PEMROGRAMAN LINIER

Metode Simpleks

Pendahuluan

- Merupakan metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan seluruh problem program linier, baik yang melibatkan dua variabel keputusan maupun lebih dari dua variabel keputusan.
- Catatan: Metode grafik hanya cocok untuk masalah program linier 2 variabel

- Metode simpleks pertama kali diperkenalkan oleh George B. Dantzig pada tahun 1947 dan telah diperbaiki oleh beberapa ahli lain.
- Metode penyelesaian dari metode simpleks ini melalui perhitungan ulang (*iteration*) dimana langkah-langkah perhitungan yang sama diulang-ulang sebelum solusi optimal diperoleh

Penyelesaian Dengan Metode Simpleks

- Syarat :
  - Model program linier (→ *Canonical form*) harus dirubah dulu kedalam suatu bentuk umum yang dinamakan ”bentuk baku” (*standard form*).

Ciri-ciri dari bentuk baku model program linier

- Semua fungsi kendala/pembatas berupa persamaan dengan sisi kanan non-negatif.
- Semua variabel keputusan non-negatif.
- Fungsi tujuan dapat memaksimumkan maupun meminimumkan

dapat dituliskan :

- Fungsi tujuan :

  $$\text{Maks / Min } Z = CX$$

- Fungsi pembatas :

  $$AX = b$$

  $$X \geq 0$$

Perlu diperhatikan :

- Bahwa metode simpleks hanya bisa dipakai (diaplikasikan) pada bentuk standar, sehingga kalau tidak dalam bentuk standar harus ditransformasikan dulu menjadi bentuk standar.

Untuk memudahkan melakukan transformasi ke bentuk standar, beberapa hal yang perlu diperhatikan :

- Fungsi Pembatas
  - Suatu fungsi pembatas yang mempunyai tanda $\leq$ diubah menjadi suatu bentuk persamaan (bentuk standar) dengan cara menambahkan suatu variabel baru yang dinamakan *slack variable* (variabel pengurang).

- Fungsi Tujuan
  - Dengan adanya *slack variable* pada fungsi pembatas, maka fungsi tujuan juga harus disesuaikan dengan memasukkan unsur *slack variable* ini.
  - Karena *slack variable* tidak mempunyai kontribusi apa-apa terhadap fungsi tujuan, maka konstanta untuk *slack variable* tersebut dituliskan nol.

Contoh 1 :

- Fungsi tujuan :

  Maks $Z = 4 X1 + 5 X2$

- Fungsi pembatas :

  $X1 + 2 X2 \leq 40$

  $4 X1 + 3 X2 \leq 120$

  $X1 , X2 \geq 0$

Rubahlah menjadi bentuk standar.

Untuk merubah menjadi bentuk standar, maka harus menambahkan *slack variable*, menjadi :

$X1 + 2\ X2 \leq 40 \rightarrow X1 + 2\ X2 + S1 = 40$

$4\ X1 + 3\ X2 \leq 120 \rightarrow 4\ X1 + 3\ X2 + S2 = 120$

Setelah ditambahkan *slack variable*, maka fungsi tujuan menjadi :

Maks $Z = 4\ X1 + 5\ X2 + 0\ S1 + 0\ S2$

Contoh 2 :

- Fungsi tujuan :

  Maks $Z = 60\ X1 + 30\ X2 + 20\ X3$

- Fungsi pembatas :

  $8\ X1 + 6\ X2 + X3 \leq 48$

  $4\ X1 + 2\ X2 \leq 20$

  $2\ X1 + 1{,}5\ X2 + 1{,}5\ X3 \leq 8$

  $X2 \leq 5$

  $X1\ ,\ X2\ ,\ X3 \geq 0$

dengan menambahkan *slack variable*, menjadi :

$8 X1 + 6 X2 + X3 \leq 48 \rightarrow 8 X1 + 6 X2 + X3 + S1 = 48$

$4 X1 + 2 X2 \leq 20 \rightarrow 4 X1 + 2 X2 + S2 = 20$

$2 X1 + 1,5 X2 + 1,5 X3 \leq 8 \rightarrow$

$2 X1 + 1,5 X2 + 1,5 X3 + S3 = 8$

$X2 \leq 5 \rightarrow X2 + S4 = 5$

Setelah ditambahkan *slack variable*, maka fungsi tujuan menjadi :

Maks $Z = 4 X1 + 5 X2 + 0 S1 + 0 S2 + + 0 S3 + 0 S4$

Contoh 3 :

- Fungsi tujuan :

  $$\text{Min } Z = 2\,X1 - 3\,X2$$

- Fungsi pembatas :

  $$X1 + X2 \leq 4$$

  $$X1 - X2 \leq 6$$

  $$X1\,,\,X2 \geq 0$$

dengan menambahkan *slack variable*, menjadi:

$X1 + X2 \leq 4 \rightarrow X1 + X2 + S1 = 4$

$X1 - X2 \leq 6 \rightarrow X1 - X2 + S2 = 6$

Setelah ditambahkan *slack variable*, maka fungsi tujuan menjadi :

Min $Z = 2 X1 - 3 X2 + 0 S1 + 0 S2$

Metode dan Tabel Simpleks

- Setelah fungsi batasan dirubah ke dalam bentuk persamaan (bentuk standar), maka untuk menyelesaikan masalah program linier dengan metode simpleks dibutuhkan matriks A yang berisi variabel basis dan variabel non-basis.
- pada contoh 1, diperoleh matriks A yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Variabel basis adalah S1 dan S2, sedangkan variabel non-basis adalah variabel X1 dan variabel X2
- Matriks basis biasanya dinyatakan dengan BFS (*Basis Feasible Solution*), dan dituliskan dengan matriks B (→ matriks identitas) yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabel Simpleks

- Langkah-langkah penyelesaian dalam metode simpleks adalah dengan menggunakan suatu kerangka tabel yang disebut dengan tabel simpleks.
- Tabel ini mengatur model ke dalam suatu bentuk yang memungkinkan untuk penerapan penghitungan matematis menjadi lebih mudah

Langkah-langkah metode simpleks

- Mengubah bentuk batasan model pertidaksamaan menjadi persamaan.
- Membentuk tabel awal untuk solusi feasible dasar pada titik orijin dan menghitung nilai-nilai baris zj dan cj – zj.

Contoh bentuk tabel simpleks

cj	Variabel		4	5	0	0
	Basis	Kuantitas	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	40	1	2	1	0
0	S_2	120	4	3	0	1
	zj	0	0	0	0	0
	cj - zj		4	5	0	0

Langkah-langkah metode simpleks

- Menentukan kolom pivot (kolom pemutar) dengan cara memilih kolom yang memiliki **nilai positif terbesar pada baris cj – zj**. Kolom pivot ini digunakan untuk menentukan variabel non-basis yang akan masuk ke dalam variabel basis.

Langkah-langkah metode simpleks

cj	Variabel		4	5	0	0
	Basis	Kuantitas	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	40	1	2	1	0
0	S_2	120	4	3	0	1
	zj	0	0	0	0	0
	cj - zj		4	5	0	0

- Menentukan baris pivot (baris pemutar) dengan cara **membagi nilai-nilai pada kolom kuantitas dengan nilai-nilai pada kolom pivot**, kemudian **memilih baris dengan hasil bagi yang non-negatif terkecil.** Baris pivot ini digunakan untuk menentukan variabel basis yang akan keluar dari variabel basis.

Langkah-langkah metode simpleks

cj	Variabel		4	5	0	0	Kuan Titas
	Basis	Kuantitas	X_1	X_2	S_1	S_2	/kol pivot
0	S_1	40	1	2	1	0	40/2 = 20
0	S_2	120	4	3	0	1	120/3=40
	zj	0	0	0	0	0	
	cj - zj		4	5	0	0	

- Perpotongan antara kolom pivot dan baris pivot diperoleh nilai pivot.
- Mengubah nilai baris pivot yang baru dengan cara :

$$nilai\,baris\ \ pivot\ baru = \frac{nilai\,baris\ \ pivot\ lama}{nilai\ \ pivot}$$

Sehingga pada tabel baru, nilai pivot menjadi 1.

Langkah-langkah metode simpleks

cj	Varia bel		4	5	0	0	
	Basis	Kuan Titas	X_1	X_2	S_1	S_2	
5	X_2	40/2	1/2	2/2	1/2	0/2	
	zj						
	cj - zj						

Langkah-langkah metode simpleks

cj	Variabel		4	5	0	0	
	Basis	Kuan Titas	X_1	X_2	S_1	S_2	
5	X_2	20	1/2	1	1/2	0	
	zj						
	cj - zj						

- Menghitung nilai baris lainnya dengan cara :

$$\frac{nilai\ baris}{tabel\ baru} = \frac{nilai\ baris}{tabel\ lama} - \left(\frac{koef\ \ kolom\ pivot}{yg\ berhubungan} \times \frac{nilai\ baris\ \ pivot}{tabel\ baru\ \ yg\ berhubungan} \right)$$

- Menghitung baris-baris zj dan cj – zj.
- Menentukan apakah solusi telah optimal dengan cara mengecek baris cj – zj. Jika nilai cj – zj adalah nol atau negatif, maka solusi telah optimal. Tetapi jika masih terdapat nilai positif, maka kembali ke langkah c dan mengulangi kembali langkah-langkah selanjutnya.

- kolom nilai baris lama –| koefisien kol pemutar yg berhubungan * nilai baris| =nilai akhir

Kuantitas	120	-	(3	X	20)	= 60
X1	4	-	(3	X	1/2)	= 5/2
X2	3	-	(3	X	1)	= 0
S1	0	-	(3	X	1/2)	= - 3/2
S2	1	-	(3	X	0)	= 1

Langkah-langkah metode simpleks

cj	Variabel		4	5	0	0	Kuan Titas
	Basis	Kuan Titas	X_1	X_2	S_1	S_2	/kol pivot
5	X_2	20	1/2	1	1/2	0	40
0	S_2	60	5/2	0	-3/2	1	24
	zj	100	5/2	5	5/2	0	
	cj - zj		3/2	0	-5/2	0	

Langkah-langkah metode simpleks

cj	Variabel		4	5	0	0	Kuan Titas
	Basis	Kuan Titas	X_1	X_2	S_1	S_2	/kol pivot
4	X_1	24	1	0	-0.6	0.4	24
	zj						
	cj - zj						

Langkah-langkah metode simpleks

cj	Variabel		4	5	0	0	Kuan Titas
	Basis	Kuan Titas	X_1	X_2	S_1	S_2	/kol pivot
5	X2	8	0	1	0.8	-0.2	
4	X_1	24	1	0	-0.6	0.4	
	zj	136	4	5	1.6	0.6	
	cj - zj		0	0	-1.6	-0.6	

Contoh 1:

- Fungsi tujuan :

  Maks $Z = 4 X1 + 5 X2$

- Fungsi pembatas :

  $X1 + 2 X2 \leq 40$

  $4 X1 + 3 X2 \leq 120$

  $X1 , X2 \geq 0$

Selesaikan dengan metode simpleks

Contoh 2:

- Fungsi tujuan :

  Maks $Z = 60\ X1 + 30\ X2 + 20\ X3$
- Fungsi pembatas :

  $8\ X1 + 6\ X2 + X3 \leq 48$

  $4\ X1 + 2\ X2 \leq 20$

  $2\ X1 + 1{,}5\ X2 + 1{,}5\ X3 \leq 8$

  $X2 \leq 5$

  $X1, X2, X3 \geq 0$

  Selesaikan dengan metode simpleks

Metode Simpleks (Big-M)

- (Meminimalkan Z, dengan batasan $\geq$)
- (Masalah Batasan Campuran)

Aturan yang dapat digunakan untuk memudahkan penyelesaian:

Batasan	Penyesuaian fungsi batasan	Koefisien fungsi tujuan	
		Maksimisasi	Minimisasi
$\leq$	Tambah slack variabel	0	0
=	Tambah artificial variabel	-M	M
$\geq$	Kurang slack variabel Dan tambah artificial variabel	0 -M	0 M

Contoh 3:

- Fungsi tujuan :

  Min Z = 6X1 + 3 X2

- Fungsi pembatas :

  $2X_1 + 4X_2 \geq 16$

  $4X_1 + 3X_2 \geq 24$

  $X_1, X_2 \geq 0$

  Selesaikan dengan metode simpleks

Contoh 4:

- Fungsi tujuan :

  Maks $Z = 400\ X1 + 200\ X2$
- Fungsi pembatas :

  $X1 + X2 = 30$

  $2\ X1 + 8\ X2 \geq 80$

  $X1 \leq 20$

  $X1 , X2 \geq 0$

  Selesaikan dengan metode simpleks