BAB 2 (LANJUTAN)
PEMROGRAMAN LINIER
(LINEAR PROGRAMMING)

Solusi Program Linier dengan Metode Grafik

Metode grafik hanya cocok digunakan untuk masalah Program Linier dengan 2 variabel. Jika mengandung lebih dari 2 variabel Maka penyelesaian dilakukan dengan metode lain (Simplex).

- Plot semua grafik batasan melalui persamaan liniernya.
- Tentukan daerah yang memenuhi masing-masing batasan pertidaksamaan liniernya (untuk memudahkan, lakukan dengan memberikan arsiran atau tanda yang lain).
- Tentukan daerah yang memenuhi semua batasan pertidaksamaan linier (daerah ini disebut daerah feasible atau daerah yang layak sebagai solusi program linier).
- Tentukan titik-titik sudut daerah feasible tersebut. Titik-titik sudut selanjutnya disebut sebagai titik ekstrim daerah feasible.
- Substitusikan titik-titik ekstrim dari daerah feasible ke fungsi obyektif.
- Pilih nilai fungsi obyektif yang terkecil atau terbesar sesuai dengan fungsi obyektif yang akan dioptimalkan. Solusi optimal terletak pada titik-titik ekstrim.

Contoh 1: Masalah Maksimalisasi

- Diketahui formulasi program linier berikut, tentukan solusi optimalnya.

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{Batasan} \quad x_1 \phantom{{}+3x_2} &\le 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\le 19 \\
x_1 + x_2 &\le 8
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

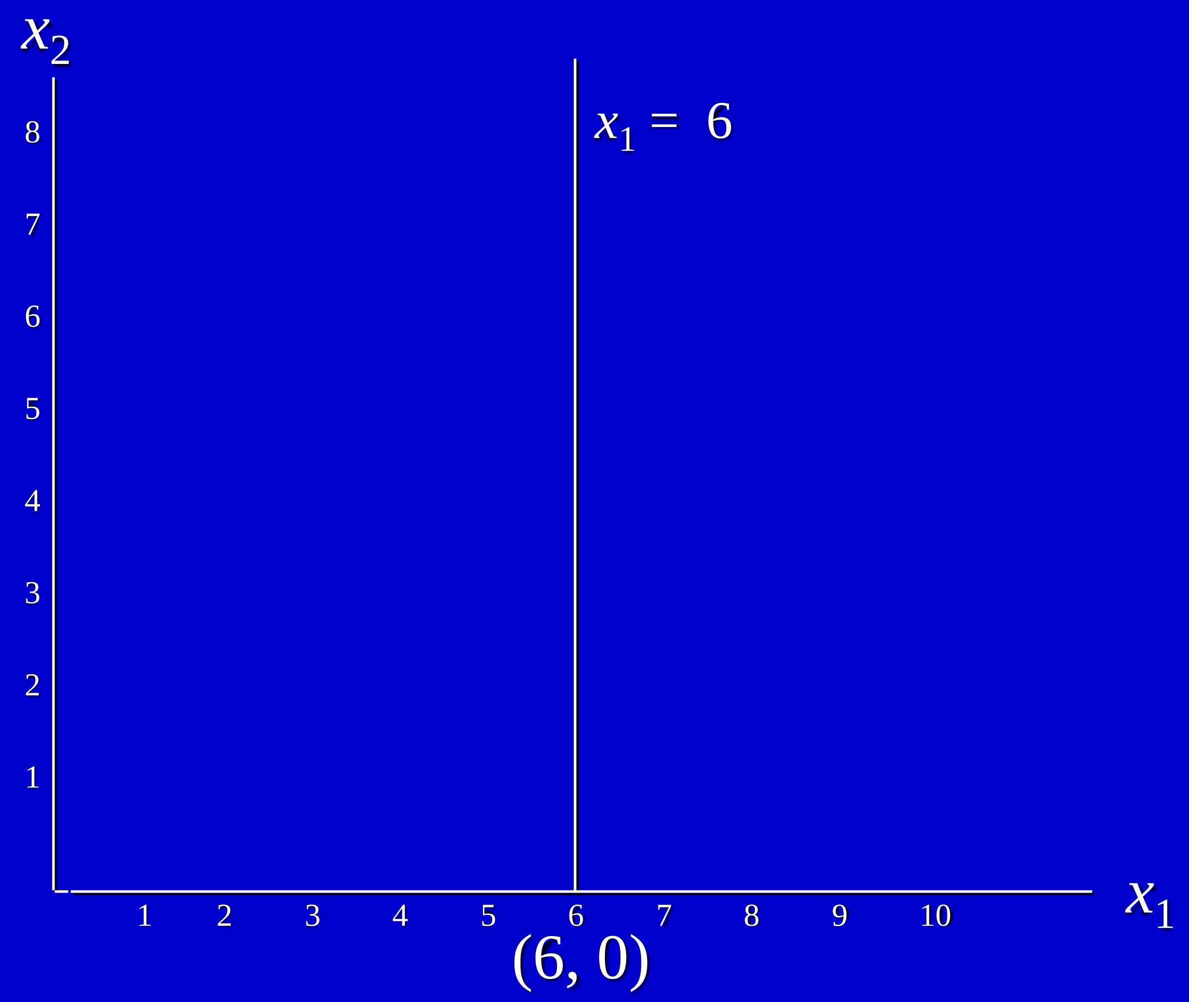
Contoh 1: Masalah Maksimalisasi

- Batasan #1

$x_1 \leq 6$

$x_1 = 6$

$x_2 = 0$ sehingga garis memotong sumbu x di titik (6, 0)



Contoh 1: Masalah Maksimalisasi

- Batasan #2

$2x_1 + 3x_2 \leq 19 \rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 19$

memotong sumbu x (x_2=0)

$2x_1 + 3(0) = 19$

$2x_1 = 19$

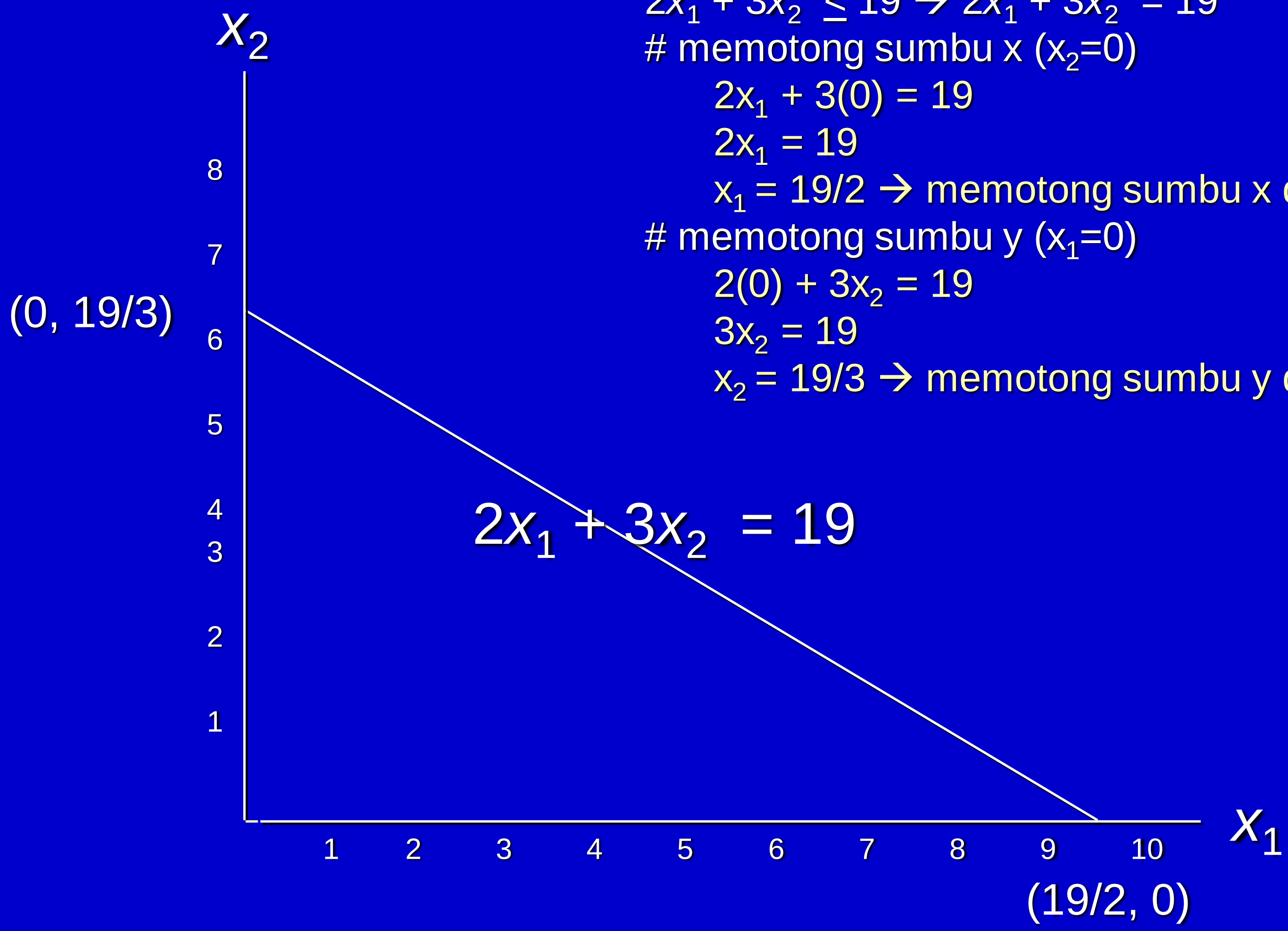
$x_1 = 19/2 \rightarrow$ memotong sumbu x di (19/2, 0)

memotong sumbu y (x_1=0)

$2(0) + 3x_2 = 19$

$3x_2 = 19$

$x_2 = 19/3 \rightarrow$ memotong sumbu y di (0, 19/3)



Contoh 1: Masalah Maksimalisasi

- Batasan #3

$x_1 + x_2 \leq 8 \rightarrow x_1 + x_2 = 8$

memotong sumbu x (x_2=0)

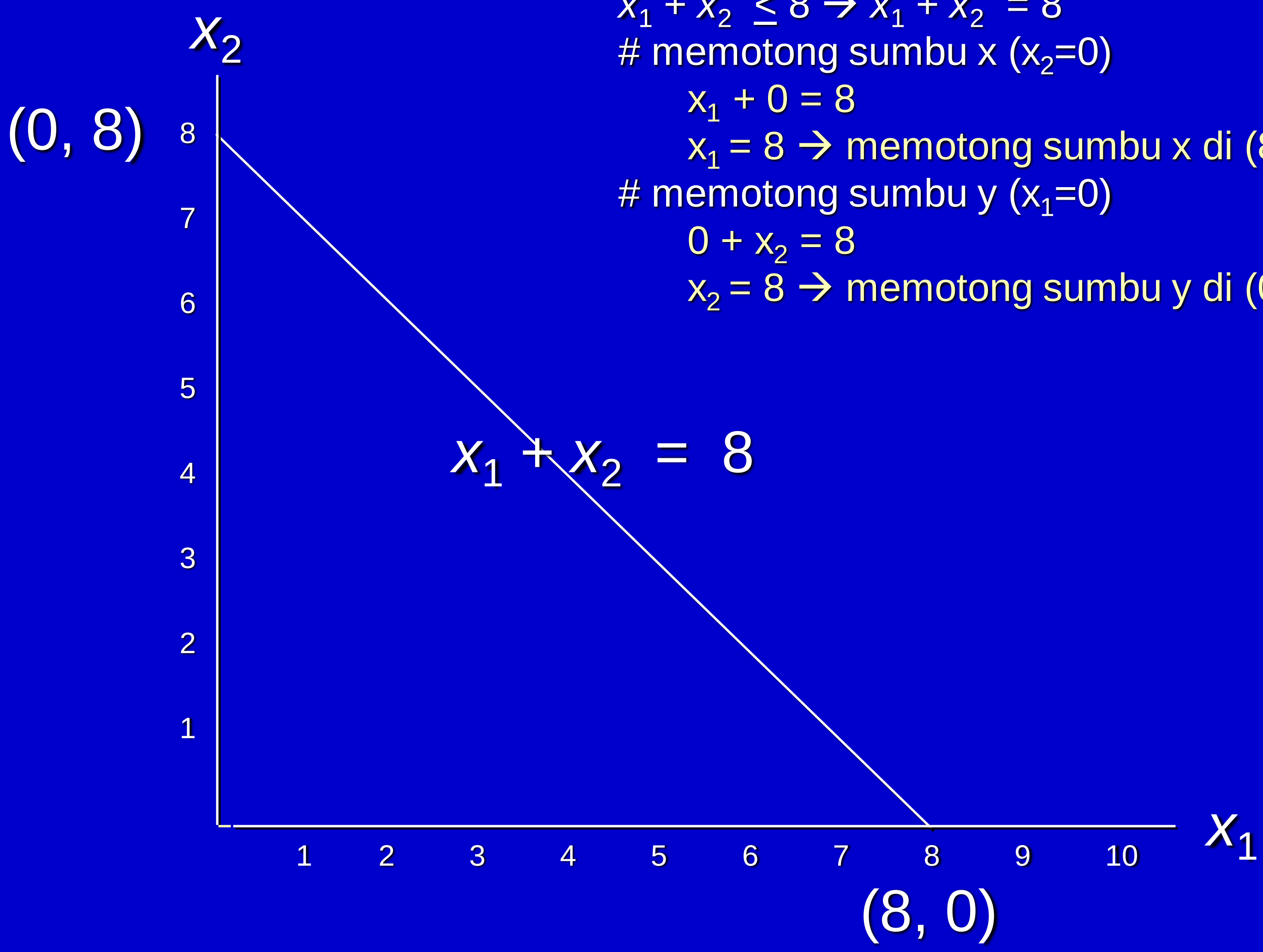
$x_1 + 0 = 8$

$x_1 = 8 \rightarrow$ memotong sumbu x di (8, 0)

memotong sumbu y (x_1=0)

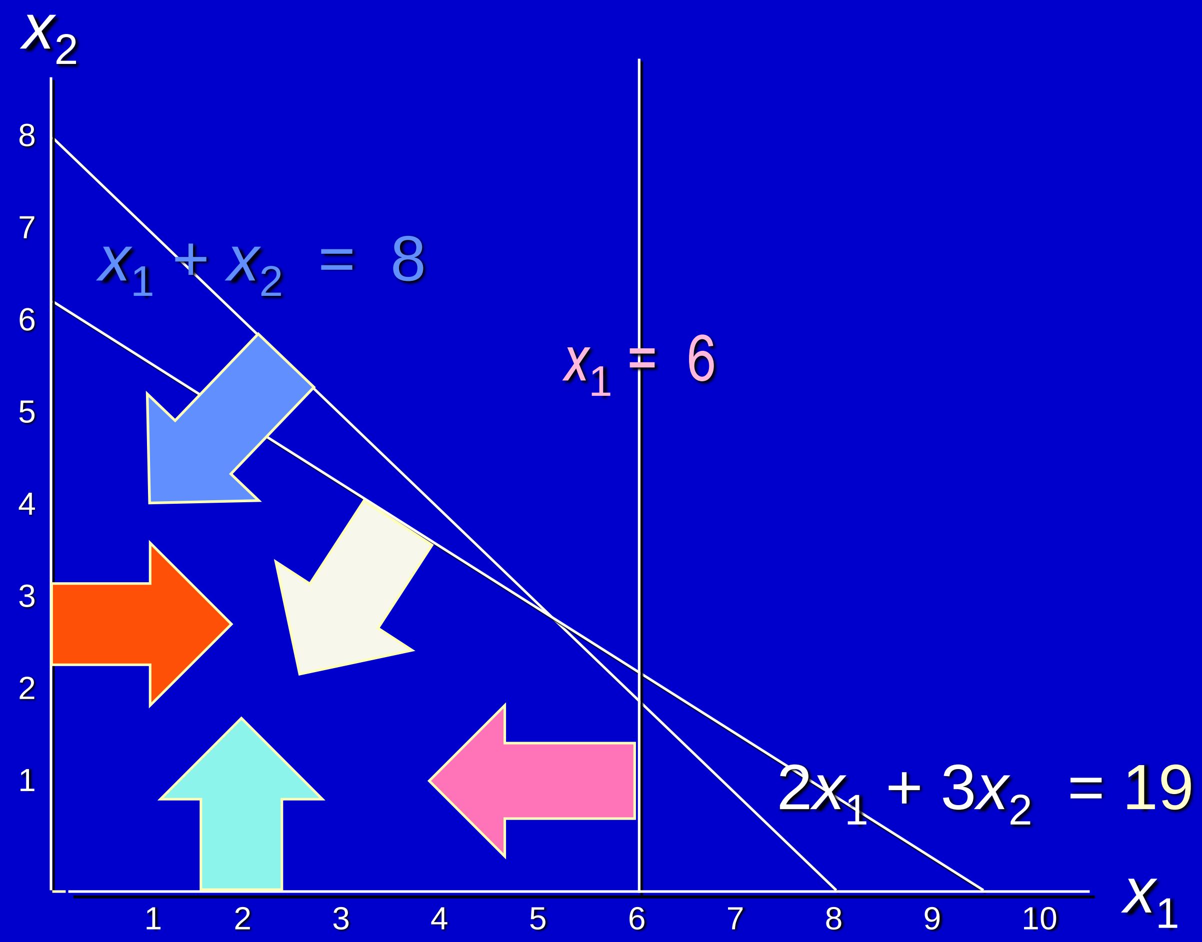
$0 + x_2 = 8$

$x_2 = 8 \rightarrow$ memotong sumbu y di (0, 8)



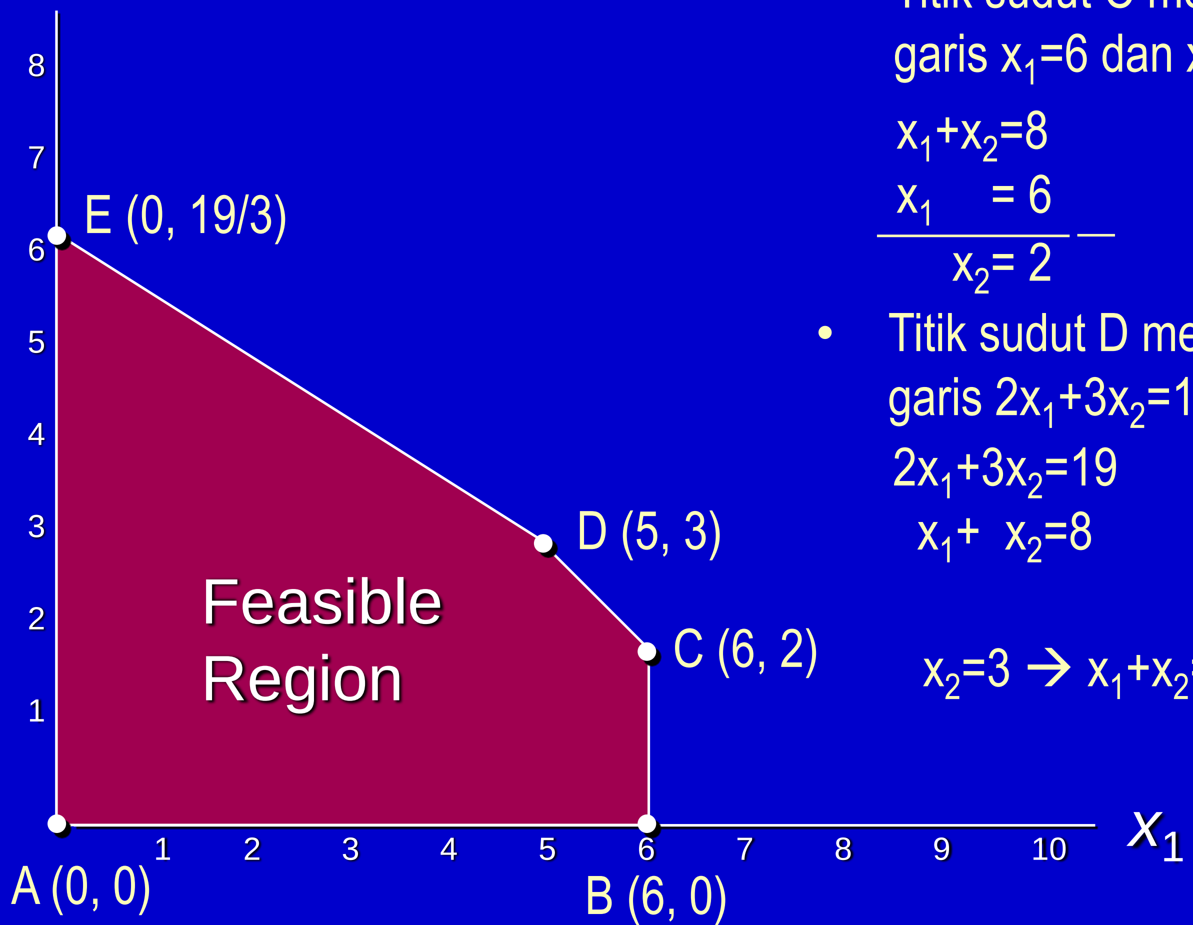
Contoh 1: Masalah Maksimalisasi

- Daerah feasible untuk semua pertidaksamaan batasan



Contoh 1: Masalah Maksimalisasi

- Daerah feasible dan titik-titik sudut



- Titik sudut C merupakan titik potong antara garis $x_1=6$ dan $x_1+x_2=8$

$$\begin{array}{r} x_1+x_2=8 \\ x_1 \quad = 6 \\ \hline x_2=2 \end{array} \; -$$

.: Titik potong di C (6,2)

- Titik sudut D merupakan titik potong antara garis $2x_1+3x_2=19$ dan $x_1+x_2=8$

$$\begin{array}{r} 2x_1+3x_2=19 \\ x_1+\ x_2=8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x_1+3x_2=19 \\ 2x_1+2x_2=16 \\ \hline x_2=3 \end{array} \; -$$

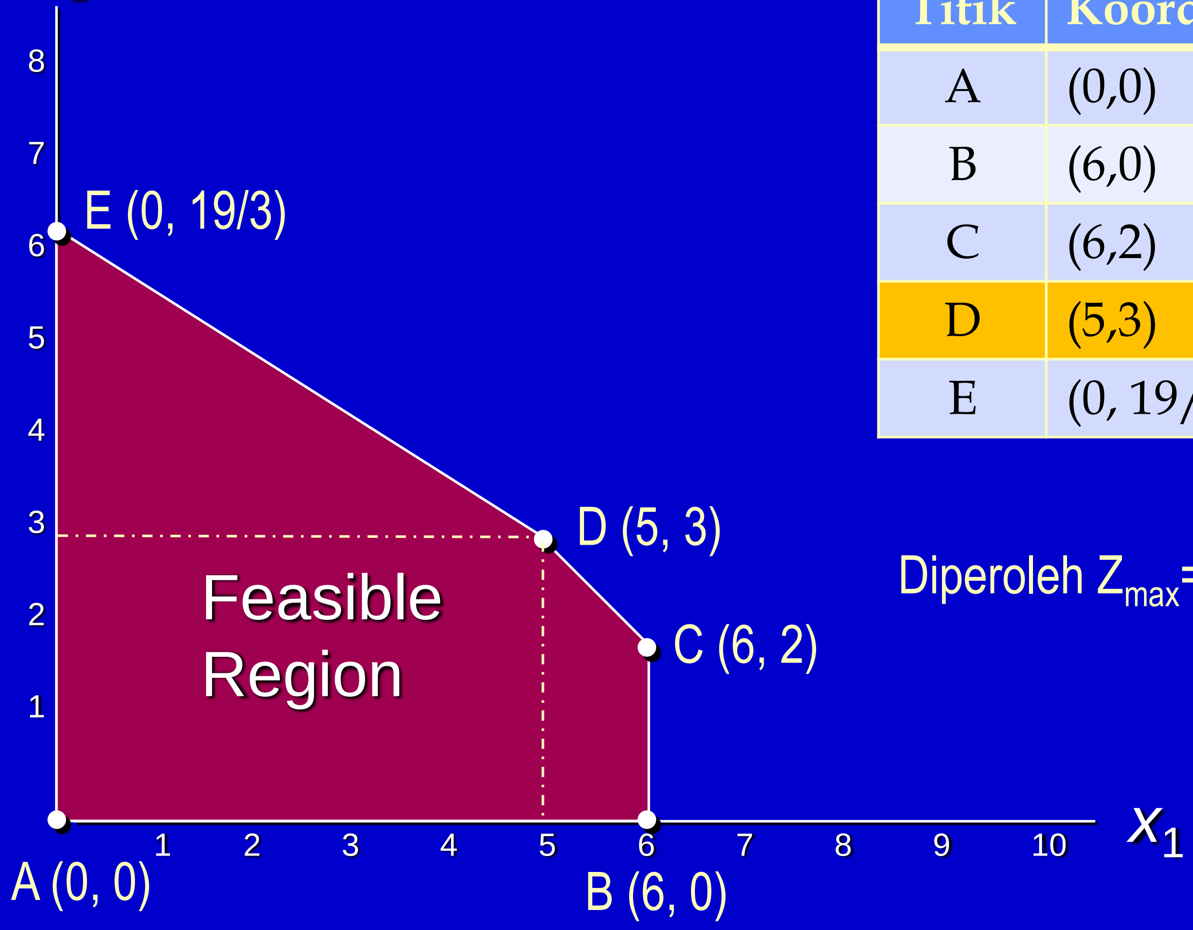
$x_2=3 \rightarrow x_1+x_2=8$ sehingga $x_1=5$

.: Titik potong di D (5,3)

Contoh 1: Masalah Maksimalisasi

- Substitusi ke fungsi obyektif z untuk menentukan nilai optimal z

Titik	Koordinat	$Z=5x_1+7x_2$
A	(0,0)	0
B	(6,0)	30
C	(6,2)	44
D	(5,3)	46
E	(0, 19/3)	44.33



Diperoleh $Z_{max}=46$ dengan $x_1=5$ dan $x_2=3$

Contoh 2: Masalah Minimalisasi

- Diketahui formulasi program linier berikut, tentukan solusi optimalnya

$$\text{Min} \quad z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Batasan} \qquad 2x_1 + 5x_2 &\geq 10 \\ 4x_1 - \ x_2 &\geq 12 \\ x_1 + \ x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Contoh 2: Masalah Minimalisasi

- Batasan #1

$2x_1 + 5x_2 \geq 10$

$\rightarrow 2x_1 + 5x_2 = 10$

$x_1=0 \rightarrow 5x_2=10$
$x_2=2$
$(0, 2)$
$x_2=0 \rightarrow 2x_1=10$
$x_1=5$
$(5, 0)$

- Batasan #2

$4x_1 - x_2 \geq 12$

$\rightarrow 4x_1 - x_2 = 12$

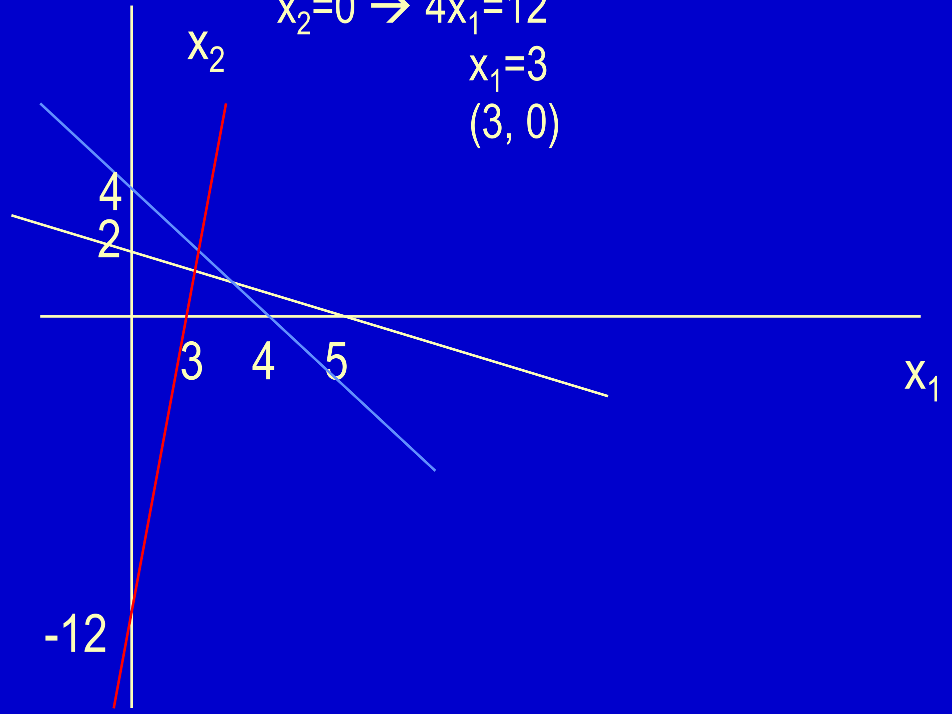
$x_1=0 \rightarrow - x_2= 12$
$x_2= -12$
$(0, -12)$
$x_2=0 \rightarrow 4x_1=12$
$x_1=3$
$(3, 0)$

- Batasan #3

$x_1 + x_2 \geq 4$

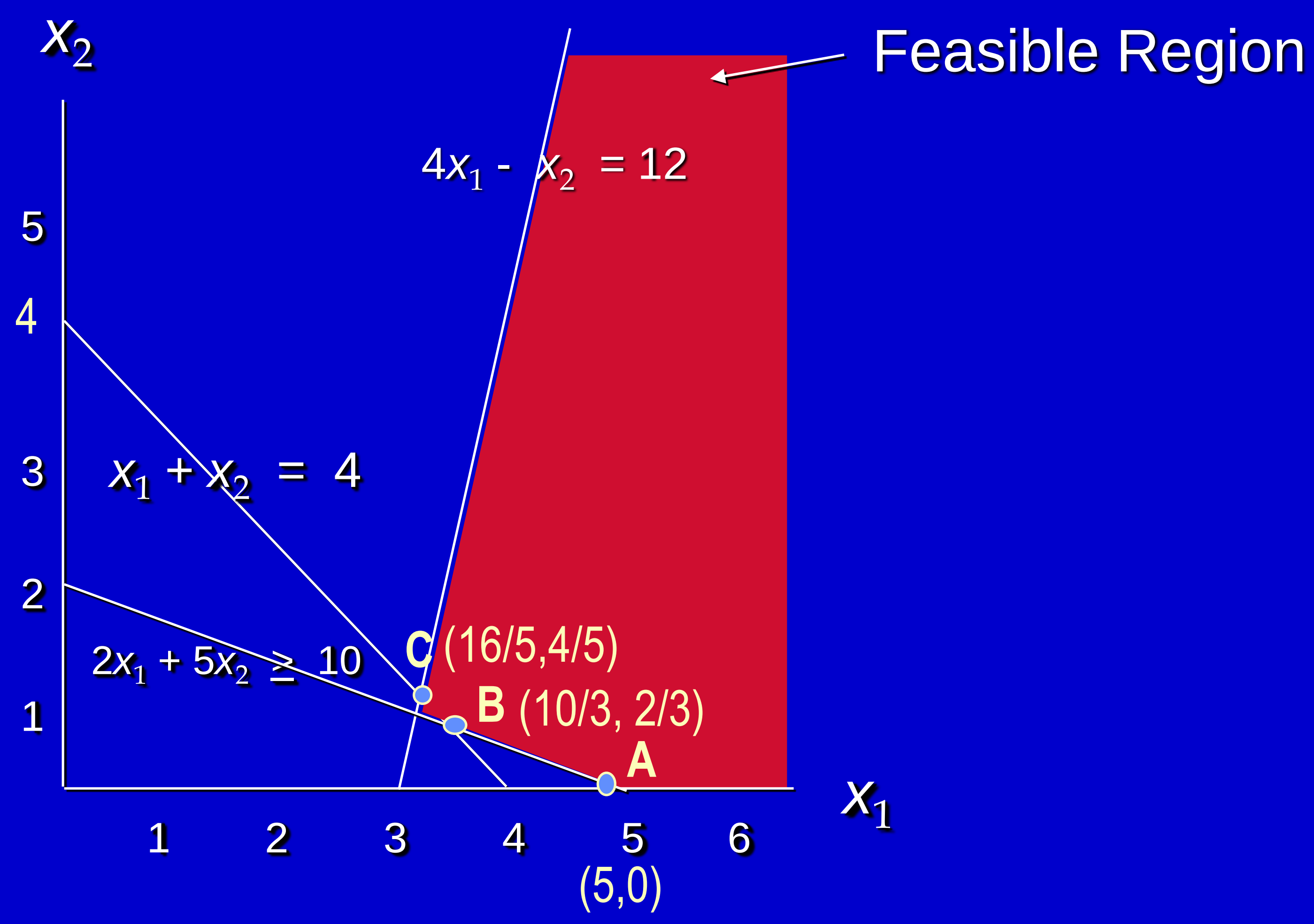
$\rightarrow x_1 + x_2 = 4$

$x_1=0 \rightarrow x_2= 4$
$(0, 4)$
$x_2=0 \rightarrow x_1=4$
$x_1=4$
$(4, 0)$



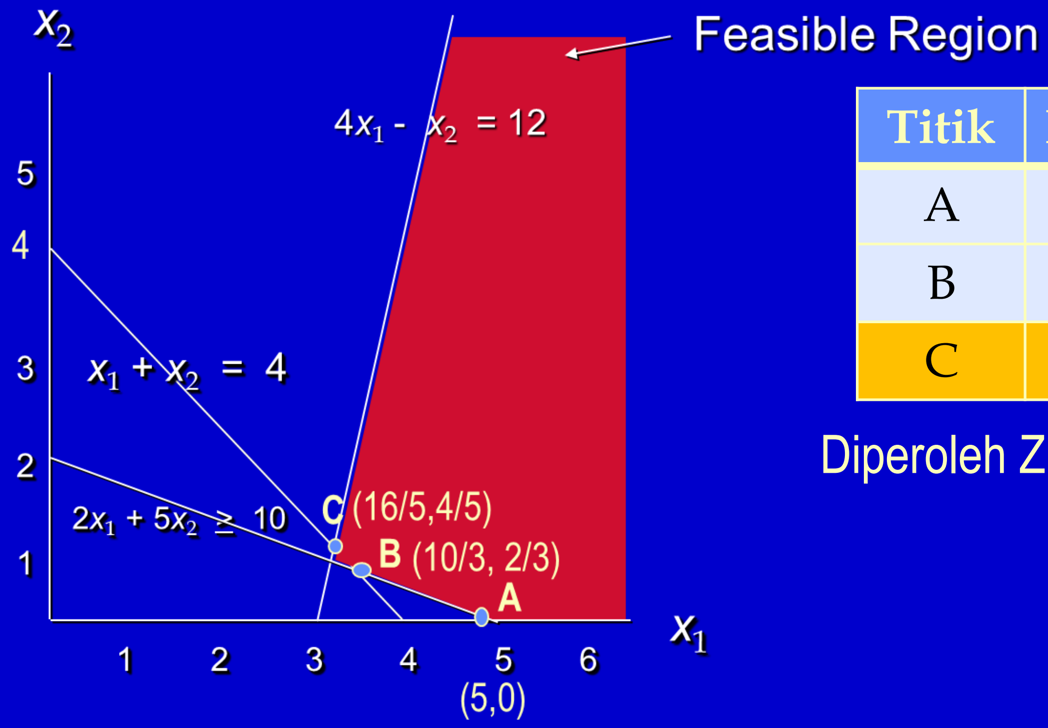
Example 1: Graphical Solution

- Constraints Graphed



Example 1: Graphical Solution

- Titik ekstrim C merupakan titik potong antara garis $4x_1 - x_2 = 12$ dan $x_1 + x_2 = 4$. Diperoleh titik potongnya adalah C(16/5, 4/5).
- Titik ekstrim B merupakan titik potong antara garis $2x_1 + 5x_2 = 10$ dan $x_1 + x_2 = 4$. Diperoleh titik potongnya adalah B(10/3, 2/3).



Titik	Koordinat	$Z=5x_1+2x_2$
A	(5,0)	25
B	(10/3, 2/3)	18
C	(16/5, 4/5)	88/5

Diperoleh Z_{min}=88/5 dengan x_1=16/5 dan x_2=4/5

Daerah Feasible / Daerah Solusi

- Daerah feasible untuk program linier 2 variable dapat: tidak ada solusi (nonexistent), solusi tunggal (single point), garis (line), polygon (polygon), atau daerah tak hingga (unbounded area).
- Suatu masalah program linier akan berada pada salah satu kategori berikut:
  - Infeasible (tidak layak)
  - Memiliki solusi optimal tunggal atau alternative (multi solusi)
  - Memiliki fungsi obyektif yang nilainya menaik tanpa batas (increased without bound)
- Daerah feasible mungkin tidak terbatas dan mungkin memiliki solusi optimal. Kondisi ini biasa terjadi pada masalah minimalisasi dan dimungkinkan juga pada masalah maksimalisasi.

Kasus Khusus

- Solusi optimal alternative (Multiple Optimal Solutions)

  Pada metode grafik, jika fungsi obyektif sejajar dengan batasan daerah optimal, maka akan terdapat solusi optimal alternative dengan nilai optimal yang sama.

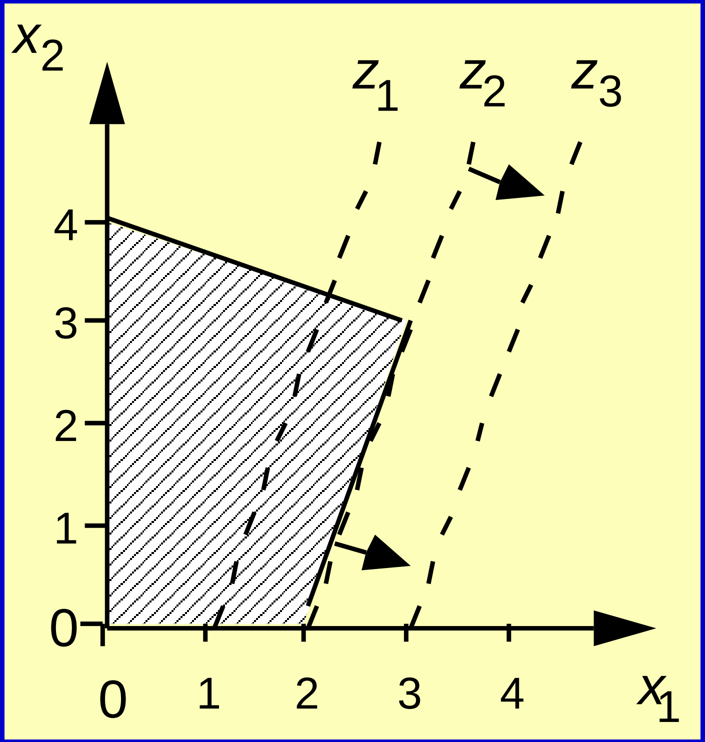
- Solusi tidak layak (Infeasibility)

  Masalah program linier yang memiliki kelebihan dalam batasan sedemikian sehingga tidak ada titik yang memenuhi semua batasan, disebut masalah yang infeasible (tidak ada solusi optimal yang layak).

- Tak terbatas (Unbounded)

  Untuk masalah maksimalisasi (minimalisasi), solusi tidak terbatas terjadi jika ditemukan titik solusi yang terdapat pada daerah feasible namun nilai fungsi obyektifnya terlalu besar (atau terlalu kecil).

Contoh Multiple Optimal Solutions



Maximize $z = 3x_1 - x_2$

subject to

$$15x_1 - 5x_2 \leq 30$$

$$10x_1 + 30x_2 \leq 120$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Contoh: Masalah Infeasible

- Carilah nilai optimal dari model PL berikut:

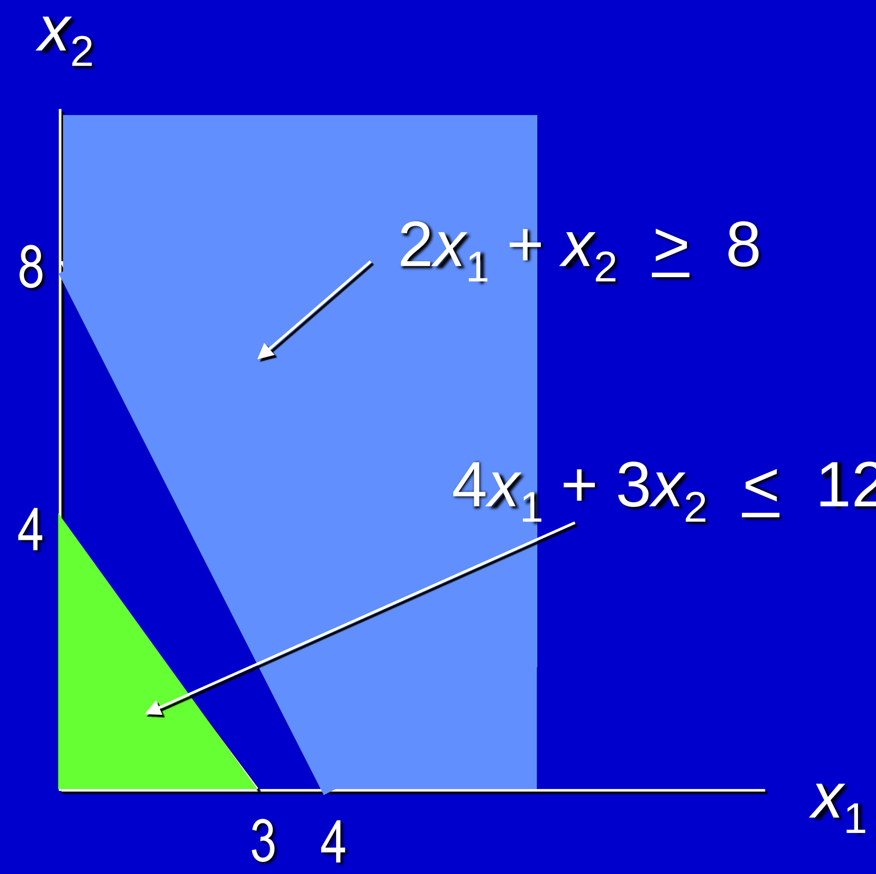
$$\text{Max} \quad z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} \text{batasan} \quad 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 8 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Contoh: Masalah infeasible

- Di bawah ini contoh model PL yang tidak memiliki daerah solusi yang memenuhi semua batasan, sehingga tidak memiliki solusi optimal.



Contoh: Masalah tak terbatas

- Tentukan solusi optimal dari model PL berikut:

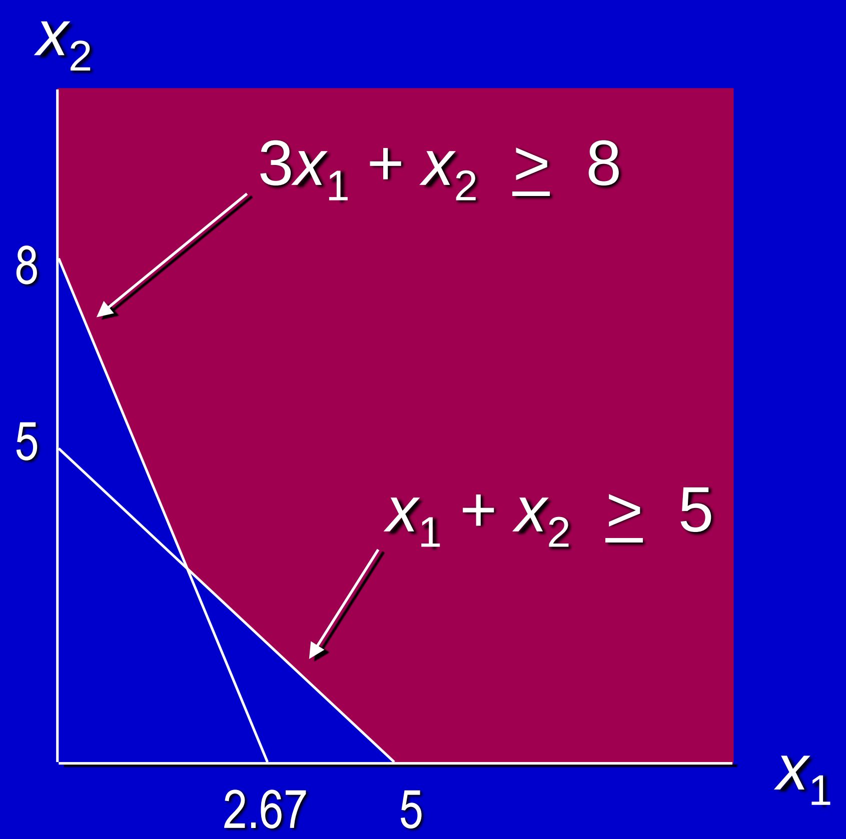
$$\text{Max} \quad z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{batasan} \quad x_1 + x_2 &\geq 5 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 8 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Contoh: Masalah tak terbatas

- The feasible region is unbounded and the objective function line can be moved parallel to itself without bound so that *z* can be increased infinitely.



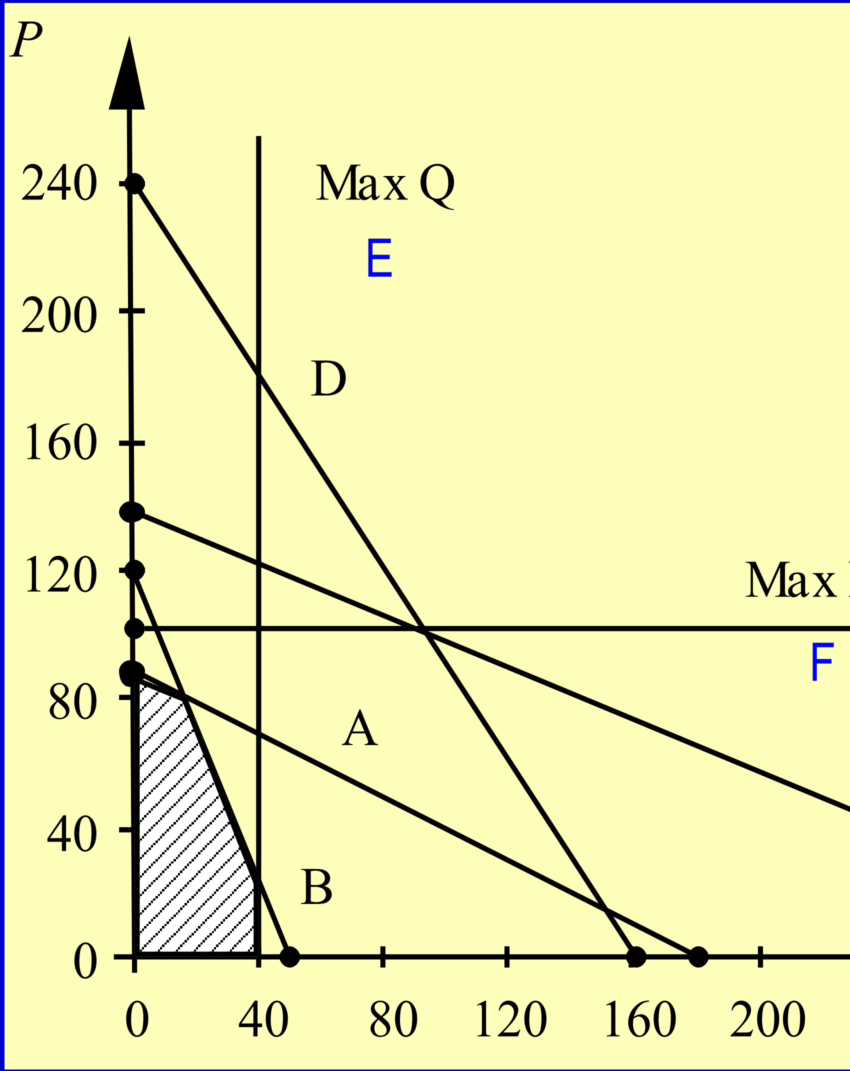
Solve the following LP graphically

max	$45\,x_1 + 60\,x_2$		Objective Function
batasan	$10\,x_1 + 20\,x_2 \le 1800$	A	Structural constraints
	$28\,x_1 + 12\,x_2 \le 1440$	B	
	$6\,x_1 + 15\,x_2 \le 2040$	C	
	$15\,x_1 + 10\,x_2 \le 2400$	D	
	$x_1 \le 40$	E	
	$x_2 \le 100$	F	
	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$		nonnegativity

Where x_1 is the quantity produced from product Q, and x_2 is the quantity of product P

Are the LP assumptions valid for this problem?

The graphical solution



Assignment: Complete the problem to find the optimal solution

Possible Outcomes of an LP

1. Infeasible – feasible region is empty; e.g., if the constraints include
   $x_1 + x_2 \leq 6$ and $x_1 + x_2 \geq 7$

2. Unbounded - Max $15x_1 + 7x_2$ (no finite optimal solution)
   batasan $x_1 + x_2 \geq 1$
   $x_1, x_2 \geq 0$

3. Multiple optimal solutions - max $3x_1 + 3x_2$
   batasan $x_1 + x_2 \leq 1$
   $x_1, x_2 \geq 0$

4. Unique Optimal Solution

Note: multiple optimal solutions occur in many practical (real-world) LPs.