Оглавление

1. Алгебра событий. Комбинаторика

Случайные события. Аксиомы вероятностей. Вероятностные схемы. Классическое и статистическое определения вероятности. Действия над событиями. Элементы комбинаторики и применение их для нахождения вероятностей случайных событий.

1.1. Алгебра событий

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайного события***.

Определение 1.1. ***Случайное событие*** *это подмножество множества элементарных исходов случайного эксперимента.*

Далее вводится понятие вероятностного пространства, и строится математически строгая теория вероятностей.

Вероятностное пространство.

Рассматрим конечное или счетное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \leqslant +\infty$. Каждому из элементов ω_i любой природы, ставится в соответствие неотрицательное число P_i, такое, что $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i = 1$. Элементы ω_i называются *элементарными исходами*.

Случайное событие это любое подмножество A множества Ω, $A \subset \Omega$.

Например: $A = \varnothing, A = \{\omega_1\}, A = \{\omega_2, \omega_7\}, A = \Omega$.

Вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P_i.$$

Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами: A,B,C,. . ., X, Y, Z.

Всякое осуществление комплекса условий, при которых изучается конкретное случайное событие, будем называть опытом или *испытанием.*

Определение 1.2. *Событие называется* ***достоверным*** *(в дальнейшем Ω), если оно обязательно появится в результате данного испытания.*

Определение 1.3. *Событие называется* ***невозможным*** *(в дальнейшем $\varnothing$),если оно не может появится в результате данного испытания.*

Замечание 1.1. *Часто в литературе достоверное событие обозначают буквой U, а невозможное —* $\boldsymbol{V}$.

Определение 1.4. *Два события A и B называются* ***несовместными****, если они не могут появиться в одном испытании. Если событий больше двух, они могут быть попарно несовместными, если любые два из них несовместны.*

Определение 1.5. ***Противоположным*** *событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в не появлении события A.*

Определение 1.6. ***Суммой*** *двух событий $A+B$ называется событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.*

Т.е. наступает событие A или B или оба одновременно.

Определение 1.7. ***Произведением*** *двух событий $A \cdot B$ называется событие, состоящее в наступлении каждого из этих событий.*

Т.е. наступают оба события одновременно.

Определение 1.8. *n событий $A_1, A_2, \ \ldots, A_n$ образуют* ***полную группу****, если в результате испытания обязательно появится одно из них.*

Следовательно,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$$

Отметим, что события A и $\overline{A}$ несовместны и образуют полную группу.

Пример 1.1. *Событие A означает, что хотя бы один из шести проверяемых двигателей неисправен, событие B – все двигатели исправны. Что означают события $A+B, AB$?*

◀ Здесь событие $\overline{A}$ означает, что все двигатели исправны, т.е. $\overline{A} = B$. Следовательно, A и B представляют собой противоположные события, для которых $A+B=\Omega, AB=\varnothing$. ▶

Пример 1.2. *Пусть событие A — при аварии сработал первый сигнализатор, событие B — сработал второй сигнализатор. Опишите события:*

$$A+B,\ AB,\ A\overline{B},\ \overline{AB},\ A\overline{B}+\overline{A}B.$$

◀ Сумма событий $A+B$ означает, что при аварии сработал либо первый сигнализатор, либо второй, либо оба. Событие AB – сработали оба сигнализатора одновременно; $A\overline{B}$ означает, что первый сигнализатор сработал, а второй нет; $\overline{AB}$ – не сработали оба сигнализатора. $A\overline{B}+\overline{A}B$ – сработал один сигнализатор, первый или второй. ▶

Пример 1.3. *Доказать, что: а)* $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$*, б)* $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$*.*

◀ а) Событие $\overline{A}\,\overline{B}$ означает непоявление событий: ни A, ни B. Противоположное событие $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$ состоит в том, что хотя бы одно из событий A или B имеет место, а это и есть сумма событий $A+B$; следовательно, $\overline{A}\cdot\bar{B} = \overline{A+B}$.

б) Событие AB состоит в совместном появлении событий A и B; событие $\overline{AB}$ состоит в не появлении хотя бы одного из этих событий A, B или в появлении хотя бы одного из событий $\overline{A}, \overline{B}$, а это равносильно $\overline{A} + \overline{B}$. ▶

Пример 1.4. *Событие A состоит в том, что хотя бы один из имеющихся десяти цехов не выполняет план; событие B состоит в том, что цехов, не выполняющих план, среди них не менее двух. Описать события: а) $\overline{A}$ и $\overline{B}$, б)$A+B$, в)$A\overline{B}$, г)$\overline{A}B$.*

◀ а) $\overline{A}$ — все цеха выполняют план, $\overline{B}$ — цехов, не выполняющих план, один или нет ни одного; б) так как наступление события B означает также наступление события A, то $A+B = A$; в) один цех не выполняет план; г) $\overline{A}B = \varnothing$, т.к. события $\bar{A}$ и B несовместны. ▶

Пример 1.5. *Из множества супружеских пар наудачу выбирается одна. Событие A — мужу больше 30 лет, событие B — муж старше жены, событие C — жене больше 30 лет. Что означают события: ABC, $A\overline{B}$, $A\overline{B}C$?*

◀ ABC — оба супруга старше 30 лет, причём муж старше жены. $A\overline{B}$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены. $A\overline{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, но муж не старше своей жены. ▶

Пример 1.6. *Пусть A, B, C — три произвольных события. Что означают следующие события:*

а) $A+B+C$, б) $AB+AC+BC$, в) ABC, г) $AB\overline{C}$,

д) $A\overline{B}\,\overline{C}$, е) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, ж) $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$,

з) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, и) $A+B+C-ABC$?

◀ а) Произошло по крайней мере одно из трёх событий; б) произошли по крайней мере два события из трёх; в) произошли все три события; г) произошли A и B, а событие C не произошло; д) произошло A, а события B и C не произошли; е) ни одно событие не произошло; ж) произошло только одно событие; з) произошли только два события; и) произошло не более двух событий.

Если рассматривать событие A как попадание в область A, событие $\overline{A}$ как непопадание в область A и ввести аналогичные обозначения для событий B и

C, то рассмотренные события можно представить, как попадание в области, заштрихованные на рис. 1.

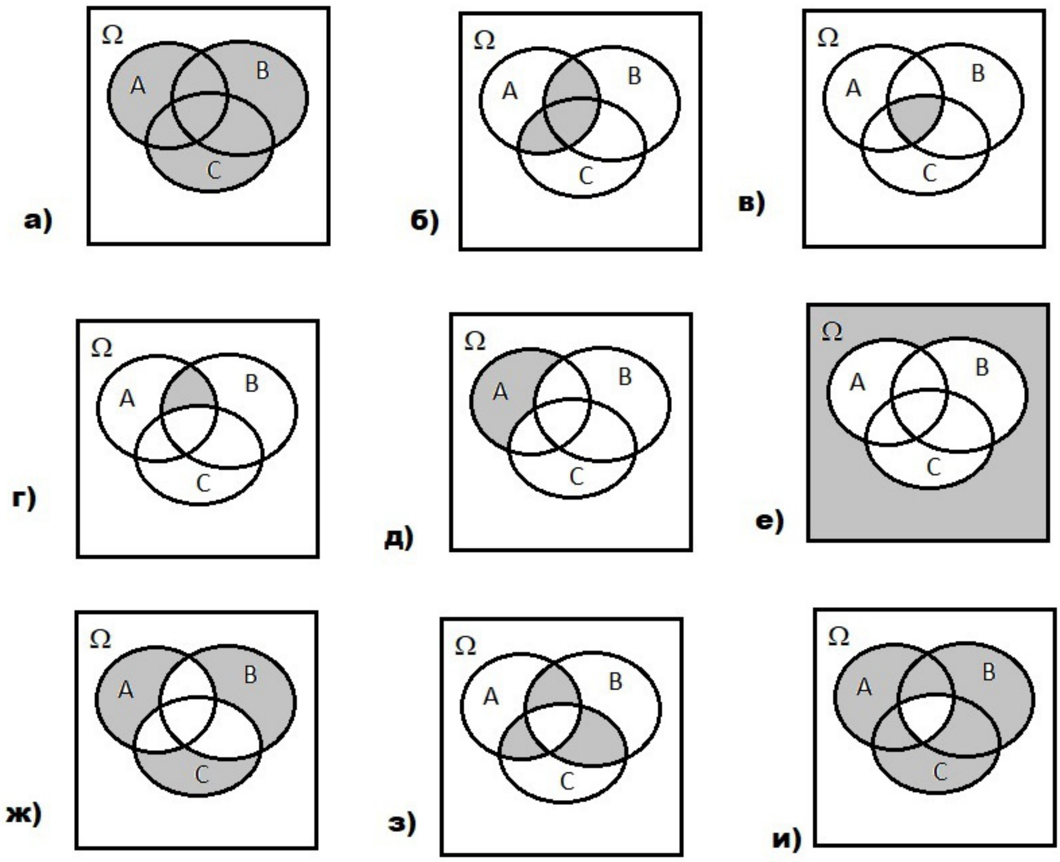

Рисунок 1. *Геометрическая иллюстрация операций над событиями*

Пример 1.7. *Доказать, что события* $A, \overline{A}B, \overline{A+B}$ *образуют полную группу попарно несовместных событий.*

◀Учитывая, что $\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B}$, будем рассматривать события $A, \overline{A}B, \overline{A}\overline{B}$. Их сумма

$$A + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} = A + \overline{A}(B + \overline{B}) = A + \overline{A}\Omega = A + \overline{A} = \Omega,$$

а произведения

$$A \cdot \overline{A}B = (A\overline{A}) \cdot B = \varnothing B = \varnothing, \quad A \cdot \overline{A}\overline{B} = (A\overline{A})\overline{B} = \varnothing\overline{B} = \varnothing,$$

$$\overline{A}B \cdot \overline{A}\overline{B} = (\overline{A}\overline{A})(B\overline{B}) = \overline{A}\varnothing = \varnothing.$$

События с данными свойствами по определению образуют полную группу попарно несовместных событий. ▶

1.2. Относительная частота

Определение 1.9. *Пусть в N испытаниях событие A появилось M раз. Относительной частотой или просто частотой события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

Определение 1.10. *Условной частотой события A при условии появления B $P^*(A/B) = P^*_B(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события A и B, к числу испытаний, в которых появилось событие B.*

Если в N испытаниях событие B появилось L раз, а событие A появилось совместно с событием B K раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}\ , \tag{1.2}$$

$$P^*(B) = \frac{L}{N}\ , \tag{1.3}$$

$$P^*(AB) = \frac{K}{N}\ . \tag{1.4}$$

Теорема 1.1 (умножения частот)**.** *Относительная частота произведения двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{1.5}$$

Если сомножителей больше двух, то:

$$\begin{gathered} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_k/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{k-1}). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Пример 1.8. *На складе 120 компьютеров. При проверке оказалось, что только 105 из них установлена операционная система Linux. Найти относительную частоту установки операционной системы Linux.*

◀Согласно формуле (1.1), частота установки операционной системы Linux равна:

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{105}{120} = \frac{7}{8} \approx \mathbf{0{,}875}.\blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P^*(A) = 7/8 \approx 0{,}875.}$

Пример 1.9. *Брошены 100 раз две игральные кости. При этом совпадение числа очков было 15 раз, а шестерка на обеих гранях костей выпала 4 раза. Определить условную частоту выпадения шестерок в случае совпадения числа очков.*

◀ Обозначим: событие A — появление шестерок на обеих гранях, событие B — совпадение числа очков. Тогда событие A появилось $K = 4$ раза, а событие B произошло $L = 15$ раз.

Следовательно, $P^*(A) = \dfrac{6}{100}$ и $P^*(B) = \dfrac{15}{100}$. Согласно формуле (1.2), условная частота появления двух шестерок равна:

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L} = \frac{4}{15} \approx \mathbf{0{,}267}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P^*(A/B) = 4/15 \approx 0{,}267.}$

Пример 1.10. *Из 300 произведённых изделий 20 обладают дефектом α, причём 5 из них имеют также дефект β. Найти относительную частоту появления изделия с обоими дефектами.*

◀Пусть событие A — появление дефекта β, а событие B — дефекта α. Тогда по формуле (1.5) относительная частота произведения этих двух событий определится как

$$P^*(AB) = \frac{20}{300} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{60} \approx \mathbf{0{,}017}.$$

Ответ: $\boxed{P^*(AB) = 1/60 \approx 0{,}017.}$ ▶

1.3. Элементы комбинаторики

Для непосредственного подсчёта вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если элемент a из некоторого конечного множества можно выбрать n_1 способами, а элемент b можно выбрать n_2 способами, причем выбор одного элемента исключает одновременный выбор другого элемента. Тогда выбор «или a, или b» можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

При этом способы выбора элементов a и b не должны совпадать между собой. В противном случае будет $m + k - l$ способов выбора, где l — число совпадений.

Правило произведения. Пусть даны два упорядоченных множества A и B: A, содержащее n_1 элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} \in A$ и B, содержащее n_2 элементов $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} \in B$. Тогда можно образовать ровно $n_1 n_2$ различных пар $\{(a_i, b_j) \big| i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}\}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Это правило можно обобщить на случай любого конечного числа упорядоченных множеств.

Выборки и их типы

Определение 1.11. *Выборкой из n по k называется набор из k элементов, каждый из которых является элементом некоторого множества, состоящего из n элементов.*

Пример 1.11. *Выбранные некоторым образом две книги из пяти, стоящих на полке, будет выборкой из пяти по два.*

Пример 1.12. *Трехзначное число является выборкой из десяти (т.е. из множества цифр $\{0, 1, \ldots, 9\}$) по три.*

Заметим, что в примере 1.12, в отличие от примера 1.11, число выбранных элементов может превышать число «всех» элементов, поскольку элементы (цифры в числе) могут повторяться.

Кроме параметров n и k (из скольки и по сколько) выборка характеризуется еще двумя критериями:

- **порядок**: выборка с учетом порядка или без учета порядка;
- **наличие повторений**: выборка с повторениями или без повторений.

В зависимости от типа, выборки имеют следующие названия, табл.1.1 .

Таблица 1.1

Тип выборки	С учетом порядка	Без учета порядка
Без повторений	Размещения	Сочетания
С повторениями	Размещения с повторениями	Сочетания с повторениями

Правильное определение типа выборки в задаче является залогом ее правильного решения. Рассмотрим задачу определения типы выборки на примерах.

Пример 1.13. *Пусть из группы в 20 студентов требуется выбрать старосту и его заместителя. Определим параметры и тип выборки. Во-первых заметим, что нам требуется выбрать 2 человека из 20, т.е. это выборка* ***из 20 по 2****. Далее, поскольку одного и того же студента нельзя одновременно выбрать и старостой и заместителем, то это выборка* ***без повторений****. Наконец, нужно ответить на вопрос важен ли для нас порядок выбора, т.е. пара «Белов — староста, Серов — заместитель» — это то же самое, что пара «Серов — староста, Белов — заместитель»? Очевидно, эти пары разные, поэтому это выборка* ***с учетом порядка****. Таким образом тип выборки в данном примере:* ***размещения из 20 по 2****.*

Пример 1.14. *Пятизначное двоичное число является* ***размещением с повторениями из 2 по 5****, т.к. мы выбираем 5 элементов (5 цифр числа) из множества* $\{0, 1\}$ *(т.к. число двоичное, т.е. в его записи могут присутствовать только 0 или 1) с повторениями (т.к. одна и та же цифра может повторяться в числе) и с учетом порядка (т.к. при перестановке цифр мы получим другое число, например* $10001 \neq 10100$*).*

Пример 1.15. *Школьник выбирает 3 предмета для сдачи ЕГЭ из 10 возможных. В данном случае мы имеем выборку без повторений (нельзя дважды выбрать один и тот же предмет) и без учета порядка (наборы «математика, русский язык, информатика» и «математика, информатика, русский язык» — это один и тот же набор). Таким образом, в данном случае имеем* ***сочетания из 10 по 3****.*

Пример 1.16. *Кость домино является* ***сочетанием с повторениями из 7 по 2****. Действительно, кость домино состоит из двух полей (выбираем 2 элемента), каждый из которых может принимать значения от 0 (пусто) до 6 (всего 7 значений) с повторениями (т.к. есть дубли) без учета порядка (т.к. кость нет разных костей «1–2» и «2–1» — это одна и та же кость).*

Приведем определения выборок каждого типа и формулы для вычисления их числа.

Определение 1.12. *Размещениями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке. Обозначаются A_n^m.*

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.7}$$

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n. \tag{1.8}$$

Определение 1.13. *Перестановками называются различные способы упорядочивания n различных предметов (пронумерованных карточек) при их расположении слева направо. Перестановки являются частным случаем размещений из n по n и обозначаются $P_n = A_n^n$.*

$$P_n = n!. \tag{1.9}$$

Размещения с повторениями обозначаются $\overline{A}_n^m$ и вычисляются по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.10}$$

Определение 1.14. *Сочетаниями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами. Обозначаются C_n^m*

Число сочетаний из n по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.11}$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,

(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

(3) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\right) = (1+1)^n = 2^n$.

Сочетания с повторениями из n элементов по m элементов обозначаются $\overline{C}_n^m$, а их число вычисляется по формуле

$$\overline{C}\,_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \qquad (1.12)$$

Пример 1.17. *В студенческом буфете продают пирожки с мясом и капустой. Вася купил три пирожка. Сколько различных комбинаций пирожков возможно в данном случае?*

◀ Отметим, что порядок выдачи пирожков не важен и легко выписать всевозможные комбинации возможны в данной задаче: {ммм, ммк, мкк, ккк}. Т.е. $n = 4$.

Подсчитаем это число по формуле числа сочетаний с повторениями $n = C_{3+2-1}^3 = C_4^3 = \dfrac{3!}{2!1!} = \mathbf{4}$. ▶

Ответ: $\boxed{n = 4.}$

Рассмотрим более сложную задачу.

Пример 1.18. *В буфете продают пирожки с мясом, вареньем и капустой. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?*

◀ Отметим, что порядок выдачи пирожков не важен и можно выписать всевозможные комбинации получения пяти пирожков: {ммммм, ммммв, ммммк, мммвв,..., ккккк}.

Подсчитаем это число по формуле (1.12) числа сочетаний с повторениями $n = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \dfrac{7!}{5!2!} = \mathbf{21}$. ▶

Ответ: $\boxed{n = 21.}$

Пример 1.19. *Найдите количество трёхбуквенных «слов» (включая бессмысленные), составленных из букв слова ПРИВЕТ.*

◀ Первую букву можно вытащить шестью способами, из пяти оставшихся букв вытаскиваем вторую букву пятью способами и третью букву вытаскиваем четырьмя способами. Получаем,
$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$.

Можно было просто вычислить число размещений из шести различных букв по три буквы. $n = A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$. ►

Ответ: $\boxed{120.}$

Пример 1.20. *Найдите количество трёхбуквенных «слов» (включая бессмысленные), составленных из букв слова ДОКЛАД.*

◄ $n = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = \mathbf{60}$. Делим на 2, потому что в наборе две буквы Д. ►

Ответ: $\boxed{\mathbf{60.}}$

Пример 1.21. *В урне лежит 5 белых и 6 красных перенумерованных (различающихся) шаров. а) Сколькими способами можно вынуть белый и красный шар? б) Сколькими способами можно вынуть белый или красный шар?*

◄ Вынуть белый шар можно пятью, а чёрный — шестью способами. Тогда вынуть одновременно один белый и один красный шар можно $5 \cdot 6 = \mathbf{30}$ способами (правило умножения), а вынуть один шар любого цвета можно $5 + 6 = \mathbf{11}$ способами (правило сложения). ►

Ответ: $\boxed{\textbf{а) 30; б) 11.}}$

Рассмотрим несколько задач на нахождение числа комбинаций при игре в покер. В покер играют стандартной колодой из 52 карт — 4 равносильные масти по 13 карт от 2 до туза. Покерные комбинации состоят из пяти карт. Всего существует 10 комбинаций. Выигрывает тот, кто соберет более старшую комбинацию.

Пример 1.22. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «каре», т.е. любые четыре карты одного достоинства?*

◄ Поскольку всего в колоде 13 достоинств, то выбрать одно из них можно $A_{13}^1 = C_{13}^1 = 13$ способами. Таким образом, выбрать четыре карты одного достоинства можно тринадцатью способами. Пятая карта выбирается из оставшихся 48 карт $A_{48}^1 = C_{48}^1 = 48$ способами. Поскольку пятая карта выбирается независимо от первых четырех, по правилу умножения получаем, что каре можно выбрать $13 \cdot 48 = 624$ способами. ►

Ответ: $\boxed{\mathbf{624.}}$

Пример 1.23. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «стрит», т.е. пять карт подряд идущего достоинства?*

◀ Предположим сначала, что все карты одной масти. Тогда, учитывая, что туз может играть роль как старшей, так и младшей карты (единицы), существует 10 комбинаций «стрит»: $\{\text{Т}, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \ldots, \{10, \text{В}, \text{Д}, \text{К}, \text{Т}\}$. Учитывая теперь, что масть каждой карты в этой комбинации можно выбрать четырьмя способами, причем выбор масти каждой карты независим от выбора других, получим $10 \cdot 4^5 = 10240$ способов. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{10240.}}$

Пример 1.24. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «фулл хаус», т.е. три карты одного достоинства и две — другого?*

◀ Выбрать два достоинства из тринадцати можно $A_{13}^2 = 13 \cdot 12$ способами. Здесь возникает выборка с учетом порядка, поскольку эти достоинства неравнозначны, т.е. три двойки и две дамы это не то же самое, что три дамы и две двойки — мы различаем эти комбинации. Далее, внутри каждого достоинства возникает выбор мастей, это выбор без учета порядка $C_4^3 = 4$ для трех карт и $C_4^2 = 6$ для двух. По правилу произведения, число комбинаций «фулл хаус» равно $A_{13}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 = 13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{3744.}}$

Пример 1.25. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «тройка», т.е. три карты одного достоинства?*

◀ Сначала выберем три карты одного достоинства. Это можно сделать (см. предыдущие задачи) $C_{13}^1 \cdot C_4^3 = 13 \cdot 4 = 52$ способами (13 способов выбрать достоинство и 4 способа — выбрать три масти из четырех). Дальше нам следует быть внимательными. Дело в том, что оставшиеся две карты могут быть выбраны не произвольным образом из оставшихся 49 карт. Во-первых, нам нужно исключить оставшуюся карту того же достоинства, что мы выбрали, иначе возникнет комбинация «каре». Во-вторых, две оставшиеся карты не могут быть одного достоинства, иначе возникнет комбинация «фулл хаус». Таким образом для выбора четвертой карты мы фиксируем одно из оставшихся 12 достоинств и выбираем любую масть ($12 \cdot 4 = 48$ способов), а пятая карта выбирается из 11 оставшихся достоинств (оно не должно совпадать ни с достоинством тройки, ни с достоинством четвертой карты), она также может быть любой масти, т.е. ее можно выбрать $11 \cdot 4 = 44$ способами. Получаем, что комбинацию «тройка» можно выбрать $52 \cdot 48 \cdot 44 = 109824$ способами. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{109824.}}$

1.4. Классическое определение вероятности

Определение 1.15. *Вероятность события A равна отношению числа (M) благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов данного испытания (N):*

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.13}$$

Решение задач непосредственно по формуле (1.13) часто сводится к определению отдельно числителя и знаменателя.

Пример 1.26. *В урне* 13 *чёрных и* 8 *белых шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что он — белый.*

◀ Всего возможно $N = 13 + 8 = 21$ исход, в том числе $M = 8$ благоприятных, откуда $P(A) = \frac{8}{21}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{8}{21}}$.

Пример 1.27. *Карта называется козырной, если она — туз, король, дама или трефовой масти. Из колоды в 36 карт вынимают одну. Какова вероятность того, что она — козырная?*

◀ Общее число исходов $N = 36$; число благоприятных исходов равно числу козырей, которых 9 треф и ещё по три карты (Д, К, Т) в трёх некозырных мастях, $M = 9 + 3 \cdot 3 = 18 \ \Rightarrow\ P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{1}{2}}$.

Пример 1.28. *В партии из 80 деталей 11 нестандартных. Взятые для контроля 5 деталей оказались стандартными. Определить вероятности того, что взятая затем деталь будет: а) стандартной, б) нестандартной.*

◀После первой проверки остались 64 стандартных и 11 нестандартных деталей. Число всех деталей перед второй проверкой $N = 75$.

а) Число благоприятствующих исходов — появлений стандартной детали (событие A) $M = 64$. Тогда $P(A) = 64/75 \approx$ **0,853**.

б) Число благоприятствующих исходов для этого случая — число появлений нестандартной детали (событие B) $M = 11$ и $P(B) = 11/75 \approx$ **0,147**.▶

Ответ: $\boxed{P(A) = 64/75 \approx 0{,}853;\ \ P(B) = 11/75 \approx 0{,}147}$.

Пример 1.29. *Бросаются три игральные кости. Найти вероятности того, что: а) сумма очков на выпавших гранях равна 4, б) на всех гранях выпадает одинаковое число очков, в) на всех гранях выпадает различное число очков.*

◀ Игральная кость представляет собой куб, на гранях которого нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Каждый из исходов бросания одной кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй и третьей, поэтому общее число возможных исходов испытания $N = 6^3$.

а) Здесь благоприятствующих событию A — появлению на трёх костях суммы очков, равной 4, будет $M = 3$ исхода: $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$. Тогда

$$P(A) = 3/6^3 = 1/72 \approx \mathbf{0{,}014}.$$

б) В этом случае число благоприятствующих исходов будет равно числу граней, т.е. M=6. Следовательно,

$$P(B) = 6/6^3 = 1/36 \approx \mathbf{0{,}028}.$$

в) Число исходов, когда на трёх гранях выпадает различное число очков, равно числу размещений $M = A_6^3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ и

$$P(C) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6^3} = 5/9 \approx \mathbf{0{,}556}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 1/72 \approx 0{,}014;\ P(B) = 1/36 \approx 0{,}028; P(C) = 5/9 \approx 0{,}556.}$

Пример 1.30. *Из шести карточек с буквами А, В, Д, З, К, О выбираются наудачу в определённом порядке пять. Найти вероятность того, что при этом получится слово ЗАВОД.*

◀ Здесь производится выборка пяти букв из шести и в нужной последовательности. Порядок выбора букв существенен, поэтому число всевозможных исходов данного испытания равно $N = A_6^5$, а число исходов благоприятствующих получению слова ЗАВОД равно $M = 1$. Тогда вероятность искомого события A равна

$$P(A) = 1/A_6^5 = 1/720 \approx \mathbf{0{,}001}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 1/720 \approx 0{,}001.}$

Пример 1.31. *В коробке имеются десять букв: А, А, А, В, И, К, М, О, Т, Т. Найти вероятность того, что если наудачу вынимать одну букву за другой, то можно сложить слово АВТОМАТИКА.*

◀ В данном примере имеются повторяющиеся буквы. Число всех исходов равно всевозможным перестановкам из 10 букв, т.е. $N = 10!$ В числителе формулы для вероятности мы должны учесть, что букву А можно расположить на трёх местах 3! способами, а букву Т — 2! способами. Сочетая каждое расположение букв А с каждым расположением букв Т, найдем:

$$P(A) = \frac{3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{302400} \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \frac{1}{302400} \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}.}$

Пример 1.32. *В цехе из 80 рабочих не выполняют норму выработки 5 человек. По списку случайно отбирается 3 человека. Найти вероятность того что: а) все выбранные рабочие выполняют норму; б) все выбранные рабочие не выполняют норму; в) только два выбранные рабочие выполняют норму.*

◀ В данном примере порядок выбора рабочих не существенен. Поэтому для подсчёта числа исходом опыта (выбора трёх рабочих) применяется формула для сочетаний. Количество всех возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 человека из 80, т.е. числу сочетаний $N = C_{80}^3$.

а) Благоприятствующими будут те исходы, когда 3 человека отбираются только из тех рабочих, которые выполняют норму, т.е. из $80-5 = 75$ рабочих; их число равно $M_1 = C_{75}^3$. Вероятность данного события A

$$P(A) = \frac{M_1}{N} = \frac{C_{75}^3}{C_{80}^3} = \frac{75!}{3!72!} \cdot \frac{3!77!}{80!} = \frac{73 \cdot 74 \cdot 75}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{13505}{16432} \approx \mathbf{0{,}822}.$$

б) Здесь вычислим вероятность того, что трое рабочих выбираются именно из тех пяти, которые не выполняют норму (событие B). Число таких случаев равно $M_2 = C_5^3$; тогда

$$P(B) = \frac{M_2}{N} = \frac{C_5^3}{C_{80}^3} = \frac{5! \quad \cdot 3!\ 77!}{3!\ 2! \quad \cdot 80!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{1}{8216} \approx 0{,}1217 \cdot 10^{-3}.$$

в) В этом случае два рабочих выполняют норму, а один не выполняет. Для определения количество исходов благоприятствующих появлению искомого случайного события C, применяем свойство умножения. Умножаем число комбинаций, в которых два рабочих выполняют норму $M_1 = C_{75}^2$, на число комбинаций, в которых один рабочий не выполняет норму $M_2 = C_5^1 = 5$. Получаем $M_3 = M_1 \cdot M_2 = C_{75}^2 \cdot C_5^1$.

$$P(C) = \frac{M_3}{N} = \frac{C_{75}^2 \cdot 5}{C_{80}^3} = \frac{75! \cdot 5}{2!73!} \frac{3!77!}{80!} = \frac{75 \cdot 74 \cdot 5 \cdot 3}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{2775}{16432} \approx \mathbf{0{,}1689}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{13505}{16432} \approx 0{,}822;\ P(B) = \dfrac{1}{8216} \approx 0{,}1217 \cdot 10^{-3};\ P(C) = \dfrac{2775}{16432} \approx 0{,}1689.}$

Пример 1.33. *В партии из* 100 *изделий имеются* 12 *бракованных. Из партии наудачу выбираются* 10 *изделий. Определить вероятность того, что среди этих 10 изделий будет ровно* 2 *бракованных.*

◀ Количество элементарных исходов данного испытания равно $N = C_{100}^{10}$. Обозначим через A событие состоящее в появлении 2 бракованных изделий среди выбранных наудачу 10 изделий. Так как всех бракованных изделий 12, то число способов, которыми можно вынуть 2 бракованных изделия, равно C_{12}^{2}. Каждый из этих способов может дополняться любой группой изделий из числа способов, которыми можно вынуть оставшиеся $10-2$ годных из общего числа годных $100 - 12$ изделий. Число таких групп равно $C_{100-12}^{10-2} = C_{88}^{8}$. Применяя свойство умножения комбинаций, получаем число всех исходов, благоприятствующих событию A: $M = C_{12}^{2} \cdot C_{88}^{8}$ и вероятность

$$P(A) = \frac{C_{12}^{2} \cdot C_{88}^{8}}{C_{100}^{10}} = \frac{12! \quad \cdot 88! \quad \cdot 10!\ 90!}{2!\ 10! \cdot 8!\ 80! \cdot 100!}. \tag{1.14}$$

Для вычисления вероятности по полученной формуле (1.14) используем свободную Maxima-программу, которая работает под управлением операционных систем: Windows, Linux, Android:

P:binomial(12,2)*binomial(88, 8)/binomial(100, 10); P, numer;

(P) $\dfrac{192830746581}{786832248020}$ (P) 0.24507224642386 ▶

Ответ: $\boxed{P(A) \approx 0{,}245.}$

Пример 1.34. *Телефонный номер состоит из семи цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.*

◀ Цифры изменяются от 0 до 9, поэтому количество всех номеров будет $N = 10^7$, а число номеров с различными цифрами равно числу размещений $M = A_{10}^{7} = \dfrac{10!}{3!}$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{10!}{3! \cdot 10^7} = \frac{189}{3125} \approx \mathbf{0{,}061}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{189}{3125} \approx 0{,}061.}$

Maxima-команда: P:10!/(3!*10^7); P,numer;

Пример 1.35. *Восемь студентов садятся в аудитории случайно на один ряд. Найти вероятность того, что три определённых студента окажутся рядом.*

◀ Всех комбинаций здесь будет $N = 8!$. Трёх определённых студентов можно посадить подряд шестью способами (начиная с 1-го места, со 2-го и т.д., с 6-го), причём нужно учесть, что внутри тройки 3! комбинаций; пятерых оставшихся студентов можно разместить 5! способами. Таким образом,

$$M = 6\cdot 3!\cdot 5! \quad \text{и} \quad P(A) = \frac{6\cdot 3!\cdot 5!}{8!} = \frac{6\cdot 6}{6\cdot 7\cdot 8} = \frac{3}{28} \approx \mathbf{0{,}107}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \frac{3}{28} \approx 0{,}107.}$

Пример 1.36. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 8 карт. Найти вероятность того, что взяли: а) три карты бубновой масти и три карты чёрной масти; б) хотя бы одну картинку?*

◀ а) В колоде карт всего 9 карт бубновой масти и 18 карт чёрной масти. Искомое событие A происходит, когда вытаскивают три карты бубновой масти и три карты чёрной и две карты червонной масти. Применяем правило произведения для трёх множеств упорядоченных элементов.

$$P(A) = \frac{C_9^3\cdot C_{18}^3\cdot C_9^2}{C_{36}^8} = \frac{9!\ \cdot\ 18!\cdot\ 9!\ \cdot\ 8!\cdot 28!}{3!\cdot 6!\cdot 3!\cdot 15!\cdot 2!\cdot 7!\cdot 36!} = \frac{4032}{49445}.$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \frac{4032}{49445} \approx 0{,}082.}$

б) Всего в колоде карт 16 картинок (валет, дама, король, туз). Искомое событие $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$, где A_i — событие, состоящее в том, что вытащили i карт являющихся картинками.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8).$$

При этом $P(A_i) = \dfrac{C_{16}^i\cdot C_{20}^{8-i}}{C_{36}^8}$. Вычисляем все восемь вероятностей, суммируя их, получаем

$$P(A) = \frac{1}{C_{36}^8}\sum_{i=1}^{8} C_{16}^i\cdot C_{20}^{8-i}.$$

Всё просто, но трудоёмко.

Но нетрудно заметить, что

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = \Omega - A_0.$$

Поэтому, $P(A) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{C_{20}^8}{C_{36}^8} = 1 - \frac{20! \quad \cdot 8! \cdot 28!}{8! \cdot 12! \cdot \ 36!} =$
$= 1 - \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = 1 - \frac{247}{59334} = \frac{59087}{59334} \approx 0{,}9958$. ►

Ответ: $\boxed{\frac{59087}{59334} \approx 0{,}996.}$

Проверка с помощью пакета maxima:

Первый способ:

P: sum(binomial(16, i)*binomial(20, 8-i), i, 1, 8)/binomial(36, 8); P,numer;

Второй способ:

P:1-binomial(20,8)/binomial(36,8); P,numer; $\frac{59087}{59334} \approx 0{,}9958.$

$\frac{59087}{59334} \approx 0{,}9958.$

Задания для самостоятельной работы

1.1. В электрическую цепь последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть, как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A — включен первый выключатель, B включен второй выключатель, C — по цепи идет ток. Выразите события C и $\overline{C}$ через A и B.

1.2. В группе студентов несколько человек являются отличниками; группа делится также по цвету волос на шатенов, брюнетов и блондинов. Из группы наудачу отобраны два человека с разным цветом волос. Пусть событие A — выбран шатен, событие B — выбран брюнет, событие C — выбран отличник. Опишите события: AC, $\overline{AB}$, ABC.

1.3. Доказать, что

а) $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n} = A_1 + A_2 + ... + A_n$,

б) $\overline{A_1A_2...A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + ...\overline{A}_n$.

1.4. Доказать, что $(A + B)(A + C) = A + BC$.

1.5. Событие A — первый узел автомобиля работает безотказно, событие B — второй узел автомобиля работает безотказно. Опишите события: $\overline{A}$ и $\overline{B}$, $A + B$, AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B} + \overline{A}B$; как и в примере 1.6, сделайте рисунки.

1.6. Релейная схема, рис. 2 , состоит из семи элементов: $V_1, V_2, \dots, V_7$. Событие A_i состоит в том, что элемент V_i работает безотказно в течение времени T. Выразить событие A, состоящее в том, что за время T а) схема работает безотказно; б) схема выйдет из строя.

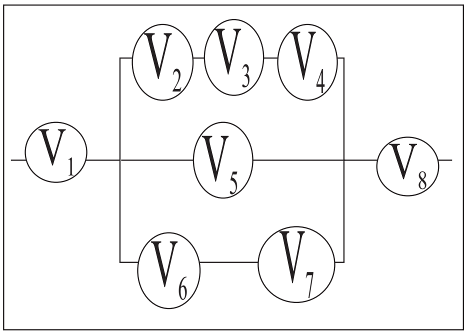

Рисунок 2. *К примеру 1.6*

1.7. Процент выполнения задания предприятием в течение 10 дней соответственно равняется $107, 111, 109, 116, 115, 105, 112, 114, 121, 124$. Какова относительная частота дней, в которые задание было выполнено более чем на 110 процентов?

1.8. В ящике «Спортлото» находится 36 шаров, помеченных номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется с номером, кратным 3?

1.9. Найдите вероятность того, что взятое наудачу двузначное число кратно 5.

1.10. Буквы, составляющие слово РАКЕТА, написаны по одной на шести карточках; карточки перемешаны и положены в пакет. а) Чему равна вероятность того, что, вынимая четыре буквы, получим слово РЕКА? б) Какова вероятность сложить слово КАРЕТА при вынимании всех букв?

1.11. В цех сборки привезли 25 деталей, из которых 20 изготовлены Московским заводом. Найти вероятность того, что среди 10 взятых наудачу деталей окажутся: а) все детали Московского завода, б) 7 деталей Московского завода.

1.12. Полная колода содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Взяли 5 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будет шестерка трефовой масти.

1.13. Бригада, состоящая из 20 мужчин и 4 женщин, делится наудачу на два равных звена. Найти вероятность того, что в каждом звене окажется по две женщины.

1.14. В студенческой лотерее выпущено 100 билетов, из которых 15 выигрышных. Куплено три билета. Какова вероятность того, что один из них выигрышный?

1.15. Из колоды в 52 карты наудачу выбирается четыре. Найти вероятность того, что среди них окажется одна дама.

2. Классические задачи на определение вероятности

Случайные события. Задачи на классическое определения вероятности. Задача о выборке. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.

2.1. Классическое определение вероятности (продолжение)

Число способов, которыми из совокупности n объектов можно выбрать m, различающихся набором объектов или порядком их расположения в наборе, равно числу размещений из n по m:

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)\dots(n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}}. \tag{2.1}$$

Эту формулы можно записать в более запоминающемся виде

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2.2}$$

Если порядок выбора элементов не имеет значения, то число способов уменьшается в $m!$ раз. Это значение называется *числом сочетаний* и обозначается C_n^m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.3}$$

В соответствии с классическим определением вероятности вероятностью, события A называется отношение числа M благоприятствующих ему исходов к общему числу N исходов данного испытания (1.13):

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{2.4}$$

Пример 2.1. *В урне* 13 *белых и* 8 *чёрных шаров. Из урны вынимают наугад сразу два шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *оба шара будут разного цвета;*

(2) *оба будут белыми;*

(3) *хотя бы один из них — белый;*

(4) *Оба шара будут одного цвета.*

Пусть A_i – случайное событие удовлетворяющее условию i-той подзадачи.

(1) Оба шара будут разного цвета.

◀ Здесь N — число способов, которыми можно вынуть одновременно 2 шара из $13+8=21$, $N=C_{21}^2=\dfrac{21!}{2!\cdot 19!}=\dfrac{21\cdot 20}{1\cdot 2}$.

Каждый благоприятный способ есть комбинация способа, которым можно вынуть белый шар из 13 (таких способов 13), и способа, которым можно вынуть чёрный шар из 8 (8 способов). Всего таких комбинаций будет $M=13\cdot 8$. Или $M=C_{13}^1\cdot C_8^1=13\cdot 8$. Тогда, используя классическое определение вероятности получаем:

$$P(A_1)=\frac{M}{N}=\frac{13\cdot 8}{(21\cdot 20)/2}=\frac{2\cdot 13\cdot 8}{21\cdot 20}=\frac{208}{420}=\frac{52}{105}\approx 0{,}495. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{52}{105}\approx 0{,}495.}$

(2) Оба шара будут белыми.

◀ Здесь $N=C_{21}^2=210$ (см. п. 1); M — число способов, которыми можно составить пары из 13 белых шаров,

$$M=C_{13}^2=\frac{13!}{2!\cdot 11!}=\frac{13\cdot 12}{2}=78;$$

$$P(A_2)=\frac{M}{N}=\frac{78}{210}=\frac{13}{35}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{13}{35}\approx 0{,}371.}$

(3) Хотя бы один шар будет белый.

◀Если $A_3=\{$хотя бы один белый$\}$ — искомое событие, то легче найти вероятность противоположного события $\overline{A}_3$, состоящего в том, что в выборке белых шаров нет: $\overline{A}_3=\{$оба чёрные$\}$.

$$P(\overline{A}_3)=\frac{C_8^2}{C_{21}^2}=\frac{8\cdot 7}{21\cdot 20}=\frac{56}{420}=\frac{2}{15}$$ (см. п. 2). Тогда

$$P(A_3)=1-P(\overline{A}_3)=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{13}{15}\approx 0{,}867.}$

(4) Оба шара будут одного цвета.

◀*Первый способ.* Искомое событие A есть сумма двух несовместных событий:

$$B_1=\{\text{оба белые}\} \text{ и } B_2=\{\text{оба чёрные}\}. \text{ Тогда}$$

$P(A_4) = P(B_1) + P(B_2)$. $P(B_1) = \dfrac{13}{35}$, найдено в п. 2; $P(B_2) = \dfrac{2}{15}$ (п. 3); $P(A_4) = \dfrac{13}{35} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{53}{105}$.

Второй способ. Событие A_4 — противоположное к событию B, состоящему в извлечении двух шаров разного цвета.

$P(B) = \dfrac{52}{105}$ (см. п. 1) $\Rightarrow$ $P(A_4) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{52}{105} = \dfrac{53}{105}$. ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{53}{105} \approx 0{,}505.}$

Пример 2.2. *В урне* 13 *белых и* 8 *чёрных шаров. Из урны вынимают сразу три шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *все три шара будут белыми;*

(2) *хотя бы один шар белый;*

(3) *среди них один белый и два чёрных;*

(4) *все шары одного цвета;*

(5) *среди них имеются как белые, так и чёрные шары.*

Пусть A_i – случайное событие, удовлетворяющее условию i-той подзадачи.

(1) Все три шара будут белыми.

◀ Всего в урне $13 + 8 = 21$ шар. Оттуда три шара одновременно можно извлечь

$$N = C_{21}^3 = \frac{21!}{3! \cdot 18!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7980}{6} = 1330 \text{ способами.}$$

Для подсчёта числа благоприятных исходов оставим в урне только 13 белых шаров. Теперь каждый исход — благоприятный, и всего таких исходов $M = C_{13}^3 = \dfrac{13!}{3! \cdot 10!} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286.$

Если A — искомое событие, то

$$P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} : \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{21 \cdot 20 \cdot 19} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 11}{7 \cdot 20 \cdot 19} =$$

$$= \frac{13 \cdot 11}{7 \cdot 5 \cdot 19} = \frac{286}{1330} = \frac{143}{665}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{143}{665} \approx 0{,}215.}$

Замечание 2.1. *Аналогично ищется вероятность того, что все три шара — чёрные.* $P(\text{все чёрные}) = \dfrac{4}{95}$.

Замечание 2.2. *События* $\{\text{все белые}\}$ *и* $\{\text{все чёрные}\}$ *хоть и несовместны, но не противоположны; сумма их вероятностей равна* $\dfrac{171}{665} \neq 1$. *Кроме них, возможны события, состоящие в выборке разноцветных шаров.*

(2) Хотя бы один шар белый.

◀ Здесь легче вычислить $P(\overline{A}_2)$, где событие $\overline{A}_2$, противоположное к A_2, состоит в том, что среди вынутых шаров белых нет, то есть все чёрные. В замечании 2.2 найдено $P(\overline{A}_2) = \dfrac{4}{95}$, откуда

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_2) = 1 - \frac{4}{95} = \frac{91}{95}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{91}{95} \approx 0{,}958.}$

Замечание 2.3. *Аналогично ищется вероятность того, что хотя бы один из них — чёрный (см. п. 1):*

$$P(\text{хотя бы один чёрный}) = 1 - P(\text{все белые}) = 1 - \frac{143}{665} = \frac{522}{665}.$$

(3) Среди них один белый и два чёрных.

◀Здесь, как и в п. 1, общее число исходов равно $C_{21}^3 = 1330$. Благоприятный исход содержит ровно один белый шар (который можно извлечь 13 способами) и ровно два чёрных шара (которые можно извлечь $C_8^2 = 28$ способами).

Всего благоприятных исходов будет $M = C_{13}^1 \cdot C_8^2 = 13 \cdot 28 = 364$.

$P(A_3) = \dfrac{364}{1330} = \dfrac{26}{95}$.▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{26}{95} \approx 0{,}274.}$

Замечание 2.4. *Аналогично ищется вероятность того, что среди них один чёрный и два белых:*

$$P(\text{1 чёрный, 2 белых}) = \frac{C_{13}^2 \cdot C_8^1}{C_{21}^3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 8}{2!} : \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} = \frac{312}{665}.$$

(4) Все шары одного цвета.

◀Искомое событие A_4 есть сумма двух несовместных событий $B_1 = \{\text{все белые}\}$ и $B_2 = \{\text{все чёрные}\}$, вероятности которых найдены ранее.

$$P(A_4) = \frac{143}{665} + \frac{4}{95} = \frac{171}{665} = \frac{9}{35}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\frac{9}{35} \approx 0,257.}$

(5) Среди них имеются как белые, так и чёрные шары.

◀*Первый способ.* Искомое событие A_5 есть сумма несовместных событий

$$B_1 = \{1 \text{ белый, } 2 \text{ чёрных}\} \quad \text{и} \quad B_2 = \{2 \text{ белых, } 1 \text{ чёрный}\};$$

$P(B_1) = \dfrac{26}{95}$, $P(B_2) = \dfrac{312}{665}$ (см. п. 3 и замечание 2.4);

$$P(A_5) = \frac{26}{95} + \frac{312}{665} = \frac{494}{665} = \frac{26}{35}.$$

Второй способ. Если Вам проще найти вероятность того, что все шары одного цвета (равную $\dfrac{9}{35}$, см. п. 4), то событие A_5 будет противоположным событию A_4.

$P(A_5) = 1 - P(A_4) = 1 - \dfrac{9}{35} = \dfrac{26}{35}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{26}{35} \approx 0,743.}$

Рассмотрим теперь решения блока из пяти однотипных задач на выборку из несколько однотипных элементов, но с разными свойствами. В реальных задачах вместо шаров могут быть карандаши, игрушки и другие предметы.

Пример 2.3. *В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых и 3 чёрный шара.*

◀Найдём число всевозможных исходов данного испытания: $N = C_{10}^5$. Найдём теперь число (M) исходов, благоприятствующих искомому событию A. Два белых шара можно вытащить C_6^2 способами, а для каждого из них чёрный шар можно вытащить C_4^3 способами. Следовательно, $M = C_6^2 \cdot C_4^3$.

Получаем,

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{6! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 10!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} =$$

$$= \frac{5}{21} \approx \mathbf{0{,}238}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{5}{21} \approx 0{,}238.}$

Пример 2.4. *На полке находятся 4 пакета с апельсиновым соком, 4 с яблочным и 4 с персиковым. Случайным образом берут шесть пакетов. Найти вероятность того, что среди взятых соков хотя бы один персиковый.*

◀ Число исходов данного испытания $N = C_{12}^6 = \dfrac{12!}{6! \cdot 6!} = 924.$
Число исходов, в которых взяли хотя бы один пакет с персиковым соком, равно, $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$, где M_i — взяли i пакетов с персиковым соком и $4 - i$ с апельсиновым или яблочным, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

$$M = C_8^5 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot C_4^4 = 224 + 420 + 224 + 28 = 896,$$

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot 4 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot 1}{C_{12}^6} = \frac{896}{924} = \frac{32}{33} \approx 0{,}9697.$$

Рассмотрим теперь более простой способ. Нетрудно заметить, что противоположным к искомому событию A будет событие $\overline{A}$, состоящее в том, что не взяли ни одного пакета с персиковым соком.

$$M_0 = C_8^6 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{M_0}{M} = 1 - \frac{C_8^6}{C_{12}^6} = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33}.$$

Естественно, получили тот же ответ.▶

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{32}{33} \approx 0{,}9697.}$

Пример 2.5. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 5 красных и 3 синих шаров. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и 2 красных шара.*

◀ $N = C_{15}^5, \quad M = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2.$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^5} = \frac{60}{1001} \approx 0{,}0599. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{60}{1001} \approx 0{,}0599.}$

Пример 2.6. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 2 красных и 3 синих шаров. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и хотя бы один красный шар.*

◀ $N = C_{12}^5, \quad M_1 = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 C_3^1, \ M_2 = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 \ \Rightarrow \ M = M_1 + M_2.$

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 C_3^1 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2}{C_{12}^5} = \frac{7}{44} \approx 0{,}159. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{7}{44} \approx 0{,}159.}$

Пример 2.7. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 4 красных и 4 синий шаров. Из урны наугад сразу вынимают семь шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и хотя бы один красный шар.*

◀ $N = C_{15}^7 = \dfrac{15!}{7!\cdot 8!} = \dfrac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 15\cdot 13\cdot 11\cdot 3 = 6435,$
$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = C_4^2\cdot C_3^1\cdot\left(C_4^1C_4^3 + C_4^2C_4^2 + C_4^3C_4^1 + C_4^4\right),$
где M_i — вытащили i красных и $4-i$ — синих шаров, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
$M = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 3\cdot(4\cdot 4+6\cdot 6+4\cdot 4+1) = 6\cdot 3\cdot(16+36+16+1) = 18\cdot 69 = 1242.$

$P(A) = \dfrac{M}{N} = \dfrac{1242}{6435} = \dfrac{138}{715} \approx 0{,}193.$ ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{138}{715} \approx 0{,}193.}$

2.2. Задачи на геометрическое определение вероятности

Пусть задано некоторое измеримое множество Ω, такое, что его мера $\mu(\Omega) > 0$. Все точки этого множества $M \in \Omega$ и все измеримые подмножества множества Ω составляют множество событий $\mathcal{A}$, которое является σ-алгеброй. Предполагая, что вероятность попадания случайной точки в подобласть A, не зависит ни от ее формы, ни от ее расположения в области Ω, а пропорциональна его мере $\mu(A)$.

Определим вероятность события A, состоящего в попадании случайной точки в заданную область, как отношение мер областей:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Формулу (2.5) можно применять для любого метрического пространства. В нашем компактном курсе мы будем рассматривать задачи, которые сводятся к одномерному, двумерному или трехмерному геометрическому пространству, изучаемому в курсе «линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Определенная таким образом вероятность называется ***геометрической вероятностью***.

Пример 2.8. *На комплексную плоскость в область $|Imz| + |Rez| \leqslant 4$ наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области области $|z| \geqslant 2\sqrt{2}$.*

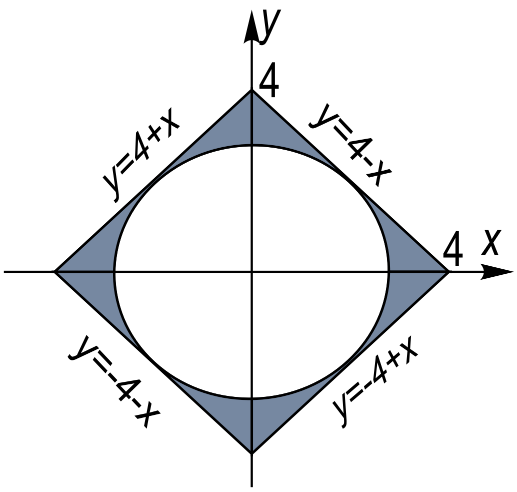

Рисунок 3. *К примеру 2.8*

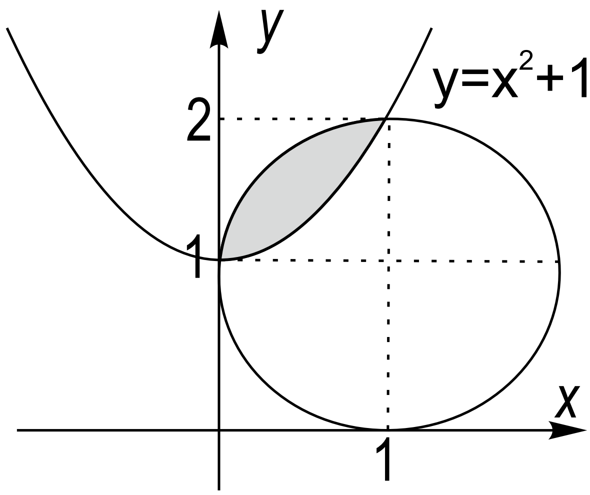

Рисунок 4. *К примеру 2.9*

◀ Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω, на которую брошена точка, в действительных переменных имеет вид: $|x| + |y| \leqslant 4$.

Раскрываем модули

$$x = \begin{cases} \ \ x, \text{при } x \geqslant 0 \ \text{ в I и IV четверти,} \\ -x, \ x < 0 \ \text{ в II и III четверти.} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \ \ y, \ \text{при } y \geqslant 0 \ \text{ в I и II четверти,} \\ -y, \ \ \text{при } y < 0 \ \text{ в III и IV четверти.} \end{cases}$$

Получаем систему четырёх неравенств, соответствующих каждой четверти:

$$\begin{cases} y \leqslant 4 - x, \\ y \leqslant 4 + x, \\ y \geqslant -4 - x, \\ y \geqslant -4 + x. \end{cases}$$

На рис. 3 изображены границы области Ω. Сама область является квадратом со сторонами, равными $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Площадь её равна $S_\Omega = 32$.

Область, в которую должна попасть точка, представляет внешность круга радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат. На рис. 3 данная область закрашена.

$$P(A) = \frac{32 - \pi(2\sqrt{2})^2}{32} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215.}$

Пример 2.9. *На комплексную плоскость в область* $|z - i - 1| \leqslant 1$ *наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области* $Imz - (Rez)^2 \geqslant 1$.

◀Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω, на которую брошена точка, в действительных переменных представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке $M(1, 1)$.
$|(x-1) + i(y-1)| \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leqslant 1 \Rightarrow$
$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.

Площадь области Ω равна $S_\Omega = \pi$.

Область G, в которую должна попасть точка, в действительных переменных задана уравнением: $y \geqslant 1 + x^2$. Это внутренняя часть параболы $y = 1 + x^2$. На рис. 4 данная область закрашена. Найдём её площадь. Для этого от площади четверти круга вычтем площадь криволинейной трапеции, которую вырезает парабола от четверти круга.

$$S_G = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

$$P(A) = \frac{S_G}{S_\Omega} = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}}{\pi} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot \pi} \approx 0{,}144. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3\,\pi} \approx 0{,}144.}$

Пример 2.10. *Случайным образом выбраны два положительных числа, не превышающих значение 5. Найти вероятность того,что сумма этих чисел будет больше 5, а сумма их квадратов меньше 25?*

◀ Используем геометрическое определение вероятности. Так как числа x и y берутся из интервала $(0, 5)$, можно считать, что случайным образом выбирается точка внутри квадрата $0 < x, y < 5$. При этом $x + y > 5$ и $x^2 + y^2 < 25$. Изобразим области на рис. 5.

Площадь квадрата, в котором выбирается точка, равна
$S_\Omega = 25$.

Область G, в которую должна попасть точка, задана системой неравенств:
$\begin{cases} y > 5 - x, \\ y < \sqrt{25 - x^2}, \\ x \in [0, 5]. \end{cases}$ На рис. 5, она выделена.

$$S_G = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} - 0{,}5 \cdot 5^2 = \frac{25(\pi - 2)}{4}.$$

$$P(A) = \frac{S_G}{\Omega} = \frac{25(\pi - 2)}{4}/25 = \frac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.}$

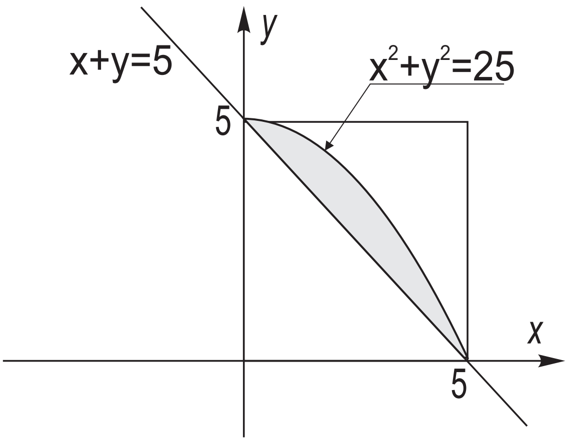

Рисунок 5. *К примеру 2.10*

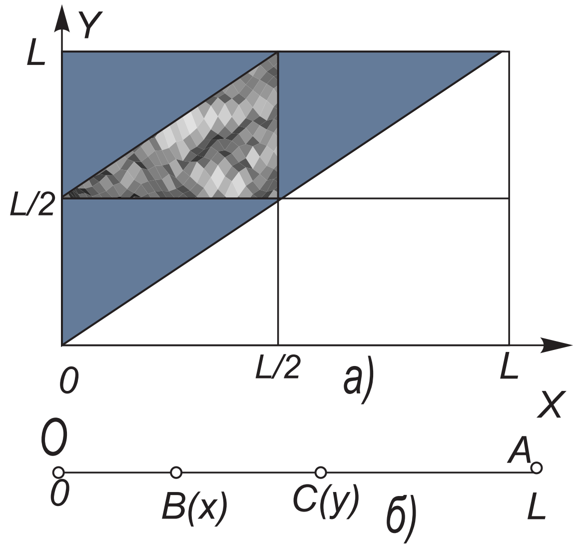

Рисунок 6. *К примеру 2.11*

Пример 2.11. *Одномерный стержень длины L случайным образом распилили на три части. Найдите вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.*

◀ На отрезке OA длины L, $|OA| = L$, (рис. 6б), введём две точки разлома стержня: $B(x)$ и $C(y)$. Пусть точка C находится правее точки, т.е. $x < y$. Тогда длины полученных отрезков будут равны: $x, y - x$ и $L - y$.

Из полученных отрезков можно составить треугольник, когда суммы двух отрезков больше длины третьего отрезка. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + (L - y) > (y - x), \\ x + (y - x) > (L - y), \\ (y - x) + (L - y) > x, \\ y > x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x + L/2, \\ y > L/2, \\ x < L/2, \\ y > x. \end{cases}$$

Площадь данной области равна $L^2/8$.

Закрашенная, (рис. 6а) область удовлетворяет всем неравенствам системы. При этом область Ω определяется системой неравенств: $y > x$, $0 < x < L$, $0 < y < L$. Это треугольник выше диагонали квадрата. Площадь его равна $L^2/2$.

$$P = \frac{L^2/8}{L^2/2} = \frac{1}{4} = \mathbf{0{,}25}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{P = 0{,}25.}$

Пример 2.12. *Сергей заказал в двух итернет-магазинах монитор и SSD диск. Позвонили оба курьера и сказали, что приедут с 10:00 до 11:00. Для приема монитора необходимо 20 минут, а SSD диска — 15 минут. Найти вероятность, что ни одному из курьеров не придётся ждать.*

◀ Пусть A — событие состоящее, в том, что ни одному из курьеров не придётся ждать. Введём две переменные: x — число минут, прошедших с 10 часов до прихода первого курьера с монитором; y — число минут, прошедших с 10 часов до прихода курьера с диском.

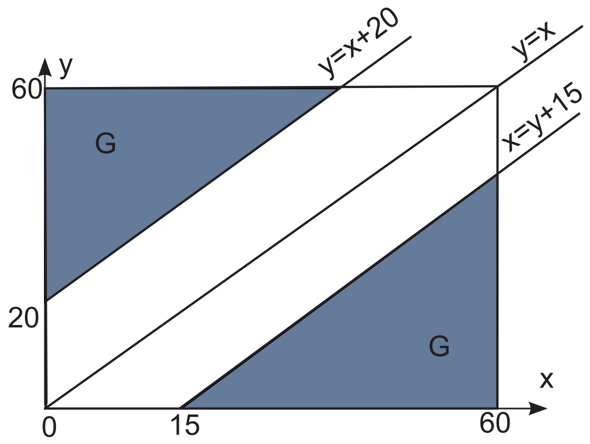

Рисунок 7. *К примеру 2.12*

Пространство всех элементарных исходов, рис. 7

$$\Omega = \{(x,\ y)\,\big|\,(0 \leqslant x \leqslant 60,\ 0 \leqslant y \leqslant 60).$$

Если два курьера приходят одновременно тогда $x = y$.

Если первым приходит курьер с диском $x > y$ (точки ниже прямой $y = x$), то чтобы курьеры не встретились при передаче и оформлении покупки, должно выполняться условие $y < x - 15$. Множество элементарных исходов, соответствующих таким условиям — нижняя часть области G, рис. 7.

Если первым приходит курьер с монитором $y > x$ (точки выше прямой $y = x$), то должно выполняться условие или $y > x + 20$. Множество элементарных исходов, соответствующих таким условиям — верхняя часть области G, рис. 7.

Событие A происходит когда точки лежат внутри закрашенной области G, рис. 7. Тогда вероятность искомого события A равна отношению площадей области G и квадрата, то есть

$$P(A) = \frac{45^2/2 + 40^2/2}{60^2} = \frac{145}{288} \approx 0{,}503 \quad ►$$

Ответ: $\boxed{\frac{145}{288} \approx 0{,}503.}$

Задания для самостоятельной работы

2.1. В урне 10 белых и 15 чёрных шаров. Из урны вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все они будут чёрными.

2.2. Из колоды в 36 карт наудачу выбирают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется две дамы?

2.3. В конверте среди 80 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 20 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

2.4. Полная колода карт (52 листа) делится пополам. Найти вероятность того, что число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

2.5. Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определённые книги окажутся поставленными рядом.

2.6. Четыре пассажира случайным образом рассаживаются по шести вагонам. Определить вероятность того, что в первых четырёх вагонах окажется по одному пассажиру.

2.7. В лифте имеются 5 пассажиров, которые случайным образом сходят на семи этажах. Определить вероятность того, что на первых пяти этажах сойдет ровно по одному пассажиру.

2.8. Из девяти лилий, шести пионов и десяти георгинов случайным образом выбирают для букета девять цветков. Какова вероятность того, что в букете будет: три лилии и три георгина.

2.9. Из три лилий, шести пионов и десяти георгинов случайным образом выбирают для букета девять цветков. Какова вероятность того, что в букете будет: пять георгин и хотя бы одна лилия.

2.10. Из колоды 36 карт случайным образом выбирают восемь. Найти вероятность того, что среди них: три пики, две черви и одна бубны.

2.11. В прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат, вписан круговой конус. Найти вероятность того, что выбранная наудачу внутри параллелепипеда точка окажется внутри конуса.

2.12. Задуманы три положительные числа a, b и c, причём значения a и b не превышают c. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $\dfrac{a^2}{c} \leqslant b \leqslant a$.

3. Задачи на сумму и произведения вероятностей

Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3.1. Условная вероятность

Теорема 3.1. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей :*

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cdot B = \varnothing. \tag{3.1}$$

Теорема 3.2. *Вероятность противоположного к A события равна единице минус вероятность события A:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{3.2}$$

Следствие: 3.1. *Вероятность **суммы n попарно несовместных событий** равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1 + \ \ldots + A_n) = P(A_1) + \ \ldots + P(A_n), \text{ если } A_i A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j. \tag{3.3}$$

Теорема 3.3 (**Теорема сложения вероятностей**). ***Вероятность суммы двух событий** равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{3.4}$$

Определение 3.1. *Условной вероятностью $P(A/B) = P_B(A)$ называют вероятность события A, вычисленную в предположении того, что событие B уже наступило.*

Теорема 3.4 (**Теорема произведения вероятностей**). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{3.5}$$

Следствие: 3.2. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных:*

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Определение 3.2. *Событие B называют* **независимым** *от события A, если появление события A не изменяет вероятность события B:*

$$P(B/A) = P(B). \tag{3.6}$$

Теорема 3.5. ***Вероятность произведения двух независимых событий*** *равна произведению их вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.7}$$

Определение 3.3. *Несколько событий называют независимыми в совокупности, если каждое событие независимо со всеми остальными событиями и их возможными произведениями.*

Следствие: 3.3. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей:*

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Теорема 3.6. *Вероятность появления* ***хотя бы одного из событий*** $A_1, A_2, \dots, A_n$, *независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\dots P(\overline{A}_n).$$

Следствие: 3.4. *Если события A_1, A_2, $\dots$, A_n независимы в совокупности и имеют одинаковую вероятность появления p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий (событие A) равна:*

$$P(A) = 1 - (1-p)^n. \tag{3.8}$$

3.2. Выборки зависимых событий

Решим задачу Пример 1.15 с использованием теоремы о произведении вероятностей.

Пример 3.1. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 2 карты. Найти вероятность того, что взяли две дамы.*

◀ 1 способ. Пусть $A_д$ — событие состоящие в том, что вытащили даму. Тогда искомое событие A можно представить в виде $A = A_д A_д$.

Применяем **теорему 3.4**

$$P(A) = P(A_д A_д) = P(A_д) P_{A_д}(A_д) = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} = \frac{1}{105}.$$

◀ 2 способ с использованием классического определения вероятностей и формул комбинаторики.

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{36}^2} = \frac{4! \cdot 2! \cdot 34!}{2! \cdot 2! \cdot 36!} = \frac{4 \cdot 3}{36 \cdot 35} = \frac{1}{105}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{\frac{1}{105}.}$

Пример 3.2. *В урне* 13 *белых и* 8 *чёрных шаров. Из урны вынимают наугад сразу два шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *оба шара будут разного цвета;*

(2) *оба будут белыми;*

(3) *хотя бы один из них — белый;*

(4) *оба шара будут одного цвета.*

Пусть A_i — случайное событие удовлетворяющее условию i-той подзадачи. Искомые события можно записать в следующем виде:

$A_1 = A_б A_ч + A_ч A_б;$

$A_2 = A_б A_б;$

$A_3 = A_б A_ч + A_ч A_б + A_б A_б = \Omega - A_ч A_ч;$

$A_4 = A_б A_б + A_ч A_ч.$

Так как события состоящие в вынимании 1-го и 2-го шаров из урны зависимы, поэтому необходимо применять **теорему 3.4** о произведении вероятностей для зависимых событий.

$$P(A_1) = P(A_б) P_{A_б}(A_ч) + P(A_ч) P_{A_ч} P(A_б) =$$
$$= \frac{13}{21} \cdot \frac{8}{20} + \frac{8}{21} \cdot \frac{13}{20} = 2\frac{26}{105} = \frac{52}{105}.$$

$$P(A_2) = P(A_б)P_{A_б}(A_б) = \frac{13}{21}\cdot\frac{12}{20} = \frac{13}{35}.$$

$$P(A_3) = 1 - P(A_ч)P_{A_ч}(A_ч) = 1 - \frac{8}{21}\cdot\frac{7}{20} = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}.$$

$$P(A_4) = P(A_б)P_{A_б}(A_б) + P(A_ч)P_{A_ч}(A_ч) =$$
$$= \frac{13}{21}\cdot\frac{12}{20} + \frac{8}{21}\cdot\frac{7}{20} = \frac{13}{35} + \frac{2}{15} = \frac{53}{105}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P(A_1) = \frac{52}{105};\ P(A_2) = \frac{13}{35};\ P(A_3) = \frac{13}{15};\ P(A_4) = \frac{53}{105}.}$

Пример 3.3. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 5 красных и 3 синих шаров. Из урны наугад сразу вынимают три шара. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых шара.*

◀ 1 способ с использованием теорем о произведении и суммы вероятностей.

Пусть $A_б$, $A_д$ — события состоящие в том, что вытащили белый шар или шар другого цвета, соответственно. Тогда искомое событие A можно представить в виде $A = A_б A_б A_д + A_б A_д A_б + A_д A_б A_б$.

Применяем **теорему 3.2**

$$P(A) = P(A_б)P_{A_б}P(A_б)P_{A_б A_б}(A_д) + P(A_б)P_{A_б}P(A_д)P_{A_б A_д}(A_б) +$$
$$+ P(A_д)P_{A_д}P(A_б)P_{A_д A_б}(A_б) =$$
$$= \frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{11}{13} + \frac{4}{15}\cdot\frac{11}{14}\cdot\frac{3}{13} + \frac{11}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} = 3\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{11}{13} = \frac{66}{455}. \blacktriangleright$$

◀ 2 способ с использованием классического определения вероятностей и формул комбинаторики.

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_{11}^1}{C_{15}^3} = \frac{66}{455}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{66}{455}}$

Пример 3.4. *В урне 4 белых, 6 чёрных, 3 красных и 5 синих шаров. Из урны наугад вынимают последовательно три шара. Найти вероятность того, что шары вытащили в следующей последовательности: белый, чёрный, красный.*

◀ 1 способ с использованием теорем о произведении и суммы вероятностей.

Пусть $A_б$, $A_ч$, $A_к$ – события состоящие в том, что вытащили белый, чёрный и красный шар, соответственно.

Тогда искомое событие A можно представить в виде

$A = A_{б}A_{ч}A_{к}$.

$P(A) = P(A_{б}A_{ч}A_{к}) = P(A_{б})P_{A_{б}}(A_{ч})P_{A_{б}A_{ч}}(A_{k}) = \frac{4}{18} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{68}$.

2 способ с использованием классического определения вероятностей и формул комбинаторики.

В данной задаче порядок вытаскивания шаров важен, поэтому для вычисления возможных исходов данного испытания (N) и исходов (M) благоприятствующих искомому событию A, применяем формулу размещений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

$N = A_{18}^3 = \frac{18!}{15!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \qquad M = A_4^1 \cdot A_6^1 \cdot A_3^1 = 4 \cdot 6 \cdot 3.$

$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{1}{68}$.

Ответ: $\boxed{\frac{1}{68}.}$

Пример 3.5. *В коробке лежат 12 букв, среди которых 5 гласных и 7 согласных. Из коробки случайным образом вынимают две буквы. Найти вероятность, что при извлечении очередной буквы появится гласная буква.*

◀ Обозначим $A_{с}$, $A_{г}$ – события состоящие в том, что вытащили согласную или гласную буквы соответственно.

Пусть вначале вытащили одну букву и надо найти вероятность, что вторая буква будет гласная. Тогда искомую вероятность представляем в виде:

$A_2 = A_{г}A_{г} + A_{с}A_{г} = (A_{г} + A_{с})A_{г} = \Omega A_{г} = A_{г}$.

$P(A_2) = A_{г} = \frac{5}{12}$.

Если вытащили две буквы и надо найти вероятность, что третья буква будет гласная.

$A_3 = A_{с}A_{с}A_{г} + A_{г}A_{с}A_{г} + A_{с}A_{г}A_{г} + A_{г}A_{г}A_{г} =$
$= (A_{с}A_{с} + A_{г}A_{с}A_{с}A_{г} + A_{г}A_{г})A_{г} = \Omega A_{г} = A_{г}$.

$P(A_3) = P(A_{г}) = \frac{5}{12}$.

Очевидно, что $P(A_4) = P(A_5) = P(A_{г}) = \frac{5}{12}$ и $P(A_5) = P(A_{г}) = \frac{5}{12}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{5}{12}.}$

3.3. Выборки для независимых событий

В задачах этого подраздела каждый вынутый предмет возвращается в совокупность и, следовательно, может быть вынут повторно. Подсчёт числа элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события, следует проводить, используя правило умножения (см. предыдущий раздел). Например, если из урны с пятью белыми и шестью красными шарами дважды вынимается шар с возвращением в урну, то общее число исходов будет $11^2 = 121$, а число исходов, при которых оба шара белые, составит $5^2 = 25$.

Другой подход состоит в представлении искомого события в виде *произведения независимых событий* или суммы несовместных событий.

Пример 3.6. *В урне* 13 *белых и* 8 *чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что:*

(1) *оба раза был вынут белый шар;*

(2) *в первый и второй раз вынуты шары одного цвета;*

(3) *в первый и второй раз вынуты шары разного цвета;*

(4) *хотя бы один вынутый шар белый.*

(1) Оба раза был вынут белый шар.

◀ В условиях ***выемки с возвращением*** вероятность вынуть белый (чёрный) шар не зависит от того, которым он вынут по счёту, и равна $\dfrac{13}{21}$ для белого и $\dfrac{8}{21}$ для чёрного шара.

События $A_1 = \{\text{1-й белый}\}$ и $A_2 = \{\text{2-й белый}\}$ независимы, и вероятность их совместного появления равна произведению их вероятностей:

$$P(A) = P(A_1\ A_2) = P(A_1)P(A_2) = \left(\frac{13}{21}\right)^2 = \frac{169}{441}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{169}{441} \approx 0,383.}$

Замечание 3.1. *Аналогично решается задача о вероятности того, что оба раза вынут чёрный шар:* $P(\textit{оба чёрные}) = P(A_ч A_ч) = \left(\dfrac{8}{21}\right)^2 = \dfrac{64}{441}.$

(2) В первый и второй раз вынуты шары одного цвета.

◀ Искомое событие A является суммой несовместных событий $A_1 = \{\text{оба белые}\} = A_б A_б$ и $A_2 = \{\text{оба чёрные}\} = A_ч A_ч$.

$P(A_1) = \dfrac{169}{441}$, $P(A_2) = \dfrac{64}{441}$ (см. п. 1 и замечание к нему);

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{169}{441} + \frac{64}{441} = \frac{233}{441}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{233}{441} \approx 0,528.}$

(3) В первый и второй раз вынуты шары разного цвета.

$\blacktriangleleft$ *Первый способ.* Искомое событие A — сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{1-й белый, 2-й чёрный}\} \text{ и } A_2 = \{\text{1-й чёрный, 2-й белый}\}.$$

$$P(A_1) = \frac{13}{21} \cdot \frac{8}{21} = \frac{104}{441}, \quad P(A_2) = \frac{8}{21} \cdot \frac{13}{21} = \frac{104}{441} = P(A_1);$$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 2P(A_1) = \dfrac{2 \cdot 104}{441} = \dfrac{208}{441}.$

Второй способ. Вероятность противоположного события

$P(\overline{A}) = P(\text{оба одного цвета}) = \dfrac{233}{441}$ (см. п. 3), тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{233}{441} = \frac{208}{441}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{208}{441} \approx 0,472.}$

(4) Хотя бы один вынутый шар — белый.

$\blacktriangleleft$ Противоположное событие $\overline{A} = \{\text{оба чёрные}\}$ имеет вероятность

$P(\overline{A}) = \dfrac{64}{441}$ (см. замечание к п. 1);

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{64}{441} = \frac{377}{441}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{377}{441} \approx 0,855.}$

Замечание 3.2. *Аналогично,*

$P(\textit{хотя бы один чёрный}) = 1 - P(\textit{оба белые}) = 1 - \dfrac{169}{441} = \dfrac{272}{441}.$

Пример 3.7. *В первой урне* 5 *белых и* 9 *чёрных шаров, во второй —* 7 *белых и* 6 *чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что:*

(1) *оба шара будут белыми;*

(2) *оба будут одного цвета;*

(3) *шары будут разного цвета;*

(4) *хотя бы один шар будет белым.*

(1) Оба шара будут белыми.

◀ События $A_1 = \{\text{шар из 1-й урны белый}\}$ и $A_2 = \{\text{из 2-й урны белый}\}$ независимы; искомое событие

$$A = A_1 \cdot A_2, \quad P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

$P(A_1) = \dfrac{5}{14}$, $P(A_2) = \dfrac{7}{13}$, откуда $P(A) = \dfrac{5}{14} \cdot \dfrac{7}{13} = \dfrac{5}{26}$. ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{5}{26} \approx 0,192.}$

Замечание 3.3. *Так же ищут вероятность двух чёрных шаров:*

$$P(\textit{оба чёрные}) = P(\textit{1-й чёрный}) \cdot P(\textit{2-й чёрный}) = \frac{9}{14} \cdot \frac{6}{13} = \frac{27}{91}.$$

(2) Оба будут одного цвета.

◀ Искомое событие A является суммой двух несовместных событий $A_1 = \{\text{оба белые}\}$ и $A_2 = \{\text{оба чёрные}\}$. $P(A_1) = \dfrac{5}{26}$, $P(A_2) = \dfrac{27}{91}$ найдены в п. 1 и замечании к нему. Имеем:

$$P(A) = \frac{5}{26} + \frac{27}{91} = \frac{89}{182}. \text{ ▶}$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{89}{182} \approx 0,489.}$

(3) Шары будут разного цвета.

◀Искомое событие A есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{1-й белый, 2-й чёрный}\} \text{ и } A_2 = \{\text{1-й чёрный, 2-й белый}\}.$$

В свою очередь, событие A_1 есть произведение независимых событий $B_1 = \{\text{1-й белый}\}$ и $B_2 = \{\text{2-й чёрный}\}$;
$P(B_1) = \dfrac{5}{14}$, $P(B_2) = \dfrac{6}{13}$;

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{13} = \frac{30}{182}.$$

Аналогично, $A_2 = C_1 \cdot C_2$, где

$$C_1 = \{\text{1-й чёрный}\}, \ C_2 = \{\text{2-й белый}\} \text{ — независимые события.}$$

$$P(C_1) = \frac{9}{14}, \ P(C_2) = \frac{7}{13}, \ P(A_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{63}{182}.$$

В итоге
$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{30}{182} + \frac{63}{182} = \frac{93}{182}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{93}{182} \approx 0,511.}$

(4) Хотя бы один шар будет белым.

◀Событие A противоположно к событию $\overline{A}=\{$оба чёрные$\}$.
$P(\overline{A}) = \dfrac{27}{91}$ (см. замечание к п. 1); $P(A) = 1 - \dfrac{27}{91} = \dfrac{64}{91}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{64}{91} \approx 0,703.}$

Пример 3.8. *В урне 13 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что:*

(1) *все время попадались белые шары;*
(2) *один раз вынут белый шар и два раза — чёрный;*
(3) *все вынутые шары были одного цвета;*
(4) *вынимались как белые, так и чёрные шары.*

(1) Все время попадались белые шары.

◀Искомое событие равно произведению трёх независимых событий: $A = A_б A_б A_б$. Вероятность этого события равна $P(A) = \left(\dfrac{13}{21}\right)^3 = \dfrac{2197}{9261}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{2197}{9261} \approx 0,237.}$

Замечание 3.4. *Вероятность того, что все время вынимались чёрные шары, вычисляется аналогично и равна* $\left(\dfrac{8}{21}\right)^3 = \dfrac{512}{9261}$.

(2) Один раз вынут белый шар и два раза — чёрный.

◀ Искомое событие A есть сумма трёх несовместных равновероятных событий A_1, A_2 и A_3:

$A_1 = \{$1-й белый, 2-й чёрный, 3-й чёрный$\} = A_б A_ч A_ч$,
$A_2 = \{$1-й чёрный, 2-й белый, 3-й чёрный$\} = A_ч A_б A_ч$,
$A_3 = \{$1-й чёрный, 2-й чёрный, 3-й белый$\} = A_ч A_ч A_б$.

Очевидно, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$, поэтому
$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 3P(A_1).$$

Событие A_1 есть произведение трёх независимых событий

$$B_1 = \{\text{1-й белый}\}, \quad B_2 = \{\text{2-й чёрный}\}, \quad B_3 = \{\text{3-й чёрный}\};$$

$$P(B_1) = \frac{13}{21}, \quad P(B_2) = P(B_3) = \frac{8}{21};$$

$$P(A_1) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = \frac{13}{21} \cdot \left(\frac{8}{21}\right)^2 = \frac{832}{9261};$$

$$P(A) = 3P(A_1) = \frac{3 \cdot 832}{9261} = \frac{832}{3087}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{832}{3087} \approx 0,270.}$

Замечание 3.5. *Рассуждая аналогично, можно вычислить*

$$P(\textit{два белых, один чёрный}) = 3 \cdot \left(\frac{13}{21}\right)^2 \cdot \frac{8}{21} = \frac{1352}{3087}.$$

(3) Все вынутые шары были одного цвета.

◀Искомое событие $A = \{\text{все три одного цвета}\}$ есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{три белых}\} = A_{\text{б}}A_{\text{б}}A_{\text{б}} \quad \text{и} \quad A_2 = \{\text{три чёрных}\} = A_{\text{ч}}A_{\text{ч}}A_{\text{ч}}.$$

Согласно п. 1 и замечанию к нему, $P(A_1) = \frac{2197}{9261}$, $P(A_2) = \frac{512}{9261}$, откуда

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2197}{9261} + \frac{512}{9261} = \frac{2709}{9261} = \frac{43}{147}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{43}{147} \approx 0,293.}$

(4) Вынимались как белые, так и чёрные шары.

◀ *Первый способ.* Искомое событие

$$A = \{\text{были как белые, так и чёрные}\}$$

есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{1 белый, 2 чёрных}\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{\text{2 белых, 1 чёрный}\},$$

чьи вероятности найдены в п. 2 и замечании к нему:

$$P(A_1) = \frac{832}{3087}, \quad P(A_2) = \frac{1352}{3087}.$$

Имеем:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{832}{3087} + \frac{1352}{3087} = \frac{2184}{3087} = \frac{104}{147}.$$

Второй способ. Противоположным к A является событие $\overline{A} = \langle$все шары одного цвета$\rangle$; $P(\overline{A}) = \dfrac{43}{147}$ (см. п. 3). Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{43}{147} = \frac{104}{147}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{104}{147} \approx 0,707.}$

Пример 3.9. *Всхожесть семян моркови, гороха и свёклы составляет $p_1 = 80\%$, $p_2 = 60\%$ и $p_3 = 70\%$ соответственно. В лаборатории посадили по одному семени каждого овоща. Найти вероятность того, что:*

(1) *взойдут все три ростка;*

(2) *не взойдёт ни один росток;*

(3) *взойдёт хотя бы один росток;*

(4) *взойдёт ровно один росток;*

(5) *взойдёт не более одного ростка;*

(6) *взойдут ровно два ростка;*

(7) *взойдёт не менее двух ростков;*

(8) *взойдёт не более двух ростков.*

Пусть A_1, A_2 и A_3 — события, состоящие в прорастании моркови, гороха и свёклы; $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}6$; $P(A_3) = 0{,}7$; $P(\overline{A}_1) = 0{,}2$; $P(\overline{A}_2) = 0{,}4$; $P(\overline{A}_3) = 0{,}3$. Пусть F_i — искомое событие в пункте i.

(1) Взойдут все три ростка.

◀$P(F_1) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}336}$.▶

Ответ: $\boxed{0{,}336.}$

(2) Не взойдёт ни один росток.

◀$P(F_2) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = \mathbf{0{,}024}$.▶

Ответ: $\boxed{0{,}024.}$

(3) Взойдёт хотя бы один росток.

◀$P(\overline{F}_3) = P(F_2) = 0{,}024$; $P(F_3) = 1 - 0{,}024 = \mathbf{0{,}976}$.▶

Ответ: $\boxed{0{,}976.}$

(4) Взойдёт ровно один росток.

◀Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем:

$$P(F_4) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) =$$

$= 0{,}8\cdot0{,}4\cdot0{,}3+0{,}2\cdot0{,}6\cdot0{,}3+0{,}2\cdot0{,}4\cdot0{,}7 = 0{,}096+0{,}036+0{,}056 = \mathbf{0{,}188}.$▶

Ответ: $\boxed{0{,}188.}$

(5) Взойдёт не более одного ростка.

▶В соответствии с принятыми обозначениями:
$F_5 = F_2 + F_4;\quad P(F_5) = P(F_2) + P(F_4) = 0{,}024 + 0{,}188 = \mathbf{0{,}212}.$▶

Ответ: $\boxed{0{,}212.}$

(6) Взойдут ровно два ростка.

◀$P(F_6) = P(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3) =$

$$= P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) =$$

$$= 0{,}8\cdot0{,}6\cdot0{,}3 + 0{,}8\cdot0{,}4\cdot0{,}7 + 0{,}2\cdot0{,}6\cdot0{,}7 =$$

$$= 0{,}144 + 0{,}224 + 0{,}084 = \mathbf{0{,}452}.$$▶

Ответ: $\boxed{0{,}452.}$

(7) Взойдёт не менее двух ростков.

◀$P(F_7) = P(F_6 + F_1) = P(F_7) + P(F_1) = 0{,}336 + 0{,}452 = \mathbf{0{,}788}.$▶

Ответ: $\boxed{0{,}788.}$

(8) Взойдёт не более двух ростков.

◀$P(F_8) = P(\overline{F}_1) = 1 - P(F_1) = 1 - 0{,}336 = \mathbf{0{,}664}.$▶

Ответ: $\boxed{0{,}664.}$

Пример 3.10. *В электрической цепи (рис. 8) выключатели A_1 и A_2 независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$ и $p_2 = 0{,}6$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L загорится?*

◀При параллельной коммутации выключателей лампочка L загорается, если замкнут хотя бы один выключатель, и НЕ загорается, если все они одновременно разомкнуты.

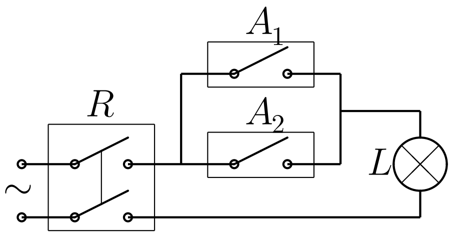

Рисунок 8. Параллельное соединение двух элементов

Искомое событие A можно представить в виде $A = A_1A_2 + A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$, где A_1, A_2 – независимые события состоящее в том, что соответствующий выключатель замкнут.

$P(A) = P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) =$
$= 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 + 0{,}08 + 0{,}48 = 0{,}68.$

Данную задачу проще решить, используя формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}4 =$ **0,68**. ►

Ответ: $\boxed{0{,}68.}$

Пример 3.11. *Радист, для надёжности, трижды передаёт один и тот же сигнал. Вероятность того, что первый сигнал будет принят равна 0,2, второй – 0,4 и третий – 0,6. Предполагается, что данные события независимы. Найти вероятность того, что сигнал будет принят.*

◄ Пусть A – искомое событие. A_i, $i = 1, 2, 3$ — событие означающее, что i-тыл сигнал был принят. Тогда

$A = A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$

Если подставить значения вероятностей $P(A_1) = 0{,}2$, $P(\overline{A}_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}6$, $P(\overline{A}_3) = 0{,}4$, получим ответ.

Однако, не трудно заметить,что данный метод правильный, но не оптимальный.

Очевидно, что $\Omega = A + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

Поэтому

$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 =$ **0,808**.
►

Ответ: $\boxed{0{,}808.}$

Пример 3.12. *Для поражения цели достаточно одного попадания. Произведено три выстрела с вероятностью попадания:* 0,7; 0,75 *и* 0,8. *Найти вероятность поражения цели.*

◄Пусть A — искомое событие состоящее в том, том цель будет поражена. Найдём вероятность противоположного события $\overline{A}$. Цель не будет поражена,

если все три выстрела не попадут.
$P(\overline{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}015 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \mathbf{0{,}985}$. ►

Ответ: $\boxed{0{,}985.}$

Пример 3.13. *Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого 0,6 второго 0,7. Найти вероятность того, что будет три попадания, если каждый стрелок производит по два выстрела.*

◄ Пусть A – искомое событие. Пусть A_1, A_2 — события означающие, что первый стрелок попал в мишень при i-том выстреле. Аналогично, B_1, B_2 — для второго стрелка.

При этом $P(A_1) = P(A_2) = 0{,}6$, $P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = 0,4$,
$P(B_1) = P(B_2) = 0{,}7$, $P(\overline{B}_1) = P(\overline{B}_2) = 0,3$.

Тогда искомое событие можно представить в виде
$A = \overline{A}_1A_2B_1B_2 + A_1\overline{A}_2B_1B_2 + A_1A_2\overline{B}_1B_2 + A_1A_2B_1\overline{B}_2$.
$P(A) = 0{,}4\cdot0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}7+0{,}6\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}7+0{,}6\cdot0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}7+0{,}6\cdot0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}3 =$
$= \mathbf{0{,}3864}$. ►

Ответ: $\boxed{0{,}3864.}$

Пример 3.14. *В электрической цепи (рис. 9) выключатели A_1, A_2 и A_3 независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

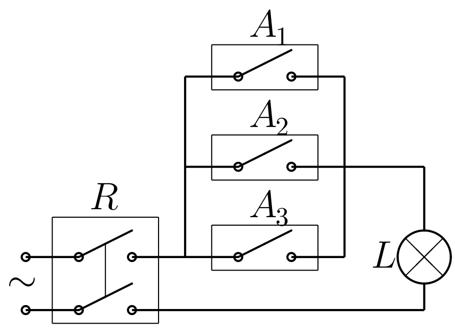

Рисунок 9. Параллельное соединение трёх элементов

◄ Пусть A – искомое событие.

При параллельной коммутации выключателей лампочка L загорается,если замкнут хотя бы один выключатель.

Найдем вероятность противоположного события $\overline{A}$, состоящего в том, что лампочка не загорится. Это событие можно записать в виде $\overline{A} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$, где A_i – событие состоящее в том, что i-тый выключатель разомкнут.

$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}224.$

Тогда

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}224 = \mathbf{0{,}776}$. ►

Ответ: $\boxed{0{,}776.}$

Пример 3.15. *В электрической цепи рис. 10) выключатели A_1, A_2 и A_3 независимо разомкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

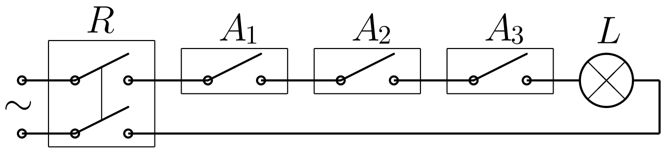

Рисунок 10. Последовательное соединение трёх элементов

◄ Искомое событие $A = \{L \text{ загорится}\}$ есть произведение *трёх* независимых в совокупности событий:

$$G_1 = \{A_1 \text{ замкнут}\},\ G_2 = \{A_2 \text{ замкнут}\} \text{ и } G_3 = \{A_3 \text{ замкнут}\}.$$

Тогда $P(A) = P(G_1)P(G_2)P(G_3)$.

При заданных вероятностях p_1, p_2, p_3, положим $P(\overline{A_i}) = p_i$. Следовательно, $P(A_i) = 1 - p_i$.

$P(G_1) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$; $P(G_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P(G_3) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$;

$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}224}$.►

Ответ: $\boxed{0{,}224.}$

Пример 3.16. *В электрической цепи (рис. 11) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

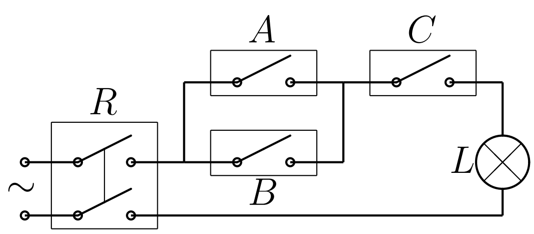

Рисунок 11. Параллельное и последовательное соединение элементов

◀ Выключатель C закоммутирован последовательно с контуром AB. Следовательно, искомое событие

$$A = \{\text{лампочка загорится}\}$$

есть произведение событий

$$G_1 = \{\text{контур } AB \text{ замкнут}\} \text{ и } G_2 = \{\text{выкл. } C \text{ замкнут}\};$$

$P(A) = P(G_1)P(G_2)$.

Вычисление вероятности $P(G_1)$ сводится к задаче о загорании лампочки при параллельной коммутации всего двух выключателей A и B, которая была решена в примере 3.10.

$P(G_1) = 1 - P(\overline{A}\ \overline{B}) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}68$.

Далее, $P(G_2) = 0{,}3$;

$P(A) = 0{,}68 \cdot 0{,}3 =$ **0,204**. ▶

Ответ: $\boxed{0{,}204.}$

Пример 3.17. *В электрической цепи (рис. 12) выключатели A, B и C независимо разомкнуты с вероятностями $q_1 = 0{,}2$, $q_2 = 0{,}6$ и $q_3 = 0{,}3$. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?*

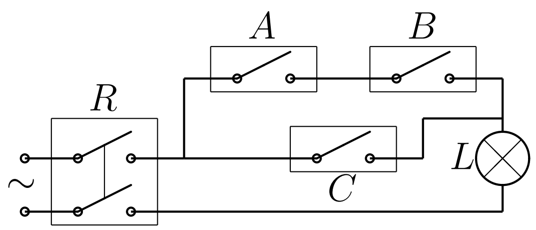

Рисунок 12. К примеру 2.12

◀ Цепь AB и выключатель C параллельны, поэтому (см. примеры 3.10 и 3.14) удобнее вычислять вероятность события

$$\overline{A} = \{\text{лампочка НЕ загорится}\} =$$

$$= \{\text{цепь } AB \text{ разомкнута } (G_1)\} \cdot \{\text{выкл. } C \text{ разомкнут } (G_2)\}.$$

Вычисление $P(G_1)$ сводится к задаче о незагорании лампочки при последовательной коммутации выключателей A и B при заданных вероятностях того, что они разомкнуты:

$P(G_1) = 1 - (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}68; \quad P(G_2) = 0{,}3;$
$P(\overline{A}) = 0{,}32 \cdot 0{,}3 = 0{,}204.$

Искомое событие $A = \{$лампочка загорится$\}$ противоположно к $\overline{A}$.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}204 = \mathbf{0{,}796}. \ ►$$

Ответ: $\boxed{0{,}796.}$

Пример 3.18. *Релейная схема состоит из 8-ми элементов трёх типов A_1, A_2 и A_3, рис. 13,а). Вероятность того, что за время T элементы не выйдут из строя известна и равна: $P(A_1) = 0{,}6$, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(A_3) = 0{,}8$. Найти вероятность безотказной работы схемы.*

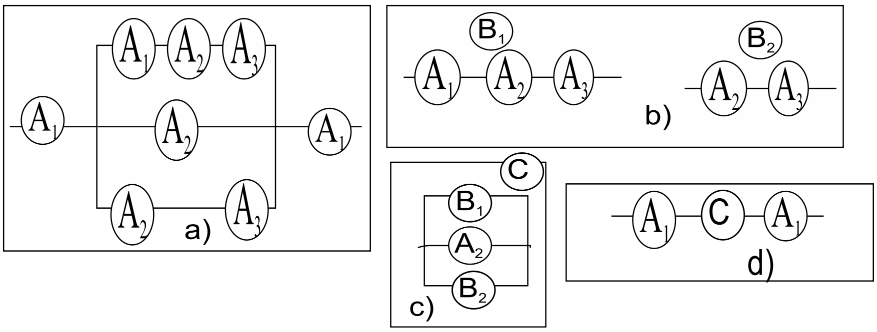

Рисунок 13. *К примеру 3.18*

◄ Событие состоящее в том, что схема работает безотказно в течении времени T, обозначим A. Вероятность такого события A называется надёжностью схемы. Обозначим надёжности элементов
$P(A_1) = p_1 = 0{,}6, \quad P(A_2) = p_2 = 0{,}7, P(A_3) = p_3 = 0{,}8.$

Тогда вероятности отказа элементов $q_i = 1 - p_i$ будут равны
$P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}4, P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}3, P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}2.$

Выделим из исследуемой схемы два последовательно соединённых блока B_1 и B_2 рис. 13, b), находящиеся в блоке из трёх параллельных ветвей. Найдём их надёжность. Эти блоки состоят из последовательных элементов, поэтому их надёжность равна произведению надёжности элементов.
$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = \mathbf{0{,}336}$,
$P(B_2) = P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = \mathbf{0{,}56}$.

Найдём надёжность блока C, состоящего из трёх параллельных элементов.

При параллельном соединении элементов схема работоспособна, когда работает хотя бы один элемент. Для определения надёжности параллельного блока находим сначала вероятность противоположного события — вероятность того, что блок вышел из строя. Т.е. что все элементы неработоспособны, а затем применяем формулу для противоположного события.
$P(C) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{B_2}) = 1 - 0{,}664 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}44 =$
$= 1 - 0{,}087648 = \mathbf{0{,}912352}$.

Наконец, заменяем в схеме рассчитанный параллельный блок, элементом C, получаем схему из трёх последовательных блоков, рис. 13, d).

Используя теорему о произведении вероятностей для несовместных событий, получаем

$P(A) = P(A_1) \cdot P(C) \cdot P(A_1) = 0{,}6^2 \cdot 0{,}912352 = \mathbf{0{,}32844672}$. ►

Ответ: $\boxed{0{,}32844672 \approx 0{,}328.}$

Пример 3.19. *Ведется стрельба снарядами по кораблю перевозящим семь разнотипных контейнеров с горючим расположенных один за другим. Для того, чтобы поразить корабль, достаточно попасть либо в один из семи контейнеров с горючим двумя или тремя снарядами, либо попасть в два соседних контейнера. Найти вероятность того, что корабль будет поражен, если в область контейнеров попало 3 снаряда (попадания в любой контейнер считаем равновероятными).*

◄ Пусть A_i – событие состоящее в том, что попали в i-тый контейнер.

Применяем формулу классического определения вероятности.

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

Найдём число исходов в которых цель будет поражена. С учётом принятых обозначений, искомое событие A можно записать как сумму слагаемых каждое из которых является произведением трёх равновероятных независимых событий.

$A = A_1A_1A_1 + A_2A_2A_2 + \ldots + A_7A_7A_7 +$
$+ A_1A_1A_2 + \ldots + A_1A_1A_7 + A_2A_2A_3 + \ldots + A_2A_2A_7 + \ldots + A_7A_7A_6 +$
$+ A_1A_2A_3 + \ldots + A_1A_2A_7 + A_2A_3A_4 + \ldots + A_2A_3A_7 + \ldots + A_5A_6A_7.$

При этом первая строка содержит семь слагаемых означающих события в которых все три снаряда попали в один из семи контейнеров $m_1 = 7$.

Во второй строке расположены $m_2 = 7 \cdot 6 \cdot 3 = 126$ слагаемых означающие, что два снаряда попали в i-тый контейнер, а третий снаряд попал в другой контейнер.

В третьей строке расположены $m_3 = 25 \cdot 3! = 150$ слагаемых которые соответствуют попаданию снарядов в два соседних контейнера.

Таким образом, всего $M = m_1 + m_2 + m_3 = 7 + 126 + 150 = 283$ исхода благоприятствующих появлению события A, а число всевозможных исходов данного испытания равно числу размещений с повторениями $N = 7^3 = 343$.

Следовательно, вероятность искомого события равна

$P(A) = \dfrac{283}{343} \approx 0{,}825$. ►

Для контроля правильности полученного решения, найдём вероятность противоположного события. Цель не будет поражена, если все три снаряда не попадут в соседние контейнеры и не попадут в один контейнер. Событие $\overline{A}$ можно представить в виде десяти слагаемых

$$\overline{A} = A_1A_3A_5 + A_1A_3A_6 + A_1A_3A_7 + A_1A_4A_6 + A_1A_4A_7 + A_1A_5A_7 + \\ + A_2A_4A_6 + A_2A_4A_7 + A_2A_5A_7 + A_3A_5A_7.$$

С учётом перестановок, получаем $\overline{M} = 10 \cdot 3! = 60$.

$$P(\overline{A}) = \frac{60}{343} \approx 0{,}175$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{283}{343} + \frac{60}{343} = 1.$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{283}{343} \approx 0{,}825.}$

Задания для самостоятельной работы

3.1. В урне 15 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что оба раза был вынут белый шар.

3.2. Автомат штампует детали. Вероятность того, что за каждый час работы автомата не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0.95. Найти вероятности событий: 1) будут стандартными все детали, изготовленные станком за три часа; 2) в течение хотя бы одного из трёх часов автомат штамповал только стандартные детали.

3.3. В урне 15 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что в первый и второй раз вынуты шары одного цвета.

3.4. В урне 15 белых и 9 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что в первый и второй раз вынуты шары разного цвета.

3.5. В урне 11 белых и 7 чёрных шаров. Из урны вынимают шар, возвращают назад и берут снова. Найти вероятность того, что хотя бы один вынутый шар — чёрный.

3.6. В первой урне 11 белых и 8 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 12 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

3.7. В первой урне 6 белых и 10 чёрных шаров, во второй — 11 белых и 9 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут одного цвета.

3.8. В первой урне 11 белых и 8 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 12 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут разного цвета.

3.9. В первой урне 6 белых и 10 чёрных шаров, во второй — 11 белых и 9 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что хотя бы один из них будет белым.

3.10. В урне 11 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что всё время вынимались белые шары.

3.11. В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что однажды вынут белый шар и дважды — чёрный.

3.12. В урне 6 белых и 9 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что все вынутые шары были одного цвета.

3.13. В урне 11 белых и 8 чёрных шаров. Из урны по очереди вынимают три шара, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Найти вероятность того, что вынимались как белые, так и чёрные шары.

3.14. В электрической цепи (рис. 9) выключатели A, B и C независимо разомкнуты с вероятностями 0,4, 0,5 и 0,4 соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится)?

3.15. В электрической цепи (рис. 9) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями 0,7, 0,2 и 0,3 соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?

3.16. В электрической цепи (рис. 9) выключатели A, B и C независимо разомкнуты с вероятностями 0,4, 0,5 и 0,4 соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L НЕ загорится)?

3.17. В электрической цепи (рис. 10) выключатели A, B и C независимо замкнуты с вероятностями 0,4, 0,4 и 0,3. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L загорится?

3.18. В электрической цепи (рис. 10) выключатели A, B и C независимо разомкнуты с вероятностями 0,6, 0,3 и 0,8. С какой вероятностью при включении рубильника D лампочка L НЕ загорится?

3.19. Релейная схема, рис.14 , состоит из семи элементов: V_1, $V_2, \ldots, V_7$. Событие A_i состоит в том, что элемент V_i работает безотказно в течение времени T. Найти вероятность того, что за время T а) схема будет работает безотказно; б) схема выйдет из строя.

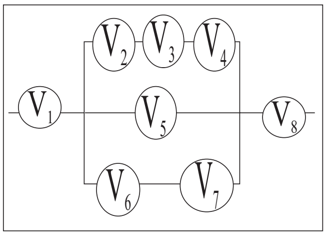

Рисунок 14. *К примеру 3.19*

3.20. Через данную остановку с одинаковым интервалом проходят 39 автобусов, из них 14 автобусов маршрута N_1, 12 автобусов маршрута N_2 и 13 автобусов маршрута N_3. Какова вероятность того, что первый подходящий автобус будет иметь маршрут N_1 или N_3?

3.21. При каждом включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,95. Найти вероятность того, что двигатель начнёт работать при втором включении зажигания.

3.22. В лабораторию поступило два прибора, изготовленных на одном заводе, и три прибора, изготовленных на другом заводе. Вероятность того, что прибор, поступивший с первого завода, имеет высшее качество, равна 0,75, а со второго — 0,6. Найти вероятности того, что: а) все приборы имеют высшее качество, б) по крайней мере один из них имеет высшее качество, в) ни один из них не имеет высшее качество.

3.23. Отдел технического контроля проверяет две партии изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие из первой партии стандартно, равна 0,92, а из второй — 0,96. Из каждой партии берутся по одному изделию. Найти вероятность того, что только одно из них будет стандартно.

3.24. Из полной колоды 52 карт наудачу вынимаются одна за другой три карты без возвращения. Какова вероятность того, что в первый раз будет извлечена тройка, во второй — семерка, в третий — туз.

3.25. Из группы студентов в 12 человек каждый раз наудачу назначают дежурных по четыре человека. Найти вероятность того, что после трёх дежурств каждый студент отдежурил по одному разу.

3.26. Из 20 автомобилей, отправленных на ремонт, 6 требуют ремонта коробки передач. Найти вероятность того, что из трёх выбранных случайно автомобилей по крайней мере один требует ремонта коробки передач.

3.27. Вероятность изготовления подшипникового шарика ниже третьего класса равна 0,0002. а) Определить вероятность того, что в партии из 400 шариков содержится хотя бы один ниже третьего класса. б) Какой должен быть объём партии, чтобы вероятность наличия в ней хотя бы одного бракованного шарика была не более $p_1 = 0{,}03$?

3.28. В коробке лежат 20 галстуков, причём 12 из них красные, остальные белые. Определить вероятность того, что из трёх вынутых наудачу галстуков все они окажутся одного цвета.

3.29. Из двух наборов шахмат наудачу извлекают по одной фигуре или пешке. Какова вероятность того, что обе фигуры окажутся ладьями?

3.30. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наудачу. а) Определить вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места. б) Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечётная?

3.31. В урне m белых и n чёрных шаров. Из урны вынимаются одновременно два шара. Определить вероятность того, что оба шара будут: а) белыми, б) разных цветов.

3.32. В партии, состоящей из 30 деталей, имеются 5 бракованных. Из партии выбирается для проверки 10 деталей. Если среди контрольных окажется более двух бракованных, партия не принимается. Найти вероятность того, что данная партия не будет принята.

3.33. В урне 10 белых и 5 чёрных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что третьим по порядку будет вынут чёрный шар.

3.34. Какова вероятность того, что в группе из 30 случайно отобранных студентов хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения? Найдите ту же вероятность в группе из 50 студентов.

3.35. В лотерее 10000 билетов, из которых 1000 выигрышных. Участник лотереи покупает 10 билетов. Определить вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.

4. Формулы полной вероятности и Байеса

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Теорема 4.1 (**Формула полной вероятности**). *Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно **несовместных событий** $H_1, H_2 \dots H_n$, называемых **гипотезами**, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \qquad (4.1)$$

Кратко эту формулу можно записать в виде

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Теорема 4.2 (**Формула Байеса**). *В условиях формулы полной вероятности для $i = 1, \ldots, n$:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}. \qquad (4.2)$$

Метод решения задач на формулу полной вероятности сводится к следующему. В условиях теоремы 4.1 обозначается событие A, вероятность которого нужно найти в примере. Затем обозначаются гипотезы H_i, и вычисляются их вероятности $P(H_i)$. Наконец, определяются условные вероятности события A, и по формуле полной вероятности (4.1) находится искомая вероятность события A.

4.1. Задачи на формулу полной вероятности

Пример 4.1. *На трёх станках было обработано* 120 *деталей, причём первым, вторым и третьим станками было обработано соответственно* 50, 34 *и* 36 *деталей. Вероятность того, что первый станок производит обработку отличного качества равна* 0,96, *второй —* 0,93, *третий —* 0,95. *Все детали поступают на склад. Определить вероятность того, что случайно выбранная деталь имеет обработку отличного качества.*

◀ Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранная деталь обработана отлично.

Гипотезами здесь будут: H_1 — наудачу взятая деталь обработана первым станком, H_2 — вторым, H_3 — третьим. Их вероятности равны:

$$P(H_1) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}, \quad P(H_2) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}, \quad P(H_3) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}96, \quad P(A/H_2) = 0{,}93, \quad P(A/H_3) = 0{,}95.$$

По формуле полной вероятности (4.1)

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$

$= \dfrac{5}{12} \cdot 0{,}96 + \dfrac{17}{60} \cdot 0{,}93 + \dfrac{3}{10} \cdot 0{,}95 = \mathbf{0{,}9485}$. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = 0{,}9485.}$

Пример 4.2. *В первой урне* 8 *белых и* 7 *чёрных шаров, во второй —* 4 *белых и* 6 *чёрных, в третьей —* 9 *белых и* 5 *чёрных. Наугад из одной из урн вынимается шар. Найти вероятность того, что он белый.*

◀ Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез:

$H_1 = \{$выбрана первая урна$\}$,

$H_2 = \{$выбрана вторая урна$\}$,

$H_3 = \{$выбрана третья урна$\}$.

Вероятности всех гипотез равны между собой и в сумме составляют 1, откуда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$.

В условиях каждой из них вероятность искомого события A ищется по формуле классического определения вероятности $P(A) = \dfrac{M}{N}$.

$$P(A/H_1) = \frac{8}{8+7} = \frac{8}{15}; \; P(A/H_2) = \frac{4}{4+6} = \frac{2}{5}; \; P(A/H_3) = \frac{9}{9+5} = \frac{9}{14}.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$.

Подставим сюда найденные значения:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{14} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{15} + \frac{2}{5} + \frac{9}{14}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{331}{210} =$$

$= \dfrac{331}{630} \approx 0{,}525$. ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{331}{630} \approx 0{,}525.}$

Пример 4.3. *В первом ящике содержится* 30 *деталей, из которых* 25 *окрашенных, а во втором —* 27*, из которых* 21 *окрашена. При перевозке одна деталь из первого ящика выпала и её положили во второй ящик. Затем для работы из второго ящика извлекли деталь. Определить вероятность того, что она будет окрашена.*

◀ Событие A – появление окрашенной детали; гипотезы: H_1 – переложена окрашенная деталь, H_2 – переложена неокрашенная деталь. Вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \qquad P(H_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6},$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}, \qquad P(A/H_2) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

Вероятность события A вычисляем по формуле полной вероятности (4.1) $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{131}{168} \approx \mathbf{0{,}780}$. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{131}{168} \approx 0{,}780.}$

Пример 4.4. *В коробке находятся* 20 *новых резцов и* 5 *уже использованных. Из коробки наудачу берут три резца, которые после работы возвращают обратно. Назавтра из коробки снова берут три резца. Найти вероятность того, что эти три резца будут новыми.*

◀ Здесь гипотезы H_i, где $i = 0, 1, 2, 3,$ — в первый день работы берут i новых резцов; их вероятности определяются по формуле:

$$P(H_i) = \frac{C_{20}^i \cdot C_5^{3-i}}{C_{25}^3}.$$

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!22!} = 25 \cdot 4 \cdot 23 = 2300.$$

$$P(H_0) = \frac{C_5^3}{2300} = \frac{1}{230}; \quad P(H_1) = \frac{C_{20}^1 \cdot C_5^2}{2300} = \frac{2}{23};$$

$$P(H_2) = \frac{C_{20}^2 \cdot C_5^1}{2300} = \frac{19}{46}; \quad P(H_3) = \frac{C_{20}^3}{2300} = \frac{57}{115}.$$

Событие A — на второй день взято три новых резца. Условные вероятности этого события $P(A/H_i) = \dfrac{C_{20-i}^3}{C_{25}^3}$.

$P(A/H_0) = \dfrac{C_{20}^3}{N} = \dfrac{1140}{2300} \approx 0{,}4957$. $P(A/H_1) = \dfrac{C_{19}^3}{N} = \dfrac{969}{2300} \approx 0{,}4213$.

$P(A/H_2) = \dfrac{C_{18}^3}{N} = \dfrac{816}{2300} \approx 0{,}3548$. $P(A/H_3) = \dfrac{C_{17}^3}{N} = \dfrac{680}{2300} \approx 0{,}2957$.

Следовательно,

$P(A) = P(H_0)P(A/H_0)+P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3) \approx$

$\approx$ **0,332**. ►

Ответ: $\boxed{P(A) \approx 0{,}332.}$

Пример 4.5. *Работа прибора контролируется двумя регуляторами. В течение определённого отрезка времени вероятность безотказной работы первого регулятора равна* 0,8, *второго* – 0,9. *При отказе обоих регуляторов прибор выходит из строя. При отказе одного из регуляторов прибора выходит из строя с вероятностью* 0,7. *Найти вероятность безотказной работы прибора.*

◄ Событие A – прибор работает безотказно. Гипотезы: H_0 – оба регулятора не отказали, H_1 – один отказал, H_2 – оба отказали. Найдём вероятности происхождения гипотез:

$P(H_0) = p_1p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72,$

$P(H_1) = p_1q_2 + p_2q_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}26,$

$P(H_2) = q_1q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02,$

где $p_1 = 0{,}8,\ p_2 = 0{,}9,\ q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2,\ q_2 = 1 - p_2 = 0{,}1.$

Условные вероятности данных гипотез следующие:

$$P(A/H_0) = 1, \quad P(A/H_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3, \quad P(A/H_2) = 0.$$

Окончательно найдем вероятность безотказной работы прибора:

$P(A) = P(H_0)P(A/H_0) + P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$
$= 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}26 \cdot 0{,}3 + 0{,}02 \cdot 0 =$ **0,798**. ►

Ответ: $\boxed{P(A) = 0{,}798.}$

4.2. Задачи на формулу Байеса

Пусть теперь событие A произошло. Тогда если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, то после опыта условные вероятности гипотез будут определяться уже по формуле Байеса (4.2).

Пример 4.6. *Имеются три партии компьютеров: в первой из них на* 5 *компьютерах установлены операционная система (ОС) Windows и на* 7 *— ОС Linux; во второй партии на 8 — ОС Windows и* 6 *— ОС Linux; в третьей на* 10 *— ОС Windows. Наудачу выбирается одна из партий и из неё случайным образом берется компьютер. На этом компьютере оказалась ОС Windows. Найти вероятности того, что данный компьютер взят из первой, второй и третьей партии.*

◀ Гипотезы $H_i (i = 1, 2, 3)$ – выбор i-той партии; их вероятности ввиду равнозначности выбора $P(H_i) = 1/3$. У нас событие A – взят компьютер с установленной ОС Windows; условные вероятности этого события будут:

$$P(A/H_1) = 5/12, \quad P(A/H_2) = 4/7, \quad P(A/H_3) = 1.$$

Искомые вероятности найдутся по формуле Байеса (4.2)

$$P(H_i/A) = \frac{\frac{1}{3}P(A/H_i)}{\frac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{3} P(A/H_j)} = \frac{P(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{3} P(A/H_j)}.$$

Тогда переоценка гипотез, сделанная после того, как событие A произошло, нам даст:

$$P(H_1/A) = \frac{5/12}{5/12 + 4/7 + 1} = \frac{35}{167} \approx 0{,}210,$$

$$P(H_2/A) = \frac{48}{167} \approx 0{,}287,$$

$$P(H_3/A) = \frac{84}{167} \approx 0{,}503.$$

Заметим, что до опыта вероятности всех гипотез были одинаковы и равнялись $1/3$. ▶

Ответ: $P(H_1/A) = 35/167 \approx 0{,}210$; $P(H_2/A) = 48/167 \approx 0{,}287$; $P(H_3/A) = 84/167 \approx 0{,}503$.

Пример 4.7. *В трёх цехах завода производится соответственно* 40%, 35% *и* 25% *всей однотипной продукции; причём брак каждого цеха составляет* 4%, 3% *и* 5% *соответственно. а) Какова вероятность того, что изделие, выбранное случайно, будет бракованным? б) Пусть теперь случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Найти вероятности того, что оно было сделано в первом, во втором и в третьем цехах.*

◀ а) Пусть событие A — выбранное изделие браковано. Гипотезы H_1, H_2, H_3 состоят в том, что изделие произведено соответственно в первом, втором, третьем цехах. Тогда

$$P(H_1) = 0{,}4, \quad P(H_2) = 0{,}35, \quad P(H_3) = 0{,}25,$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = 0{,}04, \quad P(A/H_2) = 0{,}03, \quad P(A/H_3) = 0{,}05.$$

По формуле полной вероятности (4.1) находим $P(A)$

$$P(A) = \sum_{i=3}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = \mathbf{0{,}039}.$$

б) Вероятности того, что бракованное изделие сделано в первом, втором, третьем цехах, найдем по формуле Байеса (4.2):

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}04}{0{,}039} = \frac{16}{39} \approx 0{,}410,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{7}{26} \approx 0{,}269\ ,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{25}{78} \approx 0{,}321. \quad ▶$$

Ответ: $P(A) = 0{,}039$; $P(H_1/A) = 16/39 \approx 0{,}410$; $P(H_2/A) = 7/26 \approx 0{,}269$; $P(H_3/A) = 25/78 \approx 0{,}321$.

Пример 4.8. *Станком обрабатываются детали, причём* 95% *данной продукции удовлетворяет принятым допускам. Первоначальный контроль признает пригодными детали, находящиеся в пределах допуска, с вероятностью* 0,97*, а те, которые не удовлетворяют допуску, с вероятностью* 0,08*. Найти вероятность того, что деталь, прошедшая контроль (признанная годной), действительно удовлетворяет допуску.*

◀ Гипотеза H_1 – деталь находится в пределах допуска, а H_2 – не находится. По данным задачи $P(H_1) = 0{,}95,\ P(H_2) = 0{,}05$. Событие A – деталь при проверке находится в пределах допуска. Тогда

$$P(A/H_1) = 0{,}97, \qquad P(A/H_2) = 0{,}08.$$

Получаем,

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}95\cdot 0{,}97}{0{,}95\cdot 0{,}97 + 0{,}05\cdot 0{,}08} \approx \mathbf{0{,}996}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{P(H_1/A) \approx 0{,}996.}$

Пример 4.9. *Имеются три урны. В первой урне 8 чёрных и 12 белых шаров, а во второй — 15 чёрных и 10 белых. Случайным образом из первой урны вынули 5 шаров, а из второй — 10 и переложили в третью урну. Затем из третьей урны наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что это белый шар.*

◀ Событие A – из третьей урны вынули белый шар.
Обозначим гипотезы:
H_1 – вынутый из третьей урны шар ранее находился в первой урне.
H_2 – вынутый из третьей урны шар ранее находился во второй урне.

Находим вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \qquad P(H_2) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Находим вероятности вынуть белый шар из третьей урны (событие A) при условии что произошла гипотеза H_1 или H_2:

$$P(A/H_1) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}; \qquad P(A/H_2) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Применяем формулу полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = \frac{7}{15} \approx 0{,}467.}$

Пример 4.10. *В двух урнах находятся шары: в первой – 9 белых и 5 чёрных, во второй – 7 белых и 5 чёрных. Из первой урны во вторую наудачу переложили два шара, а затем из первой урны наудачу извлекли один шар.*
1) Найти вероятность того, что этот шар чёрный.
2) Шар, извлеченный из первой урны, оказался чёрным. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара.

1) ◀ Пусть A – искомое событие: из второй урны извлечен белый шар. Введём следующие 3 гипотезы:
H_1 – из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара;
H_2 – из первой урны во вторую были переложены один белый и один чёрный шар;
H_3 – из первой урны во вторую были переложены 2 чёрных шара.

Вероятности осуществления гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{C_9^2}{C_{14}^2} = \frac{36}{91}, \quad P(H_2) = \frac{C_9^1 \cdot C_5^1}{C_{14}^2} = \frac{45}{91}, \quad P(H_3) = \frac{C_5^2}{C_{14}^2} = \frac{10}{91}.$$

Если происходит событие H_1, тогда в первой урне будет 7 белых и 5 чёрных шаров.

Если происходит событие H_2, тогда в первой урне будет 8 белых и 4 чёрных шаров.

Если происходит событие H_3, тогда в первой урне будет 9 белых и 3 чёрных шаров.

Тогда условные вероятности вытащить чёрный шар из первой урны будут равны

$$P(A/H_1) = \frac{5}{12}, \quad P(A/H_2) = \frac{4}{12}, \quad P(A/H_3) = \frac{3}{12}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= \frac{36}{91} \cdot \frac{5}{12} + \frac{45}{91} \cdot \frac{4}{12} + \frac{10}{91} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357. \quad ▶$$

2) ◀ Во втором случае необходимо найти вероятность наступления гипотезы H_1. По формуле Байеса находим

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{36}{91} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{5}{14}} = \frac{6}{13} \approx 0{,}642. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\textbf{1)}\,\frac{5}{14} \approx 0{,}357, \quad \textbf{2)}\ \frac{6}{13} \approx 0{,}642.}$

Задания для самостоятельной работы

4.1. В цехе имеется 5 станков одного типа и 4 станка второго типа. Вероятность того, что в течение рабочей смены станок первого типа не выйдет из строя, равна 0,92, а второго типа — 0,96. Проводится проверка работы наудачу выбранного станка. Найти вероятность того, что этот станок в течение всей рабочей смены будет работать.

4.2. В магазин поступили телевизоры с двух заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 3%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если с первого завода поступило 60% всех телевизоров, имеющихся в магазине, а со второго —40%?

4.3. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех даёт 3% брака, второй — 5%. Для контроля отобраны 10 деталей из первого цеха и 12 — из второго. Эти детали смешаны в одну партию и из неё наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

4.4. Партия изделий содержит 90% высококачественной продукции, 8% изделий низкого качества и 2% бракованных изделий. Если подвергнуть изделие испытанию, то все высококачественные изделия его выдерживают, из числа изделий низкого качества 60% проходят это испытание и 10% бракованных изделий также выдерживают испытание. Какова вероятность того, что наудачу выбранное изделие, прошедшее испытание, относится к числу высококачественных?

4.5. В первом трамвае из 36 пассажиров 2 не имеют билета; для второго и третьего трамваев — эти цифры соответственно равны: 27 и $1, 48$ и 3. Контролер выбирает наугад один из данных трамваев. Найти вероятности того, что: а) первый пассажир, которого проверяет контролер, не имеет билета; б) два проверенных пассажира имеют билеты.

4.6. В урну, содержащую 5 шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету не отличаются друг от друга.

4.7. Два из трёх студентов, сдавших экзамен, ответили на «отлично». Найти вероятность того, что ответили на «отлично» второй и третий студенты, если первый, второй и третий студенты знают соответственно $85\%, 90\%$ и 95% данного курса. Рекомендация: рассмотреть гипотезы H_1 – сдали на «отлично» первый и второй студенты, H_2 – первый и третий, H_3 – второй и третий.

4.8. Цех производит приборы, причём 9% продукции имеет какой-либо дефект. Вначале все приборы проверяются контролером, который обнаруживает дефект с вероятностью 0,96. Не забракованные контролером приборы поступают в отдел технического контроля завода, где дефект обнаруживается с вероятностью 0,98. Данный прибор оказался забракованным. Найти вероятности того, что он забракован: а) контролером, б) отделом технического контроля.

4.9. В первой урне находится 8 белых и 7 чёрных шаров, а во второй 5 белых и 10 чёрных. Из первой урны случайным образом извлекают 2 шара и перекладывают во вторую, а затем из второй урны извлекают два шара. а) Найти вероятность, что они разного цвета. б) Шары, извлеченные из второй урны, оказались разного цвета. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены два белых шара.

5. Повторные независимые испытания

Повторные испытания. Формула Бернулли. Производящие функции. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона. Отклонение частоты от вероятности.

5.1. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие A. Обозначим $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1-p = q$ и определим $P_n(m)$ — вероятность того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях.

Для вычисления $P_n(m)$ используется формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{5.1}$$

Для вычисления вероятности по формуле Бернулли (5.1), в пакет Maxima встроена функция pdf_binomial(m,n,p).

Пример 5.1. *Инструкция к устройству состоит из* 10 *страниц. Вероятность опечатки на каждой странице равна* 0,05. *Найти вероятность того, что на двух страницах инструкции будут опечатки.*

◀ Здесь $n = 10$, $p = 0{,}05$, $q = 1-p = 0{,}95$, $m = 2$. По формуле Бернулли (5.1)

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8 \approx \mathbf{0{,}075}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P_{10}(2) \approx 0{,}075.}$

Пример 5.2. *Вероятность выпуска стандартного изделия на автоматической линии равна* 0,9. *Определить вероятности того, что из пяти наудачу взятых изделий* $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *окажутся стандартными.*

◀ По формуле (5.1) при $n = 5$, $m = 0$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ найдем вероятность того, что среди пяти взятых изделий не окажется стандартных

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 = 10^{-5}.$$

Как видим, это событие оказалось маловероятным. При других m будем иметь:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-4} = 0{,}00045,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0{,}81 \cdot 10^{-3} = 0{,}0081,$$
$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}729 \cdot 10^{-2} = 0{,}0729,$$
$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805,$$
$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}9)^5 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}59049.$$

Отметим, что сумма всех вероятностей равна 1.

$$\sum_{m=0}^{5} P_5(m) = 1.$$

Так как вероятность $p_5(5) \approx 0{,}591$ довольно высокая, то наиболее вероятным оказался выпуск пяти стандартных изделий.

Решение данного примера является достаточно трудоемкой задачей, поэтому проще воспользоваться компьютерным пакетом. Напишем простейшую и понятную без комментариев Maxima-программу, которая, кроме вычислений вероятностей, ещё иллюстрирует полученные значения вероятностей.

(%i1) load(distrib)$ fpprintprec:5$

(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.9), k, 0, 5);

(%o3) [1.0 10^{-5}, 4.5 10^{-4}, 0.0081, 0.0729, 0.3281, 0.5905]

(%i4) wxplot2d(['discrete, P],[style,points])$

Во второй строке программы создаётся список, в который записываются вероятности вычисленные по формуле Бернулли при $k = 0, 1, \cdots, 5$: $P_5(0), \cdots, P_5(5)$. Функция wxplot2d графически отображает значения полученных вероятностей, рис. 15. ▶

Ответ: $\boxed{P \approx \{10^{-5},\quad 0{,}00005,\quad 0{,}0081,\quad 0{,}0729,\quad 0{,}3281,\quad 0{,}5905\}.}$

Пример 5.3. *3D-принтер печатает детали сложной формы, которые поступают на склад. Вероятность выхода нестандартной детали равна* $0,07$. *Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных шести деталей:*
а) не окажется ни одной бракованной детали;
б) не более двух деталей будут бракованными;
в) более двух деталей будут бракованными.

◀ Здесь $n = 6,\ p = 0{,}07,\ q = 0{,}93.$

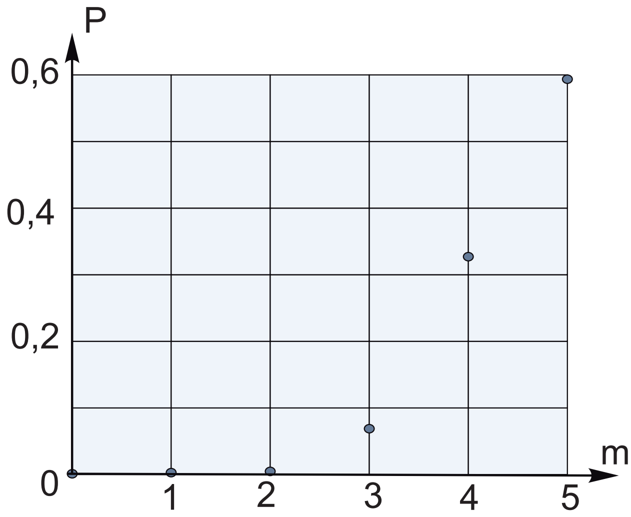

Рисунок 15. *К примеру 5.2*

а) Вероятность P_1 того, что не окажется ни одной бракованной детали, найдем по формуле Бернулли при $m = 0$:

$P_1 = P_6(0) = C_6^0 \cdot (0{,}07)^0 \cdot (0{,}93)^6 \approx$ **0,647**.

б) найдем сначала вероятности $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot (0{,}07)^1 \cdot (0{,}93)^5 \approx 0{,}292,$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot (0{,}07)^2 \cdot (0{,}93)^4 \approx 0{,}055.$$

Тогда вероятность P_2 того, что не более двух деталей будут бракованными, определится как сумма

$$P_2 = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) \approx \mathbf{0{,}994}.$$

в) Так как

$$\sum_{m=0}^{6} P_6(m) = 1,$$

то искомая вероятность P_3 того, что более двух деталей будут бракованными, определяется как сумма вероятностей:

$$P_3 = \sum_{m=3}^{6} P_6(m) = \sum_{m=0}^{6} P_6(m) - \sum_{m=0}^{2} P_6(m) \approx 1 - 0{,}994 = \mathbf{0{,}006}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P_1 \approx 0{,}647 \ P_2 \approx 0{,}994 \ P_3 \approx 0{,}006.}$

Пример 5.4. *Автомат производит с вероятностью* 0,92 *годное изделие, с вероятностью* 0,06 *– изделие с устранимым браком и с вероятностью*

0,02 – *с неустранимым браком. Произведено* 50 *изделий. Определить вероятность того, что среди них будет три изделия с устранимым браком и одно с неустранимым браком.*

Замечание 5.1. *Формула Бернулли обобщается на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода A и $\overline{A}$, а несколько. Пусть производится n независимых опытов в одинаковых условиях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ \ldots, p_m$, причём*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Тогда вероятность того, что в k_1 опытах появится событие A_1, а в k_m опытах — событие A_m $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n\right)$, определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \ \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ \ldots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ \ldots p_m^{k_m}. \tag{5.2}$$

◀ Применим для решения данной задачи формулу (5.2) полиномиального распределения. Здесь $n = 50, \quad p_1 = 0{,}92, \quad p_2 = 0{,}06, \quad p_3 = 0{,}02,$ $k_2 = 3, \quad k_3 = 1, \quad k_1 = n - k_2 - k_3 = 46.$

Тогда

$$P_{50}(46, 3, 1) = \frac{50!}{46!3!1!} \cdot 0{,}92^{46} \cdot 0{,}06^{3} \cdot 0{,}02^{1} =$$

$$= \frac{47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{6} \cdot 0{,}02162 \cdot 0{,}000216 \cdot 0{,}02 \approx \mathbf{0{,}086}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\approx 0{,}086.}$

5.2. Наивероятнейшее число появления события

Часто необходимо знать значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна; это значение m называется наивероятнейшим числом m^* наступления события A в n испытаниях.

Можно показать, что

$$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p. \tag{5.3}$$

Эту формулу можно записать в виде

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \tag{5.4}$$

Возможны случаи когда неравенству (5.3) удовлетворяют два целых значения m^*, тогда имеются два наивероятнейших числа m_1^* и $m_2^* = m_1^* + 1$.

Пример 5.5. *В цехе восемь одинаковых конвейеров, работающих независимо друг от друга. Вероятность остановки в течении рабочего дня для каждого конвейера равна* 0,6. *Найти наивероятнейшее число* m^* *остановок конвейеров в день и вероятность вероятность того, что будет* m^* *остановок конвейеров.*

◀ Здесь $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Тогда

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \quad \text{или} \quad 4,4 \leqslant m^* \leqslant 5,4.$$

Следовательно, наиболее вероятное число заявок $m^* = \mathbf{5}$. Вероятность пяти заявок из восьми равна

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 \approx \mathbf{0{,}279}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{m^* = 5,\ P_8(5) \approx 0{,}279.}$

Пример 5.6. *Вероятность выпуска приборов высшего качества для некоторого предприятия равна* 0,75. *На контроль случайным образом выбрали партию из* 103 *приборов. Какое число приборов высшего качества в выбранной партии наиболее вероятно?*

◀ Обозначим $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 103$. Тогда

$$0{,}75 \cdot 104 - 1 \leqslant m^* \leqslant 0{,}75 \cdot 104 \quad \text{или} \quad 77 \leqslant m^* \leqslant 78.$$

Так как здесь $(n + 1)p = 78$ есть целое число, то существуют два наивероятнейших числа: $m^* = 77$, $m^* = 78$. ▶

Ответ: $\boxed{m^* = 77 \text{ и } 78.}$

На рис. 16, представлено графическое распределение вероятностей $P_{103}(m)$ в диапазоне $65 \leqslant m \leqslant 90$ для примера 5.6. Ниже приведена Maxima-программа.

```
kill(all)$ load ("distrib")$ fpprintprec:5$
n:103$   p:0.75$
P:makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 1,90)$
wxplot2d( ['discrete, P],[x,65,90],[style,points])$
```

["$P77 =$ ", $P[77]$, "$P78 =$ ", $P[78]$];

Вывод программы: график и вероятности [$P77 = 0.09003$, $P78 = 0.09003$]

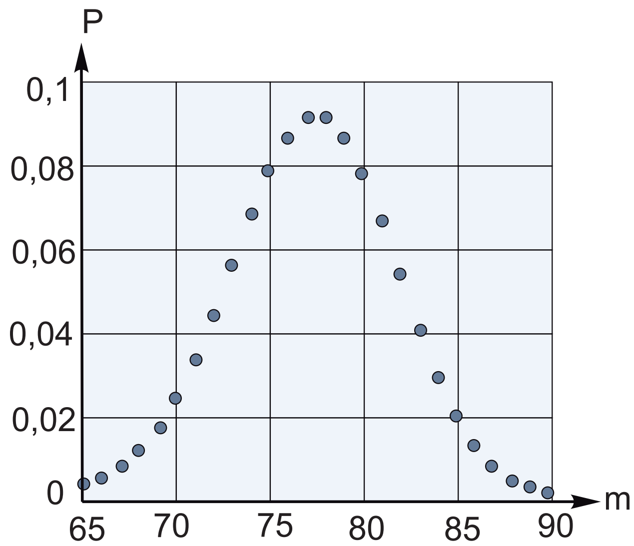

Рисунок 16. *К примеру 5.6*

5.3. Производящие функции

Если в каждом из независимых испытаниях вероятности наступления событий разные, то вероятности того, что в n опытах событие A наступит m раз, равна коэффициенту при m-й степени многочлена

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z). \tag{5.5}$$

Функция $\varphi_n(z)$, называется производящей функцией.

Пример 5.7. *Автомобилист движется по улице на которой расположены 4 светофора. Вероятность проехать светофор без остановки для каждого светофора различна и равна: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$ и $p_4 = 0{,}7$. Какова вероятность, что автомобилист остановиться ровно на двух светофорах.*

◀ Применяем формулу (5.5) для $n = 4$ и $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}7$, $q_1 = 0{,}7$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}5$, $q_4 = 0{,}3$.
$\varphi_4(z) = (0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}3 + 0{,}7z)$.

Раскрываем скобки
$\varphi_4(z) = 0{,}084z^4 + 0{,}337z^3 + 0{,}395z^2 + 0{,}163z + 0{,}021$.

Искомыми вероятностями будут коэффициенты при соответствующих степенях данного многочлена.
$P_3(0) = 0{,}021$; $P_3(1) = 0{,}163$; $P_3(2) = \mathbf{0{,}395}$; $P_3(3) = 0{,}337$; $P_3(4) = 0{,}084$. ►

Ответ: $\boxed{P_3(2) = 0{,}395}$.

5.4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Рассмотрим задачи с применением локальной и интегральной теорем Лапласа.

Вычисления по формуле Бернулли при больших n громоздки и требуют применение вычислительной техники и правильных алгоритмов нахождения результата. Локальная теорема Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если n достаточно велико.

Теорема 5.1 (Локальная теорема Муавра-Лапласа). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{5.6}$$

Значение функции $f(x)$ можно найти в таблице приложение 1, или вычислить на калькуляторе. В Excel эта функция встроена и для её вызова надо написать =НОРМ.СТ.РАСП(x;0). На рис. 17 представлен график функции $f(x)$. Из графика видно, что значения функции вне области $|x| < 3$ практически равны нулю. Например, $f(\pm 3) \approx 0{,}0044$, $f(\pm 4) \approx 0{,}0001$. Функция является чётной, максимальное значение функции равно $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$. Следовательно, максимальное значение вероятности достигается при $m = m^* = np$ и равно $P_n(m^*) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$. Найдём значения m при котором вероятности $P_n(m)$ значимы. Решаем неравенство

$$\left|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right| < 3 \;\Rightarrow -3\sqrt{npq} < m - np < 3\sqrt{npq} \;\Rightarrow$$
$$m \in (np - 3\sqrt{npq};\, np + 3\sqrt{npq}).$$

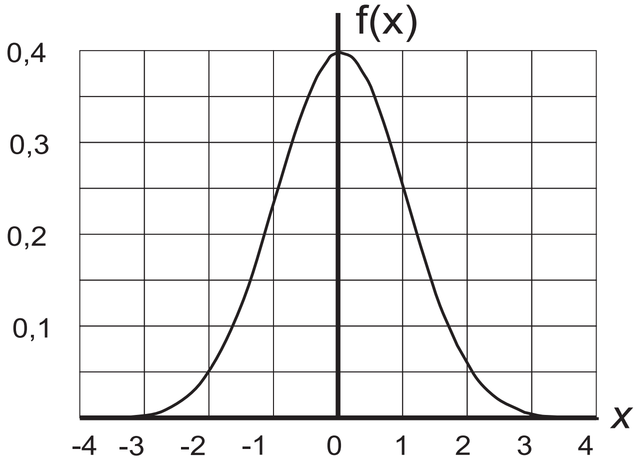

Рисунок 17. *Функция* $f(x)$

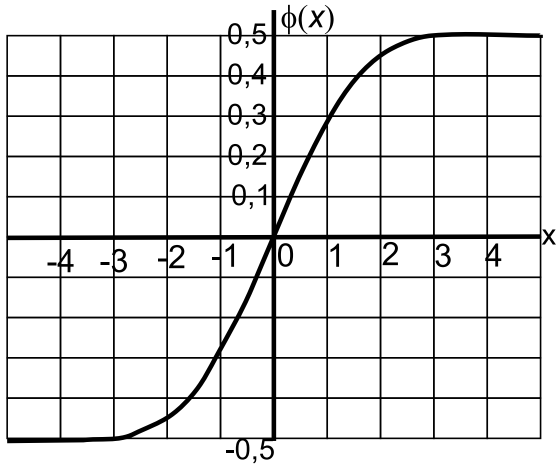

Рисунок 18. *Функция* $\Phi(x)$

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

Определение 5.1. *Функцией Лапласа* $\Phi(x)$ *называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{5.7}$$

График функции Лапласа представлен на рис. 18. Функция является возрастающей, при этом $|\Phi(x)| < 0{,}5, \ \forall x \in (-\infty; \infty)$.

В Excel для вызова этой функции надо ввести команду:
=НОРМ.СТ.РАСП(x,1)-0,5.

Теорема 5.2 (Интегральная теорема Лапласа)**.** *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1, но не более m_2 раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty, \ p \not\approx 0, \ p \not\approx 1$):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{5.8}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ *— функция Лапласа.*

Пример 5.8. *Предприятие за смену выпускает 120 изделий. Вероятность того, что выпущенное изделие будет отнесено к высшему сорту, равна* 0,56. *Чему равна вероятность того, что среди выпущенных за смену изделий* 67 *окажется высшего сорта?*

◀ В данной задаче $n = 120$, $p = 0{,}56$.

Следовательно, $q = 0{,}44$, $m = 67$, $npq = 29,568$.

Применим локальную теорему Лапласа (5.6). Найдём аргумент функции $\varphi(x)$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{67 - 120 \cdot 0{,}56}{\sqrt{29{,}568}} \approx -0{,}04.$$

Используя таблицу, приложение 1, или используя калькулятор, находим значение функции $\varphi(x)$ $f(-0{,}04) = f(0{,}04) \approx 0{,}3986$.

Подставляем полученные значения в формулу (5.6)

$$P_{120}(67) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0{,}3986}{\sqrt{29{,}568}} \approx \mathbf{0{,}073}.$$

Нетрудно убедиться в том, что наивероятнейшее число здесь $m^* = 67$, однако вероятность появления m^*, как видим, сравнительно мала ($\approx 0{,}07$). Это объясняется тем, что значения вероятности распределены от $m = 0$ до $m = 120$.

Maxima-программа:

```
numer:true$
L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1–p)), y/sqrt(2*%pi)* exp(–0.5*((m–n*p)*y)^2));
L_Lapl(67,120,0.56);
(%o3) 0.0733
```

Ответ: $\boxed{P_{120}(67) \approx 0{,}073.}$ ▶

Пример 5.9. *В цехе работают* 150 *автоматических станков. Вероятность того, что любой станок в течение смены сломается одинакова для всех станков и равна* 0,2. *Найти вероятности того, что: а) за смену* 35 *станков потребуют к себе внимания; б) от* 25 *до* 35 *станков потребуют к себе внимания.*

◀ а) В первом случае можно применить локальную теорему Лапласа, так как $n = 150$, $m = 35$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$ величина $npq = 24$. Найдём x по формуле (5.6)

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 150 \cdot 0{,}2}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \approx 1,02.$$

По таблице приложение 1, найдем $f(1{,}02) = 0{,}2371$ и, согласно (5.6), получим:

$$P_{150}(35) \approx 0{,}2371/\sqrt{24} \approx \mathbf{0{,}048}.$$

б) Во втором случае используем интегральную теорему (5.2). Здесь $m_1 = 25,\ m_2 = 35$,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 30}{\sqrt{24}} \approx -1{,}02, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 30}{\sqrt{24}} \approx 1{,}02.$$

Применяя формулу (5.8) и таблицу для функции Лапласа, приложение 2, найдем искомую вероятность

$P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx \Phi(1{,}02) - \Phi(-1,02) = 2\Phi(1{,}02) \approx 2{\cdot}0{,}346 = \mathbf{0{,}692}$. ◀

Maxima-программа:

numer:true$ fpprintprec:4$ n:150$ p:0.2$ m1:25$ m2:35$

load(distrib)$

pdf_binomial(35,n,p);

(%o7) 0.067

c:1/sqrt(n*p*(1 — p)); x1:(m1—n*p)*c; x2:(m2 — n*p)*c;

(%o9) –1.021

(%o10) 1.021

/* *Результаты по интегральной теореме Лапласа.* */

PL:cdf_normal(x2, 0, 1) — cdf_normal(x1, 0, 1);

(%o11) 0.693

Результаты по интегральной теореме Лапласа дают несколько заниженные значения.

Ответ: $\boxed{P_{150}(35) \approx 0{,}048;\ \ P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx 0{,}739.}$ ▶

Пример 5.10. *Доля изделий продукции завода высшего качества составляет* 40%. *Найти вероятности того, что из отобранных 300 изделий окажется высшего качества: а) от* 110 *до* 140 *изделий, б) не менее* 110 *изделий, в) не более* 109 *изделий.*

◀ Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.
Здесь $n = 300$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $np = 120$.

а) Найдем аргументы функции Лапласа при $m_1 = 110$ и $m_2 = 140$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36.$$

Тогда

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx \Phi(2{,}36) - \Phi(-1,18) \approx 0{,}491 + 0{,}381 = \mathbf{0{,}872}.$$

Эта вероятность оказалась довольно высокой вследствие того, что были просуммированы вероятности вблизи наивероятнейшего числа $m^* = 120$.

б) В этой части задачи нужно положить $m_1 = 110$, а $m_2 = 300$. Значение x_1 было найдено в пункте а, другой параметр

$$x_2 = \frac{300 - 120}{\sqrt{72}} = \frac{180}{6\sqrt{2}} \approx 21{,}21.$$

Используя нечетность функции Лапласа, находим соответствующую вероятность,

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi(21{,}21) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}381 = \mathbf{0{,}881}.$$

в) Так как сумма вероятностей

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \quad \text{и} \quad P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300)$$

равна 1, то

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) = 1 - P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 1 - 0{,}881 = \mathbf{0{,}119}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx 0{,}872$; $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 0{,}881$; $P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \approx 0{,}119$.

Для случая, когда n велико и p мало (меньше 0,1), выражение (5.8) даёт плохую оценку. В этом случае пользуются асимптотической формулой Пуассона.

5.5. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1 , то теоремы 5.1 и 5.2 неприменимы. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 5.3. *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty,\ p \to 0,\ np \to a$):*

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \tag{5.9}$$

Замечание 5.2. *Случай, когда $p \approx 1$, сводится к рассмотренному, если вместо $P_n(m)$ вычислять равную ей вероятность $P_n(n-m)$ появления $n-m$ раз противоположного события $\overline{A}$, вероятность появления которого в одном испытании $q = 1 - p \approx 0$.*

Пример 5.11. *Вероятность того, что взятый наудачу с полки магазина компьютер неисправен, равна* 0,003. *В магазине находятся 200 компьютеров. Найти вероятности того, что в магазине три компьютера неисправны.*

◀ Поскольку $n = 200, m = 3,\ p = 0{,}003 \ \Rightarrow\ np = 0{,}6$, поэтому можно применить формулу Пуассона (5.9).

$$P_{200}(3) = \frac{0{,}6^3 \cdot e^{-0{,}6}}{3!} \approx \mathbf{0{,}019}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P_{200}(3) \approx 0{,}019.}$

Пример 5.12. *Вероятность остановки автобуса из-за поломки в течение смены равна* 0,004. *Найти вероятности того, что в течение смены из* 1000 *машин, вышедших на линии, остановятся: а) две машины, б) пять машин, в) ни одна не остановится; г) менее пяти; д) более пяти.*

◀В данном случае $n = 1000,\ p = 0{,}004,\ np = 4$, поэтому можно применить формулу Пуассона (5.9).

а) Здесь $m = 2$ и

$$P_{1000}(2) = \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!} = \frac{8}{e^4} \approx \mathbf{0{,}147}.$$

б) Так как $m = 5$, то

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx \frac{128}{15 \cdot 54,6} \approx \mathbf{0{,}156}.$$

в) При $m = 0$

$$P_{1000}(0) = \frac{1}{e^4} \approx \frac{1}{54,6} \approx \mathbf{0{,}018}.$$

г) $m < 5$

$$P_{1000}(m < 5) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3) + P_{1000}(4) =$$
$$= \frac{1}{e^4}\left(1 + \frac{4}{1} + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24}\right) \approx \mathbf{0{,}629}.$$

д) $m > 5$

$$P_{1000}(m > 5) = 1 - P_{1000}(m < 6) = 1 - (P_{1000}(m < 5) + P_{1000}(5) \approx \mathbf{0{,}215}.$$ ▶

Ответ: $P_{1000}(2) \approx 0{,}147$; $P_{1000}(5) \approx 0{,}156$; $P_{1000}(0) \approx 0{,}018$; $P_{1000}(m < 5) \approx 0{,}629$; $P_{1000}(m > 5) \approx 0{,}215$.

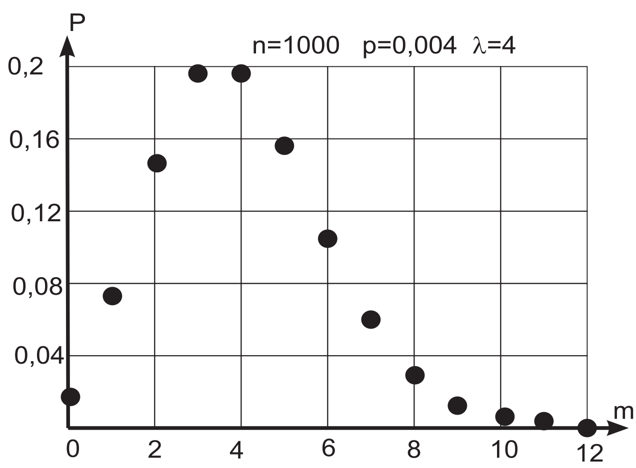

Рисунок 19. *К примеру 5.12*

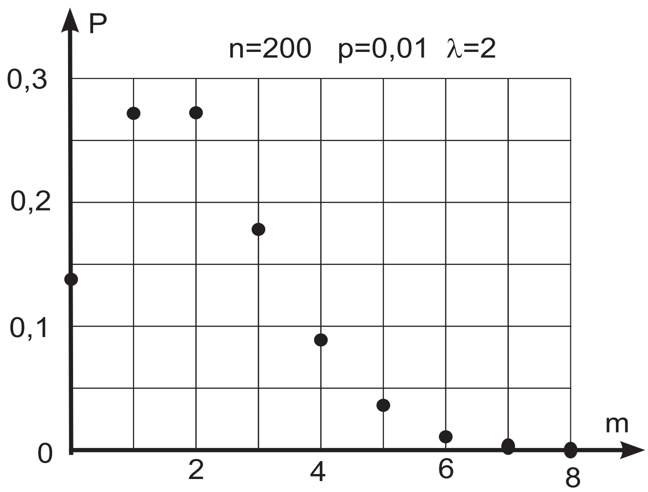

Рисунок 20. *К примеру 5.13*

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 5.12, рис. 19.

```
kill(all)$ fpprintprec:4$
n:1000$ p:0.004$ L:n*p;  array(P,n)$
fillarray(P, makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,12))$
G:makelist([k,P[k]], k, 0, 12);
plot2d([discrete,G], [x,0,12],[style,points],
[gnuplot_postamble, "set grid;"],[title, "n=1000 p=0.004"])$
```

Пример 5.13. *Продукция некоторого производства содержит* 1% *бракованных изделий. Найти вероятность того, что среди* 200 *изделий окажется бракованных: а) ровно три, б) менее трёх, в) более трёх, г) хотя бы одно.*

◀ Так как $n = 200$, $p = 0{,}01$, $np = 2$. Следовательно можно применить формулу Пуассона (5.9)

а) Вероятность того, что три ($m = 3$) изделия будут бракованными,

$$P_{200}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx \mathbf{0{,}180}.$$

б) Вероятность того, что менее трёх ($m < 3$) изделий будут бракованными, найдется как сумма

$$P_{200}(m < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} +$$
$$+ \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = e^{-2}(1 + 2 + 2) \approx \mathbf{0{,}677}.$$

в) Поскольку сумма

$$\sum_{m=0}^{200} P_{200}(m) = 1,$$

то вероятность наличия более трёх ($m > 3$) бракованных изделий

$$P_{200}(m > 3) = 1 - \sum_{m=0}^{3} P_{200}(m) \approx 1 - (0{,}677 + 0{,}180) = \mathbf{0{,}143}.$$

г) События «хотя бы одно изделие бракованное» и «ни одно изделие небракованное» противоположные, поэтому искомая вероятность

$$P = 1 - P_{200}(0) = 1 - e^{-2} \approx \mathbf{0{,}865}.$$

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 5.13, рис. 20. ▶

Ответ: $\boxed{P_{200}(3) \approx 0{,}180;\ \ P_{200}(m < 3) \approx 0{,}677;\ \ P_{200}(m > 3) \approx 0{,}143.}$

Если в условиях применимости интегральной теоремы Лапласа требуется оценить отклонение относительной частоты появления события от соответствующей вероятности, то используют приближённую формулу (5.10).

5.6. Отклонение частоты от вероятности

Пусть проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них; событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{5.10}$$

Пример 5.14. *Вероятность появления события в каждом из* 800 *независимых испытаний равна* 0,6. *Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на* 0,03.

◀ Здесь $n = 800$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}03$. Нужно найти вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right| \leqslant 0{,}03\right).$$

По формуле (5.10) эта вероятность равна

$$2\cdot\Phi\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{800}{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) \approx 2\cdot\Phi(1{,}73).$$

По таблицам найдем $\Phi(1{,}73) \approx 0{,}4582$. Следовательно, искомая вероятность равна $2\cdot 0{,}4582 =$ **0,9164**. ▶

Ответ: $\boxed{\approx 0{,}916.}$

Пример 5.15. *Вероятность появления события в каждом испытании равна* 0,2. *Сколько нужно провести испытаний, чтобы вероятность отклонения относительной частоты от вероятности этого события менее, чем* 0,05 *по абсолютной величине, была равна* 0,95*?*

◀ Применяем формулу (5.10) $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.
Здесь $p = 0{,}2$, $q = 1-p = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}05$. Левую часть уравнения приравниваем к 0,95. Получаем уравнение

$$0{,}95 = 2\Phi\left(0{,}05\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}16}}\right).$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0{,}475.$$

Из таблицы для функции Лапласа находим значение аргумента, при котором функция равна 0,475. Получаем

$$\frac{\sqrt{n}}{8} = 1{,}96 \quad \Rightarrow \quad n = (8 \cdot 1{,}96)^2 = 245{,}86 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n{=}246}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\ n = 246.}$

Пример 5.16. *В жилом доме имеется 1200 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,25.*
1) Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет между 275 и 350.
2) Найти вероятность того, что относительная частота включенных лампочек будет отклоняться от вероятности менее чем на 0,01.
3) Найти наивероятнейшее число включенных лампочек m^* и значение вероятности $P_{1200}(m^*)$.

◀ 1) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа (5.8)

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Здесь $n = 1200,\ m1 = 275,\ \ m2 = 350,\ \ p = 0{,}25,\ \ q = 0{,}75.$ $\Rightarrow$

$np = 300,\ \ \sqrt{npq} = \sqrt{1200 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{225} = 15.$

Получаем

$$P_{1200}(275 \leqslant m \leqslant 350) \approx \Phi\left(\frac{50}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-25}{15}\right) =$$

$= \Phi(3{,}33) + \Phi(1{,}67) \approx 0{,}49 + 0{,}4525 = \mathbf{0{,}9425}.$

2) Применяем формулу (5.10) $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$

$$P\left(\left|\frac{m}{1200} - 0{,}25\right| \leqslant 0{,}01\right) \approx 2\Phi\left(0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) =$$

$= 2\Phi\,(0{,}01 \cdot 80) = 2\Phi(0{,}8) = 2 \cdot 0{,}2881 = \mathbf{0{,}576}.$

3) Применяем формулу для наивероятнейшего числа (5.3)

$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p.$

Эту формулу можно записать в виде $np - q \leqslant m^* \leqslant np + p.$

Получаем, $299{,}25 \leqslant m^* \leqslant 300{,}25\ \ \Rightarrow m^* = 300.$

Применим локальную теорему Муавра-Лапласа. Находим искомую вероятность по формуле (5.6):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Получаем

$$P_{1200}(300) \approx \frac{1}{15} f(0) = \frac{0{,}3989}{15} \approx \mathbf{0{,}027}. ▶$$

Ответ: $\boxed{1)\ \approx 0{,}9425;\ 2)\ \approx 0{,}576;\ 3)\ \approx 0{,}027.}$

Задания для самостоятельной работы

5.1. Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,52, девочки — 0,48.

5.2. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,01. Из большой партии изделий отбирается 10 штук и проверяется их качество. Если среди них окажется два или более бракованных, то вся партия не принимается. Определить вероятность того, что вся партия будет отвергнута.

5.3. Брак выпускаемых цехом деталей составляет 6%. Определить наиболее вероятное число $m*$ годных деталей в партии из 500 штук и найти вероятность того, что в этой партии будет $m*$ бракованных деталей.

5.4. Предприятие выпускает 10% изделий второго сорта. Найти вероятность того, что из 200 выбранных случайным образом изделий, будет 15 изделий второго сорта.

5.5. Вероятность того, что деталь не прошла проверку, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажутся от 70 до 90.

5.6. Вероятность, что изделие фабрики будет отличного качества, равна 0,75. Найти вероятность того, что из 100 изделий фабрики отличного качества будет: а) не менее 71 и не более 80 изделий, б) не менее 71 изделий, в) не более 70 изделий.

5.7. Вероятность брака при производстве деталей равна 0,001. Найти вероятности того, что в партии из 5000 деталей окажется: а) две бракованные детали, б) не менее двух бракованных деталей.

5.8. В институте 2500 студентов. Вероятность того, что один студент заболеет в течение недели, равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение недели заболеет менее четырёх студентов.

5.9. Отдел технического контроля проверяет 625 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,02. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

6. Контрольная работа №1

6.1. Примерный вариант

1. В коробке находится 20 маркеров: 10 синих, 6 красных и 4 чёрных. Наугад взяли 5 маркеров. Найти вероятность того, что среди взятых маркеров: а) два красные и два синие; б) хотя бы один чёрный.

2. В область D, ограниченную двумя линиями: $D : \{y = x^2, \ y = 4\}$, брошена точка. Найти вероятность того, что она попадёт в область B, ограниченную также двумя линиями $B : \{y = x^2, \quad y = x\}$.

3. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность брака для первого станка равна — 0,03, для второго — 0,02, для третьего — 0,04. Производительность второго станка вдвое больше чем первого, а третьего вдвое меньше чем первого. Изготовленные детали попадают на общий конвейер. Определить вероятность, что а) наудачу взятая деталь будет годной; б) наудачу взятая деталь оказалась бракованной, какова вероятность, что она изготовлена на третьем станке.

4. Найти вероятность отказа схемы, рис. 22, если надёжности элементов $p(A_1) = 0{,}5$, $p(A_2) = 0{,}7$, $p(A_3) = 0{,}9$.

5. Найти вероятность того, что при 12 бросках кости шестёрка выпадет: а) 2 раза, б) не менее 3 раз.

6. Из урны, в которой 15 белых и 5 чёрных шара, вынимают подряд все находящиеся в нём шары. Найти вероятность того, что третьим по порядку будет вынут белый шар.

7. В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар.

6.2. Решение задач из примерного варианта

Пример 6.1. *В коробке находится 20 маркеров: 10 синих, 6 красных и 4 чёрных. Наугад взяли 5 маркеров. Найти вероятность того, что среди взятых маркеров: а) два красные и два синие; б) хотя бы один чёрный.*

◀ а) Пусть A — событие состоящее в том, что из коробки взяли 5 маркеров: два красные, два синие и один оставшийся чёрный. Применяем формулу классического определения вероятностей $P(A) = \dfrac{M}{N}$.

Число всевозможных исходов события A равно

$N = C_{20}^5 = \dfrac{20!}{5! \cdot 15!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 = 15504.$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно

$M = C_{10}^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 = \dfrac{10! \cdot 6! \cdot 4}{2! \cdot 8! \cdot 2! \cdot 4!} = 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 = 2700.$

Следовательно, $P(A) = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5}{19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 5}{19 \cdot 17 \cdot 8} = \dfrac{225}{1292} \approx$ **0,174**.

б) Пусть B — искомое событие, состоящее в том, что из коробки взяли 5 маркеров и среди них оказался хотя бы один чёрный маркер. Тогда $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Где B_i события, состоящие в том, что выбрали i чёрных маркеров. События несовместны, поэтому можно применить теорему о сумме $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$. Однако, быстрее найти вероятность противоположного события

$$P(\overline{B}) = P(B_0) = \frac{C_{16}^5}{C_{20}^5} = \frac{16! \cdot 5! \cdot 15!}{5! \cdot 11! \cdot 20!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 17} =$$
$$= \frac{7 \cdot 13}{19 \cdot 17} = \frac{91}{323}.$$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{91}{323} = \dfrac{232}{323} \approx$ **0,718**.▶

Ответ: $\boxed{\textbf{а) } \dfrac{225}{1292} \approx 0{,}174; \textbf{ б) } \dfrac{232}{323} \approx 0{,}718.}$

Пример 6.2. *В область D, ограниченную двумя линиями: $D : \{y = x^2, \quad y = 4\}$, брошена точка. Найти вероятность того, что она попадёт в область B, ограниченную также двумя линиями $B : \{y = x^2, \quad y = x\}$.*

◀ На рис. 21 изображены области D и B. Согласно геометрическому определению вероятности, вероятность искомого события A будет равна отношению площадей области B и D, обозначим их S_B и S_D. $P(A) = \dfrac{S_B}{S_D}$.

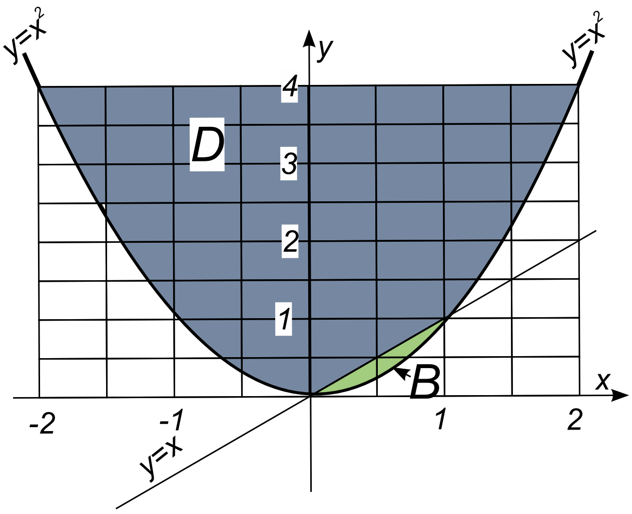

Рисунок 21. *К примеру 6.2*

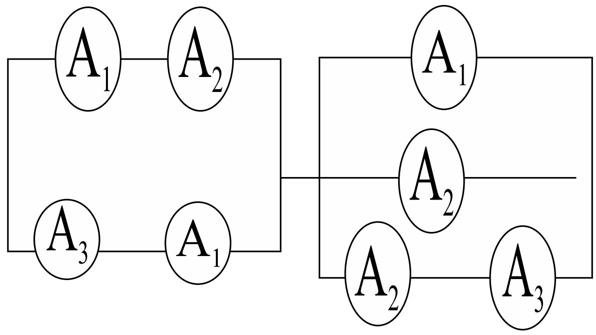

Рисунок 22. *К примеру 6.4*

Найдём их значения. Для этого от площади квадрата (или прямоугольного треугольника) вычитаем площадь криволинейной трапеции, сверху ограниченной параболой $y = x^2$, а снизу осью абсцисс.

$$S_D = 4 \cdot 4 - \int\limits_{-2}^{2} x^2\,dx = 16 - x^3/3\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

$$S_B = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \int\limits_{0} 1x^2\,dx = \tfrac{1}{2} - x^3/3\Big|_{1}^{0} = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = \frac{1/6}{32/3} = \frac{1}{64} \approx 0{,}016. \ ►$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Пример 6.3. *Рабочий обслуживает три станка. Вероятность брака для первого станка равна — 0,03, для второго — 0,02, для третьего — 0,04. Производительность второго станка вдвое больше чем первого, а третьего вдвое меньше чем первого. Изготовленные детали попадают на общий конвейер. Определить вероятность, что а) наудачу взятая деталь будет годной; б) наудачу взятая деталь оказалась бракованной, какова вероятность, что она изготовлена на третьем станке.*

а) ◄ Это классическая задача на формулу полной вероятности. Обозначим буквой A событие состоящее в том, что наудачу взятая деталь будет годной, а H_i — несовместные и образующие полную группу события состоящие в том, что наудачу взятая с конвейера деталь изготовлена на i-том станке. Обозначим за x количество деталей выпущенных за определённое время третьим станком. Тогда первый и второй станки за это же время выпустят $2x$

и $4x$, соответственно. Следовательно, $P(H_1) = \dfrac{2x}{2x+4x+x} = \dfrac{2}{7}$. Аналогично $P(H_2) = \dfrac{4}{7}$ и $P(H_3) = \dfrac{1}{7}$.

Вероятность того, что деталь будет стандартная, при условии что она изготовлена на первом станке будет равна $1 - 0{,}03 = 0{,}97$. Это запишем в виде: $P(A/H_1) = 0{,}97$. Аналогично $P(A/H_2) = 0{,}98$ и $P(A/H_3) = 0{,}96$.

Применяя формулу полной вероятности (4.1) для случая трёх гипотез, получаем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= \frac{1}{7}(2 \cdot 0{,}97 + 4 \cdot 0{,}98 + 1 \cdot 0{,}96) \approx 0{,}974. \blacktriangleright$$

б) ◀ Это классическая задача на формулу Байеса.

Пусть событием B будет событие состоящее в том, что наудачу взятая деталь будет бракованной. Это событие будет противоположным событию A. Поэтому $P(B) = 1 - P(A) \approx 0{,}026$.

Применяем формулу Байеса (4.2) для определения условной вероятности происхождения гипотезы H_3, при условии, что событие B произошло.

$$P(H_3/B) = \frac{P(H_3)P(B/H_3)}{P(B)} = \frac{1/7 \cdot 0{,}04}{0{,}026} \approx \mathbf{0{,}219}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\text{а) } \approx 0{,}974; \quad \text{б) } \approx 0{,}219.}$

Пример 6.4. *Найти вероятность отказа схемы, рис. 22, если надёжности элементов* $p(A1) = 0{,}5$, $p(A2) = 0{,}7$, $p(A3) = 0{,}9$.

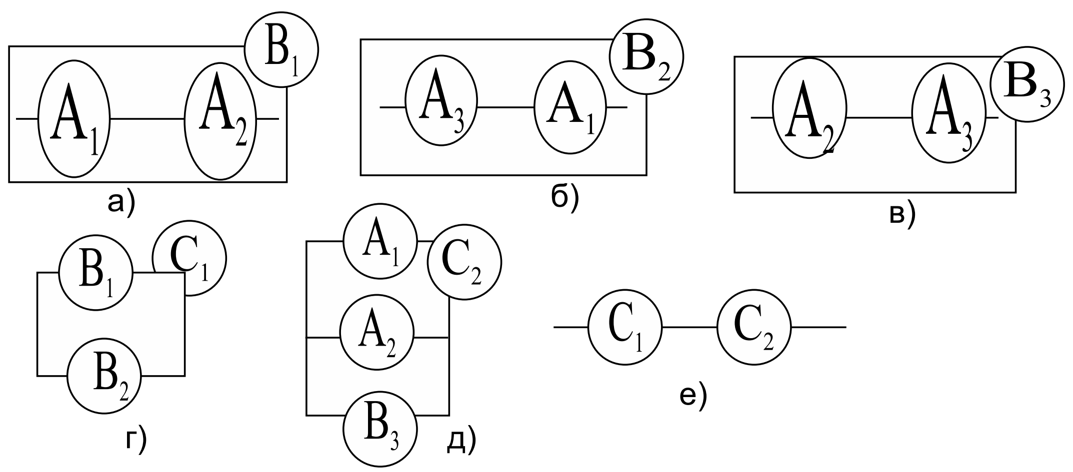

Рисунок 23. *К примеру 6.4*

◀ Событие состоящее в том, что схема работает безотказно в течении времени T обозначим A. Вероятность такого события A называется надёжностью схемы. Обозначим надёжности элементов

$P(A_1) = p_1 = 0{,}5, P(A_2) = p_2 = 0{,}7,\ P(A_3) = p_3 = 0{,}9.$

Тогда вероятности отказа элементов $q_i = 1 - p_i$ будут равны $P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}5$, $P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}3$, $P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}1$.

Выделим из исследуемой схемы три участка, состоящие из двух последовательно соединённых элементов. Это блоки B_1 рис. 23, а), B_2, рис. 23, б) и B_3, рис. 23, в). Найдём их надёжность . Последовательный блок работоспособен, если все элементы исправны. Так как элементы выходят из строя независимо, получаем:
$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p2 = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}35}$.
Аналогично, $P(B_2) = P(A_1) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}9 = \mathbf{0{,}45}$.
$P(B_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = p_2 \cdot p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = \mathbf{0{,}63}$.

Найдём надёжность двух параллельных блоков C_1 и C_2, рис. 23, г) и д). При параллельном соединении элементов схема работоспособна, когда работает хотя бы один элемент. Для определения надёжности параллельного блока находим сначала вероятность противоположного события — вероятность того, что блок вышел из строя, т.е. что все элементы неработоспособны, а затем применяем формулу для противоположного события.
$P(C_1) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) = 1 - \Big(1 - P(B_1)) \cdot (1 - P(B_2)\Big) =$
$= 1 - 0{,}65 \cdot 0{,}55 = \mathbf{0{,}6425}$.
$P(C_2) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{B_3}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot (1 - P(B_3)) =$
$= 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}37 = \mathbf{0{,}9445}$.

Наконец, вычисляем надёжность схемы состоящей из двух последовательно соединённых подсхем D_1 и D_2, рис. 23, е). Используя теорему о произведении вероятностей для несовместных событий, получаем надёжность исследуемой схемы
$P(A) = P(C_1) \cdot P(C_2) = 0{,}6425 \cdot 0{,}9445 = 0{,}60684125$.

Находим вероятность отказа схемы:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}) = \mathbf{0{,}39315875}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{0{,}39315875 \approx 0{,}393}$.

Пример 6.5. *Найти вероятность того, что при 12 бросках кости шестёрка выпадет: а) 2 раза, б) не менее 3 раз.*

◀ В данном задании выполняются 12 повторных испытаний, т.е. независимых испытаний в каждом из которых вероятность выпадения шестёрки постоянна и равна $p = 1/6$. Вероятность невыпадения шестёрки равна $q = 5/6$.

а) Применяем формулу Бернулли (5.1) $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

$$P_{12}(2) = C_{12}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} \cdot \frac{5^{10}}{6^{12}} = \frac{11 \cdot 5^{10}}{6^{11}} \approx \mathbf{0{,}29609}.$$

б) Искомое A событие можно представить в виде суммы 9 независимых событий: $A = A_3 + A_4 + \cdots + A_{12}$, где A_i — события состоящие в том, что шестёрка выпадает i раз. Очевидно, что проще найти вероятность противоположного события $\overline{A} = A_0 + A_1 + A_2$, а затем использовать формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$. Последнюю вероятность мы уже нашли, $P(A_2) = P_{12}(2) \approx 0{,}29609$.

$$P_{12}(0) = C_{12}^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0{,}11216.$$

$$P_{12}(1) = C_{12}^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0{,}26918.$$

$$P(A) \approx 1 - (0{,}11216 + 0{,}26918 + 0{,}29609) \approx \mathbf{0{,}322}.$$ ►

Ответ: $\boxed{\textbf{а)} \approx 0{,}296; \quad \textbf{б)} \approx 0{,}322.}$

Замечание 6.1. *В некоторых вариантах контрольной работы число испытаний достаточно велико, поэтому необходимо применять либо формулу Пуассона (5.9), когда np близко к 0 или 1, либо локальную или интегральную теоремы Муавра-Лапласа (5.6) для других случаев. Для тренировки разберите решения примеров (5.8 — 5.12).*

Пример 6.6. *Из урны, в которой 15 белых и 5 чёрных шаров, вынимают подряд все находящиеся в нём шары. Найти вероятность того, что третьим по порядку будет вынут белый шар.*

◄ Искомое случайное событие произойдет, когда будут вынуты первые два любых шара, а третий обязательно белый шар. Это событие можно записать в виде четырёх событий:

$A = A_ч A_ч A_б + A_ч A_б A_б + A_б A_ч A_б + A_б A_б A_б.$

Эти четыре события независимы, поэтому можно применить теорему о сумме несовместных событий, а для каждого из четырёх слагаемых применяем теорему произведения уже совместных событий:

$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$:

$$P(A) = P(A_ч A_ч A_б) + P(A_ч A_б A_б) + P(A_б A_ч A_б) + P(A_б A_б A_б) =$$
$$= \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{15}{18} + \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} + \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{14}{18} + \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} =$$
$$= \frac{15 \cdot (5(4 + 14 + 14) + 14 \cdot 13)}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{15 \cdot 342}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{3}{4}.$$

Задачу можно было решить проще, используя свойство событий:

$$A = A_ч A_ч A_б + A_ч A_б A_б + A_б A_ч A_б + A_б A_б A_б =$$
$$= (A_ч A_ч + A_ч A_б + A_б A_ч + A_б A_б) A_б = \Omega A_б = A_б.$$

$$P(A_б) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}. \quad ►$$

Ответ: $\boxed{0{,}75.}$

Пример 6.7. *В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найдите вероятность выигрыша каждым игроком.*

◄ Возможные исходы данного опыта заканчиваются вытаскиванием белого шара — событие $A_б$:

$A_б$, $A_ч A_б$, $A_ч A_ч A_б$, $A_ч A_ч A_ч A_ч A_б$, $A_ч A_ч A_ч A_ч A_б$.

Исходы в которых выиграет первый участник (событие A_1):

$$A_1 = A_б + A_ч A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_ч A_б.$$

Исходы в которых выиграет второй участник (событие A_2):

$$A_2 = A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_б.$$

Найдём вероятности этих событий.

$$P(A_1) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

$$P(A_2) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}. \quad ►$$

Ответ: $\boxed{P(A_1) = 0{,}6;\ \ P(A_2) = 0,4.}$

Пример 6.8. *На окружность радиуса R наугад ставится три точки A, B, C. Какова вероятность, что треугольник ABC остроугольный.*

◄ Переименуем эти точки по следующему правилу. Обозначим точку A — A_1. Точка которая находится следующей за точкой A при движении против часовой стрелке обозначив — A_2 и третью точку — A_3. Можно изобразить окружность и точки на рисунке, поместив точку A_1 на ось ординат. Чтобы треугольник был остроугольным, необходимо чтобы центр окружности был внутри треугольника, рис. 24 а). Очевидно, что точка A_2 не может находится в третьем или четвертом квадрантах, т.к. в этом случае угол $A_2A_3A_1$ будет тупым, рис. 24 б). Аналогична и точка A_3 не может находиться в верхней полуплоскости, т.к. в этом случае угол $A_1A_2A_3$ будет тупым, рис. 24 в). Чтобы угол $A_3A_1A_2$ был острым, надо чтобы разность полярных углов точек A_2 и A_1 было меньше π, рис. 24 г).

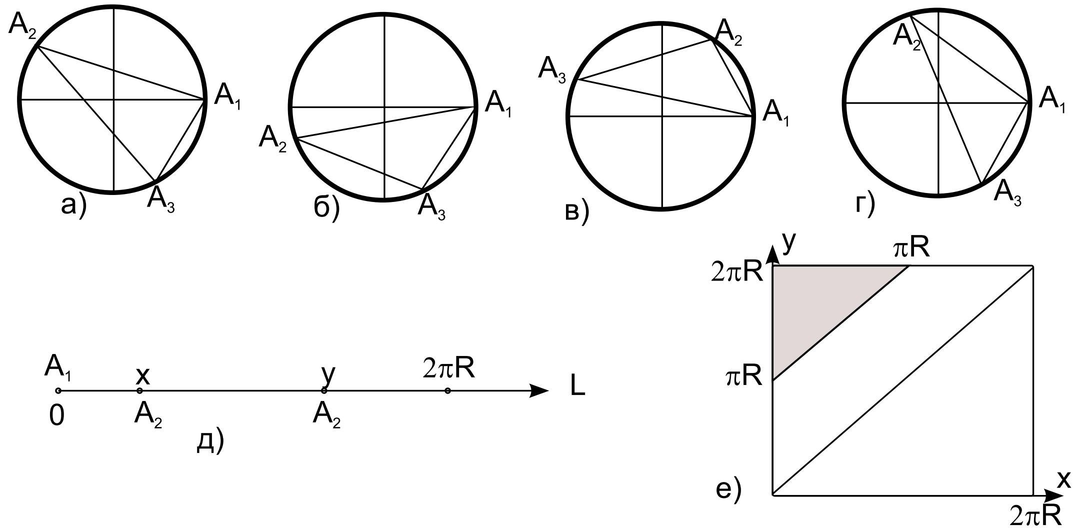

Рисунок 24. *К примеру 6.8*

Для наглядности разрежем окружность в точке A_1 и развернём её в отрезок длины $2\pi R$, рис. 24 д). Введем одномерную систему координат с началом в точке A_1. Обозначим координаты точки A_1 переменной x, а A_2 — y. Получаем систему неравенств: $0 < x < \pi R, \quad \pi R < y < 2\pi R, \; y - x < \pi R$. Последнее неравенство запишем в виде: $y < \pi x$. Изобразим на плоскости Oxy решение данной системы неравенств, рис. 24 е).

$$P(A) = \frac{S_{\triangle}}{S_{\square}} = \frac{0{,}5 \cdot (\pi r)^2}{(2\pi R)^2} = \frac{1}{8}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 0{,}125.}$

6.3. Вариант для самостоятельного решения

6.1. В урне из 15 чёрных и 5 белых шаров. Шар 100 раз вынимают из урны, смотрят цвет и возвращают обратно. Найти вероятность того, что:
а) белый шар появится 24 раза; б) чёрный шар появится не менее 70 раз.

6.2. В коробке из 18 конфет 6 – с ореховой начинкой, 7 – с фруктовой, остальные конфеты шоколадные. Найти вероятность того, что из пяти взятых конфет будут а) 3 шоколадные и одна с фруктовой начинкой; б) хотя бы одна шоколадная.

6.3. Найти надёжность схемы, если надежности элементов p(O)=0,85, p(□)=0,95.

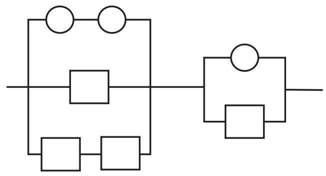

Рисунок 25. *К примеру 3*

6.4. Наугад взяты два положительных числа X и У, каждое меньше или равно 1. Найти вероятность того, что их сумма меньше или равна 1, а произведение больше или равно 0,09.

6.5. На заводе производительности первого второго и третьего цехов относятся как 3 : 4 : 3. Количество бракованных изделий в 1-м цехе — 2 %, второго — 3 %, а третьего — 5 %. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь произведена вторым цехом, если эта деталь оказалась бракованной.

6.6. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого 0,4, второго 0,6. Найти вероятность того, что будет три попадания, если каждый стрелок производит по два выстрела.

6.7. Два игрока поочерёдно бросают монету. Выигрывает тот, у которого первым выпадает герб. Какова вероятность, что выиграет первый игрок?

7. Дискретные случайные величины (д.с.в.)

Случайная величина, функция распределения, её свойства. Дискретная случайная величина, ряд распределения, функция распределения. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, их свойства.

7.1. Дискретные случайные величины

Кроме случайных событий и вероятностей их появления, в теории вероятностей нас обычно интересуют некоторые величины, связанные со случайными событиями и называемые случайными величинами.

Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей. Случайная величина является числовой характеристикой результата испытания, т.е. числовой функцией определённой на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$. Где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ — совокупность различных исходов (результатов) испытаний, $\mathcal{A}$ — множество всех подмножеств множества Ω, элементы которого называются случайными событиями и образуют σ-алгебру, а P — мера элементов множества $\mathcal{A}$ удовлетворяющая аксиомам вероятности.

Случайная величина $\xi = f(\omega)$ определяется как измеримая относительно меры P функция на Ω. Это означает, что для всех измеримых по Борелю множеств значений ξ (обозначим их A_ξ) их прообразы, т.е. множества A_ω, для которых $f(\omega) \in A_\xi$, должны принадлежать $\mathcal{A}$ и для них, следовательно, должна быть определена вероятность $P: \ \Omega \ \to [0;1]$, $P\{\xi \in A_\xi\} = P\{A_\omega\}$.

Определение 7.1. *Случайной величиной называется любая измеримая функция ξ, определённая на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$, принимающая свои значения на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.*

Т.е. это отображение $\xi: \ \Omega \ \to \ \mathbb{R}$.

Случайные величины будем изображать греческими буквами: ξ (кси), ζ (дзета), η (эта), θ (тета) и т.д., а их возможные значения строчными латинскими буквами: x, y, z и т.д.

Определение 7.2. *Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные значения из конечного или бесконечного счётного множества.*

Т.е. все эти значения можно «пересчитать» — поставить им в соответствие натуральные числа.

Говорят, что все возможные значения случайной величины составляют ее спектр.

Определение 7.3. ***Непрерывной*** *называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.*

Дискретная случайная величина полностью определяется своим ***законом (рядом) распределения*** — таблицей, в которой перечислены все значения, принимаемые случайной величиной и соответствующие им вероятности (см. табл. 7.1.) Графическое изображения закона распределения называется многоугольником распределения.

Таблица 7.1

Закон распределения				
ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

При этом сумма вероятностей должна быть равна 1.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Дадим ещё несколько определений. Для этого введем ещё закон распределения дискретной случайной величины η, табл. 7.2

Таблица 7.2

Закон распределения				
η	y_1	y_2	$\dots$	y_m
p'	p'_1	p'_2	$\dots$	p'_m

Определение 7.4. *Случайные величины ξ и η называются* ***независимыми****, если являются независимыми события $\xi = x_i$ и $\eta = y_j$ при любых сочетаниях значений $i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, m$.*

Определение 7.5. ***Произведением*** *случайной величины ξ на постоянное число α называется случайная величина $\alpha\xi$, принимающая возможные значения αx_i с теми же вероятностями, с какими ξ принимает значения x_i.*

Определение 7.6. *Возведение в степень.Случайная величина ξ^k (k — натуральное число) определяется как случайная величина с возможными значениями x_i^k и вероятностями случайной величины ξ.*
$P(x_i^k) = P(x_i), i = \overline{1, n}$.

Определение 7.7. *Суммой (разностью) случайных величин ξ и η будет случайная величина $\zeta = \xi \pm \eta$, которая принимает все возможные значения $x_i \pm y_j$ с вероятностями $p_{ij} = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j) = p_i \cdot p'_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.*

Определение 7.8. *Произведением независимых случайных величин ξ и η будет случайная величина $\zeta = \xi \cdot \eta$ возможные значения которой равны произведениям возможных значений случайных величин ξ и η — $x_i \cdot y_j$, а соответствующие вероятности перемножаются.*

Ряд распределения случайной величины $\zeta = \xi \cdot \eta$ будет иметь вид

$\zeta = \xi\eta$	x_1y_1	$\cdots$	x_1y_m	$\cdots$	x_ny_1	$\cdots$	x_ny_m
p	$p_1p'_1$	$\cdots$	$p_1p'_m$	$\cdots$	$p_np'_1$	$\cdots$	$p_np'_m$

Пример 7.1. *Дискретная случайная величина задана следующим законом распределения:*

ξ	1	2	4	5	6	8	10
p	0,05	0,1	0,2	0,3	0,1	0,15	0,1

Построить многоугольник распределения.

◀ Возьмём прямоугольную систему координат, на оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а на оси ординат — соответствующие вероятности p_i. Нанесем точки

$$M_1(1; 0{,}05), M_2(2; 0{,}1), M_3(4; 0{,}2), M_4(5; 0{,}3; M_5(6; 0{,}1), M_6(8; 0{,}15, M_7(10; 0{,}1))$$

и соединим их отрезками прямых. С учётом боковых ординат получим замкнутый многоугольник, рис 26. ▶

Пример 7.2. *Случайная величина ξ — число появлений цифры пять при двукратном бросании игральной кости. Найти ряд распределения этой случайной величины.*

◀ В данном опыте случайная величина ξ может принять три значения: 0, 1 или 2. Найдём их вероятности.

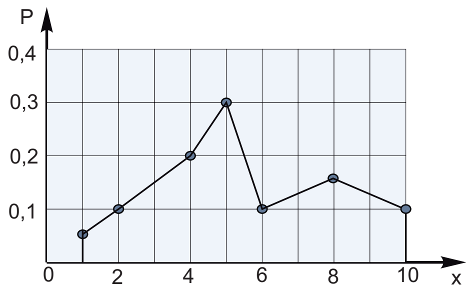

Рисунок 26. *Многоугольник распределения примера 7.1*

Если все три раза не выпала цифра пять, тогда $\xi = 0$

$$P(\xi = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

Если оба раза выпала цифра пять, тогда $\xi = 2$

$$P(\xi = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}.$$

Для вычисления вероятностей $P(\xi = 1)$ применяем формулу повторных испытаний Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

$$P(\xi = 1) = C_2^1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{10}{36}.$$

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2
p	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Отметим, что $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. ►

Пример 7.3. *В студенческой группе из* 12 *человек* 5 *отличников. Наудачу отобраны* 4 *студента. Составить закон распределения числа отличников среди отобранных.*

◄ Дискретная случайная величина ξ — число отличников среди отобранных студентов — принимает следующие возможные значения: $\xi = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Вероятности возможных значений ξ найдутся здесь по формуле гипергеометрического распределения:

$$P(\xi = k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

где N — общее число студентов в группе, n — количество отличников в группе, m — число отобранных студентов, $k = 0, 1, 2, \dots m$ — число отличников среди отобранных студентов.

Для данного примера: $P(\xi = k) = \dfrac{C_5^k \cdot C_7^{4-k}}{C_{12}^4}$.

$C_{12}^4 = \dfrac{12!}{4! \cdot 8!} = 495.$

$P(\xi = 0) = \dfrac{C_5^0 \cdot C_7^4}{C_{12}^4} = \dfrac{35}{495} = \dfrac{7}{99}$, $\quad P(\xi = 1) = \dfrac{C_5^1 \cdot C_7^3}{C_{12}^4} = \dfrac{175}{495} = \dfrac{35}{99}$,

$P(\xi = 2) = \dfrac{C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{12}^4} = \dfrac{210}{495} = \dfrac{42}{99}$, $\quad P(\xi = 3) = \dfrac{C_5^3 \cdot C_7^1}{C_{12}^4} = \dfrac{70}{495} = \dfrac{14}{99}$,

$P(\xi = 4) = \dfrac{C_5^4 \cdot C_7^0}{C_{12}^4} = \dfrac{5}{495} = \dfrac{1}{99}$.

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	7/99	35/99	42/99	14/99	1/99

Отметим, что, как и положено, сумма всех вероятностей равна единице.

►

Пример 7.4. *В пакете имеются* 5 *карточек с номерами от* 1 *до* 5. *Наудачу достали две карточки. Принять за случайную величину ξ сумму номеров выбранных карточек. Построить ряд распределения.*

◄ Из четырёх чисел можно составить всего шесть исходов данного испытания: $\omega_1 =$ "$1+2$", $\omega_2 =$ "$1+3$", $\omega_3 =$ "$1+4$", $\omega_4 =$ "$1+5$", $\omega_5 =$ "$2+3$", $\omega_6 =$ "$2+4$", $\omega_7 =$ "$2+5$", $\omega_8 =$ "$3+4$", $\omega_9 =$ "$3+5$", $\omega_{10} =$ "$4+5$".

Вероятности получения каждой исхода одинаковы и равны 0,1, но с учётом того, что некоторые суммы 5, 6 и 7, встречаются дважды, получаем следующий ряд распределения для д.с.в. ξ:

ξ	3	4	5	6	7	8	9
p	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

►

Пример 7.5. *Автомобиль отправляется из пункта A в пункт B. На пути движения автомашины 4 светофора, каждый из которых либо разрешает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,3, либо запрещает с вероятностью 0,7. Пусть случайная величина ξ — число пройденных машиной светофоров до первой остановки. Построить таблицу распределения вероятностей.*

◄ Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Данная случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметрами $p = 0{,}7$ и $q = 0{,}3$.

$P(\xi = 0)$ — вероятность, что автомашина не пройдет ни одного светофора, т.е. остановится перед первым. Но эта вероятность, согласно условию, равна 0,7.

$$P(\xi = 0) = 0{,}7.$$

$P(\xi = 1)$ — вероятность совмещения двух независимых событий: машина пройдет первый светофор и остановится перед вторым.

Следовательно,

$$P(\xi = 1) = p \cdot q = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21.$$

Аналогично рассуждая, найдем, что

$$P(\xi = 2) = p \cdot q^2 = 0{,}063, \qquad P(\xi = 3) = p \cdot q^3 = 0{,}0189.$$

Случайная величина $\xi = 4$, если автомобиль проехал без остановок все 4 светофора и остановился только в пункте B

$$P(\xi = 4) = q^4 = 0{,}0081.$$

Таким образом, таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,7000	0,2100	0,0630	0,0189	0,0081

Отметим, что, как и положено,сумма всех вероятностей равна единице. ►

7.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Рассмотрим числовые характеристики дискретных случайных величин (д.с.в).

Закон распределения полностью определяет дискретную случайную величину. Однако иногда удобнее характеризовать её с помощью нескольких числовых характеристик, каждая из которых определяет одно из свойств этой случайной величины. Одной из таких числовых характеристик является математическое ожидание. В литературе встречаются различные обозначения для математического ожидания случайной величины ξ: $M(\xi)$, M_ξ, $M[\xi]$, $E(\xi)$, E_ξ, $E[\xi]$. Мы будем использовать первое обозначение.

Определение 7.9. *Математическим ожиданием $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ называется сумма произведений всех её значений на соответствующие вероятности:*

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{7.1}$$

Свойства математического ожидания

(1) Математическое ожидание константы равно константе:

$$M(C) = C.$$

(2) Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi).$$

(3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta). \tag{7.2}$$

(4) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{7.3}$$

Замечание 7.1. *Свойства 2 и 3 позволяют для любого конечного числа случайных величин* $\xi_1, \ \ldots, \xi_n$ *и чисел* $C_1, \ \ldots, C_n$ *написать:*

$$M(C_1\xi_1 + \ \ldots + C_n\xi_n) = C_1 M(\xi_1) + \ \ldots + C_n M(\xi_n).$$

Поскольку рассматриваемые величины случайные, кроме среднего значения, полезно было бы знать характеристику степени их разброса вокруг среднего значения. В качестве такой характеристики нельзя рассматривать отклонение случайной величины от математического ожидания $\xi_c = \xi - M(\xi)$, т.к. оно случайно. В среднем это отклонение равно нулю:

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Отклонение случайной величины от математического ожидания $\xi_c = \xi - M(\xi)$ называется центрированной случайной величиной.

Поэтому в качестве характеристики разброса случайной величины вокруг её среднего значения рассматривают математическое ожидание квадрата отклонения.

Определение 7.10. *Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения от математического ожидания:*

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2. \tag{7.4}$$

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(\xi) = \sum_i (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i. \tag{7.5}$$

Иногда для вычисления дисперсии удобнее пользоваться формулой:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \tag{7.6}$$

Свойства дисперсии

(1) $D(\xi) \geqslant 0$.

(2) $D(C) = 0$.

(3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$.

(4) Для независимых случайных величин ξ и η: $D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

Для произвольных случайных величин ξ и η справедлива формула

$$D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta) + 2cov(\xi,\eta). \tag{7.7}$$

Определение 7.11. ***Ковариацией*** *двух случайных величин ξ и η, определённых на одном вариационном пространстве, называется математическое ожидание от произведения центрированных случайных величин ξ_c и η_c .*

$$cov(\xi,\eta) = M\big((\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))\big). \tag{7.8}$$

Эквивалентная формула для ковариации.

$$cov(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta). \tag{7.9}$$

Вероятностный смысл дисперсии заключается в том, что она характеризует степень рассеяния случайной величины около её среднего значения (математического ожидания).

Однако, если среднее значение $M(\xi)$ имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, то $D(\xi)$ имеет другую размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Это не всегда удобно, поэтому ввели другую характеристику рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама случайная величина.

Определение 7.12. ***Средним квадратическим отклонением*** *случайной величины ξ называют квадратный корень из её дисперсии:*

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{7.10}$$

Пример 7.6. *Случайная величина ξ определяется следующим рядом распределения:*

ξ	1	2	3	4	5	6	7
p	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

◀ Математическое ожидание равно сумме произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

или

$M(\xi) = 1 \cdot \dfrac{1}{28} + 2 \cdot \dfrac{2}{28} + 3 \cdot \dfrac{3}{28} + 4 \cdot \dfrac{4}{28} + 5 \cdot \dfrac{5}{28} + 6 \cdot \dfrac{6}{28} + 7 \cdot \dfrac{7}{28} = \dfrac{140}{28} = \mathbf{5}.$

Дисперсию найдём двумя способами.

1) По формуле (7.5)

$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i =$

$= (1-5)^2 \cdot \dfrac{1}{28} + (2-5)^2 \cdot \dfrac{2}{28} + (3-5)^2 \cdot \dfrac{3}{28} + (4-5)^2 \cdot \dfrac{4}{28} + (5-5)^2 \cdot \dfrac{5}{28} +$

$+(6-5)^2 \cdot \dfrac{6}{28} + (7-5)^2 \cdot \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{28}(16 + 18 + 12 + 4 + 6 + 28) = \dfrac{84}{28} = \mathbf{3}.$

2) Для нахождения дисперсии по формуле (7.6)

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 .$$

Сначала найдем $M(\xi^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$:

$M(\xi^2) = \dfrac{1}{28} + 2^2 \cdot \dfrac{2}{28} + 3^2 \cdot \dfrac{3}{28} + 4^2 \cdot \dfrac{4}{28} + 5^2 \cdot \dfrac{5}{28} +$

$+6^2 \cdot \dfrac{6}{28} + 7^2 \cdot \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{28}(1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343) = \dfrac{784}{28} = 28.$

Таким образом, дисперсия

$$D(\xi) = 28 - 25 = \mathbf{3}.$$

Среднее квадратичное отклонение найдем как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}732}.$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 5;\ D(\xi) = 3;\ \sigma(\xi) = \sqrt{3} \approx 1{,}732.}$

Пример 7.7. *Случайная величина ξ определяется следующим рядом распределения:*

ξ	*1,2*	*1,6*	*2,3*	*3,2*	*4,5*
p	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*0,2*	*0,1*

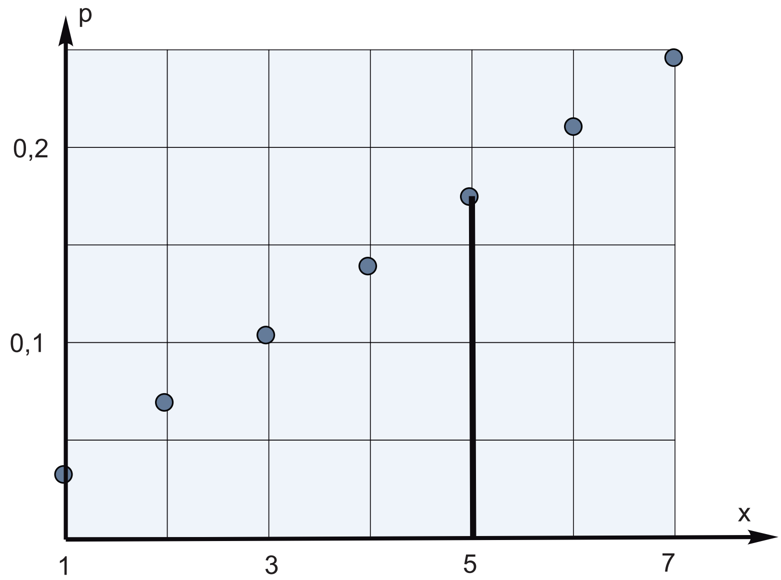

Рисунок 27. *К примеру 7.6*

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

◀ Математическое ожидание равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

или Подставляя данные из таблицы, получаем

$$M(\xi) = 1{,}2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6 \cdot 0{,}4 + 2{,}3 \cdot 0{,}1 + 3{,}2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5 \cdot 0{,}1 = \mathbf{2{,}2}.$$

Дисперсию найдём двумя способами.

1) По формуле (7.5)

$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i =$
$= (1{,}2 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (1{,}6 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (2{,}3 - 2,2)^2 \cdot 0{,}1 +$
$+ (3{,}2 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (4{,}5 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}1 = \mathbf{1{,}074}.$

2) Для нахождения дисперсии по формуле (7.6)

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2.$$

Сначала найдем $M(\xi^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$:

$M(\xi^2) = 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 2{,}3^2 \cdot 0{,}1 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5^2 \cdot 0{,}1 =$
$= 1{,}44 \cdot 0{,}2 + 2{,}56 \cdot 0{,}4 + 5{,}29 \cdot 0{,}1 + 10{,}24 \cdot 0{,}2 + 20{,}25 \cdot 0{,}1 = 5{,}914.$

Таким образом, дисперсия

$$D(\xi) = 5{,}914 - 2{,}2^2 = \mathbf{1{,}074}.$$

Среднее квадратичное отклонение найдем как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1{,}074} \approx \mathbf{1{,}036}.$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 2{,}2;\ D(\xi) = 1{,}074;\ \sigma(\xi) \approx 1{,}036.}$ ►

Пример 7.8. *Найти математическое ожидание случайной величины* ζ, *если*
$\zeta = 5\xi - 4\eta, \quad M(\xi) = 6, \quad M(\eta) = 9.$

◄ Используем свойства математического ожидания: математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, и постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания. Получаем

$M(\zeta) = M(5\xi - 4\eta) = M(5\xi) - M(4\eta) = 5 \cdot M(\xi) - 4 \cdot M(\eta) = 5 \cdot 6 - 4 \cdot 9 =$
$= -6.$ ►

Ответ: $\boxed{M(\xi) = -6.}$

Пример 7.9. *Случайные величины* ξ *и* η *независимы. Найти дисперсию случайной величины* $\zeta = 3\xi - 6\eta$, *если* $D(\xi) = 2,\ D(\eta) = 0{,}5$.

◄ С учётом того, что дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых и что постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат, получим:

$D(\zeta) = D(3\xi - 6\eta) = D(3\xi) + D(6\eta) = 9 \cdot D(\xi) + 36 \cdot D(\eta) = 9 \cdot 2 + 36 \cdot 0{,}5 =$
$= \mathbf{36}.$ ►

Ответ: $\boxed{D(\xi) = 36.}$

Пример 7.10. *Случайная величина* ξ *определяется следующим неполным рядом распределения:*

ξ	x_1	*2*	*6*	*8*	*12*
p	p_1	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,1*

Найти x_1 *и* p_1, *зная, что математическое ожидание* $M(\xi) = 4$.

◀ Так как в любом законе распределения сумма вероятностей равна 1, то $p_1 = 1 - (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}1) = 0{,}3$. Подставляя в формулу (7.1) $M(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{5} x_i p_i$ числовые данные, получим уравнение

$4 = x_1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}1.$

$0{,}3x_1 = 0$

Отсюда найдем $x_1 = \mathbf{0}$. ▶

Ответ: $\boxed{x_1 = 0;\ p_1 = 0{,}3.}$

Пример 7.11. *Даны законы распределения двух независимых д.с.в ξ и η:*

ξ	1	*2*	*3*
p	*0,3*	*0,5*	*0,2*

и

η	-2	*0*
p	*0,4*	*0,6*

Найти законы распределения д.с.в $\xi + \eta$ и $\xi \cdot \eta$ и найти их математическое ожидание и дисперсию.

◀ Найдём $M(\xi), M(\eta), D(\xi)$ и $D(\eta)$.

$M(\xi) = 0{,}3 + 1 + 0{,}6 = \mathbf{1{,}9}$, $\quad M(\eta) = \mathbf{-0{,}8}$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 0{,}3 + 2 + 1{,}8 - 3{,}61 = \mathbf{0{,}49}$,

$D(\eta) = 1{,}6 - 0{,}64 = \mathbf{0{,}96}$.

Используем определения суммы (7.7) и произведения (7.8) независимых случайных величин. Складывая значения x_i на y_j случайных величин ξ и η, а в качестве вероятностей принимая значения произведения их вероятностей, получаем таблицу:

$\xi + \eta$	-1	0	1	1	2	3
p	0,12	0,2	0,08	0,18	0,3	0,12

Суммируем столбцы с одинаковыми значениями, получаем закон распределения д.с.в. $\xi + \eta$:

$\xi + \eta$	-1	0	1	2	3
p	0,12	0,2	0,26	0,3	0,12

$M(\xi + \eta) = -0{,}12 + 0{,}26 + 0{,}6 + 0{,}36 = \mathbf{1{,}1}$.

$M((\xi + \eta)^2) = 0{,}12 + 0{,}26 + 1{,}2 + 1{,}08 = 2{,}66.$

$D(\xi + \eta) = 2{,}66 - 1{,}21 = \mathbf{1{,}45}$.

Для определения суммы математических ожиданий и дисперсий можно было применить их свойства.

$M(\xi+\eta) = M(\xi) + M(\eta) = 1{,}9 - 0{,}8 = 1{,}1.$

$D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta) = 0{,}49 + 0{,}96 = 1{,}45.$

Для вычисления произведения д.с.в используем определение 7.8. Умножаем значения x_i на y_j компонентов случайных величин ξ и η, а в качестве вероятностей принимая значения произведения их вероятностей, получаем таблицу:

$\xi\eta$	-2	-4	-6	0	0	0
p	0,12	0,2	0,08	0,18	0,3	0,12

Суммируем столбцы с одинаковыми значениями случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	-6	-4	-2	0
p	0,08	0,2	0,12	0,6

$M(\xi\eta) = -0{,}48 - 0{,}8 - 0{,}24 = \mathbf{-1{,}52}.$

Д.с.в. ξ и η независимые, поэтому эту величину можно было найти используя свойство 4

$M(\xi\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta) = 1{,}9 \cdot (-0{,}8) = -1{,}52.$

$M((\xi\eta)^2) = 36 \cdot 0{,}08 + 16 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}12 = 6{,}56.$

$D(\xi\eta) = 6{,}56 - 1{,}52^2 = \mathbf{4{,}25}.$ ►

Пример 7.12. *Даны законы распределения д.с.в ξ:*

ξ	-2	-1	*0*	*1*	*2*
p	*0,1*	*0,3*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Найти закон распределения д.с.в $\eta = 3\xi^2$ и найти $M(\eta)$ и $D(\eta)$.

◄ Используя определения произведения д.с.в. на число (Определение 7.6) и возведение д.с.в. в степень (Определение 7.5), получаем следующую таблицу:

ξ	12	3	0	3	12
p	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

Суммируем столбцы с одинаковыми значениями случайной величины получаем закон распределения д.с.в. $\eta = 3\xi^2$:

ξ	0	3	12
p	0,3	0,4	0,3

$M(\eta) = 1{,}2 + 3{,}6 = \mathbf{4{,}8}, \qquad D(\eta) = 9 \cdot 0{,}4 + 144 \cdot 0{,}3 = \mathbf{46{,}8}.$ ►

7.3. Функция распределения случайной величины

Дискретная случайная величина полностью определяется своим законом распределения — таблицей 7.1. Однако наряду с дискретными случайными величинами, принимающими отдельные значения, существуют другие, принимающие все значения из некоторого промежутка. Их невозможно задать перечислением всех принимаемых ими значений, поэтому был предложен универсальный способ задания случайной величины, пригодный во всех случаях.

Определение 7.13. ***Функцией распределения*** *$F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{7.11}$$

Пример 7.13. *Случайная величина ξ — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.*

◄ Возможные значения данной случайной величины — числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом, вероятность того, что ξ примет любое из этих значений, одна и та же и равна $1/6$. Таблица распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

При $x \leqslant 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений, меньших единицы. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 1/6$. Если $2 < x \leqslant 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leqslant \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:

$$F(x) = P(\xi < x) = P((\xi < 2) + (2 \leqslant \xi < 3)) = P(\xi < 2) + P(2 \leqslant \xi < 3).$$

Но $P(\xi < 2) = 1/6$, а $P(2 \leqslant \xi < 3)$ также равно $1/6$, так как полуинтервалу $2 \leqslant x < 3$ принадлежит только одно возможное значение, принимаемое ξ, а именно 2. Таким образом, если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

Аналогично, если $3 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 3) + P(3 \leqslant \xi < 4) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Для $4 < x \leqslant 5$

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < x) + P(4 \leqslant \xi < 5) = 1/2 + 1/6 = 2/3,$$

а для $5 < x \leqslant 6$ $F(x) = 2/3 + 1/6 = 5/6$. Наконец, если $x \geqslant 6$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 6) + P(6 \leqslant \xi < x) = 5/6 + 1/6 = 1.$$

График этой функции $F(x)$ оказывается ступенчатой линией со скачками в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, равными $1/6$, рис. 28.

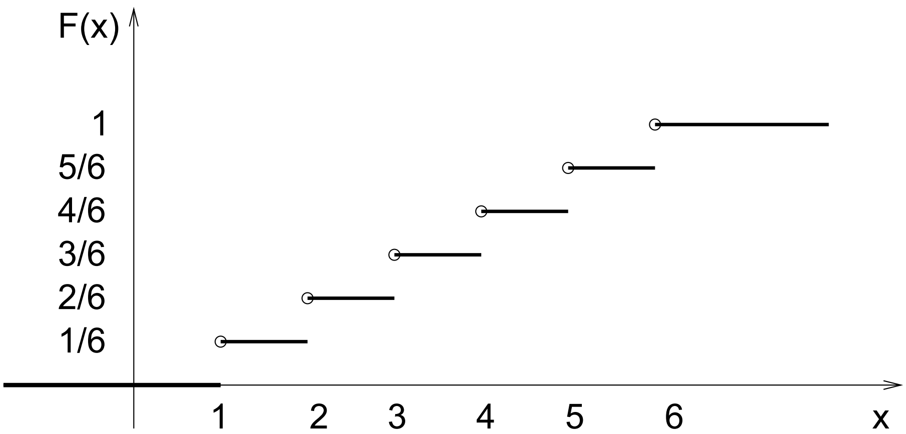

Рисунок 28. *Решение примера 7.13*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 1/6, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1/3, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1/2, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 2/3, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 5/6, & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{при} \quad 6 < x. \end{cases}$$

►Рассмотрим решение двух примерных задач 1.7 из типового расчёта.

Пример 7.14. *Стрелку дали 5 патронов для поражения мишени. Мишень поражается первым попаданием. Вероятность попадания в мишень* *при каждом выстреле постоянна и равна* $p = 0{,}6$. *Найдите ряд распределения случайной величины* ξ *числа оставшихся патронов, постройте график функции распределения случайной величины* ξ, *найдите* $M(\xi)$ *и* $D(\xi)$.

◀ Возможные значения данной случайной величины ξ — числа $0, 1, 2, 3, 4$. При этом случайная величина ξ принимает значение 0, когда либо цель не будет поражена, т.е. совершено 5 промахов, либо цель поражена только пятым выстрелом. Пусть $q = 1 - p = 0{,}4$ вероятность промаха.

Тогда $P(\xi = 0) = qqqqq + qqqqp = qqqq(q + p) = qqqq = 0{,}4^4 = 0{,}0256$.
$P(\xi = 1) = qqqp = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0384$.
$P(\xi = 2) = qqp = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$.
$P(\xi = 3) = qp = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}25$.
$P(\xi = 4) = 0{,}6$.

Ряд распределения случайной величины ξ имеет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	$qqqqq{+}qqqqp$	$qqqp$	qqp	qp	p

Или

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0256	0,0384	0,096	0,24	0,6

Функция распределения данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } \ x \leqslant 0, \\ 0{,}0256, & \text{при } \ 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}0256 + 0{,}0384 = 0{,}064, & \text{при } \ 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}064 + 0{,}096 = 0{,}16, & \text{при } \ 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}16 = 0{,}24 = 0{,}4, & \text{при } \ 3 < x \leqslant 4, \\ 0{,}4 + 0{,}6 = 1, & \text{при } \ x > 4. \end{cases}$$

Графиком данной функции будет кусочно постоянная функция, имеющая такой же вид, как и для предыдущего примера, см. рис. 29.

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{4} kP_k = 0 \cdot 0{,}0256 + 1 \cdot 0{,}0384 + 2 \cdot 0{,}096 + 3 \cdot 0{,}24 + 4 \cdot 0{,}6 =$
$= \mathbf{3{,}3504}$.

$D(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{4} k^2P_k - M^2\xi =$
$= 1^2 \cdot 0{,}0384 + 2^2 \cdot 0{,}096 + 3^3 \cdot 0{,}24 + 4^2 \cdot 0{,}6 - 3{,}3504^2 = \mathbf{0{,}9572}$. ▶

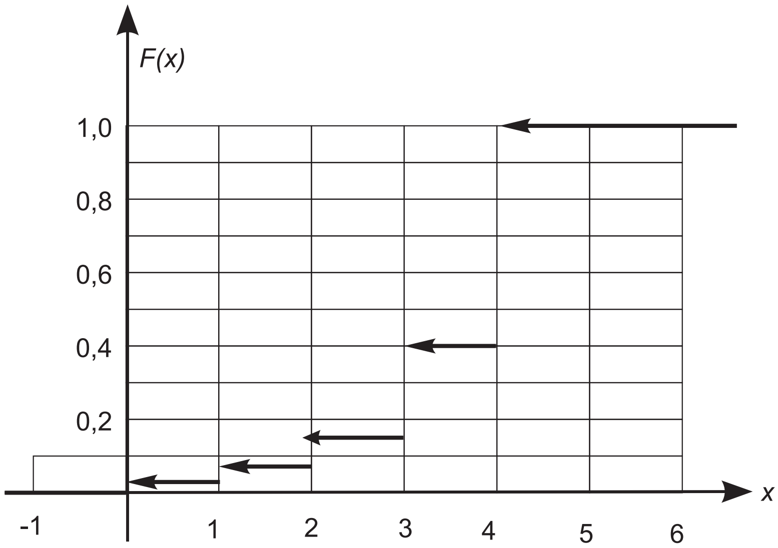

Рисунок 29. *Функция распределения примера 7.14*

7.4. Задачи из типового расчета на случайные величины

Задача 1.7

Пример 7.15. *На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 4 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна* 0,6, *второй —* 0,7, *третий —* 0,8, *а четвертый —* 0,9 . *Найдите ряд распределения случайной величины* ξ *числа студентов, сдавших экзамен, постройте график функции распределения, найдите* $M(\xi)$, $D(\xi)$ *и* $\sigma(\xi)$.

► Дискретная случайная величина ξ — число числа студентов, сдавших экзамен, принимает следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad x_4 = 4.$$

Введем обозначения: A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — событие состоящее в том, что i-тый студент сдал экзамен. $p_i = P(A_i)$, $q_i = P(\overline{A}_i) = 1 - p_i$.

Тогда событие B_i, состоящее в том i студентов сдадут экзамен можно записать следующими выражениями:

$B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$,

$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$,

$B_2 = A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 +$
$+ \overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4$,

$B_3 = A_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4$.

$B_4 = A_1A_2A_3A_4$.

Находим вероятности данных событий.
$P(B_0) = q_1q_2q_3q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$
$P(B_1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 =$
$= 0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}2\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}2\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}8\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}2\cdot0{,}9 = 0{,}0404$,
$P(B_2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4 =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 +$
$+ 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}2144$,
$P(B_3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 =$
$= 0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}8\cdot0{,}1+0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}2\cdot0{,}9+0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}8\cdot0{,}9+0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}8\cdot0{,}9 = 0{,}4404$.
$P(B_4) = p_1p_2p_3p_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024$.

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0024	0,0404	0,2144	0,4404	0,3024

Отметим, что сумма вероятностей равна единице.

Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 0{,}0024, & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}0428, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}2572, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}6976, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

На рис. 30 изображён график функции распределения.

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}0024 + 1 \cdot 0{,}0404 + 2 \cdot 0{,}2144 + 3 \cdot 0{,}4404 + 4 \cdot 0{,}3024 = \mathbf{3}$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 0^2 \cdot 0{,}0024 + 1^2 \cdot 0{,}0404 + 2^2 \cdot 0{,}2144 +$
$+ 3^2 \cdot 0{,}4404 + 4^2 \cdot 0{,}3024 - 3^2 = \mathbf{0{,}7}$.

$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}7} \approx \mathbf{0{,}837}$.

Пример 7.16. *Карлсону на день рождения подарили 5 банок с вишнёвым, 4 банки с малиновым и 7 банок со сливовым вареньем. Карлсон сразу же съел 3 банки варенья. 1) Найдите ряд распределения случайной величины ξ — число банок со сливовым вареньем, оставшихся на следующий день после дня*

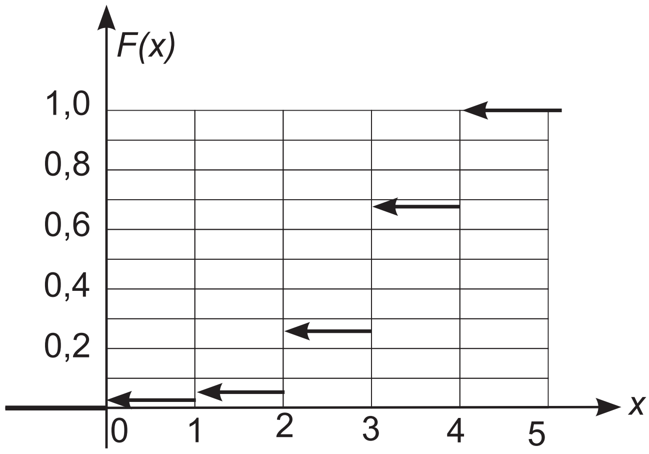

Рисунок 30. *Функция распределения примера 7.15*

рождения. 2) Найдите функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ и постройте её график. 3) Найдите числовые характеристики случайной величины ξ: $M(\xi)$, $D(\xi)$ и $\sigma(\xi)$.

◀ 1) Очевидно, что на следующий день осталось 13 банок с вареньем. При этом случайная величина ξ может принимать следующие значения: 4, 5, 6, 7. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения.

Случайная ξ принимает значение 4, если в день рождения Карлсон съел три банки со сливовым вареньем.

$$P(\xi = 4) = \frac{C_7^3}{C_{16}^3} = \frac{5}{80}.$$

Аналогично, $\xi = 5$, если в день рождения Карлсон съел две банки со сливовым и одну не со сливовым вареньем.

$$P(\xi = 5) = \frac{C_7^2 \cdot C_9^1}{C_{16}^3} = \frac{27}{80}.$$

Аналогично:

$$P(\xi = 6) = \frac{C_7^1 \cdot C_9^2}{C_{16}^3} = \frac{36}{80}.$$

$$P(\xi = 7) = \frac{C_9^3}{C_{16}^3} = \frac{12}{80}.$$

Проверим сумму вероятностей

$$P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) + P(\xi = 7) = \frac{5 + 27 + 36 + 12}{80} = 1.$$

Таким образом, таблица распределения имеет вид:

ξ	4	5	6	7
p	5/80	27/80	36/80	12/80

2) Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 4, \\ 5/80, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 5/80 + 27/80 = 32/80, & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 32/80 + 36/80 = 68/80, & \text{при} \quad 6 < x \leqslant 7, \\ 68/80 + 12/80 = 1, & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

На рис. 31 изображён график функции распределения.

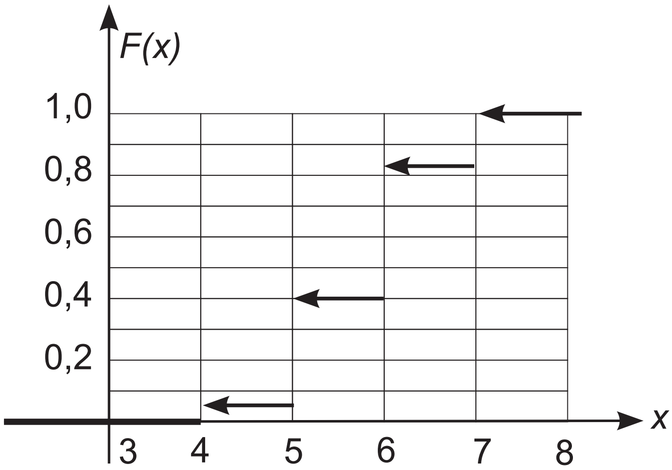

Рисунок 31. *Функция распределения примера 7.16*

3) Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$$M(\xi) = \sum_{k=4}^{7} kP_k = 4 \cdot \frac{5}{80} + 5 \cdot \frac{27}{80} + 6 \cdot \frac{36}{80} + 7 \cdot \frac{12}{80} = \frac{91}{16} = \mathbf{5{,}6875}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{k=4}^{7} k^2 P_k - M^2(\xi) =$$

$$= 4^2 \cdot \frac{5}{80} + 5^2 \cdot \frac{27}{80} + 6^2 \cdot \frac{36}{80} + 7^2 \cdot \frac{12}{80} - \left(\frac{91}{16}\right)^2 =$$

$$= \frac{2639}{80} - \frac{6964321}{6400} = \frac{819}{1280} = \mathbf{0{,}639844}.$$

$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}639844} \approx \mathbf{0{,}8}$. ►

Задания для самостоятельной работы

7.1. Дискретная случайная величина (д.с.в.) задана следующим законом распределения:

ξ	-2	0	2	4	8
p	0,1	0,2	0,3	0,1	a

Найти a, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и построить график многоугольника распределения д.с.в. ξ.

7.2. Даны законы распределения двух независимых д.с.в ξ и η:

ξ	-1	2	4
p	0,3	0,5	0,2

и

η	-1	1
p	0,4	0,6

Найти законы распределения д.с.в $\xi+\eta$ и $\xi\cdot\eta$ и найти их математическое ожидание и дисперсию.

7.3. Даны законы распределения д.с.в ξ:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

Найти закон распределения д.с.в $\eta = 2\xi^3$ и найти $M(\eta)$ и $D(\eta)$. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. η и построить её график.

7.4. В коробке 3 красных фломастера и 3 чёрных. Из коробки последовательно вынимают фломастеры до появления чёрного. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа извлеченных фломастеров. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение д.с.в. ξ. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

7.5. В урне имеются три белых и четыре чёрных шара. Вынули три шара. Д.с.в. ξ — число извлеченных белых шаров. Найти закон распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

7.6. На столе экзаменатора 12 карточек с вопросами для экзамена, среди которых 4 сложных. Студент случайным образом берет 3 карточки с вопросами. Составить закон д.с.в. ξ — количество сложных заданий, доставшихся студенту. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

7.7. Стрелок последовательно стреляет по двум одинаковым мишеням. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,4. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов. В случае попадания в мишень стрелок переходит к следующей мишени, а если мишень не поражена, стрелок заканчивает стрельбу. Составить закон распределения д.с.в. ξ — числа произведённых выстрелов. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

7.8. Дискретная случайная величина (д.с.в.) задана следующим законом распределения:

ξ	-2	0	2	4	8
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Найти функцию распределения и построить её график.

8. Непрерывные случайные величины

8.1. Функции распределения и плотности

Определение 8.1. ***Функцией распределения*** *$F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{8.1}$$

Определение 8.2. *Функция $F(x)$ обладает кусочно непрерывной производной, если её производная $F'(x)$ непрерывна везде, кроме конечного (или бесконечного счётного) множества точек, в которых $F'(x)$ может иметь разрывы 1-го рода.*

В частности, если производная $F'(x)$ непрерывна, то она кусочно непрерывна, т.к. множество точек разрыва пусто.

Определение 8.3. *Случайная величина ξ называется* ***непрерывной****, если её функция $F(x)$ непрерывна и обладает кусочно непрерывной производной $F'(x)$.*

Свойства функции распределения н.с.в.:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;

(2) $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;

(3) $F(x)$ не убывает;

(4) $F(x)$ непрерывна;

(5) $P(\xi = a) = 0$ для любого числа a.

Используя определение функции распределения (8.1), рассмотрим ряд задач и на непрерывные случайные величины.

Вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток зависит от скорости роста функции распределения. Поэтому непрерывную случайную величину задают, используя производную от функции распределения.

***Определение* 8.4.** *Плотностью распределения* $f(x)$ *(или дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины* ξ *называют первую производную от её функции распределения:*

$$f(x) = F'(x). \tag{8.2}$$

***Замечание* 8.1.** *Поскольку функция распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатую форму, для её описания плотность распределения неприменима.*

Свойства плотности распределения н.с.в.:

(1) $f(x) \geqslant 0$;

(2) $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$;

(3) $f(x)$ кусочно непрерывная функция;

(4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

(5) $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;

(6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

***Пример* 8.1.** *Н.с.в.* ξ *задана функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant -2, \\ A(x+2)^2 \text{ при } -2 < x \leqslant 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найти значение параметра A *и вероятность того, что в результате испытания величина* ξ *примет значение, заключенное в интервале* $(-1; 1)$.

◀ Функция распределения является непрерывной на всем действительной оси (свойство 4), поэтому при $x \to 2$ пределы слева и справа должны быть равны. Получаем уравнение $A(2+2)^2 = 1$.

Это выполняется при $A = \dfrac{1}{16}$.

На рис. 32 представлен график функции распределения.

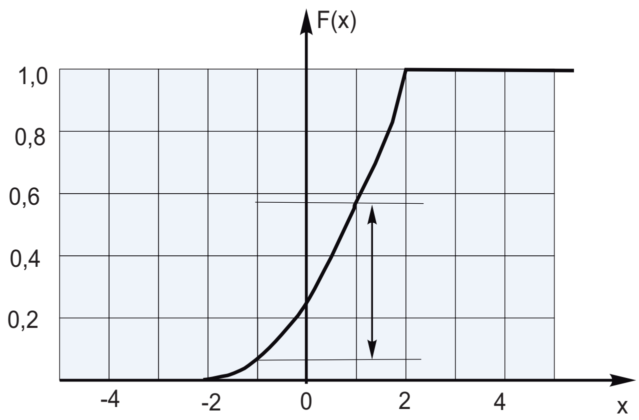

Рисунок 32. *Функция распределения примера 8.1*

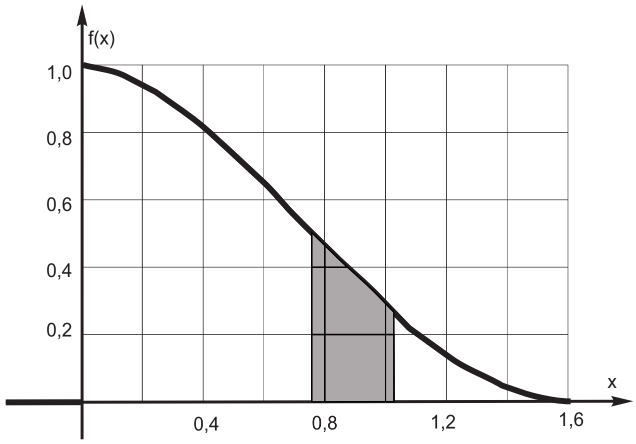

Рисунок 33. *Функция плотности примера 8.2*

Вероятность того, что ξ примет значение, заключенное в интервале $(-1;-1)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(-1<\xi<1)=F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{16}\left((1+2)^2-(-1+2)^2\right)=\dfrac{1}{2}$. ►

Ответ: $\boxed{A=\dfrac{1}{16}; P(-1<\xi<1)=0{,}5.}$

Пример 8.2. *Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения $f(x) = A\cos^2 x$ в интервале $(0;\pi/2)$, а вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/4,\pi/3)$.*

◄ Согласно свойству 6, функции плотности распределения
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Подставляем заданную функцию плотности
$$A\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 xdx = A\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = A\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= A\left(\frac{\pi}{4}-0+\frac{\sin(\pi)-\sin 0}{4}\right) = A\frac{\pi}{4} = 1.$$

Следовательно, $A=\dfrac{4}{\pi}$.

Искомую вероятность находим по формуле
$$P(a<\xi<b)=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

По условию, $a = \pi/4$, $b = \pi/3$, $f(x) = \cos^2 x$. Следовательно, данная вероятность

$$P\left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}\right) = A\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x dx = A\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = A\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= A\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + \frac{\sin(2\pi/3) - \sin\pi/2}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}-2}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{(\sqrt{3}-2)}{2\pi} \approx \mathbf{0{,}138}.$$

Графическая иллюстрация для данного примера представлена на рис. 33.

►

Ответ: $\boxed{A = \frac{4}{\pi};\ P\left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{(\sqrt{3}-2)}{2\pi} \approx 0{,}138.}$

Пример 8.3. *Дана функция распределения н.с.в.* ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ \textit{при} } x \leqslant 1, \\ A(x-1)^2 \text{ \textit{при} } 1 < x \leqslant 3, \\ 1 \text{ \textit{при} } x > 3. \end{cases}$$

Найти значение величины A и плотность распределения $f(x)$.

◄ Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2A(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Для определения A используем свойство функции плотности вероятностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Подставляем полученную функцию $f(x)$.

$$\int\limits_{1}^{3} 2A(x-1)dx = 2A\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = 2A\left(\left(\frac{9}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = 4A.$$

Следовательно, $A = \dfrac{1}{4}$.

Рассмотрим более простой метод определения параметра A. Функция распределения $F(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. При $x = 3$ предел справа функции распределения равен 1, следовательно и предел слева также обязан быть равен 1. Получаем уравнение

$$A(3-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 0{,}5(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases} \qquad \blacktriangleright$$

Пример 8.4. *ξ — н. с. в. с плотностью распределения $f(x)$, заданной следующим образом:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ A(4x - x^2), \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 0, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) значение параметра A; б) вероятность попадания ξ в интервал $(1;2)$; в) функцию распределения $F(x)$.

$\blacktriangleleft$ а) $\int\limits_0^4 A(4x-x^2)dx = A\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = A\left(32 - \frac{64}{3} - 0\right) = \frac{32A}{3}.$

$$\frac{32A}{3} = 1 \qquad \Rightarrow A = \frac{3}{32}.$$

б) Вероятность

$$P(1 < \xi < 2) = \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_1^2 \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$= \frac{11}{32} \approx 0{,}344.$

в) Функция распределения $F(x)$ для н. с. в. даётся формулой

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Если $-\infty < x \leqslant 0$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

если $0 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = \frac{6x^2 - x^3}{32};$$

если, наконец, $x > 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{4} \frac{3}{32}(4t - t^2)dt + \int\limits_{4}^{x} 0dt = 1.$$ ▶

Ответ: $\boxed{P(1 < \xi < 2) = 11/32 \approx 0{,}344,\ F(x) = \begin{cases} 0, & \textbf{если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, & \textbf{если } 0 < x \leqslant 4, \\ 1, & \textbf{если } x > 4. \end{cases}}$

8.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение 8.5. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ называется:*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx. \tag{8.3}$$

Замечание 8.2. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — н.с.в. аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)dx, \tag{8.4}$$

где $f(x)$ —плотность распределения ξ.

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx, \tag{8.5}$$

Определение дисперсии как математического ожидания квадрата отклонения полностью сохраняется для непрерывных случайных величин:

$$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2.$$

Вычисление дисперсии н.с.в. следует вести по следующей формуле:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 f(x)dx. \tag{8.6}$$

На практике проще применять формулу

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi). \tag{8.7}$$

Определение 8.6. *Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называют квадратный корень из её дисперсии:*

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{8.8}$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, приведённые в предыдущей для ДСВ, сохраняются в этом случае.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ — функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi(x) - M(\varphi(x))\big)^2 f(x)dx, \tag{8.9}$$

или

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{8.10}$$

Пример 8.5. *Н.с.в. ξ задана плотностью распределения $f(x) = x/18$ в интервале $(0, 6)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.*

◀ Поскольку плотность равна 0 вне $(0, 6)$, подставив $f(x) = x/18$, получим

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{18}\int\limits_{0}^{6} x^2dx = \frac{1}{18}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^6 = \frac{216}{54} = 4.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(\xi)$$

или

$$D(\xi) = \frac{1}{18}\int_0^6 x^3\,dx - 4^2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^6 - 16 = \frac{6^3}{3\cdot 4} - 16 = 18 - 16 = 2.$$

Осталось найти среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{2}.$$

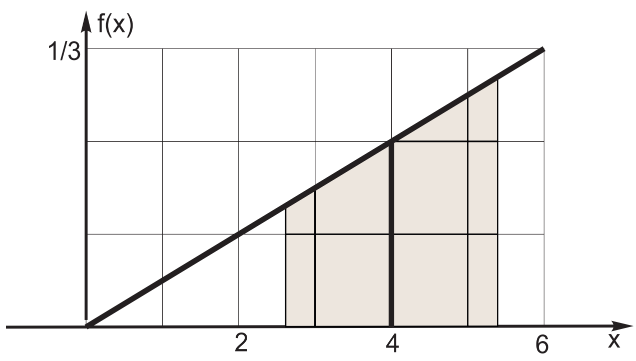

Рисунок 34. *Функция плотности примера 8.5*

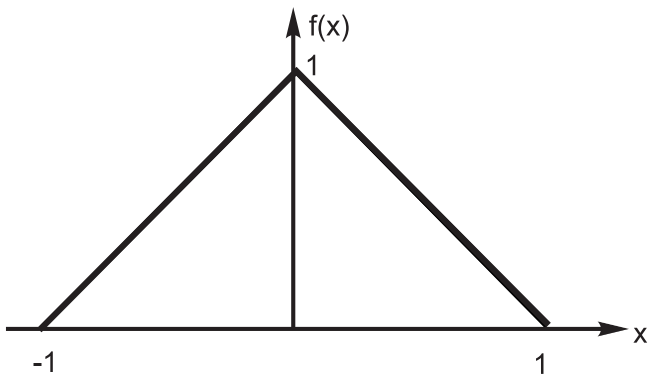

Рисунок 35. *График плотности распределения примера 8.6*

На рис. 34 представлена геометрическая иллюстрация математического ожидания и среднеквадратического отклонения случайной величины ξ.

Отметим, что значение $M(\xi)$ центр массы треугольника по оси Ox, а при помощи $\sigma(\xi)$ находится средний разброс случайной величины от её математического ожидания. ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 4,\ D(\xi) = 2,\ \sigma(\xi) = \sqrt{2}.}$

Пример 8.6. *График плотности вероятности н.с.в. ξ изображен на рисунке 35 (закон Симпсона). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.*

◀ Из графика $f(x)$ видно, что плотность вероятности определяется уравнениями:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ при } x\in(-1,0), \\ -x+1 \text{ при } x\in(0,1), \\ 0 \text{ при } x\leqslant -1,\ x\geqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку $f(x)$ задана на интервале $(-1,1)$ двумя аналитическими выражениями, то

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-1}^{0} x(x+1)dx+\int\limits_{0}^{1} x(-x+1)dx=\mathbf{0}.$$

Можно было без вычислений заметить, что $M(\xi)=0$. Это следует из симметрии функции плотности относительно прямой $x=0$.

Далее, учитывая, что $M(\xi)=0$, найдем дисперсию

$$D(\xi)=\int\limits_{-1}^{0} x^2(x+1)dx+\int\limits_{0}^{1} x^2(-x+1)dx=\frac{1}{6}\approx\mathbf{0{,}167}.$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\frac{1}{\sqrt{6}}\approx\mathbf{0{,}408}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{M(\xi)=0,\ D(\xi)=1/6\approx 0{,}167,\ \ \sigma(\xi)\approx 0{,}408.}$

Пример 8.7. *Н.с.в. ξ задана плотностью распределения $f(x)=A\sin 2x$ в интервале $(0,\pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.*

◀ Заданная функция может быть функцией плотностью, если она неотрицательна и площадь между графиком функции и осью абсцисс равна 1. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=A\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin 2xdx=-0{,}5A\cos 2x\Big|_{0}^{\pi/2}=$$
$$=-0{,}5A(\cos\pi-\cos 0)=A.$$

При $A=1$ все требования к функции плотности выполняются.

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin 2xdx=-0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2} xd\cos 2x=$$
$$=-0{,}5x\cos 2x\Big|_{0}^{\pi/2}+0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos 2x\,dx=$$

$$= -0{,}5(\frac{\pi}{2}\cos\pi - 0\cos 0) + 0{,}25\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} x^2\sin 2xdx = -0{,}5\int\limits_0^{\pi/2} x^2 d\cos 2x =$$
$$= -0{,}5x^2\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + 0{,}5\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx^2 = \frac{\pi^2}{8} + \int\limits_0^{\pi/2} x\cos 2xdx =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5\int\limits_0^{\pi/2} xd\sin 2x = \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5(x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2}\sin 2xdx) =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + 0{,}25\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$ ►

Ответ: $\boxed{M(\xi) = \pi/4,\ D(\xi) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.}$

Пример 8.8. *Дана функция распределения н.с.в. $F(x)$. Найти параметр A, плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины и вероятность её попадания в интервал $(1,3)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\\ A(x^2+x), & x \in (0;2],\\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

◄ Функция распределения $F(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. При $x = 2$ предел справа функции распределения равен 1, следовательно и предел слева также обязан выть равен 1. Получаем уравнение

$$A(2^2+2) = 1 \quad\Rightarrow\quad A = \frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\\ \frac{1}{6}(x^2+x), & x \in (0;2],\\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдём теперь функцию плотности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{6}(2x+1), & x \in (0;2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Графики функции плотности и функции распределения представлены на рис. 36 и 37.

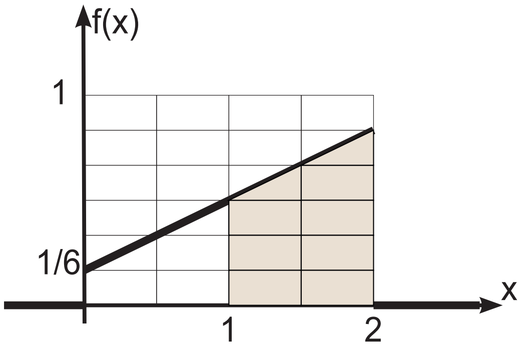

Рисунок 36. *Функция плотности примера 8.8*

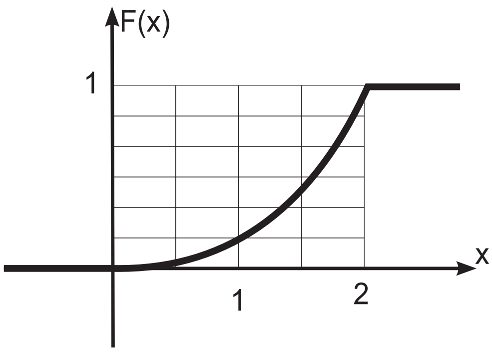

Рисунок 37. *Функция распределения примера 8.8*

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{6}(2x^2 + x)dx =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{16}{3} + 2\right) = \frac{11}{9}.$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{6}(2x^3 + x^2)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$
$$= \frac{1}{6}\left(8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{9}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{144 - 121}{81} = \frac{23}{81} \approx \mathbf{0{,}284}.$$

$$P(1 < \xi < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = \frac{11}{9},\ D(\xi) = \frac{23}{81} \approx 0{,}284,\ P(1 < \xi < 3) = \frac{2}{3}.}$

Задания для самостоятельной работы

8.1. Н.с.в. ξ задана плотностью распределения:
$f(x)=\begin{cases} A(1-x^2),\ x\in(-1;\,1], \\ 0,\ x\notin(-1;\,1]. \end{cases}$ Найдите среднее квадратическое отклонение н.с.в. ξ.

8.2. Задана плотность распределения н.с.в. ξ: $f(x)=\begin{cases} A(x-4)^2, & x\in(0;\,4), \\ 0, & x\notin(0;\,4). \end{cases}$
Найдите математическое ожидание случайной ξ.

8.3. Н.с.в. ξ задана функцией распределения:
$F(x)=\begin{cases} 0,\ x\leqslant -2, \\ A(x^3+8),\ x\in(-2;\,0], \\ 1,\ x>0. \end{cases}$ Найдите среднее квадратическое отклонение н.с.в. ξ.

8.4. Задана функция распределения н.с.в. $\xi:F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ Ax^3, & x\in(0;\,3), \\ 1, & x\geqslant 3. \end{cases}$
Вычислить дисперсию случайной ξ .

8.5. Случайная величина ξ задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x)=\dfrac{\pi+2\operatorname{arctg}(x)}{2\pi}$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(-1;1)$.

8.6. Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ в интервале $(0,2)$ задана как $f(x)=Ax^3$; вне этого интервала $f(x)=0$. Определить A, найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(0,1)$ и её математическое ожидание.

8.7. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant 0, \\ 1/2-(1/2)\cos 3x \text{ при } 0<x\leqslant \pi/3, \\ 1 \text{ при } x>\pi/3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

8.8. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ задана выражением

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant 0, \\ ax^3 \text{ при } 0<x\leqslant 4, \\ 1 \text{ при } x>1. \end{cases}$$

Определить: коэффициент a, плотность распределения ξ, вероятность попадания ξ в интервал $(2,3)$.

8.9. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0 \text{ или } x > \pi, \\ A \sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

8.10. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $f(x) = (2/\pi) \cdot \cos^2 x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $f(x) = 0$ вне указанного интервала. Найти среднее квадратическое отклонение величины ξ.

9. Виды распределений случайных величин

9.1. Биномиальный закон распределения

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ — случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, \ m = 0{,}1, \ \dots, n. \qquad (9.1)$$

Определение 9.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется* биномиальным.

ξ	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$	$n-1$	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	$np^{n-1}q$	p^n

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами n и p.

Математическое ожидание и дисперсия для биномиально распределённой случайной величины ξ вычисляется по формулам:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \qquad (9.2)$$

Пример 9.1. *Вероятность попадания стрелком в мишень равна* 0,8. *Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ξ — числа попаданий в мишень при трёх выстрелах. Найти $M(\xi)$ и $D(\xi)$.*

◀ Данная случайная величина имеет следующие возможные значения: 0 (стрелок не попал в мишень ни разу), 1 (попал один раз), 2 (попал два раза), 3 (ни разу не промахнулся). Здесь $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $n = 3$.

По формуле Бернулли (9.1) найдем:

$$P(0) = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = \frac{1}{125}, \quad P(1) = C_3^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = \frac{12}{125},$$

$$P(2) = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = \frac{48}{125}, \quad P(3) = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = \frac{64}{125}.$$

Отметим, что $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$.

Ряд распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

Найдём $M(\xi)$ и $D(\xi)$ двумя способами.

1 способ. По общим формулам для дискретной случайной величины.

$M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{3} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = \mathbf{2{,}4}$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) =$
$= 0^2 \cdot 0{,}008 + 1^2 \cdot 0{,}096 + 2^2 \cdot 0{,}384 + 3^2 \cdot 0{,}512 - 2{,}4^2 = \mathbf{0{,}48}$.

2 способ. По формулам (9.2) для биномиального распределения.

$M(\xi) = np = 3 \cdot 0{,}8 = \mathbf{2{,}4}$ $\qquad D(\xi) = npq = 2{,}4 \cdot 0{,}2 = \mathbf{0{,}48}$. ►

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 2{,}4,\ \ D(\xi) = 0{,}48.}$

Пример 9.2. *На складе 20% приборов являются неточными. Взяты 5 приборов для проверки. Составить таблицу распределения случайной величины ξ — число точных приборов среди проверенных. Определить математическое ожидание $M(\xi)$ и $D(\xi)$.*

◄ Вероятность отбора неточного прибора $q = 0{,}2$, а точного прибора $p = 1 - q = 0{,}8$. В данной задаче имеем биномиальное распределение. Запишем ряд распределения:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$0{,}2^5$	$C_5^1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4$	$C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3$	$C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	$C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2$	$0{,}8^5$

Для получения числовых значений используем Maxima-программу:

```
load(distrib)$   fpprintprec:4$
P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.8), k, 0, 5);
(%o4) [3.2 * 10^-4, 0.0064, 0.0512, 0.205, 0.41, 0.328]
```

Согласно формулам (9.2), математическое ожидание

$M(\xi) = np = 5 \cdot 0{,}8 = \mathbf{4}$, а дисперсия $D(\xi) = npq = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = \mathbf{0{,}8}$. ►

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 4,\ \ D(\xi) = 0{,}8.}$

Пример 9.3. *В партии поступивших на склад деталей 10% бракованные. Случайным образом выбрали n=15 деталей. Случайная величина ξ — число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины ξ. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Какова вероятность, что будет выбрано более трёх бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины ξ.*

◄ По формуле Бернулли (9.1) найдем:

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot (0{,}1)^k \cdot (0{,}9)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 15.$$

Для вычисления математического ожидания применяем формулу $M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{15} k \cdot P(\xi = k)$.

Для вычисления дисперсии применяем формулу

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi), \quad \text{где } M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{15} k^2 \cdot P(\xi = k).$$

Для вычисления вероятности, что будет выбрано более трёх бракованных деталей находим

$P\_3\_15 = \sum\limits_{k=4}^{15} P(\xi = k)$ или $P\_3\_15 = 1 - \sum\limits_{k=0}^{3} P(\xi = k)$.

Выполнять такой огромный объём работы долго и неинтересно, поэтому пишем Maxima-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты. Программа очень простая и понятная. При помощи встроенной функцией ***pdf_binomial***(k, n, p) которая вычисляет по формулам (9.1) значения полученного ряда распределения. Создаём массив P, в который записываем полученные значения. В список G записываем значения координат точек для построения графика. Функция plot2d, по координатам списка G строит график, рис. 38. Используя функцию ***sum***, находим математическое ожидание M, дисперсию D случайной величины ξ и искомую вероятность P_3_15.

```
kill(all)$  load(distrib)$ fpprintprec:3$ n:15$ p:0.1$
array(P,n)$
fillarray(P,makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 0, n))$
G:makelist([k,P[k]],k,0,n);
plot2d([discrete,G], [x,0,8],[style,points],
          [gnuplot_postamble, "set grid;"])$
M:sum(k*P[k],k,0,n);
D:sum(k^2*P[k],k,0,n)-M^2;
P_3_15:sum(P[k],k,4,n);
Результаты
(G)[[0,0.206],[1,0.343],[2,0.267],[3,0.129],[4,0.043],[5,0.011],
 [6,0.00194],[7,2.77*10^-4],[8,3.08*10^-5],[9,2.66*10^-6],
 [10,1.77*10^-7],[11,8.96*10^-9],[12,3.32*10^-10],
 [13,8.51*10^-12], [14,1.35*10^-13],[15,1.0*10^-15]]
 (M) 1.5
 (D) 1.35
 (P_3_15) 0.0556
```

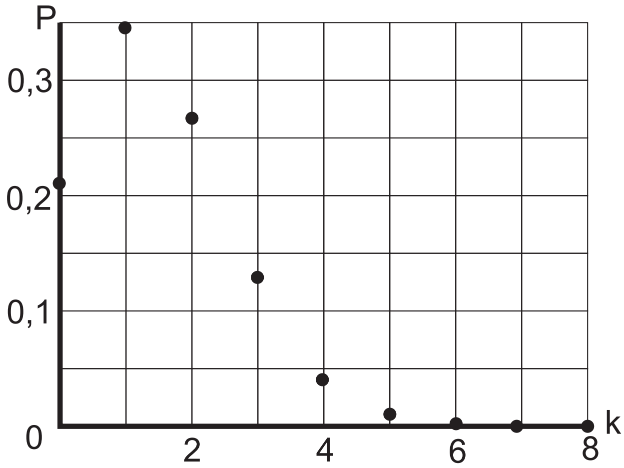

Рисунок 38. *Биномиальное распределения для примера 9.3*

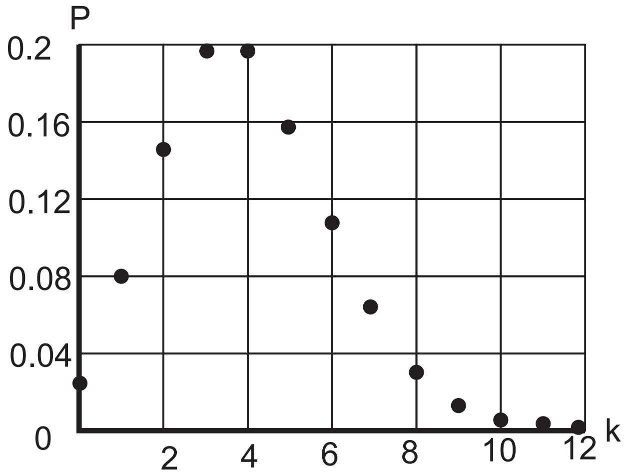

Рисунок 39. *Распределения Пуассона для примера 9.5*

9.2. Распределение Пуассона

Пусть в испытаниях Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \lambda$. Тогда вероятность $P_n(m)$ приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{9.3}$$

Определение 9.2. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (9.3), называется распределением Пуассона или пуассоновским распределением.*

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

ξ	0	1	2	$\dots$	m	$\dots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\dots$

Итак, для случайной величины, имеющей распределение Пуассона:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \tag{9.4}$$

Пример 9.4. *Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна* 0,02. *Случайным образом выбрали* 120 *изделий. Записать закон распределения числа бракованных изделий среди выбранных изделий. Найти* $M(\xi)$ *и* $D(\xi)$.

◀ Здесь $n = 120$ и $p = 0{,}02$. Поскольку первая величина больше 100, а вторая — меньше 0,1, то для решения задачи можно применить формулу Пуассона (9.3). Параметр $\lambda = np = 120 \cdot 0{,}02 = 2{,}4$; используя калькулятор $e^{-2{,}4} = 0{,}0907$. Тогда

$$P(\xi = 0) = \frac{2{,}4^0 \cdot e^{-2{,}4}}{0!} = 0{,}0907, \quad P(\xi = 1) = \frac{2{,}4^1 \cdot e^{-2{,}4}}{1!} = 0{,}2177,$$

$$P(\xi = 2) = \frac{2{,}4^2 \cdot e^{-2{,}4}}{2!} = 0{,}2612, \quad P(\xi = 3) = \frac{2{,}4^3 \cdot e^{-2{,}4}}{3!} = 0{,}2090, \ldots$$

Здесь наибольшая вероятность при $k = 2$. Распределение Пуассона можно записать следующим образом:

ξ	0	1	2	3	...	k	...
p	0,0907	0,2177	**0,2612**	0,2090	...	$2{,}4^k \cdot e^{-2{,}4}/k!$	...

$M(\xi) = \lambda = 2{,}4$; $\quad D(\xi) = \lambda = 2{,}4$.

Для вычисления распределения Пуассона $P(\xi = m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}$ в компьютерный пакет Maxima встроена функция pdf_poisson(m,a).

Maxima-программа.

```
fpprintprec:5$ n:120$ p:0.02$ L:n*p;
PL:makelist(L^k/k!*exp(-L),k,0,8);
```

(%o5) [0.091, 0.218, 0.261, 0.209, 0.125, 0.06, 0.024, 0.008, ...

▶

Пример 9.5. *В партии поступивших на склад деталей 1% бракованные. Случайным образом выбрали n=400 деталей. Случайная величина* ξ *— число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины* ξ. *Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины* ξ. *Какова вероятность, что будет выбрано более пяти бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины* ξ *на отрезке* $x \in [0; L + 4\sigma(\xi)]$, *где* $\sigma(\xi)$ *— среднеквадратическое отклонение случайной величины* ξ.

◀ Этот пример подобен решённому выше примеру 9.3, только число испытаний значительно больше и применения формул Бернулли затруднительно.

Применяем формулы Пуассона (9.3). Здесь $\lambda = n\,p = 400 \cdot 0{,}1 = 4$.

$$P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!}e^{-4}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Для вычисления математического ожидания и дисперсии применяем формулу $M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 4$. $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = 2$.

Пишем Maxima-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты и строит график функции распределения на отрезке $x \in [0; 12]$, рис. 39.

```
kill(all)$  load(distrib)$  fpprintprec:3$  n:400$ p:0.01$  L:n*p;
M:L$   D:L$   S:sqrt(D);    m1:0$     m2:fix(L+4*S);
array(P,100)$
fillarray(P,makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,m2))$
G:makelist([k,P[k]],k,m1,m2);
plot2d([discrete,G], [x,m1,m2],[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
P_5_n:1-sum(P[k],k,0,5);
```

```
Вывод программы
(L) 4.0
(S) 2.0
(m2) 12
(G) [[0,0.0183],[1,0.0733],[2,0.147],[3,0.195],[4,0.195],
[5,0.156],[6,0.104],[7,0.0595],[8,0.0298],[9,0.0132],
[10,0.00529],[11,0.00192],[12,6.42*10^-4]]
(P_5_n) 0.215
```

▶

Пример 9.6. *В диспетчерской автопредприятия среднее число заявок, поступающих в одну минуту, равно* 2. *Найти вероятности того, что за одну минуту: не поступит вызова, поступит* $1, 2, 3, \ldots$ *вызовов.*

◀ Количество вызовов ξ, поступивших за время t, имеет распределение Пуассона:

$$P_t(\xi = k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!},$$

где λ — среднее число событий в единицу времени (интенсивность). В данном случае $\lambda = 2,\ t = 1$. Следовательно,

$$P_1(\xi = 0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} \approx 0{,}135, \quad P_1(\xi = 1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} \approx 0{,}271,$$

$$P_1(\xi = 2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \approx 0{,}271, \quad P_1(\xi = 3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0{,}180, \ldots$$

Ответ:

ξ	0	1	2	3	...
P	0,135	0,271	0,271	0,180	...

►

9.3. Геометрическое распределение

Пусть производится ряд независимых испытаний («попыток») для достижения некоторого результата (события A), и при каждой попытке событие A может появиться с вероятностью p. Тогда число попыток ξ до появления события A, включая удавшуюся, является дискретной случайной величиной, возможные значения которой принимают значения: $m = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{9.5}$$

где $0 < p < 1, \quad q = 1 - p$.

Ряд распределения ξ имеет вид

ξ	1	2	3	$\ldots$	m	$\ldots$
P	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{m-1}	$\ldots$

$$M(\xi) = \frac{1}{p}, \qquad D(\xi) = \frac{q}{p^2}. \tag{9.6}$$

Пример 9.7. *Детали, количество которых неограниченно, проверяют до появления бракованной. Вероятность брака для каждой детали одинакова и равна* 0,6*. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей. Найти математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ. Какова вероятность, что будет проверено более четырёх деталей?*

Построить график ряда распределения случайной величины ξ на отрезке $k \in [0; 8]$.

◀ Используем формулу для геометрического распределения (9.5) при $p = 0{,}6, \quad q = 0{,}4.$

$P(\xi = k) = 0{,}6 \cdot 0,4^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$

$P(\xi = 1) = 0{,}6; \quad P(\xi = 2) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24;$

$P(\xi = 3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}096; \quad P(\xi = 4) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}0384; \ldots\ldots$

$P\_5\_n = 1 - (0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 + 0{,}0384) = 0{,}0256.$

Maxima-программа:

```
kill(all)$  load(distrib)$ fpprintprec:3$
p:0.6$ q:1-p; K:8$
M:1/p;   D:q/p^2;   S:sqrt(D);
P:makelist(p*q^(k-1), k, 1 ,K);
P_5_n:1-sum(P[k], k, 1, 4);
plot2d([discrete,P], [x,1,K],[style,points],
[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
```

▶

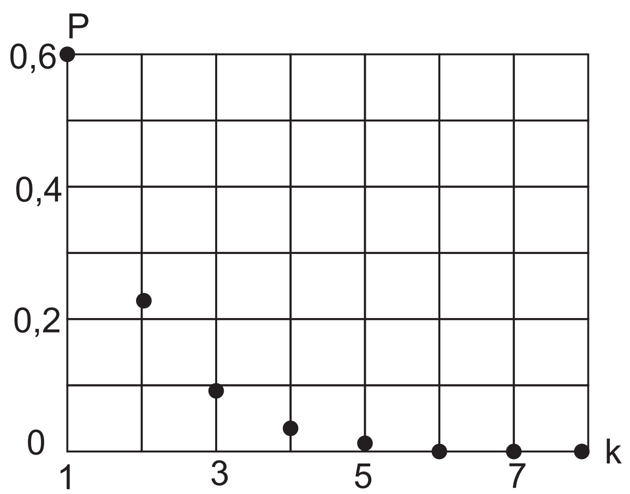

Рисунок 40. *Геометрическое распределения для примера 9.7*

9.4. Задачи из типового расчета на дискретные распределения

Задача 1.8

Пример 9.8. *Производится стрельба по мишени. Случайная величина* ξ *— число попаданий в цель.*

а) Вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Было произведено 12 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ*. Определить вероятность того, что будет не менее 10 попаданий в цель.*

б) Вероятность промаха при каждом выстреле 0,99 *и было произведено 200 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины* ξ*. Определить вероятность того, что будет более двух попаданий в цель.*

◄ $M(\xi) = np = 12 \cdot 0{,}6 = 7{,}2$, $D(\xi) = npq = 7{,}2 \cdot 0{,}4 = \mathbf{2{,}88}$.

По формуле Бернулли (5.1) $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ найдем:

$P_{12}(10) = C_{12}^{10} \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^2 = 66 \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}0639.$

$P_{12}(11) = C_{12}^{11} \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4 = 12 \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4 \approx 0{,}0174.$

$P_{12}(12) = 0{,}6^{12} \approx 0{,}0022.$

$P(A_{\text{а}}) = P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) \approx 0{,}0639 + 0{,}0174 + 0{,}0022 = \mathbf{0{,}0835}.$

б) Вероятность промаха равна 0,99, следовательно вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,01.

Применяем формулу для распределения Пуассона (9.3)

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

$\lambda = np = 2, \quad M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 2.$

$P(A_{\text{б}}) = 1 - (P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2))$

$P(\xi = 0) = \dfrac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0{,}1353.$

$P(\xi = 1) = \dfrac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0.2707$

$P(\xi = 2) = \dfrac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0.2707$

$P(A_{\text{б}}) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)) \approx \mathbf{0{,}323}.$ ►

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 2{,}88;\ P(A_{\text{а}}) \approx 0{,}0835;\ P(A_{\text{б}}) \approx 0{,}323.}$

Задача 1.9

Пример 9.9. *Кубик бросают до первого появления шестерки или пятерки (число бросков неограниченно). Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа произведённых бросков. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Найти вероятность того, что будет произведено от двух до пяти (включительно) бросков.*

◀ Используем формулу для геометрического распределения (9.5)
$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$ при $p = 1/3, \quad q = 2/3.$
$P(\xi = k) = 1/3 \cdot (2/3)^{k-1} = 2^{k-1}/3^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$
$P(\xi = 1) = 1/3; \quad P(\xi = 2) = 1/3 \cdot 2/3 = 2/9;$
$P(\xi = 3) = 1/3 \cdot (2/3)^2 = 4/27; \quad P(\xi = 4) = 1/3 \cdot (2/3)^3 = 8/81;$
$P(\xi = 5) = 1/3 \cdot (2/3)^4 = 16/243; \ldots$

ξ	1	2	3	4	5	...	k	...
p	1/3	2/9	4/27	8/81	16/243	...	$2^{k-1}/3^k$	...

$M(\xi) = \dfrac{1}{p} = \mathbf{3}. \qquad D(\xi) = \dfrac{q}{p^2} = \mathbf{6}.$
$P = 2/3^2 + 4/3^3 + 8/3^4 + 16/3^5 = \dfrac{54 + 36 + 24 + 16}{343} = \dfrac{130}{243} \approx \mathbf{0{,}535}.$ ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = \mathbf{3}; D(\xi) = \mathbf{6}; P = \dfrac{130}{243} \approx \mathbf{0{,}535}.}$

9.5. Равномерное распределение

Из непрерывных законов на этом занятии изучим равномерное и экспоненциальное распределения.

Распределение непрерывной случайной величины называется *равномерным* на $[a; b]$, если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при} \quad x \in [a; b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Плотность равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины определяется по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{9.7}$$

Функция распределения равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad b < x. \end{cases} \tag{9.8}$$

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{9.9}$$

Пример 9.10. *Цена деления шкалы измерительного прибора равна* 0,1. *Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при снятии показаний прибора будет сделана ошибка, превышающая* 0,03.

◀ Ошибку округления до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину ξ, которая распределена равномерно между двумя целыми делениями. Плотность равномерного распределения находим по формуле (9.7), где длина интервала $b-a$ в данной задаче равна 0,1. Ошибка отсчёта превысит 0,03, если она будет заключена в интервале $(0{,}03; 0{,}07)$. По формуле

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)dx, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in [0;0{,}1], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;0{,}1]. \end{cases}$$

найдем:

$$P(0{,}03 < \xi < 0{,}07) = \int_{0{,}03}^{0{,}07} 10\,dx = \mathbf{0{,}4}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\mathbf{0{,}4.}}$

Пример 9.11. *Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, распределённой равномерно в отрезке [1,9].*

◀ Математическое ожидание и дисперсия определяются в данном случае выражениями (9.9). Так как $a = 1$, $b = 9$, то сразу найдем

$$M(\xi) = \frac{1+9}{2} = \mathbf{5}, \quad D(\xi) = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3} \approx \mathbf{5{,}333}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 5,\ D(\xi) = 16/3 \approx 5{,}333.}$

Пример 9.12. *Случайная величина ξ распределена равномерно с $M(\xi) = 9/2$ и $D(\xi) = 25/12$. Найти функцию распределения случайной величины ξ.*

◀Функция распределения в формуле (9.8) зависит от параметров a и b. Используя (9.9), для определения a и b составим следующие уравнения:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{2}, \qquad \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

Отсюда, с учётом того, что $b > a$, получим $a = 2,\ b = 7$. Функция распределения окончательно примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 2, \\ \dfrac{x-2}{5} \text{ при } x \in (2, 7], \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases}$$ ▶

9.6. Показательное распределение

Определение 9.3. *Распределение непрерывной случайной величины называется **экспоненциальным (показательным)**, если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \quad \text{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{9.10}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{9.11}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{9.12}$$

Пример 9.13. *Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону (9.10) с параметром $\lambda = 0{,}07$. Найти плотность распределения случайной величины ξ, её функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ и вероятность того, что в результате испытания ξ попадёт в интервал (2, 10).*

◀ С учётом (9.12) математическое ожидание
$M(\xi) = 1/\lambda = 1/0{,}07 = 100/7 \approx 14{,}286$.

С другой стороны, используя выражение (9.11) для функции распределения, искомую вероятность найдем как приращение этой функции на интервале (2, 10):

$P(2 < \xi < 10) = F(10) - F(2) = 1 - e^{-0{,}7} - 1 + e^{-0{,}14} \approx$
$\approx 0{,}8693 - 0{,}4965 = \mathbf{0{,}373}$.

Эту же вероятность можно вычислить как

$P(2 < \xi < 10) = \int\limits_{2}^{10} 0{,}07e^{-0{,}07t}dt = -e^{-0{,}07t}\Big|_{2}^{10} \approx 0{,}373.$ ▶

Ответ: $\boxed{P(2 < \xi < 10) \approx 0{,}373.}$

Пример 9.14. *Время безотказной работы элемента распределено по экспоненциальному закону $f(x) = 0{,}03 \cdot e^{-0{,}03t}(t > 0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 200 часов.*

◀ Длительность времени безотказной работы элемента имеет экспоненциальное распределение, у которого функция распределения $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Тогда вероятность безотказной работы t (так называемая функция надежности) имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность отказов или среднее число отказов в единицу времени. В данном примере интенсивность отказов $\lambda = 0{,}03$. Искомая вероятность

$R(200) = e^{-0{,}03 \cdot 200} = e^{-6} \approx 0{,}003.$ ▶

Ответ: $\boxed{e^{-6} \approx 0{,}003.}$

Задания для самостоятельной работы

9.1. Стрелок, имея бесконечное число патронов, стреляет до первого промаха. Вероятность попадания стрелка при каждом выстреле одинакова и равна 0,6. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа произведённых выстрелов. Найти вероятность того, что будет произведено менее пяти выстрелов.

9.2. Ведется стрельба по мишени до первого промаха. Стрелок имеет на руках 3 патрона, вероятность его попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Случайная величина ξ — число истраченных патронов. Найдите среднее квадратическое отклонение д.с.в. ξ .

9.3. Производится 15 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,6. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа попаданий в мишень, найти наивероятнейшее число m^* попаданий и в ответе выписать значение вероятности того, что число попаданий будет m^* попаданий.

9.4. На проверку поступило 5 деталей, из которых 2 бракованные. Детали проверяются до обнаружения бракованной детали. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей. Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.

9.5. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 3$. Выписать функцию распределения. Найти вероятность того, что ξ принимает значения меньше 0,8.

9.6. Непрерывная случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[A; 4]$. Математическое ожидание равно -2. Найти дисперсию случайной величины ξ.

9.7. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}9$. Выписать функцию распределения. Найти вероятность того, что ξ принимает значения меньше трёх.

9.8. Фирма отправила заказчику 300 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,01. Составить ряд распределения числа повреждённых изделий в пути.

9.9. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,001. Телефонная станция обслуживает 500 абонентов. Чему равны дисперсия и среднее число абонентов, которые позвонят на коммутатор в течение часа?

9.10. Время ожидания водителя на АЗС является случайной величиной ξ, распределённой по показательному закону со средним временем ожидания, равным 5 минут. Найти вероятности того, что: а) 5мин $< \xi <$10мин; б) $\xi \leqslant 15$ мин; в) $\xi \geqslant 10$.

10. Виды распределений случайных величин

10.1. Нормальное распределение

Определение 10.1. *Случайная величина ξ имеет* ***нормальное распределение*** *с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{10.1}$$

Кратко нормально распределённую случайную величину будем записывать так: $\xi \sim N(a;\sigma)$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами **a и σ.**

Функции распределения нормального закона выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$ (10.3):

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{10.2}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{10.3}$$

Для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \tag{10.4}$$

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)\right) - \\ - \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right),$$

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{10.5}$$

Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{10.6}$$

В Maxima значения функции плотности распределения (10.1) и функции распределения (10.2) для нормального закона вычисляются при помощи встроенных в пакет функций pdf_normal(x, a, σ) и cdf_normal(x, a, σ).

Пример 10.1. *Написать функцию плотности вероятности нормально распределённой случайной величины ξ, зная, что $M(\xi) = 4$, $D(\xi) = 25$ и построить график функции плотности и распределения.*

◀ Так как математическое ожидание $a = 4$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{25} = 5$, то по формуле (10.1) получаем плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/50}.$$

На рис. 41 представлен график функции плотности заданной $\xi \sim N(4;5)$. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$, максимальное значение функция достигает в точке $x = a$ и примерно равно $\dfrac{0{,}4}{\sigma} = 0{,}08$. При любых значениях параметров a и σ по оси абсцисс график следует изображать в диапазоне $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, вне этого отрезка значение функции близко к нулю. На рис. 42 изображен график функции распределения заданной случайной величины ξ. ▶

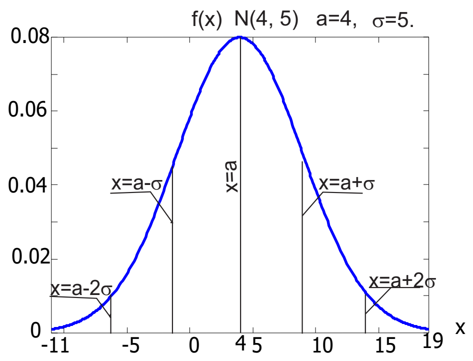

Рисунок 41. *К примеру 10.1*

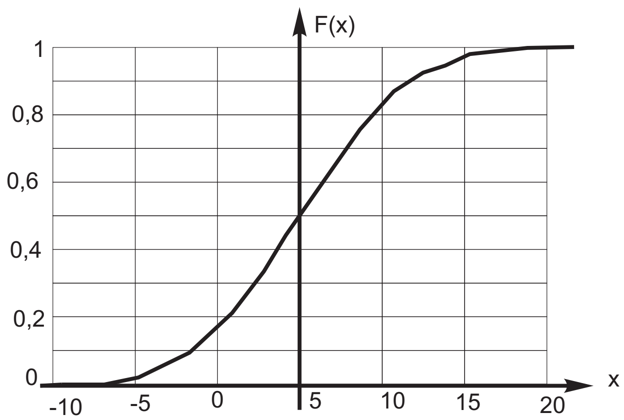

Рисунок 42. *К примеру 10.1*

Пример 10.2. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Определить: а) $P(-2 < \xi < 3)$, б) $P(\xi < 1)$, в) $P(\xi > 3)$. Привести геометрическую иллюстрацию полученного решения.*

◀ а) Применим формулу (10.5), полагая $a = 0$, $\sigma = 1, x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Тогда

$$P(-2<\xi<3)=\Phi\Big(\frac{3-0}{1}\Big)-\Phi\Big(\frac{-2-0}{1}\Big)=\Phi(3)-\Phi(-2)=$$
$=\Phi(3)+\Phi(2)\approx 0{,}499+0{,}477=\mathbf{0{,}976}$.

Значения $\Phi(3)$ и $\Phi(2)$ найдены из таблицы приложение 2.При этом мы учли нечетность функции Лапласа, $\Phi(-2)=-\Phi(2)$. ►

◄ б) $P(\xi<1)=P(-\infty<\xi<1)=\Phi\left(\dfrac{1-0}{1}\right)-\Phi\left(\dfrac{-\infty-0}{1}\right)=$
$=\Phi(1)+\Phi(+\infty)\approx 0{,}3413+0{,}500=\mathbf{0{,}841}$. ►

◄ в) $P(\xi>3)=P(3<\xi<+\infty)=\Phi\left(\dfrac{\infty-0}{1}\right)-\Phi\left(\dfrac{3-0}{1}\right)=$
$=\Phi(+\infty)-\Phi(3)\approx 0{,}500-0{,}499=\mathbf{0{,}001}$. ►

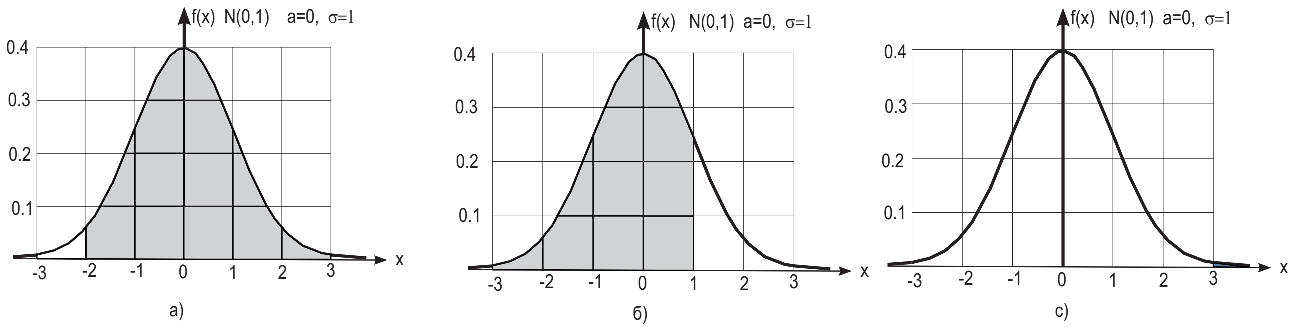

Рисунок 43. *К примеру 10.2*

На рис. 43 приведена геометрическая иллюстрация полученного решения.►

Ответ: $\boxed{P(-2<\xi<3)\approx 0{,}976;\quad P(\xi<1)\approx 0{,}841;\quad P(\xi>3)\approx 0{,}001.}$

Пример 10.3. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a=3$, $\sigma=2$. Найти: а) $P(|\xi-3|<2{,}5)$, б) $P(|\xi-3|<0{,}1)$, в) $P(|\xi-2|<2)$. Привести геометрическую иллюстрацию полученного решения.*

◄ а) Так как $a=3$, то для нахождения вероятности неравенства $|\xi-3|<2{,}5$, применим формулу (10.6), где $\varepsilon=2{,}5$. Числовые значения для функции Лапласа $\Phi(1{,}25)$ определяем из таблицы приложение 2.

$$P(|\xi-3|<2{,}5)=2\Phi\left(\frac{2{,}5}{2}\right)=2\Phi(1{,}25)=2\cdot 0{,}3944=\mathbf{0{,}7888}.\ ►$$

◄ б) Применяем эту же формулу:

$$P(|\xi-3|<0{,}1)=2\Phi\left(\frac{0{,}1}{2}\right)=2\Phi(0{,}05)\approx 2\cdot 0{,}0199=\mathbf{0{,}0398}.\ ►$$

◄ в) В этом случае формулу (10.6) применять нельзя. Применяем общую формулу (10.5).

$$P(|\xi-2|<2)=P(0<\xi<4)=\Phi\left(\frac{4-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{0-3}{2}\right)=$$
$$=\Phi(0{,}5)-\Phi(-1{,}5)\approx 0{,}1915+0{,}4332=\mathbf{0{,}6247}.\ ►$$

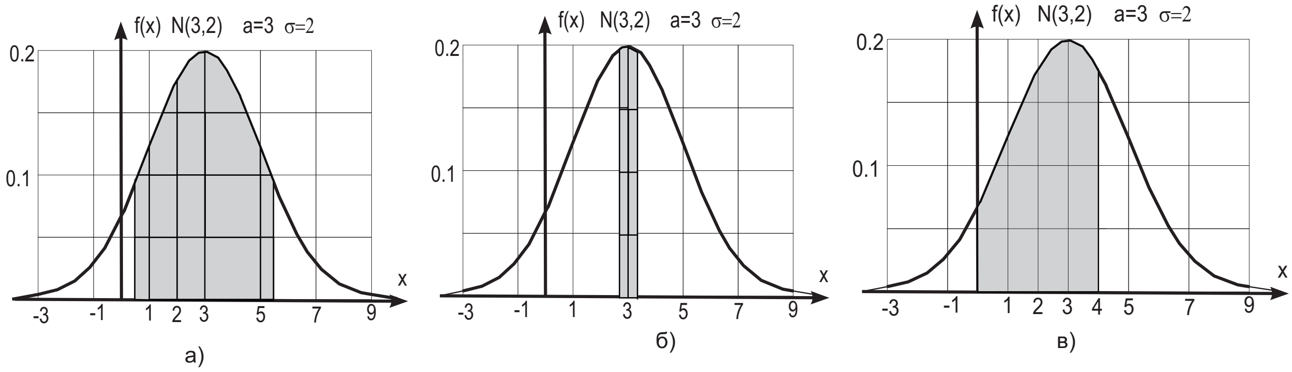

Рисунок 44. *К примеру 10.3*

На рис. 44 приведена геометрическая иллюстрация полученного решения.

Ответ: $\boxed{P(2<\xi<3)\approx 0{,}192;\quad P(|\xi-3|<0{,}1)\approx 0{,}04; P(|\xi-2|<2)\approx 0{,}625.}$

Пример 10.4. *Вычислить вероятность того, что случайная величина ξ, подчинённая нормальному закону, при трёх испытаниях хотя бы один раз окажется в интервале (4; 6), если $M(\xi)=3{,}8$, $\sigma(\xi)=0{,}6$.*

◄ Сначала найдем вероятность того, что случайная величина ξ будет заключена в интервале (4; 6). Применяем формулу (10.5):

$$P(4<\xi<6)=\Phi\left(\frac{6-3{,}8}{0{,}6}\right)-\Phi\left(\frac{4-3{,}8}{0{,}6}\right)=$$

$$=\Phi(3{,}67)-\Phi(0{,}33)\approx 0{,}500-0{,}129=0{,}371.$$

Тогда вероятность попадания вне интервала (4; 6) будет равна $1-0{,}371=$ $=0{,}629$. Вероятность того, что случайная величина ξ при трёх испытаниях все три раза окажется вне интервала (4; 6), найдется по теореме умножения независимых событий как $0{,}6294^3\approx 0{,}2489$. Следовательно, искомая вероятность $p=1-0{,}249=0{,}751$. ►

Ответ: $\boxed{\approx 0{,}751.}$

Пример 10.5. *Длина изготовляемых деталей является нормально распределённой случайной величиной ξ с математическим ожиданием $a=8$ см. Вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет размер от 7,6 до 7,8 см, равна 0,3. Чему равна вероятность того, что размер наудачу взятой детали будет в пределах от 8,2 до 8,4 см?*

◀ Поскольку кривая плотности нормального распределения симметрична

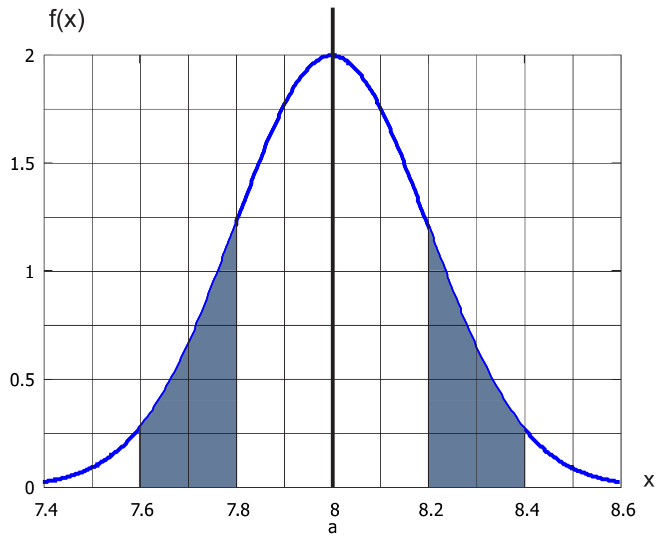

Рисунок 45. *Для примера 10.5*

относительно математического ожидания a, и при этом интервалы $(7{,}6; 7{,}8)$ и $(8{,}2; 8{,}4)$, также симметричны относительно прямой $x = 8$, рис. 45. Следовательно,

$P(7{,}6 < \xi < 7{,}8) = P(8{,}2 < \xi < 8{,}4) = 0{,}3.$ ▶

Ответ: $\boxed{0{,}3.}$

Пример 10.6. *Длина детали представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону и имеющую поле допуска от 78 до 84 см. Известно, что брак по заниженному размеру (длина деталей меньше 78 см) составляет 4%, а брак по завышенному размеру (длина деталей больше 84 см) 6%. Найти средний размер детали a и среднее квадратическое отклонение σ.*

◀ Поле допуска находится от 78 до a и от a до 84. Вероятность попадания в первый интервал $0{,}5 - 0{,}04 = 0{,}46$, а во второй: $0{,}5 - 0{,}06 = 0{,}44$. Поскольку

$$P(78 < \xi < a) = \Phi(0) - \Phi\left(\frac{78 - a}{\sigma}\right) = 0{,}46,$$

$$P(a < \xi < 84) = \Phi\left(\frac{84 - a}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0{,}44$$

и функция Лапласа $\Phi(0) = 0$, то

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{78 - a}{\sigma}\right) = -0{,}46, \\ \Phi\left(\dfrac{84 - a}{\sigma}\right) = 0{,}44. \end{cases}$$

Из таблицы приложение 2, найдем значения аргументов функции Лапласа при который функция равна $-0{,}46$ и $0{,}44$:

$$\begin{cases} \dfrac{78-a}{\sigma} = -1{,}75, \\ \dfrac{84-a}{\sigma} = 1,55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 3{,}3\sigma, \\ a = 78 + 1{,}75\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 1{,}818, \\ a = 81{,}182. \end{cases} \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{a = 81{,}182, \quad \sigma = 1{,}818.}$

Пример 10.7. *Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону с $a = 15$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. Найти вероятность брака P при условии, что разрешается допуск для диаметра подшипника $\pm 0{,}8$ мм. Какую точность диаметра подшипника можно гарантировать с вероятностью $0{,}92$?*

◀ Так как здесь отклонение $\varepsilon = 0{,}8$, то, согласно (10.6),

$$P(|\xi - 15| < 0{,}8) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}8}{0{,}4}\right) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954.$$

Отсюда вероятность брака найдется, как вероятность противоположного события: $P = 1 - 0{,}954 = \mathbf{0{,}046}$.

Во второй части задачи, наоборот, задана вероятность $P(|\xi - a| < \varepsilon)$ и нужно найти отклонение ε. Подставим известные данные в формулу (10.6). Тогда $0{,}92 = 2 \cdot \Phi(\varepsilon/0{,}4)$, $\Phi(\varepsilon/0{,}4) = 0{,}46$. Из таблицы приложение 2. найдем, что $\varepsilon/0{,}4 = 1{,}75$ или $\varepsilon = \mathbf{0{,}7}$ мм. ▶

Ответ: $\boxed{P \approx 0{,}05, \ \varepsilon = 0{,}7.}$

Пример 10.8. *Размер диаметра втулок считается нормально распределённым с $a = 2{,}5$ см и $\sigma = 0{,}01$ см. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки ξ, если за вероятность практической достоверности принимается $0{,}9973$?*

◀ Согласно правилу «3σ» (трёх сигм):

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Отсюда получим: $|\xi - a| < 3\sigma$, $a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma$,
$2,5 - 0{,}03 < \xi < 2,5 + 0{,}03$ или $2{,}47 < \xi < 2{,}53$. ▶

Ответ: $\boxed{\xi \in (2{,}47; 2{,}53).}$

Пример 10.9. *Срок безотказной работы прибора является случайной величиной, распределённой по нормальному закону. Найти среднее время T*

срока безотказной работы прибора, если с вероятностью 0,975 прибор безотказно работает более 400ч, а среднее квадратическое отклонение — 8ч.

◀ Применяем формулу (10.5):
$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\Big(\dfrac{x_2 - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\dfrac{x_1 - a}{\sigma}\Big).$

Здесь ξ — срок безотказной работы прибора, a — искомая величина обозначающая среднее время T безотказной работы прибора, $\sigma = 8$ — среднее квадратическое отклонение безотказной работы прибора, $x_1 = 400$, $x_2 = +\infty$ — границы интервала на котором вероятность равна 0,975.

Получаем,

$$P(\xi > 400) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) \Rightarrow 0{,}5 - \Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) = 0{,}975 \Rightarrow$$
$$\Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) = 0{,}5 - 0{,}975 = -0{,}475.$$

Из таблицы приложение 2 находим при каком значении аргумента значение функции равно 0,475.

Получаем линейное уравнение

$$\frac{400 - a}{8} = -1{,}96 \;\Rightarrow\; 400 - a = -15{,}68 \;\Rightarrow\; \mathbf{a{=}415{,}68}.$$

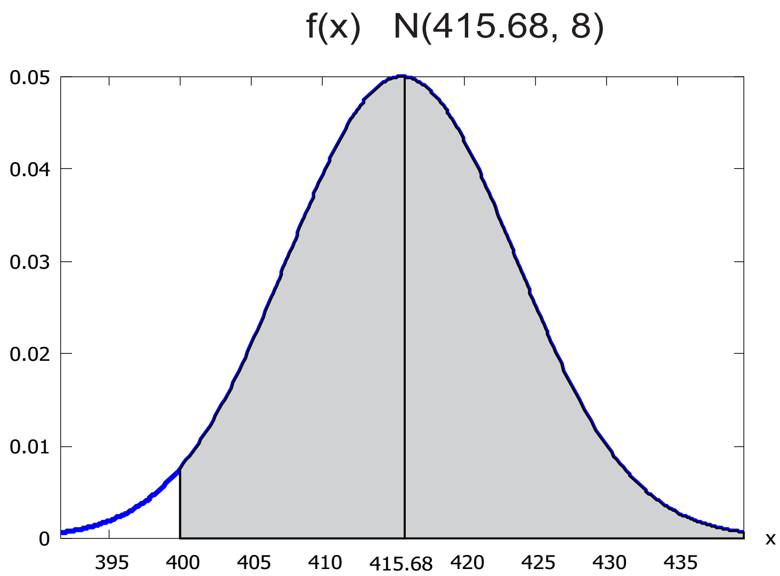

Рисунок 46. *К примеру 10.9*

На рис. 46 Представлена иллюстрация полученного решения. Площадь выделенной области равна 0,975. ▶

Ответ: $\boxed{\approx 415{,}68.}$

10.2. Числовые характеристики функции случайного аргумента

Для непрерывной случайной величины ξ

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{10.7}$$

$$D(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(\xi). \tag{10.8}$$

Замечание 10.1. *Если $\eta=\varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi))=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot f(x)dx, \tag{10.9}$$

где $f(x)$ — плотность распределения ξ.

$$D(\varphi(\xi))=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{10.10}$$

Замечание 10.2. *Если ξ— непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y=\varphi(x)$ — дифференцируемая монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины η определяется равенством*

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|. \tag{10.11}$$

Пример 10.10. *Непрерывная случайная величина ξ задана функцией плотности распределения $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 8e^{-8x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, плотность распределения непрерывной случайной величины $k\eta=e^{3\xi}$, $M(\eta)$ и $D(\eta)$. Числовые характеристики случайной величины найти двумя способами.*

◀ По формуле (10.7) найдём $M(\xi)$

$$M(\xi)=\int\limits_0^{+\infty}x\cdot 8e^{-8x}dx=-\int\limits_0^{+\infty}xde^{-8x}=-xe^{-8x}\Big|_0^{+\infty}+\int\limits_0^{+\infty}e^{-8x}dx=$$

$$=-\frac{1}{8e^{8x}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{8}.$$

Отметим, что случайная величина ξ описывает показательное распределение и для него $M(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{8}$.

По формуле (10.9) найдём $M(\eta)$

$M(\eta)=\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{3x}\cdot 8e^{-8x}dx=8\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-5x}dx=-\dfrac{8}{5}e^{-5x}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{8}{5}.$

Найдём теперь функцию плотности случайной величины η. Т.к. функция $y=e^{3x}$ монотонно возрастающая при $x>0$, то для определения функции плотности случайной величины η можно применить формулу (10.11). Найдём функцию $\psi(y)$, обратную функция $y=e^{3x}$. Для этого логарифмируем эту функцию.

$$\ln(y)=\ln\left(e^{3x}\right)\Rightarrow\ln(y)=3x\Rightarrow x=\frac{\ln y}{3}.$$

Отметим, что при $x=0\quad y=1$, а при $x=+\infty\quad y+\infty$.

Таким образом, $\psi(y)=\dfrac{\ln y}{3}.\Rightarrow\psi'(y)=\dfrac{1}{3y}$.

Функцию плотности случайной величины η найдём по формуле (10.11) $g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$

$$g(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}e^{-8\frac{\ln y}{3}}, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}\left(e^{\ln y}\right)^{(-8/3)}, & y\geqslant 1\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}y^{-8/3}, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3}y^{-11/3}, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

Проверим выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{8}{3}y^{-11/3}dy=\frac{8}{3}\cdot\frac{y^{-8/3}}{-8/3}\Big|_1^{+\infty}=1.$$

Используя формулу (10.7), вычислим математическое ожидание данной случайной величины η

$$M(\eta) = \int\limits_{1}^{+\infty} y \frac{8}{3} y^{-11/3} dy = \frac{8}{3} \int\limits_{1}^{+\infty} y^{-8/3} dy = \frac{8}{3} \frac{y^{-5/3}}{(-5/3)} \Big|_{1}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{8}{5y^{2/3}} \Big|_{1}^{+\infty} = \frac{8}{5}.$$

Получили такое же значение, как и по формуле (10.9).

Найдём теперь дисперсию случайной величины η по двум формулам.

1) По формуле $D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta)$:

$$D(\eta) = \int\limits_{1}^{+\infty} y^2 \frac{8}{3} y^{-11/3} dy - M^2(\eta) = \frac{8}{3} \int\limits_{1}^{+\infty} y^{-5/3} dy - \frac{64}{25} =$$

$$= \frac{8}{3} \frac{y^{-2/3}}{(-2/3)} \Big|_{1}^{+\infty} - \frac{64}{25} = 4 - \frac{64}{25} = \frac{36}{25}.$$

2) По формуле $D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\, dx - M^2(\varphi(\xi))$:

$$D(\eta) = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(e^{3x}\right)^2 8e^{-8x} dx - M^2(\eta) = 8 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x} dx - \left(\frac{5}{8}\right)^2 =$$

$$= -\frac{8}{2e^{2x}} \Big|_{0}^{+\infty} - \frac{25}{64} = 4 - \frac{64}{25} = \frac{36}{25}.$$

По обеим формулам получили одинаковые результаты. ►

В примере 10.10 условие монотонности функции $\varphi(\xi)$ выполнялось на всей области определения. Рассмотрим теперь пример, в котором функция кусочно монотонна. В этом случае вместо формулы (10.12) применяется более общая формула

$$g(y) = \sum_{k=1}^{m} f[\psi_k(y)] \cdot |\psi_k'(y)|. \tag{10.12}$$

где m — число интервалов монотонности, $x = \psi_k(y)$ — уравнение обратной функции $y = \varphi(\xi)$ на k-том интервале монотонности этой функции.

Пример 10.11. *Непрерывная случайная величина ξ задана функцией плотности распределения* $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; \pi/2], \\ \cos x, & x \in [0; \pi/2]. \end{cases}$ *Найти плотность распределения непрерывной случайной величины $\eta = |\xi - \pi/6|$ и построить её график.*

◄ На рис. 47 приведен график функции преобразования в координатах (x, y), случайной величины ξ к величине η.

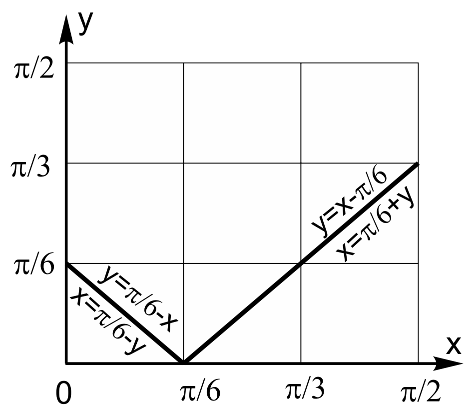

Рисунок 47. $\eta(\xi)$

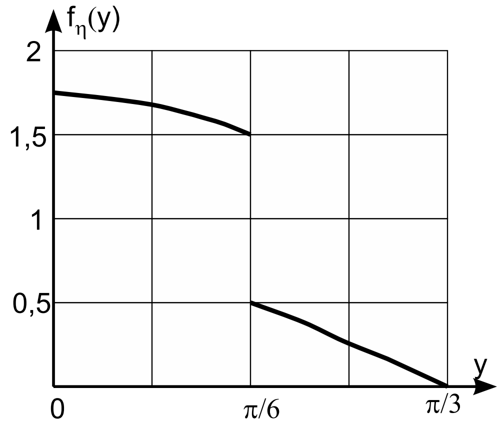

Рисунок 48. $f_\eta(y)$

Рисунки для примера 10.11

$$y = \begin{cases} 0, & x \notin [0; \pi/2], \\ \pi/6 - x, & x \in [0; \pi/6], \\ x - \pi/6, & x \in [\pi/6;\ \pi/2]. \end{cases}$$

Получим обратную функцию $x = \psi(y)$.

$$x = \psi(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \pi/6 - y, & x \in [0; \pi/6] \bigcap y \in [0; \pi/6], \\ \pi/6 + y, & x \in [\pi/6; \pi/2] \bigcap y \in [0; \pi/3]. \end{cases}$$

Модуль производной этой функции равен

$$|\psi'(y)| = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ 1, & y \in [0; \pi/3]. \end{cases}$$

Функция $x = \psi(y)$ на отрезке $y \in [0; \pi/6]$ двузначная, поэтому в функции плотности $f_\eta(y)$ этому отрезку соответствует сумма двух слагаемых. Получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y), & y \in [0; \pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases}$$

Отдельно вычислим

$$\cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi/6 + y + \pi/6 - y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi/6 + y - \pi/6 + y}{2}\right) = \sqrt{3}\cos y.$$

Получаем искомую функцию плотности

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \sqrt{3}\cos y, & y \in [0; \pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases}$$

Проверим, выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности $\int\limits_1^{+\infty} f_\eta(y)dy = 1$.

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{3}\cos y\, dy + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{3}\cos(\pi/6 + y)\, dy =$$

$$= \sqrt{3}\sin y\Big|_0^{\pi/6} + \sin(\pi/6 + y)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \sqrt{3}/2 + 1 - \sqrt{3}/2 = 1.$$

На рис. 48, представлен график полученной функции плотности $f_\eta(y)$. ▶

Задания для самостоятельной работы

10.1. Случайная величина подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 8, \sigma = 2$. Определить: 1)$P(|\xi - 4| < 2)$. 2) $P(|\xi - 8| < 2)$. 3) $P(2 < \xi < 14)$. 4) $P(\xi > 6)$. Представить геометрическую иллюстрацию полученного решения.

10.2. Автомат штампует детали. Известно,что длина изготавливаемой детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону. Её среднее значение равно 100 см, а $\sigma = 0{,}2$ см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

10.3. Производится взвешивание без систематических ошибок слитков из драгоценных металлов. Известно, что случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ мг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 2 мг.

10.4. Наблюдения показали, что внешний диаметр подшипников данного типа является нормально распределённой случайной величиной ξ со средним значением $a = 60$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}001$ мм. В каких границах можно практически гарантировать внешний диаметр подшипника, если за вероятность практической достоверности принять 0,9973.

10.5. Случайные ошибки измерения дальномера распределены нормально, и дальномер не имеет систематической ошибки. При определении дальности цели абсолютная величина ошибки с вероятностью 0,966 не превосходит 5м. Найти среднюю квадратическую ошибку.

10.6. Стандартная длина заготовки выпущенной автоматом составляет 50 см., а отклонение распределено по нормальному закону со средней квадратической ошибкой 0,5 см. Систематическая ошибка отсутствует. В каком интервале с вероятностью 0,99 длина заготовки?

10.7. Каким должен быть допуск отклонения размера детали от номинала, чтобы с вероятностью 0,899 отклонение было допустимым, если средняя квадратическая ошибка отклонения равна 12 мм, а систематическая ошибка равна нулю? (Закон распределения – нормальный).

10.8. Срок службы прибора является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Найти среднее время срока службы прибора, если с вероятностью 0,937 прибор работает более 300 ч. Среднее квадратическое отклонение 10 ч.

10.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [-3; 2] . Найдите математическое ожидание случайной величины $\eta = 2|\xi|$.

10.10. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найдите математическое ожидание случайной величины $\eta = |\xi - 3|$.

11. Двумерные случайные величины

Определение 11.1. *n **-мерным случайным вектором** или n- **мерной случайной величиной** называется набор $\xi = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве* (Ω, A, P).

Фактически случайный вектор ξ есть отображение $\xi : \Omega \to R^n$

11.1. Двумерные дискретные случайные величины

Определение 11.2. ***Законом распределения*** *дискретной двумерной случайной величины называют набор всевозможных значений этой случайной величины, т.е. пар чисел $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и их вероятностей $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$.*

Закон распределения для двумерной дискретные случайной величины задаётся в виде таблицы 11.1 в которой указывают все значения x_i, y_j и вероятности p_{ij}.

Таблица 11.1

$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Далее в эту таблицу добавляют одну строку и один столбец.

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот).

$$\begin{gathered} P(\xi = x_i) = P(\xi = x_i, \eta = y_1) + P(\xi = x_i, \eta = y_2) + \ldots \\ \ldots + P(\xi = x_i, \eta = y_m) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i*}. \end{gathered} \tag{11.1}$$

Аналогично

$$\begin{gathered} P(\eta = y_j) = P(\xi = x_1, \eta = y_j) + P(\xi = x_2, \eta = y_j) + \ldots \\ \ldots + P(\xi = x_n, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{*j}. \end{gathered} \tag{11.2}$$

Таблица 11.2

Распределение двумерной дискретной случайной величины						
$\xi \backslash \eta$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P(\xi = x_i)$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p_{i\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n\,*}$
$P(\eta = y_j)$	$p_{*\,1}$	$\dots$	$p_{*\,j}$	$\dots$	$p_{*\,m}$	1

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\,*}, \qquad M(\eta) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{*\,j}. \tag{11.3}$$

Определение 11.3. *Точка с координатами $\big(M(\xi); M(\eta)\big)$ называется **центром распределения**.*

Условные вероятности

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\,*}}. \tag{11.4}$$

$$P(\xi = x_i/\eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*\,j}}. \tag{11.5}$$

Вероятности $P(\eta = y_j/\xi = x_i)$ для $j = 1, \dots, m$ образуют условное распределение случайной величины η при фиксированном значении ξ. В частности, можно найти условное математическое ожидание η при фиксированном значении ξ:

$$M(\eta/\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(\eta = y_j/\xi = x_i) \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, n \tag{11.6}$$

и условное математическое ожидание ξ при фиксированном значении η:

$$M(\xi/\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i/\eta = y_j) \quad \text{для} \quad j = 1, \dots, m. \tag{11.7}$$

Для независимых дискретных случайных величин ξ и η

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = P(\eta = y_j) \quad \text{и} \quad P(\xi = x_i/\eta = y_j) = P(\xi = x_i).$$

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\,*}} = \frac{p_{i\,*} \cdot p_{*\,j}}{p_{i\,*}} = p_{*\,j}\ .$$

$$P(\xi = x_i/\eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*\,j}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{*\,j}}{p_{*\,j}} = p_{i\,*}\ .$$

Определение 11.4. *Корреляционным моментом $K_{\xi\eta}$ случайных величин ξ и η называют:*

$$K_{\xi\eta} = M\left(\big(\xi - M(\xi)\big)\big(\eta - M(\eta)\big)\right).$$

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{11.8}$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (11.8) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_iy_j - M(\xi) \cdot M(\eta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$K_{\xi\eta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x;\, y)dxdy - M(\xi) \cdot M(\eta).$$

Теорема 11.1. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Пример 11.1. *Задана дискретная двумерная случайная величина (ξ, η):*

$\xi\backslash\eta$	*4*	*7*	*8*
3	*0,1*	*0,2*	*0,1*
5	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Найти законы распределения составляющих ξ и η, безусловное и условное математическое ожидание ξ при условии $\eta = 7$, а также безусловное и условное математическое ожидание η при $\xi = 5$. Найти корреляционный момент $K_{\xi\eta}$.

◀ Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	3	5
p	0,4	0,6

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей η:

η	4	7	8
p	0,4	0,3	0,3

С помощью последних таблиц легко найдем безусловные математические ожидания:

$$M(\xi) = 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}6 = \mathbf{4{,}2},$$

$$M(\eta) = 4 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3 = \mathbf{6{,}1}.$$

Вероятность $P(\eta = 7) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$. Согласно (11.5), $P\left(\xi = x_i/\zeta = y_j\right) = \dfrac{p_{ij}}{p_{*j}}$, условные вероятности

$$P(\xi = 3/\eta = 7) = 0{,}2/0{,}3 = \mathbf{2/3},$$

$$P(\xi = 5/\eta = 7) = 0{,}1/0{,}3 = \mathbf{1/3}.$$

Условный закон распределения $\xi/\eta = 7$ примет вид:

$\xi/\eta = 7$	3	5
$P(\xi = x_i/\eta = 7)$	2/3	1/3

Соответствующее условное математическое ожидание

$$M(\xi/\eta = 7) = 3 \cdot 2/3 + 5 \cdot 1/3 = \mathbf{11/3}.$$

Вероятность $P(\xi = 5) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$. Далее по формуле (11.4) вычисляем условные вероятности

$$P(\eta = 4/\xi = 5) = 0{,}3/0{,}6 = \mathbf{1/2},$$

$$P(\eta = 7/\xi = 5) = 0{,}1/0{,}6 = \mathbf{1/6},$$

$$P(\eta = 8/\xi = 5) = 0{,}2/0{,}6 = \mathbf{1/3}.$$

По условному закону распределения $\eta/\xi = 5$

$\eta/\xi=5$	4	7	8
$P(\eta=y_j/\xi=5)$	1/2	1/6	1/3

найдем условное математическое ожидание

$M(\eta/\xi=5)=4\cdot 1/2+7\cdot 1/6+8\cdot 1/3=\mathbf{35/6}$.

Умножая значения x_i на y_j компонентов случайного вектора $(\xi;\eta)$ и в качестве вероятностей принимая значения p_{ij} из закона распределения, получим закон распределения одномерной случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	12	20	21	24	35	40
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2

$M(\xi\eta)=12\cdot 0{,}1+20\cdot 0{,}3+21\cdot 0{,}2+24\cdot 0{,}1+35\cdot 0{,}1+40\cdot 0{,}2=\mathbf{25{,}3}$.

Применяя формулу (11.8), найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta}=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)=25{,}3-4{,}2\cdot 6.1=-0{,}32$. ►

Пример 11.2. *Дано распределение двумерного случайного вектора $(\xi;\eta)$ с дискретными компонентами.*

$\xi\backslash\eta$	*-1*	*0*	*2*
-1	*0,1*	*0,1*	*0,2*
2	*0,05*	*0,1*	*0,05*
3	*0,1*	*0,2*	*0,1*

Найти корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

◄ Выпишем отдельно ряды распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$.

ξ	-1	2	3
p	0,4	0,2	0,4

η	-1	0	2
p	0,25	0,4	0,35

$\xi\eta$	-3	-2	0	1	4	6
p	0,1	0,25	0,4	0,1	0,05	0,1

Найдём математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$.

$M(\xi)=-1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}4=1{,}2$.

$M(\eta)=-1\cdot 0{,}25+0+2\cdot 0{,}35=0{,}45$.

$M(\xi\eta)=-3\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}25+0{,}1+4\cdot 0{,}05+6\cdot 0{,}1=0{,}1$.

Применяя формулу (11.8) найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta}=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)=0{,}1+1{,}2\cdot 0{,}45=\mathbf{0{,}64}$. ►

Ответ: $\boxed{K_{\xi\eta}=0{,}64.}$

Пример 11.3. *Дано распределение двумерного случайного вектора $(\xi;\eta)$ с дискретными компонентами.*

$\xi \backslash \eta$	*1*	*2*	*4*
3	*0,1*	*0,1*	*0,2*
5	*0,15*	*0,15*	*0,3*

Требуется:

1) Найти одномерные распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$, их математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$ и дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ и $D(\xi\eta)$. Вычислить непосредственно их корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

2) Доказать независимость случайных величин ξ и η.

◀ Выпишем расширенную таблицу для заданного закона распределения двумерной случайной величины $\xi, \eta)$.

$\xi \backslash \eta$	1	2	4	$P(\xi = x_i)$
3	0,1	0,1	0,2	0,4
5	0,15	0,15	0,3	0,6
$P(\eta = y_j)$	0,25	0,25	0,5	1

Выпишем отдельно ряды распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$.

ξ	3	5
P	0,4	0,6

η	1	2	4
P	0,25	0,25	0,5

$\xi\eta$	3	5	6	10	12	20
P	0,1	0,15	0,1	0,15	0,2	0,3

Найдём математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$.

$M(\xi) = 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}6 = \mathbf{4{,}2}$.

$M(\eta) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}5 = \mathbf{2{,}75}$.

$M(\xi\eta) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}15 + 12 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}3 = \mathbf{11{,}55}$.

Найдём дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ и $D(\xi\eta)$.

$D(\xi) = 3^2 \cdot 0{,}4 + 5^2 \cdot 0{,}6 - 4{,}2^2 = \mathbf{0{,}96}$.

$D(\eta) = 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 4^2 \cdot 0{,}5 - 2{,}75^2 = \mathbf{1{,}6875}$.

$D(\xi\eta) = 3^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}15 + 6^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}15 + 12^2 \cdot 0{,}2 + 20^2 \cdot 0{,}3 - M^2(\xi\eta) =$
$= \mathbf{38{,}6475}$.

Найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = 11{,}55 - 4{,}2 \cdot 2{,}75 = \mathbf{0}$.

2) Для доказательства независимости случайных величин ξ и η проверим выполнение условий:

$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j), i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$

$P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1.$
$P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15.$
$P(\xi = x_2) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1.$
$P(\xi = x_2) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15.$
$P(\xi = x_3) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2.$
$P(\xi = x_3) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3.$

Все условия выполняются, следовательно случайные величины ξ и η независимы.

Ответ: $M(\xi) = 4{,}2$; $M(\eta) = 2{,}75$; $M(\xi\eta) = 11{,}55$; $D(\xi) = 0{,}96$; $D(\eta) = 1{,}6875$; $D(\xi\eta) = 38{,}6475$; $K_{\xi\eta} = 0$; **ξ и η независимы**. ►

Пример 11.4. *Задана дискретная случайная величина $\Theta = 10\xi - 3\eta$, где ξ и η — дискретные случайные величины из примера 11.3. Вычислить математическое ожидание $M(\Theta)$ и дисперсию $D(\Theta)$ случайной величины Θ двумя способами: на основании свойств математического ожидания и дисперсии и используя ряд распределения этой случайной величины.*

◄ Используем два свойства математическое ожидания $M(C\xi) = CM(\xi)$ и $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$.

$M(\Theta) = 10 \cdot M(\xi) - 3 \cdot M(\eta) = 10 \cdot 4{,}2 - 3 \cdot 2{,}75 = \mathbf{33{,}75}$.

Найдём теперь первым способом дисперсию $D(\Theta)$. Используем два свойства дисперсии ожидания $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$ и для независимых случайных величин $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

$D(\Theta) = 10^2 \cdot D(\xi) + (-3)^2 \cdot D(\eta) = 100 \cdot 0{,}96 + 9 \cdot 1{,}6875 = \mathbf{111{,}1875}$.

Запишем ряды распределения случайных величин $10 \cdot M(\xi)$ и $-3 \cdot M(\eta)$:

10ξ	30	50
P	0,4	0,6

-3η	-12	-6	-3
P	0,5	0,25	0,25

Получаем ряд распределения случайной величины $\Theta = 10\xi - 3\eta$:

Θ	18	24	27	38	44	47
P	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$

Θ	18	24	27	38	44	47
P	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15	0,15

Находим $M(\Theta)$:
$M(\Theta) = 18 \cdot 0{,}2 + 24 \cdot 0{,}1 + 27 \cdot 0{,}1 + 38 \cdot 0{,}3 + 44 \cdot 0{,}15 + 47 \cdot 0{,}15 = \mathbf{33{,}75}$

и $D(\Theta)$:
$D(\Theta) = 18^2 \cdot 0{,}2 + 24^2 \cdot 0{,}1 + 27^2 \cdot 0{,}1 + 38^2 \cdot 0{,}3 + 44^2 \cdot 0{,}15 + 47^2 \cdot 0{,}15 - 33{,}75^2 =$
$= \mathbf{111{,}1875}$.

Так как случайные величины ξ и η независимы, оба способа дали один и то же результат. ►

Ответ: $\boxed{M(\Theta) = 33{,}75;\ \ D(\Theta) = 111{,}1875.}$

11.2. Непрерывная двумерная случайная величина

Определение 11.5. ***Функцией распределения*** *двумерной случайной величины* $(\xi; \eta)$ *называют*

$$F(x; y) = P\{\xi < x; \eta < y\}. \tag{11.9}$$

Определение 11.6. *Двумерная случайная величина* $(\xi; \eta)$ *называется* ***непрерывной****, если её функция распределения* $F(x; y)$ *непрерывна и имеет непрерывные частные производные второго порядка всюду за исключением, быть может, конечного числа точек.*

Двумерная функция распределения обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant F(x; y) \leqslant 1$;

(2) $F(-\infty; y) = F(x; -\infty) = F(-\infty; -\infty) = 0 \quad F(+\infty; +\infty) = 1$;

(3) $F(x; y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу;

(4) Функции распределения каждой составляющей получаются предельным переходом:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = F(x; +\infty),$$
$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = F(+\infty; y);$$

(5) Вероятность попадания в прямоугольник выражается через функцию распределения по формуле:

$$\begin{gathered} P\{x_1 \leqslant \xi < x_2; y_1 \leqslant \eta < y_2\} = \\ = \big(F(x_2; y_2) - F(x_2; y_1)\big) - \big(F(x_1; y_2) - F(x_1; y_1)\big). \end{gathered} \tag{11.10}$$

Определение 11.7. ***Плотностью распределения*** *двумерной непрерывной случайной величины* $(\xi;\zeta)$ *называется вторая смешанная частная производная функции распределения:*

$$f(x;y)=\frac{\partial^2F(x;y)}{\partial x\partial y}. \tag{11.11}$$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

(1) $f(x;y)\geqslant 0$;

(2) $f(-\infty;y)=f(x;-\infty)=f(\pm\infty;\pm\infty)=0$;

(3) $F(x;y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(s;t)dsdt$;

(4) Вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ в область G равна:

$$P((\xi;\eta)\in G)=\iint\limits_{G}f(x;y)dxdy;$$

(5) $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dxdy=1$.

Математические ожидания двумерной случайных величин ξ и η вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M(\xi)&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x;y)dxdy;\\ M(\eta)&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf(x;y)dxdy.\end{aligned} \tag{11.12}$$

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x;y)$ по формулам (11.13):

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dy;\qquad f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dx. \tag{11.13}$$

Определение 11.8. *Условной плотностью $f(y/\xi = x)$ распределения η при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$f(y/\xi = x) = \begin{cases} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x) \neq 0. \end{cases} \tag{11.14}$$

Условной плотностью $f(x/\eta = y)$ распределения ξ при условии, что $\eta = y$, называется:

$$f(x/\eta = y) = \begin{cases} 0, & f_\eta(y) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\eta(y)}, & f_\eta(y) \neq 0. \end{cases} \tag{11.15}$$

Определение 11.9. *Условным математическим ожиданием η при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$M(\eta/\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y/\xi = x) dy. \tag{11.16}$$

Условным математическим ожиданием ξ при условии, что $\eta = y$, называется:

$$M(\xi/\eta = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x/\eta = y) dx. \tag{11.17}$$

Теорема 11.2. *Для независимости непрерывных случайных величин ξ и η необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$.*

Для независимых непрерывных случайных величин ξ и η

$$f(y/\xi = x) = f_\eta(y) \text{ и } f(x/\eta = y) = f_\xi(x) \text{ при } f_\xi(x) \neq 0,\ \ f_\eta(y) \neq 0.$$

Т.е. закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

$$f(y/\xi = x) = \frac{f(x;y)}{f_\xi(x)} = \frac{f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)}{f_\xi(x)} = f_\eta(y).$$

Пример 11.5. *Функция плотности $f(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ, η) в области $D: \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2$ принимает значения $A\cos x \cdot \cos y$ и равна нулю вне этой области.*
1) Найти функцию распределения данной случайной величины (ξ, η).
2) Найти вероятность попадания случайной величины (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0, x = \pi/3, y = 0, y = \pi/3$.

◀ Для определения параметра A используем свойство (5) функции плотности

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1.$$

$$A\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx \int\limits_0^{\pi/2} \cos y\,dy = A\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)^2 = A\left(\sin \pi/2 - 0\right)^2 = A.$$

Следовательно, $A = 1$.

Найдём функции распределения, используя её определение (11.9)

$$F(x;y) = P\{\xi < x; \eta < y\}.$$

Согласно данному определению, в областях $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$ функция распределения равно нулю. А в области $x \leqslant \pi/2$ и $y \leqslant \pi/2$ функция распределения равна единице. Осталось найти значения функции распределения внутри прямоугольной области и внутри двух полубесконечных полос $0 < x < \pi/2, y > \pi/2$ и $0 < y < \pi/2, x > \pi/2$.

1) В области $D: \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

$F(x;y) = P\{\xi < x; \eta < y\} = \int\limits_0^x \cos x\,dx \int\limits_0^y \cos y\,dy = \sin x\Big|_0^x \sin y\Big|_0^y = \sin x \, \sin y$.

2) В области $D1: \ 0 < x \leqslant \pi/2, \ y > \pi/2$.

$F(x;y) = \int\limits_0^x \cos x\,dx \int\limits_0^{\pi/2} \cos y\,dy = \sin x\Big|_0^x \sin y\Big|_0^{\pi/2} = \sin x$.

3) В области $D2: x > \pi/2\, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

$F(x;y) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx \int\limits_0^y \cos y\,dy = \sin x\Big|_0^{\pi/2} \sin y\Big|_0^y = \sin y$.

$$F(x;y) = \begin{cases} 0, & (x < 0)\bigcup(y < 0), \\ 1, & (x > \pi/2)\bigcap(y > \pi/2), \\ \sin x, & (0 < x < \pi/2)\bigcap(y > \pi/2), \\ \cos y, & (x > \pi/2)\bigcap(0 < y < \pi/2), \\ \sin x \, \sin y, & (x;y) \in D. \end{cases} \tag{11.18}$$

Применяя формулу (11.11)

$$f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y},$$

легко проверить что функция распределения найдена правильно.

Для вычисления искомой вероятности, используем формулу (11.10):

$P(x_1 < \xi < x_2,\ y_1 < \eta < y_2) =$
$= (F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1)) - (F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)).$

Положив $x_1 = 0,\ x_2 = \pi/3,\ y_1 = 0,\ y_2 = \pi/3$, получим

$P = \left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin 0\right) - \left(\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\cdot\sin 0\right) = \frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}.$

Найти искомую вероятность можно используя свойство функции плотности (4).

$$P(0 < \xi < \pi/3,\ 0 < \eta < \pi/3) = \int\limits_0^{\pi/3} \cos x\,dx \int\limits_0^{\pi/3} \cos y\,dy = \sin x\Big|_0^{\pi/3} \sin y\Big|_0^{\pi/3} =$$

$= (\sin\pi/3 - 0)^2 = 0{,}75.$ ►

Пример 11.6. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-4y}) \text{ , при } x > 0,\ y > 0, \\ 0 \text{ , в противном случае.} \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности (ξ, η).

◄ Согласно (11.11), плотность вероятности есть вторая смешанная частная производная функции распределения. Производная по y отличной от нуля части равна:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 4(1 - e^{-2x})e^{-4y}.$$

Дифференцируя это выражение по x, получим

$$f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y} = 8e^{-2x-4y}$$

при $x > 0,\ y > 0$ и, кроме того, $f(x, y) = 0$ при $x < 0$ или $y < 0$. ►

Ответ: $\boxed{f(x, y) = \begin{cases} 8e^{-2x-4y} \textbf{ при } x > 0,\ y > 0, \\ 0 \textbf{ в противном случае.} \end{cases}}$

Пример 11.7. *Задана двумерная плотность вероятности* $f(x, y) = a/(x^2 + y^2 + 1)^2$ *системы двух случайных величин* (ξ, η). *Найти постоянную* a.

◀ Для определения параметра a используем свойство функции плотности (5):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = r\,dr\,d\varphi.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{1}{(r^2+1)^2} r dr =$$

$$= a\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\infty} \frac{d(r^2/2)}{(r^2+1)^2}\,dr\right) = a\pi\left(-\frac{1}{1+r^2}\Big|_0^{\infty}\right) = a\pi = 1.$$

Получили
$\pi a = 1 \ \Rightarrow\ a = 1/\pi.$ ▶

Ответ: $\boxed{a = 1/\pi.}$

Пример 11.8. *Двумерный случайный вектор* (ξ,η) *имеет плотность вероятности* $f(x,y) = a/((1+x^2)(1+y^2))$. *Определить параметр* a*; найти функцию распределения* $F(x,y)$*; вычислить вероятность попадания случайной точки* (ξ,η) *в квадрат* $G : x \in [0,1],\ y \in 0,1]$*; установить, являются ли величины* ξ *и* η *зависимыми.*

◀ Для определения параметра a используем свойства (5) плотности:

$$a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = 1, \quad a\cdot\Big(\operatorname{arctg} x\Big)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\Big(\operatorname{arctg} y\Big)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

$$a\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1, \quad a\cdot\pi^2 = 1, \quad a = \frac{1}{\pi^2}.$$

Таким образом,

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Согласно свойству (3) двумерной плотности, функция распределения

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{arctg} y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Вероятность попадания в прямоугольник G определим по формуле (11.10):

$$P((\xi,\eta)\in G) = F(1,1) - F(1,0) - (F(0,1) - F(0,0)) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\Bigg(\left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2} -$$
$$- \left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 1\right) - \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}\right)\Bigg) = \frac{1}{\pi^2}\left(\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 - \frac{3\pi^2}{8} - \left(\frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}\right)\right) = \frac{1}{16}.$$

Заметим, что эту же вероятность можно непосредственно найти с помощью плотности распределения согласно её свойству 4.

Плотности распределения составляющих найдем по формулам (11.13):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} =$$
$$= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\operatorname{arctg} y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогично найдем, что

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Поскольку здесь $f(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, то делаем вывод о том, что случайные величины ξ и η независимы. ▶

Пример 11.9. *Дана плотность двумерной случайной величины*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} \text{ при } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ 0 \text{ при } x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

◀ Применяем формулу (11.12)

$$M(\xi) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x\cdot f(x,y)dxdy = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-x-y}dxdy = \int\limits_0^\infty x\cdot e^{-x}dx\cdot\int\limits_0^\infty e^{-y}dy.$$

Отдельно вычислим полученные определённые интегралы

$$\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-x}dx = -\int\limits_0^\infty x\cdot de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-x}dx = 0 - e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-y}dy = -e^{-y}\Big|_0^\infty = 1.$$

Получили, $M(\xi) = 1$. Ввиду симметрии функции плотности $M(\eta) = 1$.

Дисперсию вычислим, используя формулу

$$D(\xi) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 \cdot f(x,y)dxdy - M^2(\xi).$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^2 \cdot f(x,y)dxdy = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^2 \cdot e^{-x-y}dxdy = \int\limits_0^\infty x^2 \cdot e^{-x}dx \cdot \int\limits_0^\infty e^{-y}dy.$$

Дважды интегрируя по частям, вычислим интеграл по переменной x

$$\int\limits_0^\infty x^2 \cdot e^{-x}dx = -\int\limits_0^\infty x^2 \cdot de^{-x} = -x^2e^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty e^{-x}xdx = -2\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx =$$

$$= -2xe^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big|_0^\infty = 2.$$

Получили, $M(\xi^2) = 2$.

$$D(\xi) = 2 - 1 = 1.$$

Аналогично, $D(\eta) = 1$. ►

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 1;\ M(\eta) = 1;\ D(\xi) = 1;\ D(\eta) = 1.}$

Задания для самостоятельной работы

11.1. Задан закон распределения случайного вектора $(\xi;\eta)$

$\xi\backslash\eta$	0	1	3
-1	0,15	0	0,18
2	0,33	0,1	0,24

Найдите $M(\xi),\ M(\eta), D(\xi),\ D(\eta)$ и $K_{\xi\eta}$.

11.2. Задан закон распределения случайного вектора $(\xi;\eta)$

$\xi\backslash\eta$	-1	4
-1	0,5	0,1
2	0,2	0,05
3	0,05	0,1

Найдите $M(\xi),\ M(\eta), D(\xi),\ D(\eta)$ и $K_{\xi\eta}$.

11.3. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения вероятностей $f(x,y) = \dfrac{a}{\left(\frac{1}{3}+x^2\right)(3+y^2)}, x \in R, y \in \mathbb{R}$.

Найти: 1) значение величины a;
2) функцию распределения вероятностей $F(x;y)$;
3) плотности распределения компонент $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$;
4) $P(\xi<1,\eta<\sqrt{3})$.

11.4. Задана функция плотности распределения двумерной случайной величины (ξ,η): $f(x,y)=\begin{cases} a\cdot xy \text{ при } (x;y)\in D,\\ 0 \text{ при } (x;y)\notin D,\end{cases}$ где D — треугольник $OAB, O(0;0),\ A(0,1)$ и $B(1;0)$. Найти: 1) значение параметра a; 2) плотности распределения компонент $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$; 3) функции распределения отдельных компонент; 4) вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в область $P(\xi>0{,}5;\eta<1)$.

11.5. Дана функция распределения системы двух случайных величин

$$F(x,y)=k(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}),(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$$

Вне первой четверти $F(x,y)$ равняется нулю. Найти выражение для плотности вероятности и коэффициент k. Определить вероятность попадания случайной точки в область D, которая представляет собой четверть круга радиуса R $(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

11.6. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины имеет следующий вид:

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0 \text{ вне указанной области.}\end{cases}$$

Определить константу a и вычислить центр распределения.

11.7. Дана плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ,η):

$$f(x,y)=\begin{cases} A\sin(x+y), & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 0, & \text{вне этой области.}\end{cases}$$

Найти параметр A, определить функцию распределения системы и математические ожидания величин ξ и η.

11.8. Двумерная случайная величина (ξ,η) распределена равномерно внутри квадрата $D:\ |x|+|y|\leqslant 1$. Найти выражение для плотности вероятности случайной величины (ξ,η), математические ожидания $M(\xi),M(\eta)$ и дисперсии $D(\xi),D(\eta)$.

12. Контрольная работа №2. Случайные величины

Примерный вариант контрольной работы №2

Пример 12.1. *В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию д.с.в. ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.*

Пример 12.2. *Лампочки проверяют до первой бракованной, всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения д.с.в. ξ — числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна* 0,8. *Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, функцию распределения д.с.в. ξ и построить её график.*

Пример 12.3. *Н.с.в. ξ задаётся плотностью распределения вероятностей* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x \in (-1;1], \\ 0, & x \notin (-1;1]. \end{cases}$ *Найти вероятность попадания ξ в интервал* $(0;\sqrt{3}/3)$.

Пример 12.4. *Н.с.в. ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ, $M(\xi)$, $D(\xi)$,* $P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75)$ *и отобразить графически полученное решение.*

Пример 12.5. *Д.с.в. ξ и η независимы. Найти ряд распределения д.с.в. $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ. Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:*

ξ	0	1	2
P	0,5	0,25	0,25

η	-1	0
P	0,5	0,5

Пример 12.6. *Непрерывный случайный вектор $(\xi;\eta)$ задаётся плотностью распределения вероятностей*

$$f(x,y) = \begin{cases} A\cos x\cos y, & (x,y) \in D : \{x \in (0;\pi/2], y \in (0;\pi/2]\}, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Найти функции плотности распределения компонент случайного вектора $(\xi;\eta)$: $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$. Схематически постройте их графики. Найдите $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

Решение примерного варианта контрольной работы №2

Пример 12.1. *В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.*

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ — случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, \ m = 0{,}1, \ \ldots, n. \tag{12.1}$$

Определение 12.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется* ***биномиальным***.

ξ	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	$n-1$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2p^2q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\ldots$	$np^{n-1}q$	p^n

$$M(\xi) = n \cdot p, \quad D(\xi) = n \cdot p \cdot q. \tag{12.2}$$

◀ Найдём искомые вероятности по формуле Бернулли при $n = 8$, $p = \dfrac{3}{15} = 0{,}2.$

$$P_8(0) = 0{,}8^8 = 0{,}16777216; \quad P_8(1) = 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}3355443.$$

Пусть A искомое событие. Тогда
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (P_8(0) + P_8(1)) \approx 0{,}\mathbf{497}.$

По формулам (12.2) находим:
$M(\xi) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}2 = \mathbf{1{,}6}$;
$D(\xi) = nqp = 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = \mathbf{1{,}28}$. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) \approx 0.497, \ M(\xi) = 1{,}6, \ D(\xi) = 1{,}28.}$

Пример 12.2. *Лампочки проверяют до первой бракованной, но всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения д.с.в.* ξ *— числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна* 0,8. *Найти* $M(\xi), D(\xi)$, *функцию распределения д.с.в.* ξ *и построить её график.*

◀ Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Здесь имеет место геометрическое распределение, где $p = 0{,}8,\ q = 0{,}2$.

$P(\xi = 1)$ есть вероятность, что первая лампочка оказалась бракованной. Значение этой вероятности, согласно условию, равна 0,2;
$P(\xi = 1) = 0{,}2;\ \ P(\xi = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16;$
$P(\xi = 3) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128;$
$P(\xi = 4) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1024.$

Событие состоящее в том, что будут проверены все пять лампочек будет состоять из двух событий: первые четыре лампочки исправны, а пятая неисправна и все пять исправны.

Данная вероятность равна
$P(\xi = 5) = 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^5 = 0{,}8^4(0{,}2 + 0{,}8) = 0{,}8^4 = 0{,}4096.$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

$M(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}128 + 4 \cdot 0{,}1024 + 5 \cdot 0{,}4096 =$
$= \mathbf{3{,}3616}$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$

$M(\xi^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}16 + 9 \cdot 0{,}128 + 16 \cdot 0{,}1024 +$
$+ 25 \cdot 0{,}4096 = 13{,}8704.$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 13{,}8704 - 3{,}3616^2 \approx \mathbf{2{,}570}$.

Найдём теперь функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$.

При $x \leqslant 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений меньших единицы. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 0{,}2$. Если $2 < x \leqslant 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leqslant \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:
$F(x) = P(\xi < x) = P((\xi < 2)+(2 \leqslant \xi < 3)) = P(\xi < 2)+P(2 \leqslant \xi < 3) = 0{,}36$ и так далее.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 1,\\ 0{,}2, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2,\\ 0,36, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3,\\ 0,488, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4,\\ 0,5094, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5,\\ 1, & \text{при} \quad 5 < x. \end{cases}$$

График этой функции $F(x)$ является ступенчатой линией со скачками в точках $x = k, k = 1, 2, 3, 4, 5$, равными вероятностям $P(\xi = k)$, рис. 49. ►

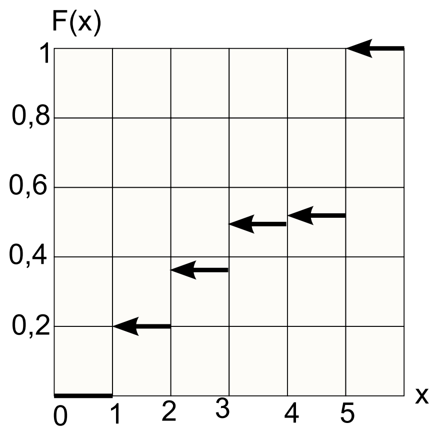

Рисунок 49. $F(x)$

Пример 12.3. *Н.с.в. ξ задаётся плотностью распределения вероятностей* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x \in (-1;1],\\ 0, & x \notin (-1;1]. \end{cases}$ *Найти вероятность попадания ξ в интервал $(0;\sqrt{3}/3)$. Построить графики функции плотности вероятностей и функции распределения вероятностей.*

◄ Для нахождения A воспользуемся свойством плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{A}{1+x^2}dx = 1 \Leftrightarrow A \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$A(\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(-1)) = A\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = A\pi/2 \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}. \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x \in (-1;1],\\ 0, & x \notin (-1;1]. \end{cases}$$

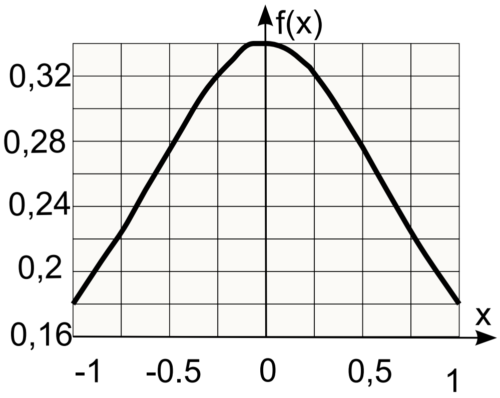

Рисунок 50. $f(x)$

График плотности $f(x)$ изображен на рис. 50.

Для нахождения функции распределения $F(x)$, связанной с плотностью формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, рассмотрим три возможных случая расположения x:

$$(1)\ x \leqslant -1 \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

$$(2)\ -1 < x \leqslant 1 \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{x} \frac{2}{\pi(1+t^2)}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^{x} = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{\pi};$$

$$(3)\ 1 < x \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{\pi(1+t^2)}dt + \int\limits_{1}^{x} 0dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} (\operatorname{arctg} t) \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Окончательно получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant -1; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{2 \operatorname{arctg} x}{\pi}, & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ на интервале $x \in (-1; 1)$, представлен на рис. 51.

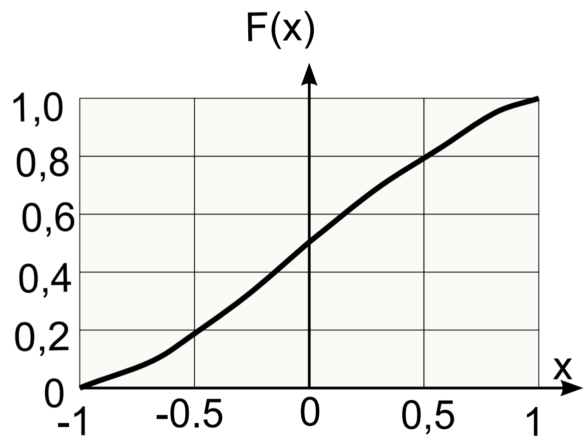

Рисунок 51. $F(x)$

$$P\left(x \in (0; \sqrt{3}/3)\right) = F(\sqrt{3}/3) - F(0) = \left(0{,}5 + \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}/3)}{\pi}\right) -$$

$$- \left(0{,}5 + \frac{2\,\mathrm{arctg}(0)}{\pi}\right) = \frac{2\pi/6}{\pi} = \frac{1}{3}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{A = \frac{1}{\pi},\ P\left(x \in (0; \sqrt{3}/3)\right) = \frac{1}{3}.}$

Пример 12.4. *Н.с.в. ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ, $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75)$ и отобразить графически полученное решение.*

Определение 12.2. *Распределение непрерывной случайной величины называется* ***экспоненциальным (показательным)****, если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \quad \text{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{12.3}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия равны

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{12.4}$$

◀ Найдем функцию распределения:

$$\text{при } x \geqslant 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} 4e^{-4t}dt = -e^{-4t}\Big|_0^x = 1 - e^{-4x};$$

$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

По формулам (12.4), числовые характеристики случайной величины ξ

$M(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = \mathbf{0{,}25}$, $\qquad D(\xi) = \dfrac{1}{\lambda^2} = \mathbf{0{,}625}$.

$P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = \left(1 - e^{-4\cdot 0{,}75}\right) - \left(1 - e^{-4\cdot 0{,}25}\right) =$
$= \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^3} \approx \mathbf{0{,}318}$.

На рис. 52 изображен график функции плотности данного распределения.

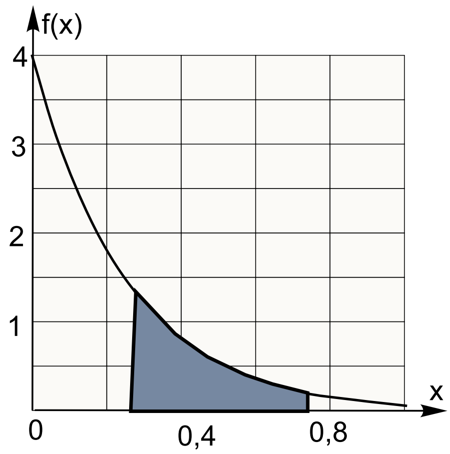

Рисунок 52. *Функция* $f(x)$

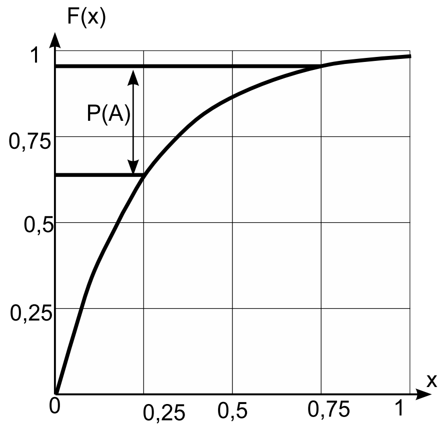

Рисунок 53. *Функция* $F(x)$

Искомая вероятность равна закрашенной области. На рис. 53 представлен график функции распределения. Искомая вероятность равна приращению функции $F(0,75) - F(0,25)$. ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 0{,}25; \;\; D(\xi) = 0{,}625; \quad F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-4x}, x \geqslant 0. \end{cases}}$

Пример 12.5. *Д.с.в. ξ и η независимы. Найти ряд распределения д.с.в. $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ. Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:*

ξ	*0*	*1*	*2*
P	*0,5*	*0,25*	*0,25*

η	*-1*	*0*
P	*0,5*	*0,5*

◀ Ряды распределения д.с.в. 2ξ и -4η равны:

2ξ	0	2	4
P	0,5	0,25	0,25

-4η	0	4
P	0,5	0,5

$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}75.$

$M(\eta) = -1 \cdot 0{,}5 = -0{,}5.$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}25 - (0{,}75)^2 =$
$= 0{,}25 + 1 - 0{,}5625 = 0{,}6875.$

$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = (-1)^2 \cdot 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25.$

Случайная величина $\theta = 2\xi - 4\eta$ принимает следующие значения: $\theta = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Найдём вероятности

$P(\theta = 0) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$

$P(\theta = 2) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 0) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125.$

$P(\theta = 4) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 4) + P(4\xi = 4) \cdot P(-4\eta = 0) =$
$= 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}375.$

$P(\theta = 6) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 4) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125.$

$P(\theta = 8) = P(2\xi = 4) \cdot P(-4\eta = 4) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125.$

θ	0	2	4	6	8
P	0,25	0,125	0,375	0,125	0,125

$M(\theta) = 0 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}125 + 4 \cdot 0{,}375 + 6 \cdot 0{,}125 + 8 \cdot 0{,}125 = 16 \cdot 0{,}125 + 1{,}5 = \mathbf{3{,}5}.$

$D(\theta) = 4 \cdot 0{,}125 + 16 \cdot 0{,}375 + 36 \cdot 0{,}125 + 64 \cdot 0{,}125 - (3{,}5)^2 =$
$= 19 - 12{,}25 = \mathbf{6{,}75}.$

Найдём теперь $M(\theta)$ и $D(\theta)$ используя свойства математического ожидания и дисперсии.

$M(\theta) = 2 \cdot M(\xi) - 4 \cdot M(\eta) = 2 \cdot 0{,}75 + 4 \cdot 0{,}5 = \mathbf{3{,}5}.$

$D(\theta) = 2^2 \cdot D(\xi) + (-4)^2 \cdot D(\eta) = 4 \cdot 0{,}6875 + 16 \cdot 0{,}4375 = \mathbf{6{,}75}.$

Результаты совпали. ▶

Пример 12.6. *Непрерывный случайный вектор* $(\xi;\eta)$ *задаётся плотностью распределения вероятностей*

$$f(x,y)=\begin{cases} A\cos x\cos y, & (x,y)\in D:\{x\in(0;\pi/2], y\in(0;\pi/2]\},\\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Найти функции плотности распределения случайных величин $f_\xi(x)$ *и* $f_\eta(y)$ *и схематически постройте их графики. Найдите* $M(\xi)$ *и* $M(\eta)$.

◀ $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1\Rightarrow$

$$A\int\limits_0^{\pi/2}(\cos x)dx\int\limits_0^{\pi/2}(\cos y)dy=A\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right)^2=A\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)^2=A\Rightarrow A=1.$$

Формулы $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx.\quad M(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}yf_\eta(y)dxdy.$$

Найдём функции плотности распределения случайных величин ξ и η

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, x\notin[0;\pi/2],\\ \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos ydy=\cos x\sin y\Big|_0^{\pi/2}=\cos x, x\in[0;\pi/2].\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, y\notin[0;\pi/2],\\ \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos ydx=\cos y\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\cos y, y\in[0;\pi/2].\end{cases}$$

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}x\cos xdx=\int\limits_0^{\pi/2}xd(\sin x)-$$

$$-x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}\sin xdx=\pi/2+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\pi/2-1.$$

$$M(\eta)=\pi/2-1.\blacktriangleright$$

Задания для самостоятельной работы

Решите вариант контрольной работы №2

12.1. Детали проверяются до появления первой бракованной (число деталей неограниченно). Вероятность бракованной детали 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию д.с.в. ξ — числа проверенных деталей и вероятность того, что будет проверено более четырёх деталей. Отобразить графически полученное решение.

12.2. Вероятность искажения «точки» при передаче сигнала 0,1, искажения «тире» 0,2. Найти ряд распределения д.с.в. ξ — числа искажений при передаче сигнала из трёх точек и одного тире. Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, функцию распределения д.с.в. ξ и построить её график.

12.3. Непрерывная величина ξ задана функцией распределения
$F(x) = \begin{cases} Ax^4, & x \in (0;2], \\ 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$ Найти параметр A, функцию плотности распределения н.с.в. ξ, вероятность попадания ξ, в $[-2; 1,5]$, $M(\xi)$, $D(\xi)$ и построить её график.

12.4. Найти среднеквадратичную ошибку измерений, если известно, что, с вероятностью 0,95, ошибка составит не более 1 см (по модулю). Систематическая ошибка отсутствует, случайные ошибки распределены по нормальному закону. Результат отобразить графически.

12.5. Задана дискретная двумерная случайная величина (ξ, η):

ξ/η	-2	0	2
-4	0	0	0,125
-2	0,25	0,25 0	0
0	0	0,25 0	0,125

Найти ряды распределения одномерных д.с.в. ξ, η, $\xi + \eta$. Выяснить, зависимы ли величины ξ и η, если зависимы, то найти коэффициент корреляции.

12.6. Непрерывный случайный вектор (ξ, η) равномерно распределён в области $G : \{x^2 + y^2 \leqslant 16\}$. Найти вероятность попадания случайной точки в область $D : \{|x| + |y| \leqslant 2\}$.

13. Корреляционная зависимость случайных величин

Определение 13.1. *Корреляционным моментом* $K_{\xi\eta}$ *случайных величин* ξ *и* η *называют:*

$$K_{\xi\eta} = M\left(\left(\xi - M(\xi)\right)\left(\eta - M(\eta)\right)\right).$$

Легко убедиться, что корреляционный момент можно также вычислять по формуле:

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{13.1}$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (13.1) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i y_j - M(\xi) \cdot M(\eta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$K_{\xi\eta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(xy)dxdy - M(\xi) \cdot M(\eta).$$

Теорема 13.1. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания из формулы (13.1), получаем для независимых ξ и η:

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = 0.$$

На практике пользуются безразмерной характеристикой — коэффициентом корреляции.

Определение 13.2. *Коэффициентом корреляции* $r_{\xi\eta}$ *случайных величин* ξ *и* η *называется*

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \tag{13.2}$$

Перечислим свойства коэффициента корреляции.

(1) Для независимых ξ и η коэффициент корреляции равен нулю: $r_{\xi\eta} = 0$,

(2) $|r_{\xi\eta}| \leqslant 1$,

(3) $|r_{\xi\eta}| = 1 \iff \eta = k\xi + b$ или $\xi = k\eta + b$.

Замечание 13.1. *Из равенства нулю коэффициента корреляции не следует независимость случайных величин.*

Определение 13.3. *Случайные величины ξ и η называются* ***некоррелированными****, если их коэффициент корреляции равен нулю: $r_{\xi\eta} = 0$.*

Пример 13.1. *Дано распределение двумерного случайного вектора (ξ, η) с дискретными компонентами.*

ξ/η	-2	0	1
-1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0	0,1
4	0,3	0	0,1

Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). Найти коэффициент корреляции.

◀ Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	-1	2	4
p	0,4	0,2	0,4

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей η:

η	-2	0	1
p	0,5	0,1	0,4

С помощью последних таблиц легко найдем математические ожидания компонент дискретного вектора $(\xi,\ \eta)$:

$$M(\xi) = -1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6,$$

$$M(\eta) = -2 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}6.$$

Умножая значения x_i на y_j компонентов случайного вектора (ξ, η) ξ и η и в качестве вероятностей принимая значения p_{ij} из закона распределения, получим закон распределения одномерной случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	-8	-4	-1	0	2	4
P	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3

$M(\xi\eta) = -8 \cdot 0{,}3 - 4 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = -1{,}5.$

Применяя формулу (11.8), найдём корреляционный момент
$K_{\xi\eta} = M(\xi\,\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = -1{,}5 - 1{,}6 \cdot (-0{,}6 = -0{,}54.$

Корреляционный момент отличен от нуля, следовательно **компоненты случайного вектора (ξ, η) коррелированы**.

Осталось найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$. Для этого найдём дисперсии компонент вектора $(\xi,\ \eta)$:

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = (-1)^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}4 - 1{,}6^2 = 5{,}04.$

$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = (-2)^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}4 - (-0{,}6^2 = 2{,}04.$

$r_{\xi\eta} = \dfrac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \dfrac{-0{,}54}{\sqrt{5{,}04 \cdot 2{,}04}} \approx -0{,}168.$ ►

Ответ: $\boxed{\xi \text{ и } \eta \text{ — коррелированы; } r_{\xi\eta} \approx -0{,}168.}$

Пример 13.2. *Случайный вектор (ξ, η) распределён равномерно внутри прямоугольного треугольника G с вершинами $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(6, 0)$.*

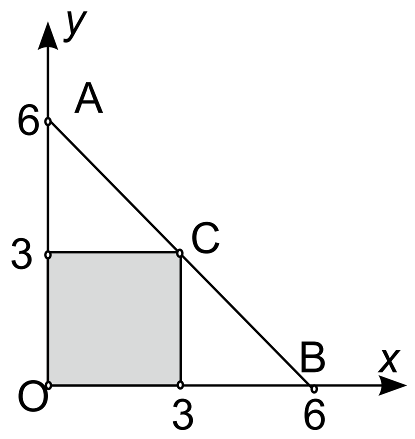

Рисунок 54. *Пример 13.2*

1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора.

2) Исследовать зависимость компонент случайного вектора.

3) Выяснить коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). Найти коэффициент корреляции.

4) Найти $P((\xi, \eta) \in D)$, где $D = \{(x, y)|\quad 0 \leqslant x \leqslant 3, \quad 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

◄ 1) Распределение двумерной непрерывной случайной величины называют равномерным, если в области, которой принадлежат все возможные значения (x, y), плотность вероятности сохраняет постоянное значение, т.е. $f(x, y) = c$. Уравнение прямой AB есть $y = 6 - x$. Постоянную a найдем с помощью свойства 5 двумерной плотности. Тогда

$$\int_0^6 dx \int_0^{6-x} c dy = 1, \quad c\int_0^6 (6-x)dx = c\left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^6 = c\cdot 18 = 1.$$

$\Rightarrow 18a = 1,\ a = 1/18,\ f(x,y) = 1/18$ внутри треугольника; вне этой области плотность равна нулю. Площадь треугольника OAB можно было найти по формуле: $S = \dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB = 18.$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\notin G, \\ \dfrac{1}{18}, & (x,y)\in G. \end{cases}$$

Согласно (11.14), плотности составляющих двумерной величины будут равны:

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy = \int_0^{6-x} \frac{1}{18}\,dy = \frac{6-x}{18}\ (0<x<6),$$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx = \int_0^{6-y} \frac{1}{18}\,dx = \frac{6-y}{18}\ (0<y<6).$$

Вне указанных интервалов эти функции равны нулю.

2) Теперь займёмся исследованием зависимости компонент случайного вектора (ξ,η).

Для этого найдём условные плотности компонент по формулам (11.14) и (11.15).

$$f(y/\xi = x) = \begin{cases} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x)\neq 0. \end{cases} \Rightarrow f(y/\xi = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-x}, & x\in[0;6], \\ 0, & x\notin[0;6]. \end{cases}$$

$$f(x/\eta = y) = \begin{cases} 0, & f_\eta(y) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\eta(x)}, & f_\eta(y)\neq 0. \end{cases} \Rightarrow f(x/\eta = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-y}, & y\in[0;6], \\ 0, & y\notin[0;6]. \end{cases}$$

В рассмотренном примере условные плотности распределения $f(x/\eta = y)$ и $f(y/\xi = x)$ не совпадают с безусловными плотностями $f_\eta(y)$

и $f_\xi(x)$. Это имеет место тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η *зависимы.*

3) Выяснить коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). По вычисленным плотностям распределения компонент случайного вектора найдём их математические ожидания.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_0^6 x \frac{6-x}{18} dx = \frac{1}{18} \cdot \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 =$$
$$= \frac{1}{18} \cdot (3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3}) = 2.$$

$$M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = \int\limits_0^6 y \frac{6-y}{18} dy = 2.$$

Следовательно, математическое ожидание случайного вектора (ξ, η) равно вектору $(2; 2)$.

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx - M^2(\xi) = \int\limits_0^6 x^2 \frac{6-x}{18} dx - 2^2 =$$
$$= \frac{1}{18} \cdot \left(2x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^6 - 4 = \frac{6^3}{3 \cdot 6} \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) - 4 = 12 \cdot \frac{1}{2} - 4 = 2.$$

$D(\eta) = 2.$

Корреляционный момент (ковариация) $K_{\xi\eta}$ вычисляется по формуле (13.1)

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины $\xi\eta$

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\,f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{18}\iint\limits_{G} xy\,dxdy = \frac{1}{18}\int\limits_{0}^{6} x\,dx \int\limits_{0}^{-x+6} y\,dy =$$

$$= \frac{1}{18}\int\limits_{0}^{6} x\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_{0}^{-x+6} dx = \frac{1}{36}\int\limits_{0}^{6}(x^3-12x^2+36x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{x^4}{4}-4x^3+18x^2\right)\bigg|_0^6 = \frac{1}{36}6^2\left(\frac{36}{4}-4\cdot 6+18\right) = 9-24+18 = 3.$$

Теперь найдем корреляционный момент

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = 3-4 = -1.$$

Следовательно, случайные величины ξ и η находятся в корреляционной зависимости.

Используя формулу (13.2), найдём коэффициент корреляции.

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta} = \frac{-1}{\sqrt{2\cdot 2}} = -0{,}5.$$

4) Найти $P((\xi,\eta)\in D)$, где $D = \{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 3; 0\leqslant y\leqslant 3\}$.
$P((\xi,\eta)\in D) = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \frac{1}{18}\,dx\,dy = \frac{1}{18}\cdot S_D = \frac{9}{18} = 0{,}5.$ ►

Пример 13.3. *Случайный вектор (ξ,η) распределен равномерно в области G, рис.55.*

1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора и проверить, являются ли они зависимыми.

2) Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ,η). Найти коэффициент корреляции.

3) Найти $P((\xi,\eta)\in D)$, где $D = \{(x,y)|x^2+y^2|\leqslant 1\}$.

◄ 1) На рис. 55 представлена область равномерного распределения случайного вектора G и область D. Из свойств плотности распределения следует, что функция плотности постоянна и равна $1/S$ (S площадь фигуры) на области G и равна нулю вне её. $S = ED\cdot CD - 0{,}5AO\cdot OB = 7/2$. Следовательно, функция плотности двумерного распределения равна

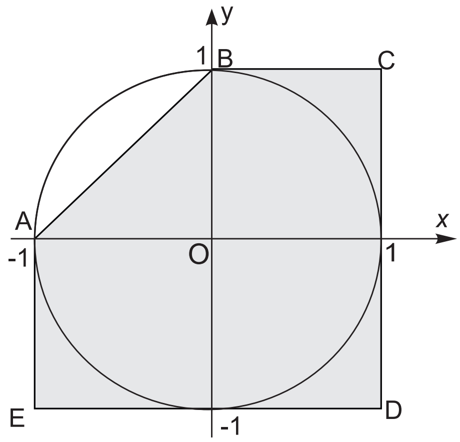

Рисунок 55. *Пример 13.3*

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin G,\\ \dfrac{2}{7}, & (x,y)\in G.\end{cases}$$

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x;y)$ по формулам (11.14). Найдём плотность компоненты ξ, т.е. функцию $f_\xi(x)$. При $x\notin[-1;1]$ $f_\xi(x)=0$, т.к. $f(x,y)=0$. При закрашивании области G слева направо вертикальными линиями область интегрирования разбивается на две подобласти. Первая подобласть ограничена прямыми: $y=-1, x=-1$, $y=x+1$ и $x=0$. Вторая подобласть ограничена прямыми: $y=-1$, $x=0$, $y=1$ и $x=1$.

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[-1;1],\\ \int\limits_{1}^{x+1}\dfrac{2}{7}dy=\dfrac{2}{7}y\Big|_{-1}^{x+1}=\dfrac{2}{7}(x+1+1)=\dfrac{2}{7}(x+2), x\in[-1;0),\\ \int\limits_{-1}^{1}\dfrac{2}{7}dy=\dfrac{2}{7}y\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{2}{7}(1+1)=\dfrac{4}{7}, x\in[0;1].\end{cases}$$

Следовательно, случайная величина ξ распределена кусочно-линейна на отрезке $[-1;1]$ и её функция плотности равна

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{7}(x+2), & x\in[-1;0],\\ \dfrac{4}{7}, & x\in([0;1],\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Аналогично получим плотность распределения компоненты η. При $y \notin [-1;1]$ $f_\eta(y) = 0$, т.к. $f(x,y) = 0$. При закрашивании области G горизонтальными линиями необходимо разбить область на две подобласти. Первая подобласть ограничена прямыми:$y = -1, y = 0$, $x = -1$ и $x = 1$. Вторая подобласть ограничена прямыми:$y = 0$, $y = 1$, $x = y - 1$ и $x = 1$. Находим функцию $f_\eta(x)$.

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \notin [-1;1], \\ \int\limits_1^1 \frac{2}{7}dx = \frac{2}{7}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{7}(1+1) = \frac{4}{7}, y \in [-1;0), \\ \int\limits_{y-1}^{1} \frac{2}{7}\,dx = \frac{2}{7}\,x\Big|_{y-1}^{1} = \frac{2}{7}(1-y+1) = \frac{2}{7}(2-y), y \in [0;1]. \end{cases}$$

Следовательно, плотность распределения компоненты η имеет равна:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-1;1], \\ \frac{4}{7}, & y \in [-1;0), \\ \frac{2}{7}(2-y) & y \in [0;1]. \end{cases}$$

На рис. 56, представлены графики плотности распределения вероятностей

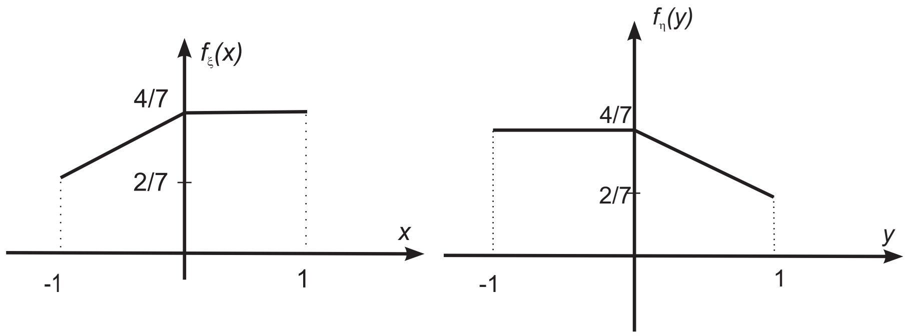

Рисунок 56. *Компоненты плотности вектора* $(\xi;\,\eta)$

компонент случайного вектора $(\xi;\,\eta)$. Отметим, что все свойства функции плотности выполняются. Функции неотрицательные и площадь фигуры, ограниченной графиками функций, осью абсцисс и штриховыми линиями, равна 1.

Согласно теореме 11.2, которая утверждает, что для независимости непрерывных случайных величин ξ и η необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, делаем вывод, что случайные величины ξ и η зависимы.

2) Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). По вычисленным плотностям распределения компонент случайного вектора найдём их математические ожидания.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{2}{7} x(x+2) dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{4}{7} x dx = \frac{2}{7}\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{4}{7}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \\ = \frac{2}{7}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{7} = \frac{2}{21}.$$

$$M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = \int\limits_{-1}^{0} \frac{4}{7} y\, dy + \int\limits_{0}^{1} \frac{2}{7}(2y - y^2)\, dy = \\ = \frac{2}{7} y^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{7}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = -\frac{2}{7} + \frac{2}{7}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{21}.$$

Следовательно, математическое ожидание случайного вектора (ξ, η) равно нуль-вектору $\left(\frac{2}{21}; -\frac{2}{21}\right)$.

Корреляционный момент (ковариация) $K_{\xi\eta}$ вычисляется по формуле (13.1)

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Вычислим $M(\xi\eta)$

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \frac{2}{7}\iint\limits_{G} xy\, dxdy = \frac{2}{7}\int\limits_{-1}^{0} x\, dx \int\limits_{-1}^{x+1} y\, dy + \\ + \frac{2}{7}\int\limits_{0}^{1} x\, dx \int\limits_{-1}^{1} y\, dy = \frac{2}{7}\int\limits_{-1}^{0} x \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{x+1} dx + \frac{2}{7}\int\limits_{0}^{1} x \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} dx = \\ = \frac{1}{7}\int\limits_{0}^{1} (x^3 + 2x^2) dx = \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{11}{84}.$$

Теперь найдем корреляционный момент

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = \frac{11}{4\cdot 21} + \frac{4}{21\cdot 21} = \frac{247}{1764} \approx 0{,}001.$$

Следовательно случайные величины ξ и η находятся в корреляционной зависимости.

Используя формулу (13.2) найдём коэффициент корреляции. Для этого найдём $D(\xi)$ и $D(\eta)$. Находим $M(\xi^2)$ и $M(\eta^2)$.

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \frac{2}{7}\int\limits_{-1}^{0} x^3 + 2x^2\,dx + \frac{4}{7}\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{13}{42}.$$

$$M(\eta^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_\eta(y)dy = \frac{4}{7}\int\limits_{-1}^{0} y^2\,dy + \frac{2}{7}\int\limits_{0}^{1} 2y^2 - y^3\,dy = \frac{13}{42}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{13}{42} - \frac{4}{21^2} = \frac{265}{882}.$$

$$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = \frac{13}{42} - \frac{4}{21^2} = \frac{265}{882}.$$

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta} = \frac{\dfrac{247}{1764}}{\dfrac{265}{882}} =\approx 0{,}466.$$

3) Найти $P((\xi,\eta)\in D)$, где $D = \{(x,y)|x^2+y^2| \leqslant 1\}$.

Найдём площадь круга радиуса 1, за вычетом двух сегментов круга, выходящих за пределы параллелограмма. Эта площадь состоит из трёх четвертей окружности и прямоугольного треугольника: $S_1 = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\pi+2}{4}$.

$$P((\xi,\eta)\in D) = \iint\limits_{D\cdot G} \frac{2}{7}dxdy = \frac{2S_1}{7} = \frac{3\pi+2}{14} \approx 0{,}816. \blacktriangleright$$

Пример 13.4. *Плотность вероятности двумерной случайной величины* (ξ,η) *равна:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos(x-y)\ \text{при}\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0\ \text{при}\ x\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\ \text{или}\ y\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ *и* η.

◀ Поскольку здесь система случайных величин является непрерывной, то математические ожидания величин ξ и η определим по формулам:

$$M(\xi) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy, \qquad M(\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy.$$

Тогда, вычисляя интеграл по x по частям, найдем

$$M(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} \cos(x - y) dy = \frac{\pi}{4}.$$

Из симметрии плотности вероятности относительно ξ и η (функция $\cos(x - y)$ чётная) следует, что $M(\eta) = M(\xi) = \pi/4$. Дисперсия

$$D(\xi) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - M^2(\xi).$$

или

$$D(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 dx \int_0^{\pi/2} \cos(x - y) dy - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Здесь интеграл по x вычисляли два раза по частям. Дисперсия $D(\eta) = D(\xi)$. Кроме того, необходимо найти математическое ожидание произведения случайных величин. Тогда в общем случае

$$M(\xi \cdot \eta) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy,$$

а при данной плотности вероятности

$$M(\xi \cdot \eta) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} y \cos(x - y) dy = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1.$$

Последний интеграл по x и по y вычисляли по частям. Подставляя найденные значения в формулу (13.2), определим коэффициент корреляции:

$$r_{\xi\eta} = \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{16}\right) \Big/ \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\right) = \frac{\pi^2 - 8\pi + 16}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx \mathbf{0{,}245}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{r_{\xi\eta} \approx 0{,}245.}$

Задания для самостоятельной работы

13.1. Изготавливаемые детали цилиндрической формы сортируются по отклонению их длины от планируемого размера на $0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ мм и по разбросу их диаметра на $0{,}02; 0{,}04$ мм. Совместное распределение отклонений длины ξ и диаметра η задано таблицей

$\xi\backslash\eta$	0,1	0,2	0,3
0,02	0,2	0,2	0,25
0,04	0,05	0,1	0,2

Найти математические ожидания случайных величин ξ и η и коэффициент корреляции ξ и η.

13.2. Задан закон распределения случайного вектора $(\xi;\eta)$

$\xi\backslash\eta$	-0,4	2,3
-2,2	0,4	0
2,5	0,3	0,05
3,7	0,05	0,2

Найдите коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

13.3. Случайный вектор $(\xi;\eta)$ распределен равномерно в многоугольнике $ABCDEA$, изображенном на рисунке 57. 1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора $(\xi;\eta)$. 2) Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

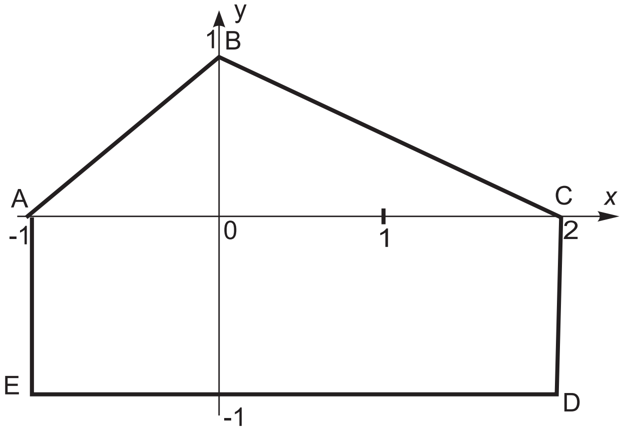

Рисунок 57. К заданию 13.3

13.4. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ,η): $f(x,y) = A\sin x \sin y$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; вне квадрата $f(x,y) = 0$. Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

13.5. Система случайных величин (ξ, η) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) \text{ при } x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 \text{ при } x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \text{ или } y \notin [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

14. Введение в математическую статистику

14.1. Основные определения математической статистики

Значительная часть математической статистики связана с необходимостью описать большую совокупность объектов. Её называют ***генеральной совокупностью***. Если *генеральная совокупность* слишком многочисленна, или её объекты труднодоступны, или имеются другие причины, не позволяющие изучить все объекты, прибегают к изучению какой-то части объектов. Эта выбранная для полного изучения часть называется ***выборкой***. Необходимо, чтобы выборка наилучшим образом представляла генеральную совокупность, т.е. была ***репрезентативной*** (представительной). Если генеральная совокупность мала или совсем неизвестна, не удаётся предложить ничего лучшего, чем чисто случайный выбор.

Определение 14.1. *Количество наблюдений n называется* ***объёмом выборки****.*

Определение 14.2. *Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а их последовательность, записанную в возрастающем порядке —* ***вариационным рядом****. Числа наблюдений $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называют частотами.*

Разность $max(x_i) - min(x_i)$ называется ***размахом вариационного ряда****.*

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот — табл. 14.1.

Таблица 14.1

Статистическое распределение			
варианты x_i	x_1	$\ldots$	x_k
частоты m_i	m_1	$\ldots$	m_k

Определение 14.3. ***Эмпирической*** *(статистической)* ***функцией распределения*** *случайной величины ξ называется функция $F^*(x)$, которая при каждом x равна относительной частоте события $\xi < x$, т.е. отношению m_x — числа наблюдений меньших x к объёму выборки n:*

$$F^*(x) = P^*(\xi < x) = \frac{m_x}{n}\ .$$

Определение 14.4. ***Медиана*** *— значение варианты, для которого количество элементов находящихся слева и справа, одинаково.*

Т.е., значение M_e, при котором $F^*(M_e) = 0{,}5$.

Для простой статистической совокупности медиана вычисляется следующим образом. Исследуемая выборка $\{x_i\}$ сортируется в порядке не убывания значений элементов. Далее, если объём выборки нечётное число, то $M_e = x_{(n+1)/2}$, иначе $M_e = \big(x_{n/2} + x_{n/2+1}\big)/2$.

Например, для вариационного ряда $\{1, 2, 5, 6, 8, 9, 15\}$ медиана равна четвёртому элементу $M_e = 6$, а для вариационного ряда $\{1, 2, 5, 6, 7, 9, 15, 16\}$ медиана равна полусумме четвёртого и пятого элементов $M_e = (6 + 7)/2 = 6{,}5$.

Определение 14.5. ***Модой*** M_0 *называется варианта, которая имеет наибольшую частоту по сравнению с другими частотами.*

В дискретно-вариационном ряду мода — это та варианта, которой соответствует наибольшая частота.

Для простой статистической совокупности мода вычисляется простым подсчётом. Например, для вариационного ряда $\{1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7\}$, $M_O = 4$, т.к. значение 4 встречается чаще других.

Статистические распределения, которые имеют несколько наиболее часто встречающихся значений, называются `мультимодальными` или `полимодальными`.

Например, для вариационного ряда: $\{1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8\}$, модами будут три значения $M_O = \{3, 6, 8\}$.

Простейшей характеристикой распределения является ***выборочное среднее***, которое для простой статистической совокупности вычисляется по формуле:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{14.1}$$

Если данные сгруппированы, то:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i\, x_i. \tag{14.2}$$

Для характеристики разброса значений случайной величины относительно её среднего значения используется ***выборочная дисперсия***

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \overline{(x - \overline{x})^2} \tag{14.3}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \overline{x})^2 \tag{14.4}$$

для сгруппированного распределения.

$$S = \sqrt{S^2} \tag{14.5}$$

называется ***выборочным средним квадратическим отклонением*** (СКО).

На практике вместо формулы (14.3) бывает удобнее применять другую:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \tag{14.6}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 - (\overline{x})^2 \tag{14.7}$$

для сгруппированного распределения.

При малых объёмах выборки n для оценки дисперсии σ^2 используют **исправленную** выборочную дисперсию ${S^*}^2$:

$${S^*}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \tag{14.8}$$

Оценка ${S^*}^2$ является ***несмещённой***, состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

Формула (14.8) позволяет вычислять ${S^*}^2$ для простой совокупности. Для сгруппированных данных используют аналогичную формулу (14.9):

$${S^*}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \overline{x})^2. \tag{14.9}$$

Замечание 14.1. *Исправленное выборочное СКО S^* является несмещённой оценкой СКО S.*

Пример 14.1. *Выборка задана в виде распределения частот:*

x_i	*3*	*5*	*8*	*10*	*11*
m_i	*20*	*25*	*30*	*15*	*10*

Найти моду, медиану и эмпирическую функцию распределения.

◀ Здесь объём выборки

$$n = 20 + 25 + 30 + 15 + 10 = 100.$$

Мода и медиана равна 8. Найдем относительные частоты:

$$p_1^* = 20/100 = 1/5, \quad p_2^* = 25/100 = 1/4, \quad , p_3^* = 30/100 = 3/10,$$

$$p_4^* = 15/100 = 3/20, \qquad p_5^* = 10/100 = 1/10.$$

Тогда распределение относительных частот примет вид:

x_i	3	5	8	10	11
p_i^*	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

Из этой таблицы нетрудно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^{5} p_i^* = 1.$$

Получаем эмпирическую функцию распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 3, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad x \in (3, 5], \\ 0{,}45 & \text{при} \quad x \in (5, 8], \\ 0{,}75 & \text{при} \quad x \in (8, 10], \\ 0{,}9 & \text{при} \quad x \in (10, 11], \\ 1 & \text{при} \quad x > 11. \end{cases}$$

▶

Пример 14.2. *Выборка задана в виде распределения частот:*

x_i	*3*	*5*	*8*	*10*	*11*	*15*
m_i	*5*	*10*	*30*	*25*	*22*	*8*

◀ Здесь объём выборки

$$n = 5 + 10 + 30 + 25 + 22 + 8 = 100.$$

Мода равна 8, а медиана равна 10. ▶

Пример 14.3. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма* $n = 80$*:*

x_i	*0,9*	*1*	*1,2*	*1,4*	*1,5*
m_i	*10*	*25*	*20*	*15*	*10*

Найти несмещённую оценку генерального среднего, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

◀ Несмещённой оценкой генерального среднего является выборочное среднее. Тогда по формуле (14.2) найдем:

$$\overline{x} = \frac{1}{80}(10 \cdot 0{,}9 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1{,}2 + 15 \cdot 1{,}4 + 10 \cdot 1{,}5) = 1{,}175.$$

Для нахождения выборочной дисперсии воспользуемся формулой (14.7):

$$S^2 = \frac{1}{80}(10 \cdot 0{,}9^2 + 25 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1{,}2^2 + 15 \cdot 1{,}4^2 + 10 \cdot 1{,}5^2) - (1{,}175)^2 \approx$$

$$\approx 1{,}4225 - 1{,}3806 \approx 0{,}042.$$

Заметим, что отличная от нуля дисперсия является всегда положительной величиной.

Выборочное среднее квадратическое отклонение
$S = \sqrt{0{,}042} \approx 0{,}205$. ▶

Ответ: $\boxed{\overline{x} = 1{,}175;\ S^2 =\approx 0{,}042;\ S = \sqrt{0{,}042} \approx 0{,}205.}$

Пример 14.4. *По выборке объёма* $n = 50$ *найдена смещённая оценка* $S^2 = 9{,}8$ *генеральной дисперсии. Найти несмещённую оценку дисперсии генеральной совокупности.*

◀ Согласно (14.8), исправленная выборочная дисперсия, является в то же время несмещённой оценкой

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1} \cdot S^2 = \frac{50}{49} \cdot 9{,}8 = 10.$$ ▶

Ответ: $\boxed{S^{*2} = 10.}$

14.2. Интервальные оценки параметров распределения

Определение 14.6. *Доверительным интервалом для несмещённого параметра a называют интервал $(a_1; a_2)$ со случайными границами, зависящими от наблюдений: $a_1 = a_1(x_1, \ \ldots, x_n)$, $a_2 = a_2(x_1, \ \ldots, x_n)$, накрывающий неизвестный параметр с заданной вероятностью γ: $P\big(a \in (a_1; a_2)\big) = \gamma$.*

Вероятность γ называется доверительной вероятностью или надежностью доверительного интервала.

Обычно γ задают равным 0,9; 0,95; 0,99 и более.

Доверительный интервал $\mathbf{I}_\gamma$ *для неизвестного математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет вид:*

$$\mathbf{I}_\gamma \left(\overline{x} - \tau_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + \tau_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{14.10}$$

где величина $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ определяется из уравнения:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2} \tag{14.11}$$

Доверительный интервал $\mathbf{I}_\gamma$ *для неизвестного математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии имеет вид*:

$$\mathbf{I}_\gamma \left(\overline{x} - t_\gamma \frac{S^*}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + t_\gamma \frac{S^*}{\sqrt{n}}\right), \tag{14.12}$$

где величина t_γ определяется по таблице приложения 3 критических точек распределения Стьюдента для $\alpha = 1 - \gamma$ и $k = n - 1$ или с помощью компьютера из уравнения для функции распределения Стьюдента $F_{st}(x)$ с $n - 1$ степенью свободы:

$$F_{st}(t_\gamma) = \frac{1 + \gamma}{2}, \tag{14.13}$$

где $\overline{x}$ и S^* — соответственно выборочное среднее и исправленное СКО.

Если независимые случайные величины $\xi_i \sim N(a; \sigma)$, $i = 1, \ \ldots, n$, то случайная величина

$$t = \frac{\bar{\xi} - a}{S^*/\sqrt{n}} \tag{14.14}$$

имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы.

Пример 14.5. *Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормального распределения, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$, выборочное среднее $\overline{x} = 32$ и объём выборки $n = 36$.*

◀ В данном примере воспользуемся выражением (14.10). Поскольку здесь $\gamma = 0{,}99$, то параметр $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ найдем с помощью равенства:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495.$$

Отсюда по таблицам нормированная функции Лапласа, приложение 2, определим $\tau_{\frac{\gamma}{2}} = 2{,}57$. Здесь левая граница интервала

$$\overline{x} - \tau_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32 - 2{,}57 \cdot \frac{3}{6} = 32 - 1{,}285 = 30{,}715.$$

Правая граница определится как $32 + 1{,}285 = 33{,}285$. Таким образом, искомый доверительный интервал для математического ожидания a будет

$$30{,}715 < a < 33{,}285.$$

Полученный результат означает, что с вероятностью 0,99 математическое ожидание генеральной совокупности находится в интервале
$\mathbf{I}_\gamma = \big(30{,}715;\ 33{,}285\big)$. ▶

Ответ: $\boxed{\mathbf{I}_\gamma = \big(30{,}715;\ 33{,}285\big).}$

Пример 14.6. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 16$:*

x_i	3,5	4,1	4,7	5,4	5,6	6,2
m_i	2	3	2	4	3	2

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределённой случайной величины по выборочному среднему с помощью доверительного интервала.

◀ В данном случае дисперсия неизвестна и доверительный интервал определяется по формуле (14.12). Выборочное среднее вычислим по формуле

(14.2):

$$\overline{x} = \frac{1}{16}(2 \cdot 3,5 + 3 \cdot 4{,}1 + 2 \cdot 4{,}7 + 4 \cdot 5{,}4 + 3 \cdot 5{,}6 + 2 \cdot 6{,}2) \approx 4{,}9698.$$

Выборочную дисперсию удобнее искать с помощью выражения (14.7):

$S^2 = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{6} m_i x_i^2 - (\overline{x})^2 =$

$= \frac{1}{16}(2 \cdot 3,5^2 + 3 \cdot 4{,}1^2 + 2 \cdot 4{,}7^2 + 4 \cdot 5{,}4^2 + 3 \cdot 5{,}6^2 + 2 \cdot 6{,}2^2) - 4{,}9698^2 \approx 0{,}7309.$

Согласно (14.8), исправленная выборочная дисперсия

$$S^{*2} = \frac{16}{15} \cdot 0{,}7309 = 0{,}7796.$$

Отсюда находим исправленное СКО $S^* \approx 0{,}883$. При $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$ и числе степеней свободы $n - 1 = 15$ из таблицы приложения 3 определим $t_\gamma = 2{,}13$.

Для вычисления значений критических точек распределения Стьюдента в Excel встроена функция СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х. Набираем команду =СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(0,05;15) и получает значение 2,13145.

Находим радиус доверительного интервала

$$\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} = 2{,}13\frac{0{,}883}{\sqrt{16}} \approx 0{,}47.$$

Находим доверительный интервал

$$I_\gamma = (\overline{x} - \varepsilon;\ \overline{x} + \varepsilon) = \mathbf{(4{,}499;\ 5{,}439)}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{I_\gamma = (4{,}499;\ 5{,}439).}$

Пример 14.7. *Из генеральной совокупности, являющейся нормальной случайной величиной ξ, извлечена выборка объёма $n = 50$, результаты которой сгруппированы с постоянным размахом интервала h=4 и помещены в таблицу.*

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$(x_i; x_{i+1}]$	*(10; 14]*	*(14; 18]*	*(18; 22]*	*(22; 26]*	*(26; 30]*	*(30; 34]*
m_i	*4*	*11*	*15*	*12*	*6*	*2*

1) Построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, где m_i — частота попадания вариант в промежуток $(x_i; x_{i+1}]$.

2) Найти эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$.

3) На основании данного распределения, найти выборочную среднюю $\overline{x}$, несмещённую выборочную дисперсию S^{*2}, моду M_o и медиану M_e.

4) Найти доверительные интервалы для оценки, с надежностью $\gamma_1 = 0{,}9$, $\gamma_2 = 0{,}95$ и $\gamma_3 = 0{,}99$, неизвестного математического ожидания $M(\xi) = a$ генеральной совокупности в предположении, что она распределена нормально.

1) ◀Находим вектор относительных частот наблюдений, попавших в i-тый интервал $P_i^* = \dfrac{m_i}{n}$.

$P^* = [4/50, 11/50, 15/50, 12/50, 6/50, 2/50] = [0.08, 0.22, 0.3, 0.24, 0.12, 0.04]$.

Делим полученный вектор относительных частот на размах интервалов $h = 4$, получаем вектор плотности относительной частоты.

$\dfrac{P^*}{h} = [4/200, 11/200, 15/200, 12/200, 6/200, 2/200] =$
$= [0.02, 0.055, 0.075, 0.06, 0.03, 0.01]$.

Строим график, рис. 58, состоящий из шести прямоугольников ширина каждого из них равна 4, а высота $\dfrac{P_i^*}{h}$. Площадь полученной фигуры равна 1. Если увеличивать объём выборки и количество интервалов, то верхняя линия гистограммы приближается к функции плотности генеральной совокупности непрерывной случайной величины. ▶

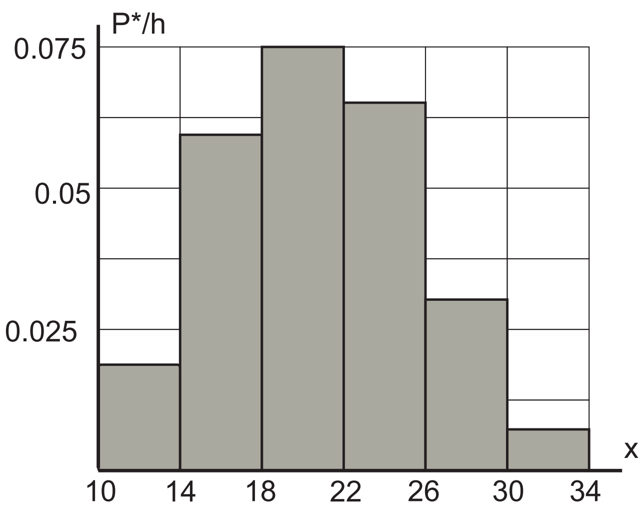

Рисунок 58. *Гистограмма*

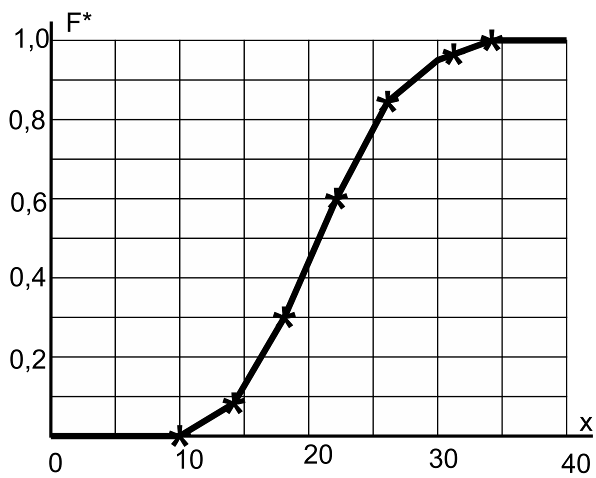

Рисунок 59. *Функция распределения $F^*(x)$*

2) ◀ Находим эмпирическую функцию распределения по формуле $F^*(x) = P^*(\xi < x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x — число наблюдений меньших x. При задании выборки в виде группового распределения, где значения частот относятся к центру интервалов (массив координат $D = [12, 16, 20, 24, 28, 32]$). Предполагаем, что на каждом отрезке исследуемая случайная величина распределена

равномерно, следовательно функция распределения линейная. Поведение эмпирической функции распределения $F^*(x)$ на каждом i-том отрезке аппроксимируем непрерывной линейно возрастающей функцией. Тогда функцию распределения строим в виде кусочно-линейной кривой. Уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами (x_i, y_i) и $(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y_i)$, записывается в виде $y = y_i + \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x}(x - x_i)$. Для нашего примера $x_i = 10 + 4(i-1)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, а $y_1 = 0$, $y_i = y_{i-1} + P_i$, $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, т.е, массивом $Y = [0, 0.08, 0.3, 0.6, 0.84, 0.96, 1]$.
$\Delta y_i = [0.08, 0.22, 0.3, 0.24, 0.12, 0.04]$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 10, \\ 0{,}02(x-10) & \text{при} \quad x \in (10, 14], \\ 0{,}08 + 0,055(x-14) & \text{при} \quad x \in (14, 18], \\ 0{,}3 + 0,075(x-18) & \text{при} \quad x \in (18, 22], \\ 0{,}6 + 0,06(x-22) & \text{при} \quad x \in (22, 26], \\ 0{,}84 + 0,03(x-26) & \text{при} \quad x \in (26, 30], \\ 0{,}96 + 0,01(x-30) & \text{при} \quad x \in (30, 34], \\ 1 & \text{при} \quad x > 36. \end{cases}$$

Строим график эмпирической функции распределения $F^*(x)$, рис. 59. ►

3) ◄ Находим выборочную среднюю $\overline{x}$, несмещённую выборочную дисперсию S^{*2}, моду M_o и медиану M_e.

По формуле (14.2) находим выборочную среднюю $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i d_i =$

$= \dfrac{1}{50}(4 \cdot 12 + 11 \cdot 16 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 24 + 6 \cdot 28 + 2 \cdot 32) = 20{,}88.$

По формуле (14.6) находим выборочную дисперсию

$\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot d_i^2 =$

$= \dfrac{1}{50}(4 \cdot 12^2 + 11 \cdot 16^2 + 15 \cdot 20^2 + 12 \cdot 24^2 + 6 \cdot 28^2 + 2 \cdot 32^2) = 461{,}12.$

$S^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 461{,}12 - 20{,}88^2 = 25{,}146.$

По формуле (14.8) находим несмещённую выборочную дисперсию:
$S^{*^2} = \dfrac{n}{n-1}S^2 = \dfrac{50}{49} \cdot 25{,}146 = 25{,}659.$

Несмещённое выборочное средне квадратическое отклонение $S^* = \sqrt{S^{*^2}} =$

$= 5{,}066$. Для выборки, представленной в виде сгруппированного распределения, значение моды аппроксимируются в некоторую точку модального интервала (внутри которого находится максимальное значение):

$$M_0 = X_0 - h\frac{f_{mo} - f_{mo-1}}{f_{m0-1} - 2f_{mo} + f_{mo+1}},$$

где X_O — нижнее значение модального интервала; f_{mo}, f_{mo-1}, f_{mo+1} — значение частот в модальном, предыдущем и следующем интервалах, соответственно; h — размах модального интервала.

Для решаемой задачи: $mo = 3$, $X_0 = 18$, $f_{mo} = 15, f_{mo-1} = 11$, $f_{mo+1} = 12$, $h = 4$.

$$M_0 = 18 - 4\frac{15 - 11}{11 - 30 + 12} \approx 20{,}286.$$

Для выборки, представленной в виде сгруппированного распределения, значение медианы аппроксимируются в некоторую точку M_e медианного интервала по формуле:

$$M_e = X_0 + h\frac{0{,}5\sum\limits_{k=1}^{s} f_k - \sum\limits_{k=1}^{me-1} f_k}{f_{me}},$$

где X_O — нижняя граница, в котором находится медиана (медианный интервал me); f_{me} — значение частоты в медианном интервале; h — размах медианного интервала.

$$M_e = 18 + 4\frac{25 - (4 + 11)}{15} \approx 20{,}667.$$

►

4) ◄Найти доверительные интервалы для оценки с надежностью $\gamma_1 = 0{,}9$, $\gamma_2 = 0{,}95$ и $\gamma_3 = 0{,}99$, неизвестного математического ожидания $M(\xi) = a$ генеральной совокупности в предположении, что она распределена нормально.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии вычисляем по формуле (14.12) $\left(\overline{x} - t_\gamma\frac{S^*}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + t_\gamma\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right)$, где величина t_γ определяется по таблице приложения 3 критических точек распределения Стьюдента для $\alpha = 1 - \gamma$ и

$k = n-1$ или с помощью компьютера из уравнения для функции распределения Стьюдента $F_{st}(x)$ с $k = n-1 = 49$ степенью свободы. $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}05$, $\alpha_3 = 0{,}01$.

$t_{\gamma_1} = 1{,}675; \quad t_{\gamma_2} = 2{,}01; \quad t_{\gamma_3} = 2{,}68.$

Находим радиусы доверительных интегралов $\varepsilon_i = t_{\gamma_i}\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}, i = 1, 2, 3.$

$$\varepsilon_1 = 1{,}675\frac{5{,}065}{\sqrt{50}} = 1{,}22;\ \ \varepsilon_2 = 2{,}01\frac{5{,}065}{\sqrt{50}} = 1{,}44;\ \ \varepsilon_3 = 2{,}68\frac{5{,}065}{\sqrt{50}} = 1{,}92.$$

Отметим, что с увеличением надёжности радиус доверительного интервала увеличивается.

Находим доверительные интервалы.

$I_{\gamma_1} = (19{,}68; 22{,}08); \quad I_{\gamma_2} = (19{,}44; 22{,}32); \quad I_{\gamma_3} = (18{,}96; 22{,}8).$

Это означает, что выполняются вероятностные равенства

$P(19{,}68 < M(\xi) < 22{,}08) = 0{,}9;$

$P(19{,}44 < M(\xi) < 22{,}32) = 0{,}95;$

$P(18{,}96 < M(\xi) < 22{,}8) = 0{,}99.$ ►

Пример 14.8. *Случайная величина ξ генеральной совокупности распределена нормально, при этом известно средне квадратическое отклонение $\sigma = 2$.*

1) С надежностью $\gamma_1 = 0{,}9$, $\gamma_1 = 0{,}95$ и $\gamma_2 = 0{,}99$ найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания генеральной совокупности, если обђем выборки $n = 40$ и среднее выборочное $\overline{x} = -5$.

2) Как изменятся радиусы доверительных интервалов при увеличении обђёма выборки в четыре раза при тех же значениях среднего квадратического отклонения и надёжности.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет вид (14.10): $\left(\overline{x} - \tau_{\gamma/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + \tau_{\gamma/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где величина $\tau_{\gamma/2}$ определяется из уравнения (14.11): $\Phi(\tau_{\gamma/2}) = \frac{\gamma}{2}$.

1) ◄ Найдём значения величин $\tau_{\gamma_1/2}, \tau_{\gamma_2/2}, \tau_{\gamma_3/2}$.

$$\Phi(\tau_{\gamma_1/2}) = \frac{\gamma_1}{2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45.$$

Отсюда, по таблицам функции Лапласа определим $\tau_{\gamma_1/2} = 1{,}65$.

Аналогично,

$$\Phi(\tau_{\gamma_2/2}) = 0{,}475 \Rightarrow \tau_{\gamma_2/2} = 1{,}96.$$

$$\Phi(\tau_{\gamma_3/2}) = 0{,}495 \Rightarrow \tau_{\gamma_3/2} = 2{,}58.$$

Находим радиусы доверительных интегралов $\varepsilon_i, i = 1, 2, 3,$

$$\varepsilon_i = \tau_{\gamma_i/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$\varepsilon_1 = 0{,}522;\quad \varepsilon_2 = 0{,}620;\quad \varepsilon_3 = 0{,}816.$

Мы видим, что радиусы доверительных интегралов с увеличением надёжности расширяются.

Находим доверительные интервалы.

$I_{\gamma_1} = (-5{,}522; -4{,}478);$

$I_{\gamma_2} = (-5{,}62; -4{,}38);$

$I_{\gamma_3} = (-5{,}816; -4{,}184).$ ►

2) ◄ При увеличении объёма выборки в четыре раза, радиус доверительного интервала уменьшиться в два раза

$\varepsilon_1 = 0{,}261;\quad \varepsilon_2 = 0{,}310;\quad \varepsilon_3 = 0{,}409$

и доверительные интервалы будут равны

$I_{\gamma_1} = (-5{,}261; -4{,}439);$

$I_{\gamma_2} = (-5{,}31; -4{,}69);$

$I_{\gamma_3} = (-5{,}408; -4{,}592).$ ►

14.3. Выборочный коэффициент корреляции

Рассмотрим выборку объёма n из генеральной совокупности значений двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$, т.е. n пар наблюдений $(x_i; y_i)$. Поскольку многие значения в этой выборке могут повторяться, их заносят в так называемую корреляционную таблицу (табл. 14.2). В первом столбце этой таблицы перечислены значения x_i, во втором — y_i в виде вариационных рядов. На пересечении i-й строки

и j-го столбца — соответствующая частота n_{ij}, т.е. количество раз, которое наблюдение $(x_i; y_j)$ встретилось в выборке. При обработке корреляционной таблицы в последнем столбце указывают сумму частот по строкам $n_{i*} = \sum\limits_{j=1}^{s} n_{ij}$, а в последней строке — сумму частот по столбцам $n_{*j} = \sum\limits_{i=1}^{k} n_{ij}$.

Таблица 14.2

Корреляционная таблица					
$\xi\backslash\eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_s	n_{i*}
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1s}	n_{1*}
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2s}	n_{2*}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\dots$	n_{ks}	n_{k*t}
n_{*j}	n_{*t1}	n_{*2}	$\dots$	n_{*s}	n

Сумма всех элементов последнего столбца или строки даст объём выборки

$$n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} n_{\cdot j}.$$

Первый и последний столбцы корреляционной таблицы образуют статистическое распределение выборки случайной величины ξ, а первая и последняя строки образуют выборку случайной величины η.

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_{i\cdot}x_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_{i\cdot}x_i^2}{n}, \quad S{*}_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2,$$

$$\overline{y} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} n_{\cdot j}y_j}{n}, \quad \overline{y^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} n_{\cdot j}y_j^2}{n}, \quad S{*}_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2.$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{s} n_{ij}x_iy_j}{n}\,. \tag{14.15}$$

Определение 14.7. ***Выборочным коэффициентом корреляции*** $r^*_{\xi\eta}$ *называется:*

$$r^*_{\xi\eta} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{S_x\cdot S_y}\,. \tag{14.16}$$

Выборочный коэффициент корреляции является статистической оценкой коэффициента корреляции и он обладает следующими свойствами:

1) $r^*_{\xi\eta} = r^*_{\eta\xi}$;

2) Выборочный коэффициент корреляции находится в пределах от -1 до 1: $-1 \leqslant r^*_{\xi\eta} \leqslant 1$;

3) $|r^*_{\xi\eta}| = 1$ тогда и только тогда, когда между значениями x_i и y_i имеется линейная зависимость. Чем ближе $r^*_{\xi\eta}$ к нулю, тем хуже эта зависимость аппроксимируется линейной.

Пример 14.9. *Дана корреляционная таблица случайного вектора (ξ, η). Найти выборочный коэффициент корреляции.*

$\xi \backslash \eta$	*1*	*2*	*4*
5	*22*	*2*	*3*
10	*0*	*20*	*6*
15	*1*	*12*	*12*
20	*4*	*8*	*10*

◀ Выпишем расширенную корреляционная таблицу

$\xi \backslash \eta$	1	2	4	n_{i*}
5	22	2	3	27
10	0	20	6	26
15	1	12	12	25
20	4	8	10	22
n_{*j}	27	42	31	100

Объём выборки $n = 100$. По формулам (14.15), определяем характеристики выборки:

$$\overline{x} = \frac{135 + 260 + 375 + 440}{100} = \frac{1210}{100} = 12{,}1; \qquad \overline{y} = \frac{27 + 84 + 124}{100} = \frac{235}{100} = 2{,}35;$$

$$\overline{x^2} = \frac{17700}{100} = 177; \qquad \overline{y^2} = \frac{691}{100} = 6{,}91;$$

$$S^2_x = 177 - 12{,}^2 = 30{,}59; \qquad S^2_y = 6{,}91 - 2{,}35^2 = 1{,}3875;$$

$$\overline{xy} = \frac{3125}{100} = 31{,}25;$$

$r^*_{\xi\eta} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{S_x\ S_y} \approx$ **0,432**.▶

Ответ: $\boxed{r^*_{\xi\eta} \approx 0{,}432.}$

Пример 14.10. *Среднемесячная заработная плата (тыс. руб.) в Москвы в 2021-2022 годах составила по отраслям:*

Отрасль	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
2021 год	*112*	*71*	*41*	*136*	*91*	*41*	*78*	*71*	*107*	*103*
2022 год	*126*	*75*	*59*	*138*	*107*	*43*	*95*	*80*	*117*	*110*

Найти коэффициент корреляции

Взято из реальных источников. Ссылка активная на март 2023г.

`https://www.audit-it.ru/inform/zarplata/index.php?id_region=184`

1. Производство напитков.
2. Производство пищевых продуктов.
3. Производство одежды.
4. Производство лекарственных средств и материалов.
5. Производство мебели.
6. Ремонт и монтаж машин и оборудования.
7. Производство компьютеров.
8. Строительство зданий.
9. Научные исследования и разработки.
10. Образование.

◀

$$\overline{x} = \frac{112 + 71 + \ldots + 100}{10} = 85{,}1; \qquad \overline{y} = \frac{126 + 75 + \ldots + 110}{10} = 95;$$

$$\overline{x^2} = \frac{112^2 + 71^2 + \ldots + 100^2}{10} = 8090{,}7; \qquad \overline{y^2} = \frac{126^2 + 75^2 + \ldots + 110^2}{10} = 9853{,}8;$$

$$S_x^2 = 8090{,}7 - 85{,}1^2 = 848{,}69; \qquad S_y^2 = 9853{,}8 - 95^2 = 828{,}8;$$

$$\overline{xy} = \frac{112 \cdot 126 + \ldots + 100 \cdot 110}{10}\frac{89063}{10} = 8906{,}3;$$

$r^*_{\xi\eta} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{S_x\ S_y} \approx \mathbf{0{,}98}$.

Что говорит о тесной взаимосвязи с переменными. ▶

Ответ: $\boxed{r^*_{\xi\eta}0{,}98}$**.**

Задания для самостоятельной работы

14.1. Известно, что случайная величина ξ генеральной совокупности распределена нормально, и при объёме выборки $n = 20$, при этом известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, и радиус доверительного интервала равен 1,2. Каким будет радиус доверительного интервала при увеличении объёма выборки в девять раз, при тех же значениях среднего квадратического отклонения и надежности?

14.2. Известно, что случайная величина ξ генеральной совокупности распределена нормально, при этом известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$. С надежностью $\gamma = 0{,}975$ найти доверительный интервал для оценки математического ожидания генеральной совокупности, если объём выборки $n = 100$ и выборочное среднее 15.

14.3. В таблице 14.3 даны 30 вариантов заданий выборок объёма $n = 10$. По данным в таблице результатам измерений найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a нормального распределения с заданной надежностью γ.

Указание. Выборочное среднее и исправленное выборочное СКО находить соответственно по формулам (14.1) и (14.8), доверительный интервал по формуле (14.12).

Таблица 14.3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	γ
1	4,50	4,51	4,52	4,53	4,54	4,49	4,54	4,47	4,49	4,46	0,95
2	4,43	4,41	4,39	4,45	4,40	4,35	4,42	4,40	4,37	4,38	0,99
3	30,10	30,40	30,30	30,00	29,45	29,65	30,05	30,15	29,90	30,00	0,999
4	80,20	80,10	80,30	79,70	79,80	79,80	80,10	80,00	79,70	80,30	0,95
5	5,40	5,41	5,40	5,42	5,39	5,38	5,38	5,37	5,35	5,40	0,99
6	14,28	14,26	14,27	14,30	14,31	14,32	14,31	14,29	14,30	14,26	0,999
7	20,12	20,11	20,10	20,10	19,98	19,97	20,02	20,03	20,02	20,10	0,999
8	36,41	36,42	36,44	36,45	36,48	36,49	36,46	36,45	36,42	36,38	0,99
9	14,46	14,45	14,41	14,40	14,42	14,48	14,50	14,42	14,45	14,44	0,95
10	80,30	80,30	80,20	80,30	80,20	79,80	79,80	79,70	79,90	80,50	0,95
11	15,38	15,40	15,41	15,42	15,43	15,37	15,36	15,36	15,34	15,33	0,99
12	16,06	16,20	16,16	16,00	16,15	16,05	16,01	16,03	16,02	16,02	0,999
13	5,90	5,88	5,97	5,95	5,93	5,85	5,88	5,87	5,87	5,90	0,95
14	7,71	7,73	7,70	7,72	7,68	7,67	7,65	7,63	7,70	7,71	0,99
15	15,21	15,28	15,25	15,24	15,17	15,18	15,20	15,19	15,26	15,22	0,999
16	2,58	2,50	2,57	2,49	2,49	2,51	2,55	2,53	2,53	2,55	0,95
17	4,38	4,40	4,37	4,42	4,35	4,40	4,39	4,45	4,43	4,41	0,99
18	14,41	14,45	14,46	14,40	14,48	14,42	14,50	14,45	14,42	14,44	0,999
19	10,25	10,23	10,24	10,18	10,17	10,18	10,19	10,20	10,19	10,17	0,999
20	5,97	5,88	5,90	5,93	5,95	5,88	5,85	5,87	5,90	5,87	0,99
21	16,02	16,03	16,02	16,05	16,01	16,15	16,00	16,16	16,20	16,06	0,95
22	42,80	42,72	42,75	42,90	42,98	42,85	42,07	42,93	42,77	42,83	0,95
23	3,44	3,47	3,38	3,39	3,46	3,49	3,39	3,47	3,46	3,45	0,99
24	36,40	36,70	36,90	36,80	36,30	36,70	36,90	36,90	36,40	36,00	0,999
25	8,35	8,40	8,38	8,44	8,45	8,44	8,37	8,39	8,36	8,42	0,95
26	15,28	15,25	15,21	15,24	15,18	15,17	15,20	15,19	15,26	15,22	0,99
27	27,90	27,30	26,90	27,30	27,40	27,50	27,00	27,60	27,70	27,40	0,999
28	7,71	7,72	7,70	7,73	7,67	7,68	7,65	7,63	7,71	7,70	0,95
29	5,41	5,40	5,42	5,40	5,39	5,38	5,37	5,38	5,35	5,40	0,99
30	28,70	28,30	28,80	28,80	28,00	28,10	27,90	28,70	28,10	28,20	0,999

14.4. Лаборатория электролампового завода провела испытания 100 ламп на продолжительность горения и получила следующие результаты (в часах): 812, 817, 828, 833, 841, 820, 822, 825, 826, 824, 826, 825, 817, 826, 834, 818, 842, 826, 837, 827, 821, 835, 823, 824, 815, 833, 830, 824, 816, 828, 822, 826, 827, 822, 837, 816, 825, 810, 823, 831, 826, 814, 838, 831, 824, 812, 827, 839, 828, 836, 815, 836, 817, 828, 823, 832, 819, 826, 818, 820, 811, 828, 810, 822, 836, 816, 829, 821, 833, 821, 829, 823, 832, 823, 831, 826, 832, 827, 829, 826, 836, 821, 838, 818 , 822, 819, 823, 828, 826, 820, 825, 828, 822, 835, 824, 825, 820, 829, 825, 824];

В предположении, что случайная величина ξ — продолжительность горения лампы является нормальной случайной величиной, провести исследования по схеме примера 14.7. Диапазон наблюдений разбить на 6 интервалов.

14.5. Дана корреляционная таблица случайного вектора (ξ, η). Найти выборочный коэффициент корреляции.

$\xi \backslash \eta$	2	4	8
-1	18	2	3
0	6	20	6
2	1	12	15
4	4	8	5

Ответ: $r^*_{\xi\eta} \approx 0{,}317$.

14.6. Найти коэффициент корреляции между производительностью труда (выпуск продукции в тыс. руб. на одного рабочего) ξ и затратами на покупку дополнительного оборудования (тыс. руб.) η для 10 предприятий города по следующим данным:

ξ	4,6	4	4,8	5,3	5	5,8	7	7,2	7,8	10,8
η	8,5	8,7	9,1	9,3	10,2	11	12,5	12,2	14	13,2

Ответ: $r^*_{\xi\eta} \approx 0{,}863$.

15. Проверка статистических гипотез

Определение 15.1. *Статистической называется гипотеза о виде распределения или о значениях его параметров.*

Гипотезы будем обозначать $H_0,\ H_1,\ H_2,\ \ldots$.

Различают проверяемую или основную гипотезу H_0 и альтернативную или конкурирующую H_1, которая должна противоречить основной.

Для проверки статистической гипотезы на основании выборки $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ вычисляют значение критерия, зависящего от наблюдений:

$$T = T(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n).$$

Для каждого типа статической гипотезы существует своя функция $T = T(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n)$.

Всё множество значений критерия делится на так называемую критическую область, при попадании в которую критерия проверяемая гипотеза отвергается, и область принятия гипотезы.

Критические области бывают двусторонние и односторонние: левосторонняя и правосторонняя.

Если критическая область правосторонняя, т.е. $(t_{\text{кр}2};\ +\infty)$, при выполнении условия $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}2}$ делают вывод: проверяемая гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α в пользу гипотезы H_1; если это условие не выполняется, т.е. $T_{\text{набл}} \leqslant t_{\text{кр}2}$, делают более осторожный вывод: нет оснований для того, чтобы отвергнуть гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1 с уровнем значимости α.

Если критическая область левосторонняя, т.е. $(-\infty;\ t_{\text{кр}1})$, гипотеза H_0 отвергается при выполнении условия $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}1}$.

В случае двусторонней критической области вида $(-\infty;\ t_{\text{кр}1}) \cup (t_{\text{кр}2};\ +\infty)$ гипотеза H_0 отвергается при выполнении условия $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}1}$ или $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}2}$.

Определение 15.2. *Вероятность того что гипотеза отвергается, хотя на самом деле она верна, называется **уровнем значимости критерия** и обычно обозначается α.*

Определение 15.3. *Критериями согласия называют критерии для проверки гипотез о виде закона распределения случайной величины.*

15.1. Критерий проверки гипотезы о законе распределения

Для простоты изложения рассмотрим алгоритм только для доказательства гипотезы о нормальном распределении н.с.в. ξ. Схема расчётов с помощью критерия Пирсона (критерия χ^2) следующая.

(1) Всё множество наблюдений разбиваем на s интервалов вида $(a_{j-1}; a_j]$ с размахом h и подсчитываем эмпирические частоты — количество наблюдений m_j, попавших в j-ый интервал. Относительная частота наблюдений, попавших в j-ый интервал, равна $P_j^* = \dfrac{m_j}{n}$.

(2) Строим гистограмму относительных частот P_j^*/h. На основании вида гистограммы выбираем в качестве предполагаемого какой–то закон распределения изучаемой случайной величины.

(3) Находим выборочное среднее $\overline{x}$ и несмещённое среднеквадратичное отклонение S^*. Определяем теоретические частоты m'_j для j-го интервала $(a_{j-1}; a_j]$. В нашем случае применяем формулы определения вероятности попадания нормально распределённой н.с.в. в интервал (10.5):

$$m'_j = (F(t_j) - F(t_{j-1})) \cdot n, \quad t_j = \frac{a_j - \overline{x}}{S^*},$$

где $F(x)$ — теоретическая функция распределения, найденная на этапе 1.

(4) Вычисляем критерий $\chi^2_{\text{набл}}$ (критерий Пирсона):

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{S} \frac{(m_j - m'_j)^2}{m'_j}. \tag{15.1}$$

(5) Определяем число степеней свободы k случайной величины χ^2:

$$k = s - 1 - r, \tag{15.2}$$

где r — число параметров закона распределения (для нормального закона распределения $r = 2$), s — число интервалов.

(6) По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k по таблице критических точек распределения χ^2 (таблица приложения 4) находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о принятом (нормальном) законе распределения. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ — гипотезу отвергают с уровнем значимости α.

Вернёмся к примеру 14.7.

Пример 15.1. *Из генеральной совокупности, являющейся нормальной случайной величиной ξ, извлечена выборка объёма $n = 50$, результаты которой сгруппированы с постоянным размахом интервала h=4 и помещены в таблицу.*

i	1	2	3	4	5	6
$(x_i; x_{i+1}]$	(10; 14]	(14; 18]	(18; 22]	(22; 26]	(26; 30]	(30; 34]
m_i	4	11	15	12	6	2

Найти закон распределения случайной величины ξ.

На рисунках 58, 59 изображены графики гистограммы и эмпирической функции распределения данной случайной величины. Если гистограмму аппроксимировать непрерывной функцией, то можно заметить относительную схожесть полученного графика с графиком функции Гаусса, а график эмпирической функции распределения похож на график функции распределения нормальной случайной величины. При решении примера 10.1 были приведены графики функции плотности и распределения нормально распределённой непрерывной случайной величины, рис. 41 и 42.

Поэтому выдвигаем основную гипотезу H_0, состоящую в том, что случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения.

Для доказательства выдвинутой статистической гипотезы о нормальном распределении случайной величины ξ применяем критерий Пирсона.

При решении примера 14.7 найдены выборочная средняя $\overline{x} \approx 20{,}88$ и несмещённая выборочная дисперсии $S^{*2} \approx 25,659$. $S^* \approx 5{,}066$.

В предположении, что случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения, по формулам (10.5) найдём вероятности попадания случайной величины ξ в интервалы $[x_i;\ x_{i+1}]$.

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\Big(\frac{x_2 - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{x_1 - a}{\sigma}\Big).$$

Умножая полученные вероятности на объём выборки, найдём теоретические частоты $m_i^{'}$ попадания случайной величины ξ в те же интервалы.

$$m_i{}' = n \cdot \left(\Phi\Big(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{S^*}\Big) - \Phi\Big(\frac{x_i - \overline{x}}{S^*}\Big) \right).$$

Заполним таблицу, в которой $t_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S^*}$. Значения функции Лапласа $\Phi(t_i)$ берем из таблицы приложения 2.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	10	14	18	22	26	30	34
t_i	-2,15	-1,36	-0,57	0,22	1,01	1,8	2,59
$\Phi(t_i)$	-0,5	-0,3729	-0,2157	0,0871	0,3438	0,4641	0,5
$m_i{}'$	5,576	7,86	15,14	12,83	6,015	1,555	

Для того чтобы сумма теоретических частот была равна 1, значения функции Лапласа на левой и правой границах выбираем $\Phi(t_1) = -0{,}5$ и $\Phi(t_7) = 0{,}5$, соответственно. Таким образом, мы расширяем до бесконечности краевые интервалы.

По формуле $\chi^2_{\text{набл}} = \sum\limits_{i=1}^{6} \dfrac{(m_i - m_i{}')^2}{m_i{}'}$, находим $\chi^2_{\text{набл}} = 2{,}206$.

По таблице приложения 4 для $\alpha = 0{,}05$ и $k = 6 - 1 - 2 = 3$, находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 3) = 7{,}81$. Поскольку по заданной выборке и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 3)$, поэтому нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении .

Значение функции $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ можно вычислить в Excel. Для этого в любой ячейке таблицы вводим команду =ХИ2.ОБР.ПХ(α; k).

Ответ: На базе полученной выборки делаем вывод, что исследуемая непрерывная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения.

Рассмотрим ещё один пример демонстрирующий весь алгоритм Пирсона.

Пример 15.2. *Лаборатория электролампового завода провела испытания 100 ламп на продолжительность горения и получила следующие результаты (в часах):*
812, 817, 828, 833, 841, 820, 822, 825, 826, 824, 826, 825, 817, 826, 834, 818, 842, 826, 837, 827, 821, 835, 823, 824, 815, 833, 830, 824, 816, 828, 822, 826, 827, 822, 837, 816, 825, 810, 823, 831, 826, 814, 838, 831, 824, 812, 827, 839, 828, 836, 815, 836, 817, 828, 823, 832, 819, 826, 818, 820, 811, 828, 810, 822, 836, 816, 829, 821, 833, 821, 829, 823, 832, 823, 831, 826, 832, 827, 829, 826,

836, 821, 838, 818 , 822, 819, 823, 828, 826, 820, 825, 828, 822, 835, 824, 825, 820, 829, 825, 824].

В предположении, что случайная величина ξ — продолжительность горения лампы является нормальной случайной величиной, провести исследования по схеме примера 14.7. Диапазон наблюдений $\xi \in [810; 842]$ разбить на 8 интервалов с размахом $h = 4$.

◀ Применяем алгоритм метода Пирсона 14.6, используемый в предыдущем примере 14.7. Для решения данной задачи предлагается использовать компьютерные программы.

(1) По заданной выборке заполняем таблицу, в которой $P_i^* = \dfrac{m_i}{h \cdot n}$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	810	814	818	822	826	830	834	838	842
m_i	5	9	13	24	25	10	9	5	
P_i^*	0,0125	0,0225	0,0325	0,06	0,0625	0,025	0,0225	0,0125	

Далее строим гистограмму относительных частот, рис.15.2. По графику аппроксимации гистограммы можно отметить, что исследуемая н.с.в. может иметь нормальное распределение.

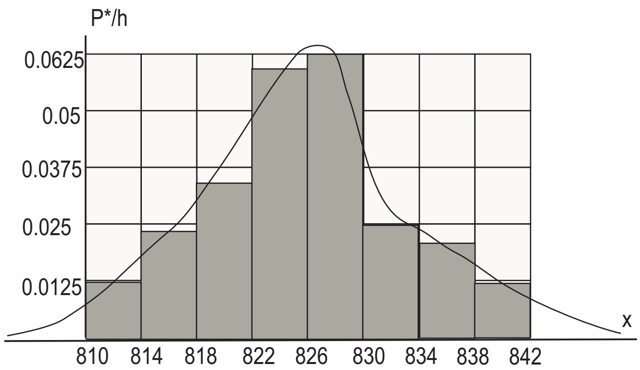

Рисунок 60. *Гистограмма примера 15.2*

Находим выборочное среднее $\overline{x}$ и несмещённое выборочное среднеквадратическое отклонение S^*.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} m_i \cdot U_i, \qquad S2 = \frac{n}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{s} m_i \cdot U_i^2 - (\overline{x})^2\right), S^* = \sqrt{S2},$$

где $U_i = (x_{i+1} + x_i)/2$ — координаты центра интервалов $[x_i; x_{i+1})$.

$\overline{x} = 825{,}8, \quad S2 = 48{,}3, \quad S^* = 6{,}95.$

Теперь находим теоретические частоты.

В предположении, что случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения, по формулам (10.5) найдём вероятности попадания случайной величины ξ в интервалы $[x_i;\ x_{i+1}]$.

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\Big(\frac{x_2 - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{x_1 - a}{\sigma}\Big).$$

Умножая полученные вероятности на объём выборки, найдём теоретические частоты $m_i^{'}$ попадания случайной величины ξ в те же интервалы.

$$m_i{}' = n \cdot \left(\Phi\Big(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{S^*}\Big) - \Phi\Big(\frac{x_i - \overline{x}}{S^*}\Big)\right).$$

Заполним таблицу, в которой $t_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{S^*}$. Значения функции Лапласа $\Phi(t_i)$ берем из таблицы приложения 2. При этом левую и правую границы расширяем до ∓ 10.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	810	814	818	822	826	830	834	838	842
t_i	-10	-1,7	-1,13	-0,553	0,023	0,599	1,17	1,75	10
$\Phi(t_i)$	-0,5	-0,456	-0,37	-0,21	0,0092	0,225	0,38	0,46	0,5
P_i	0,0442	0,0854	0,161	0,219	0,216	0,155	0,0801	0,0401	
$m_i{}'$	4,422	8,542	16,07	21,89	21,61	15,46	8,008	4,008	

По формуле $\chi^2_{\text{набл}} = \sum\limits_{i=1}^{8} \dfrac{(m_i - m_i{}')^2}{m_i{}'}$, находим $\chi^2_{\text{набл}} = 3{,}714$.

По таблице приложения 4 для $\alpha = 0{,}05$ и $k = 8 - 1 - 2 = 5$, находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 5) = 11{,}1$. Поскольку по заданной выборке и уровне значимости $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 5)$, следовательно нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении случайной величины ξ. ▶

Ответ: На базе полученной выборки делаем вывод, что исследуемая непрерывная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения.

Такие объёмные задачи решать вручную долго и неинтересно, поэтому прилагаем maxima-программу с краткими комментариями, по которой проводились вычисления.

```
kill(all)$fpprintprec:3$ n:100$ numer:true$ load(distrib)$
x1:[ 812, 817, 828, 833, 841, 820, 822, 825, 826, 824, 826, 825,
 817, 826, 834, 818, 842, 826, 837, 827, 821, 835, 823, 824,
 815, 833, 830, 824, 816, 828, 822, 826, 827, 822, 837, 816,
 825, 810, 823, 831, 826, 814, 838, 831, 824, 812, 827, 839,
 828, 836, 815, 836, 817, 828, 823, 832, 819, 826, 818, 820,
```

```
 811, 828, 810, 822, 836, 816, 829, 821, 833, 821, 829, 823,
 832, 823, 831, 826, 832, 827, 829, 826, 836, 821, 838, 818 ,
 822, 819, 823, 828, 826, 820, 825, 828, 822, 835, 824, 825,
 820, 829, 825, 824];
/*{\it  Сортируем список x1 в порядке возрастания значений}.*/
x2:sort(x1);
/* {\it Разбиваем выборку на s интервалов постоянной длины h (размах)}.*/
s:8; h:(x2[n] -x2[1])/s;
/*{\it  Координаты границ элементов}.*/
a:makelist(x2[1]+(i-1)*h, i, 1, s+1);
/* {\it Координаты середин элементов}.*/
U:makelist((a[j]+a[j+1])/2, j, 1, s);
/*{\it  Определение частоты наблюдений по интервалам}.*/
m:makelist(0, i, 1, s)$ for j:1 while j<=n do(
    k:fix((x2[j] -x2[1])/h)+1,if k>s then k:s,m[k]:m[k]+1);
/* {\it Вывод значений эмпирической частоты наблюдений по
интервалам}.*/
m;
/* {\it Контроль объёма выборки}.*/
sum(m[i], i, 1, s);
PZ:makelist(m[i]/(n*h),i,1,s);sum(PZ[i],i,1,s);
/* {\it Строим график}.*/
wxplot2d([['discrete,makelist([U[j], m[j]], j, 1, s)]],
      [style,[lines, 3, 5]],  [gnuplot_preamble,"set   grid"],
      [ylabel,""])$
/*  Находим выборочное среднее  Mx и среднеквадратическое S */
Mx:sum(m[j]*U[j], j, 1, s)/n;
 S2:n/(n-1)*(sum(m[j]*U[j]^2, j, 1, s)/n-Mx^2);
S:sqrt(S2);
 F(x):=cdf_normal (x, 0, 1) -0.5;
ti:makelist((a[j] -Mx)/S , j, 1, s+1)$  ti[1]:-10$ ti[s+1]:10$ ti;
Pj:makelist(F(ti[j])  , j, 1, s+1) ;
P:makelist(Pj[j+1]-Pj[j],j,1,s);
/*{\it Теоретические частоты}.*/
m1:makelist(n*P[j], j, 1, s);
nn:sum(m1[j], j, 1, s);
/* {\it Вычисление} $\chi^2_\text{набл}$. */
 x2nabl:sum((m[j] -m1[j])^2/m1[j], j, 1, s);
```

15.2. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции

Пусть по выборке объёма n нормально распределённой случайной величины ξ получен отличный от нуля выборочный коэффициент корреляции $r^*_{\xi\eta}$. Нужно при заданном уровне значимости α проверить основную гипотезу H_0: $r_{\xi\eta} = 0$ при альтернативной гипотезе $H_1 : r_{\xi\eta} \neq 0$. Для этой задачи в качестве критерия выбирается случайная величина

$$T = r^*_{\xi\eta} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - {r^*_{\xi\eta}}^2}} \,. \tag{15.3}$$

При справедливости основной гипотезы величина T имеет распределение Стьюдента, и критическое значение находится из соответствующей таблицы для двусторонней критической области при уровне значимости α и числе степеней свободы $n - 2$.

Пример 15.3. *По выборке объёма $n = 38$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (ξ, η), найден выборочный коэффициент корреляции $r^*_{\xi\eta} = 0{,}1$. Требуется при уровне значимости $0{,}1$ проверить нулевую гипотезу H_0: $r_{\xi\eta=0}$ о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_{\xi\eta} \neq 0$.*

◀ Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле (15.3):

$$T_{\text{набл}} = 0{,}1 \cdot \frac{\sqrt{38-2}}{\sqrt{1 - 0{,}1^2}} = \frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}99}} \approx \mathbf{0{,}603}.$$

Так как конкурирующая гипотеза $H_1 : r^*_{xy} \neq 0$, то поэтому критическая область двусторонняя. По таблице (приложения 3) критических точек распределения Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ и числу степеней свободы $k = 38 - 2 = 36$ находим $T_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(0{,}1; 36) = \mathbf{1{,}69}$.

Так как $T_{\text{набл}} < T_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции. Это означает, что выборочный коэффициент корреляции незначимо отличается от нуля, т.е. ξ и η некоррелированы.

Значение критических точек распределения Стьюдента можно вычислить в Excel. Для этого в любой ячейке таблицы вводим команду =СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(α; k). ▶

Ответ: $\boxed{\xi \text{ и } \eta \text{ некоррелированы.}}$

15.3. Сравнение математических ожиданий

Пример 15.4. *По двум независимым выборкам, объёмы которых $n_1 = 36$ и $n_2 = 24$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей ξ_1 и ξ_2, найдены выборочные средние $\overline{x}_1 = 20$ и $\overline{x}_2 = 22$. Соответствующие генеральные дисперсии $D(\xi_1) = 4,\ D(\xi_1) = 3$. Требуется при уровне значимости* 0,05 *проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(\xi) = M(\eta)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(\xi) \neq M(\eta)$.*

◀ В поставленной задаче в качестве критерия проверки гипотезы примем величину:

$$Z = \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_1|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}. \tag{15.4}$$

При справедливости основной гипотезы величина Z имеет стандартное нормальное распределение $Z \sim N(0,1)$. Критическая область двусторонняя с вероятностью попадания $\alpha/2$ в каждую половину области.

Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле (15.4):

$$Z_{\text{набл}} = \frac{|20 - 22|}{\sqrt{4/36 + 3/24}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \approx \mathbf{4{,}116}.$$

Так как конкурирующая гипотеза $M(\xi) \neq M(\eta)$, то критическая область двусторонняя. Правую критическую точку найдем из равенства:

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2 = (1 - 0{,}05)/2 = 0{,}495.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) находим $Z_{\text{кр}} = \mathbf{2{,}58}$. Так как $|Z_{\text{набл}}| > Z_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергаем. Это означает, что выборочные средние отличаются значимо. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{Выборочные средние отличаются значимо.}}$

Пример 15.5. *Из нормальной генеральной совокупности с известной дисперсией $D = 9$ извлечена выборка объёма $n = 81$, и по ней найдена выборочная средняя $\overline{x} = 5{,}35$. Требуется при уровне значимости* 0,02 *проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = 5$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : a \neq 5$.*

◀ Для решения данной задачи в качестве критерия принимается величина

$$U = \frac{\overline{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - a_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}. \qquad (15.5)$$

Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле (15.5):

$$U_{\text{набл}} = \frac{5{,}35 - 5}{3} \cdot \sqrt{81} = \mathbf{1{,}05}.$$

Так как конкурирующая гипотеза $a \neq a_0$, то критическая область двусторонняя. Критическую точку найдем из равенства:

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2 = (1 - 0{,}02)/2 = 0{,}49.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) находим $Z_{\text{кр}} = \mathbf{2{,}33}$. Так как $U_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу принимаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральные средние различаются незначимо. ▶

Ответ: **Нулевая гипотеза принимается.**

15.4. Сравнение вероятности с заданными значением

Пример 15.6. *Автоматизированная линия выпускает детали сложной формы. Для контроля качества деталей выбирается партия из 400 деталей. Если процент бракованный деталей превышает 2%, то автоматизированная линия останавливается для наладки оборудования. В отобранной партии оказалось 10 бракованных. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ будет ли остановлена автоматизированная линия?*

◀ Нулевая гипотеза $H_0 : p = p_0 = 0{,}02$, а относительная частота брака $m/n = 10/400 = 0{,}025$. Примем в качестве конкурирующей гипотезы $H_1 : p > 0{,}025$ и уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. С учётом того, что $q_0 = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$, по формуле (15.6) найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U = \frac{\dfrac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}} \cdot \sqrt{n}. \qquad (15.6)$$

Находим

$$U_{\text{набл}} = \frac{(0{,}025 - 0{,}02) \cdot \sqrt{400}}{\sqrt{0{,}02 \cdot 0{,}975}} \approx \mathbf{0{,}714}.$$

Так как конкурирующая гипотеза состоит в том, что $p > p_0$, то критическая область правосторонняя. Критическую точку найдем из равенства:

$$\Phi(U_{\text{кр}}) = (1 - 2\alpha)/2 = (1 - 2 \cdot 0{,}1)/2 = 0{,}4.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) находим $U_{\text{кр}} = \mathbf{1{,}28}$. Так как $U_{\text{набл}} < U_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что вероятность брака в партии не превышает 0,02. Следовательно, автоматизированная линия не требует остановки. ►

Ответ: $\boxed{\textbf{Автоматизированная линия не требует остановки.}}$

15.5. Сравнение двух дисперсий (критерий Фишера)

Пример 15.7. *По двум независимым выборкам из нормальных генеральных совокупностей, объёмы которых равны $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_1^{*^2} = 10$, $S_2^{*^2} = 5{,}5$. С уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при конкурирующей гипотезе $H_1: \ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.*

◄ В качестве критерия проверки гипотезы примем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F = \frac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}}.$$

Известно, что при условии справедливости нулевой гипотезы, величина F имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$. Решающее правило зависит от конкурирующей гипотезы. В данном примере $k_1 = 12 - 1 = 11$, $k_2 = 15 - 1 = 14$, $F_{\text{набл}} = \dfrac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}} = \mathbf{1{,}82}$. По таблице критические точки распределения F Фишера-Снедокера (Приложение 5) находим $F_{\text{кр}} = \mathbf{2{,}56}$.

В Excel это значение можно найти командой =FРАСПОБР(0,05;11;14).

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве дисперсий. ►

Ответ: $\boxed{\textbf{Нулевая гипотеза принимается.}}$

Задания для самостоятельной работы

15.1. При испытании образцов алюминиевого сплава АМг5 В на растяжение были получены следующие значения относительного удлинения (в %):

Исходные данные задания 15.1									
17,2	18,7	15,0	18,4	19,7	18,1	18,5	16,8	14,8	19,3
14,4	15,3	16,4	18,0	15,6	19,2	20,1	17,8	16,0	16,5
19,7	19,5	15,5	16,1	16,8	18,8	16,6	18,7	17,1	15,9
18,4	18,3	20,8	19,5	17,7	15,8	18,2	19,1	16,7	20,0
16,9	18,1	16,4	16,7	16,2	18,8	19,6	19,6	17,7	17,1
15,6	16,9	17,8	18,0	20,4	15,1	18,7	18,2	17,1	16,6
15,4	19,6	18,7	16,9	15,8	18,6	19,9	17,0	18,2	18,0
15,7	17,2	17,3	17,2	17,4	19,0	18,9	17,5	16,3	16,4
17,9	18,4	16,3	18,9	20,5	18,4	16,5	16,9	17,2	18,5
17,5	19,4	16,5	17,0	19,5	17,3	17,6	18,6	17,5	20,5

Построить гистограмму относительных частот при длине интервала $h = 0,8$. Определить закон распределения данной случайной величины ξ. Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

15.2. По выборке объёма $n = 30$ найден выборочный коэффициент корреляции $r^*_{xy} = 0{,}35$. При уровне значимости 0,1 проверить гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $r_{\xi\eta} \neq 0$.

15.3. По выборке объёма $n = 100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности, составлена корреляционная таблица:

Исходные данные задания 15.3					
$\xi\backslash\eta$	2	6	10	14	18
2	5	4	-	-	-
4	-	8	10	-	
8	-	-	30	12	-
16	-	2	10	13	6

15.4. Найти выборочный коэффициент корреляции и при уровне значимости 0,1 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $r_{\xi\eta} \neq 0$.

Таблица 15.3

N варианта	n_1	n_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	σ_1^2	σ_2^2	α
1	13	17	51,4	55,0	4,38	1,29	0,01
2	12	16	81,66	85,00	29,96	12,97	0,05
3	11	15	35,40	30,30	9,84	3,90	0,01
4	10	14	25,65	23,55	2,08	0,98	0,05
5	9	13	4,40	4,00	0,0295	0,008	0,01
6	8	12	80,53	82,40	21,34	7,34	0,05
7	7	11	14,31	12,21	17,82	3,70	0,01
8	6	10	16,62	13,34	13,32	4,47	0,05
9	5	9	32,12	30,10	18,92	3,45	0,01
10	10	8	7,20	5,15	10,52	3,18	0,05
11	13	17	8,81	5,85	11,68	4,62	0,01
12	12	16	5,03	6,21	5,22	2,90	0,05
13	11	15	4,64	4,02	6,73	2,39	0,01
14	10	14	13,33	16,22	8,94	4,52	0,05
15	9	13	16,08	13,11	7,35	2,02	0,01
16	13	10	28,43	30,50	11,22	2,38	0,01
17	12	11	80,34	78,10	24,35	11,71	0,05
18	11	12	45,78	40,32	18,43	7,84	0,05
19	10	13	25,31	22,84	8,51	3,04	0,01
20	9	14	23,46	25,81	12,38	5,87	0,05
21	8	15	16,38	18,21	11,64	3,66	0,01
22	7	16	17,64	15,32	10,52	4,52	0,05
23	6	17	5,32	7,55	4,32	1,38	0,01
24	5	8	4,38	4,01	2,35	0,75	0,05
25	10	9	19,23	17,34	7,48	1,82	0,01
26	13	13	8,32	6,29	4,35	8,25	0,01
27	12	14	12,48	10,31	19,38	8,25	0,01
28	11	15	23,45	20,81	17,25	8,50	0,05
29	10	16	20,44	23,00	13,11	4,54	0,01
30	9	17	13,25	11,49	10,12	6,98	0,05

15.5. По выборке объёма $n = 100$ найден средний вес деталей $\overline{x} = 210$ г, изготовленных на первом станке; по выборке объёма $m = 90$ найден средний вес $\overline{y} = 208$ г деталей, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: $\sigma_1^2 = 80,\ \sigma_2^2 = 70$. Предполагается, что случайные величины ξ и η распределены нормально и выборки независимы. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу $H_0 : M(\xi) = M(\eta)$ при конкурирующей гипотезе $M(\xi) \neq M(\eta)$.

15.6. В таблице 15.3 даны варианты заданий. Для каждого варианта приведены две независимые выборки объёмами n_1 и n_2, найдены выборочные средние $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2$ и известны дисперсии $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$. Нужно проверить при заданном уровне значимости α равенство математических ожиданий при конкурирующей гипотезе об их неравенстве.

15.7. Задана выборка объёма $n = 120$ из нормальной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ и выборочной средней $\overline{x} = 23{,}54$. Необходимо при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0 = 23$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : a \neq 23$.

15.8. Фирма рассылает рекламные каталоги торговым организациям. Вероятность того, что организация, получившая каталог, закажет рекламируемое изделие, равна 0,1. Фирма разослала 200 новых улучшенных каталогов и получила 30 заказов. Можно ли считать, что новые каталоги значимо лучше старых?

Указание. Принять нулевую гипотезу $H_0 : p = p_0 = 0{,}1$; конкурирующую — $H_1 : p > 0{,}1$; уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Заключение

Настоящее учебно-методическое пособие написано на основе многолетнего опыта преподавания теории вероятностей и математической статистики в высшем техническом учебном заведении.

Как Вы уже убедились, в начале каждого параграфа содержится краткий обзор теоретических сведений и основных формул, необходимых для решения задач, представленных в данном разделе. Авторы очень надеются, что знания, умения и навыки, полученные при выполнении предложенных в пособии заданий, помогут студентам справиться с задачами контрольных мероприятий, предусмотренных рабочей программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» и успешно сдать экзамен. Важной целью пособия было на примерах базовых математических задач теории вероятностей подготовить студентов к решению более сложных инженерных и научных задач, с которыми они могут встретиться на практике. Хотелось бы, чтобы полученные знания студенты смогли применить в своих курсовых проектах и дипломных работах по другим предметам.

В настоящее время практически нет ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы. Широкое применение вероятностные методы находят в кибернетике, вычислительной технике, теории автоматизированных систем управления, теории автоматического регулирования, ядерной физике, электронике, радиотехнике, теории связи и т.д. Знакомство с методами теории вероятностей и математической статистики необходимо сегодня каждому грамотному инженеру.

Данное учебное-методическое пособие имеет прикладную направленность и является продолжением теоретического курса «Теория вероятностей и математическая статистика», написанного авторами ранее на основе лекций по данной дисциплине.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $f(x) = (1/(\sqrt{2\pi})) \cdot e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	7802	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0217	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0045
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение таблицы приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$												
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
k1 - число степеней свободы большей дисперсии, k2 - число степеней свободы меньшей дисперсии												

Предметный указатель

Список литературы

1. Берков Н.А., Горшунова Т.А. Теория вероятностей и математическая статистика.[Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие. –М.: РТУ МИРЭА, 2022.

2. Берков Н.А., Малыгина О.А., Морозова Т.А., Немировская-Дутчак О.Э., Руденская И.Н., Таланова Л.И., Чекалкин Н.С. Теория вероятностей. Математическая статистика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие. – М.: РТУ МИРЭА, 2020. — Электрон. опт. диск (ISO)

3. Берков Н.А. Применение пакета Maxima: *практикум.* – М.:МГИУ, 2009.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Юрайт, 2022.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юрайт, 2022.

7. Пушкарь Е.А., Берков Н.А., Мартыненко А.И. Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 4. Теория вероятностей и математическая статистика. Уч.пособие.–СПБ. Издательство «Лань». 2022г. https://e.lanbook.com/book/211382

Сведения об авторах

Берков Николай Андреевич, к.т.н., доцент, доцент кафедры высшей математики-3, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, РТУ МИРЭА.

Горшунова Татьяна Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики-3, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, РТУ МИРЭА.

Кытманов Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры высшей математики-3, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, РТУ МИРЭА.