Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)
Направленность (профиль) подготовки: Математическое моделирование, вычислительная математика и физика

ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИЛУЧШЕГО ДЕМПФИРОВАННОГО МНОГОЧЛЕНА УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ТЭТА-ФУНКЦИИ

(бакалаврская работа)

Студент:
Юрченко Петр Олегович

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Богатырев Андрей Борисович,
д-р физ.-мат. наук, доц.

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)***:**
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2020

Содержание

1 Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$\frac{du}{dt} = Au, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad 0 \le t \le T$$

где A - линейный оператор на евклидовом пространстве X.

Для решения таких задач применяются неявный и явный методы Рунге-Кутты, в частности методы Эйлера:

- Неявный:
$$u_{k+1} = (I - \tau_{k+1}A)^{-1}u_k, \tag{2}$$
- Явный:
$$u_{k+1} = (I + \tau_{k+1}A)u_k, \tag{3}$$

где τ_i - i-ый шаг итерации метода.

При построении n-стадийных явных устойчивых методов Рунге-Кутты используется функция $R_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \tau_i x)$, называемая многочленом устойчивости. Тогда справедлива:

Теорема 1. Метод Рунге-Кутты имеет порядок аппроксимации l тогда и только тогда, когда многочлен устойчивости имеет вид

$$R_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^l/l! + O\left(x^{l+1}\right) \tag{4}$$

Итак, для построения метода Рунге-Кутты используется следующая задача:

Задача A. Найти вещественный многочлен степени не выше n, приближающий в нуле экспоненту с порядком $l \le n$, то есть имеющий вид (4), для которого отклонение $\|R_n\|_E := \max_{x\in E}|R_n(x)| \le 1$ на возможно большом отрезке $E = [-L, 0], L > 0$, называемом интервалом устойчивости.

Однако, такие многочлены имеют точки альтернанса, в которых они принимают значения, равные по модулю единице, что является нежелательным для практического использования. Поэтому перейдем к следующей формулировке, рассмотренной в [18], именно ей будет посвящена эта работа:

Задача B. Найти вещественный многочлен степени не выше n, приближающий в нуле экспоненту с порядком $l \le n$, то есть имеющий вид (1), для которого отклонение $\|R_n\|_E$ не превосходит число μ ($\mu < 1$) на отрезке $E = [-L - \delta, -\delta], L > 0$ (демпфированный многочлен устойчивости).

Отрезок E сдвинут, потому что $R_n(0) = 1$, что противоречит условию задачи. При этом величина этого сдвига изначально неизвестна.

В работе для решения данной задачи при $l = 3$ рассматривается подход А.Б. Богатырева, использующий переход к ассоциированной римановой поверхности, а также применение тэта-функций. Этот же метод был использован в [17] в задаче нахождения наилучшего недемпфированного многочлена устойчивости.

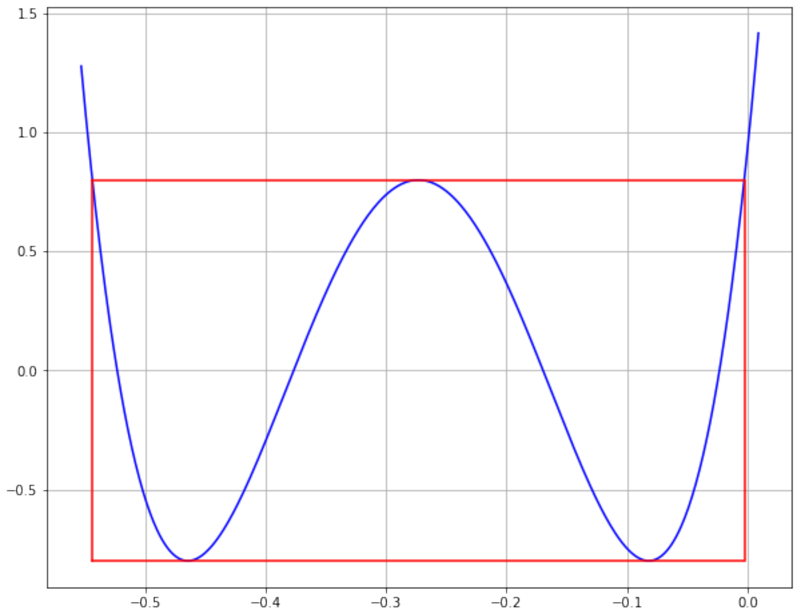

Рис. 1: Наилучший демпфированный многочлен устойчивости степени 6 с $\mu = 0.8$.

2 Наилучший демпфированный многочлен устойчивости.

Многочлен $R_n(x)$, удовлетворяющий условию задачи, обладает следующими свойствами:

- Он существует и единственнен.
- На интервале устойчивости $E = [-L - \delta, -\delta]$ есть $(n+2-l)$ точка альтернанса, в которых многочлен принимает значения $\pm\mu$ с чередующимися знаками.
- Многочлен имеет $(n+1-l)$ действительных корня и все они лежат на интервале устойчивости.
- Производная многочлена имеет $(n - l)$ действительных корня на интервале устойчивости (в них достигается альтернанс) и 2 комплексно-сопряженных значения.

Рассмотрим приведенный многочлен:

$$P_n(x) = \frac{R_n(-\delta + Lx)}{\mu} \tag{5}$$

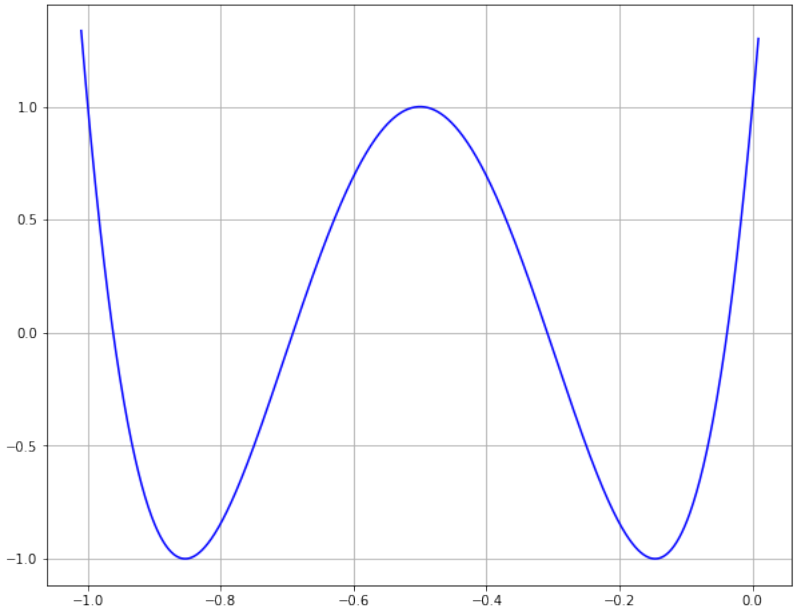

Рис. 2: Приведенный многочлен устойчивости $P_n(x)$ степени 6.

Интервал устойчивости E перейдет в отрезок $[-1, 0]$, а ноль в точку $x^* = \frac{\delta}{L} > 0$.

Из того факта, что исходный многочлен приближал экспоненту в нуле с 3-им порядком, следует, что приведенный будет приближать ее с тем же порядком в точке x^*, то есть удовлетворять следующим условиям:

$$P_n\left(x^*\right) = \frac{1}{\mu}, \tag{6}$$

$$\frac{d^2 P_n}{dx^2}\left(x^*\right) = \left(\frac{dP_n}{dx}\left(x^*\right)\right)^2 \mu, \tag{7}$$

$$\frac{d^3 P_n}{dx^3}\left(x^*\right) = \left(\frac{dP_n}{dx}\left(x^*\right)\right)^3 \mu^2. \tag{8}$$

По приведенному многочлену можно легко восстановить исходный:

$$L = \mu \frac{dP_n}{dx}\left(x^*\right), \tag{9}$$

$$\delta = L x^*, \tag{10}$$

$$R_n(x) = \mu P_n\left(\frac{\delta + x}{L}\right). \tag{11}$$

3 Ассоциированная кривая.

3.1 Топологический тип кривой.

Определение. Вещественный многочлен, все критические точки которого, за исключением g из них, простые со значениеми ± 1, называется g-экстремальным многочленом.

Такие многочлены можно описывать при помощи структуры П.Л. Чебышева:

Сопоставим нашему приведенному многочлену $P_n(x)$ вещественную гиперэллиптическую кривую

$$M = M(\chi) = \left\{ (x, w) \in \mathbf{C}^2 : w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - p_i) \right\}, \quad \chi := \{p_i\}_{i=1}^{2g+2}, \tag{12}$$

где χ - нули нечетного порядка многочлена $P_n^2 - 1$. Заметим, что кривая допускает гиперэллиптическую инволюцию $J(x, w) := (x, -w)$, а также отражение $\bar{J}(x, w) := (\bar{x}, \bar{w})$.

Род кривой M равен g. Так как мы рассматриваем многочлен с $l = 3$, то нулями нечетного порядка многочлена $P_n^2 - 1$ будут являться 2 конца отрезка E, а также две пары комплексно-сопряженных точек. Соответственно, плучим, что $P_n(x)$ — 2-экстремальный многочлен, а кривая имеет род 2.

Многочлен $P_n(x)$ восстанавливается с точностью до знака по формуле:

$$P_n(x) = \pm \cos \left(ni \int_{(p,0)}^{(x,w)} d\eta_M \right), \quad x \in \mathbf{C}, \quad (x, w) \in M, \tag{13}$$

где $d\eta_M$ - жестко привязанный к M абелев дифференциал 3-го рода. Он имеет вид

$$d\eta_M = (x^2 + \gamma_1 x + \gamma_2) \frac{dx}{w}. \tag{14}$$

Этот дифференциал меняет знак при гиперэллиптической инволюции кривой M, а также отражение $\bar{J}$ переводит его в сопряженный $d\bar{\eta}_M$. Такие дифференциалы являются вещественными, то есть все коэффициенты γ_i будут вещественными.

3.2 Базис циклов.

На кривой выберем базис циклов (a_1, a_2, b_1, b_2) следующим образом (рис.1):

- Цикл a_1 охватывает пару точек ветвления в верхней полуплоскости
- Цикл a_2 получается из a_1 отражением
- Цикл b_1 охватывает точку ветвления верхней полуплоскости и нуль.
- Цикл b_2 проходит по берегу разреза, соединяющего точку ветвления нижней полуплоскости, отражение которой не охватывается b_1, с точкой -1

Такое построение базиса необходимо для выполнения следущих условий:

$$\bar{J}a_1 = a_2, \bar{J}a_2 = a_1, \bar{J}b_1 = a_1 - b_2, \bar{J}b_2 = a_2 - b_1 \tag{15}$$

Заметим, что циклы b_1 и b_2 определены неоднозначно: к ним может добавляться целое число циклов a_1 и $-a_2$ соответственно. Это связано с тем, что в пространстве модулей $\mathcal{H}$ (пространстве нормированных дивизоров) есть нестягиваемая петля, обход вдоль которой приводит к перестановке точек ветвления верхней полуплоскости. Действие образующей модулярной группы $\mathbf{Z}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 + a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

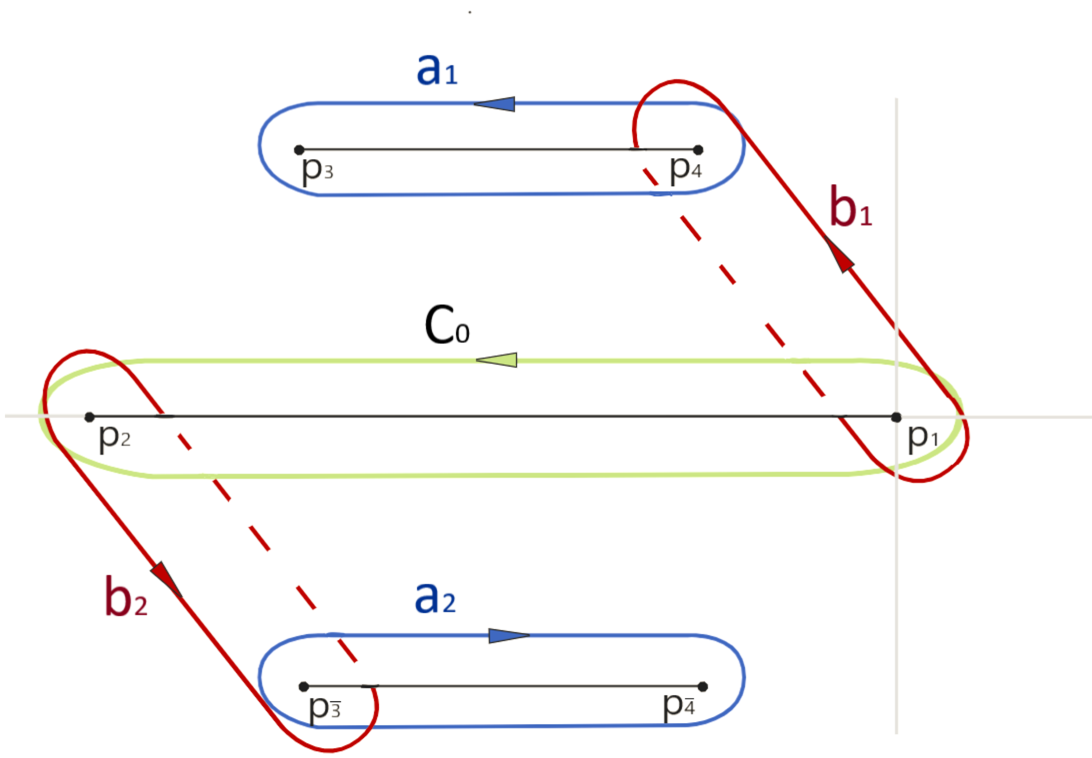

Рис. 3: Канонический базис циклов на кривой M

3.3 Голоморфные дифференциалы и матрица периодов.

На римановой поверхности M существует два независимых голоморфных дифференциала:

$$d\zeta = \left(\begin{array}{c} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \end{array} \right), \quad d\zeta_i = \frac{\alpha_i x + \beta_i}{w} dx, \quad i = 1, 2 \tag{17}$$

где α_i и β_i определяем из следуюшего условия нормировки:

$$\oint_{a_i} d\zeta_j = \delta_{i_j} \tag{18}$$

Периоды нормированньгх дифференциалов $d\zeta_i$ по циклам b_j дают матрицу периодов:

$$\Omega_{ij} = \oint_{b_i} d\zeta_j \tag{19}$$

Лемма. Дифференциалы при отражении J nереходят друг в друга:

$$\bar{J} d\zeta_1 = \overline{d\zeta_2} \tag{20}$$

Из леммы следует утверждение:

Следствие. Матрица периодов Ω_{sj} обладает следующими свойствами:

$$\Omega_{11} = -\overline{\Omega_{22}}, \quad \Omega_{12} + \overline{\Omega_{21}} = 1 \tag{21}$$

Из последнего тождества следует, что справедливо представление $\Omega_{12} \in \frac{1}{2} + i\mathbf{R}$. Таким образом матрица периодов Ω зависит от трех вещественных параметров.

3.4 Якобиан.

Определение. Якобианом кривой M называется четырехмерный тор, который задается при помощи матрицы периодов Ω следующим образом:

$$Jac(M) := \mathbf{C}^2 / L_\Omega, \tag{22}$$

где L_Ω – решетка в $\mathbf{C}^2$, порождаемая векторами $\mathbf{e^1} = (1,0)^T, \mathbf{e^2} = (0,1)^T, \mathbf{\Omega^1} = (\Omega_{11}, \Omega_{21})^T, \mathbf{\Omega^2} = (\Omega_{12}, \Omega_{22})^T$.

В якобиан естественно вложены двумерные торы: вещественный $Jac_R = (u, \bar{u}) \in Jac$ и мнимый $Jac_I = (u, -\bar{u}) \in Jac$. Вешественный тор якобиана порождается 2-решеткой с образующими $(1,1)^T$ и $\left(\Omega_{11} - \Omega_{12}, \overline{\Omega_{11}} - \overline{\Omega_{12}}\right)^T$, вложенной в плоскость $(u, \bar{u}) \in \mathbf{C}^2$. Мнимый тор якобиана порождается 2-рещеткой с образуюшими $(1,-1)^T$ и $\left(\Omega_{11} + \Omega_{12}, -\overline{\Omega_{11}} - \overline{\Omega_{12}}\right)^T$, вложенной в плоскость $(u, -\bar{u}) \in \mathbf{C}^2$.

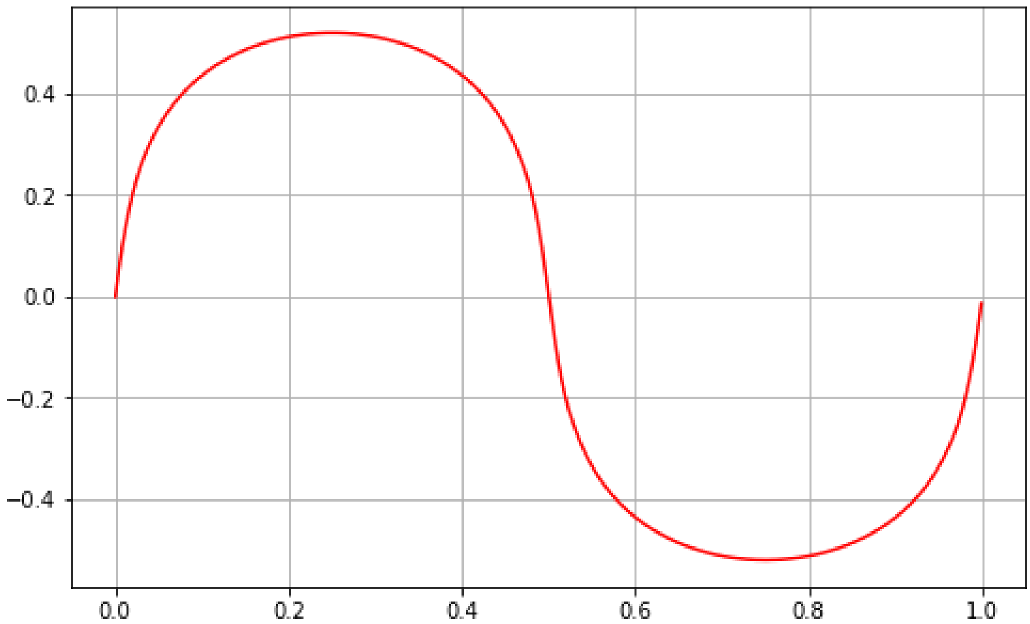

Рис. 4: Вещественный овал. Матрица периодов:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1,7+4,5i & 0,5-0,8i \\ 0,5-0,8i & -1,7+4,5i \end{pmatrix}$$

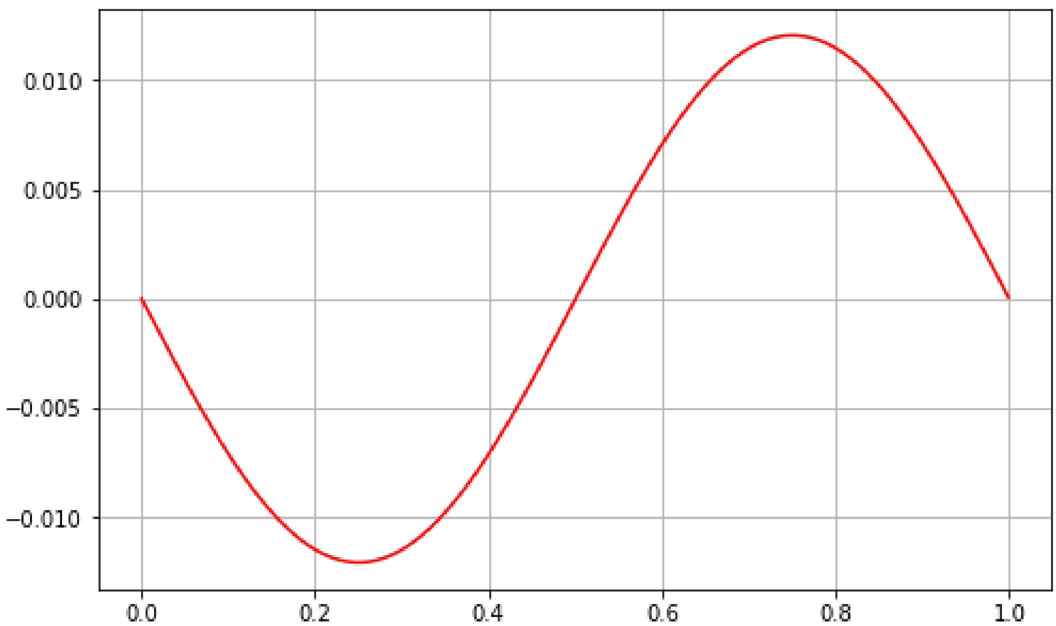

Рис. 5: Мнимый овал. Матрица периодов:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1,7+4,5i & 0,5-0,8i \\ 0,5-0,8i & -1,7+4,5i \end{pmatrix}$$

3.5 Отображение Абеля-Якоби.

Абелем и Якоби было введено отображение φ кривой M в ее якобиан:

$$\varphi(x,w) = \int_{(0,0)}^{(x,w)} d\zeta \quad \mathrm{mod} \quad L_\Omega \tag{23}$$

Найдем образы точек ветвления кривой M :

$$\varphi\left(p_2\right) = \frac{1}{2}\int_{a_2-a_1} d\zeta = \frac{1}{2}(-1,1)^T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}\right) \tag{24}$$

$$\varphi\left(p_4\right) = \frac{1}{2}\int_{b_1} d\zeta = \frac{1}{2}\left(\Omega_{11},\Omega_{12}\right)^T = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega^1} \tag{25}$$

$$\varphi\left(p_3\right) = \frac{1}{2}\left(\Omega_{11},\Omega_{12}\right)^T + \frac{1}{2}\int_{a_1} d\zeta = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e^1}+\mathbf{\Omega^1}\right) \tag{26}$$

$$\varphi\left(p_{\overline{4}}\right) = \frac{1}{2}\int_{\bar{J}b_1} d\zeta = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e^1}+\mathbf{\Omega^2}\right) \tag{27}$$

$$\varphi\left(p_{\overline{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^1+\Omega^2+\int_{a_2} d\zeta\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}+\mathbf{\Omega^2}\right) \tag{28}$$

Вектором римановых констант называется вектор:

$$\mathcal{K} = \varphi\left(p_3\right)+\varphi\left(p_{\overline{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{\Omega^1}+\mathbf{\Omega^2}+\mathbf{e^2}\right) \tag{29}$$

3.6 Ассоциированный дифференциал.

Если кривая порождена некоторым многочленом $P_n(x)$, то связанный с ней дифференциал представим в виде:

$$d\eta_M = n^{-1} d\left(\log \widetilde{P_n}(x,w)\right), \tag{30}$$

где $\widetilde{P_n}(x,w) := P_n(x)+\sqrt{P_n^2(x)-1}$ - функция с полюсом n-ого порядка на бесконечности ∞_+ верхнего листа и нулем того же порядка на бесконечности ∞_- нижнего листа M. Действительно, так как $\widetilde{P_n}(x,w)\widetilde{P_n}(x,-w) = 1$, дифференциал (15) имеет только простые полюсы с вычетами ±1 на бесконечности и чисто мнимые периоды.

3.7 Уравнения Абеля.

Интеграл рассмотренного выше дифференциала по любому циклу выражается через приращение аргумента функции $\widetilde{P_n}(x,w)$ на этом цикле и, значит, лежит в $2\pi i\mathbf{Z}/n$. В частности,

$$\int_{b_1} d\eta_M \in 2\pi i\mathbf{Z}/n, \tag{31}$$

Для кривой M, порожденной наилучшим многочленом устойчивости, интеграл по контуру a_1 можно вычислить точно. Обозначим за C_0 цикл, проходяший против часовой стрелки берега разреза $[-1,0]$. Многочлен

$$P_n(x) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{P_n}(x,w) + \frac{1}{\widetilde{P_n}(x,w)}\right) \tag{32}$$

испытывает на отрезке [-1,0] ровно $(n-2)$ колебаний между $+1$ и -1. Когда точка (x,w) пробегает по контуру C_0 на римановой поверхности, значение $\widetilde{P_n}(x,w)$, полученное из $P_n(x,w)$ обратным преобразованием Жуковского, огибает единичную окружность ровно $(n-2)$ раза против часовой стрелки. Следовательно, $\int_{C_0} d\eta M = 2\pi i(n-2)/n$. Цикл $(C_0 + a_1 - a_2)$ стягивается к полюсу ∞_+ дифференциала $d\eta_M$, вычет в котором равен -1. В силу вещественности дифференциала, его интегралы по a_1 и $-a_2$ равны, поэтому

$$\int_{a_1} d\eta_M = 2\pi i n^{-1} \tag{33}$$

Таким образом, полученные уравнения гарантируют, что всякий интеграл от $d\eta_M$ по целому циклу лежит в $2\pi i\mathbf{Z}/n$, а значит функция $\widetilde{P_n}(x) = \cos\left(ni\int_{(0,0)}^{(x,w)} d\eta_M\right)$ будет однозначной на римановой поверхности M.

Уравнения (31), (33) называются уравнениями Абеля. Из них следуют соотношения:

$$\begin{cases} \int_{a_1} d\eta_M = 2\pi i n^{-1}, & \int_{a_2} d\eta_M = -2\pi i n^{-1}, \\ \int_{b_1} d\eta_M = 2\pi i m n^{-1}, & \int_{b_2} d\eta_M = 2\pi i(m-n+1)n^{-1}, \end{cases} \tag{34}$$

где $m \in \mathbf{Z}$. Используя билинейные соотношения Римана, данные уравнения можно переписать в терминах голоморфных дифференциалов, а следовательно и матрицы периодов:

$$\varphi(\infty_+) = \int_0^{\infty+} d\zeta = -\frac{1}{2n}\left((\Omega_{12},\Omega_{22})^t + (\overline{\Omega_{22}},\overline{\Omega_{12}})^t + (m-n)(1,1)^t\right) \tag{35}$$

4 Тэта-функции Римана.

4.1 Определение и свойства.

Определение. Тэта-функция Римана является функцией g комплексных переменных и определяется рядом:

$$\theta(z,\Omega) = \sum_{n\in\mathbf{Z^2}} exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot\Omega\cdot n + n^T\cdot z\right)\right], \tag{36}$$

где $z\in\mathbf{C}^2, \Omega\in\mathbf{C}^{2\times 2}$ — симметричная марица с положительно определенной мнимой частью. Положительная определенность гарантирует сходимость ряда (36) для всех z.

Свойства:

- Квазипериодичность относительно сдвигов $z\to z+u, u\in L_\Omega.$:

$$\theta(z+m,\Omega) = \theta(z,\Omega), \tag{37}$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\Omega m,\Omega) = exp(-\pi i m^T\Omega m - 2\pi i m^T z)\theta(z,\Omega), \tag{38}$$

$$\forall m\in\mathbf{Z}^2$$

- Тождество Римана:

$$\theta\left(\frac{x+y+u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y-u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y-u+v}{2}\right) =$$

$$= 2^{-2}\sum_{\beta\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}^2/\mathbf{Z}^2}\ \sum_{\alpha\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}^2/\mathbf{Z}^2}\exp[4\pi i\alpha\Omega\alpha + 2\pi i\alpha(x+y+u+v)]\times$$

$$\times\theta(x+\Omega\alpha+\beta)\theta(y+\Omega\alpha+\beta)\theta(u+\Omega\alpha+\beta)\theta(v+\Omega\alpha+\beta). \tag{39}$$

Введем тэта-функцию с характеристиками:

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\Omega) = exp(\pi i\varepsilon^T\Omega\varepsilon + 2\pi i\varepsilon(z+\varepsilon'))\theta(z+\Omega\varepsilon+\varepsilon',\Omega), \tag{40}$$

где $\varepsilon,\varepsilon'\in\mathbf{R^2}$. Это выражение можно переписать в виде ряда:

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\Omega) = \sum_{n\in\mathbf{Z^2}} exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{2}(n+\varepsilon)^T\cdot\Omega\cdot(n+\varepsilon) + (n+e)^T\cdot(z+\varepsilon')\right)\right] =$$

$$= \sum_{n_\varepsilon} exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{2}n_\varepsilon^T\cdot\Omega\cdot n_\varepsilon + n_\varepsilon^T\cdot z_{\varepsilon'}\right)\right], \tag{41}$$

где $n_\varepsilon = n+\varepsilon$, а $z_{\varepsilon'} = z+\varepsilon'$

Отметим также свойства этой функции. Они будут использоваться для тестирования программ:

- Аналогичные тождествам (37), (38) условия квазипериодичности:

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+m,\Omega)=\exp(2\pi i\epsilon m)\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\Omega), \tag{42}$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z+\Omega m,\Omega)=\exp\left(-2\pi i\epsilon' m\right)\exp(-\pi i m\Omega m-2\pi i m z)\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\Omega), \tag{43}$$

$$\forall m\in\mathbf{Z^2}$$

- Будем рассматривать только тэта-функции с характеристиками, компоненты которых принимают только значения 1/2 и 0. Четность такой тэта-функции совпадает с четностью числа $4\varepsilon^T\varepsilon'$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\Omega)=\exp\left(\pi i\cdot 4\left(\varepsilon,\varepsilon'\right)\right)\cdot\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(-z,\Omega), \tag{44}$$

- Пусть матрица Ω удовлетворяет соотношениям (21), тогда

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\Omega)=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(S\bar{z},\Omega)\exp\left(\pi i\varepsilon^T S\varepsilon\right), \tag{45}$$

где $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Нельзя не отметить, что на вещественных и мнимых торах тэта-функция без характеристик является вещественной, в то время как тэта-функция с характеристиками удовлетворяет следующим соотношениям, получаемым из тождества (45):

$$\overline{\theta\begin{bmatrix}\frac12&\frac12\\0&\frac12\end{bmatrix}(z,\Omega)}=\mp i\theta\begin{bmatrix}\frac12&\frac12\\0&\frac12\end{bmatrix}(z,\Omega) \tag{46}$$

$$\overline{\theta\begin{bmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&0\end{bmatrix}(z,\Omega)}=\mp i\theta\begin{bmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&0\end{bmatrix}(z,\Omega) \tag{47}$$

$$\overline{\theta\begin{bmatrix}0&\frac12\\\frac12&\frac12\end{bmatrix}(z,\Omega)}=\pm\theta\begin{bmatrix}\frac12&0\\\frac12&0\end{bmatrix}(z,\Omega) \tag{48}$$

$$\overline{\theta\begin{bmatrix}\frac12&0\\\frac12&\frac12\end{bmatrix}(z,\Omega)}=\pm\theta\begin{bmatrix}0&\frac12\\0&\frac12\end{bmatrix}(z,\Omega), \tag{49}$$

где верхний знак отвечает аргументу z с действительного тора, а нижний - с мнимого.

4.2 Преобразование и вычисление тэта-функции.

Рассмотрим формулу (36) с учетом того, что $z = x + iy$, $\Omega = X + iY$ и $Y = Y^T$ и приведем ее для приведем ее к виду, с которым удобно работать:

$$\begin{aligned}\theta(z,\Omega) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{2\pi i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot\Omega\cdot n+n^T\cdot z\right)} = \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{2\pi i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot X\cdot n+n^T\cdot x+i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot Y\cdot n+n^T\cdot y\right)\right)} = \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{2\pi i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot X\cdot n+n^T\cdot x\right)} e^{-2\pi\left(\frac{1}{2}n^T\cdot Y\cdot n+n^T\cdot y\right)} = \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{2\pi i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot X\cdot n+n\cdot x\right)} e^{-2\pi\left(\frac{1}{2}\left(n+Y^{-1}\cdot y\right)^T\cdot Y\cdot\left(n+Y^{-1}\cdot y\right)-\frac{1}{2}y^T\cdot Y^{-1}\cdot y\right)} = \\ &= e^{\pi y^T\cdot Y^{-1}\cdot y}\cdot\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{2\pi i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot X\cdot n+n^T\cdot x\right)} e^{-\pi\left(\left(n+Y^{-1}\cdot y\right)^T\cdot Y\cdot\left(n+Y^{-1}\cdot y\right)\right)}\end{aligned} \tag{50}$$

Заметим, что при положительно определенной мнимой части Ω множитель перед скобкой растет дважды экспоненциально при росте y. Под суммой же первая экспонента осциллирует, а вторая - убывает. При этом, как было сказано раньше ряд сходится.

Чтобы реализовать тэта-функцию, необходимо аппроксимировать ее конечным рядом. Для этого существует следующая теорема:

Теорема. Тэта-функция Римана $\theta(z,\Omega)$ аппроксимируется с любой заданной точностью при $K \longrightarrow \infty$ функцией

$$\theta_K(z,\Omega) = e^{\pi y^T\cdot Y^{-1}\cdot y}\cdot\sum_{n\in S_K} e^{2\pi i\left(\frac{1}{2}n^T\cdot X\cdot n+n^T\cdot x\right)} e^{-\|v(n)\|^2} \tag{51}$$

где $v(n) = \sqrt{\pi}T\cdot(n+Y^{-1}y)$, T - верхняя треугольная матрица, полученная из разложения Холецкого матрицы Y, то есть $Y = T^T T$, $S_K = \{n \in \mathbf{Z}^2 | \parallel v(n) \parallel < K\}$.

Такой метод аппроксимации требует определения множества S_K. Оно состоит из точек $(n1, n2) \in \mathbf{Z}^2$, лежащих внутри эллипса заданного уравнением $\parallel v(n) \parallel = K$, т. е. $\pi(n-c)^T Y(n-c) = K^2$, где c - центр эллипса. В целях упрощения задачи, расширим эллипс до описанного прямоугольника, при этом только увеличив точность расчетов, немного сократив их скорость.

Найдем (n_1, n_2) из $\parallel T(n-c) \parallel < \frac{K}{\sqrt{\pi}}$ и пользуясь тем, что T - верхняя треугольная матрица:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

то $|T_{22}(n_2-c_2)| < \frac{K}{\pi}$ $c_2 - \frac{K}{\sqrt{\pi}T_{22}} < n_2 < c_2 + \frac{K}{\sqrt{\pi}T_{22}}$

Это неравенство определяет те n_2, которые нам необходимо учитывать. Теперь получим такое же неравенство для n_1:

$$\left|T_{11}\left(n_1-c_1\right)+T_{12}\left(n_2-c_2\right)\right|^2+T_{22}^2\left(n_2-c_2\right)^2<K^2/\pi$$

$$\left|T_{11}\left(n_1-c_1\right)+T_{11}^{-1}T_{12}\left(n_2-c_2\right)\right)\right|<\sqrt{K^2/\pi-T_{22}^2\left(n_2-c_2\right)^2}.$$

5 Система уравнений и ее запись в терминах тэта-функций.

В этом параграфе мы объединим все полученные до этого результаты. Для нахождения наилучшего приведенного многочлена устойчивоти, необходимо решить систему, составленную из уравнений связи (6) – (8) и уравнений Абеля (31) и (33).

Теорема. Данная система имеет единственное решение M в пространстве модулей. Функция $P_n(x)$, вычесленная в этой точке и будет наилучшим приведенным многочленом устойчивости.

Теперь мы хотим переписать данную систему с терминах тэта-функций для эффективных вычислений. Для этого воспользуемся следующей теоремой:

Теорема Римана. Фиксируем две точки $q_1, q_2 \in M$, тогда функция

$$f(p)=\theta(\varphi(p)-\varphi(q_1)-\varphi(q_2)-\mathcal{K},\Omega), \quad p\in M, \tag{52}$$

где $\mathcal{K}$ -вектор римановых констант, тождественно равна нулю, если $q_1 = Jq_2$. Если $q_1 \neq Jq_2$, то фунция обращается в нуль ровно в двух точках — q_1 и q_2.

Уравнение кривой M:

Пусть $q_1 = q_2 = p_1 = (0,0)$. Тогда, пользуясь соотношением (29) для вектора римановых констант, получаем уравнение для кривой M в якобиане:

$$\theta\left(u+\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Omega^1}+\mathbf{\Omega^2}+\mathrm{e}^\mathbf{2}\right),\Omega\right)=0, \tag{53}$$

или в виде тэта-функции с характеристиками:

$$\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right](u,\Omega)=0, \tag{54}$$

где $u \in Jac \cap \varphi(M)$

Уравнения Абеля:

$$\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right]\left(\varphi\left(\infty_+\right),\Omega\right)=0, \tag{55}$$

где $\varphi\left(\infty_+\right)$ дана в терминах матрицьл Ω в формуле (35).

Выражение для переменной $x(u)$:

Теорема Римана также позволяет получить несколько эквивалентных формул для представления функций $x(u)$ и $\widetilde{P_n}(u)$. Для упрощения дальнейших выкладок и численной реализации формул, мы подберем такие представления, что функции $x(u)$ и $P(u)$ были бы четными и вещественными на торах Jac_R и Jac_I.

Функция $x(u)$ является мероморфной и имеет нуль второго порядка в точке p_1 и простые полюса в точках ∞_+ и ∞_-. Поэтому справедливо следующее выражение:

$$x(u) = \mathrm{const}\,\frac{\theta^2\left[\begin{array}{c}\epsilon\\ \epsilon'\end{array}\right](u,\Omega)}{\prod_{\pm}\theta\left[\begin{array}{c}\epsilon\\ \epsilon'\end{array}\right](u\pm\varphi(\infty_+),\Omega)}, \tag{56}$$

где $\left[\begin{array}{c}\epsilon\\ \epsilon'\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{array}\right]$. Числитель в правой части (56) имеет два нуля второго порядка в точках p_1 и p_2, а знаменатель два простых нуля в точках ∞_+ и ∞_-, и ноль второго порядка в точке p_2. Постоянный множитель в уравнении определяется из условия нормировки $x(p_2) = -1$:

$$\mathrm{const} = -\frac{\prod_{\pm}(S\cdot grad\theta(u), grad\theta_{\pm}(u))}{(S\cdot grad\theta(u), grad\theta_0(u))^2}\Big|_{u=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}, \tag{57}$$

где $\theta(u) = \theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right](u,\Omega)$, $\theta_0(u) = \theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{array}\right](u,\Omega)$ и $\theta_{\pm}(u) = \theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{array}\right](u,\Omega)$, $S = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Также есть и другие формулы для $x(u)$, в работе они использовались исключительно для тестирования корректности работы программы:

- $$x_1(u) = \mathrm{const}_1\,\frac{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{array}\right](u,\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right](u,\Omega)}{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{array}\right](u-\varphi(\infty_+),\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right](u+\varphi(\infty_+),\Omega)},$$

  где

  $$\mathrm{const}_1 = -\frac{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right](\varphi(\infty_+),\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{array}\right](\varphi(\infty_+),\Omega)}{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right](0,\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{array}\right](0,\Omega)}$$

- $$x_2(u) = \mathrm{const}_2\,\frac{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right](u,\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right](u,\Omega)}{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right](u-\varphi(\infty_+),\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right](u+\varphi(\infty_+),\Omega)},$$

  где

  $$\mathrm{const}_2 = -\frac{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{array}\right](\varphi(\infty_+),\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{array}\right](\varphi(\infty_+),\Omega)}{\theta\left[\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{array}\right](0,\Omega)\cdot\theta\left[\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{array}\right](0,\Omega)}$$

Выражение для $\widetilde{P_n}(u)$:

$$\widetilde{P_n}(u) = (-1)^n \left(\frac{\theta \left[\begin{array}{c} \epsilon \\ \epsilon' \end{array} \right] (u + \varphi(\infty_+), \Omega)}{\theta \left[\begin{array}{c} \epsilon \\ \epsilon' \end{array} \right] (u - \varphi(\infty_+), \Omega)} \right)^n \cdot \exp\left(2\pi i u^T (1, -1)\right) \tag{58}$$

где характеристика тэта-функции та же, что и в формуле (56). Числитель (58) имеет два нуля n-ого порядка в точках p_2 и ∞_+. Экспоненциальный множитель вводится для однозначности функции $\widetilde{P_n}(u)$.

Уравнения связей:

Теперь из уравнений (56), (58), и учитывая то, что точка u лежит на кривой M, можно получить выражения (6) - (8) через производные dP/du и dx/du. Также используем то, что точка (u_1, u_2) лежит на кривой, то есть выполнено (54) и следовательно $d\theta_1 du_1 + d\theta_2 du_2 = 0$.

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_1 du_1 + P_2 du_2}{x_1 du_1 + x_2 du_2} = \frac{\theta_2 P_1 - \theta_1 P_2}{\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2}, \tag{59}$$

где индексы 1 и 2 обозначают частные производные по переменным u_1 и u_2 соответственно.

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \cdots = \frac{1}{(\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2)^2} \cdot \left[\theta_2 \cdot (1, P) - \theta_1 \cdot (2, P) - \frac{dP}{dx} \cdot (\theta_2 \cdot (1, x) - \theta_1 \cdot (2, x)) \right], \tag{60}$$

здесь скобки $(1, f)$ и $(2, f)$ обозначают производную выражения $(\theta_2 f_1 - \theta_1 f_2)$ по переменной u_1 и u_2 соответственно.

$$\begin{aligned} \frac{d^3P}{dx^3} = \cdots = -3 \frac{d^2P}{dx^3} \frac{(\theta_2 \cdot (1, x) - \theta_1 \cdot (2, x))}{(\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2)^2} + \\ + \frac{1}{(\theta_2 x_1 - \theta_1 x_2)^3} \cdot [\theta_2 \frac{d(\theta_2 \cdot (1, P) - \theta_1 \cdot (2, P))}{du_1} - \theta_1 \frac{d(\theta_2 \cdot (1, P) - \theta_1 \cdot (2, P))}{du_2} - \\ - \frac{dP}{dx} \left(\theta_2 \frac{d(\theta_2 \cdot (1, x) - \theta_1 \cdot (2, x))}{du_1} - \theta_1 \frac{d(\theta_2 \cdot (1, x) - \theta_1 \cdot (2, x))}{du_2} \right)]. \end{aligned} \tag{61}$$

Получаем уравнения связей для приведенного многочлена (в точке u^*, такой что $x(u^*) = x^*$):

$$P_n(x^*) = \frac{1}{2} \left(\widetilde{P_n}(u^*) + \frac{1}{\widetilde{P_n}(u^*)} \right) = \frac{1}{\mu}, \tag{62}$$

$$\frac{d^2P/dx^2}{(dP/dx)^2} = \mu, \tag{63}$$

$$\frac{d^3P/dx^3}{(dP/dx)^3} = \mu^2, \tag{64}$$

6 Результаты.

Полученная система уравнений (54), (55), (62) - (64) в 5-мерном вещественном пространстве, состоящем из 3 вещественных компонент матрицы периодов Ω и 2 координат на кривой (u_1, u_2), может быть решена при помощи многомерного метода Ньютона.

В рамках работы была написана программа по нахождению решения данной системы, из которого в дальнейшем восстанавливается искомый многочлен. Так как нас интересовало нахождение величины шага τ_i, то также было реализовано нахождение корней данного многочлена.

Начальное приближение было найдено путем применения всех шагов метода для многочлена степени $n = 3$ и $m = 2$: $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, учитывая димпфирование с показателем μ. Для такого многочлена известны L, δ, x^* и можно найти все точки ветвления кривой, а значит и матрицу периодов из выражений (18) - (19). Далее это решение может быть использовано, как начальное приближение для решения системы для любого n и $m = 2$. Чтобы найти решение для любого другого целого m', необходимо воспользоваться фактом, что если для данного m известно решение: Ω, то для $(m+1)$ решением будет $\Omega + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Список литературы

[1] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. - Пер. с англ. - М.: Мир, 1983.

[2] Springer D. Introduction to Riemann Surfaces // American Mathematical Society, 2002

[3] B. Deconinck, M. Heil, A. Bobenko, M. van Hoeij, M. Schmies. Computing Riemann Theta Functions. June 11, 2002.

[4] Тыртышников Е. Е. Краткий курс численного анализа. М.: ВИНИТИ, 1994.

[5] А. Гурвиц, Р.Курант. Теория функций. М.: Наука 1968

[6] Богатырев А. Б. Многообразие опорных множеств многочленов Чебышева. Математические заметки. Том 67 выпуск 6 июня 2000.

[7] Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978

[8] Хайрер Е., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999

[9] Lebedev V. I. Zoloterev polynomials and extremum problems // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1994. V. 9. №3. P. 231-263.

[10] Lebedev V.I. A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. I, II // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. №5. P. 397-426.

[11] Abdulle A. On roots and error constants of optimal stability polynomials // BIT. 2000. V. 40. №1. P. 177-182.

[12] Богатырев А. Б. Представление пространств модулей кривых и вычисление экстремальных многочленов // Матем. сб. 2003. Е. 194. №4. С. 3-28.

[13] Богатырев А. Б. Эффективный подход к задачас о наименьшем уклонении // Матем. сб. 2002. Е. 193. №12. С. 21-40.

[14] Богатырев А. Б. Комбинаторное описание пространства модулей кривых и экстремальных многочленов // Матем. сб. 2003. Е. 194. №10. С. 27-48.

[15] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства многочленов. М.-Л.: ОНТИ, 1982

[16] Богатырев А.Б. Эффективное решение задачи о наилучшем многочлене устойчивости. // Матем. сб. 2005. Т. 196. №7. С. 27-36.

[17] Асфандияров А. Г. Вычисление наилучшего многочлена устойчивости при помощи тэта-функций.

[18] Ярмолов Д. В. Эффективное решение задачи о демпфированном наилучшем многочлене устойчивости.