[数学 < HTTPS://SYRUPSE.COM/ARCHIVES/CATEGORY/MATHEMATICS>]
[東京大学大学院情報理工学系研究科 < HTTPS://SYRUPSE.COM/ARCHIVES/CATEGORY/GRADUATE-SCHOOL-ENTRANCE-EXAMINATION-ANSWER/%E6%9D%B1%E4%BA%AC%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E9%99%A2%E6%83%85%E5%A0%B1%E7%90%86%E5%B7%A5%E5%AD%A6%E7%B3%BB%E7%A0%94%E7%A9%B6%E7%A7%91>]

【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第3問

作成者: goshouhiro < https://syrupse.com/archives/author/goshouhiro>

2020年4月4日 < https://syrupse.com/archives/514/utokyo-ist-math-2019-3≥

コメントはまだありません < https://syrupse.com/archives/514/utokyo-ist-math-2019-3#respond>

東京大学大学院情報理工学系研究科の入試過去問の解答例です．この記事では2019（平成31）年度の数学（一般教育科目）第3問について解答・解説します．問題は研究科のWebページ < https://www.i.u-tokyo.ac.jp/edu/entra/examarchive.shtml> から見ることができます．※この記事は大学院・研究科に認められたものではありません．

目次

解答

(1)

点Qが辺AB上にあるとき

$$0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$$

である．Θは一様分布に従うから，求める確率は

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4} \qquad (答)$$

である．

(2)

点Qが辺AB上にあるという条件のもとでのXの確率密度関数を$p(x)$ $(0 < x < 1)$とすると，$p(x)$は

$$\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad (\mathrm{I})$$

を満たす．三角形ABCは直線$y = x$に関して対称であるので，辺ABと直線$y = x$の交点のx座標$1/2$に関して$p(x)$は対称である．すなわち

$$p\left(\frac{1}{2} - t\right) = p\left(\frac{1}{2} + t\right) \quad \left(0 \leq t < \frac{1}{2}\right)$$

である．求める期待値γは

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \int_0^1 xp(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} xp(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 xp(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{1}{2}-t\right)p\left(\frac{1}{2}-t\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}+t\right)p\left(\frac{1}{2}+t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-t\right)p\left(\frac{1}{2}-t\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}+t\right)p\left(\frac{1}{2}+t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2}-t\right)p\left(\frac{1}{2}-t\right) + \left(\frac{1}{2}+t\right)p\left(\frac{1}{2}+t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2}-t\right)p\left(\frac{1}{2}+t\right) + \left(\frac{1}{2}+t\right)p\left(\frac{1}{2}+t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} p\left(\frac{1}{2}+t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

となる．ここで，式(I)より

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} p(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 p(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{1}{2}}^0 p\left(\frac{1}{2} - t\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} p\left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} p\left(\frac{1}{2} - t\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} p\left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[p\left(\frac{1}{2} - t\right) + p\left(\frac{1}{2} + t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[p\left(\frac{1}{2} + t\right) + p\left(\frac{1}{2} + t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} p\left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} p\left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}
$$

である．よって，点Qが辺AB上にあるという条件のもとでのXの期待値γは

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \int_0^{\frac{1}{2}} p\left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．■

(3)

点Qが辺BC上にあるとき

$$
\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{5}{4}\pi
$$

である．Θは一様分布に従うから，点Qが辺BC上にあるという条件のもとでのΘの確率密度関数$g(\theta)$は

$$
\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{1}{\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{3\pi}
\end{aligned}
$$

となる．

次に，XをΘの式で表し，$h(x)$を求める．直線BCの方程式は$y = 2x + 1$であり，直線OQの方程式は$y = x \tan\Theta$であるから

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{\tan\Theta - 2} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{5}{4}\pi\right) \\
\tan\Theta &= \frac{1}{X} + 2 \quad (-1 < X < 0) \\
\Theta &= \arctan\left(\frac{1}{X} + 2\right) \\
\therefore h(x) &= \arctan\left(\frac{1}{x} + 2\right) \quad (-1 < x < 0)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\arctan$は$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$の値を返す．よって

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\left(\frac{1}{x} + 2\right) \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} + 2\right)^2}\left(\frac{1}{x} + 2\right)' \\
&= \frac{1}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{5x^2 + 4x + 1} \\
&= -\frac{1}{5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} < 0
\end{aligned}
$$

となる．ゆえに，点Qが辺BC上にあるという条件のもとでのXの確率密度関数$f(x)$は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(h(x))\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)\right| \\
&= \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{1}{5x^2+4x+1} \\
&= \frac{4}{3\pi(5x^2+4x+1)} \quad (-1<x<0) \qquad\qquad (答)
\end{aligned}
$$

となる.

(4)

設問(3)より

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x &= \frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{0}\frac{1}{5x^2+4x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{0}\frac{5}{(5x+2)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{\arctan(-3)}^{\arctan 2}\frac{5}{1+\tan^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{5\cos^2\theta} \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{\arctan(-3)}^{\arctan 2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{3\pi}[\arctan 2-\arctan(-3)] \\
&= \frac{4}{3\pi}\arctan\frac{2-(-3)}{1+2\times(-3)} \\
&= \frac{4}{3\pi}\arctan(-1)
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $f(x)$は$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=1$を満たすから

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3\pi}\arctan(-1) &= 1 \\
\arctan(-1) &= \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

となる. よって, 点Qが辺BC上にあるという条件のもとでのXの期待値αは

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \int_{-1}^{0} x f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{0}\frac{x}{5x^2+4x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{0}\frac{5x}{(5x+2)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{\arctan(-3)}^{\arctan 2}\frac{\tan\theta-2}{1+\tan^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{5\cos^2\theta} \\
&= \frac{4}{15\pi}\int_{\arctan(-3)}^{\arctan 2}(\tan\theta-2)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{15\pi}\left[-\ln|\cos\theta|-2\theta\right]_{\arctan(-3)}^{\arctan 2} \\
&= \frac{4}{15\pi}\left[\ln\left|\frac{\cos\arctan(-3)}{\cos\arctan 2}\right|-2(\arctan 2-\arctan(-3))\right] \\
&= \frac{4}{15\pi}\left(\ln\frac{\sqrt{1+2^2}}{\sqrt{1+(-3)^2}}-2\arctan\frac{2-(-3)}{1+2\times(-3)}\right) \\
&= \frac{4}{15\pi}\left(\ln 2^{-\frac{1}{2}}-2\arctan(-1)\right) \\
&= \frac{4}{15\pi}\left(-\frac{1}{2}\ln 2-2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}(\ln 2+3\pi) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

である.

別解

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \int_{-1}^{0} x f(x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_{-1}^{0} \frac{x}{5x^2+4x+1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_{-1}^{-0} \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}+2\right)^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{\pi}{2}+0} \frac{\tan\theta-2}{1+\tan^2\theta} \frac{-1}{(\tan\theta-2)^2\cos^2\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\tan\theta-2} \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\cos^2\theta}{\tan\theta-2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1}{(\tan\theta-2)(1+\tan^2\theta)} (\tan\theta)' \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{15\pi} \int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{5}{4}\pi} \left(\frac{1}{\tan\theta-2} - \frac{\tan\theta+2}{1+\tan^2\theta} \right) (\tan\theta)' \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{15\pi} \int_{-\infty}^{1} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{15\pi} \left[\ln|t-2| - \frac{1}{2}\ln|1+t^2| - 2\arctan t \right]_{-\infty}^{1} \\
&= \frac{4}{15\pi} \left[\ln\frac{|t-2|}{\sqrt{1+t^2}} - 2\arctan t \right]_{-\infty}^{1} \\
&= \frac{4}{15\pi} \left[\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\cdot\frac{5}{4}\pi \right) - \left(\ln 1 - 2\cdot\frac{\pi}{2} \right) \right] \\
&= \frac{4}{15\pi} \left(-\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3\pi}{2} \right) \\
&= -\frac{2}{15\pi}(\ln 2 + 3\pi) \qquad (答)
\end{aligned}
$$

(5)

点Qが辺CA上にあるという条件のもとでのXの期待値をβとおく．直線CAの方程式は$y=(x-1)/2$であるから，この条件のもとでのYの期待値は$(\beta-1)/2$である．三角形ABCは直線$y=x$に関して対称であるので，点Qが辺BC,CA上にあるという条件のもとでのそれぞれの期待値が表す座標は直線$y=x$に関して対称である．すなわち，$(\alpha, 2\alpha+1)$と$(\beta, (\beta-1)/2)$は直線$y=x$に関して対称である．よって

$$
\begin{cases}
\dfrac{(2\alpha+1)+(\beta-1)/2}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\
\dfrac{(2\alpha+1)-(\beta-1)/2}{\alpha-\beta} = -1
\end{cases}
$$
$$
\therefore \beta = 2\alpha+1
$$

となる．ゆえに，求める期待値μは

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{4}\gamma + \frac{\frac{3}{4}\pi}{2\pi}\alpha + \frac{\frac{3}{4}\pi}{2\pi}\beta \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{8}[\alpha + (2\alpha+1)] \\
&= \frac{9\alpha+4}{8} \\
&= -\frac{9}{8}\frac{2}{15\pi}(\ln 2 + 3\pi) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{20} - \frac{3}{20\pi}\ln 2 && \text{(答)}
\end{aligned}
$$

である．

解説

一様分布に従う連続型確率変数を，図形との関係から別の確率変数に変換し，期待値を求める問題です．交点がどの辺上にあるのかという場合分けと条件付き確率を考えることにより，最終的に全体での期待値を求めます．

(1)

交点Qがどの辺上にあるのかについては一様分布に従うΘに依存します．しかし，Qのx座標Xは一様分布に従うわけではありません．

(2)

「三角形ABCは直線$y=x$に関して対称」という但し書きを考慮すると，その直線と辺ABの交点のx座標$1/2$が期待値であることは直感的にわかります．$(0,1)$で定義された確率密度関数が$1/2$に関して対称であるという仮定をおき，期待値を求めると$1/2$であることが示せます．一般的に，(a,b)で定義された確率密度関数$p(x)$がその定義域の中心$x=(a+b)/2$に関して対称であるとき，期待値は$(a+b)/2$となります．

(3)

与えられた公式を用いるだけです．逆正接関数$\mathbf{arctan}$の微分はできるようにしておきましょう．

(4)

積分計算の中での$\mathbf{arctan}$のとりうる値の範囲に注意してください．別解の計算では$\mathbf{arctan}$の値域が設問(3)と同じになるようにしています．
解答の中で$\mathbf{arctan}$の加法定理を用いていますが，この問題では用いなくても$\mathbf{arctan}$の残らない答を求めることができます．

(5)

辺BC上での点Qの期待値と辺CA上での点Qの期待値が直線$y=x$に関して対称であることを利用し，辺CA上での点Qの期待値を求めます．Xの全体の期待値μは，各条件になる確率×各条件での期待値の総和，すなわち

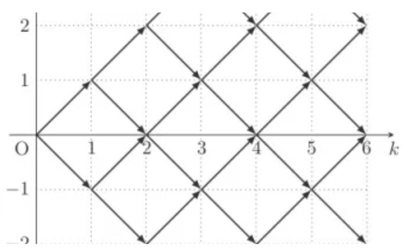
$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_{\partial\triangle ABC} x \frac{\mathrm{d}P(X=x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\text{点Q}\in\text{辺AB}} xP(\text{点Q}\in\text{辺AB})\frac{\mathrm{d}P(X=x|\text{点Q}\in\text{辺AB})}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\text{点Q}\in\text{辺BC}} xP(\text{点Q}\in\text{辺BC})\frac{\mathrm{d}P(X=x|\text{点Q}\in\text{辺BC})}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\text{点Q}\in\text{辺CA}} xP(\text{点Q}\in\text{辺CA})\frac{\mathrm{d}P(X=x|\text{点Q}\in\text{辺CA})}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= P(\text{点Q}\in\text{辺AB})\int_{\text{点Q}\in\text{辺AB}} x\frac{\mathrm{d}P(X=x|\text{点Q}\in\text{辺AB})}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&\quad + P(\text{点Q}\in\text{辺BC})\int_{\text{点Q}\in\text{辺BC}} x\frac{\mathrm{d}P(X=x|\text{点Q}\in\text{辺BC})}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&\quad + P(\text{点Q}\in\text{辺CA})\int_{\text{点Q}\in\text{辺CA}} x\frac{\mathrm{d}P(X=x|\text{点Q}\in\text{辺CA})}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= P(\text{点Q}\in\text{辺AB})E[X|\text{点Q}\in\text{辺AB}] \\
&\quad + P(\text{点Q}\in\text{辺BC})E[X|\text{点Q}\in\text{辺BC}] \\
&\quad + P(\text{点Q}\in\text{辺CA})E[X|\text{点Q}\in\text{辺CA}]
\end{aligned}
$$

となります.

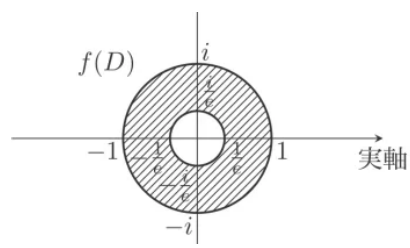
<【院試解答】東京大学大学院 工学系 数学 2020年度 第2問 < https://syrupse.com/archives/672/utokyo-engineering-math-2020-2>

https://syrupse.com/archives/672/utokyo-engineering-math-2020-2>

東京大学大学院工学系研究科の入試過去問の解答例です. この記事では2020（令和2）年度の数学（一般教…



< https://syrupse.com/archives/937/utokyo-engineering-math-2020-6>
【院試解答】東京大学大学院 工学系 数学 2020年度 第6問 < https://syrupse.com/archives/937/utokyo-engineering-math-2020-6>



< https://syrupse.com/archives/131/utokyo-engineering-math-2019-3>
【院試解答】東京大学大学院 工学系 数学 2019年度 第3問 < https://syrupse.com/archives/131/utokyo-engineering-math-2019-3>

//

← 【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第2問 < https://syrupse.com/archives/468/utokyo-ist-math-2019-2>

→ 【院試解答】東京大学大学院 工学系 数学 2020年度 第1問 < https://syrupse.com/archives/620/utokyo-engineering-math-2020-1>

//

© 2020年 シルプス < https://syrupse.com/>

上 ↑