数学 < HTTPS://SYRUPSE.COM/ARCHIVES/CATEGORY/MATHEMATICS>
東京大学大学院情報理工学系研究科 < HTTPS://SYRUPSE.COM/ARCHIVES/CATEGORY/GRADUATE-SCHOOL-ENTRANCE-EXAMINATION-ANSWER/%E6%9D%B1%E4%BA%AC%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E5%A4%A7%E5%AD%A6%E9%99%A2%E6%83%85%E5%A0%B1%E7%90%86%E5%B7%A5%E5%AD%A6%E7%B3%BB%E7%A0%94%E7%A9%B6%E7%A7%91>

【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第1問

作成者: goshouhiro < https://syrupse.com/archives/author/goshouhiro>

2020年4月1日 < https://syrupse.com/archives/380/utokyo-ist-math-2019-1>

コメントはまだありません < https://syrupse.com/archives/380/utokyo-ist-math-2019-1#respond>

東京大学大学院情報理工学系研究科の入試過去問の解答例です．この記事では2019（平成31）年度の数学（一般教育科目）第1問について解答・解説します．問題は研究科のWebページ < https://www.i.u-tokyo.ac.jp/edu/entra/examarchive.shtml> から見ることができます．※この記事は大学院・研究科に認められたものではありません．

目次

解答

(1)

A, Bはユニタリ行列であるので

$$\begin{cases} AA^* = I \\ BB^* = I \end{cases}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}(AB)(AB)^* &= ABB^*A^* \\ &= AIA^* \\ &= AA^* \\ &= I\end{aligned}$$

となる．ゆえに，行列ABもユニタリ行列である．■

(2)

行列Fがユニタリ行列であるとき

$$\begin{aligned}FF^* &= (C + \mathrm{i}D)(C + \mathrm{i}D)^* \\ &= (C + \mathrm{i}D)\left(C^\mathrm{T} - \mathrm{i}D^\mathrm{T}\right) \\ &= CC^\mathrm{T} + DD^\mathrm{T} + \mathrm{i}\left(DC^\mathrm{T} - CD^\mathrm{T}\right) = I\end{aligned}$$

となる．よって，Fがユニタリ行列であるとき

$$\begin{cases} CC^\mathrm{T} + DD^\mathrm{T} = I \\ \qquad\quad DC^\mathrm{T} = CD^\mathrm{T} \end{cases}$$

となる．一方，行列Gが直交行列であるとき

$$GG^\mathrm{T} = I$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
GG^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \\ -D^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} CC^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} & CD^{\mathrm{T}} - DC^{\mathrm{T}} \\ DC^{\mathrm{T}} - CD^{\mathrm{T}} & DD^{\mathrm{T}} + CC^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であるので，Gが直交行列であるとき

$$
\begin{cases} CC^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} = I \\ \qquad\quad DC^{\mathrm{T}} = CD^{\mathrm{T}} \end{cases}
$$

となる．ゆえに，行列Fがユニタリ行列であることと行列Gが直交行列であることは同値である．∎

(3)

与行列をMとおくと，固有方程式は

$$
\det(\lambda I - M) = 0
$$

である．ここで

$$
\det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} & \lambda - \frac{\mathrm{i}}{2} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} & \lambda-\frac{\mathrm{i}}{2} \end{vmatrix} \quad (\text{第}1\text{行}+\text{第}3\text{行，第}2\text{行}+\text{第}4\text{行}) \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} & \lambda-\frac{\mathrm{i}}{2} \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} & 1 & \lambda-\mathrm{i} \end{vmatrix} \quad (\text{第}3\text{列-第}1\text{列，第}4\text{列-第}2\text{列}) \\
&= (\lambda-1)(\lambda-\mathrm{i})\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{第}4\text{列の余因子展開}) \\
&= (\lambda-1)(\lambda-\mathrm{i})\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{第}1\text{行の余因子展開}) \\
&= (\lambda-1)(\lambda-\mathrm{i})(\lambda^2-1) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

となる．よって，Mの固有値λは

$$
\begin{aligned}
(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-\mathrm{i}) &= 0 \\
\lambda &= -1, 1, \mathrm{i} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

(4)

$$
QQ^* = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1k} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ q_{j1} & & q_{jk} & & q_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nk} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_{11} & \cdots & \bar{q}_{k1} & \cdots & \bar{q}_{n1} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \bar{q}_{1j} & & \bar{q}_{kj} & & \bar{q}_{nj} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \bar{q}_{1n} & \cdots & \bar{q}_{kn} & \cdots & \bar{q}_{nn} \end{pmatrix}
$$

であるから，QQ^*の(j,k)成分p_{jk}は

$$
\begin{aligned}
p_{jk} &= \sum_{l=1}^{n} q_{jl}\bar{q}_{kl} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(j-1)(l-1)}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{i}(k-1)(l-1)}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(j-k)(l-1)}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となる．$j \neq k$のとき

$$
\begin{aligned}
p_{jk} &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \left[\exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(j-k)}{n}\right)\right]^{l-1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{\exp(2\pi \mathrm{i}(j-k)) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(j-k)}{n}\right) - 1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{1-1}{\exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(j-k)}{n}\right) - 1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

であり，$j = k$のとき

$$
\begin{aligned}
p_{jk} &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \mathrm{e}^0 \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \\
&= 1
\end{aligned}
$$

である．よって

$$QQ^* = I$$

であるから行列Qはユニタリ行列である．■

(5)

2次の複素正方行列Uを

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} UU^* &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \overline{\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}} & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．Uがユニタリ行列であるとき

$$UU^* = I$$

であるから

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{I}$$
$$|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \tag{II}$$
$$\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0 \tag{III}$$

となる．また，Uの行列式が1であるとき

$$\det U = \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{IV}$$

となる．式(I)より，α, βについて

$$\text{Case 1:}\begin{cases}|\alpha| = \cos\theta_1 \\ |\beta| = \sin\theta_1\end{cases}, \text{Case 2:}\begin{cases}|\alpha| = \sin\theta_1 \\ |\beta| = \cos\theta_1\end{cases}$$

となるので

$$\text{Case 1:}\begin{cases}\alpha = \exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta_1 \\ \beta = \exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta_1\end{cases}, \text{Case 2:}\begin{cases}\alpha = \exp(\mathrm{i}\psi_1)\sin\theta_1 \\ \beta = \exp(\mathrm{i}\psi_2)\cos\theta_1\end{cases}$$

とおける．ただしθ_1, ψ_1, ψ_2は実数である．同様に，γ, δについて，式**(II)**より

$$\text{Case 3:}\begin{cases}\gamma = \exp(\mathrm{i}\psi_3)\sin\theta_2 \\ \delta = \exp(\mathrm{i}\psi_4)\cos\theta_2\end{cases}, \text{Case 4:}\begin{cases}\gamma = \exp(\mathrm{i}\psi_3)\cos\theta_2 \\ \delta = \exp(\mathrm{i}\psi_4)\sin\theta_2\end{cases}$$

とおける．ただしθ_2, ψ_3, ψ_4は実数である．式**(IV)**が恒等的に成り立つように(Case 1, Case 3)の場合を考えると

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \exp(\mathrm{i}(\psi_1+\psi_4))\cos\theta_1\cos\theta_2 - \exp(\mathrm{i}(\psi_2+\psi_3))\sin\theta_1\sin\theta_2$$

となる．

$$\begin{cases}\theta_1 = -\theta_2 (=\theta) \\ \psi_1 = -\psi_4 \\ \psi_2 = -\psi_3\end{cases}$$

とすると

$$\begin{cases}\alpha = \exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta \\ \beta = \exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta \\ \gamma = -\exp(-\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta \\ \delta = \exp(-\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta\end{cases} \tag{V}$$

となり

$$\begin{aligned}\alpha\delta - \beta\gamma &= \exp(0)\cos^2\theta + \exp(0)\sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

となるので式**(IV)**を満たす．また，このとき

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta} &= \exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta\cdot(-\exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta) \\ &\quad+\exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta\exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

となり，式**(III)**を満たす．よって，式**(V)**のとき行列Uは行列式が1である2次のユニタリ行列となる．特に，$\psi_1=\psi_2=\psi$のとき

$$U=H=\begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\psi)\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi)\sin\theta \\ -\exp(-\mathrm{i}\psi)\sin\theta & \exp(-\mathrm{i}\psi)\cos\theta\end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，行列式が1である2次のユニタリ行列はHで表される一形式を持つ．

(6)

式**(I)**,**(II)**,**(III)**を満たすUを求めればよい．(Case 1, Case 3)のとき，式**(I)**,**(II)**を満たし

$$\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta}=\exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta_1\exp(-\mathrm{i}\psi_3)\sin\theta_2+\exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta_1\exp(-\mathrm{i}\psi_4)\cos\theta$$

となる．式**(III)**より$\theta_1=-\theta_2(=\theta)$とすると

$$\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta}=[\exp(\mathrm{i}(\psi_2-\psi_4))-\exp(\mathrm{i}(\psi_1-\psi_3))]\cos\theta\sin\theta=0$$

であるから

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}(\psi_2-\psi_4))-\exp(\mathrm{i}(\psi_1-\psi_3))&=0\\ \exp(\mathrm{i}(\psi_2-\psi_4))&=\exp(\mathrm{i}(\psi_1-\psi_3))\\ \psi_2-\psi_4&=\psi_1-\psi_3+2m\pi\quad(m\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

となる．特に，$m=0$とすると

$$\psi_1+\psi_4=\psi_2+\psi_3$$

となるので，これを

$$\phi=\psi_1+\psi_4=\psi_2+\psi_3$$

とおくと

$$\begin{cases}\psi_3 = \phi - \psi_2 \\ \psi_4 = \phi - \psi_1\end{cases}$$

となる．よって，このとき

$$\begin{cases}\alpha = \exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta \\ \beta = \exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta \\ \gamma = -\exp(\mathrm{i}(\phi - \psi_2))\sin\theta = -\exp(\mathrm{i}\phi)\bar{\beta} \\ \delta = \exp(\mathrm{i}(\phi - \psi_1))\cos\theta = \exp(\mathrm{i}\phi)\bar{\alpha}\end{cases}$$

となる．ゆえに，2次のユニタリ行列の一般形の一つは

$$U = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta \\ -\exp(\mathrm{i}(\phi - \psi_2))\sin\theta & \exp(\mathrm{i}(\phi - \psi_1))\cos\theta \end{pmatrix}$$

である．

解説

ユニタリ行列に関する問題です．

(1)

ユニタリ行列の積もユニタリ行列であることを示す問題です．

(2)

$C = \cos\Theta, D = \sin\Theta$とすると

$$F = \exp(i\Theta), G = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

なります．Gは回転行列の形をしていますが，Θが実対称行列であるときGは直交行列となります．一般的に，任意のユニタリ行列Uはあるエルミート行列Hを用いて

$$U = \exp(iH)$$

と表せるので，このエルミート行列を実対称行列に限定した場合にまつわる問題です．

(3)

4次のユニタリ行列の固有値を求める問題です．4次の行列式を求める簡単な公式はないので，行列式の性質を用いて0となる成分を増やし，余因子展開を行い，小行列式を計算します．

(4)

行列Qがユニタリ行列であることを示すため，QQ^*が単位行列となることを示します．つまり，QQ^*の(j,k)成分がクロネッカーのデルタδ_{jk}であることを示します．ちなみに，(3)の行列は$n=4$のQとなっています．

(5)

解答では(6)での一般化を考慮して「行列式が1である2次のユニタリ行列の一つとしてHが導出される」という方向性で展開しましたが，「Hは行列式が1である2次のユニタリ行列である」ことを示すだけでよいでしょう．なぜなら，Hは一形式であって一般形ではないからです．なお，解答で示した式$\mathbf{(IV)}$は行列式が1である2次のユニタリ行列の一般形（任意のそれを表せる形）となっています．ちなみに，行列式が1のn次ユニタリ行列のなす群を特殊ユニタリ群$\mathrm{SU}(n)$といいます．

(6)

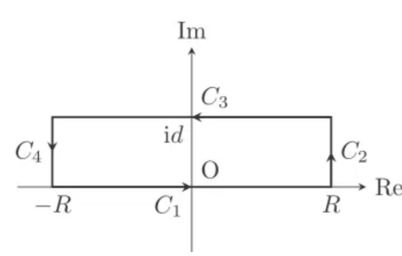
任意の2次のユニタリ行列を表せる形を求めます．任意のユニタリ行列の行列式の絶対値は1ですので，行列式が1である2次のユニタリ行列の一般形$\mathbf{(V)}$の行列式の絶対値が1となるようにしたものとして求める一般形を考えることもできます．求める一般形は解答で示したものの他に

$$U=\exp\left(\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\right)\begin{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta \\ -\exp(-\mathrm{i}\psi_2)\sin\theta & \exp(-\mathrm{i}\psi_1)\cos\theta\end{pmatrix}$$

などがあります．

<【院試解答】東京大学大学院工学系 数学 2020年度 第2問 <https://syrupse.com/archives/672/utokyo-engineering-math-2020-2>

<【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第3問 <https://syrupse.com/archives/514/utokyo-ist-math-2019-3>



72/utokyo-engineering-math-2020-2>
東京大学大学院工学系研究科の入試過去問の解答例です．この記事では2020（令和2）年度の数学（一般教…

https://syrupse.com/archives/514/utokyo-ist-math-2019-3>
東京大学大学院情報理工学系研究科の入試過去問の解答例です．この記事では2019（平成31）年度の数学…

< https://syrupse.com/archives/468/utokyo-ist-math-2019-2>
【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第2問 < https://syrupse.com/archives/468/utokyo-ist-math-2019-2>

//

← 【院試解答】東京大学大学院 工学系 数学 2019年度 第6問 < https://syrupse.com/archives/361/utokyo-engineering-math-2019-6>

→ 【院試解答】東京大学大学院 情報理工学系 数学 2019年度 第2問 < https://syrupse.com/archives/468/utokyo-ist-math-2019-2>

//

上↑