Задачи для подготовки к экзамену по линейной алгебре и аналитической

1. Решить уравнение
$$AX = B$$
, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Решить уравнение
$$AX = B$$
, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Решить уравнение
$$AX = B$$
, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решить уравнение
$$AX = B$$
, где $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить уравнение
$$XA = B$$
, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Решить уравнение
$$XA = B$$
, где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Решить уравнение
$$XA = B$$
, где $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

8. Даны две матрицы
$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&4&-5\end{pmatrix}$$
 и $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\\3&2\end{pmatrix}$. Найти сумму элементов, стоящих на главной диагонали матрицы $\mathcal{C}=A^{\mathrm{T}}\cdot B^{\mathrm{T}}$.

9. Даны две матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
 и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти сумму элементов, стоящих на главной диагонали матрицы $C = A^{\mathsf{T}} \cdot B^{\mathsf{T}}$.

10. Даны две матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$
 и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти сумму элементов, стоящих на главной диагонали матрицы $C = B^T \cdot A^T$.

11. Даны две матрицы
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$
 и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. Найти сумму элементов, стоящих на главной диагонали матрицы $C = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

12. Даны две матрицы
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$
 и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти сумму элементов, стоящих на главной диагонали матрицы $C = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

- 13. Найти угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$.
- 14. Найти угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями: $\frac{x-8}{4} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+8}{0}$.
- 15. Найти угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = t 3 \\ y = -9 \\ z = t + 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -4t + 7. \\ z = 4t + 9 \end{cases}$$

16. Найти угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = -2t - 21, \\ z = t - 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -t + 7 \\ y = 2t + 12. \\ z = t - 8 \end{cases}$$

- 17. Найти угол между плоскостями 3x 2y + z 10 = 0; 2x y + 4z + 5 = 0.
- 18. Найти угол между плоскостями -2x + z + 12 = 0; 3x + y 7 = 0.
- 19. Найти угол между плоскостями x + 3y 2z + 12 = 0; x 4y + z 9 = 0.
- 20. Найти угол между плоскостями 5x + 2y z 25 = 0; 3x 7y + z + 38 = 0.
- 21. Найти угол между прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-12}{-1}$ и плоскостью 2x 3y 2z 9 = 0.
- 22. Найти угол между прямой $\frac{x+7}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{-1}$ и плоскостью -x + 4y + z + 15 = 0.
- 23. Найти угол между прямой $\begin{cases} x=2t+12 \\ y=-23 \\ z=t-3 \end{cases}$ и плоскостью 3x-y+z+17=0.
- 24. Найти угол между прямой $\begin{cases} x=-3t-5\\ y=t+7\\ z=4t+2 \end{cases}$ и плоскостью -x+2y+2z+13=0.
- 25. Найти объем тетраэдра ABCD с вершинами A(0; 1; -1), B(3; 2; -3), C(3; 3; 1), D(1; 2; 5).
- 26. Найти объем тетраэдра ABCD с вершинами A(-1; 4; 7), B(3; -2; 0), C(1; 1; -1), D(3; 4; 2).
- 27. Найти объем тетраэдра ABCD с вершинами A(-1; 4; 7), B(6; -6; 0), C(3; 3; -3), D(3; 4; 2).
- 28. Найти объем тетраэдра ABCD с вершинами A(0;3;6), B(3;-6;0), C(1;-1;-3), D(3;5;2).
- 3. Найти объем тетраэдра ABCD , построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=3j+6k$, $\overrightarrow{AC}=3i-6j$, $\overrightarrow{AD}=i-j-3k$.
- 29. Найти объем тетраэдра ABCD , построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=i+4j+6k$, $\overrightarrow{AC}=2i+7j-2k$, $\overrightarrow{AD}=4i+3j+k$.
- 30. Найти площадь \triangle ABC, если даны координаты вершин A(3;5;8), B(4;6;9), C(5;7;9). В ответе указать площадь в квадрате.
- 31. Найти площадь \triangle ABC, если даны координаты вершин A(1;2;1), B(3;4;5), C(2;-3;0). В ответе указать площадь в квадрате.

- 32. Найти площадь \triangle ABC, если даны координаты вершин A(-2; -1; 0), B(4; -1; 5), C(6; 9; 0). В ответе указать площадь в квадрате.
- 33. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = i 4j + 6k$, $\vec{b} = -i + 3j + 6k$. В ответе указать площадь в квадрате.
- 34. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2i + 6j k$, $\vec{b} = 2j + k$. В ответе указать площадь в квадрате.
- 35. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=-i+4j+k$, $\vec{b}=-3i-2j$. В ответе указать площадь в квадрате.
- 36. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(2; -3; 0), B(1; 6; 2), C(3; 0; 1).
- 37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;3;1), B(2;4;0), C(1;1;1).
- 38. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1; 4; 5), B(0; -1; 3), C(2; -3; 1).
- 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(2;1;8), перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , если B(2;0;4), C(5;-4;9).
- 39. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(1; -5; 0), перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , если B(3; 2; -1), C(5; 6; -2).
- 40. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку A(2,5,-1) перпендикулярно плоскости 2x-3y+z-1=0
- 41. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку A(-1,2,-8) перпендикулярно плоскости x+4y+7z-12=0
- 42. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(4,-3,-2) параллельно прямой $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-y-2z+5=0 \end{cases}$
- 43. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-1,2,0) параллельно прямой -x+5y-z=0 (2x+3y-2z+21=0)
- 44. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(5,2,3) и прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{3}$
- 45. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1,2,5) и прямую $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{4}$
- 46. Составить уравнение плоскости, проходящей через две прямые $\begin{cases} x=2t \\ y=t+1 \end{cases}$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{-1}$.
- 47. Составить каноническое уравнение эллипса с большой полуосью, равной 2 и фокусами $F_1(\sqrt{2},0)$ и $F_1(-\sqrt{2},0)$.
- 48. Составить каноническое уравнение эллипса с малой полуосью, равной 4 и фокусами $F_1(2\sqrt{5},0)$ и $F_1(-2\sqrt{5},0)$.
- 49. Составить каноническое уравнение эллипса с большой полуосью, равной 5 и фокусами $F_1(0,3)$ и $F_1(0,-3)$.
- 50. Составить каноническое уравнение эллипса с малой полуосью, равной 3 и фокусами $F_1(0, \sqrt{7})$ и $F_1(0, -\sqrt{7})$.

- 51. Составить каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью, равной 3 и фокусами $F_1(-4,0)$ и $F_1(4,0)$.
- 52. Составить уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой, до двух заданных точек $F_1(-4,0)$ и $F_1(4,0)$ есть величина постоянная, равная 6.
- 53. Составить уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой, до двух заданных точек $F_1(0, -\sqrt{5})$ и $F_1(0, \sqrt{5})$ есть величина постоянная, равная 2.
- 54. Составить уравнение параболы с фокусом в точке F(3,0) и уравнением директрисы x=-3
- 55. Составить уравнение параболы с фокусом в точке F(2,2) и уравнением директрисы x=6
- 56. Составить уравнение параболы с фокусом в точке F(5,1) и уравнением директрисы x=-3
- 57. Дана парабола $(x-1)^2 = 12(y-6)$. Найти уравнение директрисы.
- 58. Дана парабола $(x+5)^2 = -8(y-1)$. Найти фокус. В ответе указать сумму координат.
- 59. Выполнить действие $\frac{2+3i}{2+i} 2i$. Дать ответ в алгебраической форме.
- 60. Выполнить действие $\frac{5i}{3-4i}+i^3$. Дать ответ в алгебраической форме.
- 61. Выполнить действие $\frac{7-i}{1+3i} + 5i$. Дать ответ в алгебраической форме.
- 62. Выполнить действие $\frac{4+3i}{1+2i}-i^2$. Дать ответ в алгебраической форме.
- 63. Выполнить действие $\frac{5+9i}{-1-i}+i^2$. Дать ответ в алгебраической форме.
- 64. Выполнить действие $\frac{4-8i}{1+i}+i^2$. Дать ответ в алгебраической форме.
- 65. Определить тип поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + 2z + 4 = 0$
- 66. Определить тип поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2x 4y 2z + 1 = 0$
- 67. Определить тип поверхности $x^2 + 2y^2 4z^2 + 2x 4y 4 = 0$
- 68. Определить тип поверхности $-x^2 + y^2 + z^2 6x + 2y + z 10 = 0$
- 69. Определить тип поверхности $-x^2 + y^2 + z^2 6x + 2y + z + 5 = 0$
- 70. Определить тип поверхности $x^2 + y^2 2x + 2y + z 6 = 0$
- 71. Найти проекцию точки М (-1;2;3) на плоскость 2x + y + z 5 = 0. В ответе записать координаты точки.
- 72. Найти проекцию точки M (3;2;-5) на плоскость -2x + y 4z 2 = 0. В ответе записать координаты точки.
- 73. Найти проекцию точки М (1;-1;1) на плоскость -6y + 4z + 1 = 0. В ответе записать координаты точки.
- 74. Найти проекцию точки M (-2;3;-1) на плоскость -2x + y 2z = 0. В ответе записать координаты точки.
- 75. Найти проекцию точки M (2;-3;1) на плоскость -2x + y 2z 1 = 0. В ответе записать координаты точки.

76. Найти проекцию точки M (-3;0;0) на плоскость x - 3y + 2z + 17 = 0. В ответе записать координаты точки.

77. Найти проекцию точки M (-1;1;-1) на прямую $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{1}$. В ответе записать координаты точки.

78. Найти проекцию точки M (0;-3;1) на прямую $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{3}$. В ответе записать координаты точки.

79. Найти проекцию точки M (-2;3;0) на прямую $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+1}{-3}$. В ответе записать координаты точки.

80. Найти проекцию точки M (2;-4;1) на прямую $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-2}{-1}$. В ответе записать координаты точки.

81. Найти проекцию точки M (0;1;-3) на прямую $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+7}{0}$. В ответе записать координаты точки.

82. Найти проекцию точки M (2;-2;1) на прямую $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+6}{-2}$. В ответе записать координаты точки.

83. Указать верные свойства векторного произведения:

1.
$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b}$$
.

2.
$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, a]$$

3.
$$[a+b,c]=[a,c]+[b,c]$$
.

4.
$$\left[\overrightarrow{\lambda a}, \overrightarrow{b}\right] = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right], \ \lambda \in \mathbf{R}$$
.

84. Указать верные свойства векторного произведения:

1.
$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \mid \mid \vec{b}$$
.

2.
$$[a,b] = -[b,a]$$
.

3.
$$[\overrightarrow{a+b}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] \cdot [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$$
.

4.
$$[\lambda a, b] = [a, \lambda b] = \lambda [a, b], \lambda \in \mathbf{R}$$
.

85. Укажите тройки векторов с противоположной ориентацией:

1.
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$$

2.
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

3.
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

4.
$$(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

86. Задано уравнение плоскости Ax + By + Cz + D = 0. Выберите верные утверждения:

- 1. Если D=0, то уравнение Ax + By + Cz = 0 задает плоскость, проходящую через начало координат.
- 2. Если C=0, D=0, то уравнение Ax + By = 0 задает плоскость проходящая через ось Oz.
- 3. Если B=0, C=0, D=0 то уравнение Ax = 0 задает плоскость, совпадающую с плоскостью Oxz.
- 4. Если A=0, B=0, D=0 то уравнение Cz = 0 задает плоскость, совпадающую с плоскостью Oyz.

87. Задано уравнение плоскости Ax + By + Cz + D = 0. Выберите верные утверждения:

- 1. Если D=0, то уравнение Ax + By + Cz = 0 задает плоскость, проходящую через ось Ox.
- 2. Если C=0, D=0, то уравнение Ax + By = 0 задает плоскость проходящая через плоскость Оху.
- 3. Аналогично, если B = 0, A = 0, то уравнение задает плоскость, параллельную плоскости Оху.
- 4. Если A=0, C=0 то уравнение задает плоскость, параллельную плоскости Охг.

88. Указать верные утверждения:

- 1. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.
- 2. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.
- 3. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

89. Указать верные утверждения:

- 1. Гиперболой называется множество всех точек M(x;y) плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.
- 2. Гиперболой называется множество всех точек M(x;y) плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.
- 3. Гиперболой называется множество всех точек M(x;y) плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

- 90. Указать верные утверждения:
 - 1. Параболой называется множество всех точек M(x; y) плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки F этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до прямой d, называемой директрисой, не проходящей через F.
 - 2. Параболой называется множество всех точек M(x; y) плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки F этой плоскости, называемой фокусом, больше расстояния до прямой d, называемой директрисой, не проходящей через F.
 - 3. Параболой называется множество всех точек M(x; y) плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки F этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до прямой d, называемой директрисой, проходящей через F.
- 91. Укажите верные утверждения, если заданы комплексные числа z = x + iy и $\bar{z} = x iy$.
 - $1. \quad \overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2$
 - 2. $z + \overline{z} = Re z \in R$
 - 3. $z \overline{z} = 2 \operatorname{Im} z \in C$
 - 4. $z \cdot \overline{z} = x^2 v^2$
 - 5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- 92. Укажите верные утверждения, если заданы комплексные числа z = x + iy и $\bar{z} = x iy$.
 - 1. $\overline{z_1} + \overline{z_2} = z_1 z_2$
 - 2. $z + \overline{z} = 2 Re z \in R$
 - 3. $z \overline{z} = Im z \in C$
 - 4. $z \cdot \overline{z} = x^2 + v^2$
 - 5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$
- 93. Укажите верные утверждения, если заданы комплексные числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$.:
 - 1. $z_1z_2 = (x_1x_2 y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
 - 2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$
 - 3. $|z| = \sqrt{x^2 y^2}$
 - 4. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1).$
 - 5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$
- 94. Комплексные числа заданы в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 =$ $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Укажите верные утверждения:

 - 1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ 2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 \varphi_2))$
 - 3. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

 - 4. $cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2i}$ 5. $sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} e^{-i\varphi}}{2i}$

95. Определить вид системы линейных алгебраических

уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2\\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3\\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5\\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

Указать номер правильного утверждения.

- 1) система совместная определенная;
- 2) система совместная неопределенная;
- 3) система однородная несовместная;
- 4) система однородная определенная;
- 5) система несовместная.
- 96. Определить вид системы линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 6x_2 x_3 = 25 \end{cases}$

Указать номер правильного утверждения.

- 1) система совместная определенная;
- 2) система совместная неопределенная;
- 3) система однородная несовместная;
- 4) система однородная определенная;
- 5) система несовместная.
- 97. Определить вид системы линейных алгебраических

уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Указать номер правильного утверждения.

- 1) система совместная определенная;
- 2) система совместная неопределенная;
- 3) система однородная несовместная;
- 4) система однородная определенная;
- 5) система несовместная.