数学 < HTTPS://SYRUPSE.COM/ARCHIVES/CATEGORY/MATHEMATICS>
東京大学大学院情報理工学系研究科 < HTTPS://SYRUPSE.COM/ARCHIVES/CATEGORY/GRADUATE-SCHOOL-ENTRANCE-EXAMINATION-ANSWER/%E6%9D%B1%E4%BA%AC%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E9%99%A2%E6%83%85%E5%A0%B1%E7%90%86%E5%B7%A5%E5%AD%A6%E7%B3%BB%E7%A0%94%E7%A9%B6%E7%A7%91>

【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第2問

作成者: goshouhiro < https://syrupse.com/archives/author/goshouhiro>

2020年4月2日 < https://syrupse.com/archives/468/utokyo-ist-math-2019-2>

コメントはまだありません < https://syrupse.com/archives/468/utokyo-ist-math-2019-2#respond>

東京大学大学院情報理工学系研究科の入試過去問の解答例です．この記事では2019（平成31）年度の数学（一般教育科目）第2問について解答・解説します．問題は**研究科のWebページ < https://www.i.u-tokyo.ac.jp/edu/entra/examarchive.shtml>** から見ることができます．※この記事は大学院・研究科に認められたものではありません．

目次

解答

(1)

積分経路を図のように$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$とする．ただし，$R$は十分大きな正の実数とする．$f(z) = \exp(-az^2)$とおくと$f(z)$は正則であるので，コーシーの積分定理より

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{I}$$

となる．なお，式(I)はdの正負によらず成り立つ．ここで,

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z \qquad \text{(II)}$$

であり,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^d \exp\bigl(-a(R+iy)^2\bigr)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \int_0^{|d|} \left|\exp\bigl(-a(R+iy)^2\bigr)\right|\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{|d|} \exp\bigl(-a(R^2-y^2)\bigr)\mathrm{d}y \\
&\leq |d|\exp\bigl(-a(R^2-y^2)\bigr) \\
&\xrightarrow{R\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_d^0 \exp\bigl(-a(-R+iy)^2\bigr)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \int_0^{|d|} \left|\exp\bigl(-a(-R+iy)^2\bigr)\right|\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{|d|} \exp\bigl(-a(R^2-y^2)\bigr)\mathrm{d}y \\
&\leq |d|\exp\bigl(-a(R^2-y^2)\bigr) \\
&\xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}$$

となるから，$R \to \infty$のとき

$$\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

となる．また,

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \exp(-ax^2)\mathrm{d}x$$

について，$w = \sqrt{a}x$とおくと

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{-\sqrt{a}R}^{\sqrt{a}R} \exp(-w^2)\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{d}w \\
&\xrightarrow{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-w^2)\mathrm{d}w \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}
$$

となる．さらに，

$$
\begin{aligned}
\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{R}^{-R} \exp\bigl(-a(x+\mathrm{i}d)^2\bigr)\mathrm{d}x \\
&\xrightarrow{R\to\infty} -\int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-a(x+\mathrm{i}d)^2\bigr)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となるから，式(I)，(II)より$R\to\infty$のとき

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z &= 0 \\
\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-a(x+\mathrm{i}d)^2\bigr)\mathrm{d}x &= 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-a(x+\mathrm{i}d)^2\bigr)\mathrm{d}x &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

となる．

(2)

(i)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \exp(-\mathrm{i}kx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \exp(-\mathrm{i}kx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \exp(-\mathrm{i}kx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \exp(-\mathrm{i}kx) \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad - \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} (-\mathrm{i}k) \exp(-\mathrm{i}kx) \mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{\mathrm{i}kc^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \exp(-\mathrm{i}kx) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{i}kc^2}{\sqrt{2\pi}} [u(x,t) \exp(-\mathrm{i}kx)]_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}kc^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(-\mathrm{i}k) \exp(-\mathrm{i}kx) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{(kc)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \exp(-\mathrm{i}kx) \mathrm{d}x \\
&= -(kc)^2 U(k,t)
\end{aligned}$$

となるから

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -(kc)^2 U(k,t) \qquad (答)$$

である．

(ii)

(i)の解は$U(k,t)$のtに関する二階定数係数線形同次微分方程式であるから，その一般解は

$$U(k,t) = C_1(k) \exp(\mathrm{i}kct) + C_2(k) \exp(-\mathrm{i}kct) \qquad \text{(III)}$$

となる．ただし，$C_1(k), C_2(k)$はkを変数とする関数である．よって

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathrm{i}kc[C_1(k)\exp(\mathrm{i}kct) - C_2(k)\exp(-\mathrm{i}kct)] \tag{IV}$$

となる．一方，初期条件(2.3)より

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(k,0) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから式**(IV)**より

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(k,0) = \mathrm{i}kc[C_1(k) - C_2(k)] &= 0 \\ C_1(k) &= C_2(k)\end{aligned}$$

となる．ゆえに，式**(III)**より

$$\begin{aligned}U(k,t) &= C_1(k)[\exp(\mathrm{i}kct) + \exp(-\mathrm{i}kct)] \\ &= 2C_1(k)\cos(kct)\end{aligned}$$

となる．したがって，$F(k) = 2C_1(k)$とおくと

$$U(k,t) = F(k)\cos(kct) \tag{答}$$

となる．

(iii)

(ii)の解より

$$U(k,0) = F(k)$$

である．一方，初期条件(2.2)より

$$
\begin{aligned}
U(k,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(x+\mathrm{i}\frac{k}{2a}\right)^2-\frac{k^2}{4a}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(x+\mathrm{i}\frac{k}{2a}\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}}\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)$$

である．ゆえに

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)\cos(kct) \qquad (答)$$

である．

(3)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)\cos(kct)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{4a} + \mathrm{i}kx\right)\cos(kct)\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{4a} + \mathrm{i}kx\right)\frac{\exp(\mathrm{i}kct)+\exp(-\mathrm{i}kct)}{2}\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{k^2}{4a} + \mathrm{i}k(x+ct)\right) + \exp\left(-\frac{k^2}{4a} + \mathrm{i}k(x-ct)\right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{4a} + \mathrm{i}k(x \pm ct)\right)\mathrm{d}k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4a}[k - 2\mathrm{i}a(x \pm ct)]^2 - a(x \pm ct)^2\right)\mathrm{d}k \\
&= \exp\left(-a(x \pm ct)^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4a}[k - 2\mathrm{i}a(x \pm ct)]^2\right)\mathrm{d}k \\
&= \exp\left(-a(x \pm ct)^2\right)\sqrt{4\pi a} \\
&= 2\sqrt{\pi a}\exp\left(-a(x \pm ct)^2\right) \quad (\text{複号同順})
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi a}} \cdot 2\sqrt{\pi a}\left[\exp\left(-a(x+ct)^2\right) + \exp\left(-a(x-ct)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\exp\left(-a(x+ct)^2\right) + \exp\left(-a(x-ct)^2\right)\right] \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

となる．

解説

フーリエ変換を利用して偏微分方程式（波動方程式）を解く問題です．

(1)

実軸に平行な積分経路でのガウス積分を求める問題です．コーシーの積分定理を利用すると，結果として実軸上での積分と変わらないということがわかります．
$s=\sqrt{a}(x+\mathrm{i}d)$と置換して与えられた公式を直接利用することはできません．なぜなら，その場合は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-a(x+\mathrm{i}d)^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty+\mathrm{i}d\sqrt{a}}^{\infty+\mathrm{i}d\sqrt{a}}\exp\left(-s^2\right)\mathrm{d}s$$

となり，実軸上での積分にはならないからです．

(2)

xについての微分という解析的な操作をフーリエ変換するとkについての積という代数的な操作になる性質を利用し，k領域で偏微分方程式を解きます．

(i)

部分積分を利用すると,偏微分$\frac{\partial u}{\partial x}$のフーリエ変換は$\mathrm{i}kU(k,t)$であるということがわかります．

(ii)

(i)の解は$U(k,t)$をtで偏微分していますがkによる偏微分はないので，tについての常微分方程式とみなすことができます．すると，これは単振動型の微分方程式であり，積分定数はtによらずkのみの関数となります．

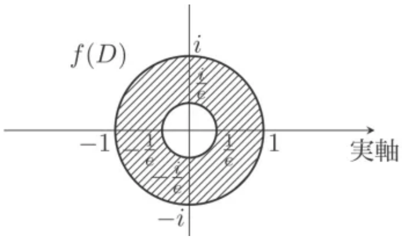
(iii)

$\exp(-ax^2-\mathrm{i}kx)$の積分は，平方完成することで設問(1)の結果を利用して求めることができます．

(3)

フーリエ逆変換を計算します．$\cos$を複素指数関数で表すことにより設問(1)の結果を利用して逆変換を計算することができます．$u(x,t)$は$x+ct$の関数と$x-ct$の関

数の和となっており，ダランベールの解を確かに満たしています．



<
https://syrupse.com/archives/131/utokyo-engineering-math-2019-3>
【院試解答】東京大学大学院 工学系 数学 2019年度 第3問 <
https://syrupse.com/archives/131/utokyo-engineering-math-2019-3>

<【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第3問 <
https://syrupse.com/archives/514/utokyo-ist-math-2019-3>
https://syrupse.com/archives/514/utokyo-ist-math-2019-3>
東京大学大学院情報理工学系研究科の入試過去問の解答例です．この記事では2019（平成31）年度の数学…

<【院試解答】東京大学大学院 工学系 数学 2020年度 第5問 <
https://syrupse.com/archives/877/utokyo-engineering-math-2020-5>
https://syrupse.com/archives/877/utokyo-engineering-math-2020-5>
東京大学大学院工学系研究科の入試過去問の解答例です．この記事では2020（令和2）年度の数学（一般教…

//

← 【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第1問 < https://syrupse.com/archives/380/utokyo-ist-math-2019-1>

→ 【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第3問 < https://syrupse.com/archives/514/utokyo-ist-math-2019-3>

//

上↑