# Sayısal Analiz

3.Hafta

Doç. Dr. Kazım HANBAY

# Kök Bulma Yöntemleri-Newthon-Raphson

Elimizde bir fonksiyon formülü olduğunu fonksiyon eğrisinin nereden geçtiğini bilmediğimizi ancak kökü aradığımızı düşünelim. Pek çok fonksiyon için fonksiyon kökünü bulmanın ilk yöntemi Analitik çözüm uygulamaktır. Sonuca güçlü bir yöntem ile ulaşır ve kökün kesin olarak değerini bulabiliriz. Fonksiyon için analitik çözüm yapılamıyor ise sayısal çözüm yöntemleri uygulanır. Sayısal çözüm ile kökü bulmak ya da köke mümkün olduğu kadar yakınsamak amaçlanır. Bu sayısal çözüm iteratif olarak yani birbirini tekrar eden işlemler olarak uygulanır. Her iterasyon da yani her adımda köke biraz daha yakınsanır ve doğruluk biraz daha artar. Problem aslında köke yakınsama problemidir. Tatmin edici bir sonuç elde edildiğinde süreç durdurulur. Burada çözümü olmayan fonksiyonlar için sayısal çözüm iyi bir yaklaşımdır

# Newthon-Raphson

Temel çıkış noktası:$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iki here türevlenebilir olsun. $f(p) = 0$ olsun. p noktasının komşuluğunda seçilen $\bar{x}$ noktasındaki ikinci mertebeden Taylor seri açılımı:

$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^2}{2!}f''(\xi)$ olur.

$f(p) = 0$ olduğundan, seri açılımında $\mathrm{x} = \mathrm{p}$ yazarsak

$$0 = f(p) = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2!}f''(\xi)$$

$f'(\bar{x}) \neq 0$ olması durumunda

$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x})$ elde edilir.

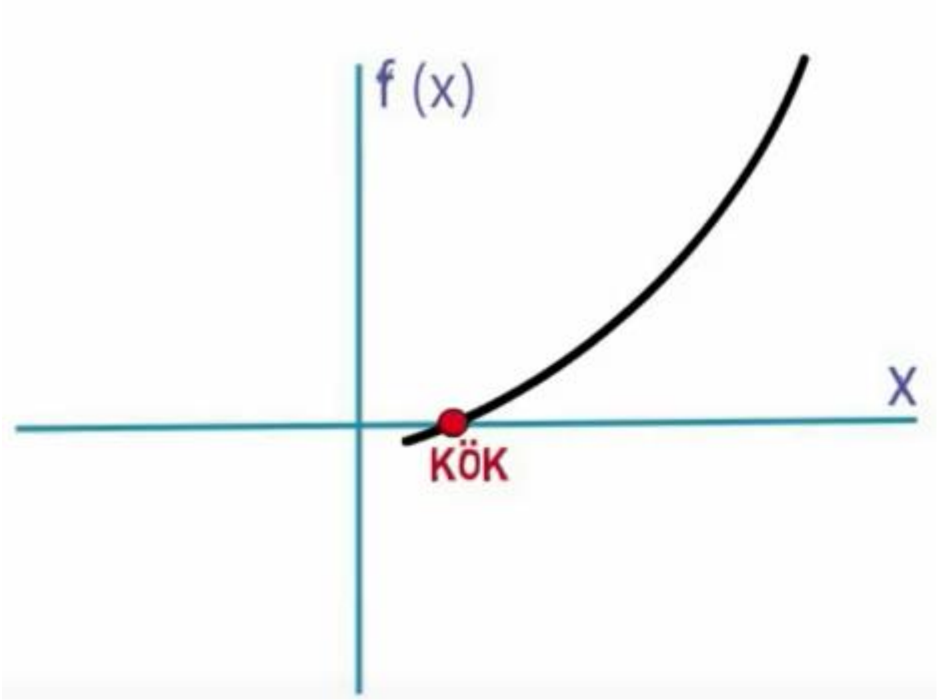
# Newthon-Raphson

$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x})$ denklemini $p$ için çözersek;

$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$ olarak bulunur.

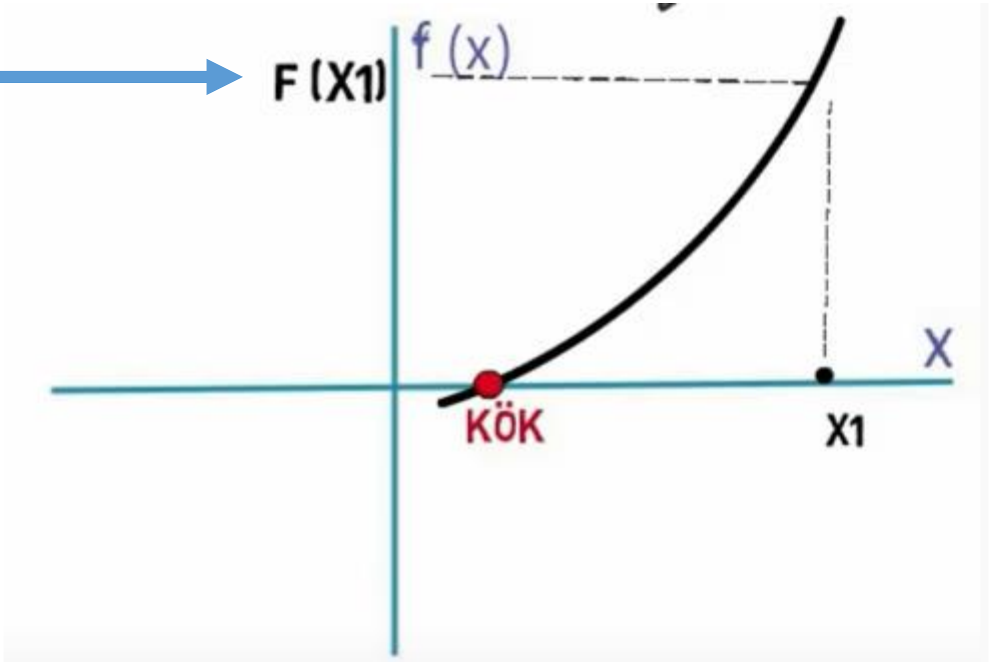
# Kök Bulma Yöntemler-Newthon-Raphson

Örneğin karmaşık bir fonksiyonun kökünü aradığımızı düşünelim. Fonksiyonun kökünü bulmak ya da fonksiyon kökünü yüksek doğrulukla tahmin etmek istediğinizi varsayalım. Grafikte gösterilen fonksiyon eğrisini bilmediğimizi varsayarak newton-raphson yönteminin kök bulmak üzere yaklaşımını inceleyelim



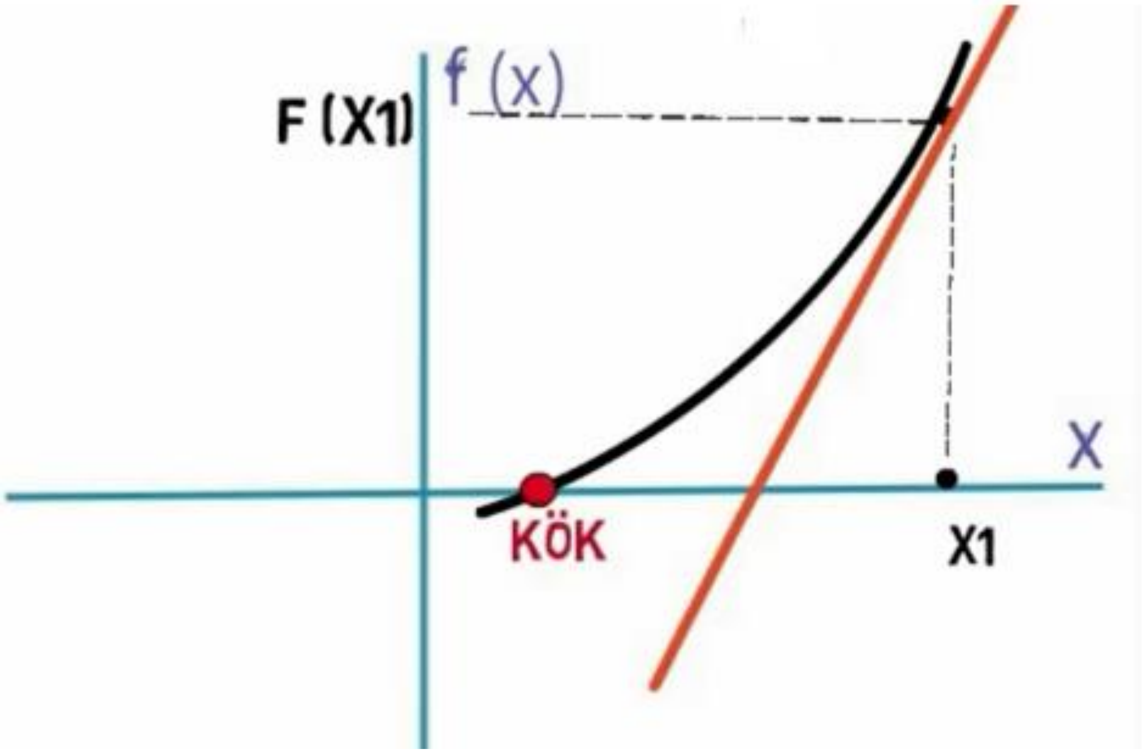
# Newthon-Raphson

Fonksiyonun kökünü yani x eksenini kestiği noktayı bulmak için ilk önce rastgele bir değer seçilir. Fonksiyonu incelediğimizde tahmini olarak hangi civarda kök bulabileceğimiz ile ilgili bir fikrimiz var ise, buna dayanarak bir başlangıç değeri seçebilir ve sürecin daha verimli olmasını sağlayabiliriz. Aksi durumda rastgele bir başlangıç değeri alınır. Alınan başlangıç değeri x1 diyelim. İlk önce seçilen x1 değeri fonksiyon denkleminde yerine konarak f(x1) hesaplanır. Fonksiyon eğrisi ekranda görüldüğü gibi ise, x1 değerinin fonksiyon konumu da şekilde gösterildiği gibi olacaktır.



# Newthon-Raphson

Newthon-raphson yöntemindeki yaklaşım x1-F(x1) noktasının belirlenerek bu noktada fonksiyona bir teğet çizilmesini gerektirir. Bu teğetin *x* eksenini kestiği nokta kök tahmini olarak kullanılır.



# Newthon-Raphson

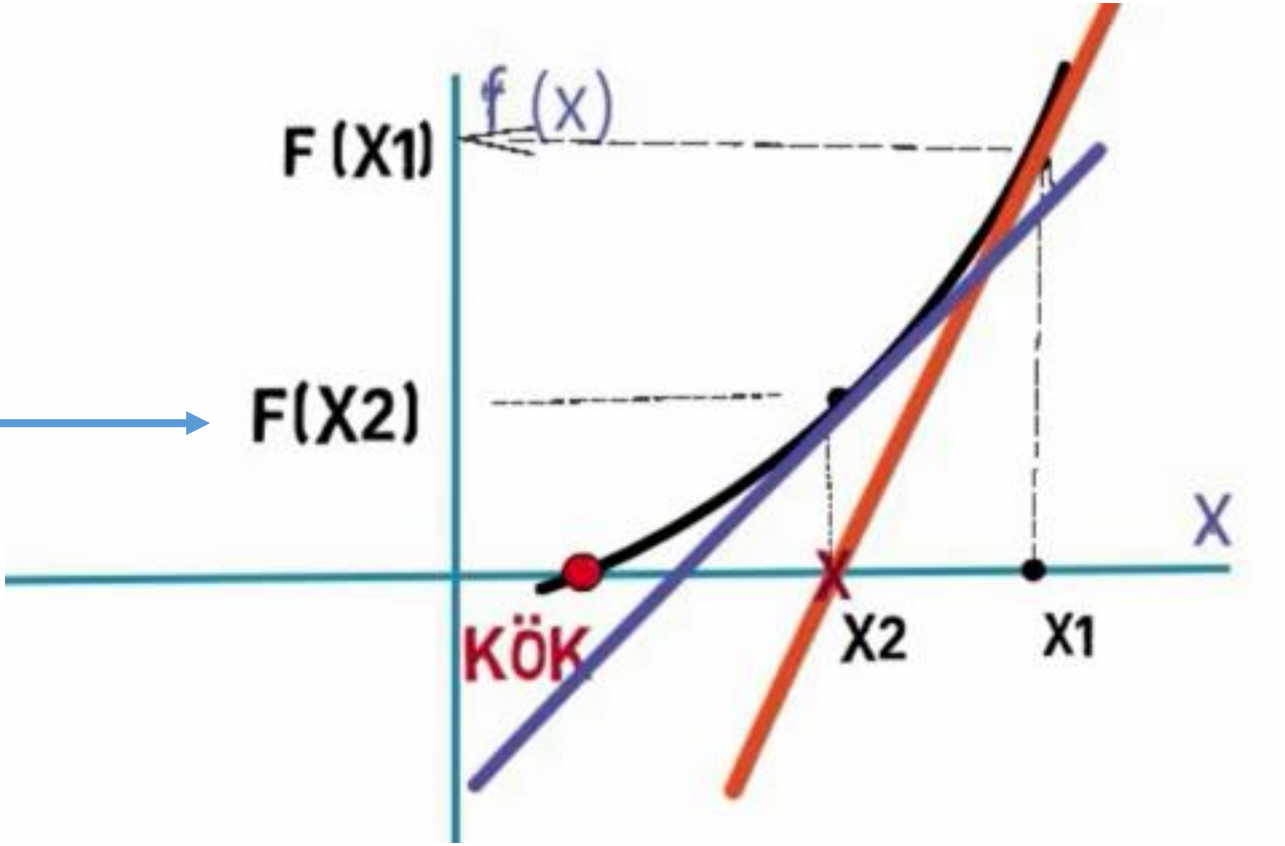
x1-F(x1) noktasında fonksiyon eğrisine çizilen teğetin x eksenini kestiği noktayı hesaplamak gerekir. Burada kullanılan formül *sekant* yönteminin genel kök tahmin formülüdür (4.slaytta ispatlanan). Bu formülasyondaki *i indisi* başlangıç değeri olarak seçilen x1'i işaret etmekte, i+1 indisi ise bulunacak olan kök tahmin noktasını göstermektedir. Kök tahmini birinci iterasyon için x2 olarak isimlendirilir. Bu formülasyon ile elde edilen kök tahmin noktası x2'yi grafik üzerinde gösterelim. Bu durumda ilk kök tahmininin yapılması ile birinci iterasyonu tamamlamış oluruz.

Teğetin x eksenini kestiği nokta $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ formülü ile hesaplanır. Yani;

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

# Newthon-Raphson

*2.iterasyon:* bu iterasyona yeni bir nokta ile başlanır. Bu nokta birinci iterasyondaki kök tahmini olan x2'dir. Aynı işlemler tekrarlanır. x2'nin fonksiyon değeri olan f(x2) hesaplanır. Grafikte f(x2) noktasını işaretlersek;




Daha sonra yeni teğet çizilir ve aynı denklem ile yeni kök bulunur.

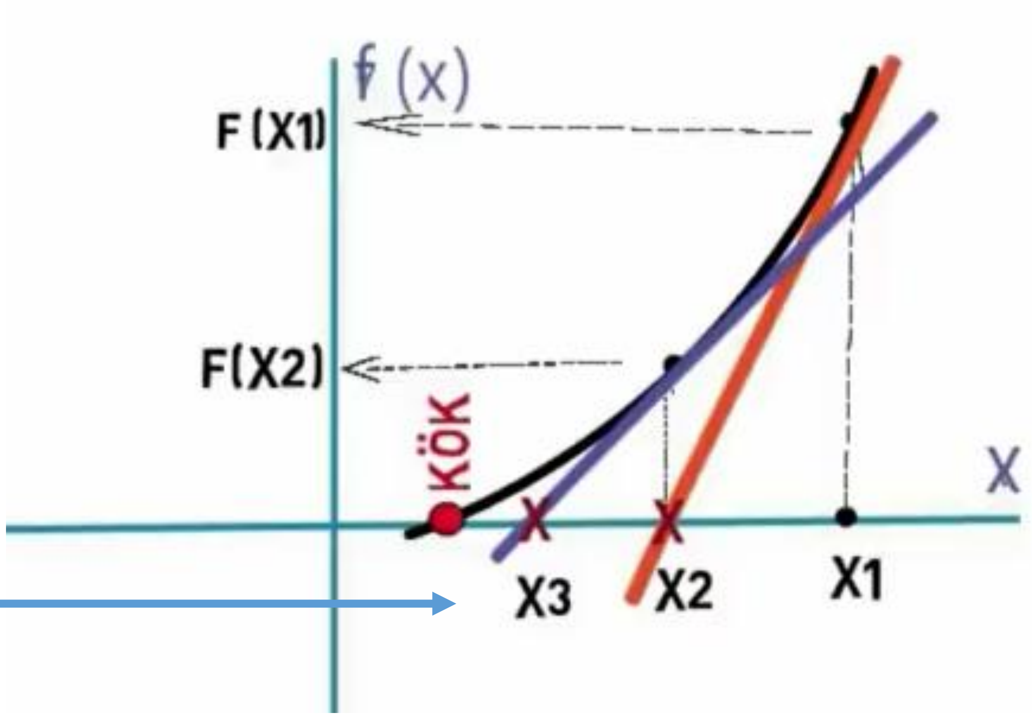
Teğetin x eksenini kestiği nokta;

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ formülü ile hesaplanır.

Yani; $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

# Newthon-Raphson

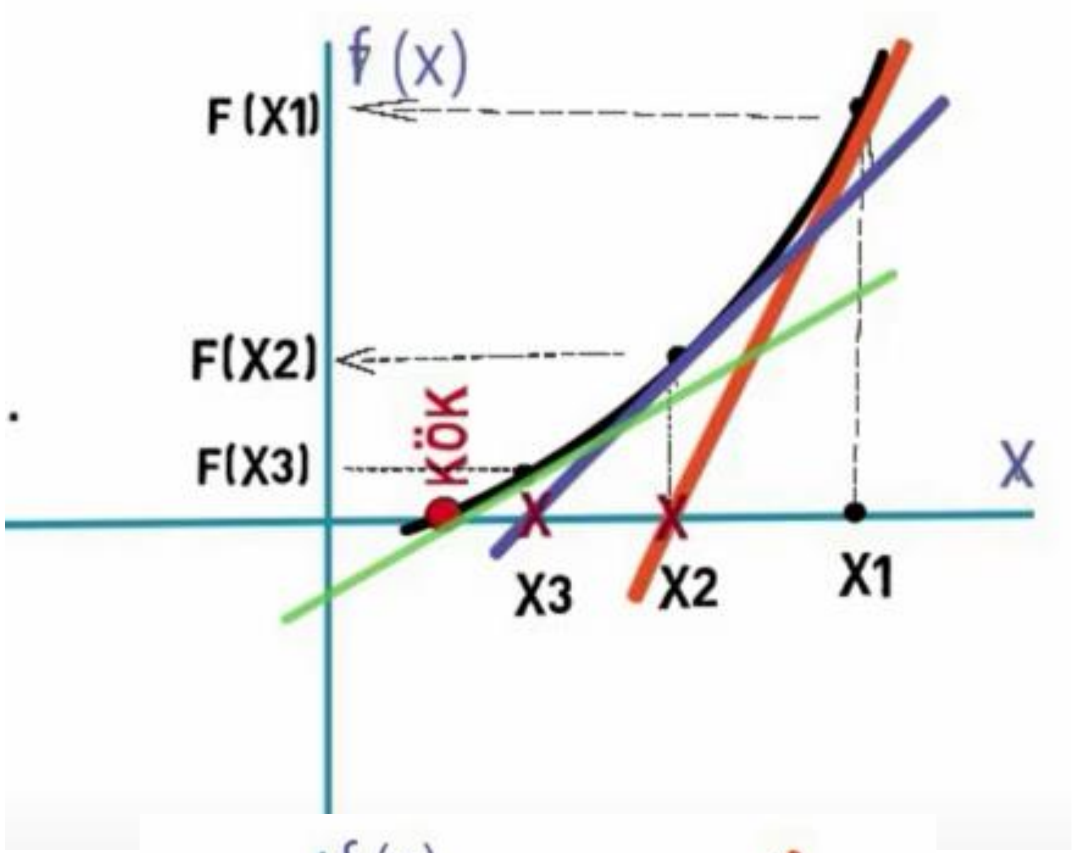
Bulunan x3 noktasını 2.teğetin X eksenini kestiği nokta olarak işaretleriz.

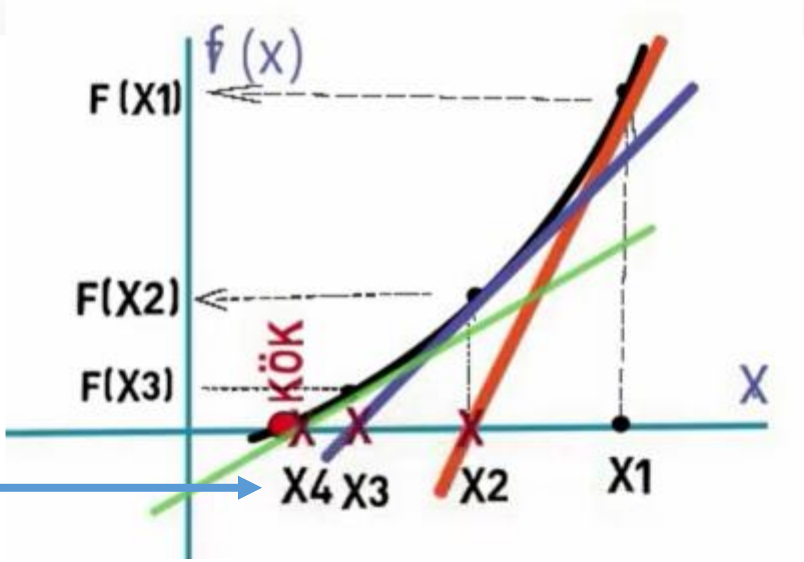


# Newthon-Raphson

- *3.iterasyon:* yeni nokta olarak son kök tahmini olan x3 alınır. Daha sonra bunun fonksiyon değeri olan f(x3) ü hesaplarız. Şimdi x3-f(x3) noktasındaki teğeti grafik üzerinde gösterelim. Bu teğetin X eksenini kestiği noktayı yöntem formülünü kullanarak x4 olarak buluruz.
- 3. kök tahmini x4’ tür

Yani; $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$



# Newthon-Raphson

İterasyonlardan görüldüğü gibi, süreç ilerledikçe bulunan yeni kökün gerçek köke yakınsadığı anlaşılmaktadır. İteratif süreç istenen iterasyon sayısına ulaşana kadar veya belirlenen hata değerine ulaşana kadar devam edilir.

$x^2 + x - 5 = 0$ denkleminin kökünü bulmak üzere başlangıç değerini 2 alarak 3 iterasyon gerçekleştiriniz.

**NEWTON RAPHSON YÖNTEMİ (NEWTON – RAPHSON METHOD)**

$\longrightarrow x_0 : 2$ $\quad f(x) = x^2 + x - 5$ $\quad f(2) = 2^2 + 2 - 5 = 1$

$f'(x) = 2x + 1$ $\quad f'(2) = 2.2 + 1 = 5$

1. kök tahmini: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ $\Rightarrow$ $x_1 = 2 - \frac{1}{5} = 1.8$ **BIRINCI KÖK TAHMINI**

---

$\longrightarrow x_1 : 1.8$ $\quad f(x) = x^2 + x - 5$ $\quad f(1.8) = (1.8)^2 + 1.8 - 5 = 0.04$

$f'(x) = 2x + 1$ $\quad f'(1.8) = 2.(1.8) + 1 = 4.6$

2. kök tahmini: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ $\Rightarrow$ $x_2 = 1.8 - \frac{0.04}{4.6} = 1.791$ **IKINCI KÖK TAHMINI**

---

$\longrightarrow x_2 : 1.791$ $\quad f(x) = x^2 + x - 5$ $\quad f(1.791) = (1.791)^2 + 1.791 - 5 = -0.001$

$f'(x) = 2x + 1$ $\quad f'(1.791) = 2.(1.791) + 1 = 4.582$

3. kök tahmini: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ $\Rightarrow$ $x_3 = 1.791 - \frac{(-0.001)}{4.582} = 1.791...$ **UCUNCU KÖK TAHMINI**

| Iterasyon No | $X_i$ | $f(X_i)$ | $f'(X_i)$ | $X_{i+1}$ | Hata |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.000 | 1.000 | 5.000 | 1.800 | |
| 2 | 1.800 | 0.040 | 4.600 | 1.791 | |
| 3 | 1.791 | -0.001 | | | |

# Örnek 2:

- $f(x) = x^2 - 2 = 0$ denkleminin bir çözümünü Newton-Raphson yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Denkleme bakıldığında köklerin $x = \pm\sqrt{2}$ olduğu görülür. $x = \sqrt{2}$ köküne Newton-raphson yöntemi ile yaklaşım bulalım. $f'(\bar{x}) = 2x$ olduğundan, bu yöntemin iterasyonları

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - 2}{2x_i}$$

$x_i - \frac{x_i^2}{2x_i} + \frac{2}{2x_i} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}$ elde edilir.

# Örnek (devam)

- $x_0 = 1$ alınırsa;

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{1.5}{2} + \frac{1}{1.5} = 1.41666667$$

$$x_3 = \frac{1.41666667}{2} + \frac{1}{1.41666667} = 1.41421569$$

$$x_4 = \frac{1.41421569}{2} + \frac{1}{1.41421569} = 1.41421356$$

$$x_5 = \frac{1.41421356}{2} + \frac{1}{1.41421356} = 1.41421356$$

# Örnek (devam)

$x_4$ ve $x_5$ noktaları sekiz rakama kadar aynı olduğu için1.41421356 sayısının $f(x) = 0$ denklemini en azından sekiz rakama kadar sağladığı kabul edilir. $\sqrt{2} = 1.414213562373095$ gerçek değeridir. $x_4$ ve $x_5$ sayıları sekiz rakama kadar doğrudur. Benzer şekilde $x_0 = -1$ alınırsa;

$$x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{-1} = -1.5$$

$$x_2 = \frac{-1.5}{2} + \frac{1}{-1.5} = -1.41666667$$

$$x_3 = \frac{-1.41666667}{2} + \frac{1}{-1.41666667} = -1.41421569$$

$$x_4 = \frac{-1.41421569}{2} + \frac{1}{-1.41421569} = -1.41421356$$

$$x_5 = \frac{-1.41421356}{2} + \frac{1}{-1.41421356} = -1.41421356$$

Bulunur.

# Örnek (devam)

$-\sqrt{2} = -1.414213562373095$ gerçek değeridir. $x_4$ ve $x_5$ sayıları sekiz rakama kadar doğrudur.

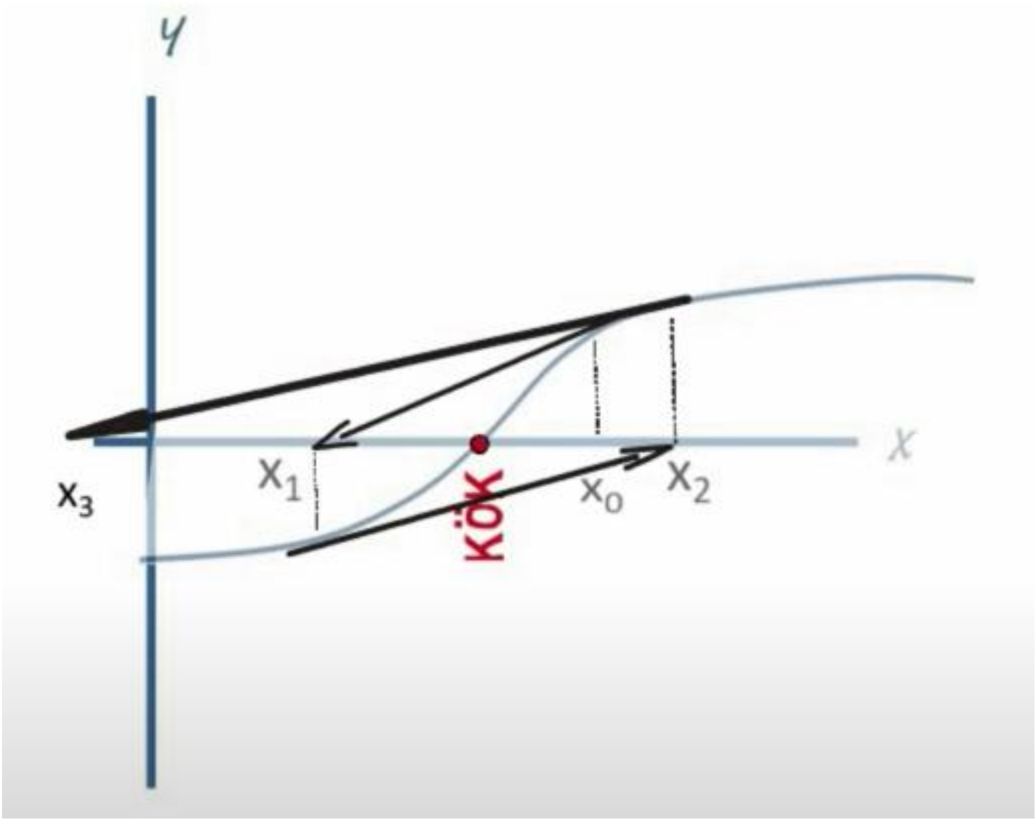
# Newthon-Raphson Yönteminin Problemleri

*<u>Kök yakınında bir bükülme noktası varsa tahmin kökten ıraksayacak şekilde ilerleyebilir.</u>*

$x_0$ noktası alıp $f(x_0)$ ı hesapladığımızda ve buna göre teğet çizdiğimizde??

İkinci olarak $x_1$ noktası alıp $f(x_1)$ i hesapladığımızda ve buna göre teğet çizdiğimizde??

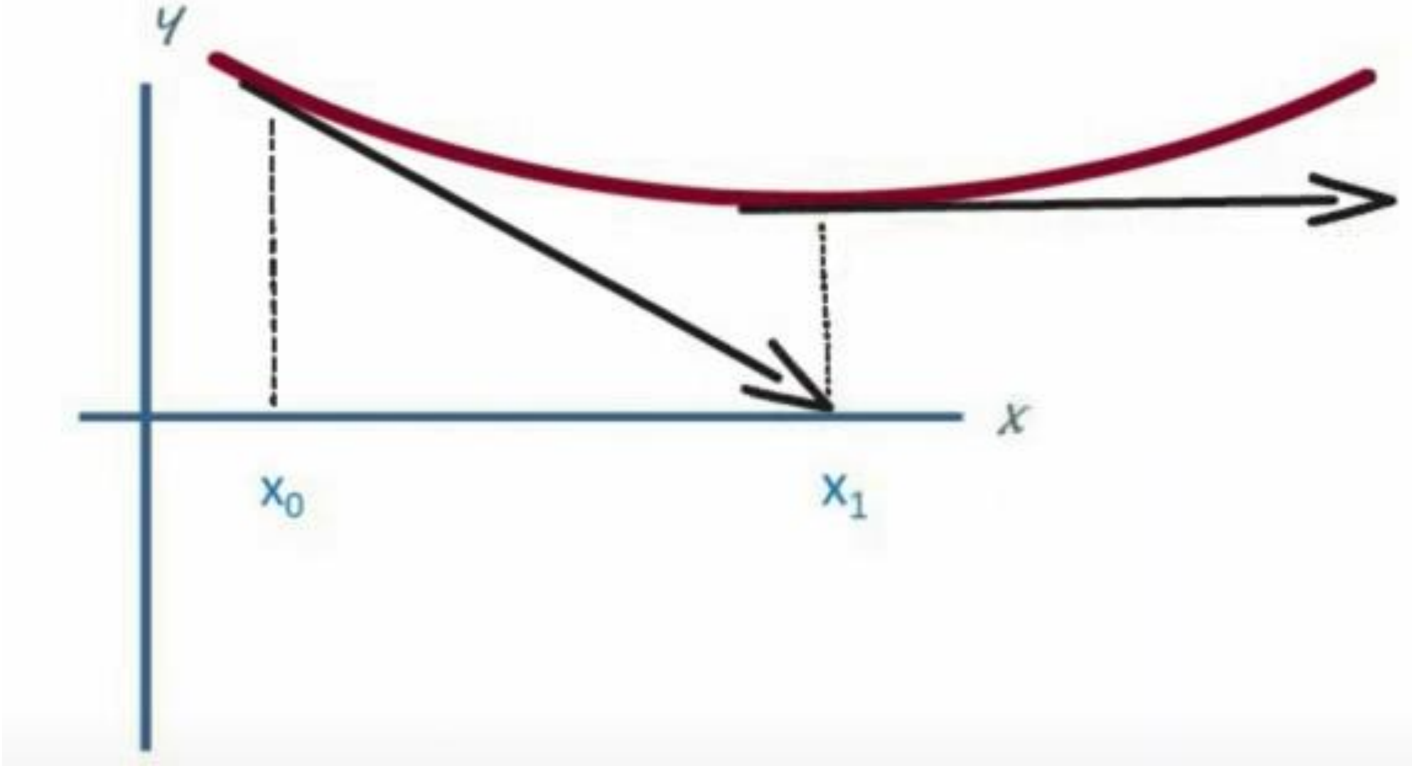
Peki $x_2$ noktası alıp $f(x_2)$ yi hesapladığımızda ve buna göre teğet çizdiğimizde??




Kökten ıraksama durumu karşımıza çıkar

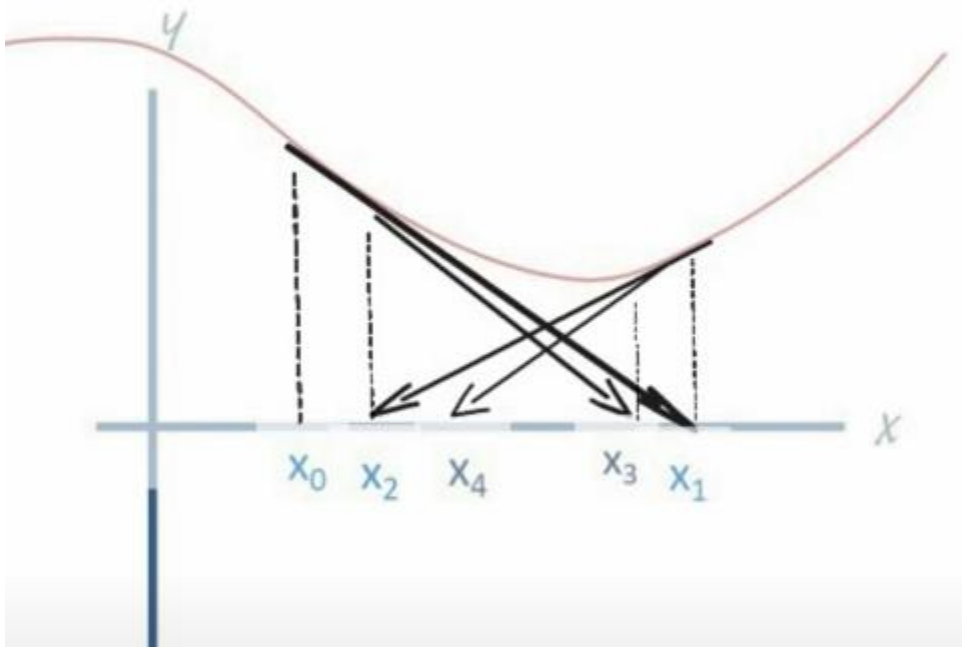
# Newthon-Raphson Yönteminin Problemleri

Sıfıra bölme problemi: Bu yöntemin formülasyonunda türev kullanılmaktadır. Paydada türevin olması ve türevin sıfır olması sıfıra bölme problemi oluşturur. Bunun geometrik anlamı kullanılan teğetin x eksenine paralel giderek asla x eksenini kesmemesi durumudur.



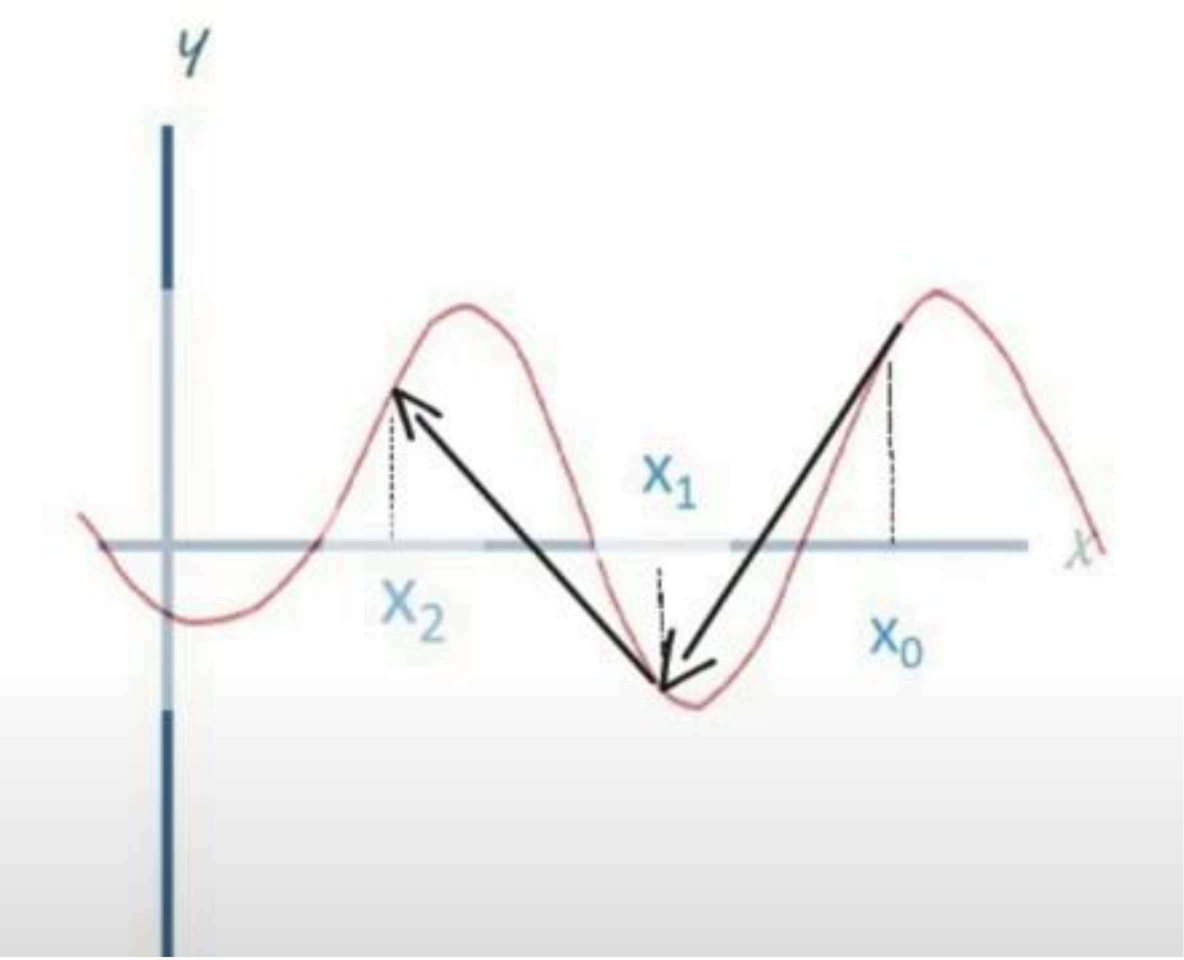
# Newthon-Raphson Yönteminin Problemleri

Bir diğer sorunlu durum yerel minimum ve yerel maximum etrafında salınım gerçekleşmesidir. Sağda görüldüğü gibi bir fonksiyon olduğunu düşünelim. Yöntemi kullanmak için $x_0$ başlangıç noktası ile başlayalım. $x_0$ noktasının fonksiyon değerinde fonksiyona çizilen teğetin x eksenini kestiği nokta ilk kök tahmini olan $x_1$ dir. İterasyonlarla aynı şekilde devam edilerek yeni kökü tahminleri yapılır ve sağda görüldüğü şekilde ilerler. Belirtildiği gibi kök tahminlerinin bir yerel minimum etrafında salınım yaptığı görülmektedir.



# Newthon-Raphson Yönteminin Problemleri

Kök atlama problemi: Başlangıç noktasının köke çok yakın seçilmesi kullanılan teğetin 0’a yakın eğime sebep olması sebebiyle tahmin noktası çok daha uzaktaki bir köke atlayabilir.



# ÖDEV

1) $f(x) = x^{1/3}$ denkleminin kökünü bulmak için Newton-raphson yöntemini kullanınız. Elde edilen bulguları yorumlayınız.

2) $f(x) = 4e^{-0.5x} - x$ denkleminin kökünü başlangıç değeri $x_0 = 2$ alarak 4 iterasyon sonucunda bulunuz. Bulunan çözümün kodunu hazır fonksiyon kullanmadan yazınız.

# Kaynaklar:


- Sayısal Analiz Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Zekeriya Girgin
- Sayısal Analiz Ders Notları, Arzu ERDEM.
- Sayısal çözümleme, Sefa Akpınar, Hasan Kürüm.