

PERSOALAN PENUGASAN

MASALAH PENUGASAN

- **Masalah penugasan (assignment problem)** merupakan kasus khusus dari masalah **linear programming**.
- Dalam dunia usaha (bisnis) dan industri, manajemen sering menghadapi masalah-masalah yang berhubungan dgn penugasan optimal dari bermacam-macam sumber yang produktif atau personalia yang mempunyai tingkat efisiensi yang berbeda-beda utk tugas yang berbeda pula.
- **Metode Hungarian** merupakan salah satu dari bbrp teknik pemecahan masalah penugasan.

Metode Hungarian

- Untuk dapat menerapkan metode Hungarian, jumlah sumber-sumber yg ditugaskan hrs sama persis dgn jumlah tugas yang akan diselesaikan.
- Selain itu, setiap sumber hrs ditugaskan hanya satu tugas. Jadi masalah penugasan akan mencakup sejumlah n sumber yg mempunyai n tugas.
- Ada $n!$ (n faktorial) penugasan yg mungkin dlm suatu masalah karena perpasangan satu-satu.
- Masalah ini dpt dijelaskan dengan mudah oleh bentuk matrik segiempat, dimana baris-barisnya menunjukkan sumber-sumber dan kolom-kolomnya menunjukkan tugas-tugas.

Masalah penugasan dapat dinyatakan secara matematis dalam suatu bentuk Program Linear sebagai berikut :

Minimumkan (Maksimumkan) :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

dengan kendala :

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1$$

dan $X_{ij} \geq 0$ ($X_{ij} = X_{ij}^2$) dimana C_{ij} adalah tetapan yang telah diketahui.

(1). Masalah Minimisasi

1.1. Jumlah baris = jumlah kolom

- Suatu perusahaan kecil mempunyai 4 (empat) pekerjaan yg berbeda utk diselesaikan oleh 4 (empat) karyawan.
- Biaya penugasan seorang karyawan utk pekerjaan yg berbeda karena sifat pekerjaan yg berbeda-beda.
- Setiap karyawan mempunyai tingkat keterampilan, pengalaman kerja dan latar belakang pendidikan serta latihan yg berbeda, sehingga biaya penyelesaian pekerjaan yg sama oleh para karyawan yg berlainan juga berbeda.
- Biaya penugasan karyawan utk masing-masing pekerjaan adalah sbb :

Biaya dalam Ribuan (Rp/Unit)				
Karyawan	Pekerjaan			
	I	II	III	IV
A	15	20	18	22
B	14	16	21	17
C	25	20	23	20
D	17	18	18	16

Cara membaca Tabel:
 Pekerjaan I jika dikerjakan oleh
 Karyawan A biayanya sebesar RP.
 15.000, oleh karyawan B biayanya
 sebesar Rp. 14.000 dan seterusnya

Karena metode Hungarian mensyaratkan perpa-
 sangan satu-satu, maka ada $4!=24$ kemungkin-
 an penugasan. Langkah-langkah penyelesaian
 sebagai berikut :

- (a). Merubah matriks biaya menjadi matriks opportunity cost, yaitu dgn memilih elemen terkecil dari setiap baris dari matriks biaya mula-mula utk mengurangi seluruh elemen (bilangan) dlm setiap baris.

Tabel Reduced-Cost Matriks

	I	II	III	IV
A	15-15	20-15	18-15	22-15
B	14-14	16-14	21-14	17-14
C	25-20	20-20	23-20	20-20
D	17-16	18-16	18-16	16-16
	I	II	III	IV
A	0	5	3	7
B	0	2	7	3
C	5	0	3	0
D	1	2	2	0

(b). Reduced Cost Matrix di atas terus dikurangi utk mendapatkan Total Opportunity Cost Matrix.

Hal ini dicapai dgn memilih elemen terkecil dari setiap kolom pada reduced cost matrix utk mengurangi seluruh elemen dlm kolom-kolom tsb.

Pada contoh, hanya dilakukan pada kolom III karena semua kolom lainnya telah mempunyai elemen yang bernilai nol. Bila langkah pertama telah menghasilkan paling sedikit satu nilai nol pada setiap kolom, langkah kedua ini dapat dihilangkan.

	I	II	III	IV
A	0	5	3-2	7
B	0	2	7-2	3
C	5	0	3-2	0
D	1	2	2-2	0
	I	II	III	IV
A	0	5	1	7
B	0	2	5	3
C	5	0	1	0
D	1	2	0	0

(c). Mencari skedul penugasan dgn suatu total opportunity cost nol. Untuk mencapai penugasan ini dibutuhkan 4 “independent” dalam matrix. Ini berarti setiap karyawan hrs ditugaskan hanya utk satu pekerjaan dengan opp-cost- nol atau setiap pekerjaan hrs diselesaikan hanya oleh satu karyawan. Prosedur praktis utk melakukan test optimisasi adalah dgn menarik sejlh minimum grs horizontal dan /atau vertikal utk meliputi seluruh elemen bernilai nol dlm total-oppt-cost matrix.

	I	II	III	IV
A	0	5	1	7
B	0	2	5	3
C	5	0	1	0
D	1	2	0	0

Penugasan belum optimal, karena jumlah garis lebih kecil dari jumlah baris / jumlah kolom.

(d). Untuk merevisi total-opp-cost matrix, pilih elemen terkecil yg belum terliput garis-garis (opp-cost terendah) untuk mengurangi seluruh elemen yg belum terliput. Tambahkan dgn jlh yg sama pd seluruh elemen-elemen yg mempunyai dua garis yg saling bersilangan.

Revised Matrix & Test for Optimality

	I	II	III	IV
A	0	5-1	1-1	7-1
B	0	2-1	5-1	3-1
C	5+1	0	1	0
D	1+1	2	0	0
	I	II	III	IV
A	0	4	0	6
B	0	1	4	2
C	6	0	1	0
D	2	2	0	0

	I	II	III	IV
A	0	4	0	6
B	0	1	4	2
C	6	0	1	0
D	2	2	0	0
Jumlah garis = 4				
Jumlah baris/kolom = 4				
Jadi sudah OPTIMAL				

Penugasan

		I	II	III	IV			
	A	0	4	0	6			
	B	0	1	4	2			
	C	6	0	1	0			
	D	2	2	0	0			

Alokasi Penugasan

- B - I Baris yang memiliki 1 nilai 0 di baris B, jadi karyawan B ditugaskan utk Pekerjaan I. Akibatnya, A, C, D tidak layak (dieliminasi) utk Pekerjaan I
- C - II Kolom II adalah satu-satunya kolom dengan 1 nilai 0.
Jadi karyawan C ditugaskan utk Pekerjaan II.
- A - III Baris A hanya memiliki 1 nilai 0 maka karyawan A ditugaskan ke Pekerjaan III
Akibatnya karyawan D tidak dapat mengisi Pekerjaan III.
- D - IV Alternatif terakhir untuk penugasan karyawan D di Pekerjaan IV.

Jika ada penugasan = 1, dan tidak ada penugasan = 0, maka:

	I	II	III	IV	
A	0	0	1	0	
B	1	0	0	0	
C	0	1	0	0	
D	0	0	0	1	

Sehingga total Biaya Penugasannya adalah:

	I	II	III	IV	
A	15	20	18	22	
B	14	16	21	17	
C	25	20	23	20	
D	17	18	18	16	
Total Cost					
	=14+20+18+16				
	=68				

Jadi total cost nya sebesar Rp. 68.000,-

1.2. Jumlah baris \neq jumlah kolom

Syarat untuk menyelesaikan persoalan penugasan dengan metode Hungarian adalah jumlah baris (jumlah pekerjaan) sama dengan jumlah kolom (jumlah karyawan).

Pada kasus persoalan dimana jumlah baris (jumlah pekerjaan) tidak sama dengan kolom (jumlah karyawan), maka harus menyeimbangkan jumlah baris = jumlah kolom.

Tekniknya dengan menambah variabel *dummy* bernilai nol pada baris atau kolom. Jika baris < kolom maka variabel *dummy dummy* ditambahkan pada baris, sebaliknya jika kolom < baris, maka variabel *dummy* ditambahkan pada kolom.

Contoh :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15	20	18	22	21
B	14	16	21	17	15
C	25	20	23	20	17
D	17	18	18	16	18

Pertanyaan : Tentukan penugasan karyawan ke masing-masing pekerjaan dengan biaya pekerjaan yang minimum !

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15	20	18	22	21
B	14	16	21	17	15
C	25	20	23	20	17
D	17	18	18	16	18
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15-15	20-15	18-15	22-15	21-15
B	14-14	16-14	21-14	17-14	15-14
C	25-17	20-17	23-17	20-17	17-17
D	17-16	18-16	18-16	16-16	18-16
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	5	3	7	6
B	0	2	7	3	1
C	8	3	6	3	0
D	1	2	2	0	2
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	5	3	7	6
B	0	2	7	3	1
C	8	3	6	3	0
D	1	2	2	0	2
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	5-2	3-2	7	6
B	0	2-2	7-2	3	1
C	8	3-2	6-2	3	0
D	1	2-2	2-2	0	2
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	3	1	7	6
B	0	0	5	3	1
C	8	1	4	3	0
D	1	0	0	0	2
Dummy	2	0	0	2	2

Skedul Penugasan :

No.	Skedul Penugasan	Biaya (Rp)
1	A – I	15
2	B – II	16
3	C – V	17
4	D - IV	16
5	Dummy – III	0
Jumlah		64

2. Kasus Maksimisasi

Metode Hungarian untuk penyelesaian penugasan kasus minimisasi dapat juga diterapkan pada kasus maksimisasi. Aplikasi kasus maksimisasi yaitu tingkat keuntungan atau produktivitas kerja yang diperoleh perusahaan akibat penugasan karyawannya.

Kasus maksimisasi ini juga meliputi dua macam :

1. Jumlah Baris = Jumlah Kolom
2. Jumlah Baris \neq Jumlah Kolom

Contoh :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	10	12	10	8	15
B	14	10	9	15	13
C	9	8	7	8	12
D	13	15	8	16	11
E	10	13	14	11	17

Pertanyaan : Tentukan penugasan karyawan ke masing-masing pekerjaan dengan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan !

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15-10	15-12	15-10	15-8	15-15
B	15-14	15-10	15-9	15-15	15-13
C	12-9	12-8	12-7	12-8	12-12
D	16-13	16-15	16-8	16-16	16-11
E	17-10	17-13	17-14	17-11	17-17

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	5	3	5	7	0
B	1	5	6	0	2
C	3	4	5	4	0
D	3	1	8	0	5
E	7	4	3	6	0

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	5	3	5	7	0
B	1	5	6	0	2
C	3	4	5	4	0
D	3	1	8	0	5
E	7	4	3	6	0

Belum ada nilai 0 di kolom ini

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	4	2	2	7	0
B	0	4	3	0	2
C	2	3	2	4	0
D	2	0	5	0	5
E	6	3	0	6	0

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	4	2	2	7	0
B	0	4	3	0	2
C	2	3	2	4	0
D	2	0	5	0	5
E	6	3	0	6	0

Menyusun garis menutupi nilai 0 seminimal mungkin

- Hanya diperoleh 4 garis, padahal jml baris/kolom=5
- Belum optimal

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	2	0	0	5	0
B	0	4	3	0	4
C	0	1	0	2	0
D	2	0	5	0	7
E	6	3	0	6	2

Tabel Baru, sudah optimal

Skedul Penugasan :

No.	Skedul Penugasan	Keuntungan (Rp)	Skedul Penugasan	Keuntungan (Rp)
1	A – II	12	A - V	15
2	B – I	14	B - IV	15
3	C – V	12	C - I	9
4	D - IV	16	D - II	15
5	E - III	14	E - III	14
Jumlah		68	Jumlah	68