Примерный вариант контрольной работы №2

Тема 3. Скалярное, векторное и смешанное произведение.

1. Даны точки $A(1;\ 1;\ 1), B(2;\ 0; 2), C(2; 2; 2), D(3; 4; -3)$.
   Найти:
   1) величину внешнего угла при вершине C в треугольнике ABC;
   2) длину медианы BM треугольника ABC;
   3) площадь треугольника ABC;
   4) высоту DH тетраэдра $DABC$.

2. Даны векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, такие что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ на вектор $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$.

Тема 4. Прямая и плоскость.

3. Даны вершины треугольника: $\mathrm{A}(-2;\ -1), \mathrm{B}(-1; 2), \mathrm{C}(1; 0)$.
   Составить:
   1) каноническое уравнение средней линии параллельной стороне BC;
   2) общее уравнение высоты, проведенной из вершины А.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{A}(2; -15; 1)$ и $B(3;\ 1; 2)$ перпендикулярно плоскости $3x - y - 5z + 4 = 0$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{A}(-2; 1; 0)$ параллельно прямой

$$\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{0}.$$

6.Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

и

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

Пересекаются или скрещиваются данные прямые? Если пересекаются, найти точку пересечения.

Лекция 12. Примеры для подготовке к контрольной работе по векторной алгебре и аналитической геометрии

12. Примеры для подготовке к контрольной работе по векторной алгебре и аналитической геометрии.

12.4.1. Найти косинус угла между векторами $\bar{a} = \bar{\mathbf{i}} + 2\bar{\mathbf{j}} - 2\bar{\mathbf{k}}$ и $\bar{b} = 2\bar{\mathbf{i}} + 2\bar{\mathbf{j}} + \bar{\mathbf{k}}$.

$$◀\cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} =$$

$$= \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 2 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{4}{9}.▶$$

Ответ: $\cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = \frac{4}{9}$.

12.4.2. Найти проекцию вектора $\bar{\mathbf{a}} = 3\bar{\mathbf{i}} + 4\bar{\mathbf{j}} + 2\bar{\mathbf{k}}$ на вектор $\bar{\mathbf{b}} = -4\bar{\mathbf{i}} + 2\bar{\mathbf{j}} + \bar{\mathbf{k}}$.

$$◀\text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}} = \frac{\bar{\mathbf{a}}\cdot\bar{\mathbf{b}}}{|\bar{\mathbf{b}}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} =$$

$$= \frac{3\cdot(-4) + 4\cdot 2 + 2\cdot 1}{\sqrt{(-4)^2+2^2+1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{21}}.▶$$

Ответ: $\text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}} = -\frac{2}{\sqrt{21}}$.

12.4.3. При каком значении m векторы $\bar{\mathbf{a}} = (4, 4, m)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (-4, 2, -4)$ перпендикулярны?

◀Для ненулевых $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{a}}\cdot\bar{\mathbf{b}} = 0$, $\Leftrightarrow \bar{\mathbf{a}}\perp\bar{\mathbf{b}}$, т.е. $a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = 0$ $\Rightarrow 4\cdot(-4) + 4\cdot 2 + m\cdot(-4) = 0 \;\Rightarrow\; -16 + 8 - 4m = 0 \;\Rightarrow\; m = -2$.▶

Ответ: $m = -2$.

12.4.4. При каких значениях y и z векторы $\bar{\mathbf{a}} = (2, y, 2)$ и $\bar{\mathbf{b}} = (2, 4, z)$ коллинеарны?

◀В соответствии с необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является пропорциональность их координат. Следовательно

$$\frac{2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{2}{z} \;\Rightarrow\; y = 4,\; z = 2.▶$$

Ответ: $y = 4$, $z = 2$.

12.4.5. Известны проекции двухмерных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ на оси координат: $a_x = 4$, $a_y = 2$, $b_x = 3$, $b_y = 2$. Найти проекции вектора $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + 3\bar{\mathbf{b}}$.

◀Координаты вектора $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + 3\bar{\mathbf{b}}$ равны $c_x = a_x + 3b_x$, $c_y = a_y + 3b_y$, $\Rightarrow$ $c_x = 4 + 3\cdot 3 = 13$; $c_y = 2 + 3\cdot 2 = 8$.▶

Ответ: $c_x = 13$, $c_y = 8$.

12.4.6. Известны проекции двухмерных векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ на оси координат: $a_x = 2$, $a_y = 2$, $c_x = -4$, $c_y = 20$. Найти проекции вектора $\overline{\mathbf{b}}$, определяемые из равенства $\overline{\mathbf{c}} = 4\overline{\mathbf{a}} - 3\overline{\mathbf{b}}$.

◀Решая векторное уравнение $\overline{\mathbf{c}} = 4\overline{\mathbf{a}} - 3\overline{\mathbf{b}}$ относительно неизвестного вектора $\overline{\mathbf{b}}$, определяем его проекции на оси координат:

$$\overline{\mathbf{c}} = 4\overline{\mathbf{a}} - 3\overline{\mathbf{b}} \Leftrightarrow 3\overline{\mathbf{b}} = 4\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{c}} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{b}} = \frac{4}{3}\overline{\mathbf{a}} - \frac{1}{3}\overline{\mathbf{c}}.$$

Далее, как в задаче 12.4.5: $b_x = \frac{4}{3}a_x - \frac{1}{3}c_x = \frac{4}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot (-4) = 4$;
$b_y = \frac{4}{3}a_y - \frac{1}{3}c_y = \frac{4}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 20 = -4$. ▶

Ответ: $b_x = 4$, $b_y = -4$.

12.4.7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}} = (1; 4; 1)$ и $\overline{\mathbf{b}} = (2; -4; -2)$.

◀$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} \overline{\mathbf{i}} & \overline{\mathbf{j}} & \overline{\mathbf{k}} \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= \overline{\mathbf{i}}(4 \cdot (-2) - (-4) \cdot 1) - \overline{\mathbf{j}}(1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2) + \overline{\mathbf{k}}(1 \cdot (-4) - 4 \cdot 2) =$$
$$= -4\overline{\mathbf{i}} + 4\overline{\mathbf{j}} - 12\overline{\mathbf{k}}; \Rightarrow S = |\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-12)^2} =$$
$$= 4\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2} = 4\sqrt{11}.$$ ▶

Ответ: $S = 4\sqrt{11}$.

12.4.8. Точки $A(5; 1; 2)$, $B(1; 2; 6)$, $C(1; 4; 6)$, $D(5; 5; 2)$ служат вершинами трапеции $ABCD$. Найти векторы $\overline{DB}$ и $\overline{BM}$, где M — середина стороны CD.

◀$\overline{DB} = (1 - 5)\overline{\mathbf{i}} + (2 - 5)\overline{\mathbf{j}} + (6 - 2)\overline{\mathbf{k}} = -4\overline{\mathbf{i}} - 3\overline{\mathbf{j}} + 4\overline{\mathbf{k}}$.

Координаты середины отрезка CD находятся как среднее арифметическое координат точек C и D:
$M\left(\frac{(1+5)}{2}; \frac{(4+5)}{2}; \frac{(6+2)}{2}\right)$, т.е. $M(3; 4,5; 4)$. Таким образом
$\overline{BM} = (3 - 1)\overline{\mathbf{i}} + (4,5 - 2)\overline{\mathbf{j}} + (4 - 6)\overline{\mathbf{k}} = 2\overline{\mathbf{i}} + 2,5\overline{\mathbf{j}} - 2\overline{\mathbf{k}}$.▶

Ответ: $\overline{DB} = -4\overline{\mathbf{i}} - 3\overline{\mathbf{j}} + 4\overline{\mathbf{k}}$, $\overline{BM} = 2\overline{\mathbf{i}} + 2,5\overline{\mathbf{j}} - 2\overline{\mathbf{k}}$.

12.4.9. Найти угол между векторами $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, если $|\overline{\mathbf{a}}| = 2$; $\left|\overline{\mathbf{b}}\right| = 3$ и $\left|\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}\right| = 1$.

◀$\left|\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}\right|^2 = \left(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}\right)^2 = \overline{\mathbf{a}}^2 + 2\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{b}}^2 = |\overline{\mathbf{a}}|^2 + 2\,|\overline{\mathbf{a}}| \cdot \left|\overline{\mathbf{b}}\right| \cos\left(\widehat{\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}}\right) + \left|\overline{\mathbf{b}}\right|^2$, откуда $2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\left(\widehat{\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}}\right) + 3^2 = 1$ и $\cos\left(\widehat{\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}}\right) = -1$, т.е. $\left(\widehat{\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}}\right) = 180^o$. ▶

Ответ: 180^o

12.4.10. Вычислить модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{i}} - \overline{\mathbf{j}} + \overline{\mathbf{k}}$.

◀$|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}. \Rightarrow$
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$; $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.▶

Ответ: $|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{3}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$; $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

12.4.11. Найти $\overline{\mathbf{a}}(\overline{\mathbf{c}} - \overline{\mathbf{b}})$, где $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{i}} + 2\overline{\mathbf{j}} - 3\overline{\mathbf{k}}$, $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{i}} - \overline{\mathbf{j}} - \overline{\mathbf{k}}$, $\overline{\mathbf{c}} = -2\overline{\mathbf{i}} - \overline{\mathbf{j}} - 4\overline{\mathbf{k}}$.

◀$\overline{\mathbf{c}} - \overline{\mathbf{b}} = -2\overline{\mathbf{i}} - \overline{\mathbf{j}} - 4\overline{\mathbf{k}} - \overline{\mathbf{i}} + \overline{\mathbf{j}} + \overline{\mathbf{k}} = -3\overline{\mathbf{i}} - 3\overline{\mathbf{k}}$, поэтому
$\overline{\mathbf{a}}(\overline{\mathbf{c}} - \overline{\mathbf{b}}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) = 6$.▶

Ответ: 6.

12.4.12. Найти $[\overline{\mathbf{b}}, (\overline{\mathbf{c}} + \overline{\mathbf{a}})]$, где $\overline{\mathbf{a}} = 5\overline{\mathbf{i}} - 2\overline{\mathbf{j}} + 3\overline{\mathbf{k}}$, $\overline{\mathbf{b}} = -2\overline{\mathbf{i}} - 4\overline{\mathbf{j}} + \overline{\mathbf{k}}$, $\overline{\mathbf{c}} = 4\overline{\mathbf{i}} + \overline{\mathbf{j}} - 2\overline{\mathbf{k}}$.

◀$\overline{\mathbf{c}} + \overline{\mathbf{a}} = 9\overline{\mathbf{i}} - \overline{\mathbf{j}} + \overline{\mathbf{k}}$, поэтому

$$[\overline{\mathbf{b}}, (\overline{\mathbf{c}} + \overline{\mathbf{a}})] = \begin{vmatrix} \overline{\mathbf{i}} & \overline{\mathbf{j}} & \overline{\mathbf{k}} \\ -2 & -4 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{\mathbf{i}}(-4+1) - \overline{\mathbf{j}}(-2-9) + \overline{\mathbf{k}}(2+36) =$$

$= -3\overline{\mathbf{i}} + 11\overline{\mathbf{j}} + 38\overline{\mathbf{k}}$. ▶

Ответ: $-3\overline{\mathbf{i}} + 11\overline{\mathbf{j}} + 38\overline{\mathbf{k}}$.

12.4.13. Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин: $A(1; 2; -3)$, $B(2; 2; 3)$, $C(3; 2; -1)$.

◀$\overline{AB} = \overline{\mathbf{i}} + 6\overline{\mathbf{j}}$; $\overline{BC} = \overline{\mathbf{i}} - 4\overline{\mathbf{k}}$;
$[\overline{AB}, \overline{BC}] = \begin{vmatrix} \overline{\mathbf{i}} & \overline{\mathbf{j}} & \overline{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \overline{\mathbf{i}} \cdot 0 - \overline{\mathbf{j}} \cdot (-4-6) + \overline{\mathbf{k}} \cdot 0 = 10\overline{\mathbf{j}}$.▶
$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2} = 5$.

Ответ: $S_{ABC} == 5$.

12.4.14. Найти длину высоты параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, опущенной на грань ADA_1, если $A(5; 2; 2)$, $B(5; 2; 3)$, $D(7; 4; 2)$, $A_1(2; 2; 2)$.

◀Как видно из рисунка 44, $V_{ABDA_1} = S_{ADD_1A_1}h$. Объем параллелепипеда найдем как модуль смешанного произведения, а площадь параллелограмма $S_{ADD_1A_1}$ — как модуль векторного произведения векторов, на которых они построены. Найдем соответствующие векторы:

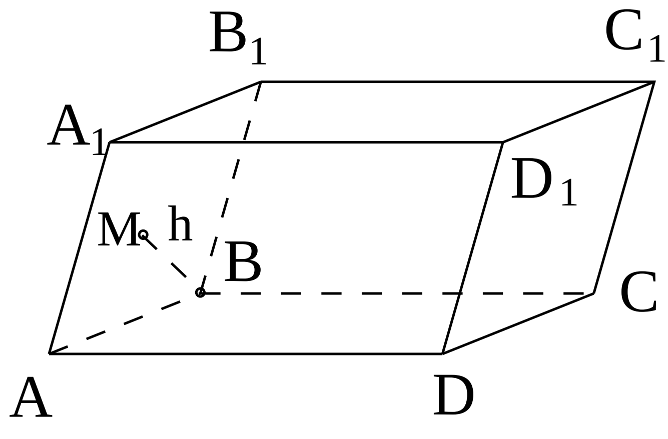

Рисунок 44

$\overline{AB} = \overline{\mathbf{k}}$; $\overline{AD} = 2\overline{\mathbf{i}} + 2\overline{\mathbf{j}}$; $\overline{AA_1} = -3\overline{\mathbf{i}}$;

$$\left(\overline{AB}\ \overline{AD}\ \overline{AA_1}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \left|\left(\overline{AB}\ \overline{AD}\ \overline{AA_1}\right)\right| = 6.$$

$$[\overline{AD}, \overline{AA_1}] = \begin{vmatrix} \overline{\mathbf{i}} & \overline{\mathbf{j}} & \overline{\mathbf{k}} \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overline{\mathbf{i}} \cdot 0 - \overline{\mathbf{j}} \cdot 0 + \overline{\mathbf{k}} \cdot (0+6) = 6\overline{\mathbf{k}};$$

$S_{ADD_1A_1} = \left|[\overline{AD}, \overline{AA_1}]\right| = 6.$

$6 = 6h \quad \Rightarrow \quad h = 1.$▶

Ответ: 1.

12.4.15. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-3; 2; 5)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{a}} = 4\overline{\mathbf{i}} + 2\overline{\mathbf{j}} - 3\overline{\mathbf{k}}$.

◀Используя уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с заданным нормальным вектором, получаем:

$4(x+3) + 2(y-2) - 3(z-5) = 0, \quad 4x + 2y - 3z + 23 = 0.$▶

Ответ: $4x + 2y - 3z + 23 = 0$.

12.4.16. Проверить принадлежат ли точки $A(1; 4; 2)$, $B(3; 7; 6)$, $C(-3; -2; -6)$ одной прямой. Если принадлежат, написать её канонические уравнения.

◀Напишем канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки, выбрав в качестве направляющего вектора $\overline{AB}$, а в качестве точки — A:

$$\overline{AB} = 2\overline{\mathbf{i}} + 3\overline{\mathbf{j}} + 4\overline{\mathbf{k}},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Проверим, принадлежит ли точка C этой прямой, подставив её координаты $\dfrac{-3-1}{2} = \dfrac{-2-4}{3} = \dfrac{-6-2}{4}$.

2-ой способ.

$\overline{AC} = -4\overline{\mathbf{i}} - 6\overline{\mathbf{j}} - 8\overline{\mathbf{k}} = -2\overline{AB} \ \Rightarrow$ эти три точки лежат на одной прямой. Пишем каноническое уравнение. ▶

Ответ: Точки A, B и C принадлежат прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

12.4.17. Написать параметрические и общие уравнения прямой:

$$l : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}.$$

◀Обозначив общее значение отношений t, получаем:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4} = t,$$

откуда получаем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -2 + 4t. \end{cases}$$

Для получения общих уравнений прямой выбираем любые два из канонических уравнений, например:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3}, \\ \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{4}; \end{cases}$$

или $\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0, \\ 4y - z - 10 = 0. \end{cases}$ ▶

Ответ:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -2 + 4t; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0, \\ 4y - z - 10 = 0. \end{cases}$$

12.4.18. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через начало координат параллельно вектору $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{i}} + 3\overline{\mathbf{j}} - 4\overline{\mathbf{k}}$.

◀Подставляя в канонические уравнения прямой координаты точки $(0; 0; 0)$ и вектора $\overline{\mathbf{a}}$, получаем:
$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-4}$.▶

Ответ: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-4}$.

12.4.19. Написать уравнение плоскости α, проходящей через точки $P(3; 1; 2)$ и $Q(2; 3; 0)$ параллельно прямой:

$$l : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}.$$

◀Плоскость α параллельна прямой l, следовательно её нормальный вектор $\overline{\mathbf{n}}_\alpha$ перпендикулярен направляющему вектору $\overline{\mathbf{s}}$ прямой l. В качестве нормального вектора искомой плоскости можем взять векторное произведение

вектора
$\overline{PQ} = \bar{\mathbf{i}} \cdot (2-3) + \bar{\mathbf{j}} \cdot (3-1) + \overline{\mathbf{k}} \cdot (0-2) = -\bar{\mathbf{i}} + 2\bar{\mathbf{j}} - 2\overline{\mathbf{k}}$
и направляющего вектора данной прямой l $\bar{\mathbf{s}} = -2\bar{\mathbf{i}} + \bar{\mathbf{j}} + 4\overline{\mathbf{k}}$.

Используя уравнение плоскости, проходящей через заданную точку P с известным нормальным вектором $\overline{\mathbf{n}}_\alpha = [\overline{PQ}, \overline{\mathbf{a}}]$, получим требуемое уравнение:

$$\overline{\mathbf{n}}_\alpha = [\overline{PQ}, \overline{\mathbf{a}}] = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \overline{\mathbf{k}} \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\bar{\mathbf{i}} + 8\bar{\mathbf{j}} + 3\overline{\mathbf{k}};$$

$\alpha : 10(x-3) + 8(y-1) + 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow 10x + 8y + 3z - 44 = 0.$▶

Ответ: α: $10x + 8y + 3z - 44 = 0$.

12.4.20. Найти ортогональную проекцию P' точки $P(1; -1; 0)$ на прямую:

$$l : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{1}.$$

◀Для того, чтобы найти ортогональную проекцию точки P на прямую, найдем уравнение плоскости, проходящей через эту точку перпендикулярно данной прямой, и определим точку пересечения этой прямой и плоскости.
В качестве нормального вектора плоскости берем направляющий вектор прямой $\overline{\mathbf{a}} = 3\bar{\mathbf{i}} + 4\bar{\mathbf{j}} + \overline{\mathbf{k}}$.
Получаем следующее уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1; -1; 0)$ с заданным нормальным вектором:
$3(x-1) + 4(y+1) + 1(z) = 0$, т.е. $3x + 4y + z + 1 = 0$.
Для определения координат точки пересечения заданной прямой с этой плоскостью запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{1} = t,$$

откуда

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 4t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, получаем:
$3(2+3t) + 4(4t) + (-1+t) + 1 = 0$,
откуда $t = -3/13$,

$$\begin{cases} x = 2 - 9/13 = 17/13, \\ y = -12/13, \\ z = -1 - 3/13 = -16/13. \end{cases}$$

Полученная точка пересечения и будет ортогональной проекцией точки P на прямую.▶

Ответ: $P'(17/13; -12/13; -16/13)$.

12.5. Примерный вариант контрольной работы по линейной алгебре и аналитической геометрии 2020-21года.

Вариант 3.

- 1. Даны точки $A(2;-1;1), B(-2;2;5), C(3;2;1), D(1;2;-1)$. Найти:
  1) величину внутреннего угла при вершине A в треугольнике ABC;
  2) площадь треугольника ABC;
  3) длину высоты AH треугольника ABC;
  4) объем тетраэдра $DABC$.

- 2. Даны векторы $\overline{\mathbf{m}}$ и $\overline{\mathbf{n}}$, такие что $|\overline{\mathbf{m}}| = 5$, $|\overline{\mathbf{n}}| = 2$, $\angle(\overline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{n}}) = 2\pi/3$. Найти проекцию вектора $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{m}} + \overline{\mathbf{n}}$ на вектор $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{m}} - 4\overline{\mathbf{n}}$.

- 3. В треугольнике с вершинами $A(-1;4), B(9;6), C(-5;4)$. Найти: 1) общее уравнение высоты, проведённой из вершины C. 2) каноническое уравнение медианы, проведённой из вершины B.

- 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-4;3;-8)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$

- 5. Найти угол между плоскостью $2x + y + z - 5 = 0$ и прямой $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z-1}{5}$.

- 6. Найти точку, симметричную точке $A(-1;-1;2)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$.

- 7*. Найти расстояние между прямыми:
  $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+4}{6}$ и $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$

12.6. Решение примерного варианта.

1. *Даны точки* $A(2;-1;1), B(-2;2;5), C(3;2;1), D(1;2;-1)$. *Найти:*
1) величину внутреннего угла при вершине A в треугольнике ABC;
2) площадь треугольника ABC;
3) длину высоты AH треугольника ABC;
4) объем тетраэдра $DABC$.

◀1) Найдём вектора выходящие из точки A:
$\overline{AB} = (-2-2; 2-(-1); 5-1) = (-4;3;4)$,

$\overline{AC} = (3-2; 2+1; 1-1) = (1;3;0)$,
$\overline{AD} = (1-2; 2+1; -1-1) = (-1;3;-2)$.

Для вычисления угла A применяем формулу:
$\cos(\angle A) = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \dfrac{-4\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 0}{\sqrt{((-4)^2+3^2+4^2)\cdot(1^2+3^2+0^2)}} =$
$= \dfrac{5}{\sqrt{41\cdot 10}} = \dfrac{5}{\sqrt{410}}$.▶

Ответ: $\angle A = \arccos\left(\dfrac{5}{\sqrt{410}}\right)$.

◀2) Для вычисления площади треугольника ABC, найдём векторное произведение двух векторов $\overline{\mathbf{a}} = \overline{AB}\times\overline{AC}$. Согласно определению векторного произведения, модуль вектора $\overline{\mathbf{a}}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.
Следовательно, $S_{\triangle ABC} = |\overline{\mathbf{a}}|/2$.

$$\overline{\mathbf{a}} = [\overline{AB},\overline{AC}] = \begin{vmatrix} \overline{\mathbf{i}} & \overline{\mathbf{j}} & \overline{\mathbf{k}} \\ -4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \overline{\mathbf{i}}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 0\end{vmatrix} - \overline{\mathbf{j}}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 0\end{vmatrix} + \overline{\mathbf{k}}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 3\end{vmatrix} =$$
$$= -12\overline{\mathbf{i}} + 4\overline{\mathbf{j}} - 15\overline{\mathbf{k}}.$$

Получаем:
$S_{\triangle ABC} = |\overline{\mathbf{a}}|/2 = 0{,}5\sqrt{(-12)^2+4^2+(-15)^2} = 0{,}5\sqrt{385}$.▶

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 0{,}5\sqrt{385}$.

◀3) Найдём длину высоты AH треугольника ABC. Для этого применяем формулу из школьной геометрии:

$$S_{\triangle ABC} = 0{,}5|AH|\cdot|BC| \Rightarrow AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|BC|}.$$

Найдём вектор $\overline{BC} = (3-(-2); 2-2; 1-5) = (5;0;-4)$. $\Rightarrow$
$|\overline{BC}| = \sqrt{5^2+(-4)^2} = \sqrt{41} \;\Rightarrow\; AH = \dfrac{\sqrt{385}}{\sqrt{41}}$.▶

Ответ: $AH = \dfrac{\sqrt{385}}{\sqrt{41}}$.

◀4) Объём тетраэдра $ABCD$ вычисляется по формуле:
$V = \dfrac{1}{6}\left|([\overline{AB},\overline{AC}])\cdot\overline{AD}\right| = \dfrac{1}{6}\left|\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{AD}\right| =$
$= \dfrac{1}{6}\left|(-12)\cdot(-1)+4\cdot 3+(-15)\cdot(-2)\right| =$
$= \dfrac{1}{6}(12+12+30) = 9.$

▶

Ответ: $V = 9$.

2. *Даны два базисных векторы* $\overline{\mathbf{m}}$ *и* $\overline{\mathbf{n}}$, *такие что* $|\overline{\mathbf{m}}| = 5$, $|\overline{\mathbf{n}}| = 2$, $\angle(\overline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{n}}) = 2\pi/3$. *Найти проекцию вектора* $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{m}} + \overline{\mathbf{n}}$ *на вектор* $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{m}} - 4\overline{\mathbf{n}}$ *и площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$.

◀$\text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\,\overline{\mathbf{a}} = |\overline{\mathbf{a}}|\cos\alpha = |\overline{\mathbf{a}}|\dfrac{\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{b}}}{|\overline{\mathbf{a}}|\cdot|\overline{\mathbf{b}}|} = \dfrac{\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{b}}}{|\overline{\mathbf{b}}|}$.

$$\begin{aligned}&\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{b}} = (2\overline{\mathbf{m}}+\overline{\mathbf{n}})\cdot(\overline{\mathbf{m}}-4\overline{\mathbf{n}}) = 2\overline{\mathbf{m}}\cdot\overline{\mathbf{m}} - 8\overline{\mathbf{m}}\cdot\overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{m}}\cdot\overline{\mathbf{n}} - 4\overline{\mathbf{n}}\cdot\overline{\mathbf{n}} =\\ &= 2\overline{\mathbf{m}}^2 - 7\overline{\mathbf{m}}\cdot\overline{\mathbf{n}} - 4\overline{\mathbf{n}}^2.\end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{m}}\cdot\overline{\mathbf{n}} = |\overline{\mathbf{m}}|\cdot|\overline{\mathbf{n}}|\cdot\cos(\widehat{\overline{\mathbf{m}}\overline{\mathbf{n}}}) = 5\cdot 2\cdot(-0{,}5) = -5.$$

$$\overline{\mathbf{a}}\cdot\overline{\mathbf{b}} = 2\overline{\mathbf{m}}^2 - 7\overline{\mathbf{m}}\cdot\overline{\mathbf{n}} - 4\overline{\mathbf{n}}^2 = 50 - 7\cdot(-5) - 16 = 69.$$

$$\overline{\mathbf{b}}^2 = (\overline{\mathbf{m}} - 4\overline{\mathbf{n}})^2 = \overline{\mathbf{m}}^2 - 8\overline{\mathbf{m}}\cdot\overline{\mathbf{n}} + 16\overline{\mathbf{n}}^2 = 25 - 8\cdot(-5) + 64 = 129.$$

$$|\overline{\mathbf{b}}| = \sqrt{\overline{\mathbf{b}}^2} = \sqrt{129}.$$

$\text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\,\overline{\mathbf{a}} = \dfrac{69}{\sqrt{129}}$.

Найдём площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. $\overline{\mathbf{a}}\times\overline{\mathbf{b}} = (2\overline{\mathbf{m}}+\overline{\mathbf{n}})\times(\overline{\mathbf{m}}-4\overline{\mathbf{n}}) = 2\overline{\mathbf{m}}\times\overline{\mathbf{m}} - 8\overline{\mathbf{m}}\times\overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{n}}\times\overline{\mathbf{m}} - 4\overline{\mathbf{n}}\times\overline{\mathbf{n}}$.
С учётом того, что $\overline{\mathbf{m}}\times\overline{\mathbf{m}} = \overline{\mathbf{n}}\times\overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{0}}$ и $\overline{\mathbf{n}}\times\overline{\mathbf{m}} = -\overline{\mathbf{m}}\times\overline{\mathbf{n}}$, получаем:
$\overline{\mathbf{a}}\times\overline{\mathbf{b}} = -9\overline{\mathbf{m}}\times\overline{\mathbf{n}}$.

Следовательно,

$S = |\overline{\mathbf{a}}\times\overline{\mathbf{b}}| = |-9|\cdot|\overline{\mathbf{m}}|\cdot|\overline{\mathbf{n}}|\cdot\sin(2\pi/3) = 9\cdot 5\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 45\sqrt{3}$.▶

Ответ: $\text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\,\overline{\mathbf{a}} = \dfrac{69}{\sqrt{129}}$. $S = 45\sqrt{3}$.

3. *В треугольнике с вершинами* $A(-1;4), B(9;6), C(-5;4)$. *Найти:*

1) общее уравнение высоты, проведённой из вершины C.

2) Каноническое уравнение медианы, проведённой из вершины B.

◀1) Используем уравнение прямой проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ с заданным нормальным вектором $\overline{\mathbf{n}}(A;B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{12.1}$$

В качестве нормального вектора $\overline{\mathbf{n}}$, выберем вектор коллинеарный вектору $\overline{AB} = (10;2)$. $\overline{\mathbf{n}} = 0{,}5\overline{AB} = (5;1)$. Искомая прямая проходит через точку $C(-5;4)$. Подставляя координаты нормального вектора $\overline{\mathbf{n}}(5;1)$ и координаты точки $C(-5;4)$ в уравнение (12.1) получаем общее уравнение прямой проходящей через точку C перпендикулярно стороне AB:
$5\cdot(x+5) + 1\cdot(y-4) = 0 \;\Rightarrow\; 5x + y + 21 = 0$.▶

Ответ: $5x + y + 21 = 0$.

◀2) Найдём координаты точки $M(x_M; y_M)$ являющейся средней точки отрезка AC.

$$x_M = (x_A + x_C)/2 = (-1 - 5)/2 = -3;\ y_M = (y_A + y_C)/2 = (4 + 4)/2 = 4;$$

Найдём направляющий вектор медианы BM.
$\overline{BM} = (-3 - 9; 4 - 6) = (-12; -2)$.
В качестве направляющего вектора прямой, содержащей медиану BM выберем вектор $\overline{\mathbf{s}} = -0{,}5\overline{BM} = (6; 1)$.
Далее, в каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ с направляющим вектором $\overline{\mathbf{s}}(m; n)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{12.2}$$

подставляем координаты точки $B(9; 6)$ и координаты полученного направляющего вектора $\overline{\mathbf{s}}(6; 1)$ и получаем искомое уравнение прямой, содержащей медиану BM.
$\dfrac{x - 9}{6} = \dfrac{y - 6}{1}$.▶

Ответ: $\dfrac{x - 9}{6} = \dfrac{y - 6}{1}$.

4. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $A(-4; 3; -8)$ *перпендикулярно прямой* $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$

▶В качестве нормального вектора $\overline{\mathbf{n}}$ искомой плоскости, обозначим её α, возьмём направляющий вектор $\overline{\mathbf{s}}$ заданной прямой l. Очевидно, что прямая l лежит в обеих плоскостях, образующих эту прямую. Следовательно, она перпендикулярна обоим нормальным векторам:
$\overline{\mathbf{n}}_1 = (1; -1; 2)$ – нормальный вектор первой плоскости и
$\overline{\mathbf{n}}_2 = (2; 1; -1)$ – нормальный вектор второй плоскости.

Из определения векторного произведения, вектор $\overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{n}}_1 \times \overline{\mathbf{n}}_2$ перпендикулярен и вектору $\overline{\mathbf{n}}_1$ и вектору $\overline{\mathbf{n}}_2$.

$$\overline{\mathbf{s}} = [\overline{\mathbf{n}}_1, \overline{\mathbf{n}}_2] = \begin{vmatrix} \overline{\mathbf{i}} & \overline{\mathbf{j}} & \overline{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \overline{\mathbf{i}} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \overline{\mathbf{j}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \overline{\mathbf{k}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -\overline{\mathbf{i}} + 5\overline{\mathbf{j}} + 3\overline{\mathbf{k}}.$$

В качестве нормального вектора искомой плоскости, возьмём вектор $\overline{\mathbf{s}}$.
$\overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{s}} \ \Rightarrow\ -1(x + 4) + 5(y - 3) + 3(z + 8) = 0 \Rightarrow \alpha : -x + 5y + 3z + 5 = 0$.▶

Ответ: $-x + 5y + 3z + 5 = 0$.

5. *Найти угол между плоскостью* $\alpha :\ 2x + y + z - 5 = 0$ *и прямой* $l : \dfrac{x - 5}{3} = \dfrac{y + 2}{-6} = \dfrac{z - 1}{5}$.

► Выписав координаты направляющего вектора прямой $\overline{\mathbf{s}} = (3; -6; 5)$ и нормального вектора плоскости $\overline{\mathbf{n}} = (2; 1; 1)$, в соответствии с формулой (11.19)

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

имеем:

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{\mathbf{s}} \cdot \overline{\mathbf{n}}|}{|\overline{\mathbf{s}}||\overline{\mathbf{n}}|} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) + 1 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 5^2}} =$$
$$= \frac{|6 - 6 + 5|}{\sqrt{6}\sqrt{9 + 36 + 25}} = \frac{5}{\sqrt{420}}.$$

$\varphi = \arcsin\left(\dfrac{5}{\sqrt{420}}\right)$.►

Ответ: $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{5}{\sqrt{420}}\right)$.

6. *Найти точку, симметричную точке* $A(-1; -1; 2)$ *относительно прямой* $l: \ \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$.

►Найдём ортогональную проекцию точки $A(-1; -1; 2)$ на прямую l.

Для этого найдем уравнение плоскости α, проходящей через эту точку перпендикулярно данной прямой, и определим точку пересечения этой прямой и плоскости.

В качестве нормального вектора плоскости берем вектор $\overline{\mathbf{n}}$ коллинеарный направляющему вектору заданной прямой

$\overline{\mathbf{n}} = -0{,}5\overline{\mathbf{s}} = (2; -1; 1)$.

Получаем следующее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; -1; 2)$ с заданным нормальным вектором $\overline{\mathbf{n}}$:

$2(x + 1) - 1(y + 1) + 1(z - 2) = 0$, т.е. $2x - y + z - 1 = 0$.

Для определения координат точки M пересечения заданной прямой с этой плоскостью, решим систему четырёх уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -1 - 2t, \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Первые три уравнения представляют параметрическое уравнение прямой l, а четвёртое — уравнение ортогональной к этой прямой плоскости α. Подставляя первые три уравнения в четвёртое, получаем:

$$2 - 8t - 2 - 2t - 1 - 2t - 1 = 0 \ \Rightarrow \ -12t = 2 \ \Rightarrow \ t = -1/6.$$

Из параметрического уравнения прямой, получаем:

$x = 1-4\cdot(-1/6) = 5/3;\ y = 2+2\cdot(-1/6) = 5/3;\ z = -1-2\cdot(-1/6) = -2/3.$

Итак, мы получили координаты проекции точки A на прямую l: $M(5/3; 5/3; -2/3)$.

Найдём теперь точку P, симметричную точке $A(-1; -1; 2)$ относительно прямой l.

Воспользуемся формулой деления отрезка пополам

$$x_M = (x_A + x_P)/2; \quad y_M = (y_A + y_P)/2; \quad z_M = (z_A + z_P)/2.$$

Координаты точки A и M известны, находим координаты точки P:

$$x_P = 2x_M - x_A \quad y_P = 2y_M - y_A); \quad z_P = 2z_M - z_A.$$

$$x_P = 10/3 + 1 = 13/3; \quad y_P = 10/3 + 1 = 13/3; \quad z_P = -4/3 - 2 = -10/3.$$

Итак, мы нашли координаты точки P, которая симметрична точке $A(-1; -1; 2)$ относительно прямой l: $P(13/3; 13/3; -10/3)$.▶

Ответ: $P(13/3; 13/3; -10/3)$.

7^*. *Найти расстояние между прямыми:*

$l_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+4}{6}$ *и* $l_2 : \begin{cases} x = -2, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$

◀Первая прямая содержит точку $M_1(0; 1; -4)$ и имеет направляющий вектор $\bar{\mathbf{s}}_1(1; -2; 6)$, а вторая прямая проходит через точку $M_2(-2; 1; 4)$ и имеет направляющий вектор $\bar{\mathbf{s}}_2 = (0; 2; -3)$.

Как показано в предыдущей лекции, расстояние h между ними равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$, $\bar{\mathbf{s}}_1$, $\bar{\mathbf{s}}_2$, т.е. расстоянию между плоскостями (основаниями параллелепипеда), параллельными этим прямым и содержащими их (рис. 45).

Эту высота определяется из формулы для объёма параллелепипеда: $V = h \cdot S_{\text{осн}}$, где:

$$V = |(\overline{M_1M_2}\,\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2)|, \quad S_{\text{осн}} = |[\bar{\mathbf{s}}_1, \bar{\mathbf{s}}_2]|.$$

$$\overline{M_1M_2} = (-2-0; 1-1; 4-(4)) = (-2; 0; 8).$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

$$h = \frac{|(\overline{M_1M_2}\,\bar{\mathbf{s}}_1\bar{\mathbf{s}}_2)|}{|[\bar{\mathbf{s}}_1, \bar{\mathbf{s}}_2]|}.$$

$$[\bar{\mathbf{s}}_1, \bar{\mathbf{s}}_2] = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \bar{\mathbf{i}}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \bar{\mathbf{j}}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \bar{\mathbf{k}}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\bar{\mathbf{i}} - 3\bar{\mathbf{i}} - 2\bar{\mathbf{i}}.$$

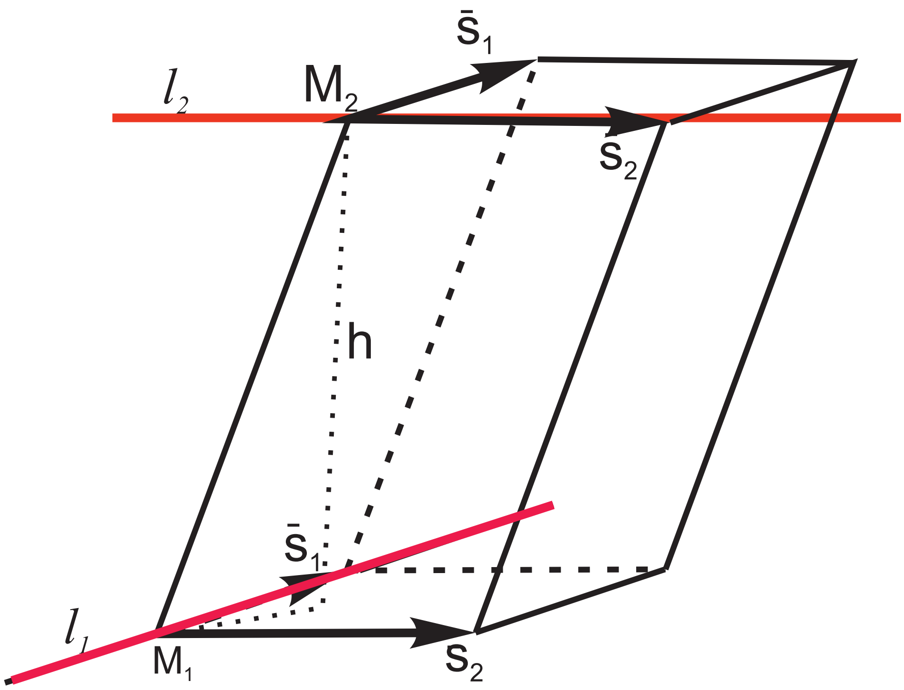

Рисунок 45. *Расстояние между скрещивающимися прямыми*

$|[\overline{\mathbf{s}}_1, \overline{\mathbf{s}}_2]| = \sqrt{36+9+4} = 7.$

Т.к. векторное произведение $\overline{\mathbf{s}}_1 \times \overline{\mathbf{s}}_2$ уже найдено, поэтому смешанное произведение $(\overline{M_1M_2}\, \overline{\mathbf{s}}_1\overline{\mathbf{s}}_2)$ можно найти используя его определение:

$$(\overline{M_1M_2}\, \overline{\mathbf{s}}_1\overline{\mathbf{s}}_2) = \overline{M_1M_2} \cdot ([\overline{\mathbf{s}}_1, \overline{\mathbf{s}}_2]) = -2 \cdot 6 + 8 \cdot (-2) = -12 - 16 = -28.$$

$$h = \frac{|-28|}{7} = 4. \blacktriangleright$$

Ответ: $h = 4$.

Самостоятельная работа

Вариант 2.

- 1. Даны точки $A(0;-4;1), B(-3;2;-1), C(5;-7;9), D(4;7;0)$. Найти:
  1) величину внешнего угла при вершине A в треугольнике ABC;
  2) длину медианы AM треугольника ABC;
  3) площадь треугольника ABC;
  4) высоту DH тетраэдра $DABC$.

- 2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{m}} = 3\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{q}}$ и $\overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{p}} - 2\overline{\mathbf{q}}$, если $|\overline{\mathbf{p}}| = 1, |\overline{\mathbf{q}}| = 4$,
  $\angle(\overline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{n}}) = 5\pi/6$.

- 3. Даны вершины треугольника: $A(-4;4), B(8;2), C(3;8)$. Составить уравнения:
  1) каноническое уравнение средней линии параллельной стороне AC;
  2) общее уравнение высоты, проведённой из вершины A.

- 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;3;2)$ параллельно плоскостям $x+2y+z-4=0$ и $2x+4y+2z+5=0$.

- 5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;8;-9)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-2y-z+1=0, \\ 3x-2y-2z=0. \end{cases}$

- 6. Найти точку, симметричную точке $A(1;0;-2)$ относительно плоскости $3x-y+z+10=0$.

- 7*. Найти расстояние между прямыми:
  $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z+1}{4}$ и $\begin{cases} x=-2-2t, \\ y=1+2t, \\ z=2+3t. \end{cases}$

Пример 12.1. *Напишите уравнения прямой, проходящей через точку* $M(1,-1,1)$ *параллельно плоскостям* $\alpha_1: \quad 2x-y+z-1=0$ *и*
$\alpha_2: \quad x-z = 0$.

Пример 12.2. *Напишите уравнения прямой, проходящей через* $M(0;1;2)$ *перпендикулярно векторам* $\overline{\mathbf{a}} = (1;2;-3)$, $\overline{\mathbf{b}} = (-3;-2;1)$.

Пример 12.3. *Определите направляющие косинусы прямой:*

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$$

Пример 12.4. *Найдите координаты проекции точки* $M(2,1,3)$ *на плоскость* $x+2y-z+5=0$.

Пример 12.5. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую* $l:$ $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ *перпендикулярно плоскости* $\alpha: \quad x+4y-3z+1=0.$