Методическое пособие для решения математического анализа

Алексеев Дмитрий и **Александр Вагулич**

29 января 2024 г.

МИРЭА

Кафедра Высших Фруктов

Методическое пособие для решения математического анализа

Alekseev Dmitriy

supervised by
Alexander Vagulich

29 января 2024 г.

1 Задание 1

1.1 Теория

Знакоположительным рядом является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0 \forall n$

(каждый элемент равен или больше 0) Существует два эталонных ряда, о которых необходимо знать:

1. Геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} b + q^n$, если $|q| < 1$, то ряд сходится

2. Ряды Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, если $\alpha > 1$, то ряд сходится

Нам нужны знания об этих рядах для **первого** признака сходимости рядов.

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Если справедливо $0 \leq a_n \leq b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n + 1}$$

$$\frac{n}{n^3 + n + 1} \approx \frac{1}{n^2}$$

$$a_n = \frac{n}{n^3 + n + 1}, b_n = \frac{1}{n^2}; a_n \leq b_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится, т.к. $\alpha = 2 > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

Пример из билета

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n+4}$$

$$\frac{7}{n+4} \approx \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{7}{n+4}, b_n \frac{1}{n}; a_n \geq b_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, т.к. $\alpha = 1 \leq 1$ то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже рассходится по первому признаку сходимости.

Понятно, что, если есть первый, есть и **второй** признак сходимости. (Их 5)

P.S. Эти два признаки называются признаками сравнения, первый и второй соотвественно. Остальные идут под собственными именами и в доказательстве нельзя использовать фразу "по третьему признаку сходимости"имея в виду признак Даламбера, но это на усмотрения препода.

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} \neq 0 \neq \infty$ если выполняется, то ряды сходится и расходятся одновременно.

Примечание: если $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Примечание: если $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рассходится, если рассходится $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{\sqrt{n^6 + 1} + n}$$

$$\frac{n^2 + 5}{\sqrt{n^6 + 1} + n} \approx \frac{n^2}{\sqrt{n^6}} = \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходится (гармонический ряд)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+5}{\sqrt{n^6+1}+n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+5n}{\sqrt{n^6+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}+\frac{1}{n^2}}=1\implies$ изначальный ряд расходится по второму признаку сравнения.

Третий признак сходимости или признак Даламбера

$\exists\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d\begin{cases}\text{d} > 1 \text{ ряд расходится}\\ \text{d} < 1 \text{ ряд сходится}\\ \text{d} = 1 \text{ требуется дополнительные исследования (пробуй другой метод)}\end{cases}. \tag{1}$$

Пример из билета

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!*3^n}{(n+1)!*3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3}=\infty\implies$ расходится

Четвертый признак - всеми "любимый"Коши (радикальный, сейчас поймете)

$\exists\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=d\begin{cases}\text{d} > 1 \text{ ряд расходится}\\ \text{d} < 1 \text{ ряд сходится}\\ \text{d} = 1 \text{ требуется дополнительные исследования (пробуй другой метод)}\end{cases}. \tag{2}$$

P.S. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\epsilon$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

Пример из билета

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^n}{3^n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n-1)^n}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{3}=\infty\implies$ расходится

Пятый признак - Коши интегральный

$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$; $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$, где $f(x)$ - определена, непрерывна, ≥ 0, убывает на $[1;+\infty]$ Исследуем интеграл на сходимость при помощи уже изученных признаков. **Пример**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x_1^{+\infty}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln|A|-\ln 1=+\infty\implies$ расходится

Для тренировки решите следующие задания:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{5n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\sqrt{n}}{4n^2+3}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-2)^2}$

2 Задание 2

2.1 Теория

Знакочередующиеся ряды имеют приписку $(-1)^n$, где $n \in N$ (степень может быть что-то из серии (n-1) // (n+1) и т.п.)

Сходимость у знакочередующихся рядов может быть:

- абсолютная;
- условная;
- вообще не быть сходимым.

Идея заключается в анализе модуля общего члена ряда (a_n). Если ряд из модуля общего члена сходим, то исходный ряд является абсолютно сходимым.

В обратном случае (когда модульный ряд расходится), используется теорема Лейбница:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \{a_n\} \text{ убывает при увелечение n} \end{cases} \implies \text{ряд условно сходится} \tag{3}$$

Если теорема не выполняется, то ряд расходится.

Пример

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n+1)!}{7^{n+1}}$

Анализируем модульный ряд.

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{7^{n+1}}$

Воспользуемся признаком Даламбера

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(n+2)!}{7^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{7^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! * 7^{n+1}}{(n+1)! * 7^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{7} = \infty \implies$ ряд расходится

Используем признак Лейбница

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{7^{n+1}} \neq 0 \\ a_1 > a_2 \left(\dfrac{2}{49} > \dfrac{6}{343}\right) \end{cases} \implies \text{исходный ряд рассходится} \tag{4}$$

Для тренировки решите следующие задания: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin n^2}{5n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{5n^2 - 2n + 7}$

3 Задание 3

3.1 Теория

Интервал сходимости (-R; R) – интервал сходимости степенного ряда, а число R – радиус сходимости.

- Степенной ряд вида сходится или на интервале $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (x0-R;x0+R), или на всей числовой прямой оси, или только в точке x0.
- Интервал сходимости может быть найден с помощью признаков Даламбера или Коши. Для определения (ра-)сходимости на концах требуется дополнительное исследование.

Пример

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(x+1)^n}{3^n*\ln n}$

Воспользуемся признаком даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}*\ln(n+1)}*3^n*\ln n}{(x+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)*\ln n}{3*\ln(n+1)}\right| = \frac{|x+1|}{3}*\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \|\ln x = t\| =$$

$$\frac{|x+1|}{3}*\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t+1}}\right| = \frac{|x+1|}{3}*\lim_{n\to\infty}\frac{t+1}{t} = \frac{|x+1|}{3}$$

$\dfrac{|x+1|}{3}<1 \implies |x+1|<3 \implies x\in(-4;2)$

Интервал сходимости: (-4;2), R=3, $x_{\text{центр}}$=-1.

Далее исследуем поведение ряда на концах интервала:

При = -4: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-4+1)^n}{3^n*\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-3)^n}{3^n*\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{2n}\dfrac{1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ Ряд гармонический, расходится.

При $x=2$: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2+1)^n}{3^n*\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{3^n*\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$

Ряд знакочередующийся. Знаем, что модульный ряд расходится, поэтому переходим к признаку Лейбница:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\ln x}>\dfrac{1}{\ln(x+1)} - \text{ряд убывает}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0\end{cases} \implies \text{исходный ряд условно сходится} \tag{5}$$

Ответ: область сходимости - $x\in(-4;2]$

Для тренировки решите следующие задания:

$\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^n\dfrac{n+3}{n^2+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)\,x^n}{(n^3+2)\,7^n}$

4 Задание 4

4.1 Часть А

Теория.

Я хз, что тут объяснять. Нужно на практике. Разберем примеры.

Номер 1.

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{(3n-1)(3n+2)}$

$\dfrac{6}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{A}{3n-1}+\dfrac{B}{3n+2}$

$6 = A\,(3n+2)+B\,(3n-1)$

$6 = 3An+2A+3Bn-B$

$6 = (3A+3B)\,n+2A-B$

$\begin{cases}3A+3B=0\\2A-B=6\end{cases}$

$\begin{cases}A=2\\B=-2\end{cases}$

$$\frac{6}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{2}{3n-1} - \frac{2}{3n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(3n-1)(3n+2)} = 2 * \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$= 2 * \left(\left(\frac{1}{3-1} - \frac{2}{3+2} \right) + \left(\frac{1}{6-1} - \frac{2}{6+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n+2} \right) \right)$$

$$= 2 * \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{2}{3n-1} \right) + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n+2} \right) \right) = 2 * \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3n+2} \right)$$

$S_n = 2 * \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3n+2} \right) = 1$

Ответ: 1

P.S. Подобные ряды называются телескопическими

Номер 2.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 * 2^n - 3^{n+1}}{4^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 * 2^n - 3^{n+1}}{4^n} = 7 * \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{4} \right)^n - 3 * \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$= 7 * \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 3 * \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

Оба ряда являются сходимыми (эталонный ряд, геометрическая прогрессия, помните?) $|q| < 1$ в обоих случаях, следовательно, мы можем посчитать сумму ряда.

А теперь 10ый класс, формула суммы геометрической прогрессии:

$S_n = \frac{b_1}{1-q}$

$$S_n = 7 * \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - 3 * \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7 * \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 3 * \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 7 * 1 - 3 * 3 = -2$$

Ответ: -2.

Дальше Вагулич предлагает дорогим читателем, если закономерность не была найдена взять больше членов ряда.

5 Задание 5

Да, поможет Вам Бог в этом задании.

6 Задание 6

6.1 Теория

Мы рассматривали комплексное число в виде $z = a + b * i$. Поскольку сейчас буква «зет» стала переменной, то её мы будем обозначать следующим образом: $z = x + y * i$, при этом «икс» и «игрек» могут принимать различные действительные значения. Грубо говоря, функция комплексной $w = f(z) = f(x+y*i)$ переменной зависит от переменных x и y, которые принимают «обычные» значения.

Функцию комплексной переменной можно записать в виде: $w = u(x, y) + v(x, y) * i$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – функции двух действительных переменных.

$u(x, y)$ – действительная часть функции w $v(x, y)$ – мнимая часть функции w

Нужно знать формулы Эйлера:
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
$\cos x = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
$\sin x = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
Нужно знать разложение некоторых функций для выпонения задания:
$e^z = e^x * e^{iy}$
$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$
$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
$\ln z = \ln |z| + i \arg z$
Для проверки функций комплексной переменной на аналитичность придумали критерий Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \end{cases} \implies \text{если система выполняется, то функция аналитична, иначе не аналитична} \quad (6)$$

Суть задания заключается в двух компонентов:

1. Разбить функцию на действительную и мнимую часть.
2. Проверить функцию на аналитичность через критерий Коши-Римана.

Некоторые свойства аналитичной функции:

- Если две функции аналитичны, то их сумма и произведение тоже аналитичны.
- Если функция аналитична, то она бесконечно дифференцируема.
- Если функции аналитичны, то их суперпозиции аналитичны.

6.2 Пример

$f(z) = z * \sin z$
Разобьем задачу на две части:

1. Докажем, что $g(z) = z$ аналитична
2. Докажем, что $h(z) = \sin z$ аналитична

Докажем, что $g(z) = z$ аналитична
$g(z) = x + iy$
$u(x, y) = x$
$v(x, y) = y$
$\dfrac{du}{dx} = 1$
$\dfrac{dv}{dy} = 1$
$\dfrac{du}{dy} = 0$
$\dfrac{dv}{dx} = 0$
$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \end{cases} \implies$ функция аналитична

Докажем, что $h(z) = \sin z$ аналитична
$h(z) = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
Вновь разобьем задачу на две части:

1. Докажем, что $f(z) = e^{iz}$ аналитична
2. Докажем, что $f(z) = e^{-iz}$ аналитична

Докажем, что $f(z) = e^{iz}$ аналитична
$f(z) = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} * e^{ix} = e^{-y} * (cos(x) + isin(x))$
$u(x,y) = e^{-y} * \cos x$
$v(x,y) = e^{-y} * \sin x$
$\dfrac{du}{dx} = -e^{-y} * \sin x$
$\dfrac{dv}{dy} = -e^{-y} * \sin x$
$\dfrac{du}{dy} = -e^{-y} * \cos x$
$\dfrac{dv}{dx} = e^{-y} * \cos x$
$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \end{cases} \implies$ функция аналитична
Доказательство $f(z) = e^{-iz}$ на аналитичность остается за читателем, мы примем это как факт

Теперь, когда мы доказали, что $f(z) = e^{iz}$ и $f(z) = e^{-iz}$ аналитичны, мы можем доказать, что $h(z) = \sin z$ аналитична по свойству двух аналитичный функций.

Теперь, когда мы доказали, что $g(z) = z$ и $h(z) = \sin z$ аналитичны, мы можем доказать, что $f(z) = z * \sin z$ аналитична по свойству двух аналитичный функций.

Поздравляю, мы дошли до ответа.

Ответ: $f(z) = z * \sin z$ аналитична.

7 Задание 7

7.1 Часть 1

Разложить функцию в ряд Лорана в кольце по степеням z
Нужно знать разложение в ряд Тейлора и условие сходимости ряда.
Разложение в ряд Тейлора:
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$
Вот разложение некоторых функций в ряд Тейлора (просто запомните):
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$
$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
$\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

Вот пример из билета:

$f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-5)}$

Разделим на множители:

$f(z) = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{1}{z+2} - \dfrac{1}{z-5}\right)$

Разложим в ряд Тейлора:

$$f(z) = \frac{1}{7} * \left(-\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-5}\right) = \frac{1}{7} * \left(-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{5}\frac{1}{\frac{z}{5}-1}\right)$$

$$\begin{cases} \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \\ \left|\frac{z}{5}\right| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| > 2 \\ |z| < 5 \end{cases}$$

$= \dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{z}\right)^n + \dfrac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{z}{5}\right)^n\right)$

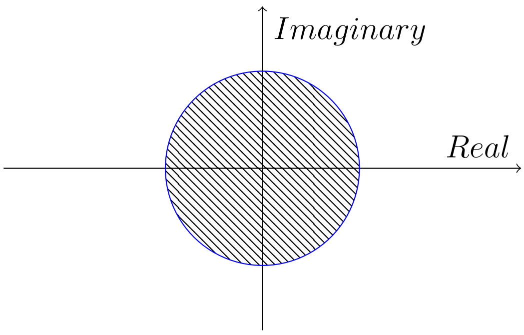
$= \dfrac{1}{7}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{5^{n+1}}\right),\ z \in (-5,-2) \cup (2,5)$

7.2 Часть 2

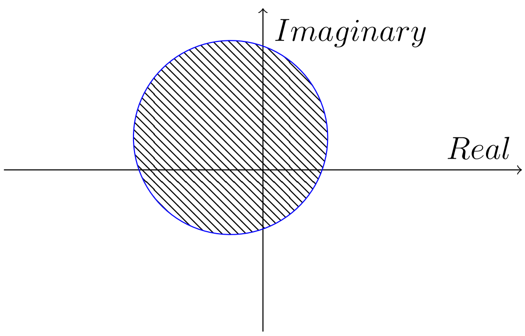
Изобразить на комплексной плоскости

Теория:

$|z - z_0| = R$

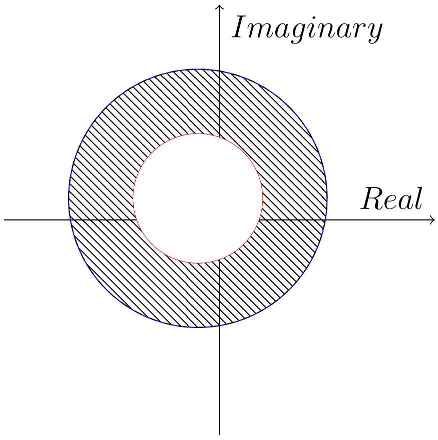


Circle, $R = 3,\ z_0 = (0,0)$



Circle, $R = 3,\ z_0 = (-1,1)$

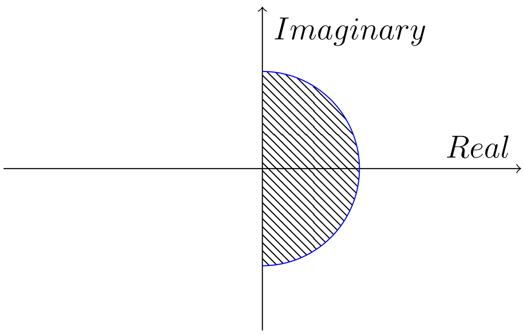
$R_0 \le |z - z_0| \le R_1$



Inner Circle, $R_0 = 3,\ z_0 = (-1, 1)$
Outer Circle, $R_1 = 6,\ z_0 = (-1, 1)$

Ответ будет пересечение между Inner Circle и Outer Circle (мне не хватает опыта в LaTeX, чтобы нарисовать dashed lines inside circles)

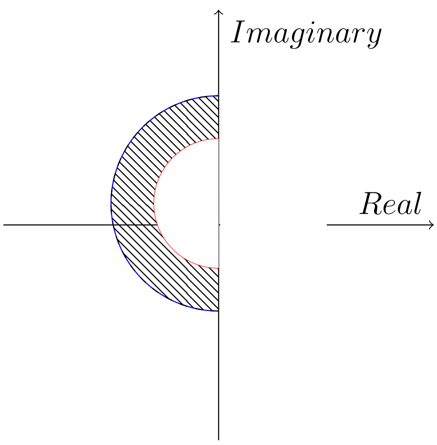
$$\begin{cases} |z| = R \\ Re(z) \geq 0 \end{cases} . \tag{7}$$



Circle, $R = 3,\ z_0 = (0, 0)$

Это конечно не все, но большинство примеров, что попадутся.
Задача из билета:

$$\begin{cases} 3 \leq |z - i| \leq 5 \\ Re(z) \leq 0 \end{cases} . \tag{8}$$



Inner Circle, $R_0 = 3,\ z_0 = (0, +1)$
Outer Circle, $R_1 = 5,\ z_0 = (0, +1)$

8 Задание 8

8.1 Теория

Для того, чтобы находить вычеты, необходимо овладеть искусством поиска ИОТ (Изолированные Особые Точки).

Для определения типа можно воспользоваться следующей таблицы:

Название	Предел	Влияние на вычет
УОТ (Устанимая Особая Точка)	$\lim\limits_{x \to z_0} f(z) = C$	Вычет равен 0
Полюс порядка n	$\lim\limits_{x \to z_0} f(z) = \infty$	В зависимости от порядка
СОТ (Существання особая точка)	$\lim\limits_{x \to z_0} f(z)$ не существует	Выписывается ряд Лорана и ищется коэффицент C_{-1}

Мы нашли полюс (по пределу), но мы не знаем его порядок. Как находить? Сейчас объясню.

У нас есть функция $f(z)$, она как мы выяснили имеет какую-то ИОТ z_0, что в пределе обращает ее в бесконечность.

Нам надо найти такое представление $f(z)$, что $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}$, где $\phi(z)$ это фунция $f(z)$ если из нее убрать $(z - z_0)^n$.

Как же понять, что мы подобрали нужную n? Для этого необходима два условия:

1. $\phi(z)$ аналитична в z_0, то есть она в пределе к ИОТ не обращается в бесконечность

2. $\phi(z_0) \neq 0$

Два этих условия обеспечивают нам победу.

Как выбирать n? Можно подбирать начиная с 1 (простой полюс) и до бесконечности, проверяя каждую из них по этим критериям, или воспользоваться лайфхаком ниже.

Для определения порядка полюса можно воспользоваться лайфхаком (!!!ОПАСНОСТЬ!!!, мнемоническое правило):

$f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z+3)}$

$z_0 = 2$

$z_1 = -3$

Если наша ИОТ (например, z_0) образована под скобкой возведенная в какое-то число, то порядок этого полюса определяется этим числом.

В нашем случае порядок полюса равен двум.

Вычеты.

Прикол вычетов в том, что у нас убирается элемент "портящий"нашу функцию и мы в итоге можем ее спокойно посчитать.

Для простого полюса вычет выглядит так:

$res_{z_k} f(z) = \lim\limits_{z \to z_k} f(z)(z - z_k)$

Для полюса n-го порядка вычет представляет из себя анальную порку:

$res_{z_k} f(z) = \lim\limits_{z \to z_k} \dfrac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(f(z)(z - z_0)^n \right)$

Мнемоническое правило заключается в том, что мы дифференцируем результат "чистой"функций на единицу меньше, чем наш порядок.

И еще не забудьте про $\dfrac{1}{(n-1)!}$, это случается даже с преподами.

Для чего они нужны? С их помощью можно посчитать интегралы.

Вот основная формула:

$$\int_L f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z)$$

Для начала посмотрим на интеграл, у него снизу имеется одна мерзость, называемая область интегрирования.

Чаще всего это круг $((z - z_0) = R)$, но может попасться что-то экзотическое.

Особенность вычетов в интегрирования в том, что нам нужны такие ИОТ, что входят в наш круг. Как определить что входит в наш круг?

Рекомендуется построить двухмерную плоскость и нарисовать круг со смещением (если не понятно, смотри в примеры ниже), и отметить все ИОТ, что мы нашли, те что попали в круг, те используем в формуле.

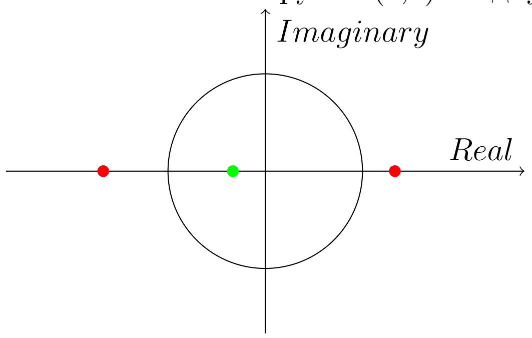
8.2 Первый пример

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)(z+5)(z-4)}$$

Всего 3 ИОТ (приравняйте делитель к нулю и найдите их, если сложно, прыгните в 9 задание, там расписано подробно):

$z_0 = -1$ $z_1 = -5$ $z_2 = 4$

Начальная точка круга - (0,0). Радиус круга 3.



Как видим из рисунка нам нужны следующие ИОТ: z_0

$$\lim_{x \to z_0} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-4)} = \infty$$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:

$$f(z) = \frac{1}{z+1}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{1}{(z+5)(z-4)}$$

$\varphi(z)$ аналитична в точке z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$ следовательно z_0 - простой полюс

Найдем вычет данной функий в точки z_0

$$res_{z_0} f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-4)}(z+1) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(z+5)(z-4)} = -\frac{1}{20}$$

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)(z+5)(z-4)} = -2\pi i \frac{1}{20} = -\frac{\pi i}{10}$$

Ответ: $-\frac{\pi i}{10}$

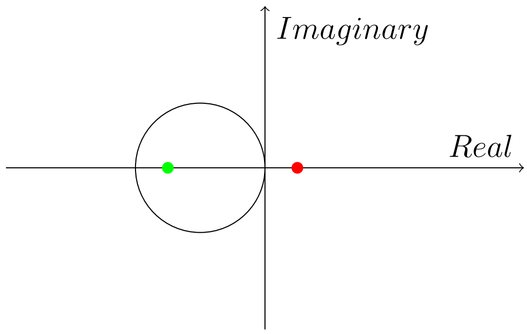
8.3 Второй пример

$$\int_{|z+2|=2} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$$

Всего 2 ИОТ:

$z_0 = 1$ $z_1 = -3$

Начальная точка круга - (-2,0). Радиус круга 2.



Как видим из рисунка нам нужны следующие ИОТ: z_1

$\lim\limits_{x\to z_1}\dfrac{1}{(z-1)(z+3)}=\infty$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:

$f(z)=\dfrac{1}{z+3}\varphi(z),\varphi(z)=\dfrac{1}{(z-1)}$

$\varphi(z)$ аналитична в точке z_1

$\varphi(z_0)\neq 0$ следовательно z_1 - простой полюс

Найдем вычет данной функий в точки z_1

$res_{z_1}f(z)=\lim\limits_{z\to-3}\dfrac{1}{(z-1)(z+3)}(z+3)=\lim\limits_{z\to-3}\dfrac{1}{(z-1)}=-\dfrac{1}{4}$

$\displaystyle\int_{|z+2|=2}\frac{dz}{(z-1)(z+3)}=-2\pi i\frac{1}{4}=-\frac{\pi i}{2}$

Ответ: $-\dfrac{\pi i}{2}$

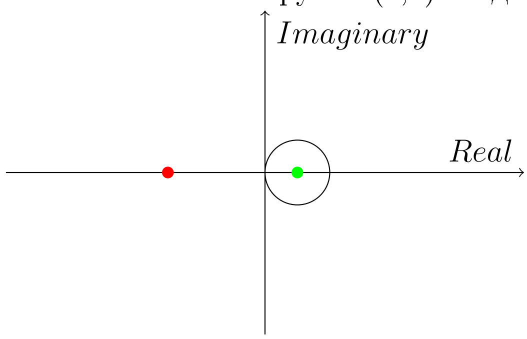
8.4 Третий пример

$\displaystyle\int_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z-1)(z+3)}$

Всего 2 ИОТ:

$z_0=1$ $z_1=-3$

Начальная точка круга - (1,0). Радиус круга 1.



Как видим из рисунка нам нужны следующие ИОТ: z_0

$\lim\limits_{x\to z_0}\dfrac{1}{(z-1)(z+3)}=\infty$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:

$f(z)=\dfrac{1}{z+1}\varphi(z),\varphi(z)=\dfrac{1}{(z+3)}$

$\varphi(z)$ аналитична в точке z_0

$\varphi(z_0)\neq 0$ следовательно z_0 - простой полюс

Найдем вычет данной функий в точки z_0

$res_{z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{1}{(z-1)(z+3)}(z-1)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{1}{(z+3)}=\dfrac{1}{4}$

$\displaystyle\int_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z-1)(z+3)}=2\pi i\frac{1}{4}=\frac{\pi i}{2}$

Ответ: $\frac{\pi i}{2}$

9 Задание 9

9.1 Теория

Здесь и далее я могу обозначать за комплексное число не привычный z, а другие символы (например x). Поэтому смотрите по контексту.

Для решения таких задач мы используем вычеты. Для вычетов нам необходимо найти Изолированные Особые Точки (ИОТ). После того как мы нашли ИОТ, используем следующию формулу:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z)$

ОГРАНИЧЕНИЕ:

Степени делимого и делителя должны различиться на два пункта. Хотя в представленным примеров эта проблема не возникает, но может попасться задача-гроб. Берегите себя.

В принципе это все, что надо знать здесь для решения задачи.

Повторю еще раз алгоритм решения:

1. Найти ИОТ

2. Исключить ИОТ из нижней плоскости (они имеют знак минус)

3. Определить класс оставшихся ИОТ (см. задание 8)

4. Найти вычеты согласно классу

5. Использовать вычеты в формуле представленной выше.

6. Записать ответ

9.2 Первый пример

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$

$f(z) = \frac{1}{z^2+9}$

Найдем нули функции $f(z)$

$x^2+9=0$ $x^2=-9$ $x=\sqrt{-9}$ $x=\pm 3i$

Так как нам нужен только верхния плоскость, берем $z_0 = 3i$

Определим класс ИОТ.

$\lim\limits_{x\to z_0} \frac{1}{x^2+9} = \infty$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:

$f(z) = \frac{1}{z-z_0}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{1}{z+3i}$

$\varphi(z)$ аналитична в точке z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$ следовательно z_0 - простой полюс

Найдем вычет данной функий в точки z_0

$res_{z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to 3i} \frac{1}{z^2+9}(z-3i) = \lim\limits_{z\to 3i} \frac{1}{z+3i} = \frac{1}{6i}$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

9.3 Второй пример

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Найдем нули функции $f(z)$

$z^2 + 1 = 0$

$z = \pm i$

$z_0 = i$

$z^2 + 4 = 0$

$z = \pm 2i$

$z_1 = 2i$

Определим их класс ИОТ.

$$\lim_{x \to z_0} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \infty$$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+4)}$$

$\varphi(z)$ аналитична в точке z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$ следовательно z_0 - простой полюс

Найдем вычет данной функий в точки z_0

$$res_{z_0} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}(z-i) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{(i+i)(-1+4)} = \frac{1}{6i}$$

$$\lim_{x \to z_0} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \infty$$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_1}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}$$

$\varphi(z)$ аналитична в точке z_1

$\varphi(z_1) \neq 0$ следовательно z_1 - простой полюс

Найдем вычет данной функий в точки z_1

$$res_{z_1} f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}(z-2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = -\frac{1}{12i}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(z^2+1)(z^2+4)} = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$

9.4 Третий пример

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4z+13}$$

Найдем нули функции $f(z)$

$x^2 + 4x + 13 = 0$ $D = 16 - 4 * 1 * 13 = -36$ $z = -2 \pm 3i$

$z_0 = -2 + 3i$

Определим их класс ИОТ.

$$\lim_{x \to z_0} \frac{1}{z^2+4z+13} = \infty$$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:
$f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}\varphi(z), \varphi(z) = \dfrac{1}{(z+2+3i)}$
$\varphi(z)$ аналитична в точке z_0
$\varphi(z_0) \neq 0$ следовательно z_0 - простой полюс
Найдем вычет данной функий в точки z_0
$res_{z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{1}{z^2+4z+13}(z+2-3i) = \lim\limits_{z\to -2+3i} \dfrac{1}{(z+2+3i)} = \dfrac{1}{6i}$
$\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{z^2+4z+13} = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}$
Ответ: $\dfrac{\pi}{3}$

10 Дополнительные задачи вытянутые автором

10.1 Задание 3.n

$\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n$
Воспользуемся Коши радикальным.
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(|x+1|)^n \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n} = |x+1| \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{3n+2} = |x+1| < 1$
$-2 < x < 0$
При $x = 0$
$\sum_{n=1}^{\infty} (1)^n \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n$
Воспользуемся вторым признаком сравнения и сравним с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n}{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$
Т.к. гармонический ряд расходится, то и исходный ряд расходится
При $x = -2$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n$
Модульный ряд расходится, см. выше.
Проверим теорему Лейбница

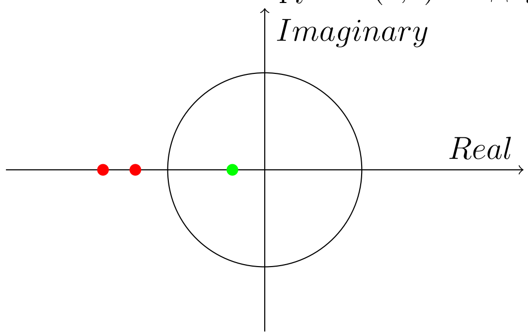
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n = 1 \neq 0 \\ \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n > \left(\dfrac{3n+2}{3n+5}\right)^n \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right) \end{cases} \implies \text{исходный ряд расходится} \tag{9}$$

Ответ: $x \in (-2; 1)$

10.2 Задание 8.1.old

$\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)(z+5)(z+4)}$
Всего 3 ИОТ (приравняйте делитель к нулю и найдите их, если сложно, прыгните в 9 задание, там расписано подробно):
$z_0 = -1$ $z_1 = -5$ $z_2 = -4$

Начальная точка круга - (0,0). Радиус круга 3.



Как видим из рисунка нам нужны следующие ИОТ: z_0

$\lim\limits_{x \to z_0} \dfrac{1}{(z+1)(z+5)(z+4)} = \infty$

У нас полюс n-го порядка. Определим его порядок Представим функцию в таком виде:

$f(z) = \dfrac{1}{z+1}\varphi(z), \varphi(z) = \dfrac{1}{(z+5)(z+4)}$

$\varphi(z)$ аналитична в точке z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$ следовательно z_0 - простой полюс

Найдем вычет данной функий в точки z_0

$res_{z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to -1} \dfrac{1}{(z+1)(z+5)(z+4)}(z+1) = \lim\limits_{z \to -1} \dfrac{1}{(z+5)(z+4)} = \dfrac{1}{12}$

$\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)(z+5)(z+4)} = 2\pi i \frac{1}{12} = \frac{\pi i}{6}$

Ответ: $\dfrac{\pi i}{6}$