# Решение задач по теории вероятностей



4 authors, including:

I. P. Smirnov
Russian Academy of Sciences


Irina Rostislavovna Smirnova
Polytechnic Institute, Dzerzhinsk, Russia

**С.И.Вдовин, И.Ю. Харитонова, И.Р.Смирнова,
И.П.Смирнов**

# Р Е Ш Е Н И Е З А Д А Ч П О Т Е О Р И И В Е Р О Я Т Н О С Т Е Й

**Нижний Новгород 2014**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Р.Е.АЛЕКСЕЕВА»
ДЗЕРЖИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»

**С.И.Вдовин, И.Ю.Харитонова, И.Р.Смирнова,
И.П.Смирнов**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Рекомендовано Ученым советом
Нижегородского государственного технического университета
имени Р.Е.Алексеева
в качестве учебного пособия
для студентов направлений подготовки
13.03.02(140400) – «Электроэнергетика и электротехника»,
15.03.01(150700) – «Машиностроение»,
15.03.02(151000) – «Технологические машины и оборудование»,
23.03.03(190600) – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»,
15.03.04(220700) – «Автоматизация технологических процессов и производств»,
01.03.04(231300) – «Прикладная математика»,
43.03.01(100100) – «Сервис»,
18.03.01(240100) – «Химическая технология»,
19.03.02(260100) – «Продукты питания из растительного сырья»,
20.03.01(280700) – «Техносферная безопасность»*

Нижний Новгород 2014

**УДК 517.1**
**ББК 22.1**
**С 322**

***Рецензент***
*зам. декана ВМК ННГУ им. Н.И.Лобачевского*
*кандидат физико-математических наук*
*О.А.Кузенков*

Вдовин С.И., Харитонова И.Ю., И.Р.Смирнова, И.П.Смирнов
С 322 Решение задач по теории вероятностей: учеб. пособие для студентов вузов / С.И. Вдовин, И.Ю.Харитонова, И.Р.Смирнова, И.П.Смирнов; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Н.Новгород, 2014. – 113 с.
ISBN 978-5-93272-745-4

Пособие предназначено для студентов указанных напралений подготовки, изучающих курс теории вероятностей. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач, что ни в коей мере не освобождает студентов от обращения к учебнику. Приводится разбор решений большого числа типовых задач по указанным в названии разделам. Последнее является необходимым условием вырабатывания теоретико-вероятностной интуиции специалиста, умения строить математические модели реальных процессов. Каждый раздел заканчивается подборкой заданий для самостоятельной работы, которые будут интересны и полезны при подготовке к экзамену по дисциплине.

Рис. 13. Библиогр.: 10 назв.

**УДК 517.1**
**ББК 22.1**

**ISBN 978-5-93272-745-4**

**Вдовин Сергей Иванович**
**Харитонова Ирина Юрьевна**
**Смирнова Ирина Ростиславовна**
**Смирнов Иван Паисьевич**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор В.И. Бондарь
Компьютерный набор и верстка Е.В. Угринович

Подписано в печать . .2014. Формат 60x84 $^{1}$ /16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ.л. 8,0.
Уч.-изд.л. 6,0. Тираж 50 экз. Заказ .

---

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева.
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, ГСП-41, г. Н.Новгород, ул. Минина, 24.

## Оглавление

# Предисловие

# Глава 1

# Основы теории вероятностей

## 1.1. Алгебра событий

Фундаментальными для теории вероятностей являются следующие понятия:

*эксперимент – испытание – исход испытания – событие.*

Под *экспериментом* понимается всякое явление (физическое, экономическое и т.д.), которое может наблюдаться (в неизменных условиях) неограниченное число раз. Всякое наблюдение этого явления называется иначе *испытанием* или опытом. Предполагается, что результатом испытания служит некоторый *исход* эксперимента $w$ *(случай, элементарное событие)*. Множество всех взаимно исключающих исходов называется *пространством элементарных событий* и обозначается так: $\Omega$: $\Omega = \{w\}$. *Событие* (наблюдаемое в условиях данного эксперимента) – это всякий факт, выполнение (или невыполнение) которого однозначно фиксируется в условиях данного эксперимента при каждом испытании.

На множестве всех событий, наблюдаемых в данном эксперименте, вводятся следующие логико-алгебраические операции. Пусть $\Omega$ также обозначает *достоверное* (всегда наступающее в условиях эксперимента) событие, $\varnothing$ – *невозможное* событие. Для каждого события $A$ пусть $\overline{A}$ – событие, состоящее в том, что $A$ не происходит *(противоположное* событие). Для любых двух событий $A$, $B$ пусть $A{\cdot}B \equiv A \cap B$ – событие, состоящее в совместном их наступлении *(произведение)*, $A + B \equiv A \cup B$ – событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них: или $A$, или $B$, или $A$ и $B$ одновременно (сумма). Говорят, что событие $A$ *влечет* событие $B$ ($A \subset B$), если при наступлении $A$ обязательно наступает и $B$. Если $A \subset B$ и при этом $B \subset A$, то по определению эти события *совпадают* ($A = B$). Если $A{\cdot}B = \varnothing$, то события называются *несовместными*.

Исход $w$ *благоприятствует* событию $A$, если при этом исходе событие $A$ имеет место. Любой исход либо благоприятствует, либо не благоприятствует каждому фиксированному событию. Учитывая это, можно отождествить всякое событие $A$ с подмножеством благоприятствующих ему исходов пространства $\Omega$. Нетрудно проверить, что при этом противоположному событию $\overline{A}$ отвечает дополнительное до $\Omega$ множество $\Omega/A$, сумме событий – теоретико-множественная сумма (объединение), произведению событий – теоретико-множественное произведение (пересечение) соответствующих подмножеств $\Omega$. Далее, влечение

$A\subset B$ означает, что $A$ есть подмножество $B$, несовместность событий $A$ и $B$ означает, что множества $A$ и $B$ имеют пустое пересечение $\varnothing$, равенство событий означает, что отвечающие им подмножества $\Omega$ состоят из одних и тех же элементов.

В соответствии с описанной выше интерпретацией события как подмножества пространства элементарных событий рассматриваемые в этом разделе задачи на доказательство равенства двух событий между собой, или на доказательство эквивалентности некоторых высказываний относительно событий допускают вместе с чисто логическим доказательством эквивалентное по содержанию, но несколько отличное по форме теоретико-множественное решение.

**Задача 1.** *Доказать, что для любых событий $A, B, C$*

$$A\subset B\ \overline{B} \Leftrightarrow B\subset A, \tag{1}$$

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C). \tag{2}$$

**Решение.** Установим эквивалентность утверждений $A\subset B$ и $\overline{B}\subset\overline{A}$ путем логических рассуждений. Если $A\subset B$, то при осуществлении события $\overline{B}$ событие $A$ произойти не может (иначе произойдет влекомое $A$ событие $B$). Следовательно, если $A\subset B$, то непременно $\overline{B}\subset\overline{A}\,(A\subset B\Rightarrow\overline{B}\subset\overline{A})$. Аналогично устанавливается, что $\overline{B}\subset\overline{A}\Rightarrow A\subset B$. Утверждение (1) доказано.

Проведем теоретико-множественное доказательство формулы (2). Пусть исход $w\in A\cap(B\cup C)$. Тогда $w\in A$ и одновременно $w\in B\cup C$, то есть хотя бы одному из множеств $B$ или $C$ исход $w$ принадлежит. Пусть, для определенности, это $B$. Тогда $w\in A\cap B$ и, тем более, $w\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Следовательно, любой элемент множества $A\cap(B\cup C)$ принадлежит множеству $(A\cap B)\cup(A\cap C)$, то есть $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$. С другой стороны, если $w\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, то $w$ принадлежит хотя бы одному из множеств $A\cap B$ или $A\cap C$. Пусть это $A\cap B$, тогда $w\in A$ и $w\in B$. Поэтому $w\in B\cup C$ и $w\in A\cap(B\cup C)$. Следовательно, $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$, что с учетом ранее доказанного обратного включения завершает доказательство равенства (2). Задача 1 решена.

При решении задач по теории вероятностей важное значение имеет умение правильно составить формулу, выражающую зависимость сложного события от событий простейшего вида, вероятности которых легко найти непосредственно. Для составления этих формул нужно четко понимать логический смысл введенных выше операций над событиями.

**Задача 2.** *Для работы линии (рис.1) необходимо и достаточно, чтобы были исправны (только!) один элемент в блоке $A$ и два элемента в блоке $B$. Выразить событие $C$ – линия исправна – через события $A_t(B_t)$ – $i$-ый элемент в блоке $A(B)$ исправен.*

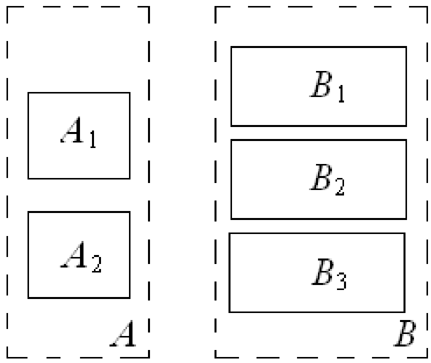



**Рисунок 1 – Блок схема линии**

**Решение.** Для получения искомой формулы составим таблицу.

| | | |
|---|---|---|
| Линия исправна | Тогда и только тогда | Далее следует перечисление вариантов |
| $C$ | = | ( |
| Начало первого варианта | Элемент $A_1$ исправен | И при этом |
| ( | $A_1$ | $\cap$ |
| Элемент $A_2$ неисправен | Конец первого варианта | Или |
| $A_2$ | ) | $\cup$ |
| Начало второго варианта | Элемент $A_2$ исправен | И при этом |
| ( | $A_2$ | $\cap$ |
| Элемент $A_1$ неисправен | Конец второго варианта | Конец перечисления вариантов |
| $A_1$ | ) | ) |
| И при этом | Далее вновь идет перечисление | Исправны элементы $B_1$ и $B_2$, неисправен $B_3$ |
| $\cap$ | ( | $(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ |
| Или | Исправны элементы $B_1$ и $B_3$ и неисправен $B_2$ | Или |
| $\cup$ | $(B_1 \cap B_3 \cap B_2)$ | $\cup$ |
| Исправны элементы $B_2$ и $B_3$, неисправен $B_1$ | Конец перечисления вариантов | |

| | | |
|---|---|---|
| $(B_2 \cap B_3 \cap B_1)$ | ) | |

Из этой таблицы получаем

$C = ((A_1 \cap \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2)) \cap ((B_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3) \cup (B_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3) \cup (\overline{B}_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

Задача 2 решена.

## 1.2. Классическая вероятностная схема

К классической вероятностной схеме описания эксперимента прибегают в тех случаях, когда эксперимент имеет конечное число "равновозможных" исходов: $\Omega = \{w_1, w_2..., w_n\}$.При этом обычно считается, что все исходы являются наблюдаемыми (событиями), вероятность каждого исхода полагается равной

$$P(w_i) = \frac{1}{N},$$

где $N$ – общее число возможных исходов. Отсюда получается известная формула

$$P(A) = \sum_{W_i \in A} P(w_i) = \frac{K}{N},$$

где $K$ – число благоприятствующих событию $A$ исходов.

Подсчет чисел $K$ и $N$ обычно требует знания основных понятий и правил комбинаторики. К таковым относятся, например, понятия *перестановки, сочетания и размещения*. Перестановкой из $n$ элементов называется всякое их расположение в определенном порядке (слева-направо); сочетанием из $n$ элементов по $k$ – всякое $k$-элементное подмножество множества, состоящего из $n$ элементов, а размещением из $n$ элементов по $k$ – всякое (линейно) упорядоченное $k$-элементное подмножество такого множества. Многие комбинаторные результаты легко получаются из следующего *основного правила комбинаторики.*

**Правило умножения:** *пусть требуется произвести последовательно $k$ операций, причем первую из них можно осуществить $n_1$ способами, вторую – при выполненной первой – $n_2$ способами, ... , $k$-ю – при выполненных $(k - 1)$ – х предыдущих – $n_k$ способами. Тогда общее число способов выполнения $k$ операций равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.*

**Задача 3.** *Найти число:*

1) *перестановок из $n$ элементов;*
2) *сочетаний из $n$ по $k$;*
3) *размещений из $n$ по $k$.*

**Решение:**

1) Получение всякой перестановки из $n$ элементов – это результат осуществления $n$ – последовательных операций: выбор первого элемента и помещение его на первое место, выбор второго элемента из оставшихся $(n-1)$ – $x$ и помещение его на второе место и т.д. Ясно, что первую операцию можно выполнить $n$ способами, вторую – $(n-1)$ – м и т.д. Поэтому из правила умножения следует, что общее число перестановок $p_n = n \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$
2) Получение любой перестановки из $n$ элементов можно рассматривать как результат выполнения следующих трех последовательных операций:

   a) выбора $k$ элементов из $n$ ($k$ фиксировано!);

   b) расположения их на первых $k$ местах;

   c) расположения оставшихся элементов на оставшихся $n-k$ местах.
   Число способов выполнения первой операции – это как раз число сочетаний из $n$ по $k$. Обозначим его $C_n^k$. Число способов выполнения второй операции равно числу перестановок из $k$ элементов $p_k = k!$ Аналогично третью операцию можно выполнить $(n-k)!$ способами. В соответствии с правилом умножения число способов выполнения трех последовательных операций равно $C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)!$. Но оно же равно согласно п.1 $n!$ Отсюда получаем
$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$
3) Всякое размещение из $n$ по $k$ – результат выполнения двух последовательных операций:

   a) выбора сочетания из $n$ по $k$;

   b) перестановки элементов этого сочетания.

   Первая операция выполняется $C_n^k$ способами, вторая – $k!$ способами. В итоге число размещений из $n$ по $k$
$$A_n^k = C_n^k \cdot k! \cdot = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Задача 3 решена.

**Задача 4.** *Рассматривается эксперимент с $n$–кратным бросанием симметричного шестигранного кубика. Построить вероятностное пространство, описывающее данный эксперимент. Найти вероятность выпадения "шестерки" $k$ $(0 \le k \le n)$ раз.*

**Решение.** Очевидно, исход эксперимента однозначно определяется последовательностью $w = [i_1 i_2 \ldots i_n]$, где $i_j$ – количество очков, выпавшее при $j$–м бросании, $1 \le i_j \le 6$. Из симметрии эксперимента следует, что все такие исходы равновозможны. Общее их число, по основному правилу комбинаторики, $N = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6}_{n} = 6^n$. Прибегая к классической схеме описания данного эксперимента, заключаем, что вероятность любого исхода $P(w) = 6^n$. Обозначим событие, состоящее в том, что при $n$ бросаниях "шестерка" выпадет ровно $k$ раз, через $A$. Подсчитаем число $K$ благоприятствующих событию $A$ исходов. Если $0 < k < n$, то каждый благоприятствующий исход можно представить как результат осуществления трех последовательных операций:

1) выбора $k$ "удачных" бросаний из $n$;
2) выбрасывания "шестерки" в этих $k$ "удачных" бросаниях;
3) выбрасывания отличных от "шестерки" граней в оставшихся $n - k$ бросаниях.

Первую операцию можно выполнить $C_n^k$ способами. Вторую операцию естественно рассматривать как последовательность $k$ подопераций следующего вида: выбрасывание "шестерки" при однократном бросании. Поэтому число способов выполнения второй операции есть $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{k} = 1$.

Следовательно, третья операция есть последовательность $k$ подопераций следующего вида: выбрасывание грани, отличной от "шестерки". Поэтому число способов ее выполнения равно $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n-k} = 5^{n-k}$.

В итоге получаем

$$K = C_n^k \cdot 5^{n-k}.$$

$$P(A) = \frac{K}{N} = \frac{C_n^k}{5^k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n. \qquad (3)$$

При $k = 0$ благоприятствующий исход есть последовательность $n$ бросаний, при каждом из которых "шестерка" не выпадает. Ясно, что в этом случае $K = 5^n$. Следовательно, при $k = n$ $K = 1$. Поскольку $C_n^k = 1$ при

$k = 0$ и $k = n$, то формула (3) дает верный ответ при всех $0 \le k \le n$.

Задача 4 решена.

**Задача 5.** *В партии из $n$ деталей $k$ бракованных. На экспертизу наудачу выбирается $l$ деталей. Какова вероятность, что среди выбранных деталей $m$ бракованных?*

**Решение.** Исходом эксперимента в данном случае следует считать выборку из $l$ деталей. Очевидно, что число всех исходов $N = C_n^l$ и все исходы равновозможны. Вычислим искомую вероятность по классической схеме. Для этого всякий благоприятствующий рассматриваемому событию исход представим как последовательность двух операций:

1) выбора $m$ бракованных деталей из общего числа $k$;
2) выбора оставшихся $l - m$ небракованных деталей из множества, состоящего из $n - k$ таких элементов.

Первую операцию можно выполнить $C_k^m$, вторую – $C_{n-k}^{l-m}$ способами. В итоге число благоприятствующих исходов

$$K = C_k^m \cdot C_{n-k}^{l-m};$$

$$P = \frac{K}{N} = \frac{C_k^m \cdot C_{n-k}^{l-m}}{C_n^l}.$$

Задача 5 решена.

**Задача 6.** *Преподаватель наудачу раздает задания $n$ студентам, сидящим за одним столом (слева-направо). Среди заданий лишь 2 совпадают между собой. Какова вероятность, что эти задания попадутся соседям?*

**Решение**. Способ 1. Присвоим произвольным образом заданиям номера от 1 до $n$, указывающим расположение номеров выданных заданий слева-направо. Тогда все исходы равновозможны и их число есть $n!$ Каждый благоприятствующий интересующему нас событию $A$ исход представим как последовательность следующих трех операций:

1. перестановки совпадающих заданий между собой;
2. выдачи совпадающих заданий (студентам-соседям);
3. выдачи прочих заданий.

Первая операция выполняется $2! = 2$ способами, вторая – $(n - 1)$-м способом (первому и второму, второму и третьему, $(n - 1)$-му и $n$-му студентам, считая слева-направо), третья – $(n - 2)!$ способами. Таким образом,

$$K = 2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$$

$$P(A) = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

Способ 2. Пронумеруем студентов слева-направо, присвоив им номера от 1 до $n$. Исходом эксперимента будем считать теперь множество из двух чисел $w = (a, b)$, где $a$, $b$ – номера студентов, получивших совпадающие задания. Все такие исходы, очевидно, равновозможны, их число равно $C_n^k$. Исход благоприятствует событию $A$, если числа $a, b$ отличаются друг от друга на 1. Таких исходов $n - 1$ ((1;2), (2;3), ... , $(n - 1, n)$). Поэтому $K = n - 1$,

$$P(A) = \frac{n-1}{C_n^k} = \frac{(n-1)\cdot 2!(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

Задача 6 решена.

**Задача 7.** *Из курса в* 90 *студентов деканат формирует три группы, в каждой из которых наудачу назначает старосту. Какова вероятность, что друзья Иванов, Петров и Сидоров окажутся старостами?*

**Решение**. Способ 1. Пронумеруем студентов произвольным образом от 1 до 90. Исходом эксперимента будем считать три упорядоченные набора по 30 чисел, первое из которых в каждом наборе есть номер студента, назначенного старостой. Все такие исходы, очевидно, равновозможны, их число

$$N = A_{90}^{30} A_{60}^{30} A_{30}^{30} = \frac{90!60!30!}{60!30!0!} = 90!$$

Исход благоприятствует интересующему нас событию, если номера студентов Иванова, Петрова и Сидорова попадают на первые места в указанных наборах.

Всякий такой исход является последовательностью четырех операций:

1. размещения номеров друзей на трех командных местах;
2. размещения 87 прочих номеров на 29 оставшихся местах первой группы;
3. размещения 58 номеров на 29 оставшихся местах второй группы;
4. размещение 29 оставшихся номеров на 29 оставшихся местах третьей группы.

Первая операция выполняется $A_3^3$ способами, вторая (при выполненной первой) – $A_{87}^{29}$ способами, третья – $A_{58}^{29}$ способами, четвертая – $A_{29}^{29}$ способами. В итоге число благоприятствующих исходов

$$K = \frac{3!87!58!29!}{0!58!29!0!} = 6 \cdot 87!,$$

а искомая вероятность

$$P(A) = \frac{3!\cdot 87!}{90!} = \frac{1}{117480} \approx 8.5 \cdot 10^{-6}.$$

Способ 2. Будем считать исходом эксперимента тройку номеров студентов, попавших в старосты. Очевидно, все такие тройки равновозможны. Их число – $C_{90}^3$. Благоприятствует интересующему нас событию лишь один единственный исход, при котором в заветной тройке находятся номера друзей. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{C_{90}^3} = \frac{3!\cdot 87!}{90!} = \frac{1}{117480}.$$

Задача 7 решена.

Из решения двух последних задач видно, что вероятностное пространство – математическая модель эксперимента – определяется, вообще говоря, не однозначно. От того, насколько удачно оно выбрано, зависит простота подсчета вероятностей тех или иных событий.

## 1.3.Геометрическая вероятностная схема

Данную вероятностную схему описания эксперимента применяют в тех случаях, когда множество равновозможных исходов эксперимента бесконечно. Пространство элементарных событий $\Omega$ в этом случае отождествляется с некоторым подмножеством конечномерного эвклидова пространства $R^l$, конечного $l$-мерного объема $mes(\Omega)$. Вероятность события $A$ вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

**Задача 8.** *Разрыв телефонной линии длиной* 10 *км одинаково возможен в любой ее точке. Какова вероятность, что он произойдет на расстоянии не менее* 1 *км от ее концов?*

**Решение.** Возьмем в качестве пространства элементарных событий $W$ отрезок длины 10 (км) (рис.2).

Исход эксперимента – разрыв линии в точке $x(0 \le x \le 10)$ – отождествляем с этой точкой. Так как все исходы равновозможны, применим геометрическую схему для вычисления вероятности интересующего нас события $A \equiv \{x\colon 1 \le x \le 9\}$:

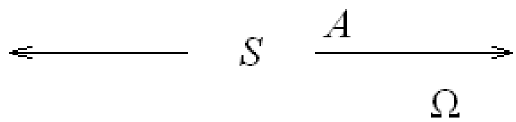



**Рисунок 2 – Вероятностное пространство в задаче 8**

$$P(A) = \frac{8}{10}.$$

Задача 8 решена.

**Задача 9.** *Студент и преподаватель приходят на пересдачу зачета в течение одного и того же временного промежутка длительности* $T$ *(с равной возможностью в любой его момент). Какова вероятность, что их встреча состоится, если преподаватель ждет студента* $T_1$ *а студент преподавателя* $T_2$ *– единиц времени (*$T_{1,2} \le T$*).*

**Решение.** Обозначим через $t_{1,2}$ моменты прибытия субъектов встречи.

Исход эксперимента однозначно описывается вектором $w = (t_1, t_2)$. Множество всех равновозможных исходов $\Omega = \{w\}$ образует квадрат $[0,T]$x$[0,T]$ на плоскости $t_1 t_2$ (рис.3).

Выделим в этом квадрате множество точек $A$, удовлетворяющих хотя бы одному из условий встречи:

1. $0 \le t_1 - t_2 \le T_2$ – студент дождется преподавателя;
2. $0 \le t_2 - t_1 \le T_1$ – преподаватель дождется студента;

Согласно геометрической схеме вероятность встречи

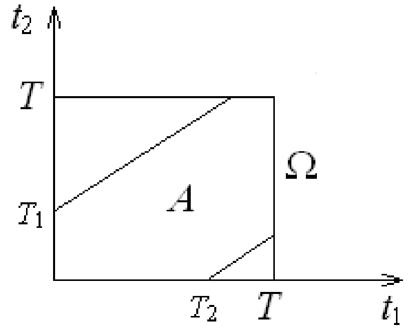



**Рисунок 3 – Вероятностное пространство в задаче 9**

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{\left(T^2 - \frac{1}{2}\left(T - T_1\right)^2 + \left(T - T_1\right)^2\right)}{T^2} = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{T_2}{T}\right)^2 + \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^2\right].$$

При $T_1 = T_2 = T$ $P(A) = 1$; если же $T_1 << T_2 \le T$, то

$$P(A) \approx \frac{T_2}{T}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{T_2}{T}\right) \le \frac{1}{2}.$$

Причина последнего удручающего результата – в неправильном поведении одного из субъектов. Какого? Наверно, другого. Предложить удовлетворительную модель поведения этого субъекта, гарантирующую встречу.

Задача 9 решена.

**Задача 10.** *Значение скорости влетающей в вещество элементарной частицы равновозможно в интервале* $[v,V]$, *а время ее полета в веществе до поглощения равновозможно в промежутке* $[0,T]$. *Какова вероятность, что частица проникнет в вещество на глубину, большую чем* $S$?

**Решение.** Ясно, что при $S > VT$ вероятность интересующего нас события $A$ равна нулю. Поэтому будем считать, что $S \le VT$. Пусть $u$ – скорость влетающей частицы, $t$ – время ее полета до поглощения (считаем, что полет происходит с постоянной скоростью). Вектор $w = (u, t)$ полностью описывает эксперимент и с равной возможностью указывает на произвольную точку прямоугольника $\Omega = [v,V]$x$[0,T]$ на плоскости переменных $u$, $t$. Множество благоприятствующих событию $A$ исходов описывается неравенством $ut > S$. Вычислим вероятность события по геометрической схеме.

Если $\upsilon T \geq S$ (рис.4), то

$$mes(A) - (V-\upsilon)(T-\frac{S}{V}) - \int\limits_{S/V}^{S/\upsilon}\left(\frac{S}{t}-\upsilon\right)dt = (V-\upsilon)\,T - S\ln\frac{V}{\upsilon},$$

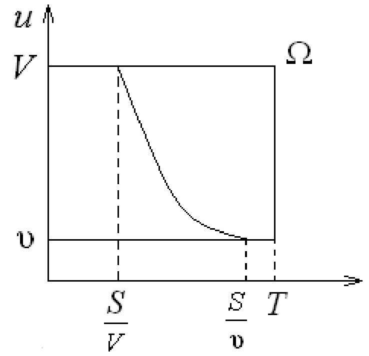



**Рисунок 4 – Задача 10 (случай $\upsilon T \geq S$)**

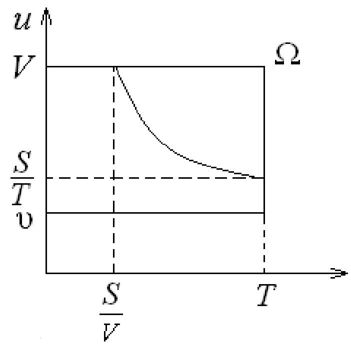



**Рисунок 5 – Задача 10 (случай $\upsilon T < S$)**

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = 1 - \frac{S}{(V-\upsilon)T}\ln\frac{V}{\upsilon}.$$

Если же $vT < S$ (рис. 5), то

$$mes(A) = \int\limits_{S/V}^{T}\left(V-\frac{S}{t}\right)\mathrm{dt} = VT - S\left(1+\ln\frac{VT}{S}\right),$$

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{v}{V-\upsilon} - \frac{\mathrm{S}\left(1+\ln\frac{VT}{S}\right)}{(V-\upsilon)T}.$$

Задача 10 решена.

**Задача 11.** *Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков, длиной не более* 1 *каждый, можно построить треугольник.*

**Решение.** Обозначим длины отрезков соответственно $x, y, z$ . Тогда $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ и вектор $w = (x, y, z)$ с равной возможностью указывает на произвольную точку куба $\Omega$ (рис.6).

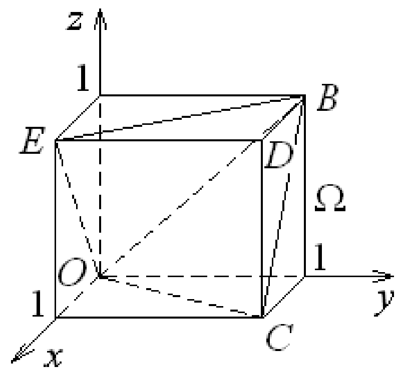



**Рисунок 6 – Вероятностное пространство в задаче 11**

Множество благоприятствующих нашему событию $A$ исходов описывается системой неравенств

$$\begin{cases} x+y>z, \\ x+z>y, \\ y+z>x \end{cases}$$

и геометрически представляет собой внутренность тела *OBCDE*. Вычисляя его объем $mes(A) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, находим искомую вероятность

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Задача 11 решена.

## 1.4. Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1. Пусть $A$, $B$, $C$ – случайные события. Выяснить смысл равенств:
   а) $ABC = A$; б) $A \cup B \cup C = A$.
2. Мишень состоит из 10 кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_i$ ($i$ = 1. 2... , 10), причем $r_1 < r_2 \ldots < r_{10}$.
   Событие $A_i$ = {попадание в круг радиуса $r_i$}. Что означают события:
   а) $B = \sum_{i=1}^{6} A_i$; б) $C = \prod_{i=5}^{10} A$; в) $D = \overline{A}_1 \cdot A_2$ ?
3. Пусть $A$, $B$, $C$ – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из $A$, $B$, $C$:
   а) произошло только $A$;
   б) произошли $A$ и $B$, $C$ не произошло;
   в) все три события произошли.
4. Пусть $A$, $B$, $C$ – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из $A$, $B$, $C$:
   а) произошло, по крайней мере, одно из этих событий;
   б) произошло, по крайней мере, два события.
5. Пусть $A$, $B$, $C$ – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из $A$, $B$, $C$:
   а) произошло одно и только одно событие;
   б) произошло два и только два события.
6. Пусть $A$, $B$, $C$ – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из $A$, $B$, $C$:

а) ни одно событие не произошло;

б) произошло не больше двух событий.

7. Доказать справедливость следующих тождеств:

   а) $\overline{A+B} = \overline{AB}$, б) $\overline{AB} = \overline{A+B}$ (правила де Моргана).

8. Доказать справедливость следующего тождества: $AB+C=(A+C)(B+C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).
9. Доказать справедливость следующего тождества: $A - B = \overline{AB}$.
10. Доказать справедливость следующего тождества:
    $(A + B) - B = A - \overline{AB} = A - B$.
11. Пусть $A$, $B$, $C$ – события, наблюдаемые в эксперименте, причем $A$ и $B$ несовместны. Показать, что события $AC$ и $BC$ также несовместны.
12. Показать, что:

    а) если $A \subset B$, то выполняются соотношения

    $$AB = A, \quad A + B = B; \qquad (1)$$

    б) из справедливости любого из соотношений (1) следует, что $A \subset B$.

13. Пусть $A$ и $B$ – наблюдаемые события в эксперименте. Показать, что событие $A+B$ можно разложить на сумму несовместных событий следующими способами : а) $A+B=A+(B–AB)$; б) $A+B=AB+\overline{AB}+\overline{A}B$;

    в) $A + B = A + B\overline{A}$.

14. Доказать тождество $(A + B)(A + \overline{B}) = A$.
15. Доказать тождество $(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B}) = AB$.
16. Доказать тождество $(\overline{A} + BC)(\overline{B} + AC)(\overline{C} + AB) = ABC + \overline{ABC}$.
17. Доказать тождество $AC - B = AC - BC$;
18. Доказать тождество $(A - B) + (A - C) = A - BC$.
19. Доказать, что $A - B = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$.
20. На отрезке $[a, b]$ наудачу ставятся две точки. Пусть $x$ и $y$ – координаты этих точек. Изобразить на плоскости $Oxy$ области, соответствующие событиям $\Omega, A, B$, $AB, A - B$, $A + B$, где $A$={вторая точка ближе к левому концу отрезка, чем первая точка к правому концу}, $B$={расстояние между точками меньше половины длины отрезка}.
21. Упростить выражение $A = (B + \overline{C})(\overline{B} + C)(\overline{B} + C)$.
22. Когда возможны равенства: а) $A + B = \overline{A}$; б) $AB = \overline{A}$; в) $A + B = AB$?
23. Найти случайное событие $X$ из равенства $\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B$.
24. Доказать, что $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{AB} = \overline{AB}$.
25. Совместны ли события $A$ и $\overline{A+B}$?
26. Доказать, что события $A$, $\overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу.
27. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: $A_k (k = 1, 2)$ – исправен $k$-й блок первого типа;
    $Bj$ $(j = 1, 2, 3)$ – исправен $j$-й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков

второго типа. Выразить событие $C$, означаюшее работу прибора, через $A_k$ и $B_j$.

28. Доказать равенство $\overline{\overline{A+B}} = A + B$.
29. Доказать равенство $\overline{\overline{A+B}} = AB$.
30. Показать, что $(\overline{A+B})C = \overline{AC} + \overline{BC}$ имеет место тогда и только тогда, когда $AC = BC$.

Задание 2

1. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?
2. Среди 17 студентов группы, из которых восемь девушек, разыгрывается семь билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся четыре девушки?
3. Из 4 одинаковых карточек, на которых нарисованы буквы *А*, *Б*, *В*, *Г*, наудачу взяты две. Определить вероятность того, что буквы на этих карточках будут соседними по алфавиту.
4. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
5. Из десяти билетов выигрышными являются два. Одновременно приобретаются любые пять билетов. Определить вероятность того, что среди них: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.
6. Для перевозки $n + m$ изделий двух типов использовался железнодорожный состав. Получена информация о том, что в пути следования повреждены два изделия. Определить вероятность того, что повреждены изделия разных типов.
7. Из колоды карт (52 шт.) наугад извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка, туз.
8. Из десяти билетов выигрышными являются два. Одновременно приобретаются любые пять билетов. Определить вероятность того, что среди них: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.
9. В шкафу находятся 10 пар туфель. Случайно выбираются 4 туфли. Найти вероятность того, что среди выбранных туфель окажется хотя бы одна пара.

10. Бросаются три игральные кости. С какой вероятностью сумма очков окажется равной пяти.
11. Бросаются 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадает по одинаковому числу очков.
12. Колоду в 36 карт наудачу разделяют на две равные части. Чему равна вероятность того, что в обеих частях окажется по равному числу черных и красных карт?
13. Какова вероятность вскрытия не менее 8 очков при бросании двух игральных костей?
14. Ребенок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки: $A$, $A$, $M$, $M$. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАМА»?
15. В лотерее $n$ билетов, из которых $m$ выигрышных. Участник лотереи покупает $k$ билетов. Определить вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.
16. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.
17. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».
18. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.
19. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести).
20. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.
21. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
22. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

23. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
24. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.
25. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что две из них окажутся окрашенными.
26. 1 сентября на первом курсе одного из факультетов запланированы по расписанию три лекции по разным предметам. Всего на первом курсе изучается 10 предметов. Студент, не успевающий ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха в данном эксперименте, если считать, что любое расписание из трех предметов равновозможно?
27. Зенитная батарея, состоящая из $n$ орудий, производит залп по группе, состоящей из $m$ самолетов. Каждое из орудий выбирает себе цель наудачу независимо от остальных. Найти вероятность того, что все орудия выстрелят по одному самолету.
28. Зенитная батарея, состоящая из $n$ орудий, производит залп по группе, состоящей из $m$ самолетов. Каждое из орудий выбирает себе цель наудачу независимо от остальных. Найти вероятность того, что все орудия выстрелят по одному самолету.
29. Из урны, содержащей $m_1 + m_2$ шаров, из которых $m_1$ белых и $m_2$ черных, наудачу отбирают $m$ шаров ($m \leq \min(m_1, m_2)$) и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: $A$={все отложенные шары белые}, $B$={среди отложенных шаров ровно $k$ белых; $k < m$}.
30. $n$ мужчин и $n$ женщин случайным образом рассаживаются в ряд $2n$ мест. Найти вероятности следующих событий: $A$={никакие два мужчины не будут сидеть рядом}, $B$={все мужчины будут сидеть рядом}.

Задание 3

1. У сборщика имеется 10 деталей, мало отличающихся друг от друга. Из них четыре 1-го, по две 2, 3 и 4-го видов. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся 1-го вида, две 2-го и одна 3-го вида?
2. Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 16 волейбольных команд разбиты по жребию на две подгруппы (по восемь

команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

3. В колоде 26 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.
4. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Какова вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима?
5. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.
6. Чему равна вероятность того, что: а) все дни рождения двенадцати человек придутся на разные месяцы года (при условии, что вероятности попадания дня рождения на каждый из месяцев остаются равными для всех месяцев); б) дни рождения шести человек придутся в точности на два месяца.
7. Из последовательности чисел 1,2 …, $n$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше $k$, а другое больше $k$, где $1 < k < n$ – произвольное целое число?
8. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.
9. (Вероятность распределения молекул.) Газ, состоящий из $n$ молекул, находится в замкнутом сосуде. Мысленно разделим сосуд на $n$ равных клеток и будем считать, что вероятность каждой молекулы попасть в каждую из $n$ клеток одна и та же, а именно $\frac{1}{n}$. Какова вероятность того, что молекулы окажутся распределенными так, что в 1-й клетке окажутся $m_1$ молекул, во 2-й – $m_2$ молекул и т. д., наконец, в $n$-й – $m_n$ молекул?
10. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.
11. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.
12. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставлены ми рядом.

13. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.
14. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение - четырем .
15. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.
16. $A$, $B$ и еще 8 человек стоят в очереди. Найти вероятность того, что $A$ и В отделены друг от друга тремя лицами.
17. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности событий: $A$=(все пассажиры выйдут на четвертом этаже); $B$=(все пассажиры выйдут на одном этаже); $C$=(все пассажиры выйдут на разных этажах).
18. Имеются 5 билетов стоимостью по 1 рублю, 3 билета по 3 рубля и 2 билета по 5 рублей. Наугад берутся 3 билета. Найти вероятность того, что: а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость;
б) все 3 билета вместе стоят 7 рублей.
19. Имеется 5 отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наугад трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.
20. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если: а) число мест равно 8; б) число мест равно 12.
21. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек?
22. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий: $A$={ни на одной кости не выпадет 6 очков}, $B$={хотя бы на одной кости выпадет 6 очков}, $C$={ровно на 3 костях выпадет 6 очков}.

23. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на 2-м, 3-м, 7-м этажах, найти вероятности следующих событий: $A$={на втором, третьем и четвертом этажах не выйдет ни один из пассажиров}, $B$={трое пассажиров выйдут на седьмом этаже}, $C$={на каждом этаже выйдет по одному пассажиру}, $D$={все пассажиры выйдут на одном этаже}.
24. Бросается 6 игральных костей. Найти вероятности следующих событий: $A$={выпадут 3 единицы, две тройки и одна шестерка}, $B$={выпадут различные цифры}, $C$={выпадут три одинаковые цифры}.
25. Из разрезной азбуки выкладывается слово *математика*. Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *математика*?
26. На заводе работает 30 000 рабочих и служащих. Показать, что на данном заводе обязательно найдутся хотя бы два человека с одинаковыми инициалами имени, отчества и фамилии.
27. 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов раскладываются случайным образом в три пакета, но так, чтобы в каждом было одинаковое количество фруктов. Найти вероятности следующих событий: $A$={в каждом из пакетов по одному апельсину}, $B$={случайно выбранный пакет не содержит апельсина}.
28. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама – три, король – четыре, туз – одиннадцать, а остальные карты – соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.
29. Показать, что более вероятно при одновременном бросании четырех костей получить хотя бы одну единицу, чем при 24 бросаниях двух костей получить хотя бы один раз две единицы. (Ответ известен как парадокс де Мере. Игрок Шевалье де Мере считал эти вероятности равными и обвинял математиков в своих проигрышах.)
30. В некоторых сельских местностях России существовало когда-то следующее гадание. Девушка зажимает в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывает эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказываются связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж. Найти вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо.

Задание 4

1. Найти вероятность того, что сумма двух чисел меньше 0,5, если сумма их квадратов меньше 0,25.
2. На отрезке длины $a$ наугад взяты две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними меньше $b(b < a)$.
3. Между 12 и 13 часами дня должен произойти в случайный момент времени звонок квартирного телефона, причем вызывающий ждет 10 мин. В течение того же часа хозяин квартиры заходит домой в случайный момент и остается дома в течение 30 мин. Найти вероятность того, что разговор состоится.
4. На отрезок $OA$ длины $L$ числовой оси $Ox$ наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков $OB$ и $BA$ имеет длину, большую чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
5. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.
6. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной $a$ наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.
7. Внутрь круга радиуса $R$ наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.
8. На отрезке $OA$ длины $L$ числовой оси $Ox$ наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка $BC$ меньше расстояния от точки $O$ до ближайшей к ней точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
9. На отрезке $OA$ длины $L$ числовой оси $Ox$ наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y > x$ Найти вероятность того, что длина отрезка $BC$ меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

10. На отрезке $OA$ длины $L$ числовой оси $Ox$ наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.
11. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Найти вероятности следующих событий: $A$={встреча состоялась}, $B$={Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался}, $C$={Ивану не пришлось ждать Петра}, $D$={встреча состоялась после 11ч 30 мин}, $E$={Иван опоздал на встречу}, $F$={встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.
12. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков, длиной не более $L$, можно построить треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в пространственную фигуру пропорциональна объему фигуры и не зависит от ее расположения.
13. Наудачу взяты два положительных числа $x$ и $y$, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение $xy$ будет не больше единицы, а частное $y/x$ не больше двух.
14. Наудачу взяты два положительных числа $x$ и $y$, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение $xy$ не меньше 0,09.
15. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1) и (0,1) наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятность событий: $A=\{(x,y) : x^2 + y^2 \le$ $\le a^2,\ a > 0\}$, $B=\{(x,y) : xy < \text{a},\ a > 0\}$, $C=\{(x,y) : \max(x,y) < a,\ a > 0\}$, $D=\{(x,y) : \text{mix}(x,y) < a,\ 0 \le a \le 1\}$.
16. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит $l$, будет больше $l$?
17. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна $a$, а расстояние между их осями равно $l$ $(l > a)$?
18. На поверхности шара берут наудачу две точки и соединяют меньшей дугой большого круга. Найти вероятность того, что дуга не превзойдет $\alpha$ радиан.
19. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа.
20. В случайный момент времени $x \in [0,7]$ появляется радиосигнал длительностью $t_1$. В случайный момент времени $y \in [0,7]$ включается приемник

на время $t_2 < t_1$. Найти вероятность обнаружения сигнала, если: а) приемник настраивается мгновенно; б) время настройки приемника $t_3$ ($t_3 < t_2 < t_1$).

21. Значения $a$ и $b$ равновозможны в квадрате $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Найти вероятности следующих событий: $A$={корни квадратного трехчлена $x^2+2ax+b$ действительны}, $B$={корни квадратного трехчлена $x^2+2ax+b$ положительны}.
22. На плоскость с нанесенной на ней квадратной сеткой многократно бросается монета диаметра $d$, в результате чего установлено, что в 40% случаев монета не пересекает ни одной стороны квадрата. Оценить размер сетки.
23. Даны две концентрические окружности радиусов $r_2 > r_1$. На большей окружности наудачу ставятся две точки $A$ и $B$. Какова вероятность того, что отрезок $AB$ не пересечет малую окружность?
24. Из отрезка [–1,2] наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?
25. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$, наудачу бросается игла длиной $2l$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из параллельных прямых, если $l <$ а.
26. В круге радиуса $R$ перпендикулярно некоторому фиксированному диаметру проводятся хорды. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более $R$, если равновозможны любые положения точки ее пересечения с указанным диаметром?
27. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километрами линии?
28. Электрон вылетает из случайной точки нити накала и движется по перпендикуляру к нити. С какой вероятностью он свободно пройдет через сетку, окружающую нить и имеющую вид винтовой линии радиуса $R$, толщины 8 и шага $H$?
29. На окружности радиуса $R$ наудачу поставлены три точки $A$, $B$, $C$. Какова вероятность, что треугольник $ABC$ остроугольный?
30. Два судна в тумане: одно идет вдоль пролива шириной $L$, а другое курсирует без остановок поперек этого пролива. Скорость движения судов соответственно равны $\upsilon_1$ и $\upsilon_2$. Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $d < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

## 1.5. Условная вероятность. Независимые события

Условной вероятностью события $A$ по отношению к событию $B$ ($P(B)>0$) называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1)$$

Из определения условной вероятности непосредственно вытекает следующая "формула умножения вероятностей":

$$P(AB) = P(B)P(A|B), \qquad (2)$$

из которой, в свою очередь, по индукции легко выводится общая формула для вероятности произведения $n$ событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}) \qquad (3)$$

при $P(A_1A_2\ldots A_{n-1}) > 0$.

Если $P(A|B)=P(A)$, то естественно называть событие $A$ не зависящим от события $B$. Из (2) и (1) при этом вытекает, что $P(B|A)=P(B)$, то есть и событие $B$ не зависит от $A$, следовательно, их можно назвать независимыми (между собой). Для независимых событий $A$ и $B$, как нетрудно видеть из (2),

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (4)$$

Напротив, если (4) имеет место, то, подставляя это равенство в (1), получаем, что события $A$ и $B$ независимы, так что свойство (4) эквивалентно условию независимости событий. Учитывая это, введем следующее

**Определение**. События $A$ и $B$ называются независимыми, если для них выполнено равенство (4).

Отметим, что в этом определении допускается и случай, когда одно или оба события имеют нулевую вероятность. Как нетрудно показать, событие нулевой вероятности не зависит от любого другого события.

Понятие независимости вводится также для произвольного семейства событий.

**Определение**. События $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ называются независимыми (в совокупности), если вероятность произведения любого набора из них равна произведению вероятностей соответствующих событий:

$$P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\ldots P(A_{ik}),$$

$2 \le k \le n,\ 1 \le i_j \le n$.

Из введенного определения, в частности, следует, что для независимых в совокупности событий:

1) имеет место их попарная независимость;

2) вероятность их произведения равна произведению вероятностей:

$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$.

Заметим, что эти свойства каждое по себе, а также и вместе в общем случае недостаточны для совокупной независимости событий (см. задачи 2, 3).

Если события $A_1$, $A_2$, … $A_n$ независимы в совокупности, то и противоположные им события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, … $\overline{A_n}$ также независимы в совокупности.

Пусть $A$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_1$, $A_2$, … $A_n$, независимых в совокупности. Вероятность события $A$ удобнее считать через противоположное событие $\overline{A}$={не произошло ни одно событие $A_i$}: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\dots P(\overline{A_n})$.

**Задача 1.** *Из хорошо протасованной колоды в 36 карт вытаскивается наудачу одна карта. Какова вероятность, что она бубновая? Валет? Черной масти? Найти условные вероятности этих событий по отношению друг к другу. Являются ли данные события независимыми?*

**Решение.** Обозначим указанные события соответственно *Б*, *В* и *Ч*. Применяя классическую схему вычисления вероятностей, находим

$$P(Б) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},\quad P(В) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\quad P(Ч) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Далее,

$$P(БВ) = \frac{1}{36} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} = P(Б)P(В),$$

$$P(БЧ) = \frac{0}{36} \neq P(Б)P(Ч),$$

$$P(ВЧ) = \frac{2}{36} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} = P(В)P(Ч).$$

Таким образом, события *Б* и *В*, *В* и *Ч*, соответственно, независимы между собой. Однако, события *Б* и *Ч* не являются независимыми, следовательно, не являются независимыми в совокупности и события Б, *В* и *Ч*.

Используя (1), найдем условные вероятности:

$$P(Б|В)=P(Б),\quad P(В|Б)=P(В),\quad P(В|Ч)=P(В),$$

$$P(Ч|В)=P(Ч),\quad P(Б|Ч) = 0,\quad P(Ч|Б) = 0.$$

Задача 1 решена.

**Задача 2** (пример С. Н. Бернштейна). *Три грани правильного тетраэдра окрашены соответственно в красный, синий и зеленый цвет, на четвертую грань нанесены все три эти краски. Какова вероятность, что при бросании тетраэдра на плоскость он упадет на грань, на которую нанесена красная (синяя, зеленая) краска? Зависимы ли эти события между собой?*

**Решение.** Обозначим указанные события соответственно *К*, *С* и *З*. Применяя классическую схему вычисления вероятностей, получаем

$$P(К) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(С) = P(З) = P(К) = \frac{1}{2},$$

$$P(КС) = \frac{1}{4} = P(СЗ) = P(КЗ) = P(К)P(С) = P(С)P(З) = P(К)P(З).$$

Таким образом, рассматриваемые события являются попарно независимыми. Однако, они не являются независимыми в совокупности. Действительно,

$$P(КСЗ) = \frac{1}{4} \neq P(К)P(С)P(З).$$

Задача 2 решена.

**Задача 3.** *Из множества* [*0,1*] *наудачу выбираются два вещественных числа x и y. Какова вероятность, что* $x \geq \frac{1}{2}$; $x + y \geq 1$; $y \geq x$? *Зависимы ли эти события между собой?*

**Решение.** Исход эксперимента ω отождествим с точкой квадрата Ω (см. рис. 1): все такие исходы равновозможны по условию задачи.

Обозначим интересующие нас события соответственно $A_1$, $A_2$ и $A_3$. Используя геометрическое определение вероятности и учитывая, что площадь квадрата Ω равна 1 ($mes\ \Omega = 1$), получаем

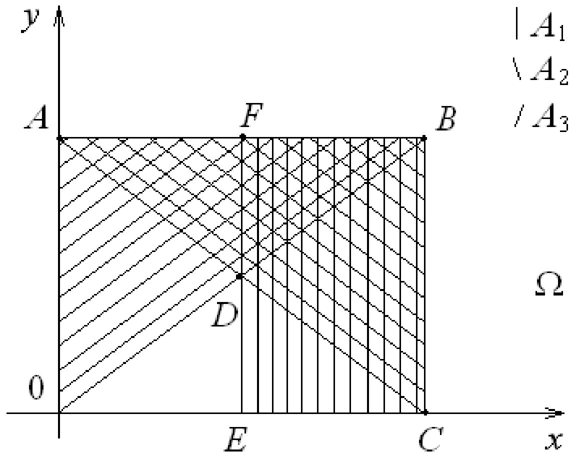



**Рис. 1**

$$P(A_1) = \frac{mes(EFBC)}{mes(\Omega)} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_2) = \frac{mes(ABC)}{mes(\Omega)} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_3) = mes(OAB) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2) = mes(CDFB) = \frac{3}{8} \neq P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1A_3) = mes(DFB) = \frac{3}{8} \neq P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2A_3) = mes(ABD) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1A_2A_3) = mes(DFB) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Отсюда видно, что события $A_1$, $A_2$ и $A_3$ не являются в совокупности независимыми.

Задача 3 решена.

**Задача 4.** *Из n экзаменационных билетов студент выучил m;* $n \geq 2$,

$1 \le m \le n$. *Какова вероятность, что из двух взятых билетов оба будут ему знакомы?*

**Решение.** Обозначим $A_1$, $A_2$ – события, состоящие соответственно в том, что первый и второй взятые студентом билеты были им выучены. Используя классическое определение вероятности, имеем

$$P(A_1) = \frac{m}{n}, \qquad P(A_2|A_1) = \frac{m-1}{n-1}$$

(если событие $A_1$ произошло, то из оставшихся $n - 1$ билета знакомыми будут $m - 1$ билет).

Интересующее нас событие $A=A_1A_2$, поэтому по формуле умножения (2)

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

Задача 4 решена.

**Задача 5.** *На четырех одинаковых карточках написаны соответственно буквы* М, М, А, А. *Ребенок раскладывает карточки вдоль линии. Какова вероятность, что в итоге получится слово «*МАМА*»?*

**Решение.** Введем обозначения для событий:

| | | |
|---|---|---|
| $M_1$= | первой слева оказывается буква | М, |
| $A_2$ = | второй слева оказывается буква | А, |
| $M_3$= | третьей слева оказывается буква | М, |
| $A_4$ = | четвертой слева оказывается буква | А. |

Интересующее нас событие $C$ можно представить в виде произведения $C=M_1A_2M_3A_4$, и по формуле (3)

$$P(C) = P(M_1)P(A_2|M_1)P(M_3|M_1M_2)P(A_4|M_1A_2M_3).$$

Используя классическое определение вероятности, находим

$$P(M_1) = \frac{2}{4}, \quad P(A_2|M_1) = \frac{2}{3}, \quad P(M_3|M_1M_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_4|M_1A_2M_3) = 1.$$

Поэтому

$$P(C) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Задача 5 решена.

**Задача 6.** *Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы*: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. *Найти вероятность хотя бы одного попадания* (*событие* $A$) *при одном залпе из всех орудий*.

**Решение.** Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события $A_1$ (попадание первого орудия), $A_2$ (попадание второго орудия) и $A_3$ (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям $A_1$, $A_2$ и $A_3$ (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1\, q_2\, q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

Задача 6 решена.

**Задача 7.** *Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна* 0,4. *Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее* 0,9 *он попал в цель хотя бы один раз*?

**Решение.** Обозначим через $A$ событие «при $n$ выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз». События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т.д., независимы в совокупности, поэтому применима формула

$$P(A) = 1 - q^n,$$

где $q$ – вероятность промаха при одном выстреле. Приняв во внимание, что, по условию, $P(A) \geq 0{,}9$, $p = 0{,}4$ (следовательно, $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$), получим

$$1 - 0{,}6^{\,n} \geq 0{,}9; \text{ отсюда } 0{,}6^{\,n} \leq 0{,}1.$$

Прологарифмируем это неравенство по основанию 10:

$$n \lg 0{,}6 \leq \lg 0{,}1.$$

Отсюда, учитывая, что $\lg 0{,}6 < 0$, имеем

$$n \geq \lg 0{,}1/\lg 0{,}6 = -1/(-0.2218) = 4{,}5.$$

Итак, $n \geq 5$, т.е. стрелок должен произвести не менее 5 выстрелов.

Задача 7 решена.

### 1.6. Формулы полной вероятности и Байеса

**Определение**. Конечное или бесконечное семейство событий $\{H_1, H_2, \ldots H_n, \ldots\}$ называется полной группой, если сумма всех событий есть событие достоверное ($H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots = \Omega$) и любые два события семейства между собой несовместны ($H_i H_j = \emptyset,\ i \neq j$).

Семейство событий образует полную группу тогда и только тогда, когда при каждом испытании происходит одно и только одно событие этого семейства.

Пусть $\{H_i\}$ – полная группа событий ненулевой вероятности ($P(H_i) > 0$). Тогда вероятность любого события $A$ можно найти по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_i P(H_i) P(A|H_i). \tag{5}$$

Если $A$ и $B$ – события ненулевой вероятности, то в силу (2)

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

Отсюда

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(A)}. \qquad (6)$$

Эта формула называется формулой Байеса. В применении к событиям полной группы $\{H_i\}$ ее можно записать еще и так:

$$P(H_j\,|\,A) = \frac{P(H_j)P(A\,|\,H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A\,|\,H_j)}{\sum_i P(H_i)P(A\,|\,H_i)}.$$

При этом вероятности $P(H_i)$ интерпретируются как априорные (доопытные) вероятности гипотез $H_i$, а условные вероятности $P(H_i|A)$ – как апостериорные (послеопытные) вероятности этих гипотез, после того как наблюдалось событие $A$.

Для двух любых событий $A$ и $B$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (8)$$

Обобщением (8) на случай произвольного числа событий служит формула

$$P\left(\bigcup_{1 \le i \le n} A_i\right) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}\sum P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}\sum\sum P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n). \qquad (9)$$

**Задача 8.** *Двое студентов идут поочередно на экзамен, выучив одни и те же $m$ билетов из $n$ предложенных. У кого из них шансы сдать экзамен выше, если взятый билет обратно не возвращается?*

**Решение.** Очевидно, что для студента, идущего первым на экзамен, вероятность успешной сдачи равна $m/n$. Для того, чтобы вычислить вероятность успешной сдачи для второго студента (событие $A$) рассмотрим полную группу событий следующего вида:

$H_1$= первый студент взял выученный билет,

$H_2$= первый студент взял невыученный билет ($H_2 = \overline{H}_1$).

Имеем

$$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = 1 - P(H_1) = \frac{n-m}{n},$$

$$P(A|H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{m}{n-1}.$$

По формуле полной вероятности (5) получаем

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$

$$= \frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}.$$

Следовательно, шансы студентов на успешную сдачу одинаковы.

Задача 8 решена.

**Задача 9.** *Имеются три группы урн соответственно из* $N_1$, $N_2$, *и* $N_3$ *урн. В каждой урне первой группы* $m_1$ *белых* $n_1$ *черных шара, второй группы –* $m_2$ *белых* $n_2$ *черных шара, третьей группы –* $m_3$ *белых и* $n_3$ *черных шара. Из наудачу взятой урны извлекается шар. Какова вероятность, что он окажется белым? Шар оказался черным. Какова вероятность, что он извлечен из урн первой группы*?

**Решение.** Рассмотрим полную группу событий:

$H_1$= шар извлекается из урны первой группы,

$H_2$= шар извлекается из урны второй группы,

$H_3$= шар извлекается из урны третьей группы.

Имеем

$$P(H_1) = \frac{N_1}{N},\quad P(H_2) = \frac{N_2}{N},\quad P(H_3) = \frac{N_3}{N},\quad N = N_1+N_2+N_3.$$

Обозначим $W$, $B$, соответственно, события, состоящие в том, что извлеченный шар оказался белым, черным. Тогда

$$P(W|H_1) = \frac{m_1}{m_1+n_1},\quad P(W|H_2) = \frac{m_2}{m_2+n_2},\quad P(W|H_3) = \frac{m_3}{m_3+n_3}$$

и по формуле полной вероятности (5)

$$P(W) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(W|H_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i N_i}{m_i+n_i}.$$

Так как $B = \overline{W}$, то

$$P(B) = 1 - P(W) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i N_i}{m_i+n_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i N_i}{m_i+n_i}.$$

Для ответа на последний вопрос вычислим по формуле Байеса (6)

$$P(H_1|B) = \frac{\mathrm{P(H_1)}P(B\,|\,H_1)}{P(B)} = \frac{n_1 N_1}{(m_1+n_1)\sum\limits_{1\le i\le 3}\frac{n_i N_i}{m_i+n_i}}.$$

Задача 9 решена.

**Задача 10.** *Вероятность регистрации космической частицы равна* $\alpha(k)$, *где* $k$ *– количество частиц, попавших в единицу времени в измерительную камеру. Какова вероятность регистрации частицы в течение этой единицы времени, если вероятность попадания* $k$ *частиц в камеру равна* $p_k$*? Частица была зарегистрирована. Какова вероятность, что при этом в камере было* $m$ *частиц? Рассмотреть пример:* $p_k = e^{-a}a^k/k!$; $\alpha(k) = 1 - e^{\beta k}$, $a > 0$, $\beta > 0$.

**Решение.** Введем полную группу событий $\{H_i\}$:

$H_k$= в камеру попало $k$ частиц, $k = 0, 1, 2, \ldots$ .

По условию задачи $P(R|H_k) = \alpha(k)$, где $R$ – событие, означающее регистрацию частицы.

По формуле полной вероятности получаем

$$P(R) = \sum_{k=0}^{\infty} P(H_k)\,P(R|H_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k)\,p_k.$$

По формуле Байеса далее:

$$P(H_m|R) = \frac{P(H_m)P(R\,|\,H_m)}{P(R)} = \frac{p_m\alpha(m)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha(k)\,p_k}.$$

В частности, для $p_k = e^{-a}a^k/k!$; $\alpha(k) = 1 - e^{\beta k}$, получаем

$$P(R) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-\beta k})e^{-a}\frac{a^k}{k!} = 1 - \exp\{a(e^{-\beta} - 1\},$$

$$P(H_m|R) = \frac{a^m(1-e^{-\beta m})}{e^a m!\{1-\exp\{a(e^{-\beta}-1)\}\}}.$$

Задача 10 решена.

**Задача 11.** *Рассмотрим эксперимент из задачи* 3. *Какова вероятность, что или* $x \ge 0{,}5$, *или* $x + y \ge 1$? *или* $x \ge 0{,}5$, *или* $y \ge x$ ?

**Решение.** В обозначениях задачи 3 интересующие нас события

$$A = A_1+A_2, \quad B = A_1+A_3.$$

Поэтому по формуле (8)

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8},$$

$$P(B) = P(A_1) + P(A_3) - P(A_1A_3) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Задача 11 решена.

**Задача 12.** *Экзаменатор возвращает зачетные книжки студентам "абсолютно случайным образом". Какова вероятность, что хотя бы один из студентов получит свою книжку?*

**Решение.** Присвоим студентам каким-либо образом номера от 1 до $n$ и обозначим $A_k$ событие, состоящее в том, что студент с номером $k$ получил свою книжку. Интересующее нас событие $A = A_1+A_2+\ldots+A_n$. Найдем вероятность этого события по формуле (9).

Общее число способов вручения зачеток равно $n$! Из них число способов, при которых $i$ -й студент $(1 \le i \le n)$ получит свою зачетку, равно $(n-1)!$, $i$ -й и $j$-й студенты $(1 \le i,\ j \le n\ ,\ i \ne j)$ получат свои зачетки – $(n-2)!$, ..., все $n$ студентов получат свои зачетки – 1.

Поэтому по классической схеме вычисления вероятностей

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

$$P(A_i) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i) - \sum_{1\le i<} \sum_{j\le n} P(A_i A_j) + \sum_{1\le i<} \sum_{i<} \sum_{k\le n} P(A_i A_j A_k) -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} - \sum_{1\le i<} \sum_{j\le n} \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{1\le i<} \sum_{j<} \sum_{k\le n} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= n\frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$1 - (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}).$$

При $n >> 1$ имеем $P(A)=1–e^{-1} \approx 0.63$, так как выражение в скобках представляет собой разложение функции $e^x$ по степеням $x$ при $x = –1$.

Задача 12 решена.

## 1.7. Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.
2. Докажите, что если $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, то $A$ и $B$ – независимые события.
3. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» – «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностью 0,1 и 0,3 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания ошибочны?
4. Пусть $A$, $B$ и $C$ – наблюдаемые события, причем $P(C) > 0$, $P(AC) > 0$. Доказать справедливость следующих формул для условной вероятности: $P(AB|C) = P(A|C) \cdot P(B|AC)$ (формула умножения), $P(A + B|C) = P(A|C) + P(B|C) – P(AB|C)$ (формула сложения).
5. Показать, что если $A$, $B$ и $C$ – такие наблюдаемые в эксперименте события, что $P(A) \ne 0$, $BC \ne \emptyset$ и $A = \overline{BC}$, то справедлива следующая формула сложения: $P(B + C|A) = P(B|A) + P(C|A)$.
6. Вероятность попасть в самолет равна 0,4, а вероятность его сбить равна 0,1. Найти вероятность того, что при попадании в самолет он будет сбит.
7. Вероятность того, что прибор не откажет к моменту времени $t_1$, равна 0,8, а вероятность того, что он не откажет к моменту времени $t_2 (t_2 > t_1)$, равна 0,6. Найти вероятность того, что прибор, не отказавший к моменту времени $t_1$, не откажет и к моменту времени $t_2$.
8. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки –

независимые и равновероятные события, вычислить вероятность того, что оба ребенка – мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.

9. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Наблюдаемые события: $A$={на трех костях выпадут разные грани}, $B$={хотя бы на одной из костей выпадет шестерка}. Вычислить $P(B|A)$ и $P(A|B)$.
10. Известно, что $A$ и $B$ – наблюдаемые события в эксперименте, причем $P(B) = 0{,}4$, $P(A/B) = 0{,}3$, $P(A/\overline{B}) = 0{,}2$. Найти $P(A)$, $P(\overline{A}\overline{B})$ и $P(\overline{A}+\overline{B})$.
11. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?
12. В ящике 8 белых шаров и 16 красных. Из них 2 белых и 6 красных помечены звездочками. Наугад извлекается один шар. Определить вероятность того, что он помечен звездочкой, если: а) о его цвете ничего не известно; б) известно, что он красный.
13. Доказать, что если события $A$ и $B$ независимы, то события $A$ и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.
14. Пусть события $A$ и $B_1$ независимы и независимы также события $A$ и $B_2$, при этом $B_1B_2 = \emptyset$. Доказать, что события $A$ и $B_1 + B_2$ независимы.
15. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?
16. Статистикой установлено: 60% студентов занимаются спортом, 40% научной работой, 20% спортом и научной работой. Найти вероятности событий: $A$=(студент занимается хотя бы одним из указанных видов деятельности); $B$=(студент занимается только одним видом деятельности).
17. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,3. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.
18. Известны вероятности событий $A$, $B$ и $AB$. Найти вероятность события $A\overline{B}$ и условную вероятность $P(\overline{B}\,|\,\overline{A})$.
19. Доказать, что из условия $P(B|\overline{A}) = P(B|A)$ следует независимость событий $A$ и $B$.
20. Доказать, что при $P(A) = a$ и $P(B) = b \neq 0$ будет $P(A|B) \geq \dfrac{a+b-1}{b}$.

Задание 2

1. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что

студент ответит на первый и второй вопросы, одинаковы и равны 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) по крайней мере на два вопроса билета.

2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.
4. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время $t$) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время $t$ безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.
5. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?
6. Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадает по одной точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
7. Три команды $A_1$, $A_2$, $A_3$ спортивного общества $A$ состязаются соответственно с тремя командами общества $B$. Вероятности того, что команды общества $A$ выиграют матчи у команд общества $B$, таковы: при встрече $A_1$ с $B_1$ – 0,8; $A_2$ с $B_2$ – 0,4; $A_3$ с $B_3$ – 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее?
8. Только один из $n$ ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно $k$ ключей ($k \leq n$) для открывания данной двери.
9. Студент может уехать в институт или автобусом, который ходит через каждые 20 мин, или троллейбусом, который ходит через каждые 10 мин. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут?
10. Проводится три повторных независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении

(любом) ошибка выйдет за пределы допуска, равна 0,1. Найти вероятности следующих событий: $A$={во всех проведенных измерениях была достигнута заданная точность}, $B$={не более чем в одном измерении ошибка выйдет за пределы допуска}, $C$={по крайней мере в двух измерениях подряд была достигнута заданная точность}.

11. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?
12. Некая секретарша написала $n$ деловых писем, вложила их в конверты и по рассеянности написала адреса случайным образом. Какова вероятность $p_n$ того, что хотя бы одно письмо попадет по назначению? Оценить $p_n$ для $n = 5$ и $n = 10$.
13. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью $p$, а третий судья для принятия решения бросает монетку. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?
14. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента $K$ или двух элементов $K_1$ и $K_2$. Вероятность выхода из строя элемента $K$ равна 0,3, а каждого из элементов $K_1$ и $K_2$ – 0,2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.
15. Вероятность попадания в первую мишень равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то производится выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность попадания по второй мишени.
16. Игра между $A$ и $B$ ведется на следующих условиях: первый ход делает $A$, при этом он может выиграть с вероятностью 0,3; если первым ходом $A$ не выигрывает, то ход делает $B$ и может выиграть с вероятностью 0,5; если $B$ не выигрывает, то $A$ делает второй ход, при котором он может выиграть с вероятностью 0,4. Определить вероятность выигрыша $A$ и $B$.
17. Вероятность распада радиоактивного атома за время $\Delta t$ равна $\lambda\Delta t$. Вероятность распада атома не зависит от того, как долго атом уже существует, не распадаясь. Поэтому $\lambda$ не зависит от времени. Какова вероятность распада атома за время $t$? Найти зависимость между коэффициентом $\lambda$ и временем полураспада $T$.
18. На участке $AB$ для мотоциклиста имеется 3 препятствия, вероятность остановки на каждом из которых равна 0.2. Вероятность того, что от пункта $B$ до конечного пункта $C$ мотоциклист проедет без остановки равна 0.7. Определить вероятность того, что на участке $AC$ не будет ни

одной остановки.

19. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероят-ностью 0,6. Найти вероятность того, что: а) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания; б) для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.
20. Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у которого первым выпадет «6 очков». Какова вероятность выигрыша для игрока, бросающего игральную кость первым? Вторым?
21. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для 1-го стрелка равна 0,7, а для 2-го – 0,8. Оба они делают по одному выстрелу по мишени, а затем каждый из стрелков стреляет еще раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Найти вероятность того, что в мишени ровно 2 пробоины.
22. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом: а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам.
23. Завод выпускает определенного типа изделия; каждое изделие имеет дефект с вероятностью 0,7. После изготовления изделие осматривается последовательно тремя контролерами, каждый из которых обнаруживает дефект с вероятностями 0,8; 0,85; 0,9 соответственно. В случае обнаружения дефекта изделие бракуется. Определить вероятность того, что изделие: 1) будет забраковано; 2) будет забраковано:
    а) вторым контролером; б) всеми контролерами.
24. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.
25. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,8. После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при четвертом испытании.
26. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?
27. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

28. В урне имеются $n$ белых и $m$ черных шаров. Два игрока последовательно достают по одному шару, возвращая каждый раз извлеченный шар. Игра продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не достанет белый шар. Определить вероятность того, что первым вытащит белый шар игрок, начинающий игру.
29. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго равна 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.
30. Двое играют до победы, причем для этого необходимо первому выиграть $m$ партий, а второму $n$ партий. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком равна $p$, а вторым $q = 1 - p$. Определить вероят-ность выигрыша всей игры первым игроком.

Задание 3

1. Три студента на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими студентами равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что: а) хотя бы один студент решит задачу; б) хотя бы один студент не решит задачу.
2. Три стрелка независимо друг от друга попадают в цель с вероятностями 0,7, 0,6 и 0,6 соответственно. Для поражения цели достаточно одного попадания в нее. Чему равна вероятность того, что при одновременном выстреле трех стрелков цель будет поражена?
3. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.
4. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
5. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.
6. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
7. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие $A$)?

8. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.
9. Партия из 100 изделий подвергается выборочному контролю. Условие негодности всей партии – наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность того, что партия не будет принята, если она содержит 5% бракованных изделий?
10. В лотерее из 40000 билетов ценные выигрыши падают на 3 билета. Определить: а) вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша на тысячу билетов; б) сколько необходимо приобрести билетов, чтобы вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша была не менее 0,5?
11. Вероятность какого из событий больше: выпадения хотя бы один раз шестерки при четырех бросаниях одной игральной кости – событие $A$ или выпадения хотя бы один раз двух шестерок при 24-х бросаниях двух игральных костей – событие $B$?
12. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом ящике 10 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.
13. В шкафу находятся 9 однотипных приборов. К началу опыта все они новые. Для временной эксплуатации берут наугад 3 прибора и затем возвращают в шкаф. Найти вероятность того, что после трехкратного выбора и эксплуатации в шкафу останется хотя бы один новый прибор.
14. Экзаменационный билет для письменного экзамена состоит из 10 вопросов – по 2 вопроса из 20 по каждой из пяти тем, представленных в билете. По каждой теме студент подготовил лишь половину всех вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на один вопрос по каждой из пяти тем в билете?
15. Среди билетов денежно-вещевой лотереи половина выигрышных. Сколько лотерейных билетов нужно купить, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,999, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету?
16. Мастер обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,6, третий – 0,4 и четвертый – 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.
17. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет

принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

18. В урне имеется $n$ одинаковых шаров с номерами от 1 до $n$. Шары извлекаются по одному без возвращения. Определить вероятность того, что хотя бы при одном извлечении номер шара совпадет с номером опыта.
19. В электропоезд, состоящий из $n$ вагонов, входят $k$ ($k \geq n$) пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдет хотя бы один пассажир.
20. В магазин от разных поставщиков поступают 4 партии различных видов мебели, из которых комплектуются гарнитуры. Вероятности того, что партии товара будут доставлены в срок, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7 и 0,95. Найти вероятность того, что хотя бы одна партия не будет доставлена в срок.

Задание 4

1. В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.
2. В пункте проката имеется 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,90, и 5 телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0,95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.
3. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% – вторую, 20,9% – третью и 7,9% – четвертую группы крови.

   а) Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

   б) Найти вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеются два донора; три донора.
4. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии помех равна 0,99, при перегреве – 0,95, при вибрации – 0,9, при вибрации и перегреве – 0,8. Найти

вероятность $P_1$ отказа этого реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна 0,2, вероятность вибрации 0,1) и вероятность $P_2$ отказа при работе в передвижной лаборатории (вероятность перегрева 0,1, вероятность вибрации 0,3), предполагая перегрев и вибрацию независимыми событиями.

5. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8, второй с вероятностью 0,7. Из них наугад выбирается один стрелок. Первый выстрел, произведенный им, оказался успешным. С какой вероятностью успешным будет и второй выстрел, произведенный этим стрелком?
6. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
7. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.
8. Имеются 2 урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 4 белых и 9 черных. Из первой урны во вторую переложили 2 шара и затем вынули шар из второй урны. Найти вероятность того, что он окажется черным.
9. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой – 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.
10. В сосуд, содержащий $n$ шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны?
11. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.
12. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух

режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки – 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

13. Производится $n$ независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью $p$. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью $p_1$, если два снаряда – с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при $n$ выстрелах горючее воспламенится.
14. Каждое изделие имеет дефект с вероятностью $P$. В цехе имеются три контролера; изделие осматривается одним контролером (с одинаковой вероятностью 1-м, 2-м или 3-м). Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для $i$-го контролера равна $P_i$ ($i = 1, 2, 3$). Если изделие не забраковано в цехе, то оно попадает в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью $P_0$. Найти вероятность событий: $A$ – изделие будет забраковано; $B$ – изделие забраковано в цехе; $C$ – изделие будет забраковано в ОТК завода.
15. В ящике 100 запечатанных пробирок, из них 50 – с раствором слабой и 50 – с раствором сильной концентрации. Отобрано 6 пробирок с раствором слабой и 2 – с раствором сильной концентрации. Затем из оставшихся в ящике взяты наудачу еще две пробирки. После этого из 10 отобранных пробирок наудачу взяты 3. Найти вероятность того, что все 3 – с раствором слабой концентрации (событие $A$).
16. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0.96. Упрощенная система испытаний дает положительный результат с вероятностью 0.98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и с вероятностью 0.05 для изделий, не удовлетворяющих стандарту. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие будет забраковано.
17. В группе 2 отличника, 10 хорошо успевающих студентов и 15 слабых. Отличник может получить на экзамене только 5, хорошо успевающий 4 или 5 с равной вероятностью, слабый – 2, 3 или 4 с равной вероятностью. Найти вероятность того, что вызванный студент получит 4 или 5.
18. 15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Студент знает только 25 вопросов. Найти вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на 2 вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и

указанный дополнительный вопрос из второго билета.

19. Из 10 студентов 2 знают 20 билетов из 30, 3 знают половину билетов, остальные знают все билеты. Найти вероятность того, что отвечающий первым студент сдаст экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0.9, а при незнании билета можно сдать экзамен с вероятностью 0.05.
20. В правом кармане имеются три монеты по 20 коп. и четыре монеты по 3 коп., а в левом – шесть по 20 коп. и три по 3 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются пять монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты в 20 коп., если монета берется наудачу.

Задание 5

1. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.
2. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.
3. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием $K$, 30% – с заболеванием $L$, 20% – с заболеванием $M$. Вероятность полного излечения болезни $K$ равна 0,7; для болезней $L$ и $M$ эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием $K$.
4. Событие $A$ может появиться при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1$, $B_2$, $B_3$, образующих полную группу событий. После появления события $A$ были переоценены вероятности гипотез, т.е. были найдены условные вероятности этих гипотез, причем оказалось, что $p(B_1|A) = 0{,}6$ и $p(B_2|A) = 0{,}3$. Чему равна условная вероятность $p(B_3|A)$ гипотезы $B_3$?
5. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 – только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0,7; если

только помеха, то с вероятностью 0,3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

6. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны $p_1$, $p_2$ и $p_3$. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?
7. Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90% (т.е. 10% носителей туберкулеза остаются неопознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулез, составляет 1%. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним процентом больных, равным 0,1%. Какова вероятность того, что человек, признанный больным, действительно является носителем туберкулеза?
8. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Вероятность отказа 1, 2 и 3 элементов: $P_1 = 0{,}2$, $P_2 = 0{,}4$, $P_3 = 0{,}3$. Найти вероятность того, что отказали 1 и 2 элементы.
9. У рыбака имеются три излюбленных места ловли рыбы, которые он посещает одинаково часто. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью $P_1$, на втором – с вероятностью $P_2$, на третьем – с вероятностью $P_3$. Рыбак вышел на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.
10. Имеются 10 одинаковых ящиков, из которых в девяти находятся по 2 черных и по 2 белых шара, а в десятом – 5 белых и 1 черный. Из ящика, взятого наудачу, извлечен один шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что он извлечен из десятого ящика.
11. Два стрелка поочередно стреляют в мишень. Вероятности попадания первыми выстрелами для них равны соответственно 0,4 и 0,5, а вероятности попадания при последующих выстрелах увеличиваются на 0,05. Какова вероятность того, что первым стрелял первый стрелок, если при пятом выстреле произошло попадание?
12. Стрелок $A$ попадает в мишень с вероятностью 0.6, стрелок $B$ – с вероятностью 0.5, стрелок $C$ – с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп и две пули попали в мишень. Найти вероятность того, что стрелок $C$ попал в мишень.
13. Два из трех независимо работающих элементов отказали. Вероятности отказов элементов равны 0.2, 0.4, 0.3. Найти вероятность того, что отказали первый и третий элементы.

14. Из ящика, в котором было $m > 2$ белых и $n$ черных шаров, потерян шар неизвестного цвета. Для того, чтобы определить состав шаров в ящике, из него вынули 2 шара, которые оказались белыми. Найти вероятность того, что утерян белый шар.
15. По линии связи передаются сигналы двух типов $A$ и $B$ с вероятностями 0.8 и 0.2 соответственно. Из-за помех 10% сигналов $A$ искажаются и принимаются как $B$-сигналы, а 15% $B$-сигналов принимаются как $A$-сигналы. Был принят сигнал $B$. Найти вероятность того, что он и был передан.
16. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0.2, 0.3, 0.5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1, 0.75 и 0.4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежит индикатор?
17. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй – 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.
18. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.
19. Имеется две партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии ¼ деталей недоброкачественные. Деталь, взятая из наудачу выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.
20. Два охотника сделали по одному выстрелу по кабану и убили его. Как по справедливости им надо разделить тушу, если оказалось, что попал только один, и известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,8, а у второго – 0,6?

## 1.8. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли)

Пусть проводится серия из $n$ независимых между собой испытаний, в каждом из которых событие $A$ происходит с фиксированной вероятностью $P(A) = p$. Рассмотрим события:

$B_m$ = событие $A$ произошло $m$ раз,

$B_{\geq m}$ = событие $A$ произошло не менее $m$ раз,

$B_{\leq m}$ = событие $A$ произошло не более $m$ раз.

Заметим, что событие $B_{\geq 1}$ означает, что $A$ произошло хотя бы в одном испытании.

Можно показать, что ($q = 1 - p$)

$$
\begin{aligned}
&P(B_m) = C_n^m p^n q^{n-m} = P_n(m),\\
&P(B_{\geq m}) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k},\\
&P(B_{\leq m}) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 - \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k},\\
&P(B_{\geq 1}) = 1 - q^n, \quad P(B_0) = q^n, \quad P(B_n) = p^n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Замечание. Если ($np - q$) – не целое число, то наибольшей среди вероятностей $P(B_1)$, $P(B_2)$, … , $P(B_n)$ является вероятность $P(B_K)$, где $K = [np - q] + 1$ (символом $[x]$ обозначается целая часть числа $x$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

Если ($np - q$) – целое число, то наибольшими среди указанных вероятностей служат вероятности $P(B_K) = P(B_{K+1})$, где $K = np - q$.

При больших значениях $n$ и $m$ вычисления вероятностей по этим формулам затруднительны. Вместо (1) можно использовать следующие приближенные формулы.

Если $n \to \infty$, а $\to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то при каждом $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_n(m) = P(B_m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \equiv P_m(\lambda) \tag{2}$$

(формула Пуассона).

Известно, что для всякого множества $M \subset \{0,1,2,\ldots\}$

$$\left| \sum_{m \in M} P(B_m) - \sum_{m \in M} P_m(\lambda) \right| \leq np^2$$

и, в частности, при любом $m$

$$|P(B_m) - P_m(\lambda)| \le np^2. \tag{3}$$

Формулу (2) обычно применяют в тех случаях, когда $p$ мало ($np$ – мало!). Если же $p \approx 1$, то мало $q$, и можно использовать эту формулу для нахождения вероятности того, что в $(n - m)$ испытаниях событие $A$ не произошло.

В тех случаях, когда оба параметра $p$ и $q$ заметно отличны от нуля, для оценки вероятностей $P(B_m)$ используют следующие теоремы Муавра-Лапласа.

**Локальная теорема Муавра-Лапласа.** Если $n \to \infty$, $p$ – постоянно, величина $x = (m - np)/\sqrt{npq}$ равномерно ограничена по $m$ и $n$, то

$$P_n(m) = P(B_m) \approx e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}. \tag{4}$$

**Интегральная теорема Муавра-Лапласа.** Если $n \to \infty$, $p$ – постоянно, то вероятность $P_n(K_1; K_2)$ того, что событие $A$ появится в $n$ испытаниях не менее $K_1$ и не более $K_2$ раз

$$P_n(K_1; K_2) = \sum_{K_1 \le m \le K_2} P(B_m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{5}$$

где $x_1 = \dfrac{K_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{K_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, приведена в таблицах для $x \ge 0$; для $x < 0$ пользуются той же таблицей, так как $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. $\Phi(x)$ – нечетная функция.

Формулой (4) часто пользуются, когда $p \approx q \approx 0{,}5$, $n > 100$, $npq > 20$, числа $m$ и $n$ отличаются друг от друга не очень сильно. Относительная погрешность формулы при этом $\approx \mathrm{const}/n$.

<u>Замечание</u>. В частном симметричном случае интегральная теорема позволяет найти вероятность того, что отклонение относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ появления события $A$ от постоянной вероятности $p$ по абсолютной величине не превышает $\varepsilon > 0$, т.е. найти вероятность выполнения неравенства

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon : \; P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{6}$$

Если обозначить $t_\beta$ решение уравнения $2\Phi(t_\beta) = \beta$, то соотношение $\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}} = t_\beta$ позволяет решить 3 простейшие задачи:

1) Даны ($\varepsilon$, $n$), найти $\beta$.
2) Даны ($\varepsilon$, $\beta$), найти $n$.
3) Даны ($n$, $\beta$), найти $\varepsilon$.

**Задача 1.** *При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна* 0,1. *Какова вероятность, что в сообщении из пяти знаков:* 1) *нет искажений,* 2) *три искажения,* 3) *не более двух искажений,* 4) *все знаки неверные*?

**Решение.** Очевидно, что мы имеем дело со схемой Бернулли, где $p$ = 0,1; $n$ = 5. Поэтому ответы на вопросы задачи будут следующими:

1) $P(B_0) = q^n = (0{,}9)^5 \approx 0{,}59$;

2) $P(B_3) = C_5^3 (0{,}1)^3 (0{,}9)^2 \approx 0{,}008$;

3) $P(B_{\geq 2}) = \sum\limits_{k=0}^{2} C_5^k (0{,}1)^k (0{,}9)^{5-k} \approx 0{,}99$;

4) $P(B_5) = (0{,}1)^5 \approx 0{,}00001$.

Задача 1 решена.

**Задача 2.** *Вероятность при первой сдаче "завалить" зачет по теории вероятностей равна приблизительно* 0,2. *Какова вероятность, что из двухсот человек:* 1) *все успешно сдадут зачет*, 2) *никто не сдаст зачета*, 3) *зачет сдаст ровно половина всех студентов,* 4) *число "завалов" будет в интервале от* 20 *до* 40?

**Решение.** Здесь мы имеем схему Бернулли с параметрами $n = 200$, $p$ = 0,2. Следовательно,

1) вероятность того, что все сдадут зачет, равна
$$P(B_{200}) = q^{200} = (0{,}8)^{200} \approx 4 \cdot 10^{-20};$$
2) вероятность того, что никто не сдаст зачета, равна
$$P(B_0) = p^{200} = (0.2)^{200} \approx 2 \cdot 10^{-140};$$
3) вероятность события $B_{100}$, учитывая, что $p$ заметно отлично от нуля, $n$=200>100, $npq$ = 200*0.2*0.8 = 32 > 20, можно оценить по формуле (4):
$$x = \frac{100 - 200 \cdot 0.2}{\sqrt{32}} \approx 10{,}6;$$
$$P(B_{100}) = e^{-\frac{(10.6)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi 32}} \approx 3 \cdot 10^{-26};$$
4) вероятность того, что число "завалов" будет от 20 до 40, равна

$P_{200}(20; 40) = \sum\limits_{m=20}^{40} P(B_m)$. Для $n$ = 200, $p$ = 0,2, $K_1$ = 20; $K_2$ = 40 имеем

$x_1 = \dfrac{K_1 - np}{\sqrt{npq}} = -\dfrac{20}{\sqrt{32}} \approx -3{,}54$; $x_2 = \dfrac{K_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{40-40}{\sqrt{32}/\pi} = 0$. Поэтому по формуле (5), используя таблицу значений функции Лапласа, находим

$$P_{200}(20;\,40) = \sum_{m=20}^{40} P(B_m) \approx \Phi(0) - \Phi(-3{,}54) \approx 0{,}5.$$

Задача 2 решена.

**Задача 3.** *Какова вероятность хотя бы одного полного выигрыша в "Спортлото – 6 из 49", если в лотерее приняли участие* $10^2$, $10^3$, $10^6$, $10^7$, $10^8$ *человек*? *Какова вероятность, что при этом полных выигрыша будет два*?

**Решение.** Для каждого из участников лотереи вероятность полного выигрыша равна $p = 1/C_{49}^{6} \approx 7\cdot 10^{-8}$. Вероятность хотя бы одного полного выигрыша и вероятность двух выигрышей для $n$ участников равны соответственно

$$P(B_{\geq 1}) = 1 - P(B_0) = 1 - (1-p)^n,$$

$$P(B_2) = C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}.$$

Так как $np^2 << 1$, то для приближенного нахождения этих величин можно воспользоваться формулой (2). Абсолютная погрешность соответствующих формул согласно (3) не превосходит по модулю величины $np^2$. Заметим, что для грубой оценки вероятности $P(B_{\geq 1})$ можно при малых $np$ также использовать формулу $P(B_{\geq 1}) \approx np$.

Ответы на вопросы задачи оформим в виде таблицы:

| $n$ | $\lambda \approx pn$ | $1 - e^{-\lambda} P(B_{\geq 1})$ | $\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \approx P(B_2)$ | $np^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $10^2$ | $7{*}10^{-6}$ | $7.000\cdot 10^{-6}$ | $2.5\cdot 10^{-11}$ | $5\cdot 10^{-15}$ |
| $10^3$ | $7{*}10^{-5}$ | $7.00\cdot 10^{-5}$ | $2.45\cdot 10^{-9}$ | $5\cdot 10^{-12}$ |
| $10^6$ | $7{*}10^{-2}$ | 0.06760600 | 0.00228437 | $5\cdot 10^{-9}$ |
| $10^7$ | 0.7 | 0.5034150 | 0.1216633 | $5\cdot 10^{-8}$ |
| $10^8$ | 7 | 0.999088 | 0.022344 | $5\cdot 10^{-7}$ |

Задача 3 решена.

**Задача 4.** *Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна* 0.8. *Найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из* 5 *отобранных и вероятность этого числа*.

**Решение.** Мы имеем схему Бернулли с параметрами $n = 5$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. При этом $np - q = 5\cdot 0{,}2 - 0{,}8 = 0{,}2$ (не целое). Следовательно, наивероятнейшее число появления бракованных деталей $K = [np - q] + 1 = 0 + 1 = 1$, а вероятность появления одного бракованного изделия из 5 отобранных $P_5(1) = p(B_1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$.

**Задача 5.** *Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно* 10?

**Решение.** В рассматриваемой задаче $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n$ = ? Так как наивероятнейшее число выпадения тройки $K = 10 = [np - q] + 1$, если $np - q$ – не целое, либо $K = 10$ или $K = 11$, если $np - q$ – целое, то $K = 10 = [np - q] + 1$ включая границы. Отсюда следует, что

$$9 \leq \frac{n-5}{6} \leq 10 \text{ или } 59 \leq n \leq 65,$$

т.е. необходимо подбросить игральную кость от 59 до 65 раз (включительно).

**Задача 6.** *Вероятность события* $p = 0{,}6$. *Сколько раз нужно повторить испытание, чтобы частота появления события отличалась от вероятности р не более, чем на* $\varepsilon = 0{,}01$ *с вероятностью* $\beta = 0{,}99$.

**Решение.** По формуле (6) ($p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$; $\varepsilon = 0{,}01$) имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}6\right| \leq 0{,}01\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \beta = 0{,}99.$$

Для $\beta = 0{,}99$ по таблице имеем $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2{,}58$. Отсюда находим

$$n = \frac{2{,}58^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}01^2} = 15728.$$

**Задача 7.** *По статистическим данным в среднем* 87% *новорожденных доживают до* 50 *лет.* 1. *Найти вероятность того, что из* 1000 *новорожденных доля (относительная частота) доживших до* 50 *лет будет: а) заключена в пределах от* 0,9 *до* 0,95; *б) будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на* 0,04 *(по абсолютной величине).* 2. *При каком числе новорожденных с надежностью* 0,95 *доля доживших до* 50 *лет будет заключена в границах от* 0,86 *до* 0,88?

**Решение.** 1. а) Вероятность $p$ того, что новорожденный доживет до 50 лет, равна 0,87, т.е. $p = 0{,}87$, $q = 0{,}13$. Так как $n = 1000$ велико, то воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Неравенство $0{,}9 \leq \frac{m}{n} \leq 0{,}95$ равносильно неравенству $K_1 \leq m \leq K_2$, где $K_1 = 0{,}9 \cdot 1000 = 900$; $K_2 = 0{,}95 \cdot 1000 = 950$. По формуле (5) имеем

$$x_1 = \frac{K_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{900 - 870}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}87 \cdot 0{,}13}} = 2{,}82;$$

$$x_2 = \frac{K_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{950 - 870}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}87 \cdot 0{,}13}} = 7{,}52;$$

$P_{1000}(900; 950) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(7{,}52) - \Phi(2{,}82) = 0{,}5 - 0{,}4976 = 0{,}0024.$

б) По формуле (6) при ε = 0,04 имеем $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}87\right|\le 0{,}04\right)\cong$

$\cong 2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{100}{0{,}87\cdot 0{,}13}}\right)$ = 2Φ(3,76) = 2·0,4999 = 0,9998.

2. По условию $P(0{,}86\le \frac{m}{n}\le 0{,}88) = 0{,}95$ или $P(-0{,}01\le \frac{m}{n} - 0{,}87\le 0{,}01) =$

$= P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}87\right|\le 0{,}01\right) = 0{,}95 \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$).

По таблице Φ($t$) = 0,475 при $t$ = 1,96. Следовательно, $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = t$, откуда

$n = \frac{t^2pq}{\varepsilon^2} = \frac{1{,}96^2\cdot 0{,}87\cdot 0{,}13}{0{,}01^2}$ = 4345, т.е. условия п.2 могут быть гарантированы при существенном увеличении числа рассматриваемых новорожденных до $n$ = 4345.

**Задача 8.** *В страховой компании* 10 *тыс. клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет* 500 *руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого по имеющимся данным и оценкам экспертов можно считать равной* $p$ = 0,005, *страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму размером* 50 *тыс. руб. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надежностью* 0,95?

**Решение.** Размер прибыли компании составляет разность между суммарным взносом всех клиентов и суммарной страховой суммой, выплаченной $n_0$ клиентам при наступлении страхового случая, т.е.

$$П = 500\cdot 10 - 50n_0 = 50(100 - n_0) \text{ тыс. руб.}$$

Для определения $n_0$ применим интегральную формулу Муавра–Лапласа.

По условию задачи

$$\sum_{0\le m\le n_0} P(B_m) = P_{10\,000}(0;\, n_0) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}95, \qquad (7)$$

где $m$ – число клиентов, которым будет выплачена страховая сумма;

$$x_1 = \frac{0-np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{np}{q}} = -\sqrt{\frac{10\,000\cdot 0{,}005}{0{,}995}} = -7{,}09, \quad x_2 = \frac{n_0-np}{\sqrt{npq}},$$

откуда

$$n_0 = np + x_2\sqrt{npq} = 10\,000\cdot 0{,}005 + x_2\sqrt{49{,}75} = 50 + x_2\sqrt{49{,}75}.$$

Из соотношения (7)

$$\Phi(x_2) = 0{,}95 + \Phi(x_1) = 0{,}95 + \Phi(-7{,}09) \approx 0{,}95 + (-0{,}5) = 0{,}45.$$

По таблице $\Phi(x_2) = 0{,}45$ при $x_2 = 1{,}645$.

Теперь $n_0 = 50 + 1{,}645\sqrt{49{,}75} = 61{,}6$ и $\Pi = 50(100 - 61{,}6) = 1920$, т.е. с надежностью 0,95 ожидаемая прибыль составит 1,92 млн.руб.

## 1.9. Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/10. Каковы вероятности того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит ровно 3 искажения; в) содержит не более трех искажений?
2. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха $p$ и неудачи $q = 1 - p$ появится $m + n$ успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.
3. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набирал 6 очков (выигрыш – 1 очко, проигрыш и ничья – 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает $k = 0, \ldots, 5$.
4. Обрабатываемые на станке детали сортируются по размерам на две группы. Каждая очередная деталь независимо от предыдущих с равными вероятностями попадает в первую или вторую группу. Пусть в начале смены для каждой группы деталей приготовлено по ящику емкости $r$. Какова вероятность того, что в момент, когда очередную деталь будет некуда класть, в другом ящике будет $m$ деталей?
5. По каналу связи передаются сообщения из нулей и единиц. Из-за помех вероятность правильной передачи знака равна 0,55. Для повышения вероятности правильной передачи каждый знак сообщения повторяют $n$ раз. Полагают, что последовательности из $n$ принятых знаков в сообщении соответствует знак, составляющий в ней большинство. Найти вероятность правильной передачи одного знака при $n$-кратном повторении, если $n = 5$. Подобрать $n$ так, чтобы вероятность правильной передачи знака была не меньше 0,99.
6. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что:

   а) пять первых покупателей потребуют обувь 41 размера;

   б) хотя бы один из пяти покупателей потребует обувь 41 размера;

   в) только один из пяти покупателей потребует обувь 41 размера.
7. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 1/7. Какова вероятность того, что лицо, имеющее шесть билетов: а)

выиграет по двум билетам; б) выиграет по трем билетам; в) не выиграет по двум билетам.

8. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее восьми автомашин.
9. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Какова вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдут:

   а) восемь семян; б) по крайней мере восемь; в) не менее трех.
10. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести телевизоров: а) не более одного потребует ремонта; б) хотя бы один потребует ремонта.
11. Бросают пять игральных костей. Чему равна вероятность того, что из пяти выпавших цифр одна – четная, а остальные – нечетные?
12. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже: а) не выйдет ни один из них; б) выйдет один из них; в) выйдут трое из них.
13. В четырех опытах, проводимых по схеме Бернулли, вероятность хотя бы одного успеха равна 0,5904. Что более вероятно в этих четырех опытах: достижение ровно двух успехов или ровно трех успехов?
14. Что вероятнее: выиграть у равносильного партнера три партии из четырех или пять партий из восьми? (Ничьи исключаются).
15. Каждый выпущенный по цели снаряд попадает в нее, независимо от других снарядов, с вероятностью 0,4. Если в цель попал один снаряд, она поражается с вероятностью 0,3; если два снаряда, – с вероятностью 0,7; если три или более снарядов, то цель поражается наверняка. Найдите вероятность поражения цели при условии, что по ней выпущено:

   а) 3 снаряда; б) 4 снаряда.
16. При каждом выстреле независимо от остальных выстрелов стрелок попадает в мишень с вероятностью $p$. Какова вероятность того, что в результате шести выстрелов произойдет не менее двух попаданий и хотя бы один промах?
17. На испытательном стенде было установлено 10 приборов. Известно, что каждый из них, независимо от остальных приборов, во время испытания выходит из строя с вероятностью 0,15. Вычислить:

    1) вероятность того, что за время испытаний отказало три прибора;

    2) условную вероятность того, что отказало три прибора, если известно, что не все приборы выдержали испытание.

18. Подбросили 6 игральных костей. Вычислите: а) вероятность того, что цифра 6 выпала дважды; б) вероятность того, что цифра 6 выпала дважды, если известно, что она выпала по крайней мере на одной из игральных костей.
19. Отрезок $AB$ разделен точкой $C$ в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки $C$ и две – правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
20. На отрезок $AB$ длины $a$ наудачу брошено пять точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки $A$ на расстоянии, меньшем $x$, а три – на расстоянии, большем $x$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
21. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
22. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия $p = 0{,}9$. Вероятность поражения цели при $k$ попаданиях ($k \geq 1$) равна $1 - q^k$. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если сделано два выстрела.
23. (Задача Банаха). Некий курящий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажутся $r$ спичек ($r = 0, 1, 2, \ldots n$; $n$ – число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок).
24. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.
25. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 5000.
26. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 5 абонентов?
27. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух

человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.

28. Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых событие $A$ наступает с вероятностью 0,3. Событие $B$ наступает с полной достоверностью, если событие $A$ произошло не менее 2 раз, с вероятностью 0,6, если событие $A$ произошло 1 раз и не может наступить, если событие $A$ не имело места. Определить вероятность появления события $B$.
29. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, в девятку – 0.3. Найти вероятность того, что при четырех выстрелах данный стрелок наберет не менее 38 очков.
30. Завод отправил на базу 10 000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10 000 изделий: 1) будет повреждено: а) 3; б) по крайней мере 3; 2) не будет повреждено: а) 9997; б) хотя бы 9997.
31. Два баскетболиста делают по 3 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих будет одинаковое количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.
32. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 00 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 33 встретится: а) три раза; б) четыре раза.
33. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1.
34. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятность отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5 и 0,8.
35. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 получить не меньше трех отказов?
36. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой $n$ торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью $p$. При попадании торпеды с вероятностью $1/m$ затопляется один из $m$ отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.
37. В библиотеке имеются книги только по технике и по математике.

Вероятность того, что любой читатель возьмет книгу по математике равна 0,3. Определить вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги или только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

38. Предполагаем, что все комбинации полов детей равновероятны. Какую долю всех семей с шестью детьми составляют семьи с тремя мальчиками и тремя девочками?
39. Сколько нужно взять случайных цифр для того, чтобы вероятность появления цифры 7 была не менее 0,9?
40. Человек, принадлежащий к некоторой группе населения с вероятностями 0,2, 0,3, 0,4, 0,1, соответственно оказывается брюнетом, шатеном, блондином, рыжим. Выбирается наудачу 6 человек. Найти вероятность того, что в их составе: а) не менее четырех блондинов (событие $A$); б) хотя бы один рыжий (событие $Б$); в) равное число блондинов и шатенов (событие $C$).

Задание 2

1. На молодежную газету в среднем подписывается 25% студентов. Чему равно наиболее вероятное число подписчиков этой газеты на потоке, насчитывающем: а) 100 студентов; б) 103 студента?
2. На данной остановке данным маршрутом автобуса пользуются 20 человек, причем каждый из них, независимо от остальных, опаздывает на автобус с вероятностью $p$. Чему равно наиболее вероятное число пассажиров, заполняющих автобус данного маршрута на данной остановке, если:
   а) $p = 1/10$; б) $p = 1/7$?
3. В круг вписан квадрат. Чему равна вероятность того, что из четырех точек, брошенных наугад в данный круг, только одна попадет внутрь квадрата? Каково наиболее вероятное число точек, попавших в квадрат?
4. В круг вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что из пяти точек, брошенных наугад в данный круг, ровно три окажутся внутри треугольника? Каково наиболее вероятное число точек, не попадающих внутрь треугольника?
5. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.
6. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.
7. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что

каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

8. Два равносильных противника играют в шахматы. Найти наивероятнейшее число выигрышей для любого шахматиста, если будет сыграно $2N$ результативных (без ничьих) партий.
9. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,4. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.
10. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.
11. Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?
12. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний $n$, при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях будет равно 30.
13. Чему равна вероятность $p$ наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?
14. Чему равна вероятность $p$ наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?
15. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.
16. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов;

    б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов;

    в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы 4 элемента.
17. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 2/3. Найти наивероятнейшее число

удачных опытов, если общее их количество равно 7.

18. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.
19. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы 2 пакета; г) наивероятнейшее число пакетов.
20. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1?
21. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.
22. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.
23. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.
24. Найти наивероятнейшие числа отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна 2/3, а отрицательной – 1/3.
25. Определить число $n$ повторных независимых испытаний, которые нужно произвести для того, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 20, если вероятность появления этого события при каждом испытании равна 0,8.

Задание 3

1. В таблице случайных чисел цифры сгруппированы по две. Найти приближенное значение вероятности того, что среди 100 пар пара 09 встретится не менее двух раз.
2. Определить вероятность того, что среди 400 проб руды окажется 275 проб с промышленным содержанием металла, если вероятность промышленного содержания металла одинакова для каждой пробы и равна 0,7.
3. Вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 900 набитых перфокарт окажется 720

набитых правильно.

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 100 попаданий из 320 выстрелов.
5. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдет 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,75.
6. Пусть вероятность нарушения герметичности банки консервов равна 0,0005. Найти вероятность того, что среди 2000 банок две окажутся с нарушением герметичности.
7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.
8. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.
9. Монета брошена $2N$ раз ($N$ велико!). Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно $N$ раз.
10. Монета брошена $2N$ раз ($N$ велико!). Найти вероятность того, что «герб» выпадет на $2m$ раз больше, чем надпись.
11. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.
12. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность, что при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз? б) ровно 85 раз?
13. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.
14. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 320 имеют холодильники.
15. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.
16. В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти:
    а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая, и вероятность такого события; б) вероятность того, что по крайней мере 3 студента имеют один и тот же день рождения.
17. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что: а) тираж содержит 5 бракованных книг; б) по

крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно.

18. Известно, что в среднем 60% всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется: а) 6 аппаратов первого сорта, если партия содержит 10 аппаратов; б) 120 аппаратов первого сорта, если партия содержит 200 аппаратов?
19. При массовом производстве элементов электроники вероятность появления брака равна 0,005. Определить вероятность того, что в партии из 600 элементов бракованными будут: а) не более трех; б) ровно три элемента.
20. К пульту охранной системы предприятия подключено 2000 датчиков, причем вероятность появления тревожного сигнала на каждом из них равна 0,0005. Определить вероятность тревоги (для чего достаточно хотя бы одного сигнала).
21. Телефонный кабель состоит из 400 жил. С какой вероятностью этим кабелем можно подключить к телефонной сети 395 абонентов, если для подключения каждого абонента нужна одна жила, а вероятность того, что она повреждена, равна 0,0125?
22. Корректура книги объемом в 500 страниц имеет 100 опечаток. Определить вероятность того, что на случайно выбранной странице окажется: не более трех; ни одной опечатки.
23. Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,002. Определить вероятность того, что в партии из 1500 деталей будет: ровно 3 бракованных; не более 3.
24. Известно, что одним выстрелом стрелку почти невозможно попасть в самолет. В то же время из практики войн известны случаи, когда при одновременной стрельбе целого подразделения самолеты сбивались. Принимая вероятность сбить самолет при одном выстреле равной 0,001, найти вероятность поражения самолета хотя бы один раз при стрельбе подразделением из 600 солдат.
25. Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна $p$. Найти вероятность того, что $k$-й по порядку успех происходит при $l$-м испытании.

Задание 4

1. Пусть $\eta_N$ – суммарное число появлений «5» и «6» в $N$ бросаниях игральной кости. При $N = 1800$ найти вероятность того, что $\eta_N \geq 620$.
2. Две монеты подбрасывают 4800 раз. Найти приближенное значение вероятности того, что событие «герб – герб» появится меньше 1140 раз.
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Найти приближенное значение вероятности того, что при 100 выстрелах будет

не больше трех попаданий.

4. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти приближенное значение вероятности того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.
5. На одной странице 2400 знаков. При типографском наборе вероятность искажения одного знака равна 1/800. Найти приближенное значение вероятности того, что на странице не менее двух опечаток.
6. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется бракованных:
   а) восемь деталей; б) менее восьми деталей.
7. На прядильной фабрике работница обслуживает 750 веретен. При вращении веретена пряжа рвется в случайные моменты времени из-за неравномерности натяжения, неровности и других причин. Считая, что вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого промежутка времени $t$ равна 0,008. Найти вероятность того, что за это время произойдет не более 10 обрывов.
8. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найти вероятность того, что среди 900 клемм окажется от 790 до 820 (включительно) годных.
9. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется от 410 до 430 (включительно) точных.
10. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 750 покупателей не более 120 потребуют обувь этого размера.
11. Предприятие имеет 2400 агрегатов. В каждый агрегат входит некоторая деталь, вероятность выхода из строя которой, за время $t$, равна 1/6. Исходя из этого, отдел снабжения на время $t$ заготовил 400 запасных деталей этого типа. Найти вероятность того, что это количество запасных деталей обеспечит бесперебойную работу всех агрегатов в течение времени $t$.
12. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится:
    а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.
13. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.
14. Монета брошена $2N$ раз ($N$ велико!). Найти вероятность того, что число выпадений «герб» будет заключено между числами $N-\sqrt{2N}/2$ и

$N + \sqrt{2N}/2$.

15. Вероятность появления положительного результата в каждом из $n$ опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?
16. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.
17. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных «гербом» вверх, будет от 45 до 55?
18. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет не больше 17?
19. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.
20. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий; в) не менее 480; г) от 480 до 520.
21. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов будет: а) равно 48; б) находиться в границах от 45 до 55.
22. Вероятность того, что перфокарта набита оператором неверно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: а) из 200 перфокарт правильно набитых будет не меньше 180; б) у того же оператора из 10-ти перфокарт будет неверно набитых не более двух.
23. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят: а) 180 студентов; б) не менее 180 студентов.
24. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставный фонд свыше 100 млн руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставный фонд свыше 100 млн руб.: а) не менее 300; б) от 300 до 400 включительно.
25. У страховой компании имеются 10 000 клиентов. Каждый из них, страхуясь от несчастного случая, вносит 500 руб. Вероятность

несчастного случая 0,0055, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшим, составляет 50 000 руб. Какова вероятность того, что: а) страховая компания потерпит убыток; б) на выплату страховых сумм уйдет более половины всех средств, поступивших от клиентов?

26. На сборы приглашены 120 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив равна 0,7. Определить вероятность того, что выполнят норматив: а) ровно 80 спортсменов; б) не менее 80.
27. К магистральному водопроводу подключены 160 предприятий, каждое из которых с вероятностью 0,7 в данный момент времени осуществляет отбор воды. Найти вероятность того, что в этот момент забор воды производят не менее 80 и не более 120 предприятий.
28. В жилом доме имеется 6000 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет заключено между 2800 и 3200.
29. Вероятность госпитализации пациента при эпидемии гриппа равна 0,002. Найти вероятность того, что из 2000 заболевших поликлиника направит на госпитализацию не более 5 пациентов.
30. Вероятность того, что после одного учебного года учебник уже нельзя будет использовать в дальнейшем, равна 0,25. Найти вероятность того, что придется закупить не более 1050 новых учебников, чтобы к новому учебному году в библиотеке вуза их снова было 4000.

Задание 5

1. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что частота появления успеха отклонится по абсолютной величине от его вероятности не более чем на 0,04.
2. Вероятность того, что деталь стандартна, равна $p = 0{,}9$. Найти: а) с вероятностью 0,9545 границы (симметричные относительно $p$), в которых заключена доля стандартных среди проверенных 900 деталей; б) вероятность того, что доля нестандартных деталей среди них заключена в пределах от 0,08 до 0,11.
3. В результате проверки качества приготовленных для посева семян гороха установлено, что в среднем 90% всхожи. Сколько нужно семян, чтобы с вероятностью 0,991 можно было ожидать, что доля взошедших семян отклонится от вероятности взойти каждому семени не более, чем на 0,03 (по абсолютной величине)?
4. Вероятность того, что дилер, торгующий ценными бумагами, продаст их, равна 0,7. Сколько должно быть ценных бумаг, чтобы можно было утверждать с вероятностью 0,996, что доля проданных среди них

отклонится от 0,7 не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине)?

5. Пусть $\xi_n$ – число успехов в $n$ независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха, равной ½. С помощью теоремы Муавра–Лапласа найти приближенные значения
$$P\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right\},\ P\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right\}$$
при $n = 100$.
6. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.
7. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).
8. Сколько нужно проверить деталей, чтобы с вероятностью: а) 0,9; б) 0,99; в) 0,999 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения частости годных деталей от вероятности 0,9 того, что деталь окажется годной, не превысит 0,01 (по абсолютной величине)?
9. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти:

   а) границы числа попаданий в мишень при 600 выстрелах, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,993;

   б) такое число выстрелов по мишени, при котором с вероятностью 0,993 можно ожидать, что отклонение частости попаданий от вероятности 0,6 по абсолютной величине не превзойдет 0,03.
10. Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0,2. Предполагая, что число покупателей равно 10 000 определить:

    а) вероятность того, что доля тех, которым необходима обувь этого размера, отклонится от вероятности 0,2 по абсолютной величине не более чем на 0,005;

    б) какое, с вероятностью 0,9973, можно ожидать наибольшее отклонение от вероятности 0,2 доли тех покупателей, которым необходима обувь 41-го размера.
11. Вероятность наступления события в каждом испытании равна 0,8. Найти наибольшее отклонение частоты этого события от вероятности

его наступления, которое можно ожидать с вероятностью 0,9127 при 4900 испытаниях.

12. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.
13. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.
14. Французский ученый Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности появления «герба» по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.
15. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний $n$, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.
16. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства $|m/n - 1/6| \leq 0{,}01$ была не меньше чем вероятность противоположного неравенства, где $m$ – число появлений одного очка в $n$ бросаниях игральной кости?
17. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний $n$, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.
18. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений $n$, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?
19. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число $\varepsilon$, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысила $\varepsilon$.
20. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число $\varepsilon$, чтобы с

вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила $\varepsilon$.

21. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число $\varepsilon$, чтобы с вероятностью 0,98 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысила $\varepsilon$.
22. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число $m$ стандартных деталей среди проверенных.
23. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число $m$ бракованных изделий среди проверенных.
24. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число $m$ выпадений шестерки.
25. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний $p$ = 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.
26. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаниях.
27. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности $p$ = 0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?
28. Сколько нужно произвести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать отклонение частоты выпадания «герба» от теоретической вероятности 0,5 на абсолютную величину, меньшую чем 0,01.
29. Вероятность появления успеха в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число $\varepsilon$, чтобы с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения частоты появления успеха от его вероятности 0,8 не превысит $\varepsilon$.
30. Игральную кость бросают 80 раз. Найти приближенно границы, в которых число $\mu$ выпаданий шестерки будет заключено с вероятностью 0,9973.

## Глава 2

## СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

### 2.1. Определение случайной величины. Свойства функции распределения

Формальное определение случайной величины в аксиоматике А.Н. Колмогорова дается следующим образом.

**Определение.** *Случайной величиной* (с.в.) на вероятностном пространстве ($\Omega$, $A$, P) называется всякая числовая функция элементарного события $\xi: \Omega \to R^1$, для которой $\forall x \in R^1$

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in A. \qquad (1)$$

Смысл условия (1) состоит в том, что с.в. называется не произвольная функция исхода эксперимента, а лишь такая, для которой при любом исходе однозначно устанавливается, превзошло ее значение произвольно заданный порог $x$ или нет. В дальнейшем такое событие будем записывать в виде $\{\xi < x\}$, а его вероятность – в виде $P\{\xi < x\}$.

Условие (1) позволяет корректно ввести для любой с.в. понятие интегральной функции распределения.

**Определение.** *Функцией распределения* (ф.р.) с.в. $\xi$ называется функция вещественного аргумента

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}. \qquad (2)$$

**Задача 1**. *Используя аксиомы вероятности, проверить, что ф.р. обладает следующими свойствами:*

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$;
2) $F_\xi(x_2) \ge F_\xi(x_1)$ при $x_2 > x_1$;
3) $F_\xi(x)$ всюду непрерывна слева и имеет конечные пределы справа;
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$;
5) $P\{\xi \in [a, b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
   $P\{\xi = a\} = F_\xi(a + 0) - F_\xi(a)$;
   $P\{\xi \in [a, b]\} = F_\xi(b + 0) - F_\xi(a)$;
   $P\{\xi \in (a, b]\} = F_\xi(b + 0) - F_\xi(a + 0)$;
   $P\{\xi \in (a, b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a + 0)$;
   $P\{\xi \ge b) = 1 - F_\xi(b)$;
   $P\{\xi > b\} = 1 - F_\xi(b + 0)$,
   $P\{\xi \le b\} = F_\xi(b + 0)$.

**Решение.** Вероятность как функция множеств удовлетворяет следующим аксиомам А.Н. Колмогорова:

$$0 \le P(A) \le 1; \qquad (a)$$

$P(\Omega) = 1;$ (б)

вероятность суммы не более чем счетного семейства попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. (в)

Свойство 1 функции распределения является простым следствием аксиомы (а). Далее при $x_1 < x_2$

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} + \{x_1 \le \xi < x_2\}.$$

Отсюда по аксиоме (в)

$$F_\xi(x_2) = P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \le \xi < x_2\} = \\ = F_\xi(x_1) + P\{x_1 \le \xi < x_2\}, \tag{3}$$

что вместе с аксиомой (а) доказывает свойство 2.

Аксиома (в) допускает следующую эквивалентную формулировку: вероятность непрерывна относительно монотонно возрастающих (убывающих) последовательностей событий; если $A = \bigcup_{n \ge 1} A_n$, $A_{n+1} \supset A_n$, то $P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$. Используя это, докажем свойство 3. При $n \to \infty$ последовательность событий

$\{\xi < x - \frac{1}{n}\}$, монотонно возрастая, сходится к событию $\{\xi < x\}$:

$$\{\xi < x - \tfrac{1}{n}\} \uparrow \{\xi < x\}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} F_\xi(x - \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} P\{\xi < x - \frac{1}{n}\} = P\{\xi < x\} = F_\xi(x),$$

что с учетом монотонности $F_\xi$ означает непрерывность функции слева. Аналогично, используя монотонную сходимость событий

$$\{\xi < x + \frac{1}{n}\} \downarrow \{\xi \le x\},$$

убеждаемся в том, что в каждой точке $x$ функция $F_\xi$ имеет конечный предел справа:

$$\lim_{n \to \infty} F_\xi(x + \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} P\{\xi < x + \frac{1}{n}\} = P\{\xi \le x\}.$$

Докажем свойство 4. Имеем при $n \to \infty$

$$\{\xi < n\} \uparrow \Omega, \quad \{\xi < -n\} \downarrow \varnothing.$$

Поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = \lim_{n \to \infty} F_\xi(n) = P(\Omega) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = \lim_{n \to \infty} F_\xi(-n) = P(\varnothing) = 0.$$

Для доказательства свойства 5 положим в равенстве (3) $x_1 = a$, $x_2 = b$. Тогда получим $F_\xi(b) - F_\xi(a) = P\{\xi \in [a, b)\}$.

Далее при $n \to \infty$

$$\{a \le \xi < a + \frac{1}{n}\} \downarrow \{\xi = a\}.$$

Следовательно,

$$P\{\xi = a\} = \lim_{n\to\infty} P\{a \le \xi < a + \tfrac{1}{n}\} = \lim_{n\to\infty} (F_\xi(a + \frac{1}{n}) - F_\xi(a)) =$$

$$= F_\xi(a + 0) - F_\xi(a).$$

Аналогично проверяются все остальные формулы свойства 5. Выполните эту проверку самостоятельно.

Задача 1 решена.

**Задача 2.** *График функции распределения* $y = F_\xi(x)$ *с.в.* $\xi$ *изображен на рис.*1.

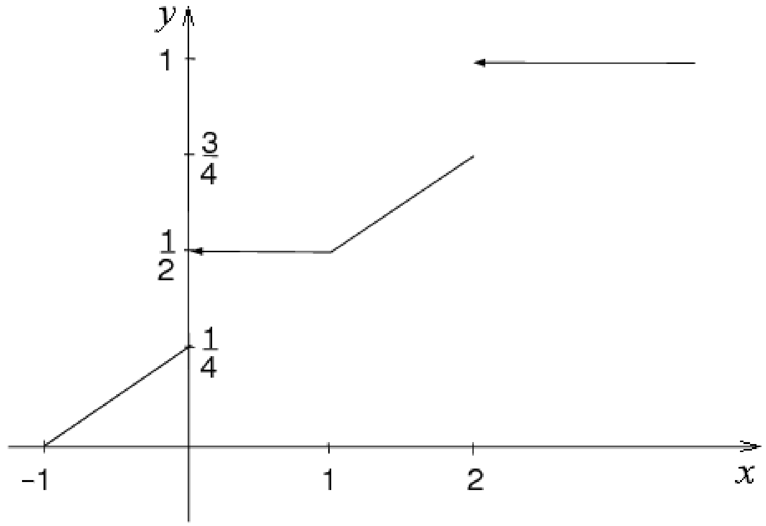



**Рис. 1**

Определить: 1) вероятность принятия с.в. $\xi$ значений $-1, 0, 1, 2, 3$; 2) вероятность попадания с.в. в множества

$$(-\infty, \frac{1}{2}), (-\infty, \frac{1}{2}], [-1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1], [1, 2], [5, +\infty).$$

**Решение.** Согласно свойству 5 задачи 1 вероятность принятия с.в. значения $x$ равна скачку ф.р. $F_\xi$ в точке $x$:

$$P\{\xi = x\} = F_\xi(x + 0) - F_\xi(x - 0) = F_\xi(x + 0) - F_\xi(x).$$

Поэтому

$$P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = P\{\xi = 3\} = 0,$$

$$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 2\} = \frac{1}{4}.$$

Используя далее соответствующие формулы свойства 5, находим

$$P\{\xi < \frac{1}{2}\} = F_\xi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \quad P\{\xi \le \frac{1}{2}\} = F_\xi(\frac{1}{2} + 0) = \frac{1}{2},$$

$$P\{\xi \in [-1, 0)\} = F_\xi(0) - F_\xi(-1) = \frac{1}{4}, \quad P\{\xi \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} =$$

$$= F_\xi(\frac{1}{2}) - F_\xi(-\frac{1}{2} + 0) = \frac{3}{8},$$

$$P\{\xi \in (0, 1]\} = F_\xi(1 + 0)\} - F_\xi(0 + 0) = 0,$$

$$P\{\xi \in [1, 2]\} = F_\xi(2 + 0) - F_\xi(1) = \frac{1}{2},$$

$$P\{\xi \in [5, \infty)\} = 1 - F_\xi(5) = 0.$$

## 2.2. Дискретные случайные величины

**Определение**. Случайная величина $\xi$ называется *дискретной*, если множество значений $\{c_i\}$, которые она принимает с ненулевыми вероятностями $p_i(P\{\xi = c_i\} = p_i > 0)$, не более чем счетно, причем $\sum_i p_i = 1$.

Дискретная с.в. полностью задается своим рядом распределения – таблицей следующего вида

| | |
|---|---|
| $c_i$ | |
| $p_i$ | |

Здесь $c_i$ – ее возможные значения, $p_i$ – вероятности их принятия. Графически ряд распределения изображается в виде так называемого многоугольника распределения (рис. 2).

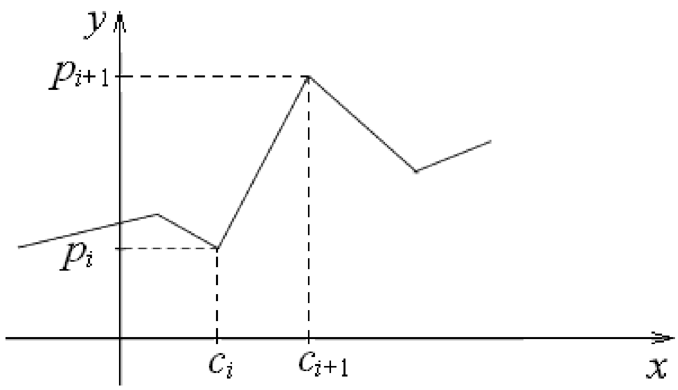



**Рис. 2**

Функция распределения $F_\xi(x)$ дискретной с.в. помимо свойств, отмеченных в задаче 1, обладает еще одним характерным свойством – она кусочно-постоянна (рис.3).

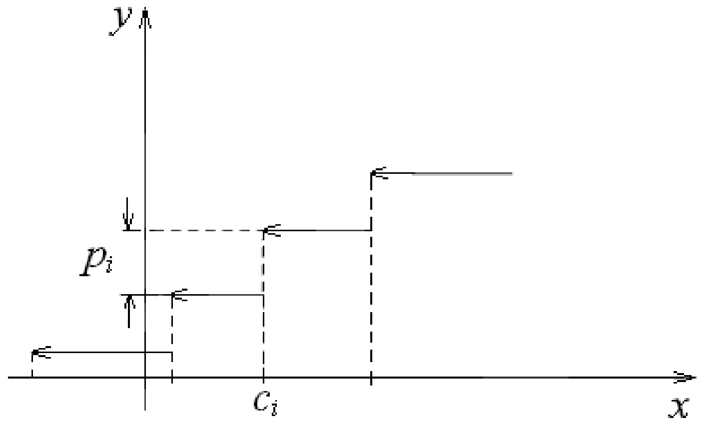



**Рис. 3**

Для дискретных с.в. вводят еще так называемую *обобщенную плотность вероятности* вида $f_\xi(x) = \sum_i p_i \delta(x - c_i)$, где $\delta(x)$ – обобщенная $\delta$–функция Дирака. Графически обобщенная плотность $y = f_\xi(x)$ изображена на рис. 4.

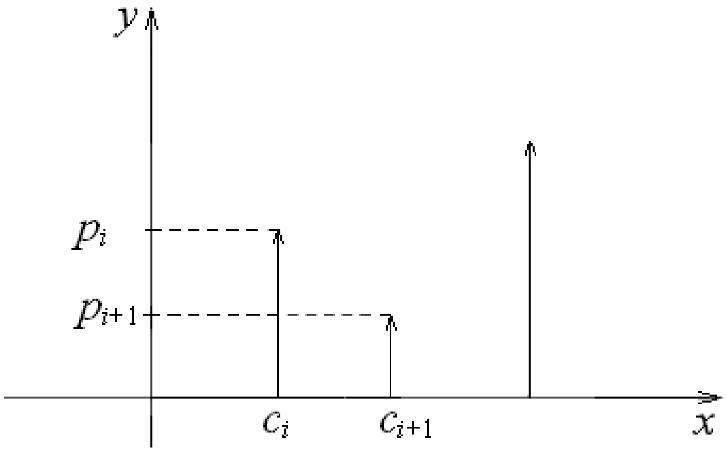



**Рис. 4**

Для нахождения вероятности попадания значения дискретной с.в. в множество $B$ следует найти сумму $P\{\xi \in B\} = \sum_{c_i \in B} p_i$, где суммирование производится по всем $c_i$, попадающим в $B$.

## 2.3. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Распределение полностью характеризует случайную величину. Между тем для решения многих задач вовсе не нужно знать распределения случайных величин, достаточно знать лишь некоторые числа, характеризующие их распределения, так называемые *числовые характеристики* случайных величин.

**Определение.** *Начальным моментом s-го порядка* с.в. $\xi$ называется число

$$m_s = M\,\xi^s.$$

Характеристикой среднего значения с.в. служит *математическое ожидание*.

Пусть $\xi$ – дискретная с.в. с рядом распределения

| | |
|---|---|
| $c_i$ | |
| $p_i$ | |

Проведем $n$ испытаний. Пусть $x_k$ — значение $\xi$ в $k$–м испытании. Рассмотрим среднее значение величины по всем испытаниям:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_i c_i \frac{k_i}{n} \equiv \sum_i c_i \nu_i(\xi = c_i).$$

Здесь мы просуммировали по всем возможным значениям с.в. с учетом чисел $k_i$ их появлений. Если число испытаний достаточно велико, то все относительные частоты стабилизируются около вероятностей соответствующих событий

$$\nu_i(\xi = c_i) \approx p_i = P\{\xi = c_i\},$$

и поэтому

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \approx \sum_i c_i p_i.$$

Отсюда становится понятным смысл следующего определения.

**Определение.** *Математическим ожиданием (средним — medium)* дискретной с.в. с рядом распределения

| | |
|---|---|
| $c_i$ | |
| $p_i$ | |

называется число, равное сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M\xi = \sum_i c_i p_i. \tag{4}$$

В случае бесконечного множества значений с.в. ряд предполагается абсолютно сходящимся.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

**Свойство 1**. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(c) = c \cdot 1 = c.$$

**Свойство 2.** Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(c\,\xi) = c \cdot M\,\xi.$$

**Свойство 3.** Математическое ожидание произведения взаимно независимых с.в. равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$M(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \ldots M\xi_n$.

**Свойство 4.** Математическое ожидание суммы с.в. равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n.$$

Математическое ожидание произвольной неслучайной функции $\eta = \varphi(\xi)$ дискретной с.в. $\xi$ вычисляется по формуле

$$M\eta = \sum_i \varphi(c_i) p_i. \qquad (5)$$

Приведем примеры дискретных случайных величин

Случайная величина $\xi$ имеет **биномиальный закон распределения** с параметрами $(n, p)$ $(\xi \in Bi(n, p))$, если ее ряд распределения имеет следующий вид:

| $c_i$ | 0 | 1 | … | $k$ | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $q^n$ | $npq^{n-1}$ | … | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | … | $p^n$ |

Всякая биномиальная с.в. с параметрами $(n, p)$ может интерпретироваться как число появлений события $A$ в серии из $n$ независимых испытаний, в каждом из которых $A$ происходит с вероятностью $p = P(A)$ (схема Бернулли). Среднее биномиальной с.в.:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = pn \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = pn.$$

Случайная величина называется **пуассоновской** с параметром $a$ $(\xi \in \pi(a))$, если она дискретна и имеет ряд распределения следующего вида:

| $c_i$ | 0 | 1 | … | $k$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $e^{-a}$ | $ae^{-a}$ | … | $\frac{a^k}{k!} e^{-a}$ | … |

Пуассоновское распределение $\pi(a)$ можно рассматривать как предельное по отношению к биномиальному $Bi(n, p)$, когда $n \to \infty$, $np \to a$. Среднее пуассоновской с.в.:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} = a.$$

Случайная величина $\xi$ имеет **геометрическое** распределение с параметром $p(\xi \in G(p))$, если ее ряд имеет следующий вид:

| $c_i$ | 1 | 2 | 3 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p$ | $qp$ | $q^2 p$ | … | $q^{n-1} p$ | … |

Геометрическое распределение имеет с.в., представляющая число независимых испытаний $\xi$ до первого успеха, который происходит с вероятностью $p$ в каждом испытании. Среднее с.в. с геометрическим распределением:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dq}q^k = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right) = p\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

**Задача 3.** *Исследователь проводит эксперименты последовательно на двух независимых установках. Вероятности получения желаемого результата на этих установках равны соответственно $p_1$ и $p_2$. Работа заканчивается в момент получения первого желаемого результата на любой из установок. Построить ряды распределения чисел эксперимента, проведенных на обеих установках, и суммарного числа проведенных экспериментов. Найти средние значения этих случайных величин.*

**Решение.** Обозначим $R_{1k}$ и $R_{2k}$ события, означающие успех в $k$-м испытании на первой и второй установках соответственно. Пусть далее $\xi_1$, $\xi_2$ – числа проведенных опытов на каждой из установок. Тогда

$\{\xi_1 = k\} = \bar R_{11}\cdot\bar R_{22}\cdot\bar R_{12}\cdot\bar R_{22}\cdots\bar R_{1k-1}\cdot\bar R_{2k-1}\left(R_{1k}+\bar R_{1k}\cdot R_{2k}\right)$, $k = 1, 2, \dots$ ,

$\{\xi_2 = m\} = \bar R_{11}\cdot\bar R_{21}\cdot\bar R_{12}\cdot\bar R_{22}\cdots\bar R_{1m-1}\cdot\bar R_{2m-1}\cdot\bar R_{1m}\left(R_{2m}+\bar R_{2m}\cdot R_{1m+1}\right)$,

$m = 1, 2, \dots$ ,

$\{\xi_2 = 0\} = R_{11}$.

Поэтому $(q_1 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - p_2)$

$P\{\xi_1 = k\} = (q_1q_2)^{k-1}(p_1 + q_1p_2) = (q_1q_2)^{k-1}(1 - q_1q_2)$, $k = 1, 2, \dots$,

$P\{\xi_2 = m\} = (q_1q_2)^{m-1}q_1(p_2+q_2p_1) = (q_1q_2)^{m-1}q_1(1 - q_1q_2)$, $m = 1, 2, \dots$,

$P\{\xi_2 = 0\} = p_1$.

Найдем математические ожидания величин $\xi_1$ и $\xi_2$

$$M\xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{\xi_1 = k\} = (1 - q_1q_2)\sum_{k=1}^{\infty} k(q_1q_2)^{k-1} =$$

$$= (1 - q_1q_2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^k\Big|_{x=q_1q_2} = (1 - q_1q_2)\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=q_1q_2} = \frac{1}{1-q_1q_2},$$

$$M\xi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} mP\{\xi_2 = m\} = q_1(1 - q_1q_2)\sum_{m=1}^{\infty} m(q_1q_2)^{m-1} = \frac{q_1}{1-q_1q_2}.$$

Пусть $\eta$ – число испытаний, проведенных на обеих установках до первого успеха. Как легко видеть,

$$\{\eta = 2m - 1\} = \bar R_{11}\cdot\bar R_{21}\cdot\bar R_{12}\cdot\bar R_{22}\cdots\bar R_{1m-1}\cdot\bar R_{2m-1}\cdot R_{1m},$$

$$\{\eta = 2m\} = \bar R_{11}\cdot\bar R_{21}\cdot\bar R_{12}\cdot\bar R_{22}\cdots\bar R_{1m}\cdot R_{2m},\ m = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$P\{\eta = 2m - 1\} = (q_1q_2)^{m-1}p_1,$$

$$P\{\eta = 2m\} = (q_1q_2)^{m-1}q_1p_2, \qquad m = 1, 2, \dots$$

Найдем среднее значение $\eta$

$$M\eta = \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)\, P\{\eta = 2m-1\} + \sum_{m=1}^{\infty} 2m\, P\{\eta = 2m\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)\, p_1 (q_1q_2)^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} 2m\, q_1p_2(q_1q_2)^{m-1} =$$

$$= 2(1-q_1q_2) \sum_{m=1}^{\infty} m (q_1q_2)^{m-1} - p_1 \sum_{m=1}^{\infty} (q_1q_2)^{m-1} =$$

$$= 2(1-q_1q_2)\, \frac{d}{dx} \left. \frac{x}{(1-x)} \right|_{x=q_1q_2} - \frac{p_1}{1-q_1q_2} = \frac{1+q_1}{1-q_1q_2}.$$

Так как $\eta = \xi_1 + \xi_2$, то проще было бы найти это значение следующим образом:

$$M\eta = M\xi_1 + M\xi_2 = \frac{1}{1-q_1q_2} + \frac{q_1}{1-q_1q_2} = \frac{1+q_1}{1-q_1q_2}.$$

Отметим, что при $p_1 = p_2 = p$ имеем $M\eta = \dfrac{1}{p}$ – среднее число проведенных экспериментов обратно пропорционально вероятности получения результата в единичном эксперименте.

Задача 3 решена.

**Определение.** *Начальным моментом $k$-го порядка* с.в. $\xi$ называется число

$$m_k = M\xi^k = \sum_i c_i^k p_i .$$

В частности, первый момент $m_1 = M\xi$ есть математическое ожидание с.в. Для с.в. $\xi$ с конечным первым моментом введем центрированную с.в.

**Определение.** *Центрированной* с.в. называется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием, т.е. отклонение с.в. от ее математического ожидания:

$$\overset{\circ}{\xi} \equiv \xi - M\xi .$$

**Определение.** *Центральным моментом $k$-го порядка* с.в. $\xi$ называется число

$$\mu_k = M(\xi - m_1)^k = \sum_i \left(c_i - m_1\right)^k p_i .$$

Важнейшим из центральных моментов является второй, называемый *дисперсией*:

$$\mu_2 \equiv D\xi = M\overset{\circ}{\xi}{}^2 = \sum_{i\in I} (c_i - M\xi)^2 p_i .$$

*Средним квадратическим отклонением* или *стандартом* с.в. называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma\xi \equiv \sqrt{D\xi}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение служат характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Дисперсия обладает следующими свойствами.

**Свойство 1**. Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

**Свойство 2.** Дисперсия есть величина неотрицательная:

$$D\xi \geq 0.$$

**Свойство 3**. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(c) = 0.$$

**Свойство 4.**

$$D(c + \xi) = D\xi\,; \quad D(c\xi) = c^2 \cdot D\xi.$$

**Свойство 5.** Дисперсия суммы независимых с.в. равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n.$$

**Дисперсия биномиального распределения** $Bi(n, p)$ равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D\xi = npq.$$

**Дисперсия с.в., распределенной по закону Пуассона** $\pi(a)$, равна параметру $a$:

$$D\xi = a.$$

**Дисперсия с.в. с геометрическим распределением** равна частному от деления вероятности непоявления на квадрат вероятности появления события в одном испытании:

$$D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

**Задача 4**. *На одной из экспериментальных установок, описанных в задаче* 3, *проводится* $n$ *опытов. Найти распределение числа* $\xi$ *успешных опытов, среднее значение* $\xi$ *и дисперсию. Полученная об изучаемом явлении информация пропорциональна* $1 - e^{-x}$. *Какова средняя информация, полученная после серии экспериментов?*

**Решение.** Рассматриваемый эксперимент является примером последовательности независимых испытаний – схемы Бернулли. Поэтому число успехов $\xi$ имеет биномиальный закон распределения $Bi(n, p)$, где $p$ – вероятность успеха в каждом из опытов. Следовательно,

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad q = 1 - p.$$

Найдем $M\xi^m$. Имеем согласно (5)

$$M\xi^{m} = \sum_{k=0}^{n} k^{m} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^{m-1}\, p\frac{\partial}{\partial p}(p^k) C_n^k q^{n-k} =$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\left\{\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k}\right\} = p\frac{\partial}{\partial p}\left\{p\frac{\partial}{\partial p}\left\{\sum_{k=1}^{n} k^{m-2} C_n^k p^k q^{-k}\right\}\right\} =$$

$$= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\right\} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^{m}\left\{\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} - q^n\right\} =$$

$$= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^{m}\{(p+q)^n - q^n\} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^{m}\{(p+q)^n\}.$$

Прежде чем подставить $p + q = 1$ в эту формулу, следует, разумеется, взять соответствующие производные. В частности,

$$M\xi = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\{(p+q)^n\} = np(p+q)^{n-1}\,|_{p+q=1} = np,$$

$$M\xi^2 = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\{(p+q)^n\} = np(p+q)^{n-1} + n(n-1)\,p^2(p+q)^{n-2}\,|_{p+q=1} =$$

$$= np + (np)^2 - np^2 = (np)^2 + npq, \qquad D\xi = M\xi^2 - (M\xi^2) = npq.$$

Пусть количество извлекаемой информации $I = I_\infty(1 - e^{-\xi})$, где $I_\infty$ – нормировочная постоянная. Тогда согласно (5)

$$MI = \sum_{k=0}^{n} I_\infty\left(1 - e^{-k}\right) C_n^k p^k q^{n-k} = I_\infty \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} -$$

$$= I_\infty \sum_{k=0}^{n} C_n^k (p/e)^k q^{n-k} = I_\infty\{1 - (q + \frac{p}{e})^n\}.$$

Задача 4 решена.

**Задача 5.** *В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени* 10 *сек испускало в среднем* 5,02 $\alpha$*–частицы. Найти вероятность того, что за* 1 *сек это вещество испустит хотя бы одну* $\alpha$*–частицу.*

**Решение.** Для описания процесса радиоактивного распада вещества обычно привлекается пуассоновский закон распределения:

$$P\{\xi = m\} = \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\xi$ – количество испущенных в единицу времени 1 сек $\alpha$–частиц, $a = M\xi$ – среднее значение $\xi$. В условиях задачи $a$ = 5,02/10 = 0,502. Поэтому интересующая нас вероятность

$$P = P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - e^{-a} = 1 - e^{-0{,}502} \approx 0{,}395.$$

Задача 5 решена.

**Задача 6.** *Найти наиболее вероятное значение случайной величины* $\xi$, *если известно, что* $\xi \in Bi(n, p)$ *и* $M\xi = 1$, $D\xi = 0{,}75$.

**Решение.** По условию $M\xi = np = 1$, $D\xi = npq = 0{,}75$. Следовательно, $q = 0{,}75$; $p = 0{,}25$; $n = 4$. Таким образом, речь идет о распределении $Bi(n, p)$ при $n = 4$, $p = 0{,}25$. Принимая во внимание, что $np - q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ мы должны в качестве наиболее вероятного значения случайной величины $\xi$ указать значение $k = [np - q] + 1 = [0{,}25] + 1 = 0 + 1 = 1$.

Вероятность такого значения $p(\xi = 1) = C_4^1 \cdot (0{,}25) \cdot (0{,}75)^3 \approx 0{,}4219$.

**Задача 7.** *Автоматическая линия при нормальной настройке выпускает бракованное изделие с вероятностью* 0,001. *Переналадка линии проводится после выпуска каждого бракованного изделия.*

*1) Чему равно среднее число изделий, выпускаемых между двумя последовательными переналадками линии?*

*2) Какова вероятность того, что между соседними переналадками линии выпускается ровно* 1000 *изделий?*

**Решение.** Число $\xi$ изделий, выпускаемых между последовательными переналадками линии, представляет собой случайную величину, распределенную по закону $G(p)$ при $p = 0{,}001$. Поэтому

$$M\xi = \frac{1}{0{,}001} = 1000;$$

$$P(\xi = 1000) = 0{,}999^{999} \cdot 0{,}001 = 0{,}999^{1000} \cdot \frac{0{,}001}{0{,}999} = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{999} \approx$$

$$\approx e^{-1} \cdot \frac{1}{999} \approx \frac{1}{2{,}7 \cdot 999} \approx 0{,}0004.$$

**Задача 8.** *В системе, состоящей из шести равнонадежных занумерованных* (1, 2, 3, 4, 5, 6) *приборов, отказал (вышел из строя) один какой-то прибор. Для его обнаружения и устранения неисправности приборы проверяются один за другим в порядке их нумерации. Чему равно среднее число приборов, с которыми придется работать, чтобы:*

*а) устранить неисправность;*

*б) выявить, какой именно прибор отказал?*

**Решение.** Номер отказавшего прибора представляет собой случайную величину $\xi$ с равномерным распределением следующего вида:

| $c_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Таким образом,

$$M\xi = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Дробное значение $M\xi$ не должно смущать: ведь речь идет не о номере прибора, а *о среднем значении* случайного номера.

Вторая часть задачи связана с рассмотрением случайной величины $\eta$, равной числу подвергаемых проверке приборов для выявления отказавшего прибора. Эта величина отлична от $\xi$. Если, например, проверено пять приборов и все они оказались исправными, то отказавшим является прибор с номером 6: специально проверять его нет нужды (другое дело, когда нужно устранить неисправность). Очевидно, что случайная величина $\eta$ имеет следующее распределение вероятностей:

| $c_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 2/6 |

Отсюда

$$M\eta = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 2\cdot 5) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

### 2.4. Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1. Монету бросают $\xi$ раз – до тех пор пока хотя бы одна из ее сторон не выпадет дважды (не обязательно подряд). Составьте ряд распределения случайной величины $\xi$; постройте график функции распределения этой величины; вычислите $M\xi$ и $D\xi$.
2. Одним из этапов спортивного соревнования служит стрельба. При каждом выстреле, независимо от остальных выстрелов, спортсмен с вероятностью $p$ попадает и с вероятностью $q = 1 - p$ не попадает в цель. Выстрелы продолжаются до тех пор, пока не накопится либо двух попаданий (в этом случае спортсмен допускается к следующему этапу соревнования), либо двух промахов (тогда спортсмен снимается с соревнования). Пусть $\xi$ – число патронов, расходуемых спортсменом на данном этапе соревнования. Вычислите $M\xi$ и $D\xi$.
3. Случайная величина $\xi$ принимает три значения: –1, 0, 1. Составить ее ряд распределения, если $M\xi = 0$, $D\xi = 0{,}5$.
4. Выведите формулу для дисперсии равномерного распределения на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.
5. Рабочий обслуживает четыре автоматические линии, действующие независимо друг от друга. Вероятности того, что в течение смены эти линии потребуют вмешательства рабочего, равны соответственно 0,30; 0,35; 0,40; 0,45. Найти математическое ожидание и дисперсию числа линий, которые потребуют вмешательства рабочего в течение смены.

6. Трое студентов сдают экзамен по математике на отлично (независимо друг от друга) с вероятностями 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Пусть $\xi$ – общее число полученных ими отличных оценок. Вычислите $M\xi$ и $D\xi$.
7. Из урны, содержащей 10 белых и 15 черных шаров, пропали (высыпались) какие-то 8 шаров. Сколько в среднем черных шаров осталось в урне?
8. Может ли случайная величина $\xi$ иметь биномиальное распределение вероятностей, если: а) $M\xi = 6$, $D\xi = 3$; б) $M\xi = 7$, $D\xi = 4$?
9. Сколько в среднем шестерок выпадает при подбрасывании шести игральных костей?
10. В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Сколько из них в среднем выйдет на 10-м этаже?
11. Вероятность приема самолетом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Вычислите математическое ожидание и дисперсию числа сигналов, принятых при четырехкратной передаче. Каково наиболее вероятное значение числа принятых сигналов?
12. На стенде испытываются 10 приборов. Вероятность выдержать испытание для каждого такого прибора одна и та же – 0,82. Укажите: а) среднее число приборов, которые выдержат испытание; б) наиболее вероятное число приборов, которые не выдержат испытания.
13. Данным маршрутом автобуса пользуются 24 человека. Но каждый из них опаздывает на автобус с вероятностью 0,2. Определите: а) среднее число пассажиров в автобусе данного маршрута; б) наиболее вероятное число пассажиров в автобусе данного маршрута.
14. Из десяти ключей в связке только один подходит к данному замку. 1) Сколько в среднем придется перепробовать ключей, прежде чем замок будет открыт? 2) Какова вероятность того, что придется испытать ровно половину ключей из связки?
15. Пусть $\xi$ – число неудач, предшествующих первому успеху в испытаниях, проводимых по схеме Бернулли с вероятностью $p$ успеха в отдельном испытании. Вычислите $M\xi$.
16. На пути движения автомобиля – пять светофоров. Каждый из них, независимо от остальных светофоров, с вероятностью 0,5 запрещает движение. Пусть $\xi$ – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найдите закон распределения случайной величины $\xi$ и ее математическое ожидание.
17. Имеются три заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из одной заготовки равна 0,8. Заготовки используются до тех пор, пока не будет изготовлена годная деталь или не будут израсходованы все заготовки. Пусть $\eta$ – число заготовок,

оставшихся при этом неиспользованными. Найдите закон распределения случайной величины $\eta$ и ее математическое ожидание.

18. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины $X$ – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
19. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу четырех приборов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
20. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения и найти математическое ожидание и дисперсию числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.
21. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
22. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.
23. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
24. Дан ряд распределения случайной величины.

$X$:

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 |
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ |

Найти функцию распределения этой случайной величины, если ее математическое ожидание равно 3,4, а дисперсия равна 0,84.

25. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
26. Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы.

Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 2/3. Составить закон распределения числа заданных студенту вопросов.

27. Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
28. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо: а) составить закон распределения числа сделанных выстрелов; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов.
29. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятности попадания равны $P_1$ и $P_2$, числа попадания $X_1$ и $X_2$ соответственно. Обозначим $Z = X_1 - X_2$. Найти $M(Z)$, $D(Z)$.
30. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа очков, выпавших при бросании двух (трех) игральных костей?

Задание 2

1. Монету бросают три раза. Результат каждого бросания записывают знаком плюс (+) или знаком минус (–) в зависимости от того, что выпало: герб или решка (соответственно). Пусть $\xi$ – число выпавших гербов, $\eta$ – число выпавших решек, $\zeta$ – число перемен знака в образовавшейся последовательности плюсов и минусов. Для каждой из этих величин: а) составьте ряд распределения; б) постройте график функции распределения; в) вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.
2. В борьбу за первые три места в соревновании участвуют три спортклуба: первый представлен двумя спортсменами, второй – тремя спортсменами, третий – четырьмя спортсменами. В зачет каждому клубу идет лишь один результат – лучший у представителей этого спортклуба. Пусть $\xi$, $\eta$, $\zeta$ – места, которые займут первый, второй и третий спортклубы соответственно. Вычислите $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ в предположении, что все 9 участников соревнования имеют одинаковые индивидуальные шансы на успех.
3. На новогодней елке погасла гирлянда, состоящая из 15 лампочек. Для отыскания перегоревшей лампочки проверяются по очереди все лампочки гирлянды. 1) Сколько в среднем лампочек придется прове-

рить, чтобы обнаружить перегоревшую лампочку? 2) Какова вероятность того, что для обнаружения перегоревшей лампочки придется проверить не менее половины всех лампочек?

4. Из колоды карт (52 листа) наугад без возвращения достают по одной карте до тех пор, пока не попадется дама пик. 1) Сколько в среднем карт придется извлечь из колоды? 2) Какова вероятность того, что доставать потребуется не более половины всех карт?
5. Игральную кость подбрасывают шесть раз. Вычислите математическое ожидание числа различных выпавших цифр.
6. В лыжной гонке участвуют 43 одинаковых по силе спортсмена; из них 18 человек представляют спортклуб $A$, 10 человек – спортклуб $B$ и 15 человек – спортклуб $C$. Какое в среднем место займет: а) самый удачливый представитель спортклуба $B$; б) самый неудачливый представитель спортклуба $B$?
7. Пусть $\xi$ – число единиц, а $\eta$ – число шестерок, выпадающих при подбрасывании шести игральных костей. Вычислите математическое ожидание и дисперсию суммы $\xi + \eta$.
8. Каждая партия между двумя партнерами с вероятностью ½ заканчивается победой одного и с вероятностью ½ – победой другого. За победу присуждается одно очко. Вычислите математическое ожидание числа партий, сыгранных до того момента, когда кто-нибудь из участников турнира наберет три очка.
9. Вероятность обнаружения малоразмерного объекта в заданном районе в отдельном полете равна 1/3. 1) Сколько в среднем полетов придется совершить, прежде чем объект будет обнаружен? 2) Какова вероятность того, что для обнаружения объекта придется совершить не менее трех вылетов?
10. При одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Ему разрешается стрелять до трех промахов. 1) Найти среднее число израсходованных стрелком патронов. 2) Определить вероятность того, что стрелок израсходует ровно восемь патронов.
11. Из множества $\{1, 2, \dots , 100\}$ наугад одновременно выбирают 10 чисел. Вычислите математическое ожидание суммы выбранных чисел.
12. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Сколько в среднем единиц выпадет при этом?
13. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью $p$. Переналадка линии производится после первого же бракованного изделия. Найти среднее число всех изделий, изготовленных между двумя переналадками линии.
14. Доказать, что дисперсия числа появлений события при однократном производстве опыта не превосходит ¼.

15. Игра заключается в том, что монету бросают до появления герба. Если герб выпал при $k$-м бросании монеты, то игрок $A$ получает $k$ рублей от игрока $B$. Сколько рублей должен уплатить игрок $A$ игроку $B$ перед началом игры для того, чтобы математические ожидания проигрыша для каждого игрока равнялись нулю (чтобы игра была «безобидной»)?
16. Случайная величина $X$ может принимать целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Выбрать первый член и знаменатель прогрессии $q$ так, чтобы математическое ожидание величины $X$ было равно 10, и вычислить при этом условии вероятность $P(X \leq 10)$.
17. Из сосуда, содержащего $m$ белых и $n$ черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.
18. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составить закон распределения числа вызовов, если: а) число вызовов не более 5; б) число вызовов не ограничено. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
19. Бросают $n$ игральных костей. Найти математическое ожидание числа таких бросаний, в каждом из которых выпадет ровно $m$ шестерок, если общее число бросаний равно $N$.
20. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В каждой партии содержится пять изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины $X$ – числа партий, в каждой из которых окажется ровно четыре стандартных изделия, если проверке подлежит 50 партий.
21. В круге радиуса $R$ находится круг вдвое меньшего радиуса. В большой круг брошены три точки так, что попадание каждой в любое место большого круга равновозможны. Дискретная случайная величина – число точек, попавших в меньший круг. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить ее график.
22. В лифт пятиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Дискретная случайная величина – число пассажиров, вышедших на четвертом этаже. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить ее график.

23. Испытуемый прибор состоит из пяти элементов. Отказы элементов независимы, а вероятности их для элементов с номером $i$ равны $P_i =$ $= 0{,}2 + 0{,}1(i - 1)$. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа отказавших элементов.
24. Первый игрок бросает 3, а второй – 2 одинаковые монеты. Выигрывает и получает все 5 монет тот, у кого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра продолжается до получения определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?
25. Дискретная случайная величина $X$ задана рядом распределения

$X$:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

Найти условную вероятность события $X < 5$ при условии, что $X > 2$.
26. Случайные величины $X_1$, $X_2$ независимы и имеют одинаковое распределение:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | ¼ | ¼ | ¼ | ¼ |

а) Найти вероятность события $X_1 + X_2 > 2$.
б) Найти условную вероятность $P_{X_1=1} = [(X_1 + X_2) > 2]$.
27. Распределение дискретной случайной величины $X$ задано формулой $p(X = k) = Ck^2$, где $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Найти: а) константу $C$; б) вероятность события $|X - 2| \le 1$.

Задание 3
1. Написано $n$ писем и к ним подписано $n$ конвертов. Затем письма наугад вложены в конверты и отправлены по почте. Сколько в среднем писем попадет по назначению?
2. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Сколько в среднем остановок потребуется для их обслуживания? Указание. Пусть $\xi_k$ – случайная величина, равная 1 или 0 в зависимости от того, понадобится или не понадобится остановка на $k$-м этаже, $k = 2, 3, 4, \ldots, 9$, а $\xi$ – общее число остановок лифта по требованию данных пассажиров. Тогда $\xi = \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_9$.
3. Каждый из $n$ шаров, независимо от остальных шаров, опускают наугад в одну из $n$ урн. Пусть $\xi$ – число тех урн, которые при этом окажутся пустыми. Вычислите $M\xi$ и оцените, какую долю от общего числа $n$ урн составляют эти пустые урны.
4. При каком значении параметра $p$ случайная величина $\xi \sim Bi(n, p)$ имеет наибольшую дисперсию?

5. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 6 человек. Найдите математическое ожидание числа остановок лифта, на которых выходят: а) ровно по одному человеку; б) не менее чем по два человека.
6. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 6 человек. Известно, что первая остановка лифта состоялась на 5-м этаже. Сколько в среднем пассажиров вышло из лифта на этой остановке?
7. Сколько в среднем раз понадобится подбрасывать игральную кость, до тех пор пока хотя бы по одному разу не выпадет каждая из цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6?
8. Монету бросают до тех пор, пока не будет зафиксирована серия ГР (герб-решка). Сколько раз в среднем придется бросать монету?
9. В $n$ корзин бросают шары. Каждый из них, независимо от других шаров, с одинаковыми вероятностями попадает в одну из данных корзин. Шары бросают до тех пор, пока не останется ни одной пустой корзины. Сколько в среднем шаров при этом будет использовано? Оцените это число шаров для больших значений $n$.
10. В группе из десяти человек – 2 отличника, 3 хороших, 4 средних и 1 слабый студент. Неудовлетворительную оценку на экзамене независимо друг от друга получают: отличник – с вероятностью 0, хороший студент – с вероятностью 0,05, средний студент – с вероятностью 0,50, слабый студент – с вероятностью 0,90. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа неудовлетворительных оценок на экзамене в этой группе.
11. Вероятность наступления события $A$ в отдельном испытании равна 0,4. Пусть $\eta$ – разность между числом наступлений и числом не наступлений события $A$ в ста таких испытаниях. Укажите: а) среднее значение случайной величины $\eta$ и ее среднеквадратическое отклонение; б) наиболее вероятное значение $m_0$ случайной величины $\eta$.
12. Вероятность того, что случайная величина $\xi \sim Bi(n, p)$ принимает четное значение, равна
$$\frac{1}{2}[1 + (1 - 2p)^n].$$
Докажите это.
13. Случайная величина $\xi$ имеет геометрическое распределение вероятностей с параметром $p$. Чему равна вероятность того, что $\xi$ примет четное значение?
14. Случайная величина $\xi$ принимает значения 0, 1, 2, … с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Как связаны между собой $M\xi$ и $D\xi$.
15. Из урны, содержащей $m$ белых и $n$ черных шаров, наугад по схеме выбора без возвращения извлекают $k$ шаров, $1 \le k \le m + n$. Пусть $\xi$ –

число белых среди извлеченных шаров. Найдите распределение случайной величины $\xi$ (такое распределение называется *гипергеометрическим*) и $M\xi$. Рассмотрите случай, когда

$$m \to \infty, \quad n \to \infty, \quad \frac{m}{m+n} \to p > 0.$$

16. Известно, что $D\xi = 1$. Чему равна дисперсия $D(2^{\xi})$, если случайная величина $\xi$ имеет: а) биномиальное распределение со средним значением 2; б) пуассоновское распределение вероятностей?
17. Три игрока $A$, $B$, $C$ играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют $A$ с $B$. Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна ½. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза. При этом он получает $m$ рублей. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого игрока: а) после первой партии при условии, что $A$ ее выиграл; б) в начале игры?
18. Три игрока $A$, $B$, $C$ играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют $A$ с $B$. Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна ½. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза; при этом он получает сумму выигрыша, равную числу всех сыгранных партий. Каково математическое ожидание выигрыша для игроков $A$ и $C$ до начала игры?
19. Найти математическое ожидание и дисперсию числа изделий, изготовляемых на поточной линии при нормальной настройке за период между двумя переналадками, если при нормальной настройке вероятность изготовления бракованного изделия равна $p$, а переналадка производится после изготовления $k$-го бракованного изделия.
20. Прибор имеет элементы $A$, $B$ и $C$, уязвимые к космическому излучению и дающие отказ при попадании в них хотя бы одной частицы. Отказ прибора наступает в случае отказа элемента $A$ или совместного отказа элементов $B$ и $C$. Определить математическое ожидание числа частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если условные вероятности попадания в элементы $A$, $B$ и $C$ частицы, уже попавшей в прибор, соответственно равны 0,1; 0,2; 0,2.
21. Из урны, содержащей весьма большое число белых и черных шаров, смешанных в равной пропорции, вынимаются последовательно 10 шаров. Шары, вынутые до первого появления черного шара, возвращаются в урну; первый появившийся черный шар и все последующие перекладываются во вторую, первоначально пустую, урну. Определить математическое ожидание числа белых и черных шаров во второй урне. Решить ту же задачу в предположении, что

число $X$ вынутых шаров является случайным и подчиняется закону Пуассона с параметром $a$ = 10, т.е.

$$P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

22. Рабочий обслуживает $n$ однотипных станков, расположенных в ряд с равными промежутками $a$. Закончив обслуживание какого-либо станка, рабочий переходит к тому станку, который раньше других потребовал обслуживания. Предполагая, что неполадка в любом из $n$ станков равновероятна, вычислить среднее значение длины одного перехода рабочего.
23. Даны два ящика с белыми и черными шарами; в первом ящике при общем числе шаров $N$ находится $M$ белых шаров, а во втором ящике имеется $M_1$ белых шаров при общем числе $N_1$ шаров. Опыт состоит в том, что из каждого ящика вынимается один шар, который перекладывается в другой ящик, после чего шары перемешиваются. Определить математическое ожидание числа белых шаров в первом ящике по окончании указанных $k$ опытов. Рассмотреть случай $k \to \infty$.
24. В 1-й урне содержится 6 белых и 4 черных шара, а во 2-й – 3 белых и 7 черных шаров. Из 1-й урны берут наудачу два шара и перекладывают во 2-ю урну, а затем из 2-й урны берут наудачу один шар и перекладывают в 1-ю урну. Составить законы распределения числа белых шаров в 1-й и 2-й урнах.
25. Один раз брошены три одинаковые игральные кости. Случайная величина $X$ принимает значение 1, если хотя бы на одной игральной кости выпадет цифра шесть; принимает значение 0, если шестерка не выпала ни на одной грани, но хотя бы на одной из граней появилась цифра 5, и принимает значение 1 в остальных случаях. Описать закон распределения случайной величины $X$, вычислить функцию распределения и найти математическое ожидание.
26. Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может оказаться равным любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов: а) 1, 2, 2, 5, 10; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 1, 2, 5, 10 – среднее число потребных для взвешивания гирь будет наименьшим (при взвешивании разрешается гири ставить только на одну чашку).
27. Кровь $K$ человек смешивается, и полученная смесь анализируется. Если результат анализа отрицателен, то этого одного анализа достаточно, если же он положителен, то кровь каждого приходится исследовать отдельно и всего получится $K$+1 анализов. Предполагая, что вероятность положительного результата одинакова для всех и равна

$P$, а результаты анализов независимы, найти математическое ожидание числа анализов, определить, при каком соотношении между $K$ и $P$ оно меньше $K$.

### 2.5. Определение непрерывной случайной величины. Плотность вероятности и ее свойства

**Определение**. Случайная величина (с.в.) называется непрерывной, если ее функция распределения абсолютно непрерывна, то есть существует интегрируемая функция $f_\xi(x)$ такая, что при всех $-\infty < x < \infty$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt.$$

Функция $f_\xi(x)$ называется плотностью вероятности с.в. $\xi$ (дифференциальной функцией распределения). График плотности вероятности называется кривой распределения. Отметим основные ее свойства.

1. Достаточным условием существования плотности $f_\xi(x)$ является кусочно-непрерывная дифференцируемость функции распределения $F_\xi(x)$. При этом

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x)$$

там, где производная существует, и $f_\xi(x)$ произвольно доопределена в тех точках, где производная $dF_\xi(x)/dx$ не существует.

2. Вследствие монотонности функции распределения $f_\xi(x) \geq 0$.

3. $P\{\xi\in B\} = \int_B f_\xi(t)\,dt$. В частности,

$$P\{\xi\in a\} = \int_a^a f_\xi(x)\,dx = 0,$$

т.е. вероятность любого отдельного значения непрерывной с.в. равна нулю;

$$P\{-\infty < \xi < +\infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$$

(последнее равенство называется «условием нормировки»).

4. Если пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_\xi(x)$ существуют, то они равны нулю.

Укажем некоторые важные примеры непрерывных с.в.

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$($\xi\in R(a, b)$):

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \; x \in [a,b] \\ 0, \quad x \notin [a,b] \end{cases}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \; x \le a, \\ (x-a)/(b-a), \; a < x \le b, \\ 1, \; x > b. \end{cases}$$

2. Показательное распределение с параметром λ, λ > 0[1] ($\xi \in E(\lambda)$):

$$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1(x), \quad F_\xi(x) = (1 - e^{-\lambda x}) 1(x).$$

3. Гауссово (нормальное) распределение с параметрами ($a$, $\sigma^2$)($\xi \in N(a, \sigma^2)$):

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ – функция Лапласа, для которой составлены таблицы значений.

4. Распределение Коши с параметрами ($a$, $b$), $b > 0$:

$$f_\xi(x) = \frac{b}{\pi(1 + b^2(x-a)^2)}, \quad F_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(b(x-a)) + \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Гамма-распределение с параметрами (α, λ), λ > 0, α > 0:

$$f_\xi(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} 1(x),$$

здесь $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция (табулированная функция).

## 2.6. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Моменты (в частности, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсия $D\xi$) с.в. ξ с плотностью вероятности $f_\xi(x)$ находятся аналогично тому, как это делалось для дискретных с.в., но, естественно, муссы заменяются интегралами, а вероятности – плотностью вероятности. Так,

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\, dx = m_1,$$

$$D\xi = M[(\xi - M\xi)^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2\, f_\xi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_\xi(x)\, dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi\, dx\right)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Средним квадратическим отклонением, или стандартом с.в., называется

---

[1]Здесь и далее $1(x) = 1$ при $x > 0$ и $1(x) = 0$ при $x \le 0$.

квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi}.$$

Основные свойства дискретных с.в. ($Mc = c$, $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$, $M(\lambda\xi) = \lambda M\xi$, $D\xi \geq 0$, $DC = 0$, $D(\xi + c) = D\xi$, $D(\lambda\xi) = \lambda^2 D\xi$, $D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$ для независимых с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$) носят общий характер и относятся не только к дискретным, но и к любым другим с.в. Начальные и центральные моменты определяются как

$$m_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\, f_\xi(x)\,dx,$$

$$M_k = M(\xi - m_1)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k\, f_\xi(x)\,dx.$$

Математическое ожидание произвольной неслучайной функции от непрерывной с.в. $\xi$ находится по формуле

$$M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_\xi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Плотности вероятности $f_\xi(x)$ и $f_{a\xi+b}(x)$ с.в. $\xi$ и $a\xi + b$ при $a \neq 0$ связаны соотношением $f_{a\xi+b}(x) = \dfrac{1}{|a|} f_\xi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

Предполагается, что все приведенные здесь интегралы являются абсолютно сходящимися. Если какой-нибудь из них расходится или сходится, но не абсолютно, то говорят, что соответствующего математического ожидания не существует.

Для некоторых видов ранее указанных непрерывных с.в.имеем:

1. $\xi \in R(a, b)$

$$M\xi = \frac{a+b}{2};\quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

***Задача 1***. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $\xi$ – времени ожидания поезда.

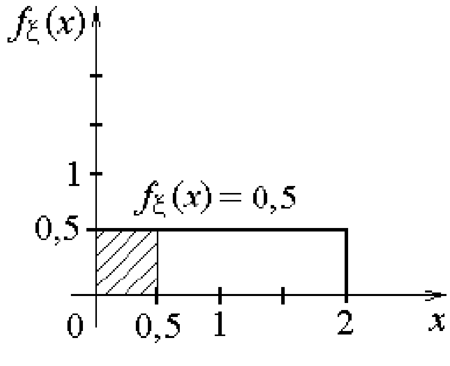



**Рис.1**

***Решение***. Случайная величина $\xi$ – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0; 2] имеет равномерный закон распределения $f_\xi(x) = \dfrac{1}{2}$.

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты, равна ¼ от равной единице площади прямоугольника (рис.1), т.е.

$$P(\xi \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\,\Big|_0^{0{,}5} = \frac{1}{4}.$$

$$M\xi = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ мин.,} \quad D\xi = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \text{ мин.}$$

2. $\xi \in E(\lambda)$

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}; \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2},$$

т.е. математическое ожидание с.в., распределенной по показательному закону, равно среднему квадратическому отклонению, т.е.

$$M\xi = \sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda}.$$

***Задача 2***. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина $\xi$, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины $\xi$.

***Решение***. По условию математическое ожидание $M\xi = \dfrac{1}{\lambda} = 15$, откуда параметр $\lambda$ = 1/15. Плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f_\xi(x) = \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}; \quad F_\xi(x) = 1 - e^{-\frac{1}{15}x} \ (x \ge 0).$$

Искомую вероятность $P(\xi \ge 20)$ можно найти, интегрируя плотность вероятности, т.е.

$$P(\xi \ge 20) = P(20 \le \xi < +\infty) = \int_{20}^{+\infty} \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx,$$

но проще это сделать, используя функцию распределения:

$$P(\xi \ge 20) = P(\xi < 20) = 1 - F(20) = 1 - (1 - e^{-\frac{-20}{15}}) = e^{-\frac{-20}{15}} = 0{,}264.$$

Осталось найти среднее квадратическое отклонение $\sigma\xi = M\xi$ = 15 дней.

3. $\xi \in N(a, \sigma^2)$

$$M\xi = a; \quad D\xi = \sigma^2.$$

Вероятность попадания с.в. $\xi$ в интеграл $[x_1, x_2]$ равна

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где $t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}$; $t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$.

Вероятность того, что отклонение с.в. $\xi$ от математического ожидания $a$ не превысит величину $\Delta$ (по абсолютной величине), равна

$$P(|\xi - a| \le \Delta) = 2\Phi(t),$$

где $t = \Delta/\sigma$.

Вычислим это по формуле вероятности $P(|\xi - a| \le \Delta)$ при различных значениях $\Delta$. Получим

при $\Delta = \sigma$, $P(|\xi - a| \le \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}9545$;

$\Delta = 2\sigma$, $P(|\xi - a| \le 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9545$;

$\Delta = 3\sigma$, $P(|\xi - a| \le 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Отсюда вытекает «правило трех сигм»: если с.в. $\xi$ имеет нормальный закон распределения с параметрами $a$ и $\sigma^2$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Нарушение «правила трех сигм», т.е. отклонение с.в. $\xi$ больше чем на $3\sigma$ (по абсолютной величине), является событием практически невозможным, так как его вероятность очень мала:

$$P(|\xi - a| > 3\sigma) = 1 - P(|\xi - a| \le 3\sigma) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027.$$

***Задача 3***. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина $\xi$ с параметрами $a = 173$ и $\sigma^2 = 36$, найти:

1). выражение плотности вероятности и функции распределения случайной величины $\xi$; доли костюмов 4-го роста (176-182 см) и 3-го роста (170-176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы;

2). сформулировать «правило трех сигм» для случайной величины $\xi$.

***Решение***. 1. Из условия $\xi \in N(a, \sigma^2)$ имеем

$$f_\xi(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}};$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}} dx = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-173}{6}\right).$$

Доля костюмов 4-го роста (176-182 см) в общем объеме производства определится как вероятность того, что $\xi \in [176; 182]$:

$$P(176 \le \xi \le 182) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi(1{,}50) - \Phi(0{,}50) =$$
$$= 0{,}4332 - 0{,}1914 = 0{,}2418,$$

$$t_1 = \frac{176-173}{6} = 0{,}50, \quad t_2 = \frac{182-173}{6} = 1{,}50.$$

Доля костюмов 3-го роста (170-176 см) можно определить аналогично, но проще это сделать, если учесть, что данный интервал симметричен относительно математического ожидания $a = M(\xi) = 173$, т.е. неравенство $170 \le \xi \le 176$ равносильно неравенству $|\xi - 173| \le 3$:

$$P(170 \le \xi \le 176) = P(|\xi - 173| \le 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{6}\right) = 2\Phi(0{,}50) = 0{,}3829.$$

2. Практически достоверно, что рост мужчин данной возрастной группы заключен в границах от $a - 3\sigma = 173 - 3 \cdot 6 = 155$ до $a + 3\sigma = 173 + 3 \cdot 6 = 191$ (см), т.е. $155 \le \xi \le 191$ (см).

***Задача 4***. Функция распределения случайной величины $\xi$ имеет вид $F_\xi(x) = A + B \operatorname{arctg}(Cx)$. Определить: а) постоянные A, B, C; б) плотность $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания $\xi$ в интервал $(-1, 1)$.

***Решение***. Так как функция $f_\xi(x)$ непрерывно дифференцируема на всей прямой, то $\xi$ – непрерывная с.в. и

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x) = \frac{BC}{(Cx)^2 + 1}.$$

Отсюда, учитывая свойства плотности вероятности, получаем

$$\int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)\,dx = B \operatorname{arctg}(Cx) \Big|_{-\infty}^{\infty} = B\,\pi\, sgn(C) = 1.$$

Следовательно, $C \ne 0$, $B = 1/\pi\, sgn(C)$,

$$f_\xi(x) = \frac{C}{\pi(1 + (Cx)^2)}.$$

Постоянную $A$ находим из условия

$$0 = \lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = A - B\, sgn(C)\, \frac{\pi}{2} = A - \frac{1}{2}.$$

В итоге получаем

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg}(Cx)}{\pi \operatorname{sgn}(C)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(|C|\, x).$$

Наконец,

$$P\{\xi \in (-1, 1)\} = \int_{-1}^{1} f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(|C|\, x) \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}|C|.$$

Задача 4 решена.

***Задача 5***. Скорость молекул газа $\upsilon$ распределена по закону Максвелла

$$f_\upsilon(x) = \mathrm{A}\, x^{2e^{-h^2 x^2}}\, 1(x).$$

Найти среднее значение и дисперсию скорости, а также величину $A$ как функцию $h$.

***Решение***. Из условия нормировки определим $A$:

$$1 = A\int\limits_0^{\infty} x^2\, e^{-h^2x^2}\,dx = (t = h^2x^2) = A\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{2h^3}e^{-t}\,dt = A\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2h^3} = A\frac{\sqrt{\pi}}{4h^3}.$$

Отсюда $A = 4h^3/\sqrt{\pi}$.

Далее

$$M_\upsilon = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_\upsilon(x)\,dx = A\int\limits_0^{\infty} x^3\, e^{-h^2x^2}\,dx = (t = h^2x^2) = A\int\limits_0^{\infty}\frac{t}{2h^4}e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}h}\Gamma(2) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}h},$$

$$M_{\upsilon^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_\upsilon(x)\,dx = A\int\limits_0^{\infty} x^4\, e^{-h^2x^2}\,dx = (t = h^2x^2) = A\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{3/2}}{2h^5}e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}h^2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2h^2},$$

$$D_\upsilon = M_{\upsilon^2} - (M_\upsilon)^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)\frac{1}{h^2}.$$

***Задача 6***. Свободный член $c$ квадратного уравнения $x^2 + 2x + c = 0$ является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[-1, 1]$.Найти средние значения и дисперсии корней этого уравнения.

***Решение***. Корни уравнения есть

$$x_1 = -1 + \sqrt{1-c},$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{1-c}.$$

Учитывая, что $f_c(x) = \frac{1}{2}$ при $x\in[-1, 1]$ и $f_c(x) = 0$ при $|x| > 1$, получаем по формуле (1)

$$M\sqrt{1-c} = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x}\,\frac{dx}{2} = -\frac{(1-x)^{3/2}}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Поэтому

$$Mx_1 = -1 + M\sqrt{1-c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 \approx -0{,}057,$$

$$Mx_1^2 = M(\sqrt{1-c} - 1)^2 = M(2 - c - 2\sqrt{1-c}) = 2\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$Dx_1 = Mx_1^2 - (Mx_1)^2 = 2\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Аналогично находим

$$Mx_2 = -1 - M\sqrt{1-c} = -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx -1{,}94,$$

$$M x_2^2 = M(-1 - \sqrt{1-c}\,)^2 = M(2 - c + 2\sqrt{1-c}\,) = 2\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$Dx_2 = M x_2^2 - (Mx_2)^2 = 2\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(-1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = Dx_1.$$

***Задача 7***. Высотометр имеет случайные и систематические ошибки измерения высоты. Систематическая ошибка равна + 10м. Случайные ошибки имеют нормальный закон распределения с параметрами (0м, $(20\text{м})^2$). Какова вероятность того, что отклонение измеренной высоты от истинной будет в пределах 5м?

***Решение***. Полная ошибка измерения $\xi$ – разность показания высотометра и истинного значения высоты – равна алгебраической сумме систематической и случайной ошибок. Следовательно, $\xi$ будет иметь нормальный закон распределения с параметрами (10м, $(20\text{м})^2$). Интересующая нас вероятность

$$P\{|\xi| \le s) = \int_{-s}^{s} f_{\xi}(x)\,dx = \int_{-s}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{2\cdot 20}}\,dx = \left(t = \frac{x-10}{20}\right) = \int_{-0,75}^{-0,25} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \int_{0,25}^{0,75} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(0,75) - \Phi(0,25) = 0,2734 - 0,0987 = 0,1747,$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ = функция Лапласа.

***Задача 8***. В круге радиуса $r$ с центром в точке $O$ наугад выбирается точка $M$. Найти функцию распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi$, равной расстоянию между точками $M$ и $O$.

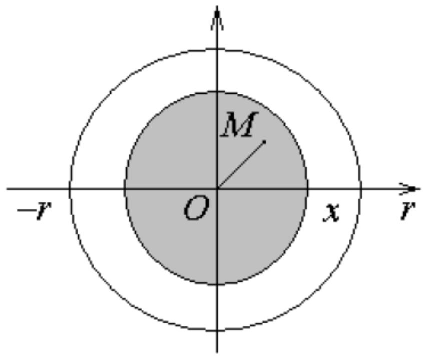


**Рис. 2**

***Решение***. При $0 < x < r$ вероятность $P\{\xi < x) = P(|OM| < x)$ (см. рис. 2) равна отношению площади круга $x$ к площади круга радиуса $r$:

$$P(|OM| < x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{x^2}{r^2}.$$

Это приводит к следующей функции распределения рассматриваемой случайной величины $\xi$:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{r^2}, & \text{если} \quad 0 < x \le r, \\ 1, & \text{если} \quad x > r. \end{cases}$$

График этой функции распределения представлен на рис. 3. Соответствующая плотность вероятности $f_\xi(x)$ получается в результате дифференцирования функции распределения $F_\xi(x)$ во всех точках, кроме точки $x = r$, в которой $F_\xi(x)$ не дифференцируема, хотя и непрерывна. В подобных случаях значение $f_\xi(r)$ не существенно. Итак, считая, что

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{r^2} & \text{при} \quad 0 < x < r, \\ 0, & \text{при} \quad x \le 0 \text{ и при } x > r \end{cases}$$

(рис. 3, *б*), мы можем доопределить эту функцию в точке $x = r$ произвольно, например, так: $f_\xi(r) = 0$, $f_\xi(r) = \frac{2}{r}$, $f_\xi(r) = \frac{100}{r}$ и т.п.

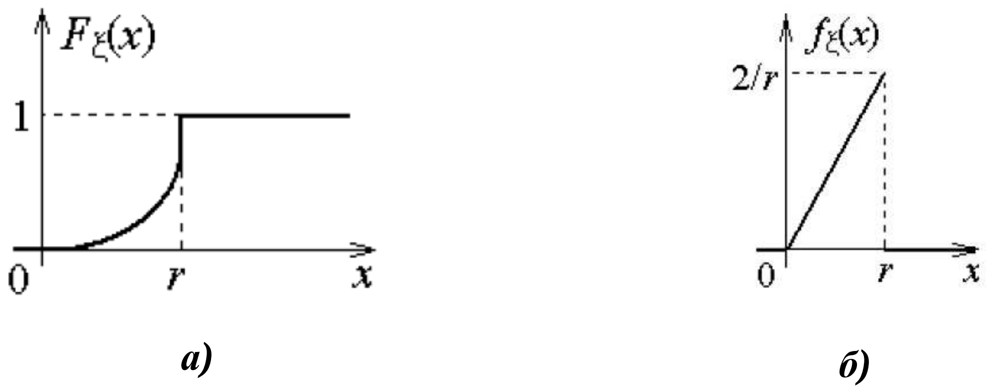



**Рис. 3**

Дальнейшее решение задачи носит чисто технический характер. Имеем:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)\, dx = \int_0^r x \frac{2x}{r^2}\, dx = \frac{2}{3} r;$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_\xi(x)\, dx = \int_0^r x^2 \frac{2x}{r^2}\, dx = \frac{1}{2} r^2;$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2} r^2 - \frac{4}{9} r^2 = \frac{1}{18} r^2.$$

Задача 9. Случайная величина $\xi$ распределена равномерно в некотором интервале, причем

$$P(\xi < 1) = \frac{1}{2}, \quad P(\xi < 2) = \frac{2}{3}.$$

Найти функцию распределения $F_\xi(x)$ и плотность вероятности $f_\xi(x)$ величины $\xi$; построить их графики. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$.

***Решение***. Если $\xi \in R(a, b)$, то числа $a$ и $b$ могут быть получены как абсциссы точек пересечения прямой, проходящей через точки (1, ½) и (2, 2/3), с прямыми $y = 0$ и $y = 1$ соответственно (рис. 4). «Наклонная» часть графика функции $F_\xi(x)$ лежит на прямой

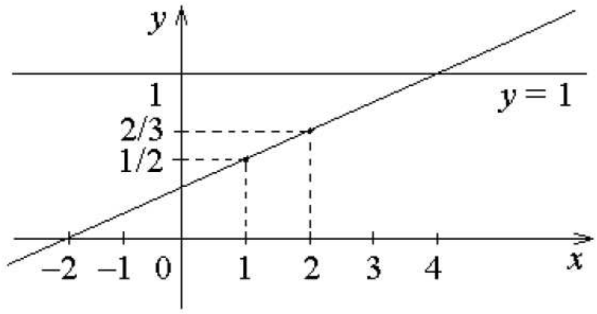



**Рис. 4**

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}},$$

или

$$x = 6y - 2.$$

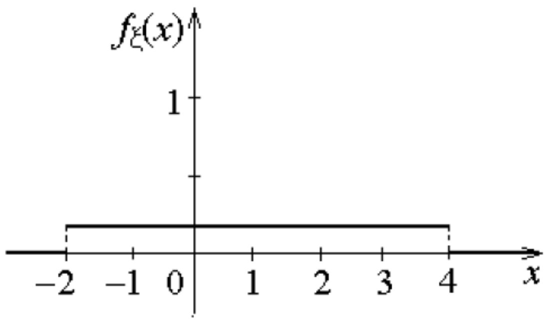
Полагая в этом уравнении $y = 0$, находим $a = –2$; аналогично, при $y = 1$ получаем $b = 4$.

Итак, $\xi \in R(–2, 4)$. Следовательно, $M\xi = \frac{-2+4}{2} = 1$ (это, заметим, можно было бы заключить сразу же из условия $P(\xi < 1) = ½$), $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = 3$. Графики функций

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \text{ при } & -2 < x < 4, \\ 0, \text{ при } & x < -2 \text{ и при } x > 4; \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2, \\ \frac{x+2}{6} & \text{при } -2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

представлены на рис. 5,



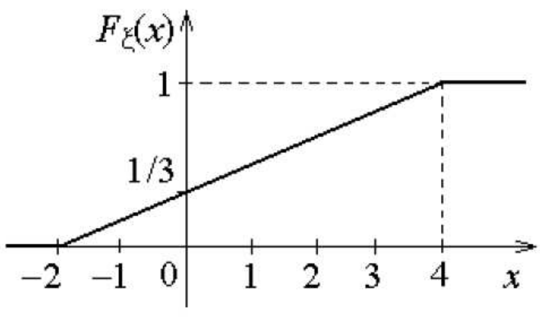
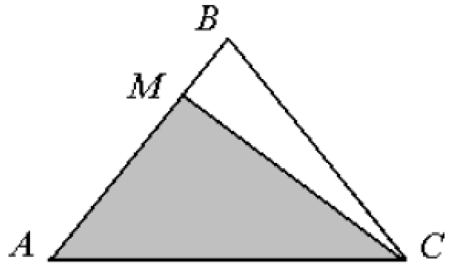




**Рис. 5**

***Задача 10***. На стороне $AB = 1$ равностороннего треугольника $ABC$ наугад выбирается точка $M$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади треугольника $AMC$ (рис. 6).




***Решение***. В треугольнике $AMC$ длину отрезка $AM$ можно рассматривать как случайную величину $\xi \in R(0,\ 1)$ (еще одно истолкование выражения «точка $M$ выбирается наугад на отрезке длины 1»). Учитывая, что

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}\,|AM| \cdot |AC| \cdot \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}\xi,$$

получаем:

$$M(S_{\Delta AMC}) = M\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\xi\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}M\xi = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$D(S_{\Delta AMC}) = D\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\xi\right) = \frac{3}{16}D\xi = \frac{1}{64}.$$

***Задача 11***. Для случайной величины $\xi \in R(-1,\ 5)$ вычислить

$$M((\xi - 1)\ (3 - \xi)).$$

***Решение***. В условии равномерного распределения вероятностей случайной величины $\xi$ подобные задачи проще всего решать по формуле (1). В данном случае имеем (проверьте):

$$M((\xi - 1)\ (3 - \xi)) = \int_{-1}^{5}(x-1)(3-x)\frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^{5}(-x^2+4x-3)\,dx = -2.$$

***Задача 12***. Для случайной величины $\xi \in N(1,\ 5)$ среди всех интервалов $(a,\ b)$, удовлетворяющих условию

$$P(a < \xi < b) = 0{,}95,$$

найти интервал наименьшей длины.

***Решение***. Геометрически вполне очевидно, что искомым интервалом служит интервал вида $(1 - a,\ 1 + a)$, симметричный относительно точки $M\xi = 1$. Для такого интервала

$$P(1 - a < \xi < 1 + b) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1+a-1}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{1-a-1}{\sqrt{5}}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}95;$$

$$\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}475; \quad \frac{a}{\sqrt{5}} \approx 1{,}96; \quad a \approx 4{,}38.$$

Итак, искомым интервалом (приближенно) является интервал (–3, 38, 5, 38).

***Задача 13***. Для случайной величины $\xi \in N(-2,\ 9)$ вычислить

$$M((3 - \xi)(\xi + 5)).$$

Решение. Поскольку $M\xi = -2$, $M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = 9 + 4 = 13$,

$$M((3 - \xi)(\xi + 5)) = M(\xi^2 - 2\xi + 15) =$$
$$= -M\xi^2 - 2M\xi + 15 = -13 + 4 + 15 = 6.$$

## 2.7. Задания для самостоятельной работы

### Задание 1

1. Для случайной величины $\xi \in R(0, 4)$ вычислить:

   1) $P(\xi < M\xi)$; 2) $P(\xi > \sqrt{D\xi})$; 3) $P(-5 \le \xi \le 5)$.

2. Известно, что случайная величина $\xi$ имеет равномерное распределение в интервале $(a, b)$, причем $M\xi = D\xi = 3$. Найдите числа $a$ и $b$.

3. Случайная величина $\xi$ распределена равномерно в некотором интервале. Постройте графики ее функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$, если $M\xi = 2$, $D\xi = 0{,}75$.

4. Зная о величине $\xi$ лишь то, что $M\xi = 2$, $D\xi = 4/3$, студент высказал гипотезу: $\xi$ имеет равномерное распределение вероятностей. Наблюдения над этой случайной величиной дали следующий результат:

   0,9; 3,5; 4,4; 2,6; 1,3.

   Согласуется ли высказанная гипотеза с этими наблюдениями?

5. Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина $\xi$, распределенная равномерно в некотором интервале, если ее функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию $F(1) = \frac{1}{3}$, $F(4) = 1$?

6. Случайная величина $\xi$ распределена равномерно в некотором интервале, причем $P(\xi < 1) = \alpha$, $P(\xi < 2) = \beta$. Вычислите вероятность $P(\xi < 3)$, если:

   1) $\alpha = 1/4$, $\beta = 3/8$;

   2) $\alpha = 1/5$, $\beta = 7/10$.

7. Случайная величина $\xi$ распределена равномерно в некотором интервале, причем $P(0 < \xi < 1) = \frac{2}{3}$, $P(1 < \xi < 2) = \frac{1}{3}$.

   1) Какое наименьшее значение может иметь $M\xi$?

   2) Какое наибольшее значение может иметь $D\xi$?

8. Какую наименьшую и какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина $\xi$, распределенная равномерно в некотором интервале, если $P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{3}$, $P(2 < \xi < 3) = \frac{1}{4}$?

9. Какой наименьшей и какой наибольшей может быть вероятность

$P(1 < \xi < 2)$, если случайная величина $\xi$ распределена равномерно в некотором интервале и $P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{4}$, $P(2 < \xi < 3) = \frac{1}{5}$?

10. Докажите, что если случайная величина $\xi$ распределена равномерно в интервале $(a, b)$, то соответствующая нормированная случайная величина $\overline{\xi} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ распределена равномерно в интервале $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

11. Докажите, что если $\xi \in R(0, 1)$, то и $\eta = 1 - \xi \in R(0, 1)$. Верно ли обратное утверждение?

12. Доказать, что если $\xi \in R(-a, a)$, то $\eta = |\xi| \in R(0, a)$.

13. Известно, что $\xi \in R(a, b)$. При каком наименьшем значении $\lambda$

$$P(|\xi - M\xi| < \lambda\sqrt{D\xi}) = 1?$$

14. Пусть $\xi \in R(-2, 4)$ и $\eta = |\xi|$. Сопоставьте графики плотностей вероятности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$, а также графики функций распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ случайных величин $\xi$ и $\eta$.

15. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади круга со случайным радиусом $\rho \in R(3, 9)$.

16. Вычислите математическое ожидание и дисперсию объема шара со случайным радиусом $\rho \in R(2, 3)$.

17. Известно, что случайная величина $\xi$ распределена равномерно в некотором интервале, $M\xi = 5$, $D\xi > 12$ и $P(|\xi - 10| \geq 2) = 3P(|\xi - 10| \geq 2)$. Постройте график функции распределения величины $\xi$.

18. Какую наименьшую дисперсию может иметь случайная величина $\xi$, распределенная равномерно в некотором интервале, если

$$M\xi \geq 4, \quad P(\xi > 1) = \frac{5}{7}?$$

19. Случайная точка $M$ распределена равномерно на окружности $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ с центром в точке $N$. Как распределена абсцисса точки $P$, в которой прямая $MN$ пересекает ось $Ox$?

20. Имеется случайная величина $X$, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a$ и дисперсией $\sigma^2$. Требуется приближенно заменить нормальный закон распределения равномерным законом в интервале $(\alpha, \beta)$; границы $\alpha$, $\beta$ подобрать так, чтобы сохранить неизменными математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

21. Диаметр круга $x$ измерен приближенно, причем $a \leq x \leq b$. Рассматривая диаметр как случайную величину $X$, распределенную равномерно в интервале $(a, b)$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

22. Ребро куба $x$ измерено приближенно, причем $a \leq x \leq b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину $X$, распределенную равномерно в

интервале $(a, b)$, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

**Задание 2**

1. Докажите, что если $\xi_1$ и $\xi_2$ – экспоненциально распределенные случайные величины и $M\xi_1$ # $M\xi_2$, то графики их плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точке, абсцисса которой заключена между $M\xi_1$ и $M\xi_2$.
2. Докажите, что вероятности попадания случайной величины $\xi \in E(\lambda)$ в интервалы $(0, 1), (1, 2), \ldots, (n-1, n), \ldots$ образуют геометрическую прогрессию.
3. Докажите, что если $\xi \in E(\lambda)$, то $P(1 < \xi < 2) \le \frac{1}{4}$.
4. Может ли экспоненциально распределенная случайная величина $\xi$ удовлетворять условию $P(2 < \xi < 3) = \frac{4}{27}$? Если может, то чему тогда равно $M\xi$?
5. Какое событие для величины $\xi \in E(\lambda)$ более вероятно: $\{\xi < M\xi\}$ или $\{\xi > M\xi\}$?
6. Для случайной величины $\xi \in E(\lambda)$ вычислить $P(|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi})$.
7. Найдите математическое ожидание $M\xi$ экспоненциально распределенной случайной величины $\xi$, если:
   1) $P(|\xi - M\xi| < 1) = 6/7$;
   2) $P(|\xi - M\xi| > 1) = 1/8$.
8. Полагая, что $\xi \in E(\lambda)$ и $\eta = e^{\xi}$, найдите $M_\eta$ и $D_\eta$.
9. Покажите, что если $\xi \in E(\lambda)$, то $M\xi^\eta = \frac{n!}{\lambda^n}$ для всякого натурального $n$.
10. Известно, что $\xi \in E(\lambda)$. При каком $C$ величина $M|\xi - C|$ принимает наименьшее значение?
11. Доказать, что для случайной величины $\xi$, распределенной по экспоненциальному закону, и любых $t > 0$, $\tau > 0$ $P(\xi > t + \tau | \xi > t) = P(\xi > \tau)$. Как можно интерпретировать это результат, полагая, например, что $\xi$ – время безотказной работы электрической лампочки?
12. Вычислите математическое ожидание и дисперсию объема правильного тетраэдра, сторона которого рассматривается как случайная величина, имеющая: а) распределение $E(1)$; б) распределение $R(0, 2)$.
13. Вычислите $P(\xi > 2)$, если $\xi \in E(\lambda)$ и $P(\xi > 1) = a$.
14. Вычислите $M\sqrt{\xi}$, если $\xi \in E(\lambda)$.
15. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон

распределения, найти: а) выражение его плотности вероятности и функции распределения; б) вероятность того, что в течение 100 ч. прибор не выйдет из строя.

16. Время ремонта телевизора распределено по показательному закону с математическим ожиданием, равным 0,5 ч. Некто сдает в ремонт два телевизора, которые одновременно начинают ремонтировать, и ждет, когда будет отремонтирован один из них. После этого с готовым телевизором он уходит. Найти закон распределения времени: а) потраченного клиентом; б) которое должен потратить клиент, если он хочет забрать сразу два телевизора.

17. Доказать, что если непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, то вероятность того, что $X$ примет значение, меньшее математического ожидания $M(X)$, не зависит от величины параметра $\lambda$. Найти вероятность того, что $X > M(X)$.

18. Задана интенсивность простейшего потока $\lambda = 5$. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины $T$ – времени между появлениями двух последовательных событий потока.

19. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска $t$ задается формулой $\rho(t) = 1 - e^{\gamma t}(\gamma > 0)$. Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

20. Определить математическое ожидание $m(t)$ массы радиоактивного вещества спустя время $t$, если в начальный момент масса вещества была $m_0$, а вероятность распада ядра любого атома в единицу времени постоянная и равна $p$.

21. Случайная величина $\xi$ имеет показательное распределение с плотностью вероятности $f_\xi(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = e^{-\xi}$.

22. Случайная величина $\xi$ имеет плотность вероятности (показательное распределение)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t \geq 0, \lambda > 0. \end{cases}$$

Требуется: а) построить функцию распределения $F(t)$ и начертить ее график; б) найти $M\xi$ и $D\xi$; в) найти вероятность того, что случайная величина $\xi$ примет значение, меньшее, чем ее м.о.; г) найти $P\{|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}\}$.

## Задание 3

1. Вычислить вероятности попадания случайной величины $\xi \in N(1,\ 4)$ в промежутки: $(-3, 1)$; $(-\infty, -2)$; $(3, \infty)$.

2. Для случайной величины $\xi \in N(2, 5)$, используя таблицу значений функции Лапласа, вычислите:

   а) $P(1 < \xi < 3)$; б) $P(\xi < 2)$; в) $P(\xi \le 3)$;

   г) $P(\xi > 2{,}5)$; д) $P(|\xi| < 2)$; е) $P(|\xi| \ge 1)$.

3. Не пользуясь таблицами, решите, какая из вероятностей $P(\xi \le 3)$ и $P(\eta \le 3)$ больше, если:

   а) $\xi \in N(0, 2)$; $\eta \in N(0, 3)$;

   г) $\xi \in N(0, 2)$; $\eta \in N(1, 2)$?

4. Для величины $\xi \in N(-1,\ 1)$, используя соответствующие таблицы, найдите $x$ из условия:

   а) $P(x < \xi < 1) = 0{,}8$;

   б) $P(0 < \xi < x) = 0{,}8$;

   в) $P(-1 - x < \xi < -1 + x) = 0{,}8$.

5. Известно, что $\xi \in N(1, 4)$. Расположите в порядке возрастания вероятности $P(|\xi - 3| < 1)$; $P(|\xi - 2| < 1)$, $P(|\xi| < 1)$.

6. При каком значении параметра $\lambda$ для случайной величины $\xi \in N(\mu,\ \sigma^2)$ выполняется условие

$$P(|\xi - M\xi| < \lambda\sqrt{D\xi}) = P(|\xi - M\xi| > \lambda\sqrt{D\xi})?$$

7. Известно, что нормально распределенная случайная величина $\xi$ удовлетворяет условию $P(|\xi - M\xi| < 1) = 0{,}3$.
Вычислить $P(|\xi - M\xi| < 2)$.

8. Нормально распределенная случайная величина $\xi$ удовлетворяет условию $P(|\xi - M\xi| \le 2) = 0{,}6$. Вычислите $P(|\xi - M\xi| > 3)$.

9. Какую наименьшую длину может иметь интервал $\Delta$, если $P(\xi \in \Delta) = 0{,}90$, причем $\xi \in N(2, 3)$?

10. При каком значении $\sigma$ наименьшая длина интервала $\Delta$, удовлетворяющего условию $P(\xi \in \Delta) = 0{,}95$ для случайной величины $\xi \in N =$ $= (0, \sigma^2)$, будет равна 10?

11. Известно, что $\xi$ – нормально распределенная случайная величина и $P(\xi < 1) = 0{,}7793$, $P(\xi < 2) = 0{,}8962$. Вычислите вероятность $P(\xi < 3)$.

12. Найдите математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины $\xi$, если

$$P(1 < \xi < 7) = P(7 < \xi < 13) = 0{,}18.$$

13. Пусть $\xi \in N(1, \sigma^2)$. При каком значении параметра $\sigma > 0$ вероятность $P(2 < \xi < 4)$ будет наибольшей?

14. Какое наибольшее значение может принимать вероятность $P(1 < \xi < 3)$, если известно, что $\xi$ – нормально распределенная случайная величина, причем $P(1 < \xi < 7) = P(3 < \xi < 9)$?

15. Докажите, что если $\xi \in N(0, \sigma^2)$, то

$$M(|\xi|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma, \quad D(|\xi|) = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sigma^2.$$

16. Докажите, что если $\xi \in N(0, \sigma^2)$, то

$$M\xi^{2n} = (2n-1)!!\,\sigma^{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \sigma^{2n}.$$

17. Известно, что $\xi$ – стандартная нормальная случайная величина. При каком $C$ математическое ожидание $M|\xi - C|$ принимает наименьшее значение. Чему равно это значение?

18. Известно, что $\xi \in N(0, 1)$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию длины окружности $x^2 + y^2 = \xi^2$.

19. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шарика $\mu = 5$ мм; фактический же диаметр можно рассматривать как нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием $\mu$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$ мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального более, чем на 0,1 мм. Какой процент шариков в среднем отбраковывается?

20. В условиях задачи 19 предположим, что $\sigma$ не задано, зато известно, что в среднем отбраковывается 6% шариков. Какова вероятность того, что диаметр наугад выбранного шарика будет заключен в пределах от 4,98 мм до 5,02 мм?

21. Нормально распределенная случайная величина $\xi$ удовлетворяет условию $M\xi = 0$, $M|\xi| = 1$. Чему равна ее дисперсия?

22. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа. Полагая, что при отсчете ошибка округления распределена по равномерному закону, найти: 1) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины; 2) вероятность того, что ошибка округления: а) меньше 0,04; б) больше 0,05.

23. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден.ед.; б) не ниже 15,4 ден.ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден.ед. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

24. Цена некой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден.ед., а 75% –

выше 90 ден.ед. Найти: а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение цены ценной бумаги; б) вероятность того, что в день покупки цена будет заключена в пределах от 83 до 96 ден.ед.; в) с надежностью 0,95 определить максимальное отклонение цены бумаги от среднего (прогнозного) значения (по абсолютной величине).

25. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что масса коробок с конфетами имеет нормальное распределение, а 5% коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) более 550 г; г) отличается от средней не более, чем на 30 г (по абсолютной величине)?

26. Случайная величина $X$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания $X$ в интервал (10; 15) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания $X$ в интервал: а) (35; 40); б) (30; 35)?

27. Известно, что нормально распределенная случайная величина принимает значение: а) меньшее 248 с вероятностью 0,975; б) большее 279 с вероятностью 0,005. Найти функцию распределения случайной величины $X$.

28. Случайная величина $X$ распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Вероятность попадания этой случайной величины на отрезок от –1 до +1 равна 0,5. Найти выражение плотности вероятности и функции распределения случайной величины $X$.

29. Случайная величина $X$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 0$. При каком значении среднего квадратического отклонения σ вероятность попадания случайной величины $X$ в интервал (1; 2) достигает максимума?

30. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали $X$, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

31. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

32. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением

$\sigma$ = 5 мм и математическим ожиданием $a$ = 0. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

33. Станок-автомат изготавливает валики, причем контролируется их диаметр $X$. Считая, что $X$ – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $a$ = 10 мм и средним квадратическим отклонением $\sigma$ = 0,1 мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

34. Какой ширины должно быть поле допуска, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получалась деталь с контролируемым размером вне поля допуска, если случайные отклонения размера от середины поля допуска подчиняются закону нормального распределения с параметрами $\overline{x} = 0$ и $\sigma$ = 5 мк?

35. Какое наибольшее расстояние допустимо между двумя рыболовецкими судами, идущими параллельными курсами, чтобы вероятность обнаружения косяка рыбы, находящегося посередине между ними, была не менее 0,5, если дальность обнаружения косяка для каждого из судов является независимой нормально распределенной случайной величиной с $\overline{x}$ = 3,7 км и средним квадратическим отклонением $\sigma$ = 1,1 мк?

36. При большом числе измерений установлено, что 75% ошибок: а) не превосходят +1,25 мм; б) не превосходят по абсолютной величине 1,25 мм. Заменяя частоты появления ошибок их вероятностями, определить в обоих случаях среднее квадратическое отклонение ошибок измерения, считая их нормально распределенными с нулевым математическим ожиданием.

37. Нормально распределенная случайная величина $X$ имеет нулевое математическое ожидание. Определить среднее квадратическое отклонение $\sigma$, при котором вероятность $P(a < x < b)$ была бы наибольшей $(0 < a < b)$.

**Задание 4**

1. Внутри сферы радиуса r наугад выбирается точка $M$. Найдите функцию распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi$, равной расстоянию от точки $M$ до сферы.

2. При каком значении C функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ 1 - \dfrac{C}{x}, & \text{если} \quad x > 4, \end{cases}$$

служит функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины $\xi$? Какой в этом случае будет плотность вероятности величины $\xi$ и чему равно $M\xi$?

3. Существует ли значение $C$ такое, что функция $f(x)$ служит плотностью вероятности? Если существует, то укажите его и вычислите соответствующие математическое ожидание и дисперсию:

1) $f(x) = \begin{cases} C \text{ при } & 0 < x < 5, \\ 0 \text{ при } & x < 0 \text{ и } x > 5; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} C(1-|x|) & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} Ce^{-2x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases}$

4) $f(x) = Ce^{-|x|}$ при $-\infty < x < \infty$;

5) $f(x) = \begin{cases} Ce^{-x^2/2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

4. При каком значении $C$ функция

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

является плотностью вероятности некоторой случайной величины? Что можно сказать о математическом ожидании этой случайной величины?

5. Докажите, что если график функции $f(x)$ – плотности вероятности случайной величины $\xi$ – симметричен относительно прямой $x = m$ и $M\xi$ существует, то $M\xi = m$.

6. Что для $\xi \in N(\mu, \sigma^2)$ больше: $P(\xi > M\xi)$ или $P(\xi < M\xi)$?

7. Пусть $g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| > 1, \\ -x, & \text{если } |x| \le 1. \end{cases}$

Докажите, что если $\xi \in N(0, 1)$, то и $g(\xi) \in N(0, 1)$.

8. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a).$$

Определить дисперсию и срединное отклонение.

9. Плотность вероятности случайной величины $X$ задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Определить $M(X)$ и $D(X)$.

10. Функция распределения случайной величины $X$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{при} \quad x \ge x_0, \\ 0 & \text{при} \quad x < x_0 \end{cases} \quad (x_0 > 0).$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

11. Функция распределения случайной величины $X$ имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ a + b\arcsin x & \text{при} \quad -1 \le x \le 1; \\ 1 & \text{при} \quad 1 \le x. \end{cases}$$

Определить постоянные $a$ и $b$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

12. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величиины $X$, если плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E^2}} & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

13. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \text{ (распределение Лапласа).}$$

14. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности (бета-распределение)

$$f(x) = \begin{cases} Ax^{\alpha-1}(1-x)^{b-1} & \text{при} \quad 0 \le x \ge 1 \quad (a > 0; b > 0), \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

Определить параметр $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

15. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = A(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $n$ – целое положительное число, большее 1. Определить постоянную $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

16. Плотность вероятности неотрицательной случайной величины $X$ имеет вид ($\chi$ – распределение)

$$f(x) = Ax^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $n > 1$.

Определить $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

17. Доказать, что при выполнении условий

$$\lim_{x \to -\infty} [xF(x)] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \infty} \{x\,[1-F(x)]\} = 0$$

для математического ожидания случайной величины справедливо равенство

$$M[X] = \int_{0}^{\infty} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\, dx.$$

18. Обработка результатов одной переписи показала, что плотность вероятности возраста лиц, занимающихся научной работой, может быть представлена формулой

$$f(t) = k(t - 22{,}5)\,(97{,}5 - t)^5$$

$$(t - \text{время в годах},\quad 22{,}5 \le t \le 97{,}5).$$

Определить, во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число научных работников в возрасте выше среднего.

19. Даны две случайные величины $X$ и $Y$, имеющие одинаковые дисперсии, но первая распределена нормально, а вторая – ранвомерно. Определить соотношение между их срединными отклонениями.

20. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности (гамма-распределение)

$$f(x) = \begin{cases} Ax^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при} \quad x \ge 0 \quad (\alpha > -1; \beta > 0), \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Определить параметр $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

21. Докажите, что случайная величина $\xi$ имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей тогда и только тогда, когда $P(\xi \in B) = 0$ для всякого борелевского множества $B$ лебеговой меры нуль.

22. Плотность вероятности случайной величины $\xi$ равна (закон гиперболического секанса)

$$f(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти: а) коэффициент $A$; б) вероятность того, что в двух независимых наблюдениях $\xi$ примет значения, меньшие единицы.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е.Гмурман. – М.: Высш. шк., 1977.
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математическая статистика / В.Е.Гмурман. – М.: Высш. шк., 1979.
3. Розанов, Ю.А. Лекции по теории вероятностей / Ю.А.Розанов. – М.: Наука, 1986.
4. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей / В.П.Чистяков. – М.: Наука, 1987.
5. Сборник задач по математике для втузов. В 3ч. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1990.

Дополнительная литература

1. Агапов, Г.И. Задачник по теории вероятностей / Г.И.Агапов. – М.: Высш. шк., 1986.
2. Вентцель, Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С.Вентцель, Л.А.Овгаров. – М.: Советское радио, 1982.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2ч. Ч.2 / П.Е.Данко, А.Г.Попов. – М.: Высш.шк., 1986.
4. Прохоров, А.В. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / А.В.Прохоров, В.Г.Ушаков, Н.Г.Ушаков. – М.: Наука, 1986.