Sayısal Analiz

1.Hafta

1.Giriş

Sayısal Analiz; diferansiyel denklem, integral veya denklemlerin bilgisayar yardımı ile analitik olarak değil, sayısal olarak çözümlenme tekniğidir. Mühendislikte bir çok lineer olmayan diferansiyel denklem analitik olarak çözülemediği halde, sayısal olarak çözümlenebilmektedir.

Gerçek hayatta bilinen birçok fiziksel olayın gerçek hâli lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmektedir. Buna örnek olarak Navier-Stokes Denklemleri, Burger’s Denklemi vesaire verilebilir. Veya salınım hareketi yapan bir salıncağın hareket denklemi, lineer olmayan diferansiyel denklem ile ifade edilebilmekte ve bu denklemin analitik çözümü hâlâ bilinmemektedir. Bir yağmur damlasının gökyüzünden yere inerken rüzgar direnci hesaba alındığında, sabit hızla yere indiği bilinmektedir. Eğer normal Dinamik dersindeki gibi dikey atış problemi olsaydı, yere ininceye kadar o kadar hızlanırdı ki, düştüğü yerde hasara neden olabilirdi. Bu çözümler sayısal olarak yapılabilmektedir. Birçok karmaşık fonksiyonun integrali, analitik olarak yapılamamasına rağmen, sayısal olarak yapılabilmektedir.

1.Giriş

Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, sayısal analiz metotları da gelişmiştir. Bunun en bilinen örnekleri, Sonlu Elemanlar Metodu, Sonlu Farklar Metodu ve Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuvadratüre Metotlarıdır. Ayrıca birçok lineer veya lineer olmayan denklem sistemleri sayısal analiz metotları ile çözülebilmektedir. Bu işlemlerin yapılabilmesi için de bir çok program geliştirilmiştir (Pascal, C++, C#, Matlab, Python gibi).

Bunun yanı sıra Sembolik hesaplama yapan programlar da geliştirilmiştir (Maple, Mathematica, Mathcad, Mupad, Scilab, Derive gibi). Bu programlar sayesinde diferansiyel denklemler bile sembolik olarak çözülebilmektedir.

Hatta son zamanlara Excel programına ilave edilen Matematiksel Fonksiyonlardan (Matris Tersi, Matris Çarpımı gibi) sonra, Sayısal Analiz ile ilgili bütün sonuçlar Microsoft Excel kullanılarak da elde edilebilmektedir.

2. Hata tanımlamaları

Bilgisayar ile hesaplama yaparken, bilgisayarda 1/3 gibi sayıları ondalık ile belirli kesirli sayılarla ifade ederken sayılar kısaltmalardan dolayı hatalar meydana gelir ve bu nedenle,

$$\textit{Gerçek Değer}=\textit{Hesaplanan değer} \pm Hata$$

şeklinde yazılabilir. Bu hataların türlerini belirleyebilmek için bazı tanımlamalar yapılmıştır.

2. Hata tanımlamaları

Sayısal yöntemlerde pek çok problemin çözümü için hesapladığımız değerler gerçek değerler olmayabilir. Bu anlamda özellikle de sayısal algoritmaların gelişmesinde bize rehberlik edecek olan bazı tanımlamaları vermemiz gerekmektedir.

Problemin sayısal yöntem ve analitik yöntemle çözülmesi durumunda ikisi arasında ortaya çıkan fark, hata olarak tanımlanır.

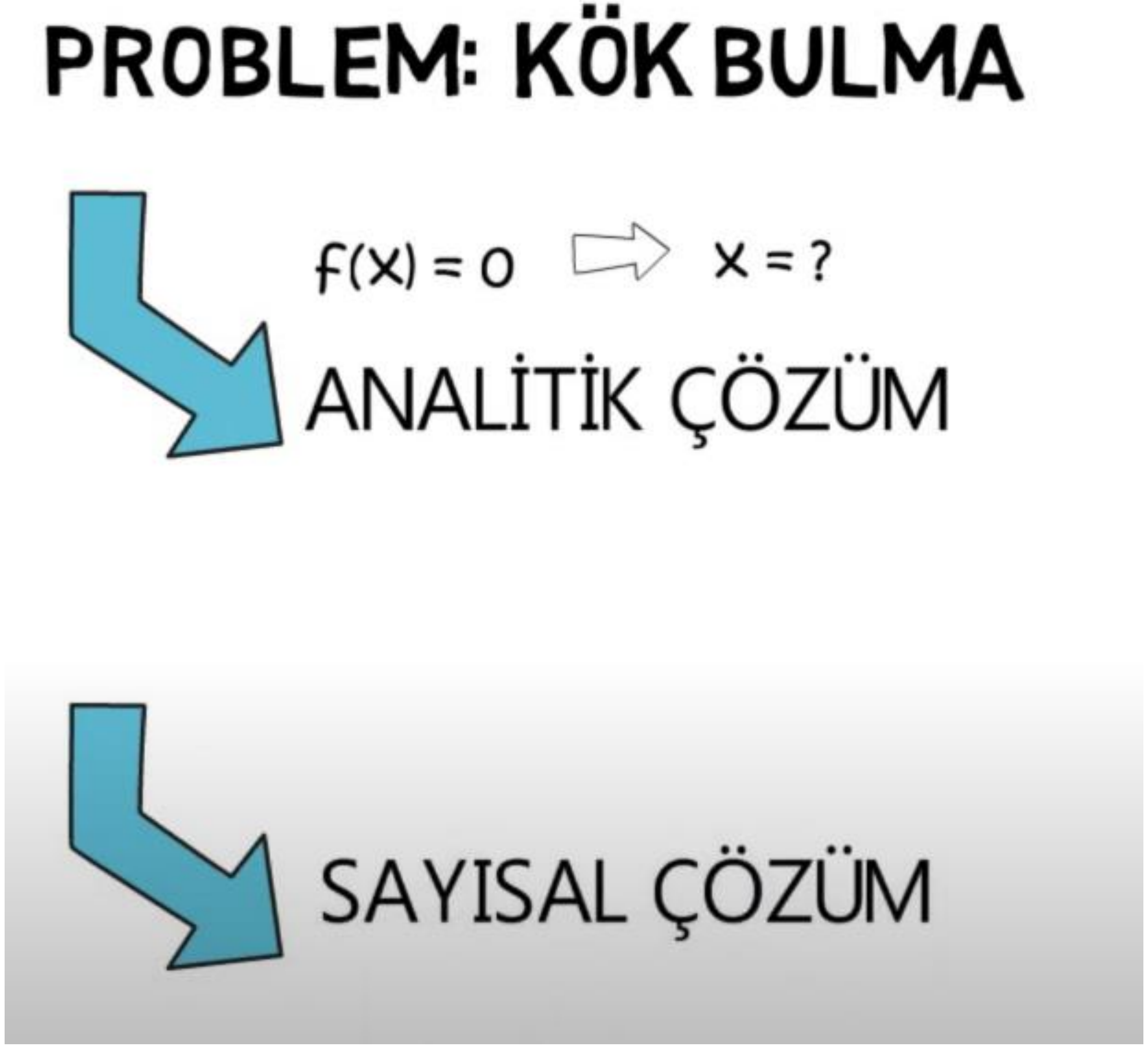
Sayısal Yöntem~Analitik Yöntem

- Sayısal yöntem analitik çözümün elde edilemediği veya elde edilmesinin çok zor olduğu problemlerde yaklaşık çözümünü bulmakta kullanılan yöntemleri ifade etmektedir ve bu dersin konusudur.
- Örneğin, derecesi 5 veya daha büyük polinomların kökleri için kullanılan bir formül yoktur. $(x^2 - 3x - 5 = 0 \; gibi)$
- Hatta genel anlamda $\mathrm{f}(x) = 0$ şeklindeki tüm denklemlerin çözümleri için yöntemler geliştirmek sayısal analizin bir konusudur.

Sayısal Yöntem~Analitik Yöntem

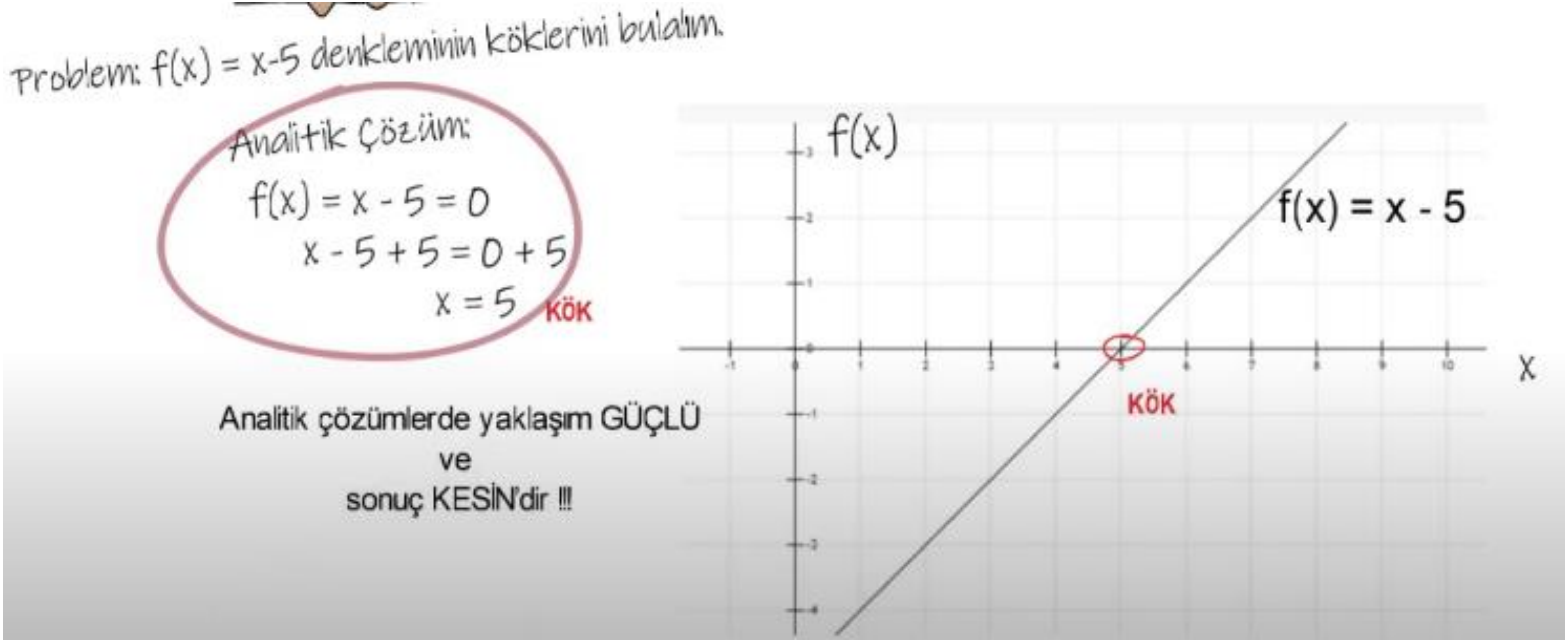
- Sayısal analiz, sayısal yöntemlerin çözüme yakınsayıp yakınsamadığı, hangi koşullar sağlanırsa yakınsama gerçekleşeceği ile ilgilenir.
- Bütün sayısal yöntemleri için başlangıç değeri önemlidir. Bazı problemlerde bir, bazı problemlerde daha fazla başlangıç değeri olabilir.
- Sayısal analizde, algoritmaların etkisinin ölçümü ve maliyeti de önemli bir konudur. Mesela n denklem içeren $Ax = b$ lineer denklem sistemini çözerken n^3 miktarında aritmetik işlem kullanılır. n bilinmeyen sayısı arttıkça aritmetik işlem sayısı küpü şeklinde artmaktadır. Bunu planlamak ve bellek yükünü düşünmek gerekir.

Sayısal Yöntem~Analitik Yöntem



- Analitik yöntemler lineer sistemlerde, basit geometrik problemlerde ve az boyutluluk için uygundur.
- Gerçek hayattaki problemler ise non-lineer, kompleks geometriler, çok boyutluluk gibi özelliklere sahiptirler. Analitik çözümün çok zor veya mümkün olmadığı durumlarda sayısal yöntemler tercih edilir.

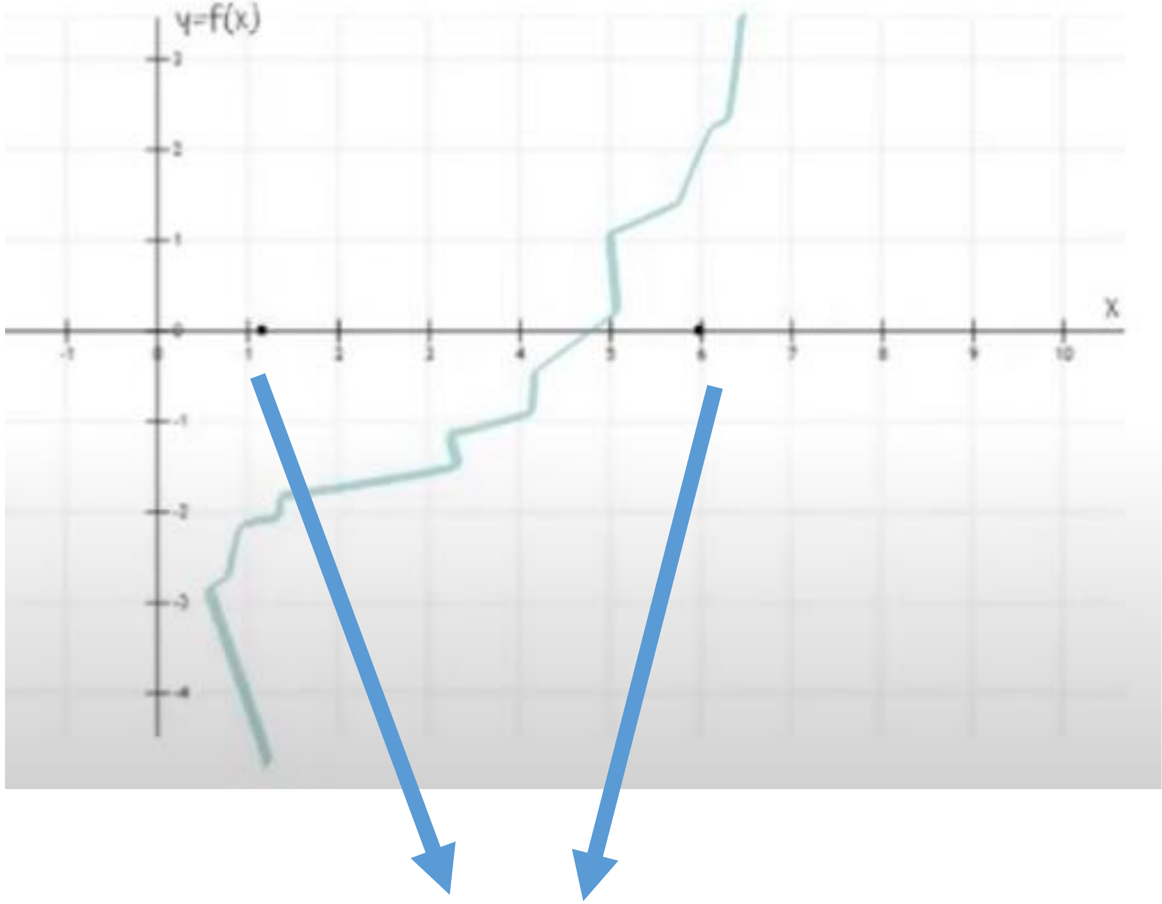
Sayısal Yöntem~Analitik Yöntem



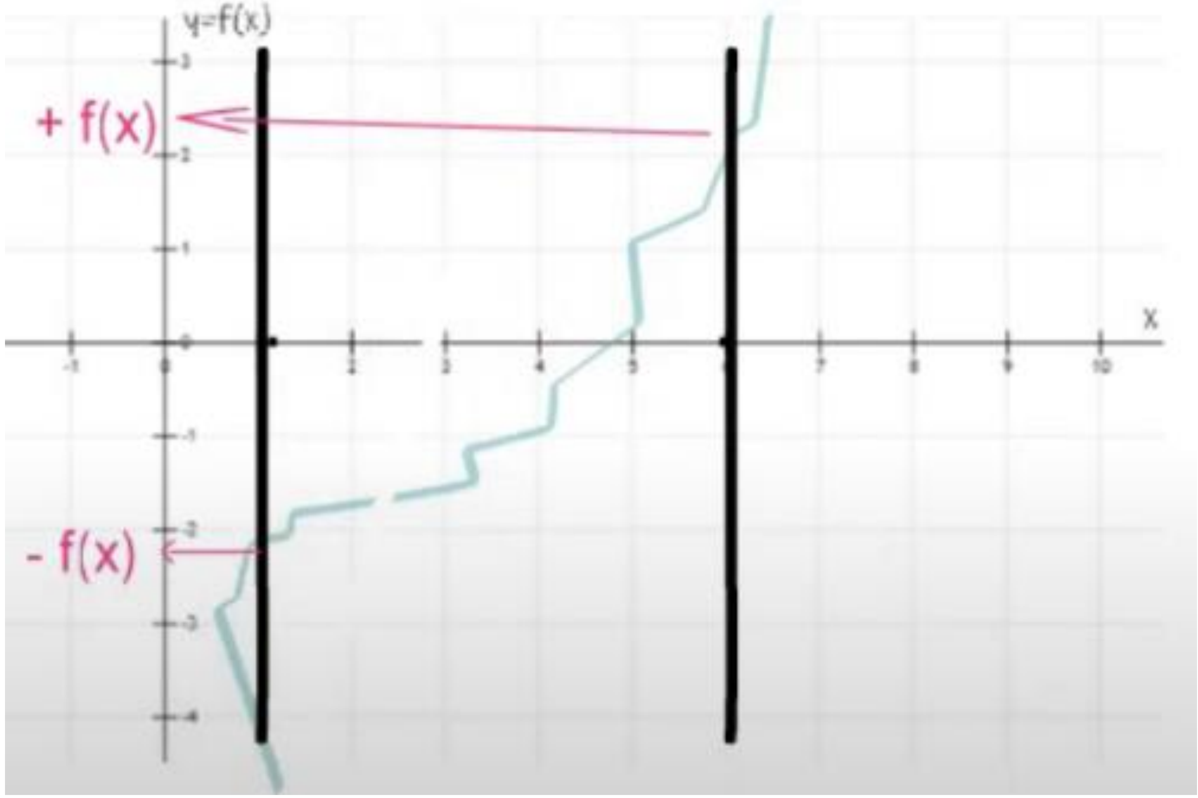
Sayısal Yöntem~Analitik Yöntem

Aynı problemi sayısal yöntem ile çözerken mümkün ise kökü bulmak, mümkün değilse köke yaklaşmak ve en iyi tahmini yapmak amaçlanır. İteratif olarak köke yakınsamak üzerine bir süreç izlenir. En basit yöntemlerden olan ikiye bölme metodunu kullanalım. Bu yöntemde fonksiyonun kökü fonksiyon eğrisinin x eksenini kestiği nokta olduğuna göre, kökün sağında ve solunda fonksiyon değerlerinin farklı işaretlere sahip olması gerekir. Bu köke yaklaşım yapmak için iyi bir dayanaktır.

Sayısal Yöntem~Analitik Yöntem



Rastgele iki x noktası seçeriz.



Fonksiyon değerleri hesaplandığında fonksiyon değerlerinin işaret değiştiği görülür ve kökün bu iki aralık arasında olduğu kabul edilir.

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)

Fonksiyonların Taylor serisine açılımı aşağıdaki gibidir;

$$f(x_{i+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots + R_n$$

Buradaki artan değer,

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x_{i+1} - x_i)^{n+1}, \quad (x_{i+1} \le \xi \le x_i)$$

Şeklinde tanımlanır.

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)
Taylor Serisi (Kısa Bakış)

$$e^x \to 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^1 \to \underbrace{1 + \frac{1^1}{1!}}_{2.0000000} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \cdots$$

$$e^x \to 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^1 \to \underbrace{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!}}_{2.5000000} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \cdots$$

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)
Taylor Serisi (Kısa Bakış)

$$e^x \rightarrow 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^1 \rightarrow \underbrace{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!}}_{2.6666667} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \cdots$$

$$e^x \rightarrow 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^1 \rightarrow \underbrace{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!}}_{2.7083333} + \frac{1^5}{5!} + \cdots$$

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)
Taylor Serisi (Kısa Bakış)

$$e^x \rightarrow 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^1 \rightarrow \underbrace{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!}}_{2.7166667} + \cdots$$

$$e^x \rightarrow 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^1 = \underbrace{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \cdots}_{2.7182818}$$

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)

şeklinde tanımlıdır. Taylor serisinde $(x_{i+1} = x, x_i = 0)$ alındığında, Maclaurin Serisi elde edilir.

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x)^4 + \ldots \qquad (2)$$

Bazı fonksiyonların Maclaurin serisine açılımı aşağıdaki gibidir.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

Şimdilik Taylor ve Maclaurin Serileri!

$f(x) \longrightarrow$ SONSUZ defa türevlenebilir ise $\longrightarrow$ SERİ haline getirirler.

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \longrightarrow \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x - 1 \\ f''(x) &= 6x + 2 \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f(x) = e^{2x} \longrightarrow \begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} \\ f''(x) &= 4e^{2x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seri haline getirilebilir.

ÖNEMLİ: Bir fonksiyon sonsuz defa türevlenebiliyor ise, Taylor ve Maclaurin seri açılımları elde edilebilir.

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)

$$\sin(x) = \begin{cases} \cancel{\sin(0)} + \cos(0)(x) - \dfrac{\cancel{\sin(0)}}{2!}(x)^2 - \dfrac{\cos(0)}{3!}(x)^3 + \dfrac{\cancel{\sin(0)}}{4!}(x)^4 + \\ + \dfrac{\cos(0)}{5!}(x)^5 - \dfrac{\cancel{\sin(0)}}{6!}(x)^6 - \dfrac{\cos(0)}{7!}(x)^7 + \dfrac{\cancel{\sin(0)}}{8!}(x)^8 + \dfrac{\cos(0)}{9!}(x)^9 + \ldots \end{cases}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)} \cdot x^{2\cdot n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot n+3)} \cdot x^{2\cdot n+3} \cdot \cos(\xi \cdot x)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2\cdot k+1)} \cdot x^{2\cdot k+1} + R_n(x)$$

Sayfa 6 daki Taylor serisi denkleminden de anlaşılacağı üzere, seride alınan terim sayısı artarsa hata payı da azalır. Bu hata payı kesme hatası olarak adlandırılır.

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)

Kesme hatası denklemi;

$$Kesme\ Hatası = Gerçek\ değer - Hesaplanan\ değer$$

Şeklinde tanımlanır. Ya da;

$$E_t = X_{exact} - X_{app}$$

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)

- Örnek:

$e^{1.5}$ sayısını Maclaurin serisine açarak maksimum, a) 3.mertebeye kadar olan terimlerini alarak, b) 5.mertebeye kadar olan terimlerini alarak, kesme hatasını hesaplayınız.

Çözüm: İlk önce verilen fonksiyonun Maclaurin serisini yazalım;

$$e^x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right] + \cancel{\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \rightarrow e^{1.5} = 1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!} \rightarrow e^{1.5} = 4.187$$

$$\boxed{E_t = x_{exact} - x_{app}} \rightarrow E_t = x_{exact} - x_{app} \rightarrow E_t = e^{1.5} - 4.1875 \rightarrow E_t = 4.4816890703380650 - 4.1875$$

$$\boxed{E_t = 0.2941890703380650} \longrightarrow$$ 3.Mertebe için elde edilen kesme hatası!!

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)

5.Mertebe Maclaurin serisini yazarsak;

$$e^x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \cancel{\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \rightarrow e^{1.5} = 1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!} + \frac{1.5^4}{4!} + \frac{1.5^5}{5!} \rightarrow e^{1.5} = 4.46171875$$

$$\boxed{E_t = x_{exact} - x_{app}} \rightarrow E_t = x_{exact} - x_{app}$$

$$E_t = e^{1.5} - 4.1875 \rightarrow E_t = 4.4816890703380650 - 4.46171875$$

$$\boxed{E_t = 0.0199703203380650}$$

2.1 Kesme Hatası (Truncation Error)

Serinin 3. ve 5.mertebe terimleri ile elde edilen hatalar incelendiğinde;

Seride alınan terim sayısı arttıkça kesme hatasının da azaldığı görülecektir.

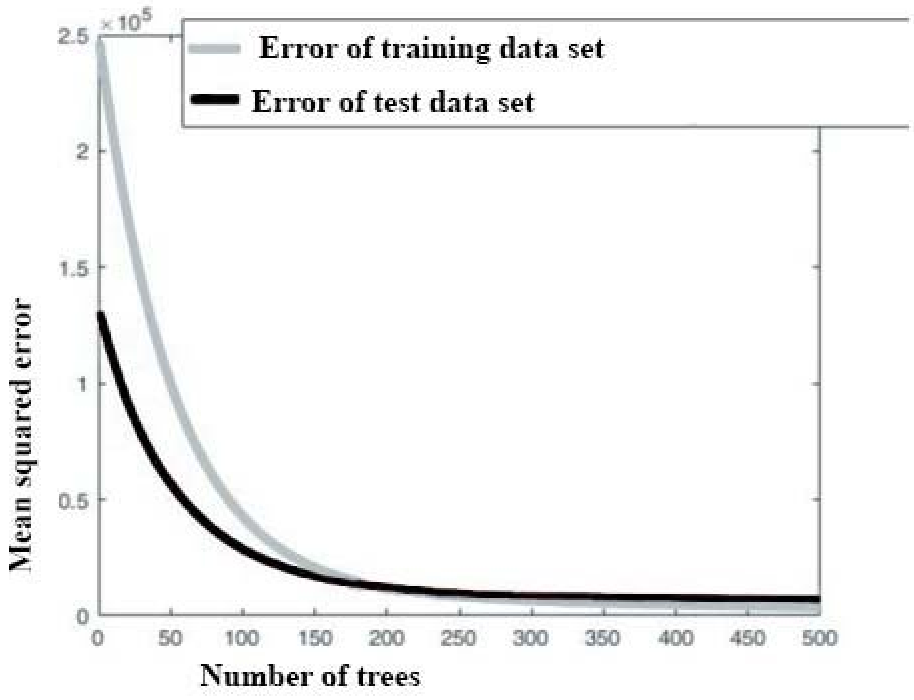
3.Mertebedeki hata → $\boxed{E_t = 0.294189070338065\,0}$

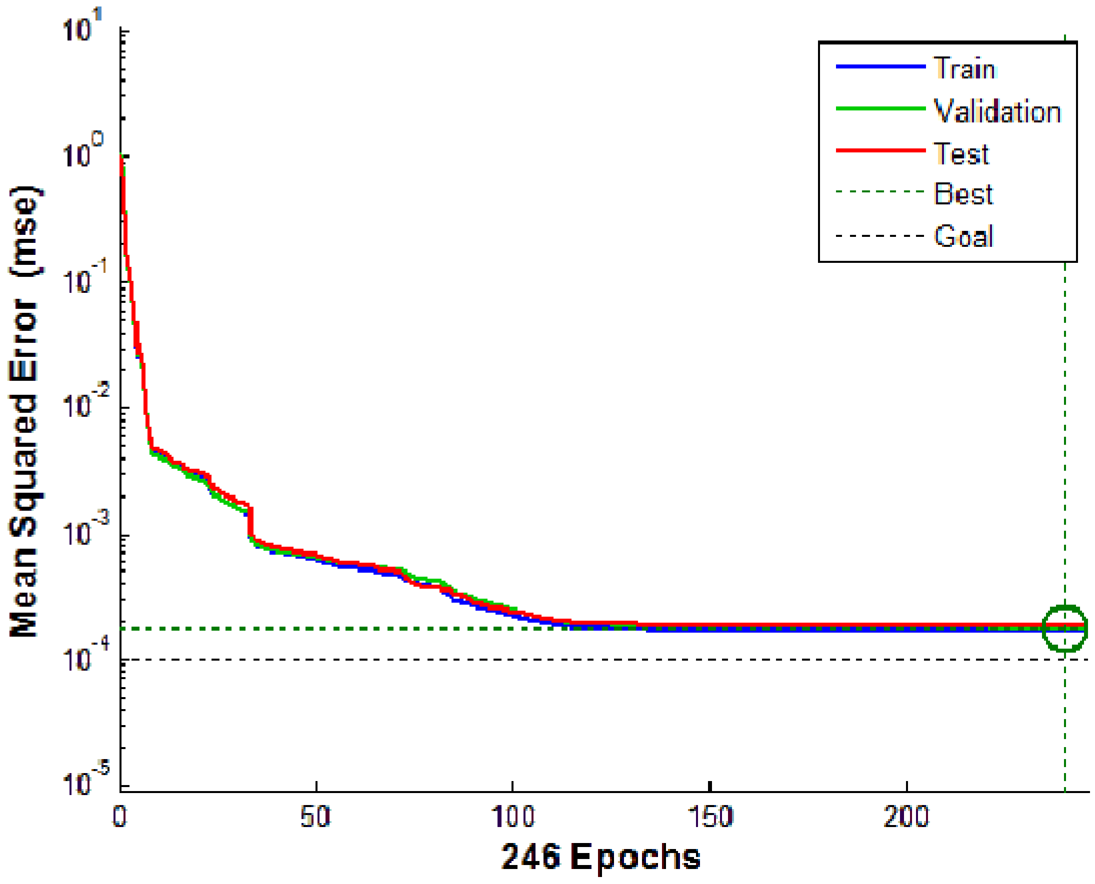
5.Mertebedeki hata → $\boxed{E_t = 0.019970320338065\,0}$

Makine Öğrenmesi/Yapay Zeka Algoritmaları İle İrtibat!!!

Örneğin bir yapay sinir ağını eğitirken, gerçek sınıf değeri ile eğitim sonucu elde edilen hata arasındaki fark belirlenen eşik değere ulaşırsa eğitim işlemi durdurulur. Genelde 0.0005 gibi bir fark kullanılır. Maclaurin serisi gibi açılımlar bize teorik olarak makine öğrenmesi algoritmalarının arka plandaki çalışma prensipleri hakkında ipuçları sunar.

Makine Öğrenmesi/Yapay Zeka Algoritmaları İle İrtibat!!!





2.2 Bağıl Hata (Relative Error)

Eğer bir problemin çözümü sonucunda gerçek değer ve hesaplanan değer biliniyorsa bağıl hata aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\boxed{\text{Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Hesaplanan Değer}}{\text{Gerçek Değer}}}$$

$$\boxed{E_{rel} = \frac{X_{exact} - X_{app}}{X_{exact}} \rightarrow E_{rel} = \frac{X - X^*}{X}}$$

2.2 Bağıl Hata (Relative Error)

- Örnek: Pi sayısının yaklaşık hali,

  a) basit kesir olarak $\frac{22}{7}$ olarak verildiğinde,

  b) 3.1416 olarak verildiğinde oluşacak bağıl hataları hesaplayınız.

Çözüm: a) $E_{rel} = \dfrac{x - x^*}{x} \rightarrow E_{rel} = \dfrac{\pi - \left(\dfrac{22}{7}\right)}{\pi} \rightarrow E_{rel} = \dfrac{3.14159265358979 30 - \left(\dfrac{22}{7}\right)}{3.1415926535897930}$

$E_{rel} = -0.0004024994347708$ olarak hesaplanır.

2.2 Bağıl Hata (Relative Error)

b) $E_{rel} = \dfrac{X_{exact} - X_{app}}{X_{exact}} \rightarrow E_{rel} = \dfrac{\pi - 3.1416}{\pi} \rightarrow E_{rel} = -0.0000023384349968$

Sonuçlar incelendiğinde b şıkkındaki bağıl hatanın daha düşük olduğu görülmektedir. Buradan hareket ile, bir probleme algoritma ve kod tasarlanırken hangi değeri ne şekilde almamız gerektiğini bir yazılımcı mühendisi olarak dikkate almalıyız. Bu şekilde tasarlanan yazılımın test süreçlerinde özellikle hassas hesaplamaların yapıldığı maliye gibi alanlarda önemli bir fayda sağlar.

2.2 Bağıl Hata (Relative Error)

- Örnek:

$$
\begin{aligned}
(a)\ x &= 3.141592 - \widetilde{x} = 3.14 \\
(b)\ y &= 1000000 - \widetilde{y} = 999996 \\
(c)\ z &= 0.000012 - \widetilde{z} = 0.000009
\end{aligned}
$$

Değerleri için hata ve bağıl hata değerlerini bulunuz.

2.2 Bağıl Hata (Relative Error)

Çözüm:

Gerçek değer

Hesaplanan değer

$$
\begin{aligned}
(a)\ x &= 3.141592 - \tilde{x} = 3.14 \\
(b)\ y &= 1000000 - \tilde{y} = 999996 \\
(c)\ z &= 0.000012 - \tilde{z} = 0.000009
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_x &= x - \tilde{x} = 3.141592 - 3.14 = 1.592 \times 10^{-3} \\
R_x &= \frac{x - \tilde{x}}{x} = \frac{1.592 \times 10^{-3}}{3.141592} = 5.0675 \times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_y &= y - \tilde{y} = 1000000 - 999996 = 4 \\
R_y &= \frac{y - \tilde{y}}{y} = \frac{4}{1000000} = 4 \times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_z &= z - \tilde{z} = 0.000012 - 0.000009 = 3.0 \times 10^{-6} \\
R_z &= \frac{z - \tilde{z}}{z} = \frac{3.0 \times 10^{-6}}{0.000012} = 0.25
\end{aligned}
$$

2.3 Mutlak Hata

Gerçek değer biliniyor ve hesaplanan değer de biliniyor ise Mutlak hata;

$$Mutlak\ hata = \left|\frac{Gerçek\ değer - Hesaplanan\ değer}{Gerçek\ değer}\right|$$

İfadesi ile hesaplanır. Yine aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$E_{abs} = \left|\frac{x - x^*}{x}\right|$$

2.3 Mutlak Hata

- Örnek: Pi sayısının yaklaşık hali,

  a) basit kesir olarak $\frac{22}{7}$ olarak verildiğinde,

  b) 3.1416 olarak verildiğinde oluşacak bağıl hataları hesaplayınız.

Çözüm: a) $E_{abs} = \left|\frac{x - x^*}{x}\right| \rightarrow E_{abs} = \left|\frac{\pi - \frac{22}{7}}{\pi}\right| \quad E_{abs} = \left|\frac{3.141592653 - \frac{22}{7}}{3.141592653}\right|$

E_{abs} =+0.0004024994347708

b) $E_{abs} = \left|\frac{x - x^*}{x}\right| \rightarrow E_{abs} = \left|\frac{\pi - 3.1416}{\pi}\right| \quad E_{abs} = \left|\frac{3.141592653 - 3.1416}{3.141592653}\right|$

E_{abs} =+0.0000023384349968

ÖDEV

- $\cos x$ fonksiyonunun Taylor serisini hesaplayarak, $\frac{\pi}{5}$ noktasındaki değerini;

a) taylor serisinin tek ve iki terimini kullanarak hesaplayınız. Her iki durumdaki kesme hatasını hesaplayınız (Kağıda).

b) Python kodunu da yazınız (Github).

Kaynaklar:

- Sayısal Analiz Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Zekeriya Girgin
- Sayısal Analiz Ders Notları, Arzu ERDEM.