

Das Fadenpendel



Versuchsprotokoll von
John Schütte , Yupeng Yu.

Ge6684fu@zedat.fu-berlin.de

yupey43@zedat.fu-berlin.de

Tutor: Georg Merklin

Grundpraktikum ,SS2023

Berlin , 02.05.2023

Freie Universität Berlin

Fachbereich Physik

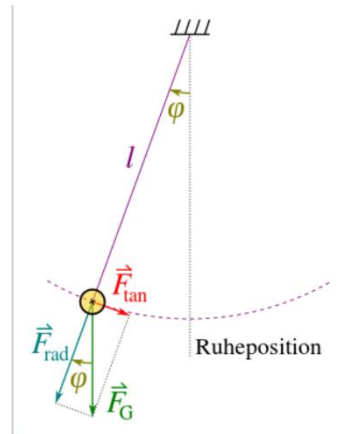
Fadenpendel

Einleitung

Harmonische Schwingungen sind ein universell vorhandenes Problem, welche in allen erdenklichen Bereichen und Größenordnungen wiederzufinden sind. So lassen sich beispielsweise eine Kinderschaukel und Schwingungen innerhalb von Molekülen auf eine einzige mathematische Fragestellung zurückführen: Der harmonische Oszillator.

Das Fadenpendel ist eine Ausführung eines harmonischen Oszillators, die für experimentelle Messungen exzellent geeignet ist, da sich mit ihr die Erdbeschleunigung über die Messung der Schwingungsperiode T bestimmen lässt und das ohne, wie beim Federpendel, vorab Materialkonstanten bestimmen zu müssen. Der Versuch dient zudem dazu, die Anwendbarkeit des mathematischen Pendels auf die Realität zu überprüfen, da der reelle Aufbau dieses Problems sich sehr simpel gestaltet.





(Bild aus Wikipedia) [g1]

Physikalische Grundlagen

Der Aufbau dieses Versuchs ist dem sogenannten mathematischen Pendel nachempfunden. Das mathematische Pendel besteht aus einem als masselos angenommenen Faden, der an einer Aufhängung befestigt ist und an dessen unterem Ende sich ein Massepunkt befindet, der nach einer anfänglichen Auslenkung mit dem Winkel φ_0 auf einer Kreisbahn mit Radius l im Schwerfeld der Erde um die Gleichgewichtslage, definiert als $\varphi = 0$, hin- und her schwingt.

Dies lässt sich über eine Kräftezerlegung wie in [g1] graphisch dargestellt am besten beschreiben. Die Gravitationskraft F_g wird hierbei in eine tangentiale und eine radiale Komponente zerlegt, wobei die radiale Komponente nicht weiter relevant ist,

da sie von der Fadenkraft F_L , welche ebenfalls radial entlang des Fadens wirkt, kompensiert wird.

Somit bleibt nur noch die tangentielle Komponente, die für die Bewegungsgleichung relevant ist. Da der Radius konstant ist, lässt sich die Position des Massepunktes in Abhängigkeit von der Zeit t allein durch die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage um den Winkel φ eindeutig bestimmen. Somit ist eine Bewegungsgleichung in φ die sinnvollste Betrachtung.

Es findet sich also auf der einen Seite der Gleichung die tangentielle Komponente der Gravitationskraft und auf der anderen die Gesamtkraft nach Newton, die über die Masse, die Winkelbeschleunigung und die Fadenlänge ausgedrückt wird:

$$mg\sin\varphi = -ml\frac{d^2}{dt^2}\varphi \quad (1)$$

Dabei lässt sich der Sinus für kleine Winkel wie folgt annähern, um die Gleichung zu vereinfachen:

$$\sin\varphi \approx \varphi \quad (2)$$

Damit ergibt sich:

$$mg\varphi = -ml\frac{d^2}{dt^2}\varphi \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi \, l + g\varphi = 0 \quad (4)$$

Die Gleichung (4) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich mit dem Ansatz $\varphi = A \cos(\omega t + \theta)$ (5) lösen lässt.

Nach Einsetzen von (5) in (4) ergibt sich

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (6)$$

$$\text{Wobei } \omega_0^2 = g/l$$

Die Periodendauer T lässt sich durch die Kreisfrequenz ω_0 bestimmen und durch Einsetzen von ω_0 ergibt sich also für die Periode:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g} \quad (7)$$

Über diese Gleichung stellt sich also der Zusammenhang der Pendelperiode T und der Gravitationskonstante g dar, mit dem sich g experimentell bestimmen lässt. Die zu messenden Größen zur Auflösung nach g beschränken sich also auf die Periode T und die Fadenlänge l . Dies gilt natürlich nur unter der Annahme, dass sich der Aufbau perfekt in die Realität übertragen lässt, was bei diesem Versuch auch zunächst experimentell überprüft werden soll.



Materialien:

Faden

Massestücke

Waage

Lineal

Smartphone

Stativ

Geodreieck

Durchführung:


1. Versuchsaufbau:

Für den Versuchsaufbau standen verschiedene Materialien zur Verfügung, denn die erste Aufgabenstellung beinhaltete, die Messungengenauigkeit bei diesem Versuch so gering wie möglich zu halten.

Wir wählten somit für die Aufhängung des Gewichts, um die Luftreibung zu reduzieren den dünnsten Faden, den wir dann mit einer Schlaufe am Ende an einen Haken am Stativ hängten. Dabei wählten wir die kleinstmögliche Schlaufe, damit der Faden möglichst wenig Auflagefläche hatte, was wieder zur Reduzierung der Reibung diente. Auch für das gewählte Gewicht war die Reduzierung der Reibung relevant: Es sollte daher nicht zu schwer sein, aber dennoch schwer genug, sodass der Faden während der gesamten Pendelbewegung auf Spannung gehalten wurde.



Messung der Periodendauer: (Aufgabe 1)

Die Periodendauer T wurde mit einer Stoppuhr auf dem Smartphone gemessen. Eine Ableseungenauigkeit trat dank der Digitalanzeige deshalb gar nicht erst auf, sie wäre allerdings in Hinsicht auf die viel größere Ungenauigkeit durch die Reaktionszeit so oder so zu vernachlässigen gewesen. 

Wir entschieden uns dafür, die Zeit immer für mehrere Perioden zu stoppen, und zwar für mindestens 10, da sich die Messunsicherheit der Reaktionszeit hierdurch über alle Perioden verteilt und für die einzelne Periode entsprechend geringer ist. Uns war es aus Zeitmangel nicht möglich, viele Messungen mit einer deutlich höheren Periodenzahl anzustellen.

Das Pendel wurde ausgelenkt und der Auslenkwinkel mit dem Geodreieck gemessen. Für den Großteil der Messungen ist der Ablesefehler hierbei ebenfalls zu vernachlässigen, da der gewählte Winkel sich weit genug unter dem Grenzwinkel befand, bei dem die Näherung des Sinus in Gleichung (2) sich bemerkbar gemacht hätte.

Damit sich kein größerer Fehler durch die Koordination zwischen der Person, die das Pendel loslässt und der Person, die die Zeit

stoppt, ergibt, wurde die Stoppuhr erst nach der 1. Periode betätigt, als sich das Pendel wieder am Punkt der höchsten Auslenkung befand.




Änderung der Parameter: (Aufgabe 2&3)

Für die Fragestellung, ob die Anfangsauslenkung relevant für die Dauer der Periode ist, waren Messungen mit verändertem Anfangswinkel notwendig, allerdings hatten wir aus Zeitgründen nicht die Möglichkeit, Mehrfachmessungen mit den verschiedenen Winkeln durchzuführen und wir entschlossen uns daher, für die Messungen mit verschiedenen Fadenlängen einen festen Auslenkwinkel von 15° Grad zu benutzen, da dieser sicher unter dem Grenzwinkel lag, auch wenn wir während des Versuchs nicht genau bestimmen konnten, bei welchem Wert dieser liegt.



Wir führten dann für fünf verschiedene Fadenlängen, welche wir mit einem Meterlineal bestimmten, jeweils zehn Messungen durch.

Anzumerken ist hierbei, dass es sich deutlich schwerer gestaltete, möglichst akkurat zu stoppen, wenn der Faden sehr kurz war, da

die Wegstrecke, über die sich das Pendel hin und her bewegte, sehr kurz wurde. 

Messprotokoll – Deckblatt

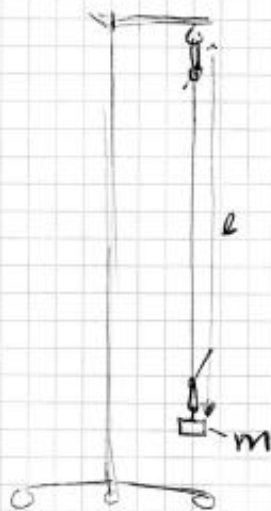
Versuch-Titel:	Fadenpendel	Datum: 26.04.23
Studierende ¹ :	John Schütte	Yapeng Fu
Tutor*in:	Georg Merklin	

¹ Verfasser*in unterstreichen

Jeder Studierende muss ein persönliches Protokollheft führen, in dem die Messprotokolle bei der Versuchsdurchführung einzutragen sind. Zu Beginn jedes Messprotokolls muss dieses Messprotokoll-Deckblatt in das Protokollheft eingeklebt sein.

In der linken Spalte der folgenden Tabelle sind die Informationen, die im Messprotokoll für jede Teilaufgabe zu dokumentieren sind, aufgeführt. Die weiteren Felder der Tabelle dienen als Checkliste zum Abhaken. Das Messprotokoll ist am Ende des Versuchstages von dem/der Tutor*in abzuzeichnen. Alle Aufgaben, Gleichungen, Tabellen, und Bilder im Messprotokoll bitte konsequent nummerieren.

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5
Messaufgabe (z.B. Bestimmung der Brennweite einer Linse)					
Messgleichung und -größen (Symbole bezeichnen)					
Versuchsaufbau (Skizze mit Erläuterungen in sinnvoller Größe nach realem Aufbau – nicht vom Skript übernehmen,)					
Verwendete Geräte (kann mehrere Aufgaben gleichzeitig umfassen)					
Verwendete Messbereiche/Anschlüsse					
Stichpunkte zur Versuchsdurchführung / Kommentare (z.B. Messwerte/Einstellungen nur ungenau reproduzierbar, Komponente wird warm,...)					
Messunsicherheiten der Messgrößen (Quantitative Abschätzung begründen z.B. Ablesegenauigkeit, Reaktionszeit, wiederholte Messungen, Angaben zu den Geräte, Einstellung/Justage, ...)					
Messdaten handschriftlich (vorzugsweise Tabellenform, alle eingehenden Parameter und resultierenden Messwerte, ggf. Kommentare, z.B. bei Messbereichsumstellung während der Messung)					
Im Computer abgelegte Messdaten (Name der Datei, Rechner auf dem die Daten abgelegt sind, Datum und Zeit der Speicherung, Benennung/-schreibung der gespeicherten Daten)					
Notizen aus Vorgespräch (Hinweise zur Auswertung,...)					
Termin für Feedbackgespräch					



→ Masse wiegen: 49,853 g

Fadenlänge messen mit Lineal (1 m lang):

1 Aufhängung vom Gewicht geht mit in Fadenlänge ein
 Dicke des Gewichts gemessen: 1 cm
 Schwerpunkt: 0,5 cm

l	cm + Spätem	
l_1	78,7 + 0,5	79,2
l_2	59,5 + 0,5	60,0
l_3	71,0 + 0,5	= 71,5
l_4	29,0 + 0,5	= 30 29,5
l_5	20,7 + 0,5	= 21,3



Geometrie zum Winkel messen

Faden möglichst dünn

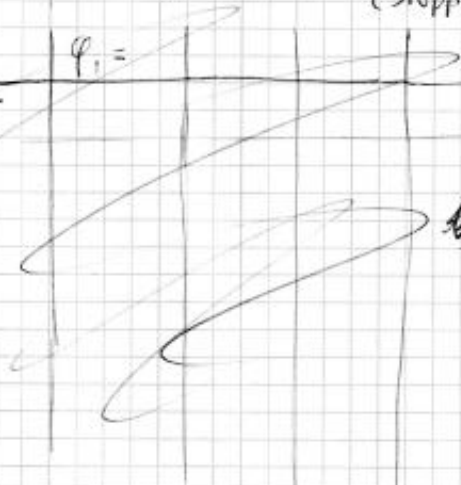
Periode mit Stoppuhr messen (Handy-Stoppuhr)

der Gestoppt wird am Punkt der größten Auslenkung, und zwar nach 1. Periode (Stopp am d.)

Für l_1 :

4. N.T

φ	[° Grad]
φ_1	10°
φ_2	15°
φ_3	20°
φ_4	25°
φ_5	10°
φ_6	15°



T	[s]
$T_{10\varphi}^1$	16,00 s
$T_{10\varphi}^2$	16,41
$T_{10\varphi}^3$	18,30
$T_{10\varphi}^4$	18,39
$T_{10\varphi}^5$	17,93
$T_{10\varphi}^6$	18,06

φ	$T_{10p} [s]$
30°	18,23
30°	18,18
45°	18,58
20°	17,87
	=

$T_{20p} [s]$	$\varphi = 15^\circ$
35,67	
35,63	
35,77	

b₁

$T_{10p} [s]$	$\varphi = 15^\circ$
17,92	
17,98	
17,84	
17,89	
18,00	
17,86	
17,85	
17,86	
17,93	

Aufgabe 1:

Messungshorizont:

$$T_N = N \cdot T$$

$$T = \frac{1}{N} T_N$$

$$\Delta T = \frac{1}{N} \Delta T_N$$

Reaktionszeiten: 0,25 s

$$\Rightarrow \Delta t_R = 0,5 s$$

b ₂ , $\varphi = 15^\circ$	$T_{10p} [s]$
	15,22
	15,58
	15,54
	15,46
	15,58
	15,40
	15,71
	15,60
	15,67
	15,64

$\textcircled{b_3} \quad \varphi = 15^\circ$	T_{top}
	16,96
	17,01
	16,91
	16,99
	17,03
	16,84
	16,97
	16,98
	16,92
	16,90

$\textcircled{b_4} \quad \varphi = 15^\circ$	$T_{\text{top}} \text{ [s]}$
	10,82
	11,01
	11,08
	10,83
	10,99
	10,90
	11,12
	10,99
	10,92
	10,86

$\textcircled{b_5} \quad \varphi = 15^\circ$	$T_{\text{top}} \text{ [s]}$
	8,60
	8,45
	9,26
	9,40
	9,37
	9,34
	8,87
	9,24
	9,47
	9,72

→ Kurzer Faden macht
das Stoppen schwieriger
/ Das Fadenende hing
los


geg. $\mu = 0,2$

Auswertung

Für jede vorhandene Fadenlänge haben wir jeweils zehn Messungen über zehn Perioden angestellt. Aus den einzelnen Messwerten für T_{10} lässt sich dann der Mittelwert mit folgender Formel berechnen:

$$T_{10m} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_i$$

Die Dauer einer einzelnen Periode ist somit $T_{10}/10$.

Mit einer angenommenen Reaktionszeit von jeweils 0,25 s am Anfang und am Ende der gestoppten Zeiten ergibt sich eine Gesamtunsicherheit von 0,5 s auf zehn Perioden, daher beträgt der Fehlerwert für eine einzelne Periode somit $\Delta T \text{ 0.05s}$. 

	$\Delta T=0,05s$		$\Delta(T^2)=2T\Delta T$
L/m	T (s)	T^2	$\Delta(T^2)$
0,792	1,79	3,20	0,18
0,600	1,55	2,40	0,16
0,715	1,70	2,89	0,17
0,295	1,10	1,21	0,11
0,213	0,93	0,865	0,093

(t1)

Bestimmung der Erdbeschleunigung g:

Die Gleichung $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (7) lässt sich am besten für g auflösen, wenn man sie quadriert, daher wurde in der obigen Tabelle (t1) das Quadrat der Periode und der zugehörige Fehler eingetragen.

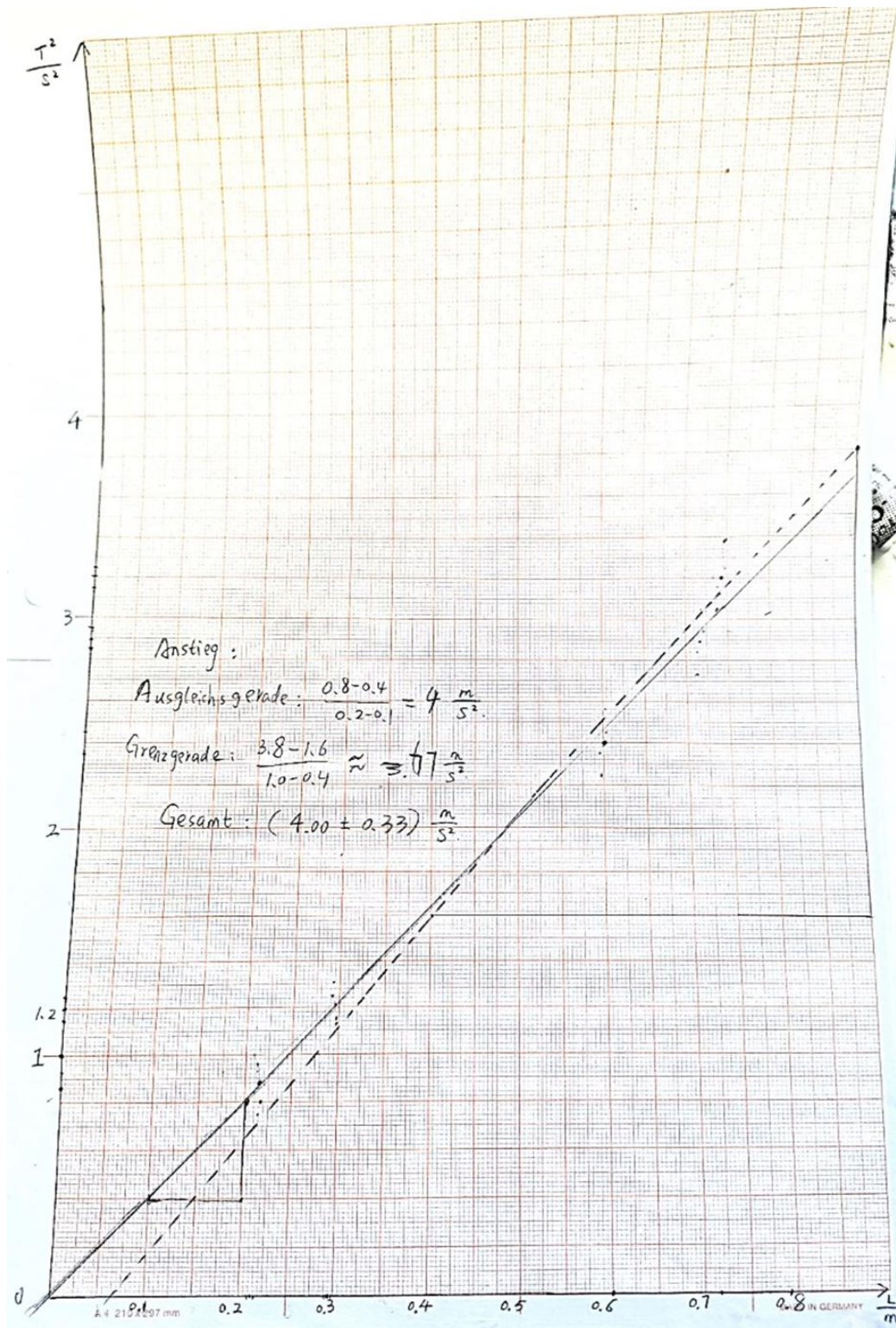
Gleichung (7) sieht in quadrierter Form wie folgt aus:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L. \quad (8)$$

Die Erdbeschleunigung g lässt sich nun bestimmen, in dem man die Werte für T^2 (s^2) und $L(m)$ graphisch aufträgt und den Vorfaktor als Steigung interpretiert.

Also haben wir L auf der x-Achse und T^2 auf der y-Achse aufgetragen und zu den einzelnen Werten die jeweiligen Fehlerbalken eingezeichnet.

Danach wurden die Ausgleichsgerade zur Bestimmung von g und die Grenzgerade zur Bestimmung des Fehlers von g eingezeichnet:



Die Steigung der Geraden k war also aus der Gleichung (8) mit $k = \frac{4\pi^2}{g}$ gegeben und wir haben durch Erstellen von Steigungsdreiecken für Ausgleichs- und Grenzgerade die jeweiligen Werte für k bestimmt und hieraus den Wert für g und den Fehler für g errechnet:

$$\frac{4\pi^2}{g} = k_1 = 4.00 \frac{1}{s^2 m}$$

$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{k_1} = 9.9 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta(k_1) = 0.33 (/s^2 m)$$


$$\Delta(g) = \frac{4\pi^2}{(k_1)^2} \Delta(k_1) = 0.9 \frac{m}{s^2}$$

Letzten Endes ergab sich also für die Erdanziehungskraft folgender Wert:


$$\Rightarrow g = 9.9 \pm 0.9 \frac{m}{s^2}$$



Fazit:

Unser Ziel bei diesem Versuch war es, zu überprüfen, inwieweit mathematische Modelle auf die experimentell gemessene Realität zutreffen. Dazu haben wir ein Fadenpendel aufgebaut, um es mit dem Modell des mathematischen Pendels zu vergleichen. Wir maßen hierbei die Periodendauer der Schwingung, sowie die Länge des Fadens. 

Es ergab sich, dass trotz der Ungenauigkeit durch die Reaktionszeit der Wert für g mit einem zwar sehr großen Fehlerintervall trotzdem dicht am Literaturwert von gerundet $9,8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ befindet. Das zeigt, dass das mathematische Pendel sich sehr gut in die physikalische Realität übertragen lässt, also Faktoren wie Luftreibung und die in Realität nicht punktförmige Masse eine eher geringe Abweichung vom mathematischen Modell darstellen.



Quellen:

1 (g1): https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Pendel (02.05.2023 13:52)

2 : Skript zum Physikalischen Grundpraktikum der FU Berlin

Messprotokoll – Deckblatt

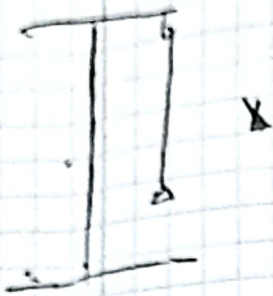
Versuch- Titel:		Datum: 26.04.2023
Studierende ¹ :	Yupeng Yu John Schulte	
Tutor*in:	Georg Merklin	

¹ Verfasser*in unterstreichen

Jeder Studierende muss ein persönliches Protokollheft führen, in dem die Messprotokolle bei der Versuchsdurchführung einzutragen sind. Zu Beginn jedes Messprotokolls muss dieses Messprotokoll-Deckblatt in das Protokollheft eingeklebt sein.

In der linken Spalte der folgenden Tabelle sind die Informationen, die im Messprotokoll für jede Teilaufgabe zu dokumentieren sind, aufgeführt. Die weiteren Felder der Tabelle dienen als Checkliste zum Abhaken. Das Messprotokoll ist am Ende des Versuchstages von dem/der Tutor*in abzuzeichnen. Alle Aufgaben, Gleichungen, Tabellen, und Bilder im Messprotokoll bitte konsequent nummerieren.

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5
Messaufgabe (z.B. Bestimmung der Brennweite einer Linse)					
Messgleichung und -größen (Symbole bezeichnen)					
Versuchsaufbau (Skizze mit Erläuterungen in sinnvoller Größe nach realem Aufbau – nicht vom Skript übernehmen,)					
Verwendete Geräte (kann mehrere Aufgaben gleichzeitig umfassen)					
Verwendete Messbereiche/Anschlüsse					
Stichpunkte zur Versuchsdurchführung / Kommentare (z.B. Messwerte/Einstellungen nur ungenau reproduzierbar, Komponente wird warm,...)					
Messunsicherheiten der Messgrößen (Quantitative Abschätzung begründen z.B. Ablesegenauigkeit, Reaktionszeit, wiederholte Messungen, Angaben zu den Geräte, Einstellung/Justage, ...)					
Messdaten handschriftlich (vorzugsweise Tabellenform, alle eingehenden Parameter und resultierenden Messwerte, ggf. Kommentare, z.B. bei Messbereichsumstellung während der Messung)					
Im Computer abgelegte Messdaten (Name der Datei, Rechner auf dem die Daten abgelegt sind, Datum und Zeit der Speicherung, Benennung/-schreibung der gespeicherten Daten)					
Notizen aus Vorgespräch (Hinweise zur Auswertung,...)					
Termin für Feedbackgespräch					



L / mm m / g $\theta / ^\circ$
 787 ± 5 49.59 20

Retention time $\frac{0.25 \times 2}{0.25 \times 2}$

$T_{20^\circ} 15^\circ$ 35.67, 35.63, 35.71

$L_1 (\text{mm})$	θ	T_{10°
787 ± 5	10	16.005
	15	16.415
	20	18.308
	25	18.39
	30	17.93
	35	18.06
	40	18.23
	45	18.18
		18.58

17.87, 17.92, 17.98, 17.84, 17.87, 18.00, 17.86, 17.85, 17.86, 17.93

15°
 $L_2 (\text{mm})$
 575 ± 5

~~$T_{10^\circ} (\text{s})$~~
~~15.22~~
~~15.58~~
~~15.54~~
~~15.46~~
~~15.58~~
~~15.40~~
~~15.71~~
~~15.60~~
~~15.67~~
~~15.64~~

$L_3 (\text{mm})$
 710 ± 5

$L_3 (\text{mm})$
 710 ± 5

$L_4 (\text{mm})$
 290 ± 5

~~$L_5 207 \pm 5$~~

~~8.56~~
~~9.45~~ 9.34
~~9.26~~ 9.87
~~9.40~~ 9.24
~~7.31~~ 9.47
 9.72

15°

$L_1(\text{mm})$ $L_2(\text{mm})$ $L_3(\text{mm})$ $L_4(\text{mm})$ $L_5(\text{mm})$

787.92

600

715

295

213

$T_{\text{top}}(\text{s})$ 17.92

15.22

16.96

10.82

8.60

17.98

15.58

17.01

11.01

9.45

17.84

15.54

16.91

11.08

9.26

18.00

15.46

16.99

10.83

9.40

17.86

15.58

17.03

10.99

9.37

17.85

15.40

16.84

10.70

9.34

17.86

15.71

16.97

11.12

8.87

17.73

15.60

16.98

10.92

9.24

17.89

15.67

16.92

10.99

9.47

16.41

15.64

16.70

10.86

9.72

geg. feld