南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(下) **开课单位:** 数 学 系

考试时长: 120 分钟 **命题教师:**

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
分 值	20 分	20 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 8 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (20pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

(1) If P_1 and P_2 are the following planes:

$$P_1 := \{(x,y,z)\colon x+2y-z=\sqrt{2}/2\},$$
$$P_2 := \{(x,y,z)\colon x+y \qquad =-\sqrt{2}/2\},$$

then the angle θ between P_1 and P_2 is:

(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{3}$.

(C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

(2) The arc length of the curve $\mathbf{r}(t)=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{i}+\frac{2}{3}(2-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j}+(t-1)\mathbf{k}$ for $\frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}$ is

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

(3) Let $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, then

(A) If $a=1$, then $f(x,y)$ is continuous at $(0,2)$.

(B) If $a=2$, then $f(x,y)$ is discontinuous at $(0,2)$.

(C) If $a=1$, then $f(x,y)$ is continuous at $(0,1)$.

(D) If $a=2$, then $f(x,y)$ is continuous at $(0,1)$.

(4) If $0\le a_n\le\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, which of the following series must be convergent ?

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{(1+\ln n)^2}$. (B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n}{1+\ln n}$.

(5) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converges at $x=-2$, then

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n$ converges. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n$ diverges.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ converges. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ diverges.

2. (20 pts) Fill in the blanks.

(1) Let the polar equation be $r=\csc\theta e^{r\cos\theta}$. Its equivalent Cartesian equations is _______.

(2) The distance from the point $S(1,1,1)$ to the plane $x+2y+3z+4=0$ is _______.

(3) A particle is traveling with acceleration $\mathbf{a}(t)=\langle e^t, t, \sin 2t\rangle$. At $t=0$, it was at the origin and its initial velocity is $\mathbf{v}(0)=\langle 1,0,0\rangle$. The position function of the particle is _______.

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin(2x)-2\sin(3x)}{6x^3+x^4}=$ _______.

(5) The series

$$S=-\ln 2+\frac{\ln^2 2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n \ln^n 2}{n!}+\cdots$$

converges and has the sum _______.

3. (10 pts)

(1) Find the interval of convergence for the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(x-1)^n$.

(2) For what value of x the above series converges absolutely, or conditionally ?

4. (10 pts) Find the limit if it exists. If it does not exist, explain why.

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2\sin^2 x}{x^4+y^4}$.

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}$.

5. (10 pts) Let L_1: $x=t$, $y=1$, $z=1+t$ and L_2: $x=1+2s$, $y=0$, $z=2s$. Is there one plane in which both lines lie ? If so, find the equation of the plane. If not, give your reason.

6. (10 pts) Assume that a and b are real numbers, and $0<b<a<1$.

(a) Determine whether the series

$$\frac{a}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}+\frac{a^3}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}$$
$$+\frac{b^4}{\sqrt{(1+a^4)(1+b^4)}}+\ldots+\frac{c_n}{\sqrt{(1+a^n)(1+b^n)}}+\ldots,$$

where

$$c_n = \begin{cases} a^n, & \text{if } n \text{ is odd,} \\ b^n, & \text{if } n \text{ is even,} \end{cases}$$

converges or diverges. **Justify your answer!**

(b) Find the limit:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n}{n^2} + \frac{b^n}{n} \right)^{1/n}.$$

7. (10 pts) Let C be the curve given by

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}.$$

(a) Find the unit tangent vector $\mathbf{T}(t)$ and principal unit normal vector $\mathbf{N}(t)$ for C.

(b) Find the curvature $\kappa(t)$.

8. (10 pts) Using known Taylor series expansions, write the Taylor series for the function

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 5} + \ln x$$

at $x = 1$ in the interval $(0, 2)$.

一、 （20分）**单项选择题:**

(1) 定义平面 P_1 和 P_2 如下:

$$\begin{aligned} P_1 &:= \{(x,y,z)\colon x+2y-z=\sqrt{2}/2\},\\ P_2 &:= \{(x,y,z)\colon x+y \qquad =-\sqrt{2}/2\}, \end{aligned}$$

则平面 P_1 和 P_2 的夹角 θ 为:

(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{3}$.

(C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

(2) 曲线 $\mathbf{r}(t)=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{i}+\frac{2}{3}(2-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j}+(t-1)\mathbf{k}$，$\frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}$ 的弧长为

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

(3) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$, 则

(A) 若 $a=1$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,2)$ 处连续.

(B) 若 $a=2$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,2)$ 处不连续.

(C) 若 $a=1$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处连续.

(D) 若 $a=2$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处连续.

(4) 若 $0\le a_n\le\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, 则下列级数中肯定收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a_n}{(1+\ln n)^2}$. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a_n}{1+\ln n}$.

(5) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=-2$ 处收敛, 则

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n 2^n$ 收敛. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n 2^n$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 发散.

二、 （20分）**填空题:**

(1) 设曲线的极坐标方程是$r=\csc\theta e^{r\cos\theta}$，则曲线的平面直角坐标系方程为 _______.

(2) 从点 $S(1,1,1)$ 到平面 $x+2y+3z+4=0$ 的距离是 _______.

(3) 一质点的加速度为 $\mathbf{a}(t)=\langle e^t,t,\sin 2t\rangle$，在 $t=0$ 时，它从原点出发，初始速度为 $\mathbf{v}(0)=\langle 1,0,0\rangle$. 则此质点的位置函数为 _______.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin(2x)-2\sin(3x)}{6x^3+x^4}=$ _______.

(5) 级数

$$S = -\ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n \ln^n 2}{n!} + \cdots$$

收敛，且该级数的和为 ______.

三、（10分）

(1) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域.

(2) 上述级数在哪些点上绝对收敛? 在哪些点上条件收敛?

四、（10分）对于下列极限，若极限存在，求其值；若极限不存在，说明理由.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4+y^4}$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}$.

五、（10分）设两条直线定义为 L_1: $x=t, y=1, z=1+t$ 和 L_2: $x=1+2s, y=0, z=2s$. 这两条直线是否共面? 若是，请写出该平面的方程；若不是，给出理由.

六、（10分）若 a 和 b 为实数且满足 $0<b<a<1$.

(a) 判断

$$\frac{a}{\sqrt{(1+a)(1+b)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{a^3}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^4}{\sqrt{(1+a^4)(1+b^4)}} + \cdots + \frac{c_n}{\sqrt{(1+a^n)(1+b^n)}} + \cdots,$$

这里

$$c_n = \begin{cases} a^n, & n \text{ 是奇数} \\ b^n, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

是否收敛，并给出理由.

(b) 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n}{n^2} + \frac{b^n}{n}\right)^{1/n}.$$

七、（10分）已知曲线 C 的参数方程是

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}.$$

(a) 求此曲线 C的单位切向量 $\mathbf{T}(t)$ 和单位主法向量 $\mathbf{N}(t)$.

(b) 求曲率 $\kappa(t)$.

八、（10分）使用已知的泰勒级数, 写出函数

$$f(x) = \frac{4}{x^2-2x+5} + \ln x$$

在 $x=1$ 处的泰勒级数，这里 $x\in(0,2)$.