

健康规划方案：科学减肥

学号：20123211 姓名：高雨晴 日期：2022年11月25日

目录

1 问题重述	2
1.1 引言	2
1.2 问题背景与问题提出	3
2 问题分析	4
3 模型假设与符号说明	5
4 模型的建立和求解	6
4.1 准备工作：摄入与消耗	6
4.2 第一阶段：少吃不动	6
4.2.1 总计划	6
4.2.2 饮食计划：多目标线性规划方法	7
4.3 第二阶段：少吃多动	9
4.4 维持体重：多动才能多吃	10
5 模型评价与改进	10
5.1 模型评价	10
5.2 模型的改进	11
5.2.1 灵敏性分析：代谢系数的选择	11
5.2.2 模型改进：代谢热量的另一种计算方式	12
参考文献	13
6 附录：MATLAB代码	14

1 问题重述

1.1 引言

近几十年来，我国居民的生活水平发生了翻天覆地的变化，居民的生活方式也发生了迅速的转变。日益常见的高脂肪、高碳水化合物膳食方式以及体力活动强度的下降，使肥胖率在我国城乡各类人群中迅速上升，成为了一种重要的流行病。联合国世界卫生组织曾颁布人体体重指数（缩写：BMI），其计算方法为体重（单位：kg）除以身高（单位：m）的平方。通常规定BMI在18.5至25为正常，25-30为超重，超过30为肥胖。

1989年，中国BMI超重人口只有1.67亿，2009年，这一数字增加到了5.29亿，每天增加4.9万人，年均增长率为10.8%，甚至超过了同期GDP的增速 [1]。肥胖是心脑血管疾病、癌症、糖尿病等慢性疾病的重要诱因，被世界卫生组织列为威胁人类健康的十大疾病之一，当然，越来越多的人逐渐意识到了肥胖对健康的危害，开始注意饮食习惯，积极参与户外运动。在大学生群体中，减肥不失为一种潮流，不过更多的人体重远未达到威胁健康的程度，而是为了更加美观的外形而减肥。



图 1: 肥胖对一个人气质的影响往往是毁灭性的（图片来自网络）

有需求就有市场，有市场往往就有骗局。大量的减肥机构和减肥商品出现，然而事实上，很多减肥机构提供的服务和减肥产品要么是“智商税”，要么是安慰剂，

如“推拿减肥法”、“减肥果冻”等。这些服务和产品忽略了减肥最基本的原理，即减重的多少取决于能量摄入和能量消耗产生的缺口。本文将基于此原理构建数学模型，以虚拟人物小高为例，制定合理的减肥方案，并对减肥方案进行探讨和分析。

1.2 问题背景与问题提出

问题背景

个人信息 现收集到小高的个人信息如表1.2所示。

表 1: 小高的个人信息			
姓名	高某某（小高）	身高	163 cm
性别	女	体重	65 kg
年龄	21 岁	目标体重	50 kg
每日摄入能量	约2000 kcal	每日饮食计划支出	30 元

食物信息 现收集到小高爱吃的几种菜品信息如表1.2所示。

表 2: 小高爱吃的食物信息			
菜名	价格（人民币/100g）	热量 ¹ （kcal/100g）	喜爱程度（0-5）
日本豆腐肥牛	3.25	151	4.7
烧鸭饭	2.2	157	3.9
照烧鸡排饭	3	172	4.9
双拼炸鸡饭	2.8	183	3.4
兰州拉面	3	136	3.5
香肉拌饭	2.75	257	4.3
烤鸭	5	379	4.0
五谷渔粉	3	169	3.4
焦溜肥肠	3.25	176	3.5
轻食沙拉（外卖）	8.8	90	5.0

¹数据来自<https://www.boohiee.com/food>

运动信息 小高几乎任何常见的体育项目都不会，且平时不运动，故只展示三种常见的运动，如表1.2所示。

表 3: 小高能接受的运动信息

运动名称	消耗热量 ² (kcal/h·kg)
散步	1.7
快走	5.8
慢跑	7.0

问题提出

安排一个两阶段计划，使得小高能够以相对少的时间和金钱成本达到减肥目标。

第一阶段 若要求在不运动的情况下每周减肥0.25kg，每周吸收热量逐渐减少直至达到下限，试安排第一阶段的减肥计划。

第二阶段 若要加快进程，第二阶段增加运动，试安排第二阶段的减肥计划。

第三阶段 若达到目标后需要维持体重，试给出方案。

2 问题分析

减肥最基本的原理是：减去的体重所转化的热量等于消耗的热量与摄入的热量之差。则可以根据这项原则建立差分方程模型，反映每周结束时的体重与每周开始时体重的关系。通过该模型，我们可以进一步地通过已计划的要求（每周需要减去多少kg体重、目标体重是多少等），获得我们制定计划所需的一些数值（如每周需要摄入多少热量等）。而至于计划的进一步制定，我们可以从消耗的热量与摄入的热量两方面着手，分开分析。

²数据来自网络.

人类摄入的热量只来源于食物。在第一阶段，由于我们已知每周需要减去的体重，因此不难通过差分方程模型求出每周需要摄入的热量。由此，我们可以对食物的各项指标（热量、价格、偏爱）进行分析，通过线性规划的方法作出决策。

而人类消耗的热量可以分划为很多具体的类别。本问题中，为了简化模型，我们认为人体消耗的热量只归为两类：运动消耗和身体代谢消耗。根据假设，身体代谢消耗是和体重线性相关的，因此我们可以根据体重稳定时的差分方程来确定这一线性系数，确定后便于整个模型（当然这是不够合理的，进一步的讨论见灵敏性分析：代谢系数的选择）。由于代谢消耗热量是我们无法人为控制的，因此剩下的热量窗口，我们需要通过安排运动计划来填补。

3 模型假设与符号说明

模型假设

假设一 每摄入8000kcal会增加1kg体重。

假设二 代谢和运动引起的体重减少正比于体重。

假设三 为简化模型，小高每天只吃一种食物（不考虑早中晚饭的区别），每天只选择一种运动方式。

假设四 为了安全与健康，每周体重减少不宜超过1.5kg，每周吸收热量不要小于10000kcal.

定义与符号说明

符号	定义与说明说明（单位）
$W(k)$	第 k 周体重（kg）
Cal_{in}	热量摄入（kcal）
Cal_{out}	热量消耗（kcal）
α	热量-体重转换系数
β	代谢消耗系数
R_i	食物种类
x_i	第 i 种食物的份数（ $\cdot 100g$ ）

符号	定义与说明说明（单位）
C	周计划摄入热量（kcal）
e_i	每份 R_i 所含热量（kcal）
p_i	每份 R_i 价格（元）
h_i	每份 R_i 满足度
γ	每小时每千克体重消耗热量（kcal）
t	每周运动时间（h）
β'	热量消耗系数

4 模型的建立和求解

4.1 准备工作：摄入与消耗

我们用 $W(k)$ 表示小高第 k 周的体重， Cal_{in} 和 Cal_{out} 分别代表热量的摄入和消耗。由假设一，定义热量体重转换系数 $\alpha = \frac{1}{8000}(\text{kg/kcal})$ 。于是第 $k+1$ 周的体重为

$$W(k+1) = W(k) + \alpha(Cal_{in} - Cal_{out}) \quad (1)$$

其中每周热量的摄入全部来自食物。每周能量的消耗分为两部分：运动带来的能量消耗 Cal_{sports} 以及新陈代谢的基础消耗 Cal_{meta} 。定义代谢消耗系数 β ，由假设二有

$$Cal_{meta}(k) = \beta W(k) \quad (2)$$

假设小高每周摄入量为 Cal_{in0} ，消耗量为 Cal_{out0} 时体重维持在 W_0 不变，则根据

$$W_0 = W_0 + \alpha(Cal_{in0} - Cal_{out0}) \quad (3)$$

根据问题背景，小高平时不运动，因此 $Cal_{out0} = \beta W_0$ ，由此得到 β 的计算公式

$$\beta = \frac{\alpha Cal_{in0}}{W_0} \quad (4)$$

将表1.2中数据代入计算，最后得到小高的代谢系数 $\beta = 0.024$ 。

4.2 第一阶段：少吃不动

4.2.1 总计划

本计划第一阶段的目标是：在不运动的情况下，体重每周减少0.25kg，直至 $Cal_{in}(k)$ 减至下限10000kcal。设第 k 周结束时，摄入的热量为 $Cal_{in}(k)$ 。则根据关系 $W(k) - W(k+1) = 0.25$

1) = 0.25和(1)有

$$Cal_{in}(k+1) = \frac{\beta W(k) - 0.25}{\alpha} \quad (5)$$

又因为 $W(k) = W_0 - 0.25k$ ，上式可写为

$$Cal_{in}(k+1) = \frac{\beta W_0}{\alpha} - \frac{0.25 + \beta k}{\alpha} \quad (6)$$

当 $Cal_{in}(k+1) \leq 10000$ 时停止迭代，经计算³有 $k = 3$ 。即第一阶段耗时3周，每周减重0.25kg，在第4周结束后，小高的体重为64.25kg。

4.2.2 饮食计划：多目标线性规划方法

在总计划中，我们得到了第一阶段每周小高需要摄入的能量总值如表4.2.2所示，接下来我们需要结合小高的个人喜好以及经济实力，为小高制定一个易于坚持的食谱。根据表1.2，建立一多目标线性规划模型。

表 5: 第一阶段每周摄入热量

周数	计划摄入热量 (kcal)
第一周	10480
第二周	10240
第三周	10000

称100g食物为"一份"。根据成年女性通常的食量，推荐小高每日摄入食物的总重量不超过1kg。每日从表4.2.2中自上而下地选择第 i 种食物 R_i 若干份作为一天的饮食，记作 x_i ，其中 $i = 1, 2, \dots, 10$ 。在本周计划摄入热量 C 已经确定的情况下，出于健康考虑，我们不妨设每天摄入的热量一样多，即每天的热量摄入均为 $C/7$ 。我们可以构造以下的目标函数：

● **价格目标函数** 记每份 R_i 中含有热量 e_i ，构成热量列向量 \mathbf{E} 。价格为 p_i ，构成价格

³计算过程见附录“phase1.m”

列向量 \mathbf{P} . 则价格目标函数为:

$$\begin{aligned} \min \quad & z_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i p_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} x_i e_i = C/7 \\ \sum_{i=1}^{10} x_i p_i \leq 30 \\ \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 10 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned}$$

● **满足度目标函数** 我们将喜爱度量化为每份 R_i 带给小高的满足度 h_i , 构成满足度列向量 \mathbf{H} . 则满足度目标函数为:

$$\begin{aligned} \max \quad & z_2 = \sum_{i=1}^{10} x_i h_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} x_{ij} e_i = C/7 \\ \sum_{i=1}^{10} x_i p_i \leq 30 \\ \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 10 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned}$$

解多目标线性规划问题通常的方法有线性加权法、极大极小法、理想点法等。在本问题中, 我们尝试使用线性加权法求解。

线性加权法 该方法将目标函数通过效用函数建立相关关系, 即为不同的目标函数赋权, 从而使多目标规划问题转化为单目标规划问题。权值的确定有很多种, 例如专家打分法、容限法和加权因子分解法等。由于该饮食计划是为小高制定, 故我们使用“专家打分法”是最合适的: 在小高看来, 少花钱和吃好的重要性可以三七开, 则我们可以为两个目标函数分别赋权 $\omega_1 = 0.3, \omega_2 = 0.7$. 在目标函数按权加和之前, 我们需要消除两个指标 \mathbf{P} 和 \mathbf{H} 的量纲影响, 即进行标准化。一个比较常用的标准化方法是“min-max标准化法”, 以 \mathbf{P} 为例, 对其中任意元素 p_i , 有

$$p_i^* = \frac{p_i - p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}} \quad (7)$$

于是问题转化为：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 0.3 \sum_{i=1}^{10} x_i p_i^* - 0.7 \sum_{i=1}^{10} x_i h_i^* \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} x_i e_i = C/7 \\ \sum_{i=1}^{10} x_i p_i \leq 30 \\ \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 10 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned}$$

经计算⁴，在第一周至第三周为小高设计的食谱如下表所示。

表 6: 第一至三周每天的饮食计划

周数	计划热量 (kcal)	饮食计划
I	10480	50.7 g 日本豆腐肥牛, 800 g 照烧鸡排饭, 49.4 g 轻食沙拉
II	10240	21.7 g 日本豆腐肥牛, 800 g 照烧鸡排饭, 60.2 g 轻食沙拉
III	10000	793.9 g 照烧鸡排饭, 70.3 g 轻食沙拉

4.3 第二阶段：少吃多动

本计划第二阶段的目标是：加快减重速度，每周保持 $Cal_{in} = 10000$ kcal（事实上，在上一节的计算中，第三周的热量摄入恰巧是10000 kcal），配合运动，直至体重减至50kg。假设每小时每千克体重消耗的热量为 γ （单位：kcal），每周运动的时间为 t （单位：h），则根据假设二，有

$$Cal_{sports}(k) = \alpha \gamma t \cdot W(k) \quad (8)$$

不妨定义热量消耗系数 $\beta' = \beta + \alpha \gamma t$ 。根据(1)有递推关系

$$W(k+1) = (1 - \beta')W(k) + \alpha Cal_{in} \quad (9)$$

由式(9)可推出第 $k+n$ 周和第 k 周体重的关系为

$$\begin{aligned} W(k+n) &= (1 - \beta')^n W(k) + \alpha Cal_{in} [1 + (1 - \beta') + \dots + (1 - \beta')^{n-1}] \\ &= (1 - \beta')^n [W(k) - \frac{\alpha Cal_{in}}{\beta'}] + \frac{\alpha Cal_{in}}{\beta'} \end{aligned} \quad (10)$$

⁴计算过程见附录“foodchoice.m”

取 $\gamma t = 72$ ，这相当于每周跑步10.3小时或快走12.4小时，或散步42.4小时。则 $\beta' = 0.024 + 0.009 = 0.033$ 。令 $W(k + n) = 50$ ，经计算⁵有 $n = 23.1642$ ，即第二阶段耗时23周。

4.4 维持体重：多动才能多吃

达到目标体重后，为了使小高能够保持在这个体重不变，她必须相对之前作出改变——要么比之前吃得少，要么比之前运动量多。根据小高提供的信息，她没有运动的习惯，想必在我们的减肥计划执行过程中，大量的运动也为她带来了极大的痛苦。那么，如果小高在减肥成功后再也不运动了，我们可以根据公式

$$W(k + 1) = W(k) + \alpha Cal_{in} - \beta' W(k) \quad (11)$$

来计算小高此后每周能够摄入的热量 Cal_{in} 。由于此时的任务是维持体重，故 $W(k + 1) = W(k) = W(= 50\text{kg})$ 。于是有

$$Cal_{in} = \frac{\beta' \cdot W}{\alpha} \quad (12)$$

若不运动，则 $\beta' = \beta = 0.024$ ， $Cal_{in} = 9600 \text{ kcal}$ 。按天计算，则小高每天大约只能吃1371 kcal，换算成小高爱吃的烤鸭，则每天只能吃360 g左右。这显然是令人难以接受的，并且也不符合假设四的要求，因此我们不推荐小高在减肥成功后完全不运动。

若保持第二阶段的运动量，则 $\beta' = 0.033$ ， $Cal_{in} = 13200 \text{ kcal}$ 。按天计算，小高每天可以吃大约1885 kcal，这是符合一个成年女性的正常摄入量的。当然，小高也可以根据自身意愿合理安排运动，按照我们的模型灵活调节运动和摄入，以达到维持体重的目的。

5 模型评价与改进

5.1 模型评价

模型的优点 差分方程模型在首先保证了符合科学规律的情况下，使各阶段的求解易于计算，较准确地模拟了减肥的过程。

⁵计算过程见附录“phase2.m”

模型的缺点 模型的众多假设事实上是过于简化的。并且，以食谱规划为例，我们在考虑为减肥中的人配餐时，除了热量之外，也要考虑其各类营养素含量，因为如果长时间无法全面摄入人体所需营养元素，可能会对身体造成伤害，进而影响身体的代谢，这会大大影响模型的稳定性。而模型本身对代谢系数是敏感的，我们将在下一节详细讨论这一点。

5.2 模型的改进

5.2.1 灵敏性分析：代谢系数的选择

在准备工作：摄入与消耗中，我们定义了代谢系数 β ，并且有计算公式(4)。但该计算公式是非常粗糙的，因为人体的代谢会受到很多因素影响，而并非只与体重成正比。举个简单的例子，同样身高体重的相扑选手和每天抱着薯片在电视机前躺一天的肥宅，他们的代谢水平是天差地别的。而同一个人哪怕一辈子都保持相同的身材，他在青壮年时期的代谢水平和老年时期的代谢水平也相差显著。



图 2: 相扑运动员每天要摄入18500-19000千卡的热量，比小高减肥前一周吃得都多⁶

而我们在建立模型时使用的许多计算公式均对 β 的取值敏感，如式(6)和式(10)。我们以第二阶段为例进行灵敏性分析。在第二阶段：少吃多动中我们使 β' 从0.033以0.001步

⁶图片来自<https://thegate12.com/cn/article/6>

长增长至0.044，共变化33%。第二阶段需要的天数 n 对应的变化如图所示。

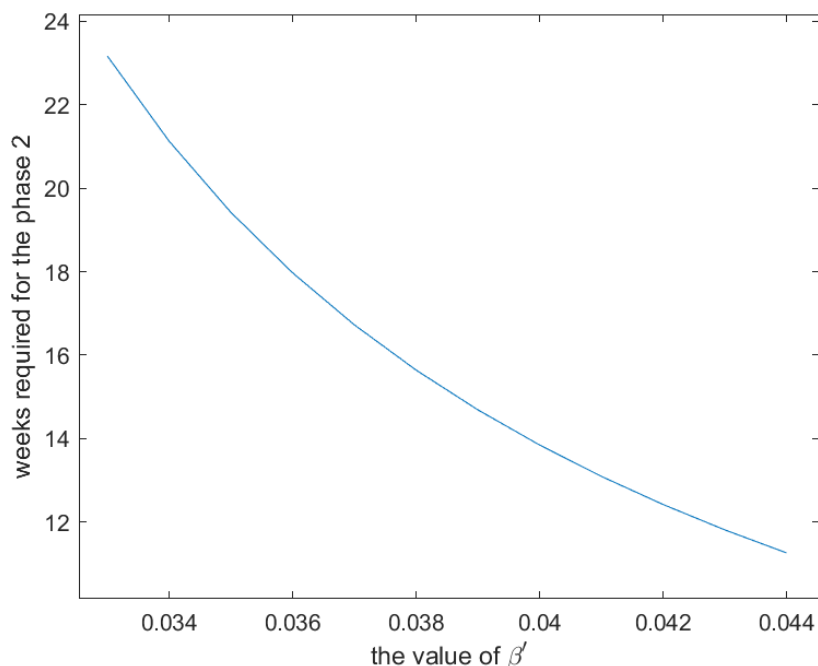


图 3: 第二阶段天数 n 随 β' 的变化

由图可以直观地看出，当代谢系数 β' 小范围变化时，第二阶段所需天数便发生明显变化，当其变化33%时，第二阶段所需天数几乎缩短至原来的一半。因此，对模型的改进可以从代谢系数着手，通过更加科学的计算方式来确定代谢的消耗。

5.2.2 模型改进：代谢热量的另一种计算方式

根据Harris和Benedict的研究 [2]，成年女性每日的新陈代谢导致的能量消耗 BMR （单位：kcal）可以由下式计算得出：

$$BMR(k) = 665.0955 + 9.5634W(k) + 1.8496H - 4.6756A \quad (13)$$

其中， H 为身高，单位cm。 A 为年龄，单位岁。由(13)可得

$$Cal_{meta}(k) = 7 \times BMR(k) \quad (14)$$

代入表1.2中数据，可以计算出小高在减肥前的每日新陈代谢能量消耗是1490 kcal. 小高在减肥过程中体重逐渐降低， BMR 也随之线性变化，这也是符合假设二的，但由于其考虑了性别、年龄、身高等因素的影响，比起前文的定义更加易于解释。我

们再编写程序⁷测试引入 BMR 后模型的敏感性。根据公式(1)，改进后第二阶段的体重计算公式为

$$W(k+1) = W(k) + \alpha(Cal_{in} - 7 \cdot (868.3927 + 9.5634\theta W(k)) - \gamma t W(k)) \quad (15)$$

其中， BMR 中的身高、年龄变量已代入数据计算， θ 是变化系数。由于在上一节中，我们使 β' 总共变化了33%，为了便于对照，我们使 θ 从100%以3%的步长变化至133%，其余变量取值均与上一节相同，最后考察第二阶段减肥所需时间如图所示。

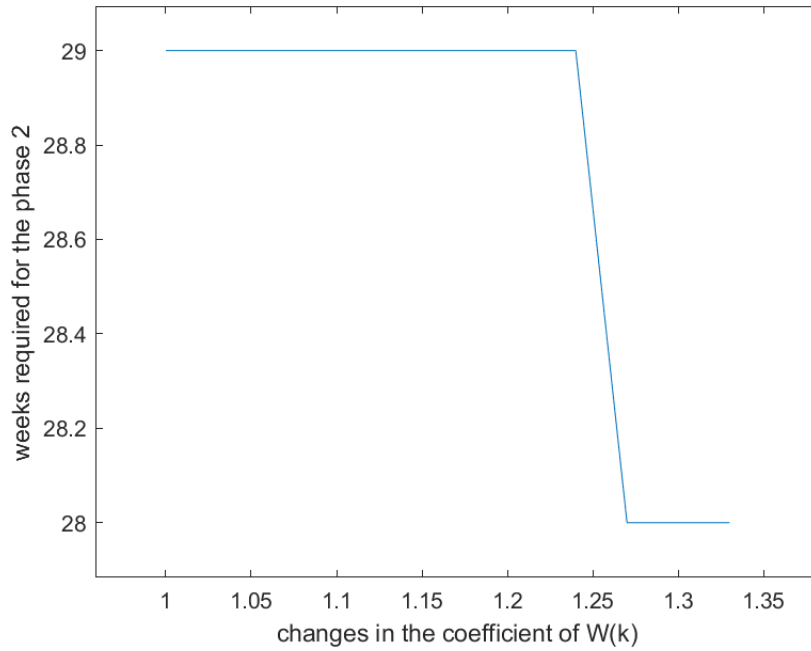


图 4: 第二阶段天数 n 随 BMR 中体重系数的变化

可见在引入 BMR 后，系数小范围变化时，第二阶段所需天数没有发生改变，而系数变化33%，第二阶段所需天数也只减少了1天。因此我们可以认为，使用 BMR 改进模型能够使模型的稳定性更好。

参考文献

- [1] 倪国华, 张璟, and 郑风田, “中国肥胖流行的现状与趋势,” 中国食物与营养, vol. 19, no. 10, pp. 70–74, 2013.

⁷见附录 “sensitivity2.m”

- [2] C. Henry, “Basal metabolic rate studies in humans: measurement and development of new equations,” *Public health nutrition*, vol. 8, no. 7a, pp. 1133–1152, 2005.

6 附录：MATLAB代码

Listing 1: **phase1.m**

```
1 beta=0.024; % metabolic coefficient
2 wk=65; % weight in week 0
3 ck=14000; % cal_in in week 0
4 k=0; % week counter
5 alpha=1/8000;
6 while ck>10000
7     %ck=((beta.*wk)-0.25)*8000;
8     ck=(beta./alpha).*wk-(1/alpha).*(0.25+beta.*k);
9     ck % show ck in week k
10    wk=wk-0.25;
11    k=k+1;
12 end
13 k % show k=3
```

Listing 2: **foodchoice.m**

```
1 clear;clc
2 load("H.mat");
3 load("P.mat");
4 load("E.mat");
5 Hstar=normalize(H,'range');
6 Pstar=normalize(P,'range');
7 C=[10480,10240,10000];
8 x=zeros(10,3);
9 %% linear weighting method
10 for i=1:3
11     Aeq=E';
```

```

12     beq=C(i)./7;
13     A=[P';ones(1,10)];
14     b=[30;10];
15     f=0.3.*Pstar'-0.7.*Hstar';
16     x(:,i)=linprog(f,A,b,Aeq,beq,zeros(10),8.*ones(1,10));
17 end

```

Listing 3: **phase2.m**

```

1 betaprime=0.033; % cal_out coefficient
2 wk=64.25; % weight in week 3
3 ck=10000; % cal_in since week 3
4 alpha=1/8000;
5 wn=50; % targeted weight in week 3+n
6 num=(wn-(alpha.*ck./betaprime))./(wk-(alpha.*ck./betaprime
   ));
7 den=1-betaprime;
8 n=log(num)./log(den) % show n=23.1642

```

Listing 4: **sensitivity.m**

```

1 % the phase 2 is taken as an example
2 % betaprime is increased from 0.033 to 0.044, with length
   step of 0.001
3 betaprime=0.033:0.001:0.044; % cal_out coefficient
4 wk=64.25; % weight in week 3
5 ck=10000; % cal_in since week 3
6 k=4; % week counter beginning with k=3
7 alpha=1/8000;
8 wn=50; % targeted weight in week 3+n
9 n=zeros(1,12);
10 for i=1:12
11     num=(wn-(alpha.*ck./betaprime(i)))./(wk-(alpha.*ck./
       betaprime(i)));
12     den=1-betaprime(i);

```

```

13     n(i)=log(num)./log(den);
14 end
15 plot(betaprime,n)
16 xlabel('the value of \beta^{\prime}')
17 ylabel('weeks required for the phase 2')

```

Listing 5: sensitivity2.m

```

1 % let the coefficient of W(k) in bmr model change from 0%
  to 33%
2 gammat=72; % gammat refers to calorie consumption per kilo
  through sports
3 calin=10000; % cal_in since week 3
4 alpha=1/8000;
5 ncounter=zeros(1,12);
6 bmr=zeros(12,25);
7 for i=1:12
8     wk=64.25; % weight in week 3
9     j=0;
10    n=0;
11    while wk>50
12        j=j+1;
13        bmr(i,j)=868.3927+(1+0.003.*(i-1)).*9.5634.*wk; %
          Basal Metabolic Rate
14        calout=7.*bmr(i,j)+72.*wk; % cal_out
15        wk=wk+alpha.*(calin-calout);
16        n=n+1;
17    end
18    ncounter(i)=n;
19 end
20 plot(1.00:0.03:1.33,ncounter)
21 xlabel('changes in the coefficient of W(k)')
22 ylabel('weeks required for the phase 2')

```