

Лабораторная работа №2
«Итерационный степенной метод.
Итерационный метод вращений»

Студент:

Мирончик Юрий Александрович, 3 курс,
9 группа

Преподаватель: Полевиков Виктор Кузьмич,
Доцент кафедры вычислительной математики

Минск, 2023

Постановка задачи

1. Найти собственные значения матрицы итерационным методом вращений. Критерий остановки $\max_{j \neq 0} |a_{ij}^{(k)}| = |a_{lm}^{(k)}| \leq \varepsilon$
2. Найти максимальное по модулю собственное значение матрицы и соответствующее ему собственный вектор итерационно-степенным методом. Критерий остановки итераций: $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < 10^{-9}$

Теория

Итерационный степенной метод

Т. к. матрица A симметрична, то считаем, что наша матрица A обладает полной системой n линейно-независимых собственных векторов

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения
матрицы A

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ – соответствующие им линейно-независимые векторы

Алгоритм итерационно-степенного метода:

Итерационный алгоритм для вычисления максимального по модулю собственного значения:

$$\lambda_1^{(k+1)} = \frac{(\vec{y}^{(k+1)}, \vec{y}^{(k)})}{(\vec{y}^{(k)}, \vec{y}^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку матрица A симметрична, то собственные векторы образуют ортогональный базис:

$$\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j (\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В таком случае алгоритм будет иметь следующий вид

$$(\vec{y}^{(k)}, \vec{y}^{(k)}) = \beta_{11} \lambda_1^{2k} [1 + O((\lambda_2/\lambda_1)^{2k})], \quad (\vec{y}^{(k+1)}, \vec{y}^{(k)}) = \beta_{11} \lambda_1^{2k+1} [1 + O((\lambda_2/\lambda_1)^{2k+1})].$$

Следовательно:

$$\frac{(\vec{y}^{(k+1)}, \vec{y}^{(k)})}{(\vec{y}^{(k)}, \vec{y}^{(k)})} = \lambda_1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k},$$

Критерий остановки итераций: $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < 10^{-9}$

Итерационный метод вращений

$\Lambda = U^{-1}AU$ - с помощью подобный преобразований матрица A может быть приведена к диагональному виду

U – ортогональная матрица, т.е. $U^{-1} = U$

Λ - диагональная матрица, элементами которой являются собственные векторы матрицы A , т.е.

$$\Lambda = U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим в качестве ортогональной матрицы U матрицу вращений:

$$U = U_{lm}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos \varphi & \cdots & -\sin \varphi & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & \sin \varphi & \cdots & \cos \varphi & \cdots \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

l -ая строка m -ая строка

0 l -ый столбец m -ый столбец 1

Где матрица U совпадает с единичной матрицей E всюду, кроме элементов

$$\begin{array}{ll} u_{II} = \cos \varphi & u_{Im} = -\sin \varphi \\ u_{mI} = \sin \varphi & u_{mm} = \cos \varphi \end{array}$$

Алгоритм метода вращений перехода от k -ой итерации к $k+1$ -ой итерации

- 1) Определяются индексы $l = l^{(k)}$ и $m = m^{(k)}$ (как индексы максимального по модулю недиагонального элемента матрицы $A^{(k)}$)

т.е. : $|a_{lm}^{(k)}| = \max_{1 \leq i \leq n, j > i} |a_{ij}^{(k)}| = |a_{ml}^{(k)}|$.)

- 2) Вычисляется угол $\varphi^{(k)}$ по формуле

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \arg \tan \frac{2a_{lm}^{(k)}}{a_{ll}^{(k)} - a_{mm}^{(k)}} \quad l = l^{(k)}, \quad m = m^{(k)} \quad . \text{ и}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right)}, \quad \sin \varphi = \operatorname{sign} p \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right)}$$

- 3) По найденным значениям $l^{(k)}$, $m^{(k)}$ и $\varphi^{(k)}$ строится матрица вращения $U^{(k)} = U_{l^{(k)}m^{(k)}}(\varphi^{(k)})$.
- 4) Новое итерационное приближение $A^{(k+1)}$ определяется по формуле $A^{(k+1)} = (U^{(k)})^T A^{(k)} U^{(k)}$.
- 5) Для окончания итерационного процесса предпочтительно

использовать апостериорную оценку $\max_{j \neq i} |a_{ij}^{(k)}| = |a_{lm}^{(k)}| \leq \varepsilon$.

Если это условие выполняется, то диагональные элементы матрицы $A^{(k)}$ являются собственными значениями матрицы $A^{(k)}$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-9}$

Листинг программы

```
import numpy as np

def rotation(A, tol=1e-4, max_iter=1000):
    n = len(A)
    V = np.identity(n)

    for _ in range(max_iter):
        max_val = 0
        p, q = 0, 0
        for i in range(n - 1):
            for j in range(i + 1, n):
                if abs(A[i, j]) > max_val:
                    max_val = abs(A[i, j])
                    p, q = i, j

        if max_val < tol:
            break

    theta = 0.5 * np.arctan2(2 * A[p, q], A[q, q] - A[p, p])
    R = np.identity(n)
    R[p, p] = np.cos(theta)
    R[q, q] = np.cos(theta)
    R[p, q] = -np.sin(theta)
    R[q, p] = np.sin(theta)
    A = np.dot(np.dot(R.T, A), R)
    V = np.dot(V, R)

    eigenvalues = np.diag(A)
```

```
return eigenvalues
```

```
def power_iteration(A, tol=1e-10, max_iter=1000):
```

```
    n = len(A)
```

```
    b = np.random.rand(n)
```

```
    b /= np.linalg.norm(b)
```

```
    for _ in range(max_iter):
```

```
        b_new = np.dot(A, b)
```

```
        eigenvalue = np.dot(b_new, b)
```

```
        b_new /= np.linalg.norm(b_new)
```

```
        if np.linalg.norm(b_new - b) < tol:
```

```
            break
```

```
        b = b_new
```

```
    return eigenvalue, b_new
```

Вывод программы

```
10.00000  2.00000  3.00000  4.00000  5.00000  6.00000  7.00000  8.00000  9.00000
 2.00000  9.00000  0.00000  1.00000  2.00000  3.00000  4.00000  5.00000  6.00000
 3.00000  0.00000  8.00000  7.00000  6.00000  5.00000  4.00000  3.00000  2.00000
 4.00000  1.00000  7.00000  7.00000  8.00000  9.00000  0.00000  1.00000  2.00000
 5.00000  2.00000  6.00000  8.00000  6.00000  4.00000  2.00000  0.00000  1.00000
 6.00000  3.00000  5.00000  9.00000  4.00000  3.00000  1.00000  2.00000  0.00000
 7.00000  4.00000  4.00000  0.00000  2.00000  1.00000  5.00000  6.00000  7.00000
 8.00000  5.00000  3.00000  1.00000  0.00000  2.00000  6.00000  7.00000  8.00000
 9.00000  6.00000  2.00000  2.00000  1.00000  0.00000  7.00000  8.00000  9.00000
Собственные значения Итерационным методом вращений:
[40.16254539 20.54708065 -6.73493365  7.49272846  4.33021581 -3.16311175
 2.11040199  0.57617083 -1.32109772]
Максимальное собственное значение Итерационно степенным методом:
40.16254538900412
Соответствующий собственный вектор Итерационно степенным методом:
[0.47193201 0.2578642  0.29869187 0.29957904 0.26836336 0.26655244
 0.32031716 0.35857062 0.39695934]
```

