南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目:	高等数学(下)	开课单位:	数 学 系
考试时长:	120 分钟	命题教师:	

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
分 值	20 分	20 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 8 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (20pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

   (1) The distance from the point $(1, 1, 1)$ to the plane $x + 2y + 2z = 1$ is

   (A) $\frac{4}{3}$.　　　　　　　　　　　　　　(B) 1.

   (C) $\frac{2}{3}$.　　　　　　　　　　　　　　(D) 2.

   (2) Identify the surface defined by $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

   (A) Hyperboloid of two sheets.　　　　(B) Elliptical Cone.

   (C) Hyperboloid of one sheet.　　　　(D) Elliptical paraboloid.

   (3) A plane is through the point $(1, 0, -1)$, and parallel to the vectors $\langle 2, 1, 1 \rangle$ and $\langle 1, -1, 0 \rangle$. The equation of the plane is

   (A) $x - y - 3z = 4$.　　　　　　　　　(B) $x + y - 3z = 4$.

   (C) $x + y + 3z = -2$.　　　　　　　　(D) $x - y + 3z = -2$.

   (4) Consider the series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sin^p n}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n} \right)$ $(p > 0)$. which of the following statements must be **true**?

   (A) It converges absolutely.　　　　　(B) It converges conditionally.

   (C) It diverges.　　　　　　　　　　　(D) Its convergence depends on p.

   (5) If $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converges, consider the following series

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_n)^2}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} u_{2n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 2u_{n+1}).$$

How many series **must** converge among the above 4 series?

(A) 1.   (B) 2.

(C) 3.   (D) 4.

2. (20 pts) Fill in the blanks.

   (1) The helix $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ intersects the curve $\mathbf{r}_2(t) = (1+t)\,\mathbf{i} + 8t^2\,\mathbf{j} + 7t^3\,\mathbf{k}$ at the point $(1,0,0)$, the angle of intersection is _____.

   (2) The distance from the point $(3,2,1)$ to the line $x = 1+t$, $y = 2+2t$, $z = 3-2t$ is _____.

   (3) If $x = t^3 + 4t$, $y = t^2 - 3t$, then $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = $ _____.

   (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = $ _____.

   (5) If $f(x) = \frac{x^{10}}{1+2x}$, then $f^{(15)}(0) = $ _____.

3. (10 pts) Find the coordinates of a point in the parameterized curve

$$\left\{ x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos^2 t,\ z(t) = \cos t \right\}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

   such that its tangent line is parallel to the plane $x + z = 0$.

4. (10 pts) Find an equation for the circle of curvature of the graph of $y = \cos x$ at $x = 0$.

5. (10 pts) Find the area of the surface generated by revolving the curve $r = 1 - \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ about the x-axis.

6. (10 pts) Calculate the following limits. (L'Hopital's Rule is not allowed to be used.)

   (1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{e^{1/x} - 1} - x \right)$.

   (2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2+x} - e^x + 2\ln(\cos x)}{x^3}$.

7. (10 pts) Does the following series converge absolutely, converge conditionally, or diverge? Give reasons for your answer.

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^2}$.

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + \sin^2 n}$.

8. (10 pts) Find the interval of convergence for $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$.

一、　（20分）**单项选择题：**

(1) 从点 $(1,1,1)$ 到平面 $x + 2y + 2z = 1$ 的距离是

(A) $\frac{4}{3}$.　　　　　　　　　　　　　　　(B) 1.

(C) $\frac{2}{3}$.　　　　　　　　　　　　　　　(D) 2.

(2) 曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 是一个

(A) 双叶双曲面.　　　　　　　　　　　(B) 椭圆锥.

(C) 单叶双曲面.　　　　　　　　　　　(D) 椭圆抛物面.

(3) 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\langle 2,1,1 \rangle$ 和 $\langle 1,-1,0 \rangle$，则该平面方程是

(A) $x - y - 3z = 4$.　　　　　　　　　　(B) $x + y - 3z = 4$.

(C) $x + y + 3z = -2$.　　　　　　　　　(D) $x - y + 3z = -2$.

(4) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^p n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ $(p > 0)$. 下列叙述中哪一个一定是**正确**的?

(A) 该级数绝对收敛.　　　　　　　　　(B) 该级数条件收敛.

(C) 该级数发散.　　　　　　　　　　　(D) 该级数的敛散性依赖于 p 的值.

(5) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，考虑下列4个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_n)^2}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} u_{2n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 2u_{n+1}).$$

在以上4个级数中总共有几个级数**一定**收敛?

(A) 1.　　　　　　　　　　　　　　　　(B) 2.

(C) 3.　　　　　　　　　　　　　　　　(D) 4.

二、　（20分）**填空题：**

(1) 螺旋线 $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$ 与曲线 $\mathbf{r}_2(t) = (1+t)\, \mathbf{i} + 8t^2\, \mathbf{j} + 7t^3\, \mathbf{k}$ 相交于点 $(1,0,0)$，则在交点处的夹角为 _____.

(2) 从点 $(3,2,1)$ 到直线 $x = 1+t, y = 2+2t, z = 3-2t$ 的距离是 _____.

(3) 设 $x = t^3 + 4t, y = t^2 - 3t$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} =$ _____.

(5) 设 $f(x) = \frac{x^{10}}{1+2x}$, 则 $f^{(15)}(0) =$ _____.

三、　（10分）求参数曲线

$$\{ x(t) = \sin t, y(t) = \cos^2 t, z(t) = \cos t \}, \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

上的一个点的坐标，使得在此点的切线与平面 $x + z = 0$ 平行.

四、　（10分）求 $y = \cos x$ 的函数图像在 $x = 0$ 处的曲率圆的方程.

五、 （10分）把曲线 $r = 1 - \cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$ 绕 x 轴旋转得到一个旋转面 S，求此旋转面 S 的面积.

六、 （10分）计算下列极限(不允许使用洛必达法则).

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{e^{1/x} - 1} - x \right)$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - e^x + 2\ln(\cos x)}{x^3}$.

七、 （10分）下列级数是否绝对收敛、条件收敛或者发散? 请说明理由.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\dfrac{1}{n^2}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n + \sin^2 n}$.

八、 （10分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n + (-2)^n} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域.