

# 南 开 大 学

## 本科生毕业论文（设计）

中文题目： 雪球结构化产品的定价研究

外文题目： Study on the Pricing of Snowball Structured Products

学 号： 1910193

姓 名： 李雨谦

年 级： 2019 级

专 业： 数学与应用数学

系 别： 数理金融与精算科学系

学 院： 数学科学学院

指导教师： 江一鸣 教授

完成日期： 2023 年 5 月 6 日

# 关于南开大学本科生毕业论文（设计） 的声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在指导教师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或没有公开发表的作品内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：李雨谦

2023 年 5 月 6 日

本人声明：该学位论文是本人指导学生完成的研究成果，已经审阅过论文的全部内容，并能够保证题目、关键词、摘要部分中英文内容的一致性和准确性。

学位论文指导教师签名：江一鸣

2023 年 5 月 6 日

## 摘 要

在国际经济走势莫测、国内刚性兑付被打破、券商谋求产品推陈出新、而投资者心向定制化理财的背景下，结构化产品大行其道，蓬勃发展。其中，雪球结构化产品因其“大概率”取得“高收益”的外表吸引了市场的目光，获得了投资者的青睐，目前其国内市场存量规模已过万亿。因此，对雪球产品这样具有复杂收益结构的场外期权的精准定价极具价值。

本文以“银河金鼎”收益凭证 3515 期-雪球为例，对雪球产品的定价进行完整实证。在引言和理论介绍后，本文通过 GARCH(1,1)模型确定中证 500 指数的波动率，用蒙特卡罗模拟法建立 300000 条路径，根据对数正态分布递推式对期末中证 500 指数的价格进行预测，通过各路径平均期末报偿贴现扣除本金得到雪球产品的理论价格，并对其收益情况、灵敏度以及希腊值进行了全面分析。

本文的主要结论如下：第一，雪球并不像它所宣称的那样“类保本+高收益”。本文雪球的平均利润率为 0.57%，最大利润率为 7.10%，远低于合约的年化票息率 12%。第二，雪球常折价发行。本文雪球的理论价格为 5700 元，高于其实际认购费 100 元。第三，雪球常提前敲出。本文雪球的平均存续时长为 90.2 个交易日，远小于能够获得最大回报的存续时长 183 个交易日（即有效期限）。第四，就整体趋势而言，雪球的理论价格分别与无风险利率、波动率、敲入价格、有效期限长度、敲出和敲入观察频率成负相关，与年化票息率、敲出价格和锁定期长度成正相关，并在锁定期每包含一个敲出观察日时实现阶梯式跃升。

最后，本文总结主要结论，为投资者选择产品和发行方定价提供参考，并向投资者、发行商和监管层三个主体提出建议，以期雪球产品更好地发展。

**关键词：**雪球结构化产品；期权定价；蒙特卡罗模拟；GARCH(1,1)

## Abstract

Against the background of unpredictable international economic trends, domestic rigid redemption being broken, brokerage firms seeking new products, and investors' desire for customized financial management, structured products have become popular and flourished. Among them, Snowball structured products have attracted the attention of the market and gained the favor of investors because of their seemingly "high probability" of "high yield", and its domestic market size has exceeded a trillion so far. Therefore, it is particularly valuable to accurately price Snowball products, which are a kind of OTC option with complex return structures.

This paper presents a complete empirical analysis on the pricing of Snowball products, using "Yin He Jin Ding" Income Certificate Phase 3515 - Snowball as an example. After the introduction and theory section, the volatility of CSI 500 is determined by GARCH(1,1) model, 300000 paths are established by Monte Carlo simulation, the price of CSI 500 at the end of the period is predicted according to the lognormal distribution recursive formula, and the theoretical price of the Snowball product is obtained by the present value of the average payoff of each path minus the principal. And a comprehensive analysis is conducted on its returns, sensitivity, and Greeks.

The main conclusions of this paper are as follows: First, Snowballs are not as "break-even-like + high-yield" as it claims to be. The average margin of Snowball in this paper is 0.57%, and the maximum margin is 7.10%, which are both much lower than the contract's annualized coupon rate of 12%. Second, Snowballs are often issued at a discount. The theoretical price of Snowball in this paper is ¥5700, which is higher than its actual subscription fee of ¥100. Third, Snowballs are often knocked out early. The average duration of the Snowball in this paper is 90.2 trading days, which is much smaller than 183 trading days (the valid period), which bring investors the maximum return. Fourth, in terms of overall trend, the theoretical price of Snowball is negatively correlated with the risk-free rate, volatility, knock-in price, the length of valid period,

knock-out and knock-in observation frequency respectively, positively correlated with the annualized coupon rate, knock-out price, and the length of lock period respectively, and achieves a stepwise jump every time the lock period incorporates a knock-out observation day.

Finally, this paper summarizes the main findings, provides references for investors to choose products and for issuers to price them, and makes suggestions to three parties: investors, issuers and regulators, in the hope that Snowball products get better development.

**Keywords:** Snowball structured products; option pricing; Monte Carlo simulation; GARCH(1,1)

## 目 录

摘 要 .....	I
ABSTRACT.....	II
一、 引言 .....	1
(一) 研究背景与意义.....	1
(二) 文献综述.....	3
(三) 研究思路与方法.....	5
(四) 创新与不足.....	6
二、 理论模型基础 .....	7
(一) GARCH 波动率模型.....	7
(二) B-S 期权定价模型 .....	7
(三) 风险中性定价理论.....	9
(四) 蒙特卡罗模拟法.....	9
三、 实证定价研究 .....	11
(一) 产品介绍.....	11
(二) 波动率计算.....	15
(三) 定价分析.....	22
(四) 灵敏度分析.....	29
(五) 希腊值分析.....	35
四、 总结与展望 .....	38
(一) 总结.....	38
(二) 展望.....	39
附 录 .....	40
参考文献.....	45
致 谢 .....	47

# 一、引言

## （一）研究背景与意义

### 1. 研究背景

18 世纪的工业革命和运输贸易，刺激了以农作物为标的的场外商品期权的诞生，这标志着现代期权交易的开始，但此时还未形成大规模交易。在 18 世纪末，股票期权在美国诞生，此时的期权交易仍在场外进行，有赖于经纪人帮助配对。直至 1973 年，美国成立了世界上第一个期权交易所——芝加哥期权交易所（Chicago Board Options Exchange, CBOE），期权交易才转向规范化、标准化，这标志着期权时代的正式到来<sup>[1]</sup>。50 年间，股指期货、外汇期权、利率期权等不同种类的产品纷纷涌现，期权在金融领域发挥着日益重要的作用。

尽管早在 17 世纪就已经诞生了具有复合结构的投资工具，现代公认最早的结构化产品（Structured Products）是所罗门兄弟公司（Salomon Brothers）于 1986 年发行的 S&P 500 指数连动票据（Standard & Poor's 500 Indexed Note, SPIN）。目前，在经济环境、政治态势等多因素作用下，结构化产品已经成为当今国内外金融市场中发展最为飞速、预期前景最为光辉的业务之一。从本质上讲，结构化产品是运用金融工程技术，把零息债券、存款等固定收益产品和期货、期权等金融衍生品组合而成的一种新型金融产品，比如上述的 S&P 500 指数连动票据便可视作为一般债券和 S&P 500 指数期权的一种组合<sup>[2]</sup>。结构化产品内嵌的衍生品与特定标的相挂钩，如汇率、利率、商品价格（黄金、石油等）、股票价格（股票篮子价格）、指数（商品价格指数、股价指数等）、风险（通胀风险、信用风险等）等，结构化产品的标的表现深刻影响其收益<sup>[3]</sup>。

从 2017 年中金公司推出国内第一款雪球结构化产品开始，目前国内雪球产品的市场存量规模已经超过万亿<sup>[4]</sup>。本质上讲，雪球结构化产品是一种内嵌敲出和敲入机制的、依赖于路径的场外障碍期权。雪球投资者是期权卖方，在做空挂钩标的（比如 S&P 500、CSI 500 等）的波动率；而作为交易对手的券商则是在做多波动率，二者形成对赌。从投资者的角度看，市场若大幅上升，雪球会跑输标的；市场若大幅下跌，雪球安全垫被击穿，投资者与标的承担相同的

损失以及佣金；最佳的市场走势是微跌并横盘，在产品周期内既无敲入也无敲出，雪球产品的利润才会随着时间推移越滚越大，雪球才会成为真正的雪球<sup>[4]</sup>。

## 2. 研究意义

### （1）雪球结构化产品在国内越来越受到市场主体的欢迎

① 国际局势。中美贸易战导致了近年来国内整体市场走势的持续低迷；且自新冠疫情以来，各大经济体的利率政策都处于下行期。期权投资的收益率比起传统的固定收益类产品更令人满意。同时，由于债券、权益类资产、大宗商品等的市场行情走向复杂难测，而投资者的收益率预期和风险承受能力又大不相同，所以他们对投资工具有着越来越个性化的要求。因此，可以“私人定制”的雪球产品就越来越备受瞩目。

② 政策导向。“资管新规”的落地，打破了银行理财产品的刚性兑付，大大增加了作用于房地产非标的信托的限制，减少了固定收益类资产的供给，整体政策的去杠杆导向使得人们对于信用风险的偏好下降<sup>[5]</sup>；而雪球产品的风险主要源于市场，同时很少有产品能像雪球产品一样能够提供 20%之高的年化收益率，于是原先配置在固定收益类资产上的一些资金逐渐流向雪球产品。

③ 特殊结构。雪球产品的特殊收益结构，丰富了我国证券衍生品市场的产品种类，带来了一种新的投资选择以及风险对冲工具。

### （2）雪球产品具有一定迷惑性和危险性

① 对于投资者来讲，表面上具有“较高概率”获取高额票息以及“较低概率”发生亏损的结构，这很容易使得投资者对其产生“类保本+高收益”的幻觉。但是市场的风险保持着中性，高票息总与高风险并存，雪球产品也概莫能外。若市场大幅上升，雪球会跑输标的，投资雪球反而葬送了机会成本；若市场大幅下跌，雪球安全垫被击穿，则与标的共沉沦。投资者们需要对雪球的本质与风险形成正确而充分的认知。

② 对于发行商来讲，他们应该保证资金的一定流动性，做好雪球产品提前敲出的报偿准备。

### （3）雪球结构的复杂性与多样性对国内起步较晚的衍生品市场提出挑战

① 对机构来讲，雪球产品具有复杂的条款和多样的组合，导致许多现行的成熟方法对其失效，全新的、开拓性的、统治性的定价方法亟待确立。



②场外衍生品市场流动性较低，且缺乏价格发现功能，因此对雪球产品进行准确的定价虽然艰巨，却具有极大的意义。

③目前，我国许多产品的设计都被外包给了国外的投资银行，我国金融市场对国外金融工程力量的依赖性较高；在这个过程中，大量利润也被国外投资银行所攫取。因此无论是出于被动反抗还是主动奋进，现如今我国金融市场都到了应该自立自强的时候，自主定价应该得到大力支持与发展。

因此，在雪球产品大热的今天，本文选用真实的雪球产品作为案例，对其本质、结构以及定价进行研究与测算，具有如下四个层面的意义：

（1）对于学界，弥补针对新兴的雪球结构化产品的定量定价研究的空白。

（2）对于投资者，揭示雪球产品的真实收益和风险，使投资者对其形成正确态度与角度，更清醒地寻找与自身风险画像更为匹配的产品。

（3）对于发行商，为雪球产品的定价和分析提供思路，有助于其创造更个性化、更有吸引力的产品，同时创造更多的利润与价值。

（4）对于市场，为完善和规范衍生品市场乃至整个金融市场提供可靠建议，有助于提升人民总体福祉水平。

## （二）文献综述

### 1. 期权定价理论研究

1900年，Louis Bachelier<sup>[6]</sup>在法国索邦大学提交了他的博士论文《投机理论》，假设股票价格遵循没有漂移项的布朗运动，首次用概率论的思想预测股价变化，其想法与几十年后的有效市场假说、股价随机漫步等思想高度重合。

1973年，Black和Scholes<sup>[7]</sup>在不计股息的假设下为欧式期权定价，提出了大名鼎鼎的B-S模型，对后世产生了深远影响。同年，Merton<sup>[8]</sup>发现股价有时会遵从带跳的对数正态分布，他在B-S模型的基础上将跳跃和红利纳入考虑，改进生成了B-S-M模型。在1976年，Cox、Ross和Rubinstein<sup>[9]</sup>创立了二叉树模型，假设每一个节点的股价涨跌的概率和幅度、市场中的无风险利率和标的资产的波动率均为固定值，此方法虽然浅显简单，但是计算量过大。Cox、Ross和Rubinstein<sup>[10]</sup>之后创立的CEV模型针对于特殊扩散现象，但依旧粗糙地将波动

率设为定值。为了弥补这一点，后来的很多学者就随机波动率模型展开研究。最为著名的是 GARCH 模型，它在包括期权定价在内的诸多领域都得到了广泛应用。

## 2. 障碍期权定价研究

1973 年，Merton<sup>[11]</sup>提出了向下敲出看涨期权的定价解析式。1985 年，Cox 和 Rubinstein 提出了向上敲出看涨期权的定价解析式。1991 年，Rubinstein<sup>[12]</sup>提出了多种类型的障碍期权的定价公式。2009 年，Skipper 和 Buchen<sup>[13]</sup>将研究拓展到多种路径依赖的期权，如回望期权和亚式期权等。学界逐渐把眼界从单障碍期权放宽到双障碍期权的研究上。2017 年，孟祥欢<sup>[14]</sup>利用 B-S 公式、Itô 引理等基本原理，提出了向上向下敲出双障碍期权的定价解析式。另外，学界针对连续和离散型期权的研究两开花。2006 年，Fusai 和 Sgarra<sup>[15]</sup>在 B-S 模型的基础上求解 Wiener-Hopf 方程，成功地得到了离散障碍期权的定价解析式。2013 年，徐腾飞、曹小龙和胡云姣<sup>[16]</sup>通过 Monte Carlo 模拟的方法对离散障碍期权进行定价，并使用包括对偶抽样、重要性抽样以及条件期望在内的三种方法来压缩模拟方差。

## 3. 雪球产品定价研究

雪球结构性产品最常用的定价方法依然是 B-S 模型、偏微分方程法以及有限差分法。Shim<sup>[17]</sup>以一个韩国货币雪球为例，得出了积分形式的定价解析式。潘琪<sup>[18]</sup>通过列出双障碍期权的所有回报情况，利用 Black Scholes 方程给出了一个定价解析式。此外，包括蒙特卡罗模拟法在内的数值方法在对结构化产品的定价上也十分有效。朱雨潇<sup>[19]</sup>用蒙特卡罗模拟法为雪球产品定价，并比较了 B-S 模型和引入跳跃的 Variance Gamma 模型的表现，发现后者针对雪球产品的效果更好。此外，许多新的定价公式被设计出来，以提高准确性，同时简化模型。Tong<sup>[20]</sup>提出了一种基于多元 Ornstein-Uhlenbeck 过程的自回归定价方法。Huang 和 Guo<sup>[21]</sup>针对具有提前行权特征的奇异期权提出了一种基于 B-S 模型的正交方法。朱雨潇<sup>[19]</sup>运用二叉树和三叉树模型，对每个分支按敲入事件进行剥离来进行定价。

### （三）研究思路与方法

#### 1. 研究内容

本文以“银河金鼎”收益凭证 3515 期-雪球为例，主要研究雪球结构化产品的定价策略。

引言。介绍期权、结构化产品以及雪球产品诞生的背景，分析对其进行研究会产生意义。梳理过去关于期权定价、障碍期权定价以及雪球产品的研究，寻找本文研究的意义与独特性。概括本文的研究方法与工作流程，最后小结本文研究的创新和不足之处。

理论模型基础。介绍本文所使用的所有模型的基本原理，包含 GARCH 波动率模型、B-S 期权定价模型、风险中性定价理论和蒙特卡罗模拟法，并根据各模型优缺点确定本文将要使用的模型，为第三部分的实证定价提供理论支持。

实证定价研究。首先介绍“银河金鼎”收益凭证 3515 期-雪球的基本要素和收益结构，其次分别找到和计算出包括无风险利率和 GARCH 波动率在内的定价要素，再通过蒙特卡罗模拟定价法对该雪球产品进行定价，然后对定价影响因素进行灵敏度分析，并对雪球产品进行希腊值分析。

总结与展望。对本文的全部内容进行总结，特别是进一步总结本文的重要结论，最后提出建议与展望。

#### 2. 技术路线

本文研究的技术路线如下图所示：

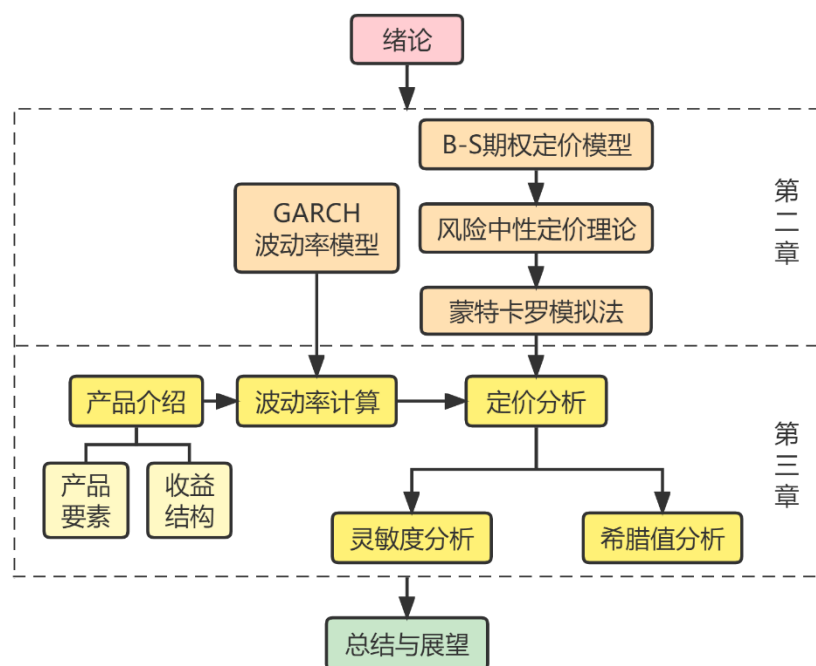


图 1.1 技术路线

## （四）创新与不足

### 1. 创新

#### （1）研究对象创新

现有的文献大多针对于结构化理财产品，针对结构化收益凭证的研究较为少见。且由于雪球结构化产品在国内刚刚兴起，对此的研究较少，历程较短。

#### （2）研究方法创新

使用了蒙特卡罗模拟的数值方法和 GARCH 波动率，而非传统解析模型和历史波动率。借助于现代计算机的算力，运算的时间复杂度和空间复杂度也大大下降。

### 2. 不足

（1）本文聚焦于雪球结构化产品的定价方法，未深入探讨关于其的投资者的交易策略和发行商的对冲策略。

（2）本文较少涉及能提供解析解的方法，如果能以数学公式作为支撑，讨论会更有逻辑和说服力。

## 二、理论模型基础

### （一）GARCH波动率模型

波动率常常被用来衡量变量随时间序列而呈现出来的波动或扰动，在金融市场中用来表示资产、因子和策略的收益风险。为了度量波动率，几十年间出现了大量应用统计、计量方法构建的波动率模型，如源自历史数据的历史波动率，自 Black-Scholes 等模型逆向求解而来的隐含波动率等。

为了符合股票收益的波动幅度随时间变化而并非常数的实际，1982 年，Robert F. Engle<sup>[22]</sup>在《计量经济学》（Econometrica）发表了一篇文章，提出利用 ARCH 模型解决此问题的可能。1986 年，Bollerslev<sup>[23]</sup>发明了 GARCH 模型，即广义 ARCH 模型，它是 ARCH 模型的延伸和拓展。此后，非常多的扩展模型以 GARCH 模型为基础建立，如 TGARCH 模型、EGARCH 模型等，这些扩展模型一般是对 GARCH 模型中相关条件的改变。

在 GARCH 模型中，对于一个对数收益率序列  $r_t$ ，令  $a_t = r_t - \mu_t = r_t - E(r_t|F_{t-1})$  为新息序列，称  $\{a_t\}$  遵循 GARCH( $p, q$ ) 模型，如果  $\{a_t\}$  满足：

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

其中  $\{\varepsilon_t\}$  为独立同分布的零均值单位方差的白噪声序列， $\alpha_0 > 0$ ， $\alpha_i \geq 0$ ， $\beta_j \geq 0$ ， $0 < \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ 。此最后一个条件用来保证满足模型的  $\alpha_t$  的无条件方差有限且不变，而条件方差  $\sigma_t^2$  可以随着时间  $t$  的改变而改变。

### （二）B-S期权定价模型

#### 1. 布朗运动

布朗运动（Brownian Motion）源自于 1827 年英国植物学家 Brown 首次观测到的显微镜下花粉粒子在水中的不规则运动。Wiener 在 1923 年以数学方式严格构造了布朗运动，所以后人也称布朗运动为维纳过程（Wiener Process）。称  $W_t$

遵循一维标准布朗运动，当且仅当其满足下列条件：

- (1)  $W_0 = 0$ ,
- (2)  $W_t$  连续,
- (3)  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ ,  $\forall s \in [0, t]$ ,
- (4)  $W_t - W_s$  与  $\sigma(W_u, 0 \leq u \leq s)$  独立。

## 2. 伊藤引理

称随机过程  $x_t$  遵循伊藤过程 (Itô Process)，若：

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dW_t,$$

其中， $a_t = a(x_t, t)$  和  $b_t = b(x_t, t)$  是  $x_t$  和  $t$  的函数， $x_t$  的漂移率为  $a_t$ ，方差率为  $b_t^2$ ， $W_t$  遵循标准布朗运动，所以有：

$$dW_t = \varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

其中  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ 。

1951 年，数学家 Kiyoshi Itô 发现了著名的伊藤引理：

若随机过程  $x_t$  遵循伊藤过程，则  $x_t$  和  $t$  的函数  $G_t = G(x_t, t)$  将遵循：

$$dG_t = \left( \frac{\partial G_t}{\partial x_t} a_t + \frac{\partial G_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_t}{\partial x_t^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial G_t}{\partial x_t} b_t dW_t, \quad (2.1)$$

其中， $W_t$  遵循标准布朗运动，因此  $G_t$  也遵循伊藤过程。 $G_t$  的漂移率为  $\frac{\partial G_t}{\partial x_t} a_t + \frac{\partial G_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_t}{\partial x_t^2} b_t^2$ ，方差率为  $\left( \frac{\partial G_t}{\partial x_t} b_t \right)^2$ 。

## 3. Black-Scholes 模型

1973 年，美国经济学家 Myron Scholes 和 Fischer Black 首先合作提出了 Black-Scholes 期权定价公式。随后，Robert C. Merton 给出了有派发红利时的公式，使本模型更加完善。

Black-Scholes 模型用几何布朗运动 (Geometric Brownian Motion) 来描述期权所挂钩的标的资产的随机过程：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.2)$$

其中， $\mu$  是证券的期望收益率， $\sigma$  是证券的波动率，二者均为常数， $W_t$  遵循标准

布朗运动。因其解为

$$S_t = S_0 e^{[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma dW_t]}, \quad (2.3)$$

我们称挂钩的标的资产价格服从对数正态分布（Lognormal Distribution）。

在 Black-Scholes 模型特定的假设之下，构造由一支期权（价格为  $f$ ）和数量待定的标的资产（价格为  $S$ ）组成的无风险投资组合。依据式（2.1）和式（2.2），由其无风险特性，消去  $dW_t$  项，并令组合获得无风险利率  $r$ ，最终化简得到：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} = rf, \quad (2.4)$$

这就是大名鼎鼎的 Black-Scholes 偏微分方程。

解 Black-Scholes 偏微分方程，并代入欧式看涨期权和欧式看跌期权的边界条件，可以得出 Black-Scholes 公式，即欧式看涨期权和欧式看跌期权的理论价格的解析解。另外，Black-Scholes 模型证实了在风险中性世界，期权的理论价格  $f$  与预期收益率  $\mu$  无关，而是由无风险利率  $r$  和波动率  $\sigma$  所决定。

### （三）风险中性定价理论

由式（2.4）可以得知，Black-Scholes 公式揭示了衍生品的价格与投资者的收益率  $\mu$  无关。其原因可以解释为：对衍生品定价的时候，风险厌恶情绪会把超过无风险收益率的那部分溢价抵消掉。

由此，利用无套利原理，我们可以得到对衍生品的风险中性定价公式：

$$f_t(S_t) = e^{-r(T-t)} E[f_T(S_T) | S_t], \quad (2.5)$$

其中， $E[\cdot]$  为风险中性测度下的期望， $S_t$  遵循几何布朗运动，即式（2.2）。

### （四）蒙特卡罗模拟法

由于雪球结构化产品所内嵌的期权结构比较复杂，且极其依赖路径，所以对其定价求出解析解非常困难。因此希望通过蒙特卡罗模拟这样的数值方法，生成不同的价格序列，再在风险中性市场中求出期望贴现值。

用蒙特卡罗模拟期权到期收益，从而为期权定价的具体步骤如下：

**Step 1:** 假设市场中风险中性，通过某种已知规律对标的资产未来价格  $S_t$  进行路径模拟。在这里，我们选用前文的式（2.3）。

Step 2: 根据上述得到的 $S_t$ 以及合约条款, 计算到期日, 即 $T$ 时刻, 雪球产品的最终报偿。

Step 3: 多次重复 Step 1 和 Step 2, 使样本量足够大。

Step 4: 根据 Step 3 得到的众多报偿数据, 估计出期望报偿 (平均报偿)。

Step 5: 用无风险利率 $r$ , 将 Step 4 得到的期望报偿进行贴现, 减去期初本金, 得到产品收益, 即估计出雪球理论价格。

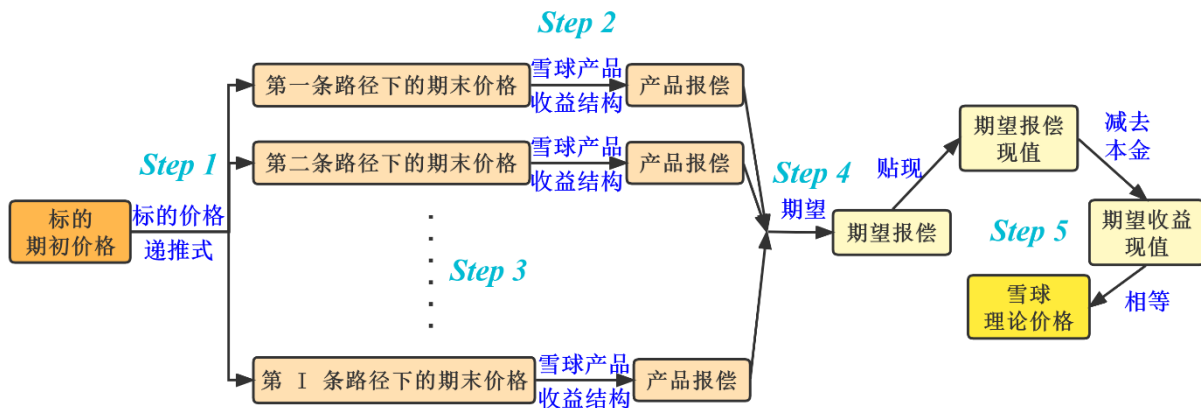


图 2.1 蒙特卡罗模拟流程图

根据大数定律——若随机变量 $\{X_i\}$ 独立同分布且期望 $\mu = E[X_i]$ 存在, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时必有 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$ , 可知当样本量足够大时, 通过蒙特卡罗模拟法得到的结果将会收敛到真实价格; 而中心极限定理给出了收敛的精度——只要方差 $\sigma^2 = Var(X_i)$ 存在, 那么大样本下有 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ , 所以可以得到蒙特卡罗模拟法在有限样本下的误差值。

本文选用蒙特卡罗模拟方法的合理性如下: 第一, 蒙特卡罗模拟法操作简单, 在券商的实际工作中被广泛使用, 且随着现代计算机的算力不断提高, 蒙特卡罗模拟所需要的经济成本和时间成本均越来越低<sup>[24]</sup>。第二, 蒙特卡罗模拟用逐条生成的路径来预测未来股价, 非常清晰, 溯源容易, 很容易界定每条路径上是否发生敲入或敲出; 而其他模型, 比如二叉树模型, 路径之间常常会共用相同节点, 那么要从经过某一结点的所有路径中剔除所有包含上一个敲出观察日已经敲出的节点的路径, 需要进行的判断和循环次数过多, 模型过于复杂。综上所述, 蒙特卡罗模拟法是更为合适的方法, 以下实证部分将围绕蒙特卡罗模拟法展开。



### 三、实证定价研究

#### （一）产品介绍

##### 1. 产品要素

雪球结构化产品主要有六大要素：

- （1）挂钩标的。一般为指数、个股以及股票组合。
- （2）有效期限。产品可能存续的最长时间，一般而言，个股类标的产品的有效期限为 12 个月，指数类标的产品的有效期限为 24 个月。
- （3）观察日频率。敲出和敲入观察日频率可由合同任意规定，一般来说敲出观察日为每月一次，为初始交易日后每月的对应日期；敲入观察日则为每日一次。在每个敲出（敲入）观察日，将当天标的价格 $S$ 与敲出价格 $K$ （敲入价格 $B$ ）进行对比，由此来分别判断是否触发了敲出事件（敲入事件）。
- （4）敲出。产品设定敲出价格 $K$ ，一般高于标的期初价格 $S_0$ 。如果在敲出观察日标的价格 $S$ 大于等于敲出价格 $K$ ，则触发敲出事件，产品结束。
- （5）敲入。产品设定敲入价格 $B$ ，一般低于标的期初价格 $S_0$ ，如果在敲入观察日标的价格 $S$ 小于敲入价格 $B$ ，则触发敲入事件，产品继续运作直到到期或触发敲出事件。
- （6）票息。投资者可以得到的潜在收入。因为雪球结构化产品对于投资者来说，相当于卖出期权，所以票息相当于发行商向投资者支付的期权费，具体表现为雪球在有效期限的收益率。

针对“银河金鼎”收益凭证 3515 期-雪球来说，其产品要素具体如下：

表 3.1 产品要素表

项目	内容
产品名称	“银河金鼎”收益凭证-雪球
产品类型	本金保障浮动收益型
挂钩标的	中证 500 指数（000905.SH）
认购费用	100 元/份，100 万元起，以 10 万元的整数倍递增
起息日 $0$	2022 年 11 月 15 日
到期日 $T$	2023 年 8 月 14 日

项目	内容
有效期限 $T - 0$	183 天（交易日）
敲出观察日	每月观察敲出，共观察 8 次（ $i = 1, 2, \dots, 8$ ）
敲入观察日	每日观察敲入
期初价格 $S_0$	期权合约起始日的标的收盘价
期末价格 $S_T$	期权合约到期日的标的收盘价
敲出价格 $K$	期初价格的 103%
敲入价格 $B$	期初价格的 75%
票息 $R$	12%（年化）

## 2. 收益结构

记起息日为 0 日，到期日为  $T$  日，敲出日为  $t$  日（假如有敲出），本金为  $Pr$ ，报偿为  $Pa$ 。根据存续期间的标的资产的价格路径，雪球结构化产品的收益结构可以分为以下四种情况：

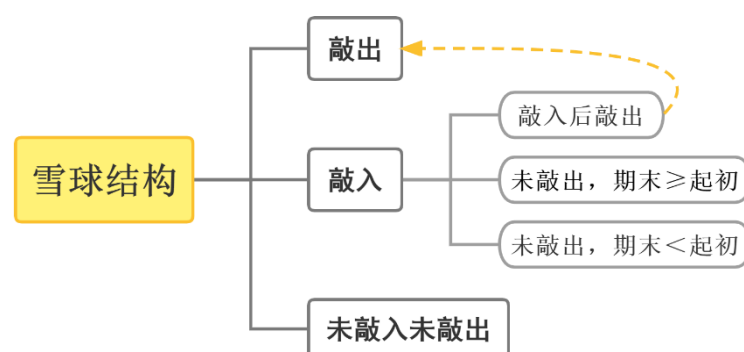


图 3.1 收益情形概览图

Case 1: 有效期限内发生敲出，不论是否发生过敲入

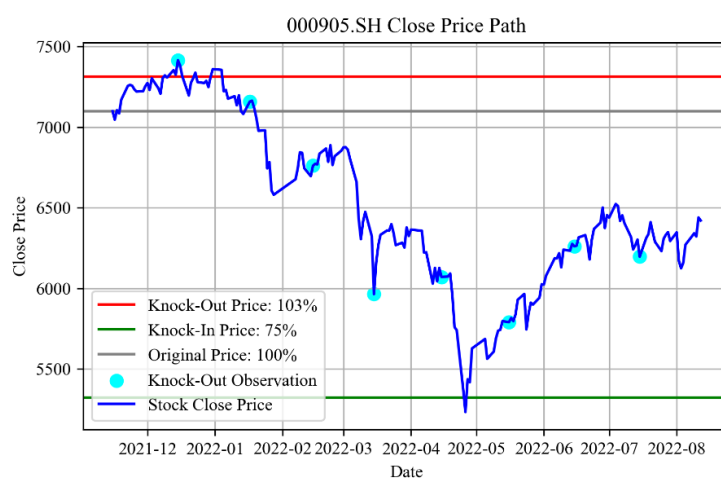


图 3.2 情形一

当 $\exists i \in \{1, 2, \dots, 8\} s.t. S_i \geq K$ ，成立：

$$Pa = Pr * \left(1 + \frac{t-0}{252} R\right), \quad (3.1)$$

即当触发敲出事件，产品存续提前结束，投资者获得票息收入，年化收益为 12%（不考虑本金的时间价值）。

Case 2：有效期限内未发生敲出也未发生敲入

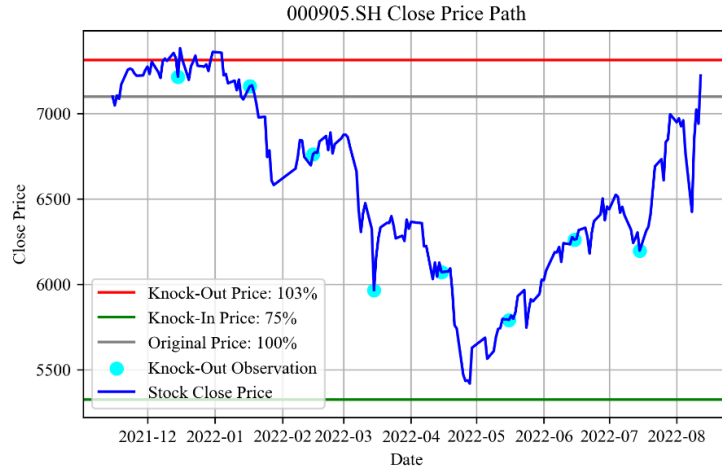


图 3.3 情形二

当 $\forall i \in \{1, 2, \dots, 8\} s.t. S_i < K$  且  $\forall j \in \{1, \dots, 183\} s.t. B \leq S_j$ ，成立：

$$Pa = Pr * \left(1 + \frac{183}{252} R\right), \quad (3.2)$$

即当敲出事件和敲入事件均未被触发，产品存续到到期日结束，投资者获得票息收入，年化收益为 12%（不考虑本金的时间价值）。

Case 3：有效期限内未发生敲出，只发生过敲入，且期末价格 $\geq$ 期初价格

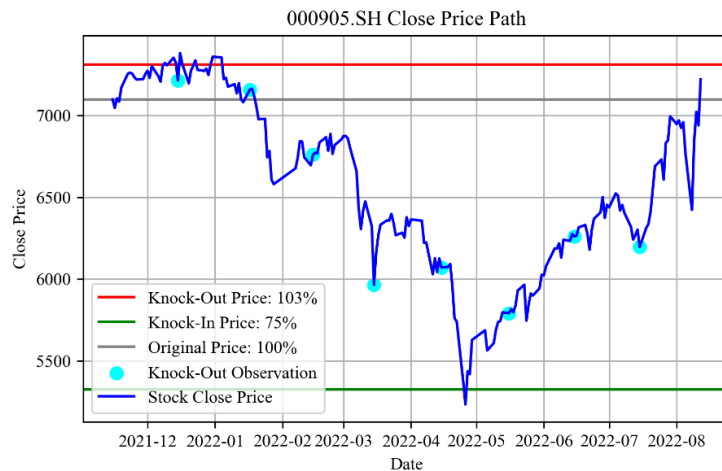


图 3.4 情形三

当  $\forall i \in \{1, 2, \dots, 8\} s.t. S_i < K$  且  $\exists j \in \{1, \dots, 183\} s.t. S_j < B$  且  $S_0 \leq S_T$ , 成立:

$$Pa = Pr, \quad (3.3)$$

即此时在到期日, 投资者只收回本金, 收益率为 0 (不考虑本金的时间价值)。

Case 4: 有效期限内未发生敲出, 只发生过敲入, 且期末价格 < 期初价格

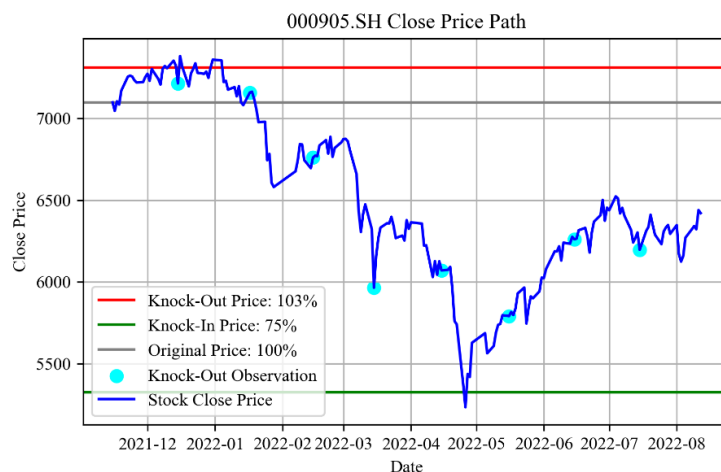


图 3.5 情形四

当  $\forall i \in \{1, 2, \dots, 8\} s.t. S_i < K$  且  $\exists j \in \{1, \dots, 183\} s.t. S_j < B$  且  $S_0 \leq S_T$ , 成立:

$$Pa = Pr * \frac{S_T}{S_0}, \quad (3.4)$$

即在到期日, 雪球结构化产品承担与标的资产相同幅度的亏损, 收益率为  $\frac{S_T}{S_0} - 1$  (不考虑本金的时间价值)。

所以, 概括来说, 雪球结构化产品收益结构如图 3.6 所示:

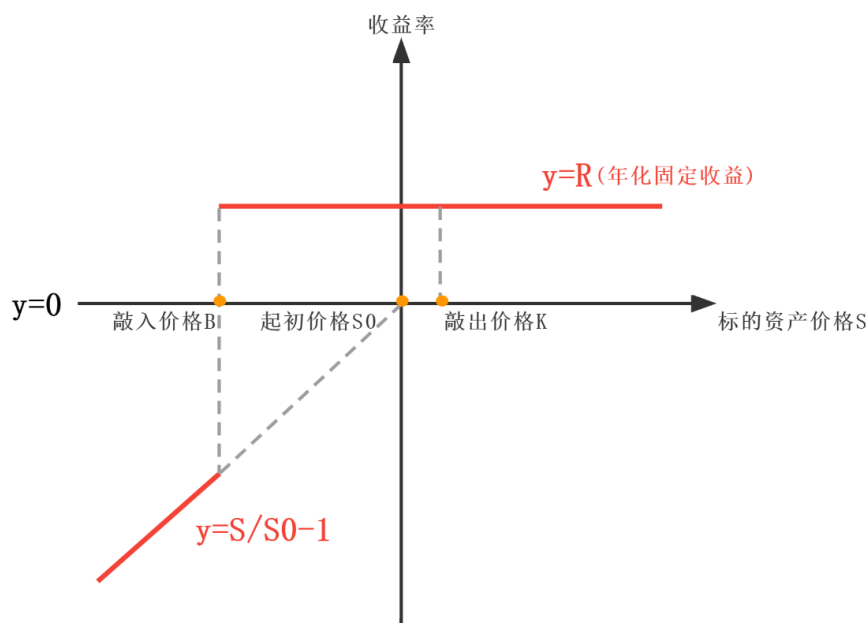


图 3.6 雪球结构化产品收益结构（年化）

至此，可以清楚地看到，雪球本质是路径依赖的、标的波动率的期权。投资者是期权卖方，在做空挂钩标的资产的波动率；而券商作为交易对手，则是在做多波动率。因此，雪球产品是投资者与券商在对赌未来挂钩标的资产的波动率——从投资者的角度看，市场若大幅上升，雪球会跑输标的；市场若大幅下跌，雪球安全垫被击穿，与标的承担相同的损失以及佣金；最佳的市场走势是微跌并横盘，在产品周期内既无敲入也无敲出，雪球产品的利润才会随着时间推移而越滚越大，雪球才会成为真正的雪球<sup>[4]</sup>。

## （二）波动率计算

### 1. 对数收益率

从 Wind 金融终端下载“银河金鼎”收益凭证-雪球的挂钩标的——中证 500（000905.SH）在产品生效的前一年内，即 2021 年 11 月 15 日至 2022 年 11 月 14 日 243 个交易日的收盘价，记为 $\{p_t\}$ 。以下处理均用 EViews10 进行。

首先对 $\{p_t\}$ 绘制时间序列曲线图：

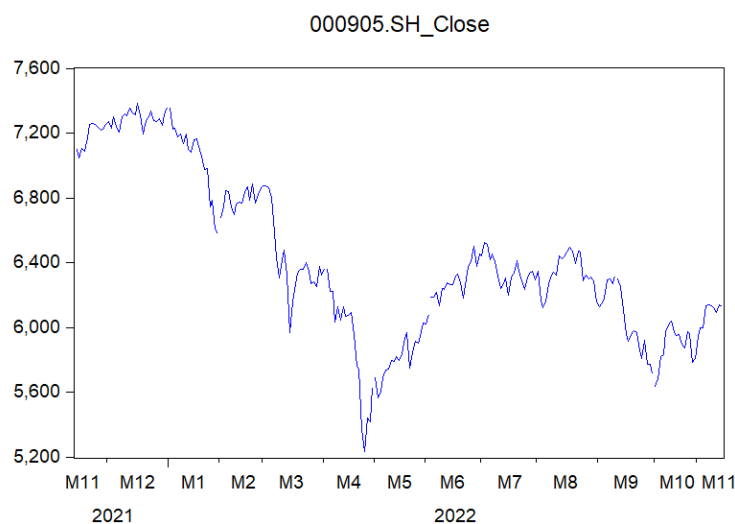


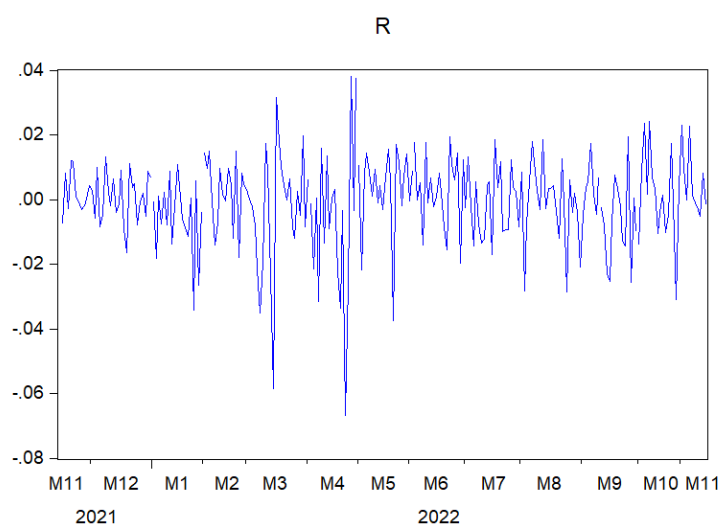
图 3.7 收盘价时间序列曲线

可见收盘价有波动，不平稳，故需要对其进行对数化处理。

记对数收益率为 $\{r_t\}$ ，则：

$$r_t = d(\ln(p_t)),$$

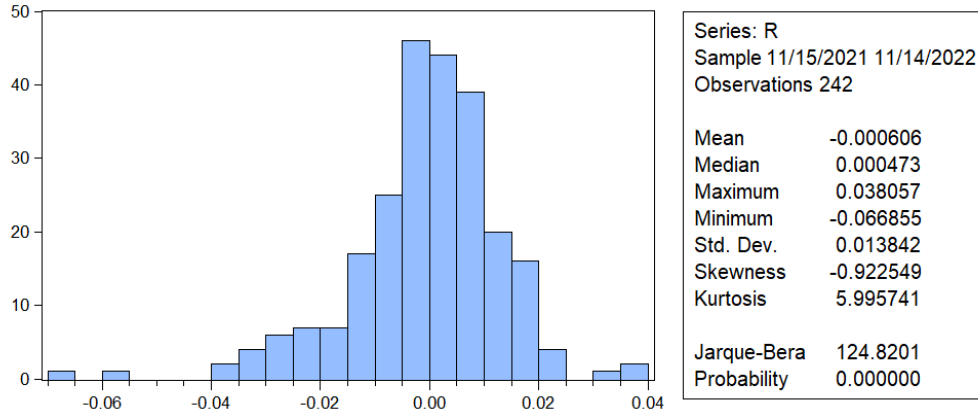
得到对数收益率的时间序列曲线图：

图 3.8  $\{r_t\}$ 时间序列曲线

此时曲线变得平稳。可以看到波动率均小于 5%，绝大多数交易日小于 3%，即市场轻微震荡，所以此时是一个投资雪球产品的好时机。

## 2. 正态性检验

对上述的对数收益率序列 $\{r_t\}$ 进行描述性统计分析：

图 3.9  $\{r_t\}$  的描述性统计

其中，偏度（Skewness）、峰度（Kurtosis）和 Jarque-Bera 统计量的数学定义分别如下：

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{4}{2}}},$$

$$JB = \frac{S^2}{6/n} + \frac{(K-3)^2}{24/n}。$$

由图 3.9 可知， $\{r_t\}$  的偏度为 -0.922549，小于正态分布的偏度值 0，说明其具有较强的左拖尾性。 $\{r_t\}$  的峰度为 5.995741，大于正态分布的峰度值 3。综上， $\{r_t\}$  具有较强的尖峰厚尾特性。

由于假如数据服从正态分布，那 Jarque-Bera 统计量就近似服从  $\chi^2(2)$  分布。正态分布的 JB 值为 0，所以数据的 JB 值越大，数据就越不符合正态分布。由图 3.9 可知， $\{r_t\}$  的 Jarque-Bera 统计量为 124.8201，远大于 0，P 值为 0（精确到六位小数），所以拒绝  $\{r_t\}$  服从正态分布的原假设，承认  $\{r_t\}$  具有很强的非正态性。

### 3. ADF 检验

接下来，为了检验序列  $\{r_t\}$  的平稳性，进行单位根检验。在此选用 ADF 检验（Augmented Dickey-Fuller test）。

表 3.2  $\{r_t\}$  的 ADF 检验

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-15.22359	0.0000
Test critical values	1% level	-3.457400	
	5% level	-2.873339	
	10% level	-2.573133	

由表 3.2 可知，t-Statistic 为-15.22359，并且在 1%，5%，10%的置信水平下的 t-Statistic 均大于-15.22359，P 值为 0.0000。所以，可以判定序列 $\{r_t\}$ 平稳。

#### 4. 自相关性检验

接下来，进行序列 $\{r_t\}$ 的自相关性检验和偏自相关性检验。

表 3.3  $\{r_t\}$  的自相关性检验

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.016	0.016	0.0618	0.804
		2	-0.029	-0.029	0.2712	0.873
		3	-0.003	-0.002	0.2733	0.965
		4	-0.058	-0.059	1.1181	0.891
		5	0.006	0.008	1.1275	0.952
		6	-0.009	-0.013	1.1467	0.979
		7	-0.051	-0.051	1.7995	0.970
		8	0.026	0.023	1.9643	0.982
		9	-0.014	-0.017	2.0138	0.991
		10	0.012	0.013	2.0503	0.996
		11	-0.011	-0.018	2.0819	0.998
		12	0.040	0.045	2.4950	0.998
		13	-0.026	-0.032	2.6752	0.999
		14	-0.073	-0.070	4.0437	0.995
		15	0.058	0.060	4.9086	0.993
		16	-0.049	-0.054	5.5347	0.992
		17	0.071	0.076	6.8532	0.985
		18	0.013	-0.003	6.9010	0.991
		19	-0.064	-0.048	7.9737	0.987
		20	0.031	0.023	8.2326	0.990
		21	0.060	0.062	9.2080	0.987
		22	0.008	0.015	9.2273	0.992
		23	-0.027	-0.040	9.4195	0.994
		24	-0.055	-0.038	10.251	0.993
		25	-0.025	-0.026	10.420	0.995
		26	-0.086	-0.086	12.454	0.988
		27	0.036	0.033	12.816	0.990
		28	0.138	0.139	18.076	0.924
		29	-0.077	-0.092	19.741	0.901
		30	0.081	0.078	21.578	0.869
		31	-0.055	-0.045	22.436	0.869
		32	0.034	0.041	22.757	0.886
		33	0.042	0.017	23.253	0.896
		34	-0.009	0.019	23.275	0.917
		35	-0.068	-0.067	24.590	0.905
		36	-0.111	-0.122	28.134	0.822



由表 3.3 可知，序列 $\{r_t\}$ 的自相关性以及偏自相关性均处于两倍标准差之内，加之 Q-Statistic 的 P 值全都远大于 5%的置信度。所以在 5%的显著性水平下，可以判定序列 $\{r_t\}$ 不存在显著相关性。

### 5. 均值方程的建立

由于序列 $\{r_t\}$ 不存在显著相关性，所以接下来建立均值方程为白噪声。记 $\mu_t$ 为 $\{r_t\}$ 的均值， $\{w_t\}$ 为残差序列，则均值方程为：

$$r_t = \mu_t + w_t, \quad (3.5)$$

由图 3.9 可知， $\mu_t = -0.000606$ ，所以有：

$$w_t = r_t + 0.000606。$$

对序列 $\{w_t\}$ 重复进行 3.2.1 节-3.2.4 节的检验，结论均与刚才 $\{r_t\}$ 的一致。特别提及， $\{w_t\}$ 的描述性统计如下图所示：

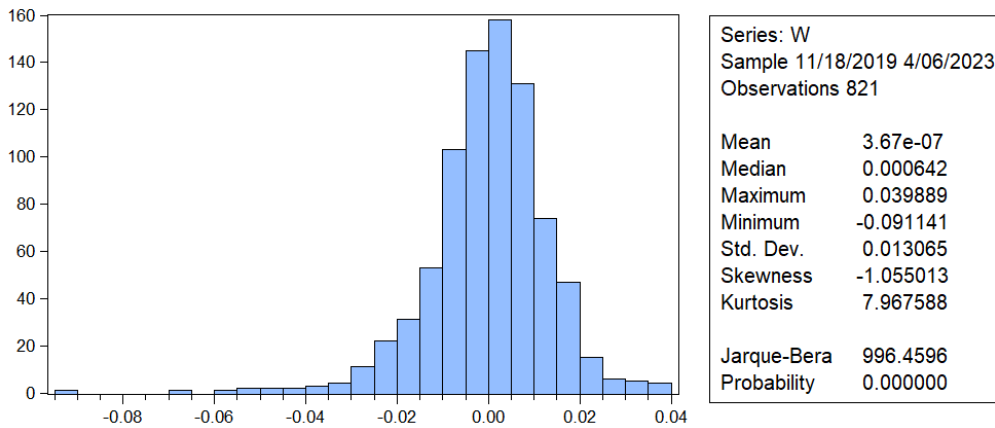


图 3.10  $\{z_t\}$  的描述性统计

故 $\{w_t\}$ 的非正态性得以验证。



### 6. ARCH 效应的检验

接下来，对残差序列的平方序列进行检验，记其为 $\{z_t\}$ ，由定义有：

$$z_t = w_t^2。$$

对序列 $\{z_t\}$ 重复进行 3.2.1 节-3.2.4 节的检验，其中自相关性检验的结果为：

表 3.4  $\{z_t\}$  的自相关性检验

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.130	0.130	13.927	0.000
		2	0.151	0.137	32.808	0.000
		3	0.082	0.049	38.366	0.000
		4	0.056	0.022	40.932	0.000
		5	0.083	0.059	46.572	0.000
		6	0.089	0.063	53.125	0.000
		7	0.040	0.003	54.479	0.000
		8	0.028	-0.005	55.122	0.000
		9	0.022	0.003	55.532	0.000
		10	0.102	0.091	64.196	0.000
		11	0.033	-0.000	65.091	0.000
		12	0.037	0.000	66.233	0.000
		13	0.008	-0.014	66.284	0.000
		14	0.028	0.018	66.945	0.000
		15	0.038	0.022	68.177	0.000
		16	0.068	0.044	72.016	0.000
		17	0.057	0.032	74.730	0.000
		18	0.059	0.032	77.628	0.000
		19	0.126	0.104	90.959	0.000
		20	0.091	0.042	97.911	0.000
		21	-0.027	-0.091	98.515	0.000
		22	-0.008	-0.044	98.564	0.000
		23	0.020	0.022	98.890	0.000
		24	0.006	-0.008	98.921	0.000
		25	0.116	0.096	110.27	0.000
		26	0.067	0.036	114.04	0.000
		27	0.093	0.065	121.32	0.000
		28	0.062	0.026	124.64	0.000
		29	0.023	-0.036	125.10	0.000
		30	0.139	0.101	141.59	0.000
		31	0.046	0.007	143.36	0.000
		32	0.035	-0.012	144.41	0.000
		33	0.012	-0.026	144.53	0.000
		34	-0.022	-0.047	144.94	0.000
		35	0.063	0.033	148.39	0.000
		36	-0.015	-0.054	148.59	0.000

由表 3.4 可知，序列 $\{z_t\}$ 具有极强的自相关性，所以其具有 ARCH 效应。那么接下来便可以着手寻找和建立合适的 GARCH 模型。

7. GARCH 模型的建立

为了寻找最合适的 GARCH 模型，本文通过 Eviews10 分别建立了 GARCH(1,1)，GARCH(2,1)，GARCH(1,2)，GARCH(2,2)模型，将其表现分别记录在下表中：

表 3.5 不同 GARCH 模型表现对比

$(p, q)$	Akaike Info Criterion (AIC)	Schwarz criterion (SC)
(1,1)	-6.040095	-6.011408

续表 3.5

$(p, q)$	Akaike Info Criterion (AIC)	Schwarz criterion (SC)
(2,1)	-6.037738	-6.003313
(1,2)	-6.037674	-6.003249
(2,2)	-6.003313	-5.997731

由表 3.5 可知, GARCH(1,1)的 AIC 和 SC 均为最小的, 故选择 GARCH(1,1)模型, 即:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2. \quad (3.6)$$

由 EViews10, 其具体系数如下:

表 3.6 GARCH(1,1)模型结果

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	5.72E-06	2.55E-06	2.245616	0.0247
RESID(-1)^2	0.090869	0.024879	3.652407	0.0003
GARCH(-1)	0.87573	0.032273	27.13524	0

即有:

$$\gamma V_L = 5.72E - 06,$$

$$\alpha = 0.090869,$$

$$\beta = 0.87573,$$

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta = 0.041201,$$

$$\text{长期平均方差 } V_L = \frac{\gamma V_L}{\gamma} = 1.88E - 04,$$

$$\text{长期波动率 } \sqrt{V_L} = 1.37\%.$$

由 EViews10, 条件方差和条件标准差如下表所示:

表 3.7 日 GARCH 波动率表

日期	日 GARCH 波动率平方 $\sigma_d^2$	日 GARCH 波动率 $\sigma_d$
11/15/2021	9.09E-05	0.95%
11/16/2021	9.29E-05	0.96%
11/17/2021	9.33E-05	0.97%
11/18/2021	9.24E-05	0.96%
...	...	...

续表 3.7

日期	日 GARCH 波动率平方 $\sigma_d^2$	日 GARCH 波动率 $\sigma_d$
11/09/2022	0.00018765	1.37%
11/10/2022	0.00018698	1.37%
11/11/2022	0.00018729	1.37%
11/14/2022	0.00018757	1.37%

由表 3.7 可知，日 GARCH 波动率 $\sigma_d$ 逐渐与长期波动率 $\sqrt{V_L}$ 接近，均为 1.37%。这证实了 GARCH(1,1)模型选择的有效性。

### 8. 波动率的年化

接下来，将日波动率 $\sigma_d$ 转化为年化波动率 $\sigma_y$ 。

由于挂钩标的资产的价格服从对数正态分布，即：

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma_d^2}{2} \right) (T - t), \sigma_d^2 (T - t) \right],$$

所以记 $n$ 为该年内交易日天数，则有公式：

$$\sigma_y = \sigma_d \times \sqrt{n}. \quad (3.7)$$

因为 2021 年 11 月 15 日至 2022 年 11 月 14 日共有 243 个交易日，所以 $n = 243$ ，所以最终得到年波动率

$$\sigma_y = 21.36\%.$$

## (三) 定价分析

### 1. 模型建立

首先，先给出必要参数的取值和取值方法：

表 3.8 必要参数取值表

参数	符号	取值	方法
无风险利率	$r$	2.0615%	2022 年 11 月 15 日的 0.75 年中债国债收益率曲线(到期)
波动率	$\sigma$	21.36%	2021 年 11 月 15 日—2022 年 11 月 14 日 243 个交易日内的中证 500 收盘价的 GARCH 波动率

续表 3.8

参数	符号	取值	方法
有效期限	$T$	183/252	2022 年 11 月 15 日—2023 年 8 月 14 日的 年化交易时长
期初价格	$S_0$	6236.3838	2022 年 11 月 15 日的中证 500 收盘价
敲出价格	$K$	6423.4753	期初价格的 103%
敲入价格	$B$	4677.2879	期初价格的 75%
年化票息率	$R$	12%	产品合约
本金	$Pr$	1	标准化

以 2.3 节中蒙特卡罗模拟的具体步骤为理论基础，编写 Python 程序来完成具体实证，具体工作如下：

Part 1：定义 Monte\_Carlo\_Simulation 函数。每个交易日设为一步（steps）。根据式（2.3），即：

$$S_t = S_0 e^{[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\varepsilon\sqrt{t}]}, \text{ where } \varepsilon \sim N(0,1),$$

结合表 3.8，分别生成  $I = 1000, 2500, 5000, 7500, 10000, 25000, 50000, 75000, 100000, 125000, 150000, 175000, 200000, 300000$  条路径，得到每条路径上标的资产自期初到期末在每一步的价格序列  $\text{Price\_path}[t, 0:I], t=0, 2, \dots, \text{steps}$ 。并且生成蒙特卡罗模拟路径图 Monte Carlo Simulation 和期末价格频数直方图 Price Histogram at T。

Part 2：定义 Snowball\_Payoff 函数。在每条路径上，确定敲出观察日序列和敲入观察日序列。之后，根据 3.1.2 节的四种收益情形得到路径  $i$  的贴现报偿值，将其放在所有路径的总贴现报偿序列的第  $i$  位  $\text{payoff}[i], i=0,1, \dots, I-1$ 。具体而言：

Case 1：有效期限内发生敲出，不论是否发生过敲入

$$\text{payoff}[i] = pr * (1 + R * (t/252)) * \text{np.exp}(-r * t/252). \quad (3.8)$$

Case 2：有效期限内未发生敲出也未发生敲入

$$\text{payoff}[i] = pr * (1 + R * T) * \text{np.exp}(-r * T). \quad (3.9)$$

Case 3：有效期限内未发生敲出，只发生过敲入，且期末价格  $\geq$  期初价格

$$\text{payoff}[i] = pr * \text{np.exp}(-r * T). \quad (3.10)$$

Case 4: 有效期限内未发生敲出, 只发生过敲入, 且期末价格 < 期初价格

$$\text{payoff}[i] = pr * ((\text{price\_path}[\text{len}(\text{price\_path})-1][i])/S) * \text{np.exp}(-r * T). \quad (3.11)$$

计算得出无套利理论下, 雪球的理论定价 snow\_ball\_price (标准化) 为:

$$\text{price} = \text{sum}(\text{payoff})/\text{len}(\text{payoff}) - pr. \quad (3.12)$$

并且, 作出各条路径下收益率的频数分布直方图 Profit Rate Histogram at T。

Part 3: 输入表 3.8 的数据, 调用以上两个函数。统计 Case 1、Case 2、Case 3、Case 4 和 Case 3 & 4 的平均盈利现值、最大盈利现值、最小盈利现值和占比, 所有情形中总的平均盈利现值 (即为雪球理论价格) 和平均存续时长, 以及 Case 1 的平均敲出用时。将以上数值存储在 DataFrame 中。

## 2. 实证结果

在本金标准化为 1 的背景下, 平均报偿贴现值减去本金, 即为雪球产品的价值, 为了满足风险中性定价理论, 也应为其理论定价。结果如下:

表 3.9 不同路径数的蒙特卡罗模拟结果

路径数	理论价格	敲出比例	存续比例	敲入比例
1000	0.008970	71.600%	20.200%	8.200%
2500	0.005941	70.720%	20.400%	8.880%
5000	0.007177	71.180%	20.520%	8.300%
7500	0.006145	71.107%	20.187%	8.707%
10000	0.005558	71.520%	19.780%	8.700%
25000	0.005262	71.544%	19.648%	8.808%
50000	0.005717	70.926%	20.236%	8.838%
75000	0.005351	71.015%	20.124%	8.861%
100000	0.005564	71.263%	19.940%	8.797%
125000	0.006080	71.224%	20.074%	8.702%

续表 3.9

路径数	理论价格	敲出比例	存续比例	敲入比例
150000	0.005736	71.205%	20.003%	8.792%
175000	0.005741	71.160%	20.091%	8.759%
200000	0.005743	71.192%	20.150%	8.759%
300000	0.005732	71.1237%	20.168%	8.708%

由表 3.9 可知，随着路径数的增加，数据在逐步趋于收敛。其中，理论价格（标准化）收敛于 0.0057，敲出比例（Case 1）收敛于 71.1%，存续比例（Case 2）收敛于 20.2%，敲入比例（Case 3 & 4）收敛于 8.7%。其中，雪球理论价格随路径数的变化如图所示：

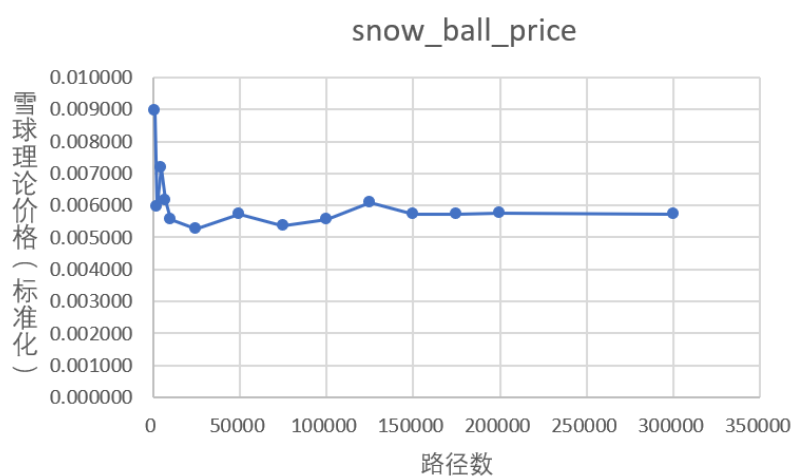
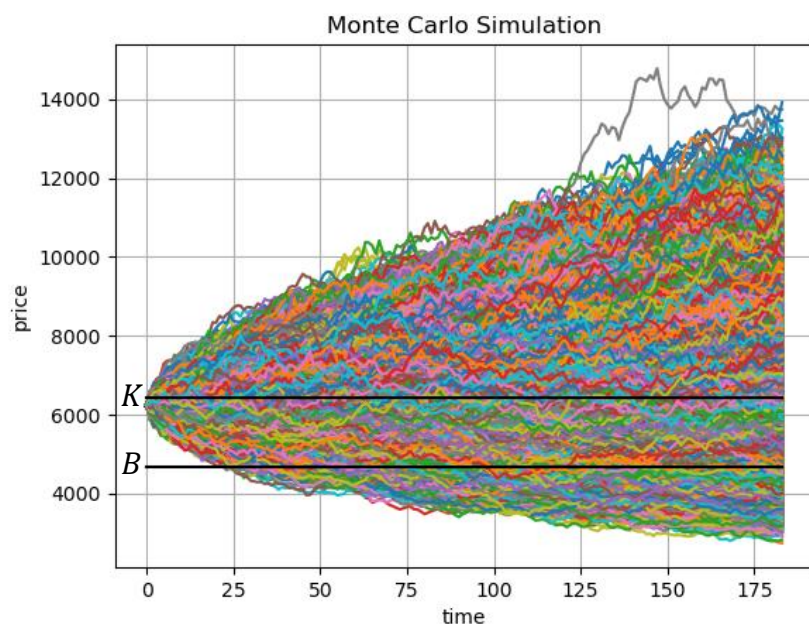


图 3.11 雪球理论价格随路径数的收敛趋势

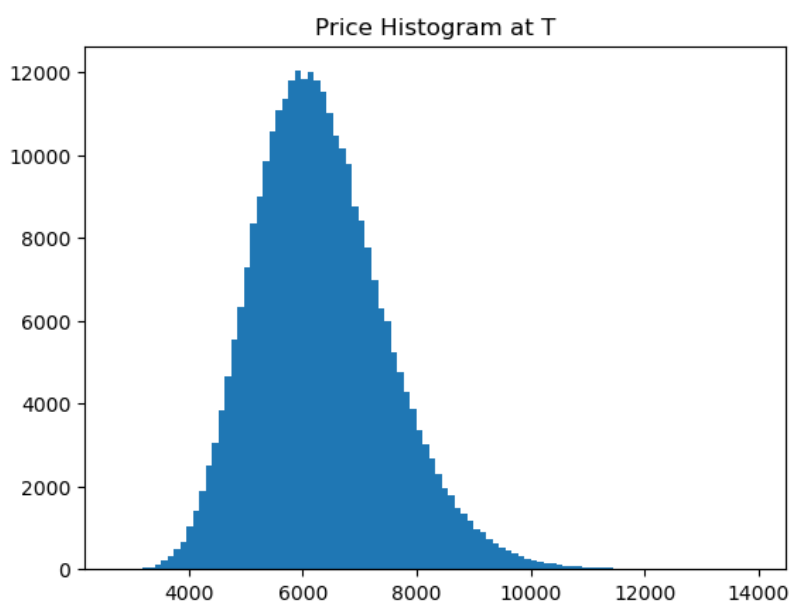
由图 3.11 可知，从路径数为 150000 条开始，与最终收敛值的误差就小于万分之一。所以 3.4 节的分析，将用路径数为 150000 条的蒙特卡罗模拟展开讨论。

现在，为了更精细地观测和分析，我们具体讨论当路径数为 300000 条时的结果与结论。

首先，路径数  $I = 300000$  时的蒙特卡罗模拟如图所示：

图 3.12 蒙特卡罗模拟路径图 ( $I = 300000$ )

每条路径得到的期末价格的频数分布如下：

图 3.13 所有路径期末价格的频数分布直方图 ( $I = 300000$ )

最终得到的模拟结果数值如下：

表 3.10 模拟结果数值表 ( $I = 300000$ )

指标	数值
全局平均收益率	0.57%
理论价格（标准化）	0.005732



续表 3.10

指标	数值
Case 1 平均盈利现值	0.02057
Case 2 平均盈利现值	0.07099
Case 3 平均盈利现值	-0.01486
Case 4 平均盈利现值	-0.26458
Case 3 & 4 平均盈利现值	-0.26389
Case 1 最大盈利现值	0.06984
Case 2 最大盈利现值	0.07099
Case 3 最小盈利现值	-0.01486
Case 4 最小盈利现值	-0.56816
Case 3 & 4 最小盈利现值	-0.56816
全局最大盈利现值	0.07099
全局最小盈利现值	-0.56816
Case 1 比例	71.1237%
Case 2 比例	20.1680%
Case 3 & 4 比例	8.7083%
Case 3 比例	0.0246%
Case 4 比例	8.6837%
Case 1 平均敲出用时（交易日数）	52.5621
全局平均存续时长（交易日数）	90.2278

各条路径取得的收益率的频数分布如下图所示：

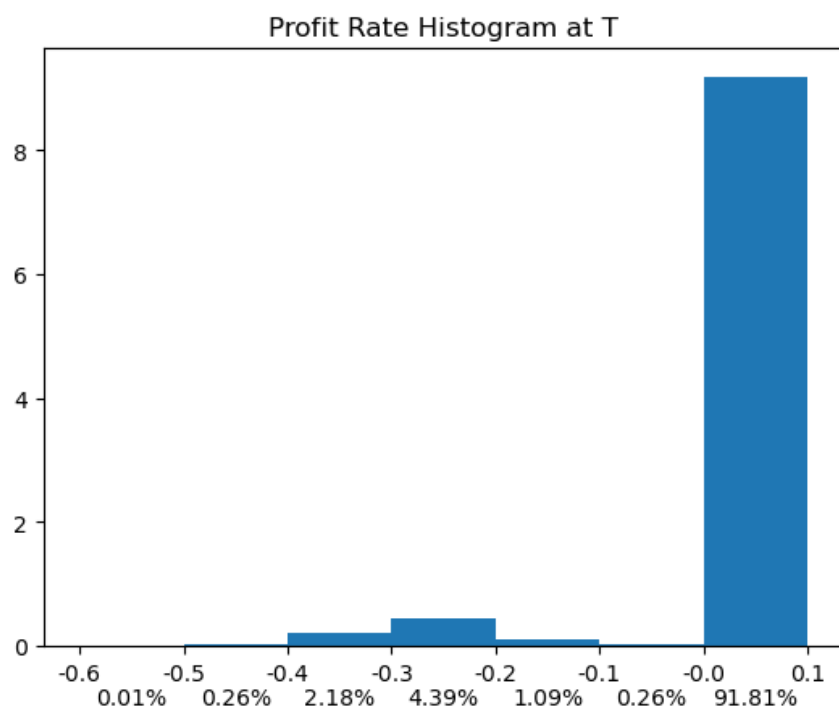


图 3.14 收益率频数分布直方图

最终，由表 3.10 和图 3.14 可以得出如下结论：

在风险中性世界，

（1）该雪球产品的平均存续时长只有 90.2 个交易日，均远小于合约的有效期限 183 个交易日。最大收益率为 7.10%，平均收益率为 0.57%，最大亏损率为 56.82%，收益率远低于合约所约定的年化票息率 12%。依据风险中性定价理论，该雪球产品的理论价格（标准化）为 0.005732。

（2）发生敲出（Case 1）的比例占到了 71.12%，平均敲出用时为 52.6 个交易日，均远小于合约的有效期限 183 个交易日。这种情形下的最大收益率为 6.98%，平均收益率为 2.06%，远低于合约所约定的年化票息率 12%。

（3）未敲入未敲出情形（Case 2）是投资者最为喜闻乐见的情形，也是雪球产品能获得最大效益的情形，其所占比例达到了 20.17%。这种情形（也是所有情形）下的最大收益率为 7.10%（也是此情形的平均收益率），亦远低于合约所宣称的年化票息率 12%。一方面因为本合约的生效天数为 183 个交易日，不足一年 252 个交易日，另一方面因为这个 12% 的年化票息率未考虑本金的时间价值。

（4）而最为投资者所避之不及的是未发生敲出反而发生敲入的情形（Case

3 & 4)。这种情形所占比例为 8.71%，最大亏损率为 56.82%，平均亏损率为 26.39%。这样巨额的亏损，是雪球“高概率取得正收益”外表下的一部分真面目。

### 3. 结果分析

由表 3.1，本产品实际最小本金为 100 万元，那么由 3.3.2 节，产品的期初价值  $100 \text{ 万元} \times 0.0057 = 5700 \text{ 元}$ ，而产品的认购费仅为 100 元，可见产品折价发行。可能原因如下：

(1) 雪球产品的交易并非投资者与发行商的零和博弈，发行商往往通过对冲操作进行标的资产的高抛低吸，从而赚取差额，而不仅仅是赚取认购费。

(2) 中证 500 股指期货长期存在深贴水现象，这是发行商的一个套利机会。

(3) 雪球产品的门槛较高（100 万元起），所以发行商需要以更优惠的认购费用彼此竞争来募集资金。

(4) 蒙特卡罗模拟定价遵循风险中性假设，并且假设无风险利率和波动率均为由历史数据得出的常数，所以可能与真实的市场情况存在较大误差。

## （四）灵敏度分析

改变影响雪球结构化产品定价结果的外在因素（无风险收益率，标的资产波动率）和内在因素（敲出、敲入价格，年化票息率，有效期限，敲出、敲入观察日频率），观测其定价结果的变化。

### 1. 无风险利率

雪球理论价格随无风险利率的上升而下降。

理论：无风险利率只影响贴现环节，无风险利率越高，贴现回来的现值越小，雪球价值越低。

实证：取无风险收益率  $r = 0.020, 0.022, 0.024, 0.026, 0.028, 0.030$ ，发现雪球理论价格随之的变动情况如图所示：

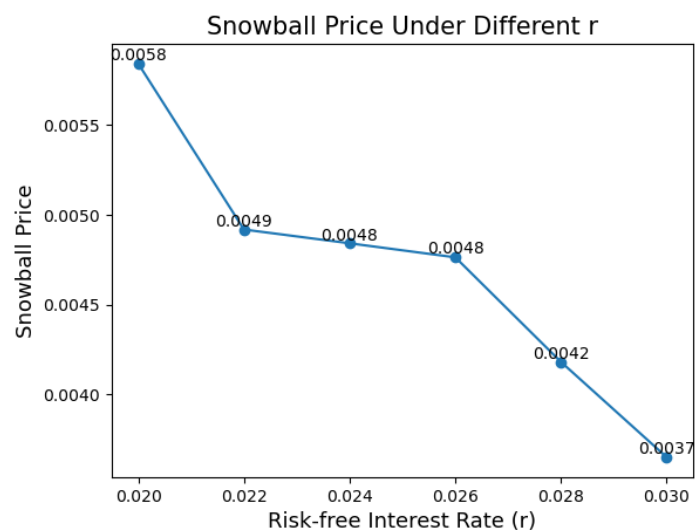


图 3.15 雪球理论价格与无风险利率的关系

## 2. 波动率

雪球理论价格随波动率的上升而下降。

理论：解释一：波动率越高，发生敲出、敲入的可能性大大增加，而投资者最喜闻乐见的情况——既不敲出也不敲入的发生概率降低，这使得投资者的平均收益率降低，所以雪球价值降低。解释二：投资者在做空标的波动率，所以波动率越高，对投资者越不利，雪球价值越低。

实证：取波动率  $\sigma = 0.16, 0.18, 0.2, 0.22, 0.24, 0.26$ ，发现雪球理论价格随之的变动情况如图所示：

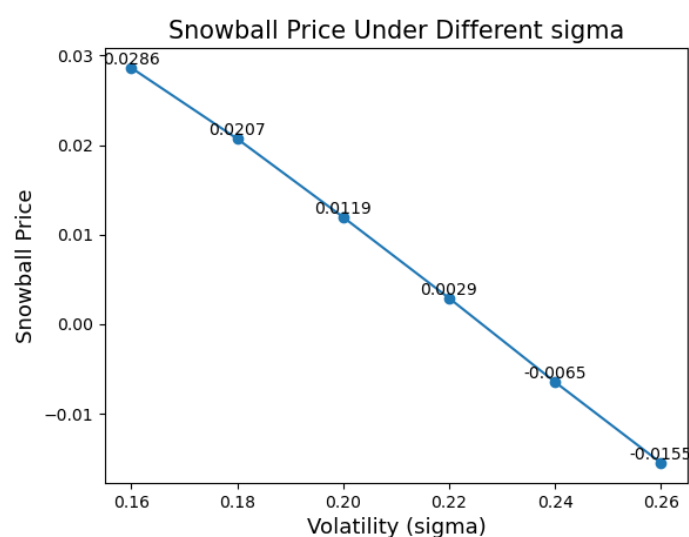


图 3.16 雪球理论价格与波动率的关系

### 3. 敲出、敲入价格

雪球理论价格随敲出价格的上升而先略降后上升，随敲入价格的上升而先下降后略升。

理论：首先解释大趋势。敲出价格越高，敲出越不容易，持有到期既不敲出也不敲入的概率增大，平均收益率增大，所以雪球价值上升；而敲入价格越高，敲入越容易，平均收益率减小，所以雪球价值下降。其次解释“小意外”。取极限情况敲入价格接近期初价格的 100%，敲出价格越高，越容易不发生敲出却发生敲入，损失的概率增大，所以此时雪球理论价格随敲出价格的上升而先略降；取极限情况敲出价格、敲入价格都接近期初价格的 100%，发生敲入后的期末价格落在不远且较小的一个区间里，故亏损较少，所以此时雪球理论价格随敲入价格的上升而先略升。

实证：分别取敲出价格  $K = S, S * 1.003, S * 1.01, S * 1.02, S * 1.03, S * 1.04, S * 1.05$ ，敲入价格  $B = S * 0.75, S * 0.80, S * 0.85, S * 0.90, S * 0.95, S$ ，发现雪球理论价格随敲出价格和敲入价格的变动情况分别如图所示：

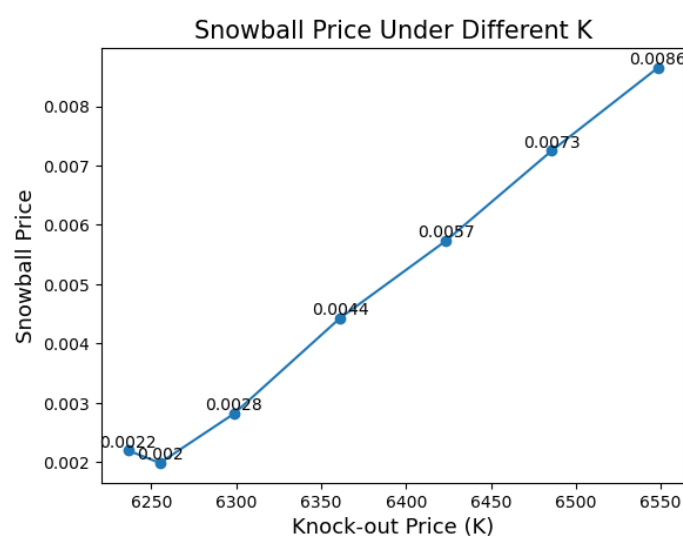


图 3.17 雪球理论价格与敲出价格的关系

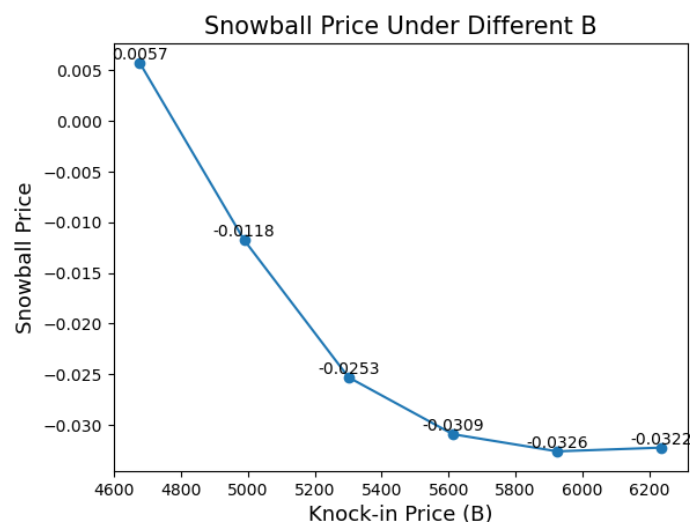


图 3.18 雪球理论价格与敲入价格的关系

#### 4. 年化票息率

雪球理论价格随年化票息率的上升而上升。对于一个固定的实际价格，雪球产品由溢价（价值=理论价格<实际价格）转向折价发行（价值=理论价格>实际价格）。

理论：年化票息率越高，平均收益越高，雪球价值越高。

实证：取年化票息率 $R = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.30$ ，发现雪球理论价格随之变动的情况如图所示：

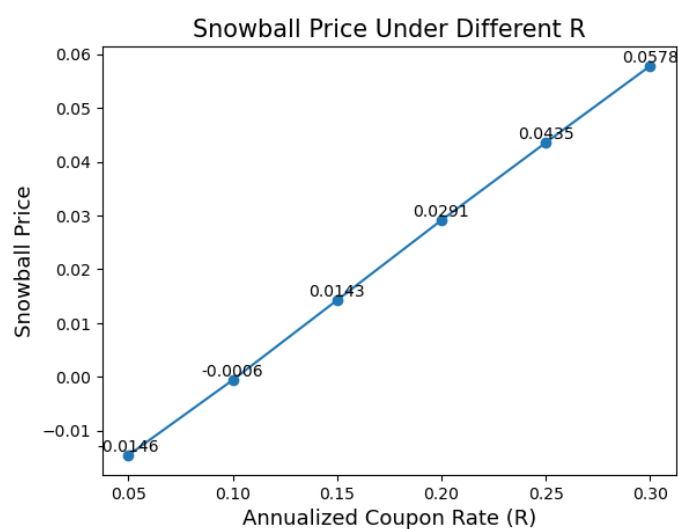


图 3.19 雪球理论价格与年化票息率的关系

## 5. 有效期限

雪球理论价格随有效期限的上升而下降，在两年之后，价格轻微扰动。

理论：第一，有效期限越长，发生对投资者最有利的不敲出不敲入情形的概率越低，而发生敲入或敲出的概率越高；同时导致贴现的跨度变长，所以导致了平均报偿现值的降低，故雪球理论价格下降。第二，雪球产品除非是发生敲出，否则不能提前终结合约，所以有效期限越长，投资者的机会成本和流动性风险越大，导致雪球理论价格必须降低以进行抵补<sup>[25]</sup>。第三，有效期限的长短还会影响到发行商对无风险利率和标的资产的选择，进而间接影响到了雪球理论价格；再加上蒙特卡罗模拟的误差，可能共同导致了两年之后价格的波动。

实证：联系实际中雪球产品的真实情况，取年化后的有效期限  $T = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3$ ，发现雪球理论价格随之的变动情况如图所示：

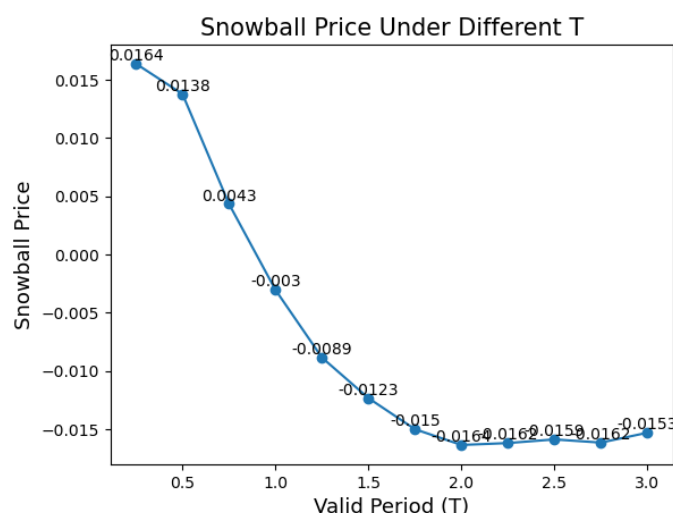


图 3.20 雪球理论价格与有效期限的关系

## 6. 锁定时长

有些雪球产品会存在锁定期。在锁定期内，雪球无法进行敲出和敲入的观察。雪球理论价格随锁定期的增长而阶梯式上升，在每个敲出观察日（间隔 20 个交易日左右）实现阶梯的跨越；在两个敲出观察日之间，理论价格轻微波动。

理论：锁定期内雪球产品保持在不敲出不敲入的状态，这是对投资者最有利的，所以当锁定期增长，每囊括一个敲出观察日，雪球理论价格就向上迈上

一个台阶；而在两个敲出观察日之间的锁定期内，锁定期影响敲入观察，但对总体的平均报偿现值影响较小。

实证：联系实际中雪球产品的真实情况，取锁定时长 $lock\_time = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60$ （交易日个数），发现雪球理论价格随之的变动情况如图所示：

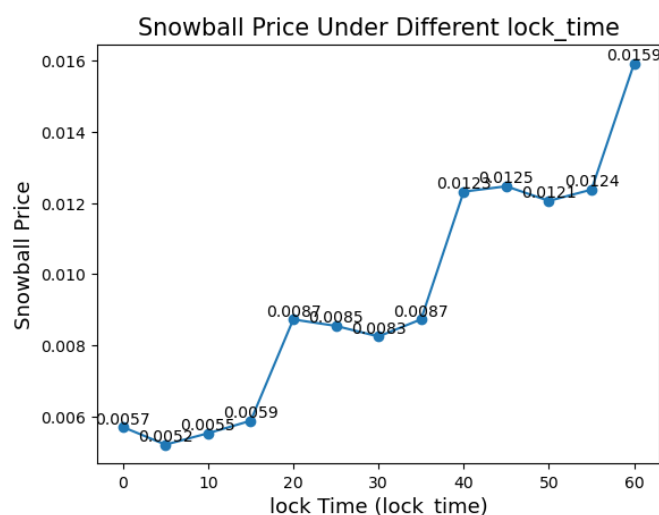


图 3.21 雪球理论价格与锁定时长的关系

## 7. 敲出、敲入观察频率

雪球理论价格分别随敲出观察频率和敲入观察频率的上升而下降，即分别随敲出观察日间隔和敲入观察日间隔的上升而上升。

理论：敲出和敲入观察越频繁，未敲出未敲入情形的可能性越低，所以平均报偿贴现值越小，雪球理论价格越低。

实证：分别取敲出观察日间隔 $out\_ob = 1, 5, 10, 20, 30, 40, 50$ ，敲入观察日间隔 $in\_ob = 1, 2, 5, 10, 15, 20, 30$ ，发现雪球理论价格随敲出观察日间隔和敲入观察日间隔的变动情况分别如图所示：



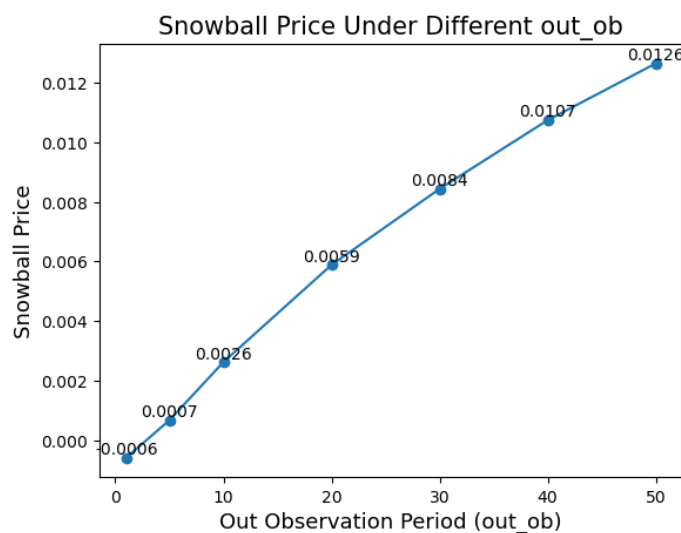


图 3.22 雪球理论价格与敲出观察日间隔时长的关系

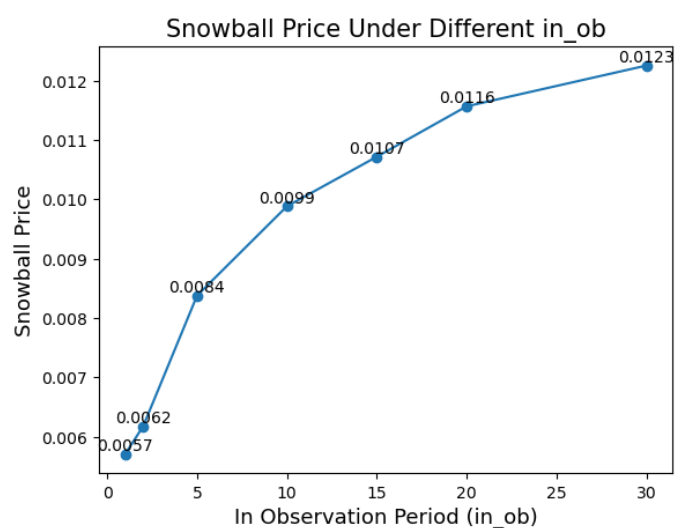


图 3.23 雪球理论价格与敲入观察日间隔时长的关系

### (五) 希腊值分析

由于交易费用、时间以及精力等方面的约束，在实际工作中发行商一般只考虑 Delta 风险的对冲，并注意将 Gamma 和 Vega 风险控制在合理范围之内，而几乎不考虑 Rho 和 Theta 风险<sup>[26]</sup>。另外，由于雪球结构化产品本质上是一个挂钩波动率的期权，所以其 Vega 值具有很大的实际意义。因此，在此对 Delta 和 Vega 展开分析和讨论。

## 1. Delta

Delta 是金融衍生品价格对标的资产价格的一阶偏导数：

$$\text{Delta } \Delta = \frac{\partial f}{\partial S}.$$

雪球结构化产品本质上是一个看跌期权，投资者卖出此期权，具有正 Delta 值，所以为了使整个投资组合的 Delta 值为 0，即进行 Delta 对冲，投资者应该卖出一定数量的标的资产。另外，由于标的资产相应的股指期货具有经常性深贴水、标准化、流动性强、可细分、交易费用低等特点和优点，卖出相应的股指期货是不错的对冲选择。而对于发行商来说，从投资者手中买入此看跌期权，具有负 Delta 值，所以发行商应该买入一定数量的标的资产（或对应股指期货），实现高抛低吸，来进行 Delta 对冲。注意应进行动态对冲，不断对市场做出反馈。

我们以下图来对 Delta 值随标的资产价格的变化进行研究。

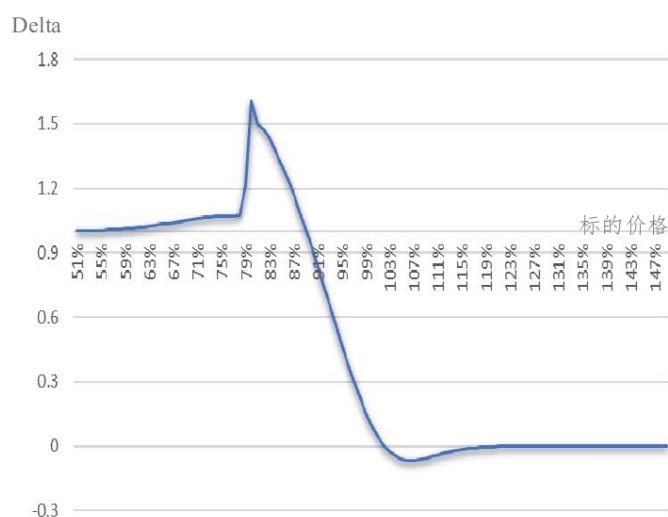


图 3.24 Delta 值随标的资产价格的变化曲线<sup>①</sup>

由图 3.24 可知，当标的资产价格 < 敲入价格时，Delta 值变动不大，这是因为敲入事件已成既定事实。当敲入价格 < 标的资产价格 < 敲出价格时，随标的资产价格的增大，Delta 值不断变小，直至 0 附近。当标的资产价格 > 敲出价格时，Delta 值趋于 0，这是因为，敲出事件已成既定事实，雪球价格便不再随标的资产价格的变化而变化。

<sup>①</sup> 资料来源：公众号“信达金工与产品研究”，文章《一文读懂雪球定价》

## 2. Vega

Vega 是金融衍生品价格对标的资产波动率的一阶偏导数：

$$\text{Vega } v = \frac{\partial f}{\partial \sigma}.$$

我们以下图来对 Vega 值随标的资产价格的变化进行研究。

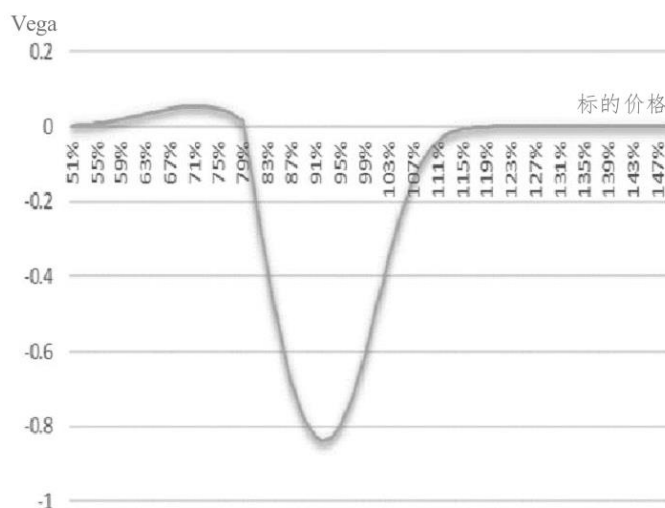


图 3.25 Vega 值随标的资产价格的变化曲线<sup>①</sup>

因为雪球结构化产品本质上是在做空波动率，所以观察到当敲入价格 < 标的资产价格 < 敲出价格时，其 Vega 值基本为负并不令人意外。当标的资产价格 < 敲入价格时，Vega 具有正值，可以想见这是因为敲入成为既定事实后，波动率越大，发生敲出来挽回损失局面的概率更大，所以雪球产品的理论价格越高。当标的资产价格 > 敲出价格时，Vega 值趋近于 0，这是因为敲出事件已成既定事实，雪球价格便不再随波动率的变化而变化。

<sup>①</sup> 资料来源：公众号“信达金工与产品研究”，文章《一文读懂雪球定价》

## 四、总结与展望

### （一）总结

衍生品市场经过百余年的发展，愈发生机勃勃，各式各样的机构化产品纷纷涌现，吸引着投资者和全市场的目光。其中，雪球产品的高票息和独特的敲出、敲入机制造就了它在投资者心目中高回报率的形象。

本文以“银河金鼎”收益凭证3515期-雪球为例，代入其真实条款和数据，以起息日前的0.75年中债国债收益率为无风险利率，在经过ARCH效应验证和模型比较后选择以GARCH(1,1)模型来计算出标的指数中证500的波动率，用蒙特卡罗模拟方法模拟出至多300000条路径，得出风险中性世界中的平均报偿现值，以其减去本金的数值作为此雪球结构化产品的理论价格，并进行了灵敏度分析和希腊值分析。全文主要结论如下：

（1）雪球本质上是一个关于标的资产的看跌期权，投资者是期权卖方，在做空波动率；发行商是期权买方，在做多波动率。在既不发生敲出也不发生敲入的情形下，投资者能获得最高回报。

（2）雪球并不像它所宣称的那样“类保本+高收益”。经本文测算，投资1单位本金，获得的平均利润现值为0.0057单位，利润率为0.57%，全局最大收益率为7.10%，均远低于合约规定的年化票息率12%；而全局最大亏损率高达56.82%。敲出情形的占比为71.1%，未敲出未敲入情形的占比为20.2%，未敲出但敲入情形的占比为8.7%。

（3）雪球常常折价发行。本产品理论价格应为5700元，而产品的认购费仅为100元。可能的原因是发行商在同时通过别的手段赚取利润，如：通过对标的资产高抛低吸进行对冲来赚取差额，通过股指期货深贴水进行套利等。

（4）雪球常常提前敲出。经本文测算，此雪球产品敲出的平均用时为52.6个交易日，所有情形下的平均存续时长只有90.2个交易日，均远小于合约的有效期限183个交易日。所以发行商要具备良好的资金流动性以应对提前到期，而投资者要做好再投资的准备。

（5）以整体趋势而言，雪球理论价格与各个定价要素的关系如下：与无风险利率、波动率、敲入价格、有效期限长度、敲出和敲入观察频率成负相关，

与年化票息率、敲出价格和锁定期长度成正相关，并在锁定期每包含一个敲出观察日时实现阶梯式跃升。

## （二） 展望

在国际经济形势低迷、国内“资管新规”施行的背景下，雪球产品在中国如火如荼地发展起来，丰富了衍生品市场产品的种类，提供了新型的理财和对冲工具，增加了市场活跃度。然而，雪球本身的风险不容忽视，且其设计、定价、对冲、监管等方面有许多亟待完善之处。因此，本文提出以下建议与展望：

（1）投资者应对雪球产品形成起正确的风险意识。第一，投资者应加强自身知识储备，充分理解合约条款的含义和雪球产品的特点，比如：雪球的实际盈利概率和实际收益率并没有看起来那样高，雪球的最高收益相比于最大亏损十分有限等。第二，投资者应明晰雪球的本质和市场的状况，雪球在轻微震荡的市场才能赚取最大利润。若波动率足够高，上行有跑输标的的风险，下行有承担标的亏损的风险。第三，雪球的流动性风险高，因为没有敲出发生时无法结束合约，这带来了很高的机会成本。另外，雪球再投资风险高，因为一旦发生敲出，投资者要提款并再次寻找投资之处。

（2）发行商应进一步增强风险管理。第一，要尽到对投资者的教育、告知和管理义务，明确这不是自己与投资者的零和博弈，而尽量寻求双赢，并做好投资者的准入筛选。第二，提升自身团队建设水平，提高产品设计、对冲、风险管理等诸多环节的准确度与高效性。第三，应充分了解当下市场形势和客户需求，更好地服务实体经济，同时也树立更好的口碑。

（3）监管层应完善监管措施，加大监管力度。比如：要求各大场外衍生品发行商定期披露希腊值和对冲策略，或至少定期审慎核实；增强第三方信用评级和担保的作用；引导其发行和完善场内业务以便监管，且有助于发行商提升对冲效果、增进市场了解、加强自身审视等。

## 附 录

## (一) Monte\_Carlo\_Simulation 函数

```
def Monte_Carlo_Simulation(S, r, T, sigma, I,B, K, steps, plotpath = True, plohist =
True):
    delta_t = T/steps
    # 每一步的时间长度
    Price_path = np.zeros((steps + 1, I))
    Price_path[0] = S
    # 一列为一个路径，从 S0 到 T 时刻的股价
    for t in range(1, steps+1):
        # 对数正态分布下 S 的递推式
        z = np.random.standard_normal(I)
        Price_path[t, 0:I] = Price_path[t-1, 0:I] * np.exp((r - 0.5 * sigma ** 2) * delta_t +
sigma * np.sqrt(delta_t) * z)
    if plotpath:
        plt.plot(Price_path[:, :])
        plt.plot([B]*len(Price_path), 'k')
        plt.plot([K]*len(Price_path), 'k')
        plt.xlabel('time')
        plt.ylabel('price')
        plt.title('Monte Carlo Simulation')
        plt.grid()
        plt.show()
        plt.close()
    if plohist:
        plt.hist(Price_path[steps, :], bins=100) #steps,0:I
        plt.title('Price Histogram at T')
        plt.show()
        plt.close()
```

```
return Price_path
```

## (二) Snowball\_Payoff\_lock\_both\_observation 函数

# 以 3.4.7 节关于敲出观察日频率的代码为例，关于其他参数的代码同理。

```
def Snowball_Payoff_lock_both_observation(price_path, R, I, lock_time, out_ob,
in_ob, plotprofithist = True):
```

```
    payoff = np.zeros(I)
```

```
    payoffcase1 = np.array([])
```

```
    payoffcase2 = np.array([])
```

```
    payoffcase3 = np.array([])
```

```
    payoffcase4 = np.array([])
```

```
    payoffcase34 = np.array([])
```

```
    # 路径数 I 就是列数，1×I 行向量
```

```
    knock_out_times = 0
```

```
    knock_in_times = 0
```

```
    existence_times = 0
```

```
    knock_in_up_times = 0
```

```
    knock_in_low_times = 0
```

```
    sum_out_period = 0
```

```
    sum_existing_period = 0
```

```
    for i in range(I):
```

```
        # 收盘价超过敲出线的交易日
```

```
        tmp_up_d = np.where(price_path[:, i] > K) # 列向量
```

```
        # 必须得是敲出观察日
```

```
        tmp_up_m = tmp_up_d[0][tmp_up_d[0] % out_ob == 0]
```

```
        # 括号内返回 0, 1 列向量
```

```
        # 必须得超过封闭期
```

```
        tmp_up_m_md = tmp_up_m[tmp_up_m > lock_time]
```

```
        tmp_dn_d = np.where(price_path[:, i] < B) #
```

```
        tmp_dn_m = tmp_dn_d[0][tmp_dn_d[0] % in_ob == 0]
```

```

tmp_dn_m_md = tmp_dn_m[tmp_dn_m > lock_time]
# 根据合约条款判断现金流
# 情形 1: 发生过向上敲出
if len(tmp_up_m_md) > 0:
    t = tmp_up_m_md[0] #第一个敲出观察日
    payoff[i] = pr * (1 + R * (t/252)) * np.exp(-r * t/252) #收益现值
    payoffcase1 = np.insert(payoffcase1, knock_out_times, payoff[i])
    knock_out_times += 1 #发生敲出的路径数+1
    sum_out_period += t
    sum_existing_period += t
# 情形 2: 未敲出且未敲入
elif len(tmp_up_m_md) == 0 and len(tmp_dn_m_md) == 0:
    payoff[i] = pr * (1 + R * T) * np.exp(-r * T)
    payoffcase2 = np.insert(payoffcase2, existence_times, payoff[i])
    existence_times += 1 #存续到底的路径数+1
    sum_existing_period += steps #183 天
# 情形 3: 只发生向下敲入, 不发生向上敲出
elif len(tmp_dn_m_md) > 0 and len(tmp_up_m_md) == 0:
    # 按期末价格来判断, len(price_path)-1 就是期末价格的行号
    if price_path[len(price_path)-1][i] > S:
        payoff[i] = pr * np.exp(-r * T)
        payoffcase3 = np.insert(payoffcase3, knock_in_up_times, payoff[i])
        knock_in_up_times += 1
    else:
        payoff[i] = pr * ((price_path[len(price_path)-1][i])/S) * np.exp(-r * T)
        payoffcase4 = np.insert(payoffcase4, knock_in_low_times, payoff[i])
        knock_in_low_times += 1
    payoffcase34 = np.insert(payoffcase34, knock_in_times, payoff[i])
    knock_in_times += 1 #发生敲入的路径数+1

```



```

        sum_existing_period += steps #183 天
    else:
        print(i)
    if plotprofithist:
        fig, ax = plt.subplots()
        counts, bins, patches = ax.hist((payoff - pr), bins = np.arange(0.1*math.floor
(10*(min(payoff)-pr)), 0.1*math.ceil(10*(max(payoff)-pr))+0.1, 0.1), density=True)
        ax.set_title("Profit Rate Histogram at T")
        # Set the ticks to be at the edges of the bins.
        ax.set_xticks(bins)
        # Set the xaxis's tick labels to be formatted with 1 decimal place...
        ax.xaxis.set_major_formatter(FormatStrFormatter('%0.1f'))
        bin_centers = 0.5 * np.diff(bins) + bins[:-1]
        for count, x in zip(counts, bin_centers):
            # Label the percentages
            percent = '%0.2f%%' % (100 * float(count) / counts.sum())
            ax.annotate(percent, xy=(x, 0), xycoords=('data', 'axes fraction'), xytext=(0, -
18), textcoords='offset points', va='top', ha='center')
        return payoff, payoffcase1, payoffcase2, payoffcase3, payoffcase4, payoffcase34,
        knock_out_times,    existence_times,    knock_in_times,    knock_in_up_times,
        knock_in_low_times, sum_out_period, sum_existing_period

```

### (三) 主函数

```

np.random.seed(0)
sigma = 0.2136
r = 0.020615
I = 10000
T = 183/252
#S = 6236.3838
lock_time = 0

```

```
R = 0.12
pr = 1
steps = 183 #有效期内的交易天数
#dict1,index = ["%d"%I for I in Iset]
#{'a':[1,2,3],'b':[1,2,3]}
# df = pd.DataFrame ({"snow_ball_price":[], "knock_out_proportion":[], "knock_in_
proportion":[], "existence_proportion":[]})
S_range = np.arange(3000,9000,1)
price = np.zeros(6000)
for i in range(0,6000):
    S = S_range[i]
    K = S * 1.03
    B = S * 0.75
    price_path = Monte_Carlo_Simulation(S, r, T, sigma, I, B=B, K=K, steps=steps)
    payoff = Snowball_Payoff_lock_both (price_path, R, I)
    price[i] = sum(payoff)/len(payoff) - pr
    print(i,price[i])
delta = (price[1:] - price[:-1])*10
# df.loc[I,:] = [price, knock_out_times/I, knock_in_times/I, existence_times/I]
```

## 参考文献

- [1] 周晨豪.雪球结构收益凭证定价分析及对冲策略研究:[硕士学位论文].浙江大学, 2022.
- [2] 孙桂平.结构化产品的定价及风险分析——以挂钩股票指数的保本产品为例.技术经济与管理研究, 2015, 10: 67~72.
- [3] 蔡向辉.国内结构化产品市场的发展前景、问题及建议.新金融, 2006, 10: 29~31.
- [4] 吕博,梅贞.当前结构化金融产品发展及影响.银行家, 2021, 09: 98~100.
- [5] 黄松浩.雪球期权定价研究:[硕士学位论文].苏州大学, 2021.
- [6] Bachelier L.. Theory of speculation: The origins of modern finance. Francia: Gauthier-Villars, 1900.
- [7] Black F., Scholes M.. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [8] Merton R. C.. Theory of rational option pricing. The Bell Journal of economics and management science, 1973: 141-183.
- [9] Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M.. Option pricing: A simplified approach. Journal of financial Economics, 1979, 7(3): 229-263.
- [10] Cox J. C., Ross S. A.. The valuation of options for alternative stochastic processes. Journal of Financial Economics, 1976, 3:145-166.
- [11] Merton R. C.. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. Journal of Financial Economics, 1976: 125-144.
- [12] Rubinstein M., Reiner E.. Breaking down the barriers. Risk, 1991, 4: 28-35.
- [13] Skipper M., Buchen P.. A valuation formula for multi-asset, multi-period binaries in a Black-Scholes economy. The Anziam Journal, 2009, 50(4): 475-485.
- [14] 孟祥欢.双障碍敲出期权定价研究:[硕士学位论文].吉林大学, 2017.
- [15] Fusai G., Abrahams I. D., Sgama C.. An exact analytical solution for discrete barrier options. Finance and Stochastics, 2006, 10(1): 1-26.
- [16] 徐腾飞,曹小龙,胡云姣.离散障碍期权定价的蒙特卡罗模拟.北京化工大学学报(自然科学版), 2013, 40(03): 123-127.
- [17] Shim G. C.. A Snowball Currency Option. Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011, 15(1): 31-41.

- [18] 潘琪.挂钩单一标的的自动敲入敲出期权结构的定价研究.现代商贸工业, 2019, 40(34): 108-109.
- [19] 朱雨潇.收益凭证的定价策略研究:[硕士学位论文].南京大学, 2020.
- [20] Tong, K. Z. A recursive pricing method for autocallable under multivariate subordination. Quantitative Finance and Economics, 2019, 3(3): 440–455.
- [21] Huang M., Luo G.. A simple and efficient numerical method for pricing discretely monitored early-exercise options. Applied Mathematics and Computation, 2022, 422: 126985.
- [22] Engle R. F.. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica: Journal of the econometric society, 1982: 987-1007.
- [23] Bollerslev T.. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of econometrics, 1986, 31(3): 307-327.
- [24] 陈长兴.雪球结构型理财产品的定价研究:[硕士学位论文].江西财经大学, 2022.
- [25] 郑聪.雪球式期权产品定价研究:[硕士学位论文].湖南大学, 2021.
- [26] 鄢煜.自动赎回式障碍期权产品的定价优化:[硕士学位论文].东北财经大学, 2021.

## 致 谢

感谢命运和世界予我的所有境遇，相见，机缘，因果。

感谢我的代课老师和毕业论文导师江一鸣教授，在平时教学和论文指导中带给了我知识上的、思想上的、品德上的良多教诲，让我受益匪浅，不断反省，有所长进。

感谢我的妈妈等亲人们，从来没有放弃过我，永远爱我，渡我。你们是我永远的幸运和幸福。

感谢我的高中好友，大学舍友和其他好友们，我们肆意大笑过，并肩作战过，争执过，在分享与扶持中共同走过。

感谢我自己，在艰难的时候咬住牙挺了过来，在大学期间，能力与人格都获得了很大的进步。希望日后继续努力，勇猛精进！

四年之期，毕业之际。感谢南开这座象牙塔、这个小社会，承载着我的生活与成长。汗和笑都洒在层层叠叠印满我们脚印的道路上，泪和梦都荡在我港湾般的一方小床上。长时间的痛苦和吃力，更长时间的拼搏和进步，人生许多至关重要的经历，与南开一切写在我的回忆和人格中。

允公允能，清白奔波，勇猛精进，纯粹洒脱。