高等数理统计期末考试回忆

时间：2025 年 12 月 30 日晚 18:30-21:30 (2025 年秋季学期期末)

题目回忆整理

Question1

1. 设 $Y_i = x_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n$, 其中 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$，$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是给定的 $n \times p$ 维矩阵，$\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \sigma^2 > 0$ 均为未知参数。设 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$。
(1) 利用 Basu 定理证明 $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1}X'Y$ 和 $Y'(I - X(X'X)^{-1}X')Y$ 独立；
(2) 设 $\boldsymbol{l}$ 是一个给定的 p 维常数向量，求 $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ 的 UMVUE；
(3) 求 σ^2 的 UMVUE。

Question2

2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n\, i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ 均为未知参数。
(1) 求 (μ, σ) 的 Fisher 信息矩阵；
(2) 设 η_p 是该分布的 p 分位数，求 η_p 的 U.E. 的方差的 C-R 下界；
(3) 求 η_p 的 MLE 估计 $\widehat{\eta_p}$；
(4) 证明 $\sqrt{n}(\widehat{\eta_p} - \eta_p) \xrightarrow{D} N(0, c^2)$ 并写出 c^2 的具体形式（用一至四阶矩 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 及 μ, σ 表示，尽可能化简)。

Question3

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n\, i.i.d. \sim Poi(\theta)$，未知参数 θ 的先验分布为 $Ga(\alpha, \beta)$，其中 $\alpha, \beta > 0$。
(1) 求 θ 的后验分布；
(2) 设损失函数为 $L(\theta, a) = (\frac{\theta - a}{\theta})^2$，求 θ 的一致最小风险无偏估计；
(3) 在（2）的条件及结论下，求相应的风险函数。

Question4

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布，其中 X_1 的分布密度为 $f(x;\theta) = \theta x^{-2} I_{[\theta,\infty)}(x)$，$\theta \in \mathbb{R}$。设有假设检验问题 $H_0: \theta \leq 1\ v.s. H_1: \theta > 1$。
(1) 给出针对上述假设检验问题显著性水平为 α 的 UMPT;
(2) 计算检验的势函数；
(3) 给出检验的 p 值（只要给出具体形式，不必计算)；
(4) 若假设检验问题为 $H_0: \theta = \theta_0\ v.s. H_1: \theta \neq \theta_0$, 给出针对这一问题的显著性水平为 α 的 UMPUT（只要给出条件和检验函数形式，不必计算)。

Question5

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同服从分布密度为 $f(x;\theta) = \theta X^{-\theta} I_{(0,1)}(x)$ 的分布，其中 $\theta > 0$ 是未知参数。
(1) 求 θ 的矩估计和最大似然估计；
(2) 令 $Y_i = -\ln X_i, T = -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i$，给出 Y_i 的分布密度和 T 服从的分布；
(3) 计算 θ 的 UMVUE 的方差，并说明其是否达到 C-R 下界?
(4) 给出 θ 的枢轴统计量，并计算 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间。(疑)