РТУ МИРЭА

МЕТОДИЧКА ДЛЯ ЭКЗАМЕНА ПО ДИСЦИПЛИНЕ: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.

Made up: Утенков Юрий

МИРЭА 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Перед тем, как начать решать задания, необходимо разобраться с некоторыми базовыми понятиями, их существует всего несколько:

1.1. Определение вероятности.

Вероятность появления события А (или любая другая буква, пофиг) в каком-то испытании/испытаниях лежит в диапазоне: $0 \leq P(A) \leq 1$, где 0 означает, что событие А никогда не появится в ходе испытания/испытаний, 1 же означает, что событие А произойдёт обязательно, 100%.

При вычислении вероятности важно отметить следующее:

I. Если появляется союз “ИЛИ”, вероятнее всего нужно складывать вероятности, да-да, прям как на матлоге с БА. Т.е. союз “ИЛИ” показывает, что события **необязательно должны произойти одновременно**.

II. Если появляется союз “И”, вероятнее всего нужно будет перемножать события друг-с-другом, т.е. умножение говорит, что **события должны произойти одновременно**.

1.2. Вероятность противоположного события.

Может оказаться так, что вычислять вероятность события А довольно трудоёмко, и тогда можно попробовать найти противоположную событию А вероятность, записывается она так: $P(\bar{A})$, а находится так: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

1.3. Сочетания.

Сочетания довольно часто будут встречаться на экзамене, и простое объяснение сочетаниям я бы привёл такое: Если имеется к примеру 7 элементов всего, и нужно из этих 7 элементов выбрать скажем 3 элемента на рандом БЕЗ ПОРЯДКА СЛЕДОВАНИЯ, т.е. если из трёх элементов выбрано скажем (1, 2, 3), то это <u>тоже самое</u>, что (3, 2, 1), то выражается так:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 35$$

Т.е. есть 35 разных способов выбрать из 7 элементов 3 элемента без учёта порядка, это, кстати, как раз 3! = 6, который находится в знаменателе (читается, кстати, такая запись, как: *сочетания из семи по три*).

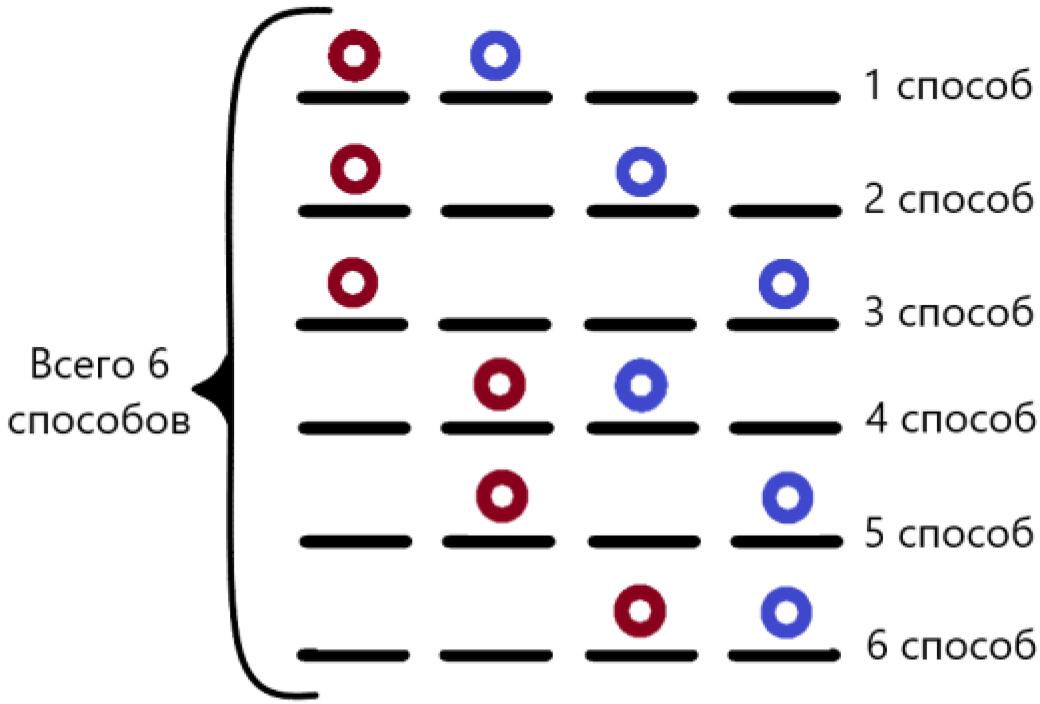
Или в более общем случае:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Например, решим простую задачу для понимания сочетаний: *Задача:* В урне имеется 4 шара, из урны наугад вынимают 2 шара, сколько существует различных способов достать эти шары?

Для решения можно просто подставить значения в формулу: $C_4^2 = 6$, и это и будет готовый ответ, но ведь желательно ещё понять, почему именно так, для этого я постараюсь сделать это наглядно.

Всего у нас имеется 4 шара (поэтому на рисунке отмечено 4 горизонтальные чёрточки), а достать нужно только 2 шара из четырёх. На рисунке ниже я пометил первый нужный нам шар красным цветом, а второй нужный шар синеватым цветом, как можно посмотреть на рисунке, если сравнивать по каждой строке, то не найдётся одинакового расположения элементов в позициях (от первой позиции до четвёртой), все элементы уникально расположены. Отсюда следует, что сочетания показывают все возможные разные способы достать 2 шара из 4 возможных, или в общем случае: “Сколько есть разных способов достать k элементов из n возможных?”.



1.4. Размещения без повторений.

Для понимания, что такое размещения, нужно понять, что такое сочетания. Для сочетаний нам без разницы какой у элементов будет порядок в искомой выборке, мы ищем только уникальное “расположение” элементов, это мы выяснили выше, а <u>для размещений порядок учитывается, в этом основное отличие</u>.

Формула для количества размещений из n по k элементов имеет вид:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Вернёмся к <u>предыдущей задаче</u>, только немного перефразированной, чтобы понять, что такое размещения.

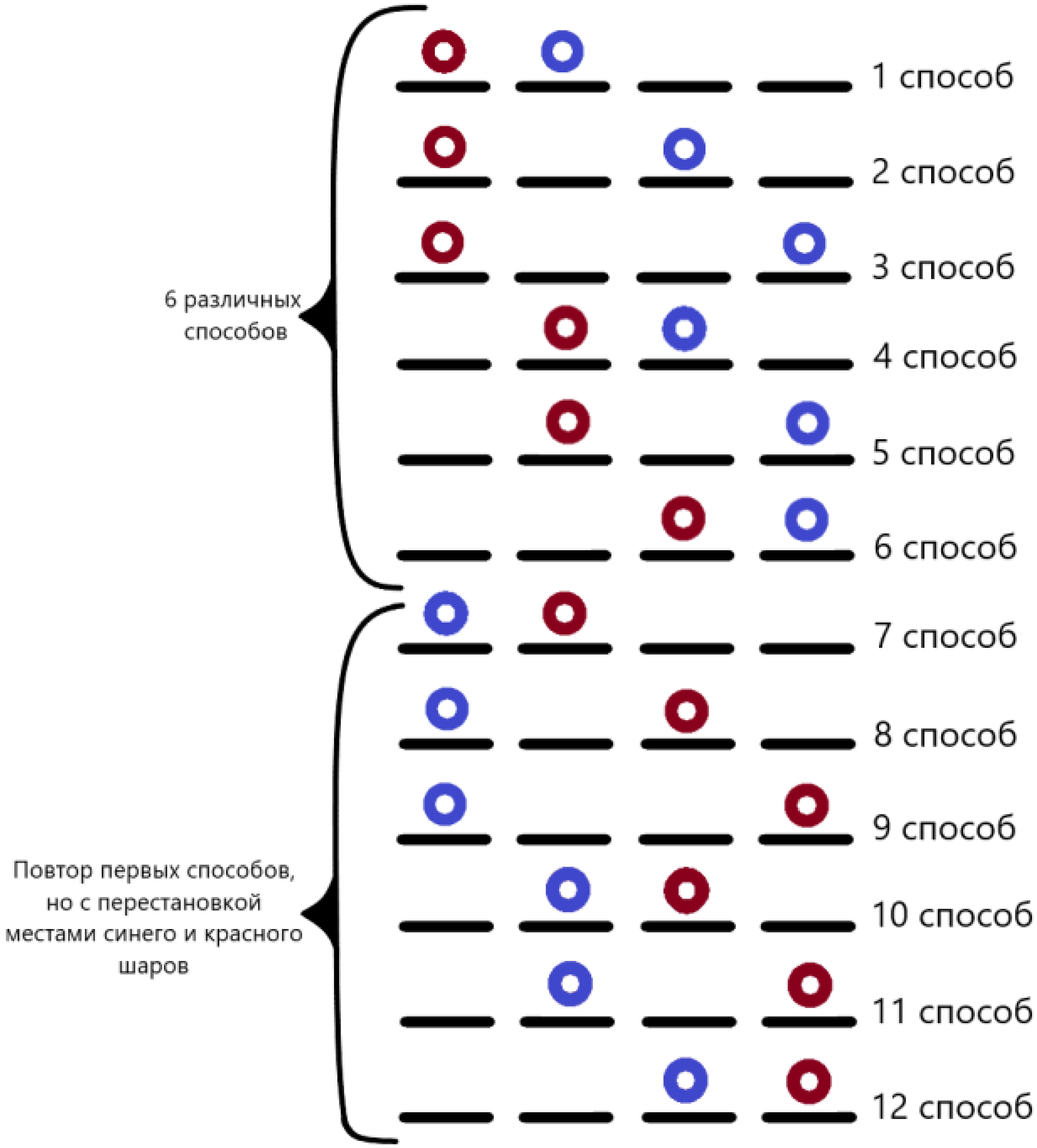
Задача: В урне имеется 4 шара, из урны наугад вынимают 2 шара, сколько существует всего способов достать эти шары?

В данной задаче уже требуется найти все возможные варианты достать 2 шара из 4. Для этого я опять юзану графическое представление.

На рисунке видно, что получилось в два раза больше элементов, и это неудивительно, т.к. выбрать нужно два шара, соответственно перестановок будет в

2! больше (исходя из формулы сочетаний). Если бы нужно быть взять 3 шара из 4, то число размещений увеличилось бы в 3! = 6. Отсюда следует ключевое отличие, что <u>размещения учитывают порядок элементов в выборке!</u> В нашем случае мы считаем, что множества A = {красный, синий} ≠ B = {синий, красный}.

Исходя из всего этого, ответ на задачу: $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$.



1.5. Размещения с повторениями.

Размещения с повторениями могут попасться на экзе, а могу и нет, но встречаются они чаще, чем те же сочетания с повторениями, поэтому стоит уделить немного времени на них тоже.

Основное отличие от размещений без повторений как ни странно, что элементы в выборке могут встречаться сколько угодно раз, можно использовать 1 элемент во множестве способов.

Формула для размещений с повторениями выглядит так:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Для более подробного понимания, решим задачу:

Задача: Имеется шифр, состоящий только из арабских цифр, длина у шифра равна 4, сколько существует комбинаций данного шифра?

Здесь можно заметить следующее: при длине шифра в 4 цифры, для каждого элемента шифра можно использовать все 10 цифр (0-9), т.е. цифры будут повторяться:

$$\bar{A}_{10}^4 = 10^4 = 10\ 000$$

$\underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{10} = 10^4 =$ 10 000 комбинаций для данного шифра.

Рассмотрим более сложную задачу, которая уже может попасться на экзамене.

Задача: Секретный замок открывается с помощью пятизначного кода. Формат кода такой: 2 цифры и 3 латинские буквы. Найти вероятность того, что замок откроется если подобрана произвольная комбинация цифр.

Начнём с того, что событие A – шифр подобран правильно. Исходя, что $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – количество благоприятных исходов, т.е. в нашем случае m = 1, т.к. только одна комбинация цифр и букв позволит открыть замок. А n нам предстоит выяснить.

Если у нас имеется общая длина, равная 5, из которых первые 2 символа отводятся на цифры, которых всего 10, а остальные 3 символа кода отводятся на латинские буквы, которых всего может быть 26, можно сделать вывод:

n = $\underline{10}$ $\underline{10}$ $\underline{26}$ $\underline{26}$ $\underline{26}$ = $10^2 \cdot 26^3$ = 1 757 600

Тогда искомая вероятность будет: P(A) = $\frac{n}{m} = \frac{1}{1\,757\,600} \approx 0{,}000000569$.

1.6. Перестановки.

Перестановки по сути и дают ответ на вопрос "Сколькими способами можно переставить n элементов?", или "Сколькими способами можно рассадить 5 человек?".

Формула для перестановок выглядит следующим образом:

$$P_n = n! = A_n^n$$

Рассмотрим задачу:

Задача: Сколькими способами из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 можно составить различное:

а) шестизначное число; б) четное шестизначное число; в) нечётное шестизначное число.

а) Для составления шестизначного числа нужно соблюсти условие, а именно, на первом месте не может стоять 0, т.к. тогда уже будет *не шестизначное* число, поэтому на первой позиции могут располагаться все цифры, за исключением нуля – 5 цифр, на остальных позициях могут располагаться 5! = 120 комбинаций цифр:

$\underline{5}$ $\underline{5}$ $\underline{4}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ = $5 \cdot 5!$ = 600 шестизначных чисел

б) Для данного пункта необходимо, чтобы на конце находилась цифра: 0, или 2, или 4, только тогда число будет чётным. Рассмотрим каждый случай:

- Когда на конце цифра 0, это значит, что на первом месте также не может располагаться 0, а на конце обязательно должна быть цифра 0. Значит для всех позиций, за исключением последней будет 5! = 120 различных чисел (комбинаций цифр), а для конечной позиции остаётся только одна цифра – 0: $A_1 = \underline{\ 5\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\text{“0”}} = 5! = 120$ чётных чисел.

- Когда на конце цифра 2, значит на первом месте могут находиться: {1, 3, 4, 5} = 4 любые цифры из данного множества, в середине могут находиться цифры {0, 1, 3, 4, 5} = 5! = 120, добавляется цифра 0, но так-как на первом месте уже стоит какая-то из этих цифр, кроме 0, то всего на четырёх позициях в центре может быть 4 цифры, то итого будет $4 \cdot 4! = 96$, а в конце должна быть цифра 2:

  $A_2 = 4 \cdot 4! = 96$ чётных чисел.
- Аналогично для цифры 4 в конце: $A_3 = 4 \cdot 4! = 96$ чётных чисел.

Тогда окончательно: $A = A_1 + A_2 + A_3 = 120 + 96 + 96 =$ *312 чётных шестизначных чисел*.

в) Для поиска нечётных шестизначных чисел сделаем похожее, для того, чтобы шестизначное число было нечётным при таком наборе цифр, нужно чтобы в конце числа стояла цифра 1, или 3, или 5.

- На конце стоит цифра 1: $A_1 = 4 \cdot 4! = 5! - 4! = 96$ нечётных чисел.
- На конце стоит цифра 3: $A_2 = 4 \cdot 4! = 5! - 4! = 96$ нечётных чисел.
- На конце стоит цифра 5: $A_3 = 4 \cdot 4! = 5! - 4! = 96$ нечётных чисел.

Итого получаем: $A = A_1 + A_2 + A_3 = 96 + 96 + 96 =$ 288 *нечётных шестизначных чисел.*

Легко проверить правильность, ведь сумма всех чётных и нечётных чисел будут давать количество всех возможных шестизначных чисел: 288 + 312 = 600, всё верно.

Теперь наконец-то сами экзаменационные задания.

ЗАДАНИЕ №1

Начнём с того, что такое вероятность, в двух словах. Вероятность P(A), где A искомое событие, равна такому отношению: $\frac{m}{n}$, где m – количество благоприятных исходов события, которое нужно будет находить, n – общее число всех исходов.

Пример 1: В урне 12 белых и 8 черных шаров. Из урны вынимают наугад сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут одного цвета.

Событие A – вынуты оба шара одинакового цвета. Сразу можно сказать, что шара будет два по условию, а значит комбинаций тоже будет 2, немного подумав, можно сказать, что нам не важен порядок следования элементов, и действительно, какая разница, если мы условно достанем сначала белый шар, а потом чёрный, ведь это будет тоже самое, что достать сначала чёрный шар, а потом белый, т.е. {“белый”, “ чёрный”} = {“чёрный”, “белый”}. Так-как достать могут рандомно из урны 2 шара, то все количества можно подсчитать, используя *сочетания*.

P(A) = $\frac{m}{n}$, n – сколькими способами можно всего достать 2 шара из 20, это мы уже разбирали выше, ⇒ n = $C_{20}^2 = 190$ комбинаций всего.

Чтобы найти n, нужно понять, что шары будут одного цвета, когда оба белого цвета ИЛИ оба чёрного. Это означает, чтобы выпало два белых, нужно, чтобы ИЗ ВСЕХ БЕЛЫХ ШАРОВ выпало 2, это опять *сочетания*.

$m_{\text{белых}} = C_{12}^2 = 66$ способов вынуть сразу два белых шара.

Чтобы найти вероятность вынуть оба чёрных шара, нужно выполнить аналогичные действия: $m_{\text{чёрных}} = C_8^2 = 28$ способов вынуть сразу два чёрных шара.

Тогда итого будет: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 + C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{66+28}{190} = \frac{47}{95} \approx 0{,}495$.

Здесь мы складываем вероятности в числителе, т.к. могут быть вынуты оба белые ИЛИ оба чёрные.

Пример 2: Радист для надёжности трижды передаёт один и тот же сигнал. Вероятность того, что первый сигнал будет принят, равна 0,2, второй - 0,4 и третий - 0,6. Предполагается, что данные события независимы. Найти вероятность того, что сигнал не будет принят.

Событие A заключается в том, что сигнал не будет принят. Радист посылает 3 сигнала, в задаче не сказано, что сигнал может быть не принят, если хотя-бы один из трёх сигналов не будет принят. Делаем вывод, что сигнал может быть не принят ⇔ когда все 3 сигнала одновременно не будут приняты.

Найдём вероятности непринятия трёх сигналов:

$A_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ – первый сигнал не будет принят.

$A_2 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ – второй сигнал не будет принят.

$A_3 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ – третий сигнал не будет принят.

Тогда $P(A) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}192$.

Пример 3: В коробке лежат 12 букв, среди которых 5 гласных и 7 согласных. Из коробки случайным образом вынимают одну букву. Найти вероятность, что при извлечении второй буквы появится гласная буква.

Вот тут-то и появляется такое понятие, как зависимые события, если простыми словами, это означает, что наступление текущего события A зависит от исхода предыдущего события B, а вероятность в таком случае называют **условной**, и записывается она так: $P(A \mid B) = P_B(A)$, где A, B – зависимые события.

Начнём с того, что букв всего 12, значит вероятность первый раз извлечь гласную букву: P(гласная буква) = $\frac{5}{12}$, а вероятность извлечь при первом разе согласную букву: P(согласная буква) = $\frac{7}{12}$, в сумме эти вероятности как раз будут давать единицу.

Требуется найти вероятность появления при втором извлечении гласной буквы. Здесь может два варианта:

1) Первая буква была гласной. Обозначим это событие как $1A_{гл}$. *Тогда общее количество букв для следующего извлечения уменьшится на единицу, и количество гласных букв тоже уменьшится на единицу.*
2) Первая буква была согласной. Обозначим это событие как $1A_{согл}$. *Тогда общее количество букв для следующего извлечения уменьшится на единицу, а количество гласных букв будет таким же.*

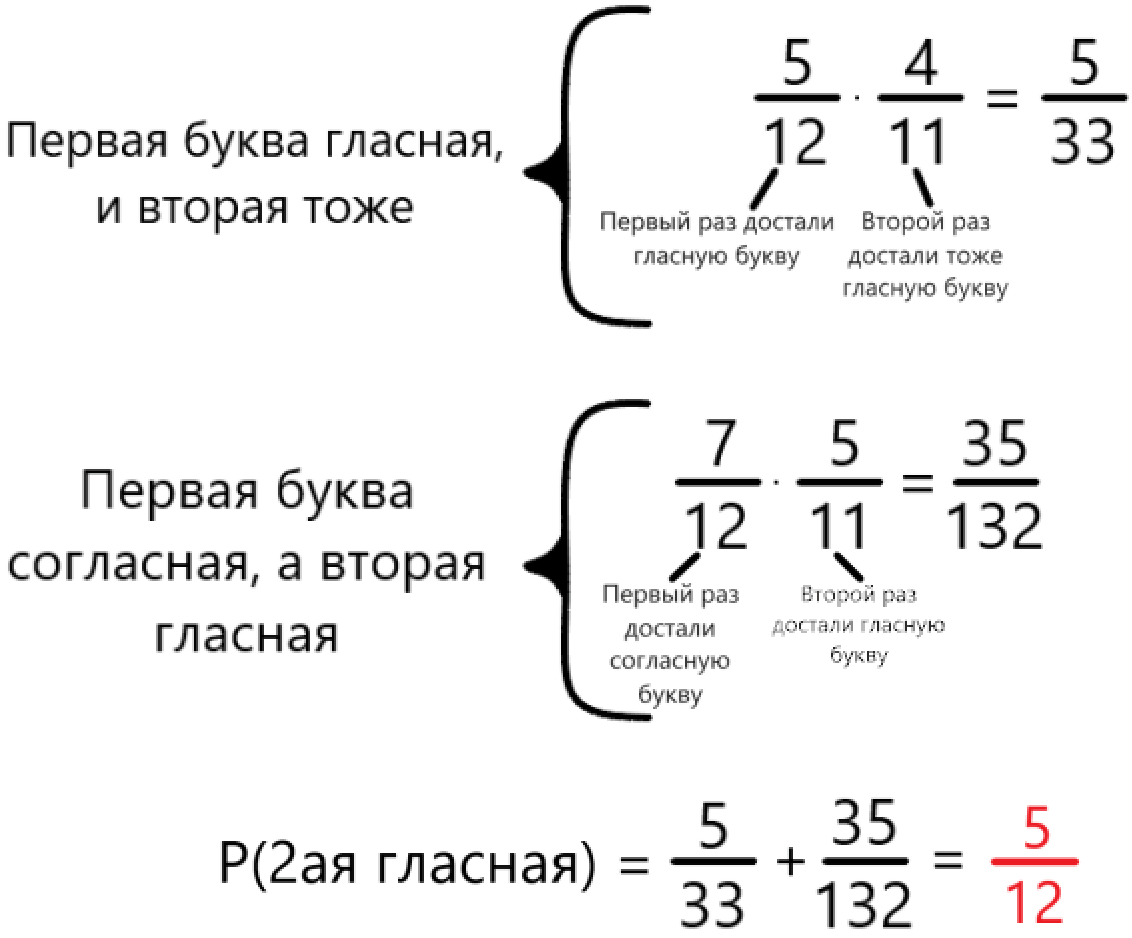
Т.е. при первом извлечении может быть два исхода: была извлечена гласная буква ИЛИ была извлечена согласная буква, значит будем <u>складывать</u> вероятности каждого исхода. Но нам нужно извлечь первую букву И вторую (по условию требуется вероятность извлечения второй буквы), поэтому будем умножать вероятности при извлечении 1ой буквы и 2ой буквы.

P(1$A_{гл}$) $= \frac{5}{12}$, нашли выше, значит для второго извлечения гласных букв и общее количество букв будет на единицу меньше, ведь мы достали при первом разе какую-то букву! Тогда **P(2$A_{гл}$ | 1$A_{гл}$)** $= \frac{4}{11}$.

P(1$A_{согл}$) $= \frac{7}{12}$, значит для второго извлечения гласных букв будет столько же, а общее количество букв уменьшится на единицу. **Тогда P(2$A_{гл}$ | 1$A_{согл}$)** $= \frac{5}{11}$.

Тогда итоговый ответ будет: <u>P(2ая буква гласная)</u> $= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{12}$.

Графическое изображение:



Пример 4: В одной корзине имеется 5 шаров, из которых 3 белых, 2 черных, а во второй 6 шаров: 1 белый и 5 черных. Из каждой корзины вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров хотя бы один шар белого цвета.

Для данной задачи есть два способа решения. Кратко рассмотрим оба.

“Хотя бы один” в задачах означает, что событие А может произойти один раз, ИЛИ два раза, ИЛИ три раза, или и т.д. Но иногда проще вычислить противоположное событие, а именно: 1- $P(\bar{A})$, где под $P(\bar{A})$ подразумевается произведение всех противоположных вероятностей к событию А. На этом основывается решение двумя способами в данной задаче.

✓ **Первый способ:**

Событие A_1 – из первой корзины вынули только чёрные шары. $P(A_1) = \frac{2}{5}$.

Событие A_2 – из второй корзины вынули только чёрные шары. $P(A_2) = \frac{5}{6}$.

Событие A – вынули хотя бы один шар из двух корзин белого цвета.

Тогда $P(A) = 1 – (P(A_1) \cdot P(A_2)) = 1 – (\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}) = \frac{2}{3}$.

✓ **Второй способ:**

Как уже было написано выше, “хотя бы один” означает в нашем случае: один раз из первой ИЛИ второй корзины ИЛИ два раза из двух корзин сразу.

Тогда событие A_1 – белый шар вынули из первой корзины. $P(A_1) = \frac{3}{5}$.

Событие A_2 – белый шар вынули из второй корзины. $P(A_2) = \frac{1}{6}$.

Событие A – хотя бы один белый шар вынули из двух корзин.

События $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ очевидно означают противоположные события для данных, т.е. будут вынуты чёрные шары.

Вероятности: $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

“Из каждой корзины вынимают по одному шару” означает, что шары будут вынуты из первой корзины И из второй, и всего может быть три варианта исхода события A – хотя бы один вынутый шар будет белым из двух корзин.

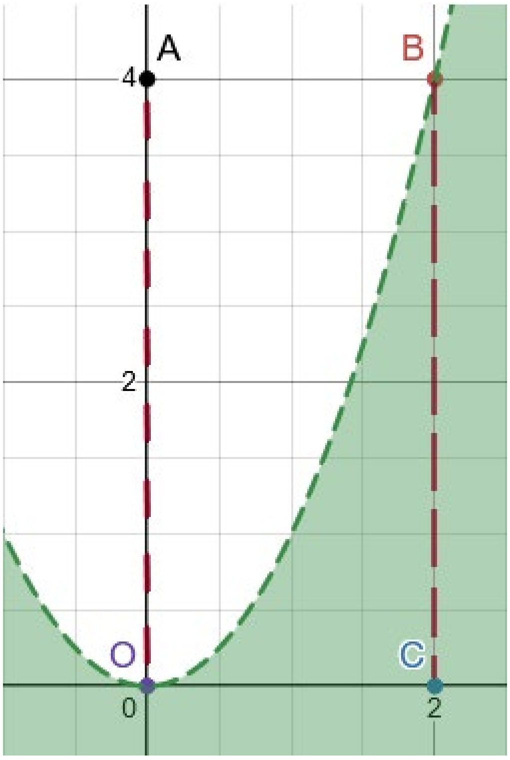
Тогда $P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

ЗАДАНИЕ №2

Задача на геометрическое определение вероятности, долго я здесь останавливаться не буду, т.к. тут всё довольно просто. По большому счёту нужно помнить как находить площадь фигуры, возможно через интеграл).

Пример 1: В прямоугольник с вершинами в точках O(0;0), A(0;4), B(2;4), C (2;0) наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка попадет в область $y < x^2$.

Отобразим все точки и саму область на ПДСК:



Будем придерживаться: $P(A) = \frac{m}{n}$.

1) Найдём n, это площадь всего прямоугольника: $S_{прям} = 2 \cdot 4 = 8$ ед.

2) Найдём m, для этого придётся интегрировать, т.к. площадь закрашенной фигуры не может быть выражена через формулы. Данная область задаётся функцией $f(x) = x^2$:

$$S_{обл} = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} \text{ ед.}$$

Тогда итого будет: $P(A) = \frac{S_{обл}}{S_{прям}} = \frac{\frac{8}{3}}{8} = \frac{1}{3}$.

Пример 2: На отрезок числовой прямой [1; 16] наугад брошена точка. Найти вероятность того, что точка попала на отрезок [4; 9].

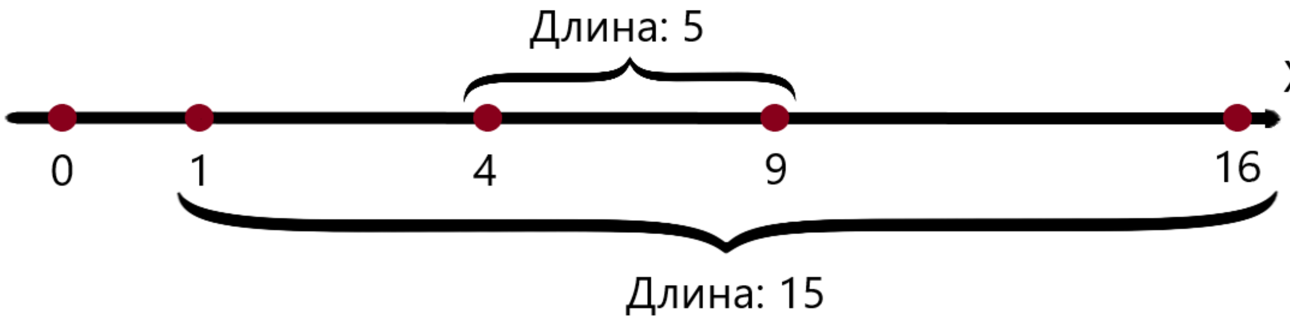
Чтобы найти вероятность попадания в интервал [4; 9], нужно найти длины этих отрезков, поэтому из координаты конца вычитаем координату начала отрезка. Получается мы ищем, сколько раз один отрезок “поместится” в другой:

$l_1 = x_2 - x_1 = 16 - 1 = 15$, $\quad l_2 = x_2 - x_1 = 9 - 4 = 5$.

Тогда искомая вероятность P(A) – попадание в отрезок [4; 9] будет равна:

$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Графически это выглядит так:

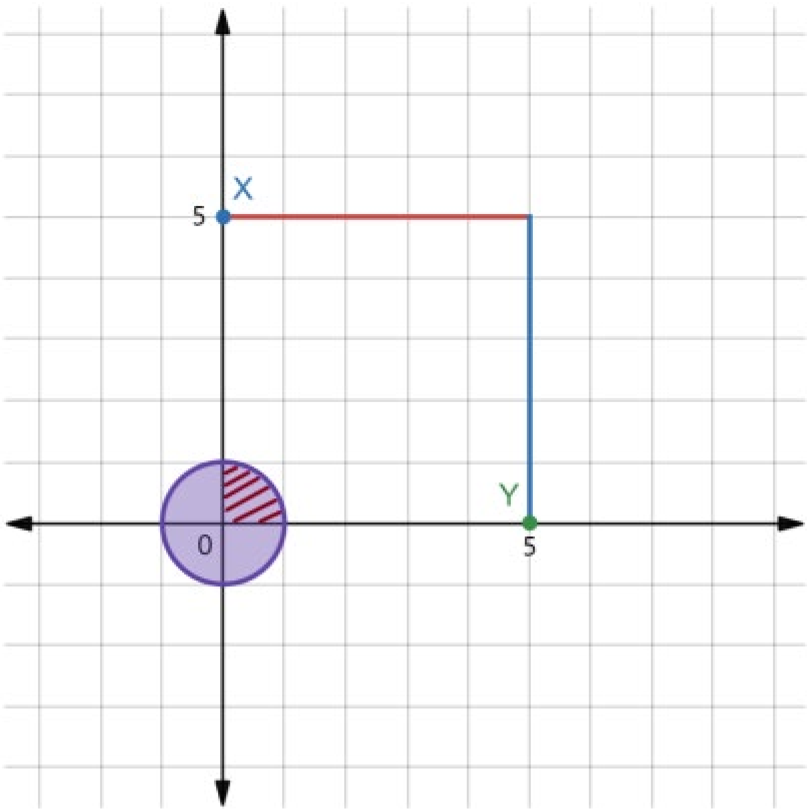


Пример 3: Из отрезка [0; 5] случайным образом выбираются два действительных числа. Чему равна вероятность того, что сумма квадратов этих чисел не превысит 1?

Обозначим первое выбранное число как “x”, а второе выбранное число как “y”. Следует учесть, что оба этих числа будут ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ, и теперь несложно составить неравенство, выполнение которого и даст нам событие A – сумма квадратов этих чисел будет не больше единицы:

$$x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

Данное неравенство задаёт окружность с центром в начале координат, и радиусом = 1.



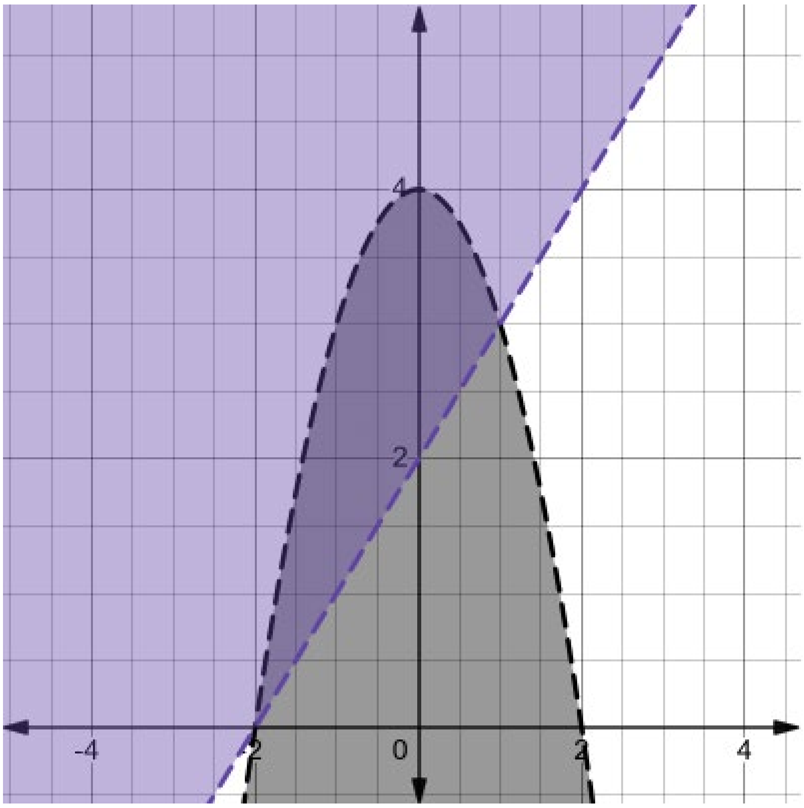
1) Площадь квадрата геометрически означает выбрать два любых числа из диапазона [0, 5]: $S_{кв} = a^2 = 5^2 = 25$.

2) Четверть площади круга геометрически означает, что сумма квадратов выбранных чисел будет меньше единицы: $\frac{S_{кр}}{4} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$. В знаменателе деление на 4, т.к. выбираемые числа только положительные.

Тогда итоговая вероятность выбрать два числа из диапазона [0; 5], чтобы их квадраты были меньше единицы равна: P(A) = $\frac{\frac{S_{кр}}{4}}{S_{кв}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{25} = \frac{\pi}{100} \approx 0{,}0314$.

Пример 4: В область D : {$y < 4 - x^2$, $y > 0$}, брошена точка. Найти вероятность того, что будет выполнено неравенство {$y > x + 2$}.

Для начала отобразим на графике область D и неравенство:



Действуем по такой же схеме: ищем площадь области D. Именно ПЛОЩАДЬ, т.к. вероятность попадания будем искать как отношение площадей:

$$S_D = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

Чтобы найти вероятность события A – точка попала в область, заданную неравенством: $y > x + 2$, нужно найти точки пересечения этих двух неравенств, конечно по рисунку это делается просто, но по правильному нужно составить уравнение. Уравнение выводится путём приравнивания двух функций, чьи точки пересечения мы ищем:

$4 - x^2 = x + 2$

$4 - x^2 - x - 2 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 1; -2.$$

Теперь нужно найти площадь области, куда должна по условию попасть точка, для этого нужно из площади D вычесть площадь области, которая задаётся как: x + 2, тогда найдём площадь, куда должна попасть точка:

$$s_{\text{обл}} = \int_{-2}^{1} \left(4 - x^2 - (x+2)\right) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Итоговая вероятность будет: $P(A) = \frac{s_{\text{обл}}}{s_D} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{32}{3}} = \frac{27}{64} \approx 0{,}422.$

ЗАДАНИЕ №3

Формула Байеса и полной вероятности, да-да.

Про формулу полной вероятности: Вероятность события А, которое может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий H_1, H_2… H_n, называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

На основе формулы полной вероятности существует формула Байеса.

Также сумма вероятностей всех гипотез H_i должна давать 1.

Про формулу Байеса: Формула Байеса позволяет “обновлять” вероятность появления какого-либо события А на основе того, что событие А уже совершалось ранее с другой вероятностью. Формула выглядит так:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}$$

Где H_i – это так называемые гипотезы, а $P(H_i)$ обычно даны по заданию, нужно просто лишь правильно всё расставить.

Чтобы лучше понять, решим задачу:

Пример 1: Оператор контролирует два станка с ЧПУ, на которых изготавливаются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго - 0,03. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет бракованной.

Для начала определим событие А – *взятая наугад деталь будет бракованной*. Далее введём две гипотезы, H_1 – взятая наугад деталь окажется с первого станка, H_2 – взятая наугад делать окажется со второго станка.

Вероятность взять бракованную деталь с первого станка: $P(H_1) = \frac{1}{2}$, т.к. станков всего два, тогда вероятность взять бракованную деталь со второго станка: $P(H_2) = \frac{1}{2}$, заметим, что $P(H_1) + P(H_2) = 1$.

Теперь определим условные вероятности из условия задачи:

Вероятность взять бракованную деталь, при условии, что она с первого станка: $P(A \mid H_1) = 0{,}02$.

Вероятность взять бракованную деталь, при условии, что она со второго станка: $P(A \mid H_2) = 0{,}03$.

Теперь можно найти вероятность появления события А **по формуле полной вероятности**:

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}5 \cdot 0{,}03 = 0{,}025$.

Т.е. обычно в таких задачах сначала нужно определить событие А, далее определить все гипотезы H_i из условия задачи, и далее определить условные вероятности $P(A \mid H_i)$ также из условия (скорее всего, чаще всего так).

Пример 2.1: В магазин поступили компьютеры, собранные на двух предприятиях. Продукция первого предприятия содержит 4% компьютеров с дефектом, второго - 2%. Найти вероятность того, что выбранный случайным образом компьютер окажется без дефектов, если с первого предприятия поступило 70% всех компьютеров, имеющихся в магазине, а со второго - 30%.

Начнём опять с определения события А – выбранный случайным образом компьютер окажется без дефектов.

Гипотезы H_1 и H_2:

- Гипотеза H_1 – случайным образом выбран компьютер с первого предприятия. Для определения $P(H_1)$ необходимо внимательно прочитать задачу, в ней сказано, что с первого предприятия поступило 70% всех компьютеров, $\Rightarrow$ $P(H_1) = 70\,\% = \frac{70}{100} = 0{,}7$.
- Гипотеза H_2 – случайным образом выбран компьютер со второго предприятия. Для определения $P(H_2)$ можно уже использовать равенство для гипотез: $P(H_1) + P(H_2) = 1, \Rightarrow 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ или же посмотреть в условии, где сказано про 30% всех компьютеров, поступивших со второго предприятия.

Условные вероятности P($A \mid H_1$) и P($A \mid H_2$):

- P($\bar{A} \mid H_1$) = 4% $= \frac{4}{100}$ = 0,04. Исходя из условия задачи. Событие $\bar{A}$ означает выбранный случайным образом компьютер окажется с дефектами.
- P($\bar{A} \mid H_2$) = 2% $= \frac{2}{100}$ = 0,02. Исходя из условия задачи.

Тогда P(A) = 1 – ($P(H_1) \cdot P(\bar{A} \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(\bar{A} \mid H_2)$) = 0,966.

Пример 2.2: В магазин поступили компьютеры, собранные на двух предприятиях. Продукция первого предприятия содержит 4% компьютеров с дефектом, второго - 2%. Выбранный случайным образом для проверки компьютер оказался с дефектом. Найти вероятность того, что он был произведен на первом предприятии, если с первого предприятия поступило 70% всех компьютеров, имеющихся в магазине, а со второго - 30%.

Гипотезы H_1 и H_2 а также условные вероятности в данном случае будут такими же, как и в *примере 2.1*, а вот событие А уже другое.

Определим событие А – выбранный случайно компьютер оказался с дефектом.

Условные вероятности P($A \mid H_1$) и P($A \mid H_2$):

- P($A \mid H_1$) = 4% $= \frac{4}{100}$ = 0,04.
- P($A \mid H_2$) = 2% $= \frac{2}{100}$ = 0,02.

Вероятность P(A) найдём исходя из *примера 2.1*. P(A) = 1 – 0,966 = 0,034.

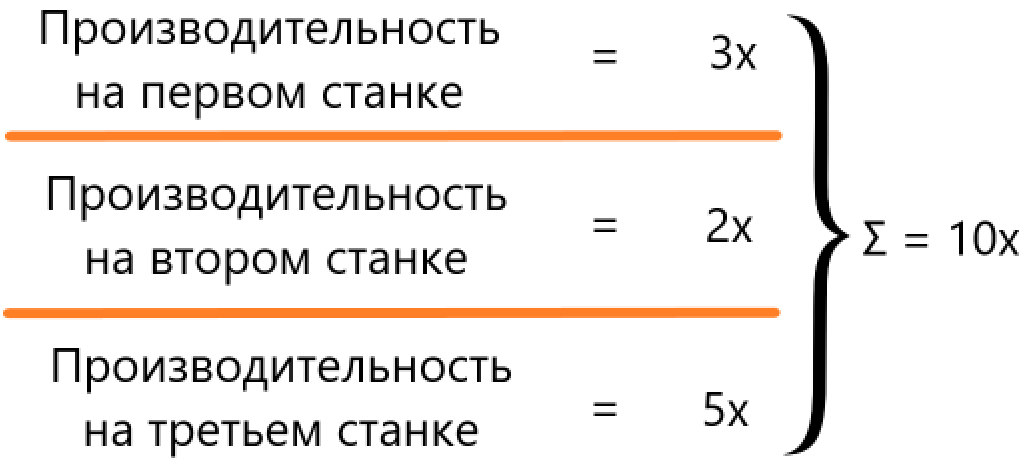
Ответом на задачу будет: P($H_1 \mid A$) = $\frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}04}{0{,}034} =$ 0,8235.

На всякий случай, читается данная запись - P($H_1 \mid A$) , как: “случайно выбран компьютер с первого предприятия, при условии, что он с дефектом”.

Дальше так много пояснений не будет, т.к. задачи довольно похожи.

Пример 3.1: Оператор контролирует три станка с ЧПУ, на которых изготавливаются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго - 0,03, для третьего - 0,04. Изготовленные детали попадают в контейнер. Производительности станков относятся как 3:2:5. Найти вероятность того, что наугад взятая из контейнера деталь, оказалась бракованной.

Событие А – взятая наугад из контейнера деталь бракованная.



Общая производительность будет равна 10.

Гипотезы H_1, H_2, H_3:

- Гипотеза H_1 – случайно взятая деталь оказалась с первого станка. Тогда $P(H_1) = \frac{3}{10}$.
- Гипотеза H_2 – случайно взятая деталь оказалась со второго станка. Тогда $P(H_2) = \frac{2}{10}$.
- Гипотеза H_3 – случайно взятая деталь оказалась с третьего станка. Тогда $P(H_3) = \frac{5}{10}$.

Справедливо следующее: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Условные вероятности $P(A \mid H_1)$, $P(A \mid H_2)$, $P(A \mid H_3)$:

- $P(A \mid H_1) = 0{,}02$ (из условия).
- $P(A \mid H_2) = 0{,}03$ (из условия).
- $P(A \mid H_3) = 0{,}04$ (из условия).

Тогда P(A) **по формуле полной вероятности**: $P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}032$.

Пример 3.2: Оператор контролирует три станка с ЧПУ, на которых изготавливаются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго - 0,03, для третьего - 0,04. Изготовленные детали попадают в контейнер. Производительности станков относятся как 3:2:5. Взятая из контейнера наугад деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что деталь изготовлена на третьем станке.

Событие А – взятая наугад деталь оказалась бракованной (из *примера 3.1*).
Используем вычисленные значения из *примера 3.1*. Здесь нужно найти P(A) при условии, что она бракованная, сделаем это, используя **формулу Байеса**:

$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}04}{0{,}032} = 0{,}625$.

Пример 4: В первой урне 12 белых и 3 чёрных шаров, во второй 4 белых и 6 чёрных, и в третьей - 12 белых и 8 черных. Наугад из одной из урны вынимается шар. Найти вероятность того, что он белый.

Здесь событие А – наугад взятый шар из трёх урн оказался белым.
Здесь написано “НАУГАД”, это означает, что вероятности достать из каждой урны шар равновозможные и равны: $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Это и будут наши гипотезы.

Условные вероятности $P(A \mid H_1), P(A \mid H_2), P(A \mid H_3)$:

- В первой урне всего 15 шаров, а белых – 12, нужно найти вероятность, что он белый: $P(A \mid H_1) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ (из условия).
- Во второй урне всего 10 шаров, а белых – 4, нужно найти вероятность, что он белый: $P(A \mid H_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (из условия).
- В третьей урне всего 20 шаров, а белых – 12, нужно найти вероятность, что он белый: $P(A \mid H_3) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ (из условия).

Тогда **по формуле полной вероятности** имеем: $\mathrm{P(A)} = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

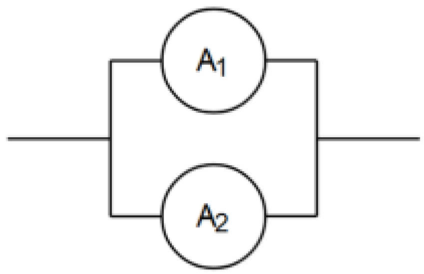
ЗАДАНИЕ №4

В данных задачах нужно найти надёжность релейного механизма, или наоборот вероятность отказа схемы. Для данного типа задач нужно знать следующее:

1. Параллельное соединение элементов в схеме означает, что ХОТЯ БЫ один элемент должен работать, чтобы вся схема была работоспособной. Про словосочетание “хотя бы” я писал выше.
2. Последовательное соединение элементов в схеме означает, что схема будет работоспособна ⇔ все элементы в схеме будут работать. Математически это означает умножение вероятностей работы/отказа элементов.

Рассмотрим экзаменационный пример.

Пример 1: Релейная схема состоит из двух элементов: A_1 и A_2. Вероятность того, что за время T эти элементы не выйдут из строя, известна и равна: $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$. Найти вероятность безотказной работы данной схемы.



Как можно заметить, вся схема состоит из двух элементов, которые соединены параллельно, значит для работы схемы, достаточно, чтобы “хотя бы” один элемент был работоспособен.

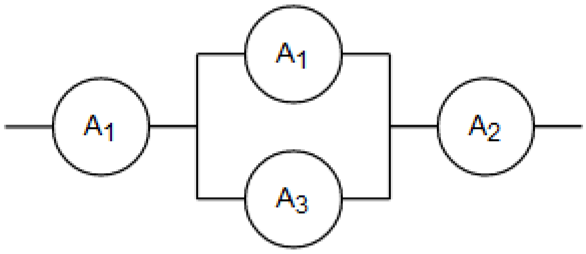
Событие B – безотказная работа всей схемы за время T. Для нахождения P(B) найдём обратную вероятность – ни один элемент не работает, и вычтем эту вероятность из 1.

$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 1 - (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}94.$

Где вероятность $P(\bar{A}_1)$ – вероятность выхода из строя элемента A_1.

Вероятность $P(\bar{A}_2)$ – вероятность выхода из строя элемента A_2.

Пример 2: Релейная схема состоит из элементов трёх типов: A_1, A_2 и A_3. Вероятность того, что за время T эти элементы не выйдут из строя, известна и равна: $P(A_1) = 0{,}9$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}8$. Найти вероятность безотказной работы данной схемы.

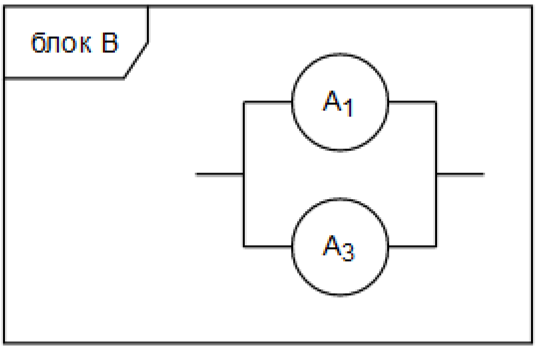


Как можно заметить на этой схеме есть сразу два типа соединения: *параллельное* и *последовательное*.

Для решения поставленной задачи:

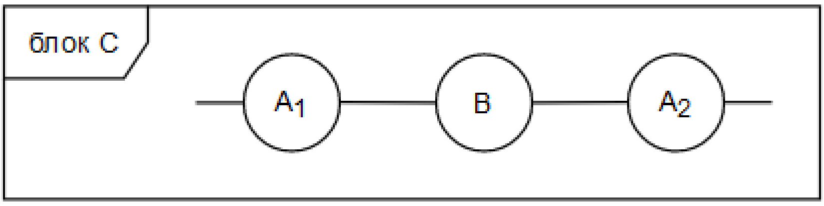
1) Обозначим параллельный блок схемы с элементами A_1 и A_3 как “B”. Найдём вероятность безотказной работы блока “B” как параллельное соединение элементов A_1 A_2, а значит нужно найти вероятность работы ХОТЯ БЫ одного элемента: или A_1, или A_2.
2) Дальше будем искать вероятность безотказной работы схемы как последовательное соединение из трёх элементов: $A_1 \to B \to A_2$. Назовём такой блок, как “C”.

В данных задачах нужно сложные схемы разбивать на более простые блоки, т.е. от “частного” к “общему”.



Вероятность безотказной работы для блока “B”: $P(B) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - (1 - 0{,}9) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}98$. Для параллельного соединения.

Где $P(\bar{A}_1)$ и $P(\bar{A}_3)$ – вероятности отказа соответствующего элемента.



Найдём теперь вероятность безотказной работы для блока “C”:

$P(C) = P(A_1) \cdot P(B) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}7 = 0{,}6174$.

ЗАДАНИЕ №5

Вот и дошли до **формулы Бернулли** и **формулы Пуассона**. В этом задании используются именно они. По идее используется только она, локальной и уж тем более интегральной теоремы Лапласа быть не должно).

Сначала разберёмся с формулой Бернулли:

Для начала определимся, зачем она нужна и что с её помощью можно считать. Если имеется вероятность появления какого-либо **независимого** события А, то формула Бернулли позволяет находить вероятность появления этого события А m раз в n испытаниях.

Вероятность появления события А m раз из n записывается в основном так: $P_n(m)$.

Объяснение на простом примере: Имеется обычная монета, вероятность выпадения орла и решки одинакова и равна 0,5. Найти вероятность, что при n = 5 подбрасываниях монеты, орёл выпадет ровно m = 3 раза.

Именно подобные задачи позволяет решать формула Бернулли.

Выглядит Формула Бернулли следующим образом:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}.$$

В более простом и привычном виде выглядит так:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Стоит также акцентировать внимание на таких обозначениях, как p и q.

- Обозначение “p” обычно значит вероятность появления события А, т.е. это есть упрощённый вариант такой записи: $p = P(A)$.
- Обозначение “q” обычно значит вероятность непоявления события А, т.е. противоположная p вероятность: $q = 1 - p = 1 - P(A)$.

Теперь разберёмся с формулой Пуассона:

Формула Пуассона, как и **формула Бернулли** предназначена, чтобы находить вероятность появления события А m раз в n испытаниях, и выглядит следующим образом:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Где $\lambda = n \cdot p$, где n – общее количество испытаний, m – заданное количество испытаний, а p – вероятность наступления нужного события.

Теперь перейдём к особенностям использования формулы Бернулли и формулы Пуассона:

	Особенности
Формула Бернулли	Применима для нахождения вероятности появления события А m раз в n испытаниях, при условии, что вероятность "**p**" будет больше, чем **0,1**, и **общее число испытаний "n" довольно мало.** Если в задаче число "n" – приемлемо-небольшое число и вероятность p ≥ 0,1, нужно использовать формулу Бернулли.
Формула Пуассона	Применима для нахождения вероятности появления события А m раз в n испытаниях, при условии, что вероятность "**p**" будет довольно малая, т.е.: **p < 0,1**, а также, если **число испытаний "n" довольно большое**, **n > 20**. Если в задаче число "n" – большое число и вероятность "p" очень мала, нужно использовать формулу Пуассона.

Т.е. если вероятность $p \to 0$, а общее число испытаний $n \to \infty$, то для корректного нахождения вероятности $P_n(m)$ нужно использовать формулу Пуассона, в остальных случаях используется формула Бернулли.

Перейдём к решению экзаменационных примеров.

Пример 1: Вероятность выпуска стандартного изделия на автоматической линии равна 0,9. Найти вероятность того, что из пяти наудачу взятых изделий четыре окажутся стандартными.

1) Определим событие A – из пяти наудачу взятых изделий четыре окажутся стандартными. (p.s. Определять событие A необязательно).
2) Определим n и m: Из условия видно, что всего взяли 5 изделий, тогда n = 5, и нужно найти, чтобы ровно 4 из 5 изделий были стандартные, тогда m = 4.
3) Вероятность p уже дана в условии задачи: p = 0,9.
4) Тогда вероятность q найдём как: 1 – p = 1 – 0,9 = 0,1.

Исходя из вышенаписанного, можно сделать вывод, что тут *уместно использовать формулу Бернулли*.

Ответом будет: $P(A) = P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^{5-4} = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}32805$.

Пример 2: Вероятность выпуска бракованного изделия на автоматической линии равна 0,002. Найти вероятность того, что из 4000 выпущенных за смену изделий четыре окажутся бракованными.

1) Определим n и m: Из условия ясно, что общее число n = 4000, а заданное количество испытаний m = 4.
2) Определим p и q: Из условия ясно, что p = 0,002 – очень маленькое число, а значит q = 1 – p = 1 – 0,002 = 0,998.

В данном случае будет уместно использовать формулу Пуассона, ведь вероятность p = 0,002 – очень мала, а общее число испытаний n = 4000 – очень большое. По формуле Бернулли вычисления вероятности $P_n(m)$ заняли бы очень много времени. Тогда ответом на задачу будет:

$$P_n(m) = P_{4000}(4) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^4}{4!} \cdot e^{-8} \approx 0{,}05725.$$

Где $\lambda = n \cdot p = 4000 \cdot 0{,}002 = 8$.

Пример 3: Стрелок совершает 6 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна p = 0,8. Найти вероятность того, что стрелок попадёт два раза.

Действуем аналогично, как в предыдущей задаче, найдём все компоненты:

1) Событие А – из шести выстрелов стрелок попадёт два раза.
2) Из условия задачи видно, что всего стрелок совершает 6 выстрелов, а значит n = 6, а попасть он должен по условию 2 раза, тогда m = 2.
3) Вероятность p – попадание в мишень, уже дана в условии задачи: p = 0,8, тогда вероятность q – промах по мишени: q = 1 – p = 1 – 0,8 = 0,2.

Исходя из вышенаписанного, можно сделать вывод, что тут *уместно использовать формулу Бернулли*.

Ответом будет: $P(A) = P_6(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^4 =$ 0,01536.

Пример 4: С базы в магазин отправлено 1000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,001. Найдите вероятность того, что: **а)** в магазин прибудут 4 испорченных изделия; **б)** в магазин прибудут более двух испорченных изделия.

1) Определим n и m: Из условия ясно, что общее число n = 1000, а заданное количество испытаний для пункта а): m = 4; а для пункта б): m > 2.
2) Определим p и q: Из условия ясно, что p = 0,001 – очень маленькое число, а значит q = 1 – p = 1 – 0,002 = 0,999.
3) Определим λ: $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0,001 = 1$.

В данной задаче, также как и в *примере 2* будет уместно использовать формулу Пуассона.

Пункт а):

$$P_n(m) = P_{1000}(4) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^4}{4!} \cdot e^{-1} \approx 0,01533.$$

Пункт б):

Как видно, здесь число m больше двух, т.е. нам придётся вычислять вероятности при m = {3, 4, 5, …, 1000} – очень много вычислений, поэтому проще вычислять итоговую вероятность через противоположную, а именно вероятность того, что: в магазин прибудут <u>не</u> более двух испорченных изделий.

Тогда, для данной противоположной вероятности m = {0, 1, 2}, найдём их:

- При m = 0:

$$P_n(m) = P_{1000}(0) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}3679.$$

- При m = 1:

$$P_n(m) = P_{1000}(1) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}3679.$$

- При m = 2:

$$P_n(m) = P_{1000}(2) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}1839.$$

Тогда итоговый ответ:

$$P_n(m) = P_{1000}(m > 2) = 1 - \big(P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)\big) =$$
$$= 1 - (0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839) \approx 0{,}0803.$$

Пример 5: Вероятность выпуска стандартного изделия на автоматической линии равна 0,6. Найти вероятность того, что из восьми наудачу взятых изделий более двух изделий окажутся стандартными.

В данной задаче уже не просят найти конкретное число выполнения события, этим она слегка отличается от прошлых.

Определим все компоненты:

1) Из условия видно, что всего взято 8 изделий, тогда n = 8. Для определения m одного числа не хватит, так-как m = {3, 4, 5, 6, 7, 8} ⇒ m > 2.
2) Вероятность стандартного изделия p = 0,6, тогда вероятность нестандартного изделия q = 1 – p = 1 – 0,6 = 0,4.

В данном случае всё ещё *уместно использовать формулу Бернулли,* т.к. вероятность $p = 0{,}6 > 0{,}1$, а также число $n = 8$ – относительно небольшое число.

Как видно, переменная m принимает 6 разных значений, и считать вероятность появления для каждого m'того события довольно трудоёмко, поэтому ответ на задачу найдём через противоположную вероятность – будет проверено не больше двух изделий, в таком случае переменная m будет принимать всего 3 значения, $m = \{0, 1, 2\}$. Далее найденный результат вычтем из 1 и получим ответ.

- Вероятность того, что из 8 наудачу взятых изделий, 0 изделий оказались стандартными: $P_8(0) = C_8^0 \cdot p^0 \cdot q^8 \approx 0{,}0006554$.
- Вероятность того, что из 8 наудачу взятых изделий, 1 изделие оказалось стандартным: $P_8(1) = C_8^1 \cdot p^1 \cdot q^7 \approx 0{,}007864$.
- Вероятность того, что из 8 наудачу взятых изделий, 2 изделия оказались стандартными: $P_8(0) = C_8^2 \cdot p^2 \cdot q^6 \approx 0{,}04129$.

Тогда ответом будет: $P_8(m > 2) = 1 - \left(P_8(0) + P_8(1) + P_8(2)\right) = 1 - (0{,}0006554 + 0{,}007864 + 0{,}04129) \approx 0{,}9502$.

Пример 6: Вероятность вытащить выигрышный лотерейный билет равна 0,1. Найти вероятность того, что из 10 купленных билетов будет 1 или 2 выигрышных.

Аналогично найдём компоненты:

1) Из условия $n = 10$, $m = \{1, 2\}$. Заметим союз "или", который говорит о том, что найденные вероятности при $m = \{1, 2\}$ нужно будет потом сложить для получения итоговой вероятности.
2) Также из условия $p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Исходя из вышенаписанного, можно сделать вывод, что тут *уместно использовать формулу Бернулли*.

Тогда ответом на данную задачу будет: $P_{10}(1 \leq m \leq 2) = P_{10}(1) + P_{10}(2) = C_{10}^1 \cdot p^1 \cdot q^9 + C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 \approx 0{,}5811$.

ЗАДАНИЕ №6

Да, здесь уже будет теоретическая часть, и может быть что угодно, поэтому на данный момент разберём задачи, что доступны сейчас.

Пример 1: Укажите номер таблицы, которая задаёт закон распределения некоторой дискретной случайной величины ξ, если в верхней строке указаны значения, которые она принимает, а в нижней - вероятности того, что она принимает эти значения.

ξ	1	2	3	4
P	0,2	0,6	0,3	0,1

ξ	1	2	3	4
P	0,15	0,45	0,2	0,2

ξ	1	2	3	4
P	0,15	0,4	0,25	0,1

Дискретная случайная величина (сокр: д.с.в.) задаётся в данном случае таблицей (рядом распределения), где в первой строке расположены различные случайные величины, например количество проверенных деталей до первой бракованной, при условии, что их всего 4, а во второй строке вероятности появления этих величин. Во второй строке записываются вероятности появления данного события ξ_i.

Чтобы некая таблица задавала закон распределения некоторой д.с.в., необходимо:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

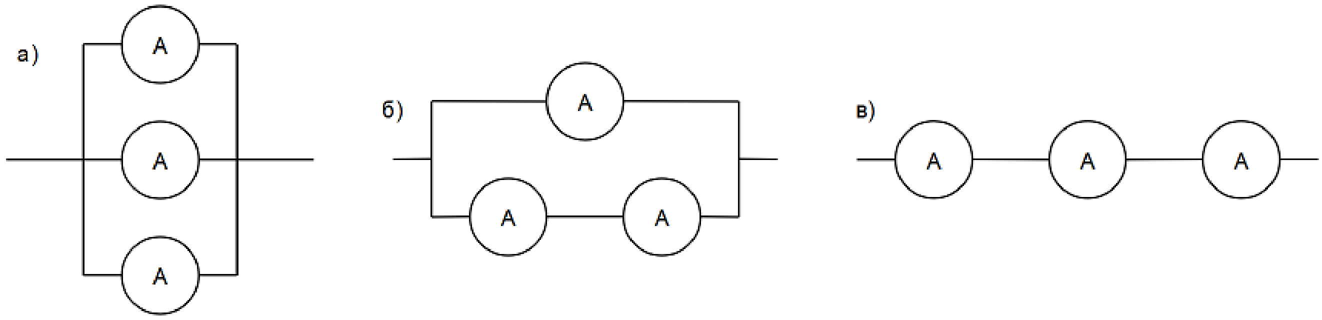
Т.е. д.с.в. является таковой, ⇔ сумма всех вероятностей при ξ_i равна единице.

Т.е. для решения данной задачи достаточно сложить все вероятности для каждого отдельного ряда распределения.

- Для первого ряда распределения: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1{,}2 \neq 1$ ⇒ этот ряд не задаёт закон распределения д.с.в.
- Для второго ряда распределения: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}15 + 0{,}45 + 0{,}2 + 0{,}2 = 1 = 1$ ⇒ этот ряд задаёт закон распределения д.с.в. Ответ найден.

- Для третьего ряда распределения: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}15 + 0{,}4 + 0{,}25 + 0{,}1 = 0{,}9 \neq 1 \Rightarrow$ этот ряд не задаёт закон распределения д.с.в.

Пример 2: На рисунке представлены три релейные схемы, состоящие из трёх элементов, имеющих одинаковую вероятность отказа, 0 < p < 1. Укажите номер наиболее надёжной схемы.



На самом деле можно прямо сейчас сказать, что самая надёжная схема под пунктом а), т.к. тут все узлы расположены параллельно, а значит для работы данной схемы достаточно, чтобы ХОТЯ БЫ один элемент был работоспособен. Но всё равно проведём вычисления, подтверждающие это.

Допустим вероятность отказа элемента p = 0,2, тогда вероятность работы схемы равна q = 1 – p = 1 – 0,2 = 0,8. Событие B – схема работоспособна.

1) Схема под пунктом а):

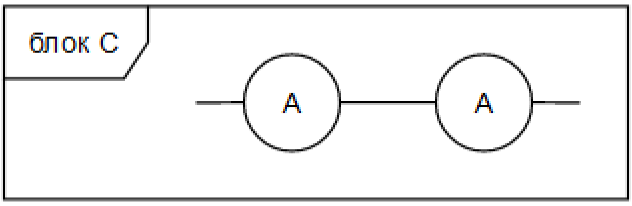
Как было описано выше, эта схема является самой надёжной, потому что все элементы в ней расположены параллельно.

Вероятность работоспособности схемы, найдём как параллельное соединение элементов, т.е. когда ХОТЯ БЫ один элемент работоспособен: $P(B) = 1 - p^3 = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992$.

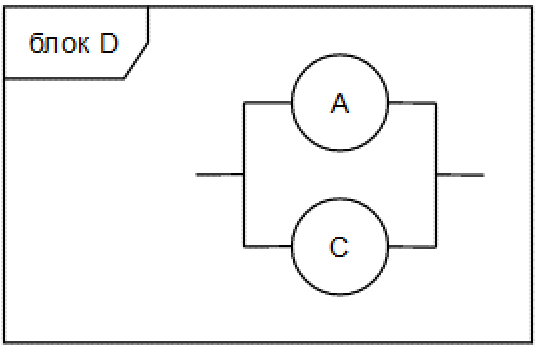
2) Схема под пунктом б):

Здесь уже нужно разбивать схему на более простые блоки и искать вероятности отказа блоков для нахождения итоговой вероятности работоспособности всей схемы.

Обозначим последовательный блок внизу схемы за “C”. А всю схему, включая блок “C” обозначим за “D”.



Вероятность работоспособности для блока C будет: $P(B_C) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$. Где $P(B_C)$ – вероятность работы блока “C”.



Вероятность $P(B_D)$ – это вероятность работы блока “D”, найдём как параллельное соединение: $P(B_D) = 1 - p \cdot p_c = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}36 = 0{,}928$, где p_c – вероятность отказа блока “C” = 1 – $P(B_C)$ = 1 – 0,64 = 0,36.

3) Схема под пунктом в):

Это будет самая ненадёжная схема, потому что она состоит целиком из последовательно соединённых элементов, значит вся схема работоспособна ⇔ все элементы работают, вероятность работы данной схемы:

$$P(B) = q \cdot q \cdot q = q^3 = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

Исходя из полученных данных видно:

- Самая надёжная схема будет под пунктом а). $P(B) = 0{,}992$, при p = 0,2.
- Далее идёт “гибридная” схема, состоящая из параллельного и последовательного соединения элементов: $P(B) = 0{,}928$, при p = 0,2.
- Самая ненадёжная схема, целиком состоящая из последовательно соединённых элементов: $P(B) = 0{,}512$, при p = 0,2.

Пример 3: Задан закон распределения дискретной случайной величины ξ. Выберите правильную формулу, по которой вычисляется дисперсия D(ξ).

1) $D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(\xi^2)\right)^2 \cdot p_i$ 2) $D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(\xi^2)\right) \cdot p_i$

3) $D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(\xi)\right)^2 \cdot p_i$

Здесь нужно просто запомнить формулу для нахождения дисперсии д.с.в., выглядит она следующим образом:

<u>Формула для вычисления дисперсии д.с.в. выглядит следующим образом:</u>

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(\xi)\right)^2 \cdot p_i$$

Тогда ответом будет 3).

(p.s. подробно про виды случайных величин и их числовые характеристики будет далее).

Пример 4: Отметьте ***верные*** свойства дисперсии, где ξ и η произвольные дискретные случайные величины, а С - константа.

1) $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$ 2) $D(C) = C$

3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$ 4) $D(\xi) \geq 0$

Здесь также просто нужно запомнить **все свойства дисперсии** д.с.в.:

1) $D(\xi) \geq 0$.
2) $D(C) = 0$.
3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$.
4) $D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta) -$ только для независимых д.с.в. ξ и η.

В задаче не сказано про зависимость/независимость данных случайных величин, поэтому ответом на задачу будет: 3) и 4).

ЗАДАНИЕ №7

В данном типе задач будут задания, связанные с **дискретными случайными величинами.** Для начала рассмотрим вкратце теорию для решения задач.

Дискретная случайная величина (сокращённо: д.с.в.) – случайная величина, которая принимает какие-либо определённые значения, т.е. в простом случае имеет несколько различных значений, поэтому данная величина называется дискретной.
Обычно случайные величины обозначаются буквами: ξ или η.
Простым примером дискретной случайной величины можно привести количество выпадения "орла" при пяти подбрасываниях монеты. Т.е. данная дискретная величина будет принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5, как можно видеть, количество значений ограничено и обозначает количество выпадения орла при пяти подбрасываниях монеты. Т.е. "орёл" может выпасть 0 раз, или 1 раз, или 2 раза или и тд.
Дискретная случайная величина задаётся определённой таблицей распределения (законом распределения или рядом распределения) в которой указаны все значения, которые принимает случайная величина, а также вероятность каждого из значений д.с.в.

ξ	1	2	…	n
P	p_1	p_2	…	p_n

Сумма всех вероятностей в таблице распределения равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Теперь перейдём к числовым характеристикам д.с.в.:

1) Математическое ожидание д.с.в.:

Математическое ожидание обозначается как $M(\xi)$, где ξ – какая-либо случайная величина и показывает среднее (**ожидаемое**) значение случайной величины ξ. Т.е. если имеется ряд распределения некой д.с.в., то мат. ожидание показывает наиболее усреднённое значение данной д.с.в.

На простом примере: Предположим, у 100 людей замерили рост, и выяснилось что средний рост = 173,6 см, тогда, если будем проверять 101 человека, то ожидаемый рост у него будет 173,6 см.

Для вычисления мат. ожидания будет достаточно ряда распределения д.с.в. Формула, для вычисления мат. ожидания:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot p_i$$

Где n – количество значений для случайной величины ξ, ξ_i – определённое значение случайной величины из таблицы распределения, p_i – вероятность для конкретного значения с.в. ξ.

Свойства математического ожидания:

- $M(C) = C,$ где $C -$ какая-либо константа.
- $M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi),$ где $C -$ какая-либо константа.
- $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta),$ где ξ и η – некие случайные величины.
- $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta),$ где ξ и η – некие случайные величины. Данное свойство работает только для **независимых** величин ξ и η!

2) Дисперсия д.с.в.:

Дисперсия ($D(\xi)$, где ξ – любая случайная величина) показывает, насколько сильно рассеяны значения случайной величины от математического ожидания. *Чем больше значения дисперсии, тем сильнее значения случайной величины отличаются от мат. ожидания.*

Формулы, для вычисления дисперсии:

1) $$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2$$

2) $$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - M(\xi)\big)^2 \cdot p_i$$

3) $$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$$

Свойства дисперсии:

- $D(\xi) \geq 0$.
- $D(C) = 0$, где C – константа.
- $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$, где C – константа.
- $D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta)$. Данное свойство работает только для **независимых** случайных величин ξ и η!

3) Среднеквадратическое отклонение д.с.в.:

Среднеквадратическое отклонение ($\sigma(\xi)$, где ξ – любая случайная величина) показывает, насколько сильно отклонилось текущее значение случайной величины от мат. ожидания, в отличие от дисперсии, среднеквадратическое отклонение показывает отклонение в тех же единицах измерения, что и сама случайная величина.

На простом примере: Предположим, у 100 людей замерили рост, и выяснилось что средний рост = 173,6 см, если проверим 101 человека, и его рост составит 175,2 см, то среднеквадратическое отклонение будет показывать в см, насколько сильно этот рост отклоняется от мат. ожидания.

Формула, для вычисления среднеквадратического отклонения:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$$

Теперь рассмотрим задачи.

Пример 1: Найти математическое ожидание дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения в виде таблицы, где в верхней строке указаны значения, которые она принимает, а в нижней вероятности того, что она принимает эти значения.

ξ	2	3	4	5
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Исходя из формул выше для нахождения мат. ожидания: $M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot p_i$

$M(\xi) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \cdot p_i = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}6$.

Пример 2: Найти дисперсию дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения в виде таблицы, где в верхней строке указаны значения, которые она принимает, а в нижней - вероятности того, что она принимает эти значения.

ξ	-2	1	3
P	0,5	0,2	0,3

Для нахождения дисперсии, нужно найти мат. ожидание:

$M(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \cdot p_i = -2 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}1$.

$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 \cdot p_i = (-2)^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}3 = 4{,}9$. В квадрат возводятся только значения самой д.с.в.!

Тогда дисперсия: $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 4{,}9 - 0{,}1^2 = 4{,}89$.

Пример 3: Найти математическое ожидание дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения в виде таблицы, где в верхней строке указаны значения, которые она принимает, а в нижней вероятности того, что она принимает эти значения.

ξ	2	0	1	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Аналогично:

$M(\xi) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i p_i = 2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}1$.

Пример 4: Найти дисперсию дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения в виде таблицы, где в верхней строке указаны значения, которые она принимает, а в нижней - вероятности того, что она принимает эти значения.

ξ	2	0	1
P	0,2	0,5	0,3

Аналогично, как в *примере 2*:

$M(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \cdot p_i = 2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}7$.

$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 \cdot p_i = 2^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}3 = 1{,}1$.

Тогда дисперсия: $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1{,}1 - 0,7^2 = 0{,}61$.

ЗАДАНИЕ №8

Задание на непрерывные случайные величины (сокр: н.с.в.). Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение аналогичны с дискретными случайными величинами, поэтому рассмотрим их вкратце, поменялись только формулы для их нахождения.

Дискретные случайные величины задаются своими рядами (таблицами или законами, но могут задаваться и функциями распределения), а *непрерывные* случайные величины задаются уже функциями распределения или функциями плотности распределения.

1) Функция распределения н.с.в.:

Функцией распределения случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение, меньшее чем x:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

Где $F(x)$ – функция распределения.

Свойства функции распределения:

- $0 \leq F(x) \leq 1$; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.
- $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$. Вероятность попадание случайной величины ξ в интервал $[x_1; x_2)$. ***Стоит отметить, что в случае н.с.в. строгость/нестрогость неравенства не играет роли!***
- $F(x)$ – неубывающая функция, это значит, что: $F(x_{i-1}) < F(x_i)$.
- $F(x)$ – непрерывная функция.
- $F(\xi = C) = 0$, где C ϵ $\mathbb{R}$. Обуславливается это тем, что площадь под графиком $F(x)$ является полной вероятностью наступления какого-то события, а площадь в отдельной точке = 0.

2) Функция плотности распределения н.с.в.:

Функция плотности распределения является производной от функции распределения, и обозначается как *f(x)*:

$$f(x) = F'(x)$$

Свойства функции плотности распределения:

- $f(x) \geq 0$.
- $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$.
- $P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.
- $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$ Основное тождество.

3) Математическое ожидание н.с.в.:

Формула для вычисления мат. ожидания непрерывной с. в. ξ:

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx.$$

Мат. ожидание квадрата н.с.в. ξ будет:

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx.$$

Все свойства мат. ожидания н.с.в. остаются такими же, как и для д.с.в.

4) Дисперсия н.с.в.:

Формулы для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины ξ:

1) $$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2.$$

2) $$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 \cdot f(x)\,dx.$$

3) $$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$$

Все свойства дисперсии н.с.в. остаются такими же, как и для д.с.в.

5) Среднеквадратическое отклонение н.с.в.:

Формула для вычисления среднеквадратического отклонения н.с.в. ξ:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}.$$

Все свойства с-кв. отклонения н.с.в. остаются такими же, как и для д.с.в.

Пример 1: Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятности $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ C \cdot (1 - x), & 1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$ Найти параметр C.

Для нахождения параметра C, воспользуемся основным тождеством:

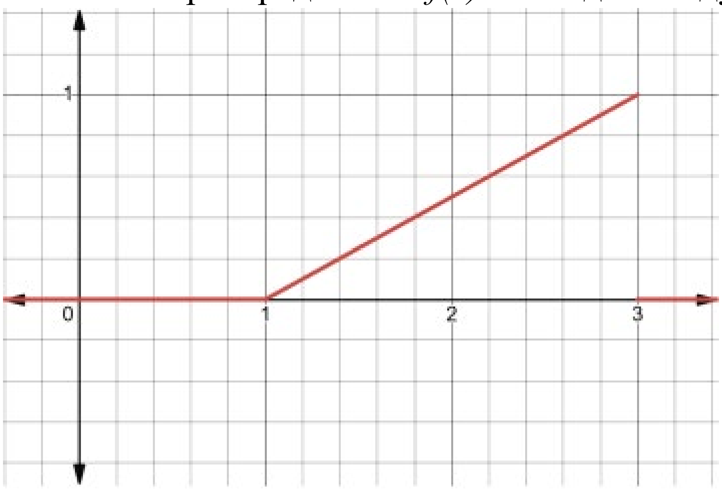
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Поскольку функция плотности распределения состоит из набора нескольких функций, разбитых по отрезкам, то общий интеграл нужно будет также разбить на 3 интеграла и решить уравнение:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\,dx}_{=0} + \int_{1}^{3} C \cdot (1 - x)\,dx + \underbrace{\int_{3}^{+\infty} 0\,dx}_{=0} = 1$$

$$C\colon \int_{1}^{3} C \cdot (1 - x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{3} (C - Cx)\,dx = 1 \Rightarrow \left(Cx - \frac{Cx^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{3} = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

График функции плотности распределения *f(x)* выглядит следующим образом:



Пример 2: Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \; x\le 0,\\ 3x^2, \; 0<x\le 1,\\ 0, \; x>1.\end{cases}$ Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

Для нахождения M(ξ) н.с.в. применим: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx.$

У нас функция плотности распределения опять состоит из трёх отрезков, поэтому интеграл разобьём на три интеграла:

$$M(\xi)=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot x\,dx}_{=0}+\int\limits_{0}^{1} 3x^2\cdot x\,dx+\underbrace{\int\limits_{1}^{+\infty} 0\cdot x\,dx}_{=0}=\int\limits_{0}^{1} 3x^3\,dx=\left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}.$$

График функции плотности распределения *f(x)* выглядит следующим образом:

Пример 3: Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{81}, & 0 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$ Найти дисперсию случайной величины ξ.

Как можно заметить, здесь указана *функция распределения*, вместо *функции плотности распределения*. Вспомним связь этих функций: $f(x) = F'(x)$.

Дифференцируем по каждому интервалу и получаем: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{2x}{81}, & 0 < x \le 9, \\ 0, & x > 9. \end{cases}$

Теперь можно искать дисперсию н.с.в. ξ: $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$.

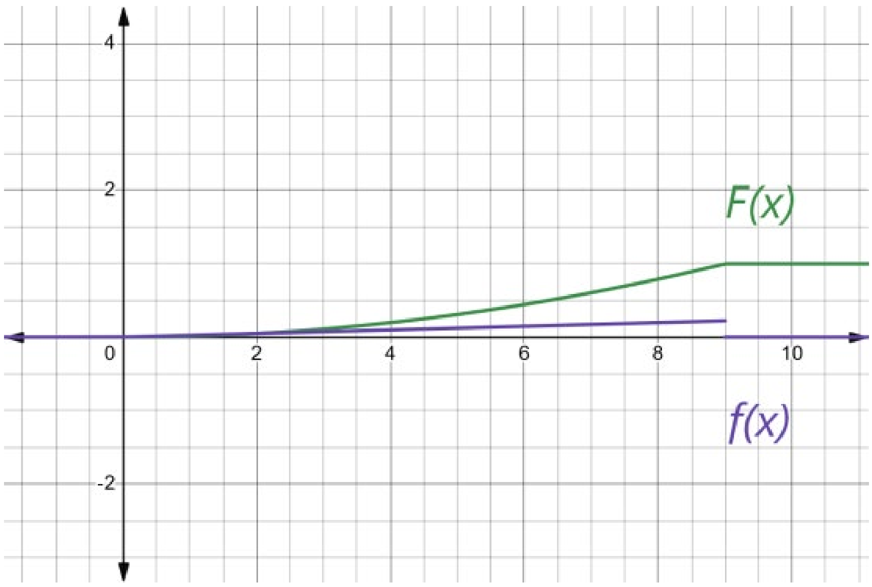
$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot x\,dx}_{=0} + \int_{0}^{9} \frac{2x}{81} \cdot x\,dx + \underbrace{\int_{9}^{+\infty} 0 \cdot x\,dx}_{=0} = \int_{0}^{9} \frac{2x^2}{81}\,dx =$$

$$= \left.\frac{2x^3}{243}\right|_0^9 = 6.$$

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{0}^{9} \frac{2x^3}{81}\,dx = \left.\frac{x^4}{162}\right|_0^9 = \frac{81}{2}.$$

Тогда окончательно: $D(\xi) = \frac{81}{2} - 6^2 = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Графики функции распределения и функции плотности распределения:



Пример 4: Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятности $f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ 6x^5,\ 0<x\le 1,\\ 0,\ x>1.\end{cases}$ Найти дисперсию случайной величины ξ.

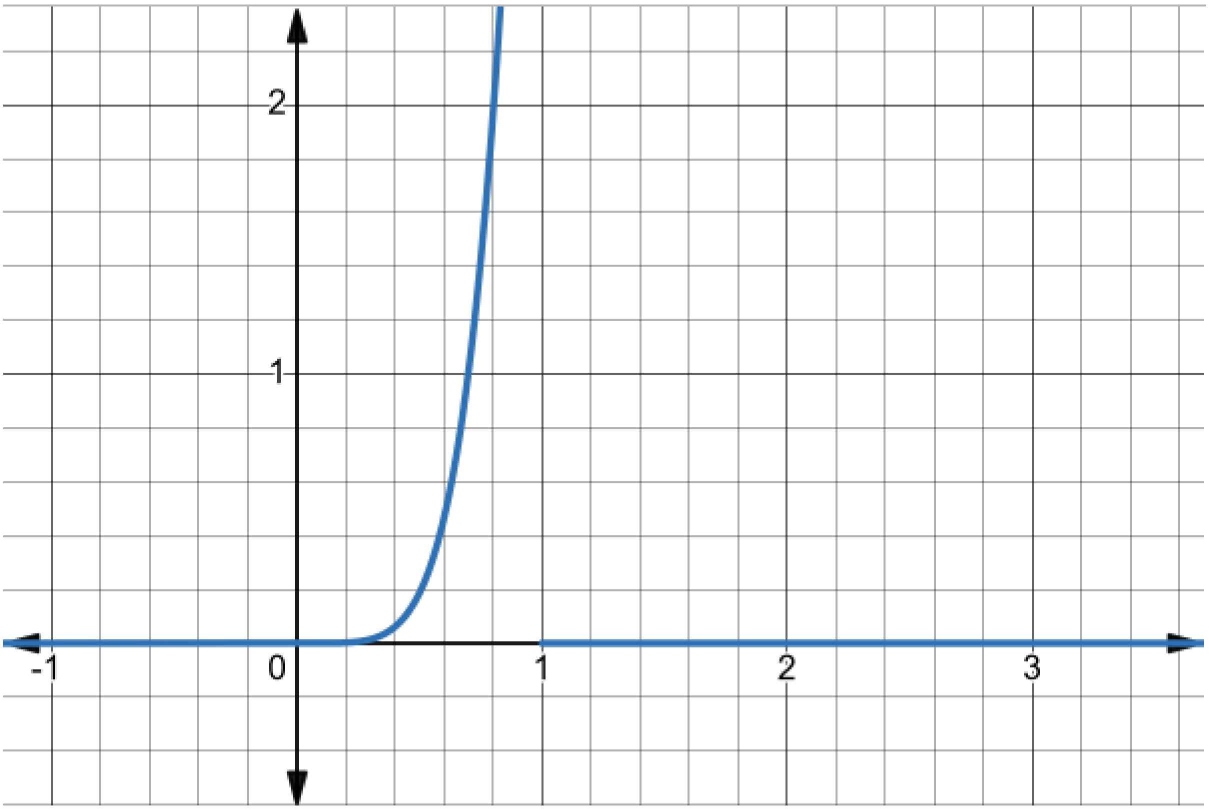
Кратко решим задачу, т.к. алгоритм решения был подробно описан выше.

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_{0}^{1} 6x^5\cdot x\,dx=\left.\frac{6x^7}{7}\right|_0^1=\frac{6}{7}.$$

$$M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx=\int_{0}^{1} 6x^5\cdot x^2\,dx=\left.\frac{3x^8}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}.$$

$$D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=\frac{3}{4}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{3}{196}.$$

График функции плотности представлен ниже:



ЗАДАНИЕ №9

Задание на математическую статистику.

Начнём с краткой теории.

Вариационный ряд – последовательность, состоящая из двух строк, в первой строке – наблюдаемые значения x_i, где x_i – называются *вариантами* (варианты могут быть любыми, приведёнными из реальной жизни: возраст, вес, количество детей в семье и т.д.), во второй строке расположены *частоты*, т.е. вероятности. Представляет собой что-то похожее на ряд распределения д.с.в.

Общий вид вариационного ряда:

Варианты x_i	x_1	x_2	…	x_n
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_n

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

1. Размахом для вариационного ряда будет: $max(x_i) - min(x_i)$. Размах можно сказать, представляет собой то, насколько ряд “длинный”.
2. Медиана в.р. – значение *варианты*, для которого количество *вариант* слева и справа одинаково, ищется как:
   - Если n – чётное число: $M_e = \frac{x_{n/2} + x_{(n/2)+1}}{2}$.
   - Если n – нечётное число: $M_e = x_{(n+1)/2}$.
3. Модой M_o вариационного ряда называется такая *варианта* x_i, у которой будет $max(m_i)$. Мода представляет собой самое многократное повторение какой-либо *варианты* в выборке, с наибольшей частотой появления.
4. Выборочное среднее для вариационного ряда обозначается как $\bar{x}$, а ищется следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

5. Выборочная дисперсия обозначается как S^2, находится как:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Где n – **объём выборки**.

Выборочная дисперсия, аналогично с обычной дисперсией, используется для характеристики разброса значений случайной величины относительно её среднего значения.

6. Несмещённая выборочная дисперсия (также называется “исправленная выборочная дисперсия”) обозначается как S^{*^2}, а находится как:

$$S^{*^2} = \frac{n}{n-1} \cdot S^2.$$

Где S^2 – **выборочная дисперсия**.

7. Функция Лапласа:

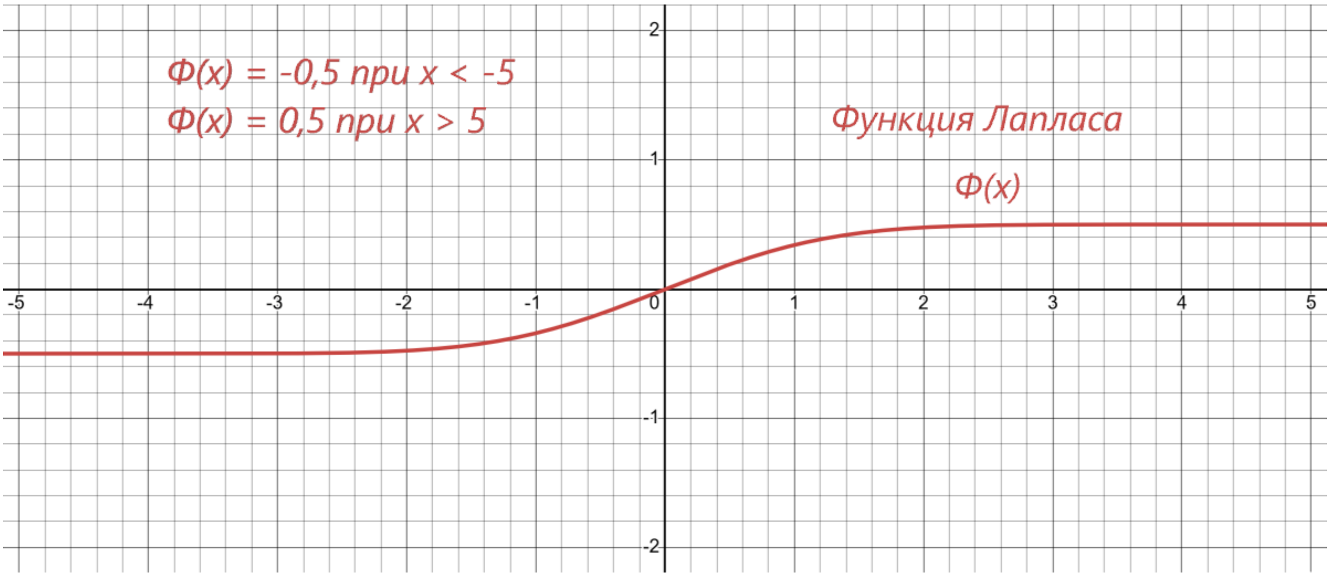
Прежде чем разобраться с доверительным интервалом, нужно понять, что такое функция Лапласа, поскольку она используется для вычисления определённого параметра в доверительном интервале.

Функция Лапласа имеет следующий вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Как можно видеть, данный определённый интеграл является *неберущимся*, т.е. его нельзя выразить через элементарные функции. Поэтому есть численно-приближённые значения для данной функции Φ(x), которые можно загуглить или посмотреть в разделе СДО → “Таблица для функции Лапласа”.

График данной функции Φ(x) выглядит следующим образом:



Можно заметить, данная функция является чётной, за исключением знака, этим будем пользоваться в дальнейшем.

8. Доверительный интервал – определённый интервал, внутри которого, с заданной/определённой точностью находятся какие-либо значения.

   Находится доверительный интервал так:

$$\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

- Где a – какое-либо искомое значение.
- $\bar{x} -$ выборочное среднее из выборки, как его искать было описано выше.
- t – необходимый параметр, который ищется как: $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, где γ (гамма) – вероятность попадания в интервал. Здесь как раз деление на 2, потому что функция является чётной, за исключением знака, поэтому достаточно узнать значение функции от нуля по координате “x”.

  Т.е. зная вероятность (надёжность) попадания в интервал, можно по таблице значений функции Φ(x) приблизительность найти параметр t.
- σ – среднеквадратичное отклонение.
- n – объём выборки (количество элементов).

$t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – задаёт целиком **радиус** доверительного интервала.

Пример 1: Дано распределение участников детско-юношеской спортивной секции по возрасту. Найти размах, моду и медиану данного вариационного ряда.

Возраст x_i	9	10	11	12	13	14
Количество человек m_i	2	1	3	4	2	1

Выпишем всю выборку, т.е. запишем всех людей, учитывая количество человек с одинаковым возрастом, это необходимо, чтобы правильно найти медиану:

$$\{\underbrace{\overset{x_1}{9}, \overset{x_2}{9}}_{\substack{\text{Два человека с}\\ \text{таким возрастом}\\ m_1}}, \underbrace{\overset{x_3}{10}}_{\substack{\text{Один человек с}\\ \text{таким возрастом}\\ m_2}}, \underbrace{\overset{x_4}{11}, \overset{x_5}{11}, \overset{x_6}{11}}_{\substack{\text{Три человека с}\\ \text{таким возрастом}\\ m_3}}, \underbrace{\overset{x_7}{12}, \overset{x_8}{12}, \overset{x_9}{12}, \overset{x_{10}}{12}}_{\substack{\text{Четыре человека с}\\ \text{таким возрастом}\\ m_4}}, \underbrace{\overset{x_{11}}{13}, \overset{x_{12}}{13}}_{\substack{\text{Два человека с}\\ \text{таким возрастом}\\ m_5}}, \underbrace{\overset{x_{13}}{14}}_{\substack{\text{Один человек с}\\ \text{таким возрастом}\\ m_6}}\}$$

Объём выборки равен: n = 2 + 1 + 3 + 4 + 2 + 1 = 13 – **нечётное число**.

- Чтобы найти размах, применим формулу, написанную выше: $max(x_i) - min(x_i)$. Где $max(x_i) = 14$, а $min(x_i) = 9$.
  Тогда размах равен: $max(x_i) - min(x_i) = 14 - 9 = 5$.
- Используя формулу для нахождения моды в.р.: $M_o = x_4 = 12$ – самая большая частота появления в выборке.
- Найдём медиану:
  Поскольку n – **нечётное число**, то будем использовать: $M_e = x_{(n+1)/2} = x_{(13+1)/2} = x_7 = 12$.

Пример 2: Дано распределение участников детской спортивной секции по возрасту. Найти выборочное среднее данного вариационного ряда.

Возраст x_i	8	9	10	11	12
Количество человек m_i	2	4	8	4	2

Чтобы найти выборочное среднее по формуле: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, сначала необходимо найти **объём выборки n**.

Объём выборки n = 2 + 4 + 8 + 4 + 2 = 20.

Тогда $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1}{20}(8\cdot 2 + 9\cdot 4 + 10\cdot 8 + 11\cdot 4 + 12\cdot 2) = 10.$$

Пример 3: Лаборатория электролампового завода провела испытания 10 ламп на продолжительность горения и получила следующие результаты (в часах): 820, 820, 822, 822, 825, 825, 826, 826, 826, 841. Найти моду и разность между выборочным средним и медианой данного вариационного ряда.

Здесь не дан вариационный ряд, значит здесь сразу представлена выборка $\{x_i\}$.

- Поэтому объём выборки будет: n = |{820, 820, 822, 822, 825, 825, 826, 826, 826, 841}| = 10.
- Мода: $M_o = 826$. Самая большая частота появления в выборке.
- Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i =$$

$$= \frac{1}{10}(820 + 820 + 822 + 822 + 825 + 825 + 826 + 826 + 826 + 841) = 825{,}3.$$

- Медиана: Поскольку n = 10 – чётное, то $M_e = \frac{x_{n/2} + x_{(n/2)+1}}{2}$:

$$M_e = \frac{x_{10/2} + x_{(10/2)+1}}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{825 + 825}{2} = 825.$$

- Тогда разность между выборочным средним и медианой будет:

$$\bar{x} - M_e = 825{,}3 - 825 = 0{,}3.$$

Пример 4: Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания а, если выборочное среднее $\bar{x}$ = 32, объём выборки n = 36 и радиус доверительного интервала равен 1,5.

Т.к. заданы все величины, а именно $\bar{x}$ = 32, $t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 1,5, можно составить доверительный интервал:

$$I_\gamma\left(\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (32 - 1{,}5;\ 32 + 1{,}5) = (30{,}5; 33{,}5).$$

Пример 5: Пусть имеется следующая выборка: (-4, -1, 1, 4, 5). Найти несмещённую (исправленную) выборочную дисперсию.

Для нахождения несмещённой **выборочной дисперсии**, найдём сначала обычную **выборочную дисперсию**, для которой нужно найти **выборочное среднее**. Чтобы его найти, необходимо сначала найти **объём выборки**, выборка дана по условию.

1) Объём выборки: n = – 4 – 1 + 1 + 4 + 5 = 5.
2) Выборочное среднее: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(-4 - 1 + 1 + 4 + 5) = 1$.
3) Выборочная дисперсия: $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5}((-4-1)^2 + (-1-1)^2 +$ $+(1-1)^2 + (4-1)^2 + (5-1)^2) = \frac{1}{5}(25 + 4 + 9 + 16) = \frac{54}{5}$.
4) Несмещённая выборочная дисперсия: $S^{*2} = \frac{n}{n-1} \cdot S^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{54}{5} = \frac{27}{2}$.

Как можно видеть, последние задачи в основном на знание формул, поэтому нужно просто запомнить формулы.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1) **Задачи с картами.**

Всего может 52, 54 карты или 36 карт, обычно число кратно 4. Везде есть 4 масти: Трефы (Крести), Бубны, Черви, Пики. Ознакомиться с комбинациями карт, по типу “Фулл хаус” или “Флеш” и какие карты бывают лучше всего в интернете, например тут: https://www.youtube.com/watch?v=dQw4w9WgXcQ.

Пример 1: Из колоды в 36 карт наудачу выбирают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется две дамы?

Событие А – из наудачу взятых трёх карт будет две дамы.

В данной колоде 36 карт, значит в ней находится 4 дамы всего, по одной даме каждой масти.

Заметим, что нам без разницы как доставать дамы, т.е. порядок не важен. Значит будем использовать *сочетания*, т.к. элементов множество. Используем классическую модель вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$.

1. **Общее число исходов n:**

   “Сколькими способами можно достать 3 карты из 36?”. Здесь n = $C_{36}^{3} = 7140$.

2. **Число благоприятных исходов m:**

   Нам нужно достать две дамы, без разницы какой масти, это значит, что из всех дам, что есть в колоде нужно достать ровно две И из остальных карт нужно достать одну другую карту, поэтому: $m = C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{1} = 192$.

   Здесь число 32 обозначает “другие карты”, ведь нам нужно достать любую карту, кроме дамы из колоды, а дам в колоде всего 4, поэтому: 36 – 4 = 32.

Тогда вероятность события А:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{1}}{C_{36}^{3}} = \frac{192}{7140} \approx 0{,}027.$$

Пример 2: Полная колода карт (52 листа) делится пополам. Найти вероятность того, что число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

Событие A – число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

В колоде ровно половина карт являются чёрными и ровно половина карт являются красными (см. состав колоды в интернете), т.е. |красные карты| = |чёрные карты| = 26 карт.

Будем использовать классическую модель: $P(A) = \frac{m}{n}$.

По условию, полная колода карт делится пополам, т.е. по 26 карт. А также нам без разницы какой порядок будет у карт, ведь условно: {“дама из трефовой масти”} = {“дама бубновой масти”}. Главная задача, понять, скольким способами можно разделить 52 карты из колоды пополам.

Также, исходя из условия, чтобы число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым, нужно чтобы:

1. Нужно выбрать 13 чёрных карт из 26 для одной из пачек. Количество способов сделать это: $A_{чр} = C_{26}^{13} = 10400600$.
2. Аналогично, нужно выбрать 13 красных карт из 26 для одной из пачек. Количество способов сделать это: $A_{кр} = C_{26}^{13} = 10400600$.
3. Общее число всех вариантов разделить колоду из 52 карт пополам: $n = C_{52}^{26} = 495918532948104$.

Тогда вероятность события A:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A_{чр} \cdot A_{кр}}{n} = \frac{10400600 \cdot 10400600}{495918532948104} \approx 0{,}2181.$$

Пример 3: Из колоды 36 карт случайным образом выбирают восемь. Найти вероятность того, что среди них: три пики, две черви и одна бубны.

Задача очень похожа на задачу из *примера 1*, поэтому подробно рассказывать нет большого смысла.

Событие А – из случайно выбранных 8 карт окажется: три пики, две черви и одна бубны.

Как известно, в колоде из 36 карт есть 4 масти: Трефы, Бубны, Черви, Пики, и в каждой масти есть 9 карт. Поэтому:

1. **Общее число исходов n:** $n = C_{36}^{8} = 30260340$ вариантов.
2. **Число благоприятных исходов m:** $m = C_9^3 \cdot C_9^2 \cdot C_9^1 \cdot C_9^2 = 979776$. Из каждой масти нам нужно взять сколько-то карт, чтобы всего было 8 взятых карт, данная задача очень похожа на задачу из *примера 1*.

Тогда вероятность события А:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{979776}{30260340} \approx 0{,}03238.$$

Пример 4: Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Какова вероятность вытащить комбинации **а)** «стрит», т.е. пять карт подряд идущего достоинства; **б)** «фулл хаус», т.е. три карты одного достоинства и две другого?

Для каждого из пунктов будем использовать классическую модель: $P(A) = \frac{m}{n}$.

1) Пункт а):

Событие А – получение комбинации «стрит» из наугад взятых 5 карт.

Для поиска общего числа исходов, подумаем, должны ли мы учитывать порядок следования элементов, в данном случае карт. И ответ – нет, ведь нам без разницы как вытаскивать карты, главное, чтобы они давали комбинацию «стрит». Поэтому:

- Общее число n: $n = C_{52}^{5} = 2598960$ комбинаций всего из 5 карт.
- Число благоприятных исходов m:

  Заметим, что в колоде 52 карты, всего 10 возможных стритов (от A-2-3-4-5 до 10-J-Q-K-A), а также, каждый «стрит» можно составить из 4 мастей на каждую карту.

  Поскольку карт достаётся пять по условию, то m = $10 \cdot 4^5 = 10240$.

Значит вероятность события А:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10240}{2598960} \approx 0{,}00394.$$

2) Пункт б):

Событие А – получение комбинации «фулл хаус» из наугад взятых 5 карт

Данный пункт задачи похож на предыдущий, главное понимать, как составляются различные комбинации карт из колоды.

- Число всех исходов n: $n = C_{52}^{5} = 2598960$ комбинаций всего из 5 карт.
- Число благоприятных исходов m:

  Чтобы выбрать «фулл хаус», необходимо:

  1. Выбрать достоинство для тройки: $m_1 = C_{13}^{1} = 13$.
  2. Выбрать 3 карты из этого достоинства: $m_2 = C_4^3 = 4$.
  3. Выбрать достоинство для пары: $m_3 = C_{12}^{1} = 12$.
  4. Выбрать 2 карты из этого достоинства: $m_4 = C_4^2 = 6$.

  Теперь общее количество всех комбинаций «фулл хаус» будет равно:

  $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$.

Тогда итоговая вероятность для события А:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3744}{2598960} \approx 0{,}00144.$$

2) **Остальное.**

Здесь будут в основном задачи из первых номеров, которых может быть большое количество вариантов. Поэтому рассмотрим некоторые примеры, в том числе из контрольных работ.

Пример 1: На полке случайным образом расставлено 7 книг. Предполагая, что различные расположения книг равновозможны, найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

Здесь будем использовать классическое определение вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$, где событие А – две определённые книги окажутся рядом.

В задаче написано, что различные расположения книг равновозможны, т.е. по сути уже можно сформулировать вопрос: "Сколькими способами всего можно разместить или переставить 7 книг?". На данный вопрос отвечают перестановки, а значит:

$$n = P_n = P_7 = 7! = 5040.$$

Для нахождения m, нужно понять, как переставить все книги так, чтобы две определённые были ВМЕСТЕ? Таким образом нам нужен определённый *блок из двух книг* (для простоты, можно сказать, что блок состоит из книг: "Грокаем алгоритмы" и "Философия Java"), которые всегда будут вместе, но внутри этого блока ведь тоже можно переставить эти две книги между собой, поэтому:

$$m_1 = P_2 = 2! = 2.$$

Но это ещё не всё, ведь этот блок также может быть переставлен среди оставшихся книг каким-либо образом, поэтому:

$$m_2 = P_6 = 6! = 720.$$

Где 6! = 720 обозначает перестановки всех книг И перестановку целого блока тоже среди оставшихся мест на полке.

Т.е. целый блок книг мы считаем за одну книгу.

Графическая иллюстрация:

Тогда $m = m_1 \cdot m_2$. Так-как каждой перестановке m_2 книги будет соответствовать ровно $m_1 = 2! = 2$ возможные комбинации перестановок внутри блока.

Значит вероятность расположения двух определённых книг вместе будет:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1440}{5040} \approx 0{,}286.$$

Пример 2: В коробке из 20 конфет 5 - с ореховой начинкой, 7 - с фруктовой, остальные конфеты шоколадные. Найти вероятность того, что из четырех взятых конфет будут: **а)** три шоколадные и одна с фруктовой начинкой; **в)** хотя бы одна шоколадная.

Пункт а):

Событие А – из четырёх взятых конфет будут три шоколадные и одна с фруктовой начинкой.

Здесь уже есть союз И, значит уже есть намёк на умножение.

Всего имеется 20 конфет. Взяли четыре конфеты, они могут быть какие-угодно (по условию).

Вероятность события А будем искать по классической модели вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$, потому что у нас есть все комбинации взять 4 конфеты из 20 возможных, а удовлетворяют условию только определённые комбинации, а именно: достать из четырёх конфет три шоколадные и одна с фруктовой начинкой.

Немного подумав, можно сказать, что порядок следования конфет неважен, потому что без разницы, достать сначала шоколадную конфету, а потом с фруктовой начинкой или наоборот, ведь от этого событие А никак не меняется. Значит будем использовать *сочетания*.

- Где n (все различные комбинации достать 4 конфеты из 20) = $C_{20}^4 = 4845$.
- Для поиска m необходимо понять, что нам нужно, чтобы из всех шоколадных конфет достали только три И чтобы среди всех конфет с фруктовой начинкой взяли только одну.

  Всего конфет 20 единиц, 5 с ореховой начинкой, 7 с фруктовой, значит с шоколадной: 20 – 5 – 7 = 8 единиц.

  Тогда m = $C_8^3 \cdot C_7^1 = 56 \cdot 7 = 392$.

Тогда ответом будет: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{392}{4845} \approx 0{,}081$.

Пункт в):

Здесь событие А – из четырёх взятых конфет хотя бы одна шоколадная.

Про словосочетания ХОТЯ БЫ было описано выше.

Удобнее найти противоположное событие $\bar{A}$ – из четырёх взятых конфет будет 0 шоколадных, и вычесть из единицы для получения ответа. Это означает, что из всех конфет, КРОМЕ шоколадных нужно достать ровно 4.

- Тогда n остаётся таким же: n = 4845.
- По описанию выше можно сделать вывод, что: $m = C_{12}^4 = 495$. По условию нам нужно достать ровно 4 конфеты, а всего у нас конфет кроме шоколадных ровно 12.

Тогда ответом будет: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{495}{4845} \approx 0{,}898$.

Пример 3: При нажатии кнопки «пуск» станок начинает работать с вероятностью 0,8. Найдите вероятность того, что для запуска станка придётся нажать не менее трех раз.

Обозначим событие А – для запуска станка придётся нажать не менее трёх раз, т.е. 3 раза ИЛИ 4 раза ИЛИ 5 раз или и т.д. Очевидно считать напрямую невозможно, т.к. получается бесконечная сумма (за счёт союза ИЛИ).

Конечно, можно посчитать, используя геометрическое распределение :), но мы поступим по-другому, а именно через **нахождение обратного события**, а именно: $\bar{A}$ – для запуска станка придётся нажать менее трёх раз, если точнее, то 1 раз ИЛИ 2 раза. Данное событие легче считать.

- Обозначим вероятность работы станка: p = 0,8.
- Тогда вероятность отказа станка: q = 1 – p = 1 – 0,8 = 0,2.

Тогда вероятность $P(\bar{A})$ будет состоять из суммы двух вероятностей:

1) Для запуска станка придётся нажать 1 раз, т.е. станок сразу запустится: $P(\bar{A}_1) = 0{,}8$.
2) Для запуска станка придётся нажать 2 раза, это значит, что в первый раз станок не должен запуститься И во второй раз должен запуститься. Значит нам нужно перемножить вероятность отказа станка в первый раз И вероятность запуска станка во второй раз: $P(\bar{A}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$.

Тогда вероятность запуска станка при одном нажатии кнопки «пуск» ИЛИ при двух нажатиях: $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) = 0{,}8 + 0{,}16 = 0{,}96$.

Тогда вероятность запуска станка при нажатии не менее чем трёх раз на кнопку «пуск» будет: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$.

Пример 4: Из 12 вопросов к зачёту студент отлично подготовил 6, и 3 подготовил посредственно. В билете 3 вопроса. Найдите вероятность того, что в билете хотя бы два вопроса которые студент знает.

Кратко опишу решение, т.к. здесь нет ничего нового, главное правильно понять условие задачи.

Событие А – в билете хотя бы два вопроса, которые студент знает (подразумевается, что он подготовил вопросы, которые знает отлично или посредственно).

Под словом “знает” подразумеваются все вопросы, которые он подготовил (отлично или посредственно), их всего 9. Значит остальные 3 вопроса он **не знает**.

Вероятность будет как дробь: $P(A) = \frac{m}{n}$.

- Найдём общее число исходов:

  Всего вопросов 12. Если в ОДНОМ билете 3 вопроса, то общее количество вариантов будет: $n = C_{12}^3 = 220$. *Порядок следования вопросов неважен.*
- Благоприятные исходы:

  Хотя бы два вопроса, которые студент знает, а в билете всего 3 вопроса. Значит “хотя бы два” означает, что студент знает 2 вопроса И один вопрос не знает ИЛИ студент знает все 3 вопроса в билете И 0 не знает.

  Поэтому $m = C_9^2 \cdot C_3^1 + C_9^3 \cdot C_3^0 = 36 \cdot 3 + 84 = 192$.

Проще говоря, нужно, чтобы из ВСЕХ вопросов в билете, которые он **знает**, выпало ровно два таких И из всех вопросов, которые он **не знает**, нужно, чтобы выпал ровно 1 такой ИЛИ чтобы из ВСЕХ вопросов, которые он **знает**, выпали все такие (т.е. 3 вопроса) И из всех вопросов, которые он **не знает**, нужно, чтобы выпало 0 таких.

Значит вероятность того, что в билете хотя бы два вопроса которые студент знает:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{192}{220} \approx 0{,}872$.

Пример 5: Саша и Петя соревнуются в стрельбе по мишени. Они стреляют по очереди до первого попадания, начинает Саша. Всего проводится не более четырех выстрелов. Вероятность того, что Саша попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,4. Вероятность того, что Петя попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Найдите вероятность того, что победителем будет Петя.

Событие А – победителем будет Петя.

Чтобы победил Петя, нужно, чтобы он первым попал в мишень. Для этого составим небольшую таблицу:

	В-ть попадания, p	В-ть промаха, q
Саша	$p_с = 0,4$	$q_с = 0,6$
Петя	$p_п = 0,6$	$q_п = 0,4$

Всего производится 4 выстрела, значит, чтобы победил Петя необходимо:

1) **Саша промахнулся, а Петя сразу попал в мишень:**

   Если начинает Саша, то Саша должен промахнуться, И Петя должен попасть в мишень, т.е.: $P(A_1) = q_с \cdot p_п = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.

2) **Саша промахнулся, потом Петя промахнулся, потом Саша промахнулся, потом Петя попал в мишень:**

   При таком раскладе будет совершено ровно 4 выстрела, и Петя победит.

   Поскольку условие для выигрыша звучит так: "*Саша промахнулся И Петя промахнулся И Саша Промахнулся И Петя наконец попал*". Следовательно, нужно будет перемножить вероятности:

$$P(A_2) = q_с \cdot q_п \cdot q_с \cdot p_п = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}0864.$$

Теперь для получения итоговой вероятности выигрыша Петя, нужно чтобы первый пункт выполнился ИЛИ второй пункт выполнился, поэтому:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}36 + 0{,}0864 = 0{,}4464.$$

Легко проверить правильность найденной вероятности, ведь сумма вероятностей всех исходов соревнования должна давать 1, найдём ещё два случая исхода данного соревнования:

1) Победит Саша:

Событие А – выиграет Саша, тогда:

$$P(A) = p_с + q_с \cdot q_п \cdot p_с = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}496.$$

2) Будет ничья:

Событие А – будет ничья, тогда:

$$P(A) = q_с \cdot q_п \cdot q_с \cdot q_п = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}0576.$$

Сумма всех вероятностей событий действительно даёт 1, поэтому всё верно!

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{i}) = 0{,}4464 + 0{,}496 + 0{,}0576 = \mathbf{1}.$$

Пример 6: Имеется 10 карточек с буквами: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Эти карточки случайным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность, что получится слово МАТЕМАТИКА.

Определим событие А – получится слово “МАТЕМАТИКА” из разложенных случайным образом карточек в ряд.

Из условия задачи можно сказать, что карточек становится всё меньше с каждой новой разложенной. Тогда можно сказать, что здесь вероятность положить следующую карточку в ряд будет **зависеть** от предыдущих вероятностей положить какую-то букву в ряду. Поэтому здесь события зависимые.

Для понимания, будем обозначать событие А индексом каждой буквы из 10 карточек.

Найдём *начальные* вероятности достать каждую букву из 10 карточек:

- **Буква А**: изначально таких букв всего m = 3, а всего карточек n = 10, поэтому: $P(A_\mathrm{А}) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10}$.
- **Буква Е:** изначально таких букв всего m = 1, а всего карточек n = 10, поэтому: $P(A_\mathrm{Е}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}$.

- **Буква И:** изначально таких букв всего m = 1, а всего карточек n = 10, поэтому: $P(A_{\text{И}}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}$.
- **Буква К:** изначально таких букв всего m = 1, а всего карточек n = 10, поэтому: $P(A_{\text{К}}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}$.
- **Буква М:** изначально таких букв всего m = 2, а всего карточек n = 10, поэтому: $P(A_{\text{М}}) = \frac{m}{n} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
- **Буква Т:** изначально таких букв всего m = 2, а всего карточек n = 10, поэтому: $P(A_{\text{Т}}) = \frac{m}{n} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Теперь подумаем, ведь с каждой новой положенной буквой в ряду, последующие вероятности положить какую-то новую букву в ряду будут меняться, и меняться будут по-разному, в зависимости какая буква будет положена.

Например, если изначально вероятность достать букву "А" равняется: $P(A_{\text{А}}) = \frac{3}{10}$, то для последующего доставания буквы "А" вероятность будет уже: $P(A_{2\text{А}}) = \frac{2}{9}$, потому что, если одна буква "А" уже положена в ряд, то всего букв "А" будет на единицу меньше, и общее количество карточек с буквами тоже уменьшится на единицу!

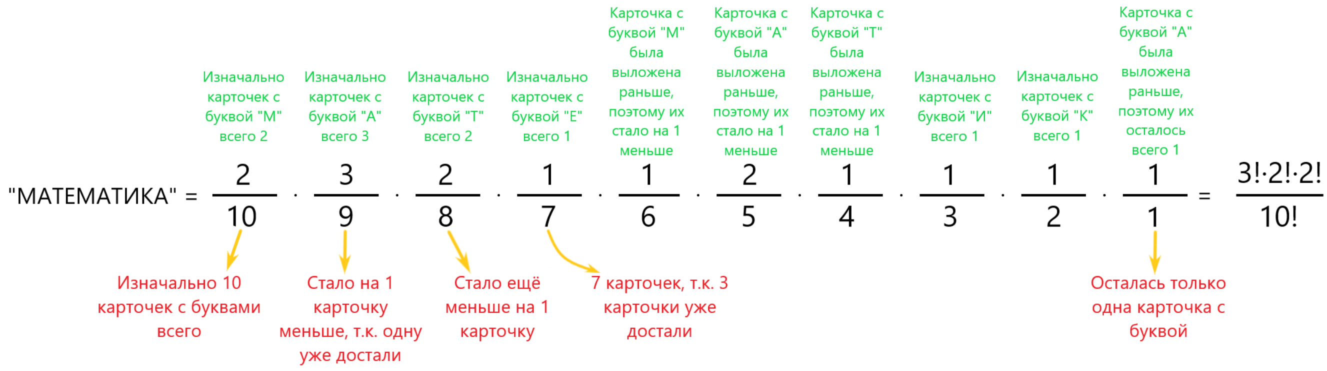
Но если же сначала будет извлечена буква "М", вероятность будет: $P(A_{\text{М}}) = \frac{2}{10}$ (нашли выше), и тогда вероятность достать, к примеру букву "Е" будет уже: $P(A_{\text{Е}}) = \frac{1}{9}$, потому что букв "Е" осталось столько же, но букв всего уменьшилось на единицу, т.к. ранее достали букву "М".

Также стоит отметить, что мы рассматриваем как-бы одно действие, т.е. за одно действие должны быть разложены буквы в ряд и образовать слово "МАТЕМАТИКА", поэтому вероятности будем перемножать.

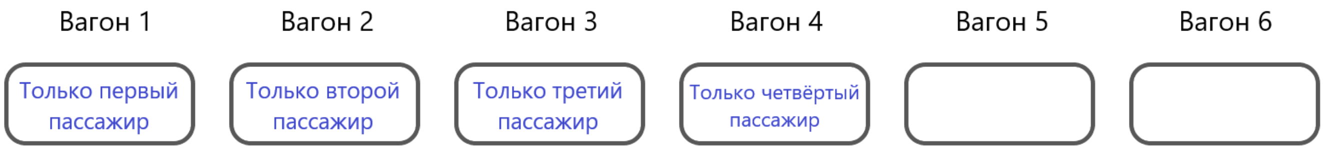
Исходя из вышенаписанного, ответом будет:

$$P(A) = P(A_{\text{М}}) \cdot P(A_{\text{А}}) \cdot P(A_{\text{Т}}) \cdot P(A_{\text{Е}}) \cdot P(A_{2\text{М}}) \cdot P(A_{2\text{А}}) \cdot P(A_{2\text{Т}}) \cdot P(A_{\text{И}}) \cdot P(A_{\text{К}}) \cdot$$
$$\cdot P(A_{3\text{А}}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{151200} \approx 0.00000661376.$$

Рисунок для наглядности:



Пример 7: Четыре пассажира случайным образом рассаживаются по шести вагонам. Определить вероятность того, что в первых четырёх вагонах окажется по одному пассажиру.



Событие А – в первых четырёх вагонах окажется по одному пассажиру.

Будем искать вероятность Р(А) по классической модели: $P(A) = \frac{m}{n}$.

1. **Общее число исходов n:**

   Можно сформулировать вопрос: “А сколькими способами можно всего <u>разместить</u> 4 человека по 6 вагонам всего?”. Этот вопрос должен натолкнуть на мысль о использовании <u>размещений с повторениями</u>, ведь у каждого пассажира есть выбор: <u>*Сесть в каждый из 6 доступных вагонов всего*</u>. Т.е. у первого пассажира есть выбор сесть в любой из 6 вагонов И у второго такой же выбор И у третьего, И у четвёртого пассажира такой же выбор.

   Значит:

   $n = \bar{A}_6^4 = \underline{\ 6\ }\ \underline{\ 6\ }\ \underline{\ 6\ }\ \underline{\ 6\ } = 6^4 = 1296.$

Т.е. вагоны могут “повторяться” между разными пассажирами.

2. **Число благоприятных исходов m:**

   Немного подумав, можно прийти к выводу, что: Если у первого человека есть выбор сесть в любой из 6 вагонов, то у второго человека есть на выбор всего 5 вагонов, у третьего есть всего 4 вагона на выбор, у четвёртого есть только 3 вагона выбор. Потому что в предыдущем вагоне/вагонах уже сидит/сидят человек/люди и только тогда будет выполняться условие, чтобы они сидели в разных вагонах. А на данный вопрос отвечает *размещение без повторений*.

   Поэтому m = $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$.

Тогда вероятность события A: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{360}{1296} \approx 0{,}278$.

Пример 8: Найти вероятность того, что при 9 бросках кости шестерка выпадет: **а)** 3 раза, **б)** менее 8 раз.

Как известно, на игральной кости 6 граней, и на каждой грани расположено количество точек, обозначающих само число. Шестёрка на игральной кости только одна, поэтому:

- Вероятность выпадения шестёрки на грани кости: $p = \frac{1}{6}$.
- Вероятность выпадения другого числа на грани кости: $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Поскольку здесь нужно найти вероятность появления события какое-то количество раз, то используем формулу Бернулли:

Пункт а):

Здесь событие A – при 9 бросках кости шестёрка выпадет ровно 3 раза.

- Общее количество испытаний: n = 9 (по условию).
- Количество благоприятных испытаний: m = 3 (по пункту “а”).

Тогда вероятность того, что при 9 бросках кости шестёрка выпадет ровно 3 раза:

$$P(A) = P_9(3) = C_9^3 \cdot p^3 \cdot q^{9-3} = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}1302.$$

Пункт б):

Определимся с событием: А – при 9 бросках игральной кости, шестёрка выпадет менее 8 раз. Т.е. шестёрка может выпасть 0 раз ИЛИ 1 раз ИЛИ 2 раза ИЛИ 3 раза ИЛИ 4 раза или и т.д. до 7 раз. Считать вероятность для данных событий довольно накладно, поэтому опять вычислим противоположную вероятность, а именно: $P(\bar{A})$, где $\bar{A}$ – вероятность выпадения шестёрки на кости **не меньше 8 раз**, т.е. шестёрка может выпасть 8 раз ИЛИ все 9 раз.

1) Шестёрка выпадет ровно 8 раз при 9 бросках кости: $P_9(8) = C_9^8 \cdot p^8 \cdot q^{9-8} \approx$ 0,0000045. Очень малая вероятность.
2) Шестёрка выпадет ровно 9 раз при 9 бросках кости: $P_9(9) = C_9^9 \cdot p^9 \cdot q^{9-9} \approx$ 0,000000099. Вероятность ещё меньше.

Тогда: $P(\bar{A}) = P_9(8) + P_9(9) = 0{,}0000045 + 0{,}000000099 \approx 0{,}0000046$.

Тогда вероятность выпадения шестёрки на кости менее 8 раз при 9 бросках всего: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}0000046 \approx 0{,}999995$.

Пример 9: Страховая компания проводит страхование 2000 однотипных объектов. Вероятность наступления страхового случая для каждого из объектов (независимо от других) за время t равна 0,003. Найдите вероятность того, что за время t страховой случай: **а)** не наступит; **б)** наступит не менее двух раз; **в)** наступит хотя бы один раз.

Вкратце рассмотрим данную задачу, ведь если Ты, да-да, Ты, дочитал/а до сюда, то уже должен/а шарить, как решать такие номера.

Данная задача на формулу Пуассона, потому что общее число испытаний большое, а вероятность события очень маленькая.

- Найдём p и n: По условию n = 2000, а вероятность p = 0,003.
- Найдём лямбду: $\lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}003 = 6$.

Пункт а):

"Не наступит" означает, что число m = 0, поэтому ответом будет:

$$P_n(m) = P_{2000}(0) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{6^0}{0!} \cdot e^{-6} \approx 0{,}0025.$$

Пункт б):

"Наступит не менее двух раз" означает, что страховой случай наступит 2 раза ИЛИ 3 раза ИЛИ 4 раза ИЛИ и т.д. Поэтому данную вероятность проще вычислить через противоположную вероятность: *Вероятность того, что страховой случай наступит менее двух раз*, значит страховой случай должен наступить 0 раз ИЛИ 1 раз, поэтому:

- Страховой случай наступит m = 0 раз: $P_{2000}(0) = 0{,}0025$. (нашли выше).
- Страховой случай наступит m = 1 раз:

$$P_n(m) = P_{2000}(1) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{6^1}{1!} \cdot e^{-6} \approx 0{,}01487.$$

Тогда ответом на данный пункт задачи будет:

$$P_n(m) = P_{2000}(m > 2) = 1 - \left(P_{2000}(0) + P_{2000}(1)\right) = 1 - (0{,}0025 + 0{,}01487) =$$
$$= 0{,}98263.$$

Пункт в):

"Наступит хотя бы один раз" означает, что страховой случай должен наступить 1 раз ИЛИ 2 раза ИЛИ 3 раза ИЛИ и т.д., поэтому ответом будет:

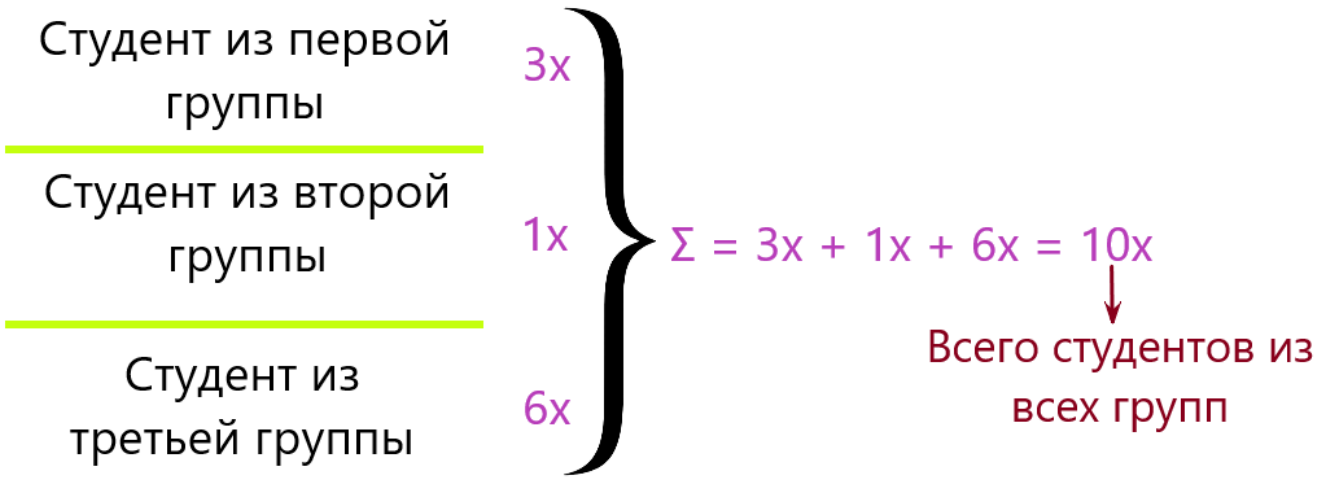
$$P_n(m) = P_{2000}(m > 1) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = 1 - \frac{6^0}{0!} \cdot e^{-6} \approx 0{,}9975.$$

Пример 10: В 1-й группе в 3 раза больше студентов, чем во 2-й, а в 3-ей - в 2 раза больше, чем в первой. Количество отличников составляет по 10% в 1 и 2-ой и 5% в 3-ей группах. Найти вероятность того, что случайно вызванный студент из 3-ей группы, если известно, что он отличник.

Задача на формулу Байеса

Событие А – выбранный студент является отличником.

Для нахождения вероятностей каждой из гипотез, я приведу графическую иллюстрацию:



Как и говорилось, главное правильно понять условие задачи.

Гипотезы H_1, H_2, H_3:

- Гипотеза H_1 – студент из первой группы, тогда $P(H_1) = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
- Гипотеза H_2 – студент из второй группы, тогда $P(H_2) = \frac{1}{10} = 0{,}1$.
- Гипотеза H_3 – студент из третьей группы, тогда $P(H_3) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Условные вероятности $P(A \mid H_1), P(A \mid H_2), P(A \mid H_3)$:

- Вероятность того, что вызван студент-отличник из первой группы: $P(A \mid H_1) = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.
- Вероятность того, что вызван студент-отличник из второй группы: $P(A \mid H_2) = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.
- Вероятность того, что вызван студент-отличник из третьей группы: $P(A \mid H_3) = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

В таком случае, вероятность того, что выбранный из трёх разных групп студент является отличником:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) +$$

$$+P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}07.$$

Тогда вероятность того, что выбран студент из третьей группы, при условии, что он отличник:

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}05}{0{,}07} \approx 0{,}4286.$$

Пример 11: Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого 0,6 второго 0,8. Найти вероятность того, что будет три попадания, если каждый стрелок производит по два выстрела.

Событие А – три попадания по мишени.

Составим таблицу для наглядности:

	В-ть попадания, p	В-ть промаха, q
Стрелок 1	$p_1 = 0{,}6$	$q_1 = 0{,}4$
Стрелок 2	$p_2 = 0{,}8$	$q_2 = 0{,}2$

Из условия ясно, что всего будет 4 выстрела.

Вероятность трёх попаданий в мишень, если каждый стрелок делает 2 выстрела, будет состоять из 4 различных вариантов, это можно доказать, используя сочетания: $C_4^3 = 4$ способа попасть ровно 3 раза, рассмотрим их:

1) **Первый стрелок попал два раза И второй стрелок попал первым выстрелом:**

   Значит $P(A_1) = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot \mathrm{q}_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}0576$.

2) **Первый стрелок попал два раза И второй стрелок попал вторым выстрелом:**

   Значит $P(A_2) = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{q}_2 \cdot \mathrm{p}_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}0576$.

3) **Первый стрелок попал первым выстрелом И второй стрелок попал два раза:**

   Значит $P(A_3) = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{q}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot \mathrm{p}_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}1536$.

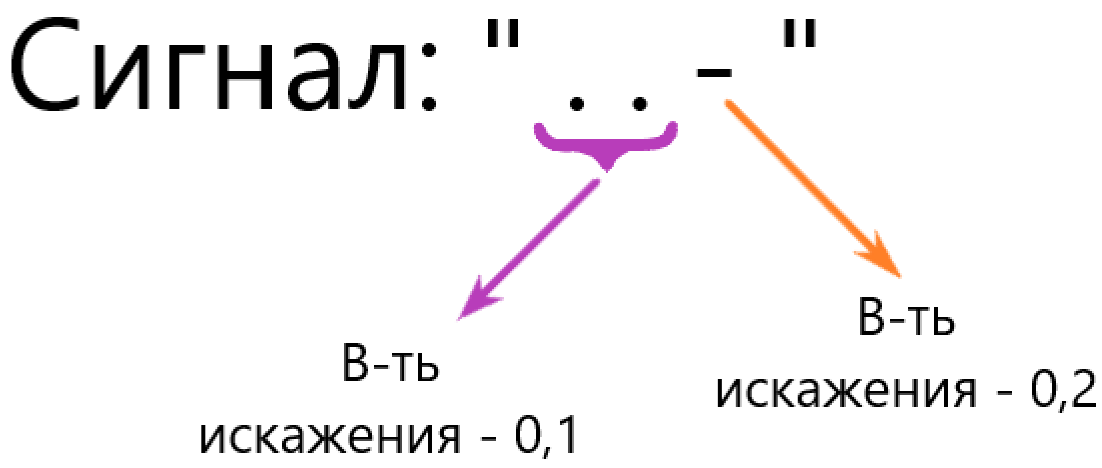
4) **Первый стрелок попал вторым выстрелом И второй стрелок попал два раза:**

Значит $P(A_4) = \mathrm{q}_1 \cdot \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot \mathrm{p}_2 = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}1536$.

Тогда итоговая вероятность будет состоять из суммы найденных вероятностей, потому что каждая найденная вероятность из пунктов выше, по отдельности удовлетворяет условию задачи. Т.е. первый вариант ИЛИ второй вариант ИЛИ третий вариант ИЛИ четвёртый вариант.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 0{,}0576 + 0{,}0576 + 0{,}1536 + 0{,}1536 =$$
$$= 0{,}4224.$$

Пример 12: Вероятность искажения «точки» при передаче сигнала 0,1, искажения «тире» 0,2. Найти вероятность того, что при передаче сигнала из двух точек и одного тире, будет: **а)** два искажения; **б)** менее двух искажений.



Сигнал состоит из трёх составляющих: «точка» «точка» «тире», поэтому вероятность искажения сигнала будем искать, зная вероятности искажения составляющих.

Обозначим вероятность искажения и подлинности составляющих сигнала:

	Подлинность, p	Искажение, q
Точка	$p_{тч} = 0{,}9$	$q_{тч} = 0{,}1$
Тире	$p_{тр} = 0{,}8$	$q_{тр} = 0{,}2$

Пункт а):

Событие А – два искажения в сигнале.

В сигнале есть две «точки», поэтому может быть искажена первая точка ИЛИ вторая, поэтому подлинность первой точки в сигнале обозначим как: $p_{1\text{-}тч}$, а второй как: $p_{2\text{-}тч}$. Искажения аналогично: $q_{1\text{-}тч}$, и: $q_{2\text{-}тч}$.

Два искажения в сигнале могут быть получены $C_3^2 = 3$ способами, рассмотрим их:

1) **Искажение первой и второй «точек» в сигнале:** $P(A_1) = q_{1\text{-}тч} \cdot q_{2\text{-}тч} \cdot p_{тр} = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}008$.
2) **Искажение первой «точки» и «тире»:** $P(A_2) = q_{1\text{-}тч} \cdot p_{2\text{-}тч} \cdot q_{тр} = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}018$.
3) **Искажение второй «точки» и «тире»:** $P(A_3) = p_{1\text{-}тч} \cdot q_{2\text{-}тч} \cdot q_{тр} = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}018$.

Тогда итоговая вероятность события А будет состоять из суммы этих трёх пунктов, описанных выше, ведь для того, чтобы было **два** искажения в сигнале, должен выполниться ХОТЯ БЫ один пункт из трёх, поэтому:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}008 + 0{,}018 + 0{,}018 = 0{,}044.$$

Пункт б):

Событие А – в сигнале будет менее двух искажений.

Менее двух, означает: 0 искажений в сигнале ИЛИ 1 искажение в сигнале, поэтому:

1) **0 искажений в сигнале:** Это означает, что первая «точка» подлинная И вторая «точка» подлинная И «тире» тоже подлинное: $P(A_1) = p_{1\text{-}тч} \cdot p_{2\text{-}тч} \cdot p_{тр} = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648$.
2) **1 искажение в сигнале:** Как и в пункте а) будет состоять из трёх событий:

- Искажение первой «точки» в сигнале: $P(A_{2.1}) = q_{1\text{-тч}} \cdot p_{2\text{-тч}} \cdot p_{тр} = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}072$.
- Искажение второй «точки» в сигнале: $P(A_{2.2}) = p_{1\text{-тч}} \cdot q_{2\text{-тч}} \cdot p_{тр} = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}072$.
- Искажение «тире» в сигнале: $P(A_{2.3}) = p_{1\text{-тч}} \cdot p_{2\text{-тч}} \cdot q_{тр} = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}162$.

Как и в пункте а) будет состоять из суммы вышеописанных вероятностей, ведь для удовлетворения событию A достаточно, чтобы хотя бы одно событие из трёх произошло, поэтому:

$$P(A_2) = P(A_{2.1}) + P(A_{2.2}) + P(A_{2.3}) = 0{,}072 + 0{,}072 + 0{,}162 = 0{,}306.$$

Тогда *ответом на пункт б)* будет вероятность того, что во всём сигнале будет 0 искажений ИЛИ 1 искажение, поэтому:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}648 + 0{,}306 = 0{,}954.$$