin izi

$$izA = a_{11} + a_{22} + +a_{33} + a_{44} = 1 + 7 + (-5) + 10 = 13$$

Python ödev

Ortogonal Matrisler

Eğer bir reel A matrisi için $AA^T = A^TA = I$ ise A **ortogonaldir** denir. Dikkat ediniz ki bir ortogonal matris kare, terslenebilir ve $A^{-1} = A^T$ olan bir matristir.

Örnek 2.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16 \\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28 \\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu, $A^T = A^{-1}$ ve dolayısıyla $A^TA = I$ demektir. Böylece A ortogonaldir.

■

Python ödev

Örnek: 2.19.

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 4\\ -2 & -3 & 2\end{bmatrix} \text{ ise tersinin } B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{10}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{49}\\ -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7}\\ -\frac{11}{49} & \frac{1}{7} & \frac{5}{49}\end{bmatrix}$$

olduğunu doğrulayınız.

3.2.5 . Choleski Yöntemi

A katsayı matrisi L gibi bir alt üçgen matris ve U gibi köşegen elemanları 1 olan bir üst üçgen matrisin çarpımından oluştuğu kabul edilirse

A.x=B $\Rightarrow$ L. U.x=B

elde edilir. Burada U. x=y diyecek olursak L.y=B elde edilir. O halde A= L . U olacak şekilde L ve U bulunabilirse sırayla,

1- L .y =B den y matrisi bulunur.

2- U.x=y den de x matrisi bulunur.

L ve U matrislerinin nasıl bulunacağını 3x3 elemanlı

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

katsayı matrisi üzerine açıklayalım. Yönteme göre

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

olması gerekir .Bu çarpım yapılacak olursa

1- L nin 1. satırını U ile çarparak

$\ell_{11}=a_{11}$

$\ell_{11}U_{12}=a_{12}$

$\ell_{11}U_{13}=a_{13}$

den ℓ_{11}, U_{12}, U_{13} bulunur.

2- L nin 2. satırını U ile çarparak

$\ell_{21}=a_{21}$

$\ell_{21}U_{12}+\ell_{22}=a_{22}$

$\ell_{21}U_{13}+\ell_{22}U_{23}=a_{23}$

den ℓ_{21}, ℓ_{22} ve U_{23} bulunur.

3- L nin 3. satırını U ile çarparak

$\ell_{31}=a_{31}$

$\ell_{31}U_{12}+\ell_{32}=a_{32}$

$\ell_{31}U_{13}+\ell_{32}U_{23}+\ell_{33}=a_{33}$

den ℓ_{31}, ℓ_{32} ve ℓ_{33} bulunur. Böylece L ve U nun elemanları bulunduktan sonra L.y=B den y , U.X = y den X çözülür. Dikkat edilirse L nin ilk sütunu A nın ilk sütununa eşittir. Dolayısıyla işlem yapmadan olduğu gibi alabilir.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Verilen katsayı matristen faydalanarak ilk olarak L ve U nun elemanlarını bulalım.

$\ell_{11} = a_{11} = 1$, $\qquad \ell_{11}\,U_{12} = a_{12} = 2$

$\ell_{21} = a_{21} = 2$ $\qquad \ell_{21}\,U_{12} + \ell_{22} = 5 \rightarrow \ell_{22} = 1$

$\ell_{31} = a_{31} = 3$ $\qquad \ell_{31}\,U_{12} + \ell_{32} = a_{32} = 1 \rightarrow \ell_{32} = -5$

$U_{12} = 2$, $\qquad \ell_{11}U_{13} = a_{13} = 3 \qquad U_{13} = 3$

$\ell_{21}U_{13} + \ell_{22}U_{23} = a_{23} = 2 \rightarrow U_{23} = -4$

$\ell_{31}U_{13} + \ell_{31}U_{23} + \ell_{33} = a_{33} = 5 \rightarrow \ell_{33} = -24$

o halde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

buradan

$$L.y = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$U.x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.