Министерство образования и науки Российской Федерации
Севастопольский государственный университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Теория принятия решений»
для студентов очной и очно-заочной форм обучения по направлению 09.03.02
«Информационные системы и технологии»

Севастополь

2019

УДК 519.2

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория принятия решений» для студентов очной и очно-заочной форм обучения по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии». /Сост. К.В.Кротов. – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2019. – 90 с.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями рабочей программы дисциплины «Теория принятия решений» для студентов направления 09.03.02 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 10 от 24 мая 2019 года.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Шевченко В.И. , кандидат технических наук, доцент кафедры Информационных технологий и компьютерных систем

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Цель настоящих лабораторных работ состоит в исследовании методов теории принятия решений для реализации задач выбора эффективных альтернатив в различных предметных областях. Задачами выполнения лабораторных работ являются: 1) углубленное изучение основных теоретических положений дисциплины; 2) получение практических навыков написания программ, реализующих методы теории принятия решений.

2. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Объектом исследования в лабораторных работах являются методы и алгоритмы решения задач теории принятия решений, реализации методов с использованием современных программных средств. Инструментом исследования методов и алгоритмов теории принятия решений является ЭВМ. Программным средством исследования является язык С++, для разработки программ используется среда Visual studio. Выполнение работы предусматривает создание проекта в среде Visual studio, разработку и отладку программы на языке С++ на основе методов и алгоритмов теории принятия решений, рассматриваемых в данных методических указаниях.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчеты по лабораторной работе оформляются каждым студентом индивидуально. Отчет должен включать: название лабораторной работы; цель работы; краткие теоретические сведения; постановку задачи; текст программы, реализующей задание; распечатку результатов выполнения программы.

4.ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Задание выбирается в соответствии с вариантом, назначаемым преподавателем.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. Цель работы: исследовать применение аппарата бинарных отношений при принятии решений по выбору альтернатив

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия бинарных отношений

Бинарные отношения – это отношения, которые могут выполняться или не выполняться между элементами одного множества. Если X — множество решений (альтернатив), тогда отношение R на множестве X - это подмножество $R \subseteq X * X$, т.е. R - множество пар (x_i, x_j), определённые на декартовом произведении $X * X$ (X^2), для которых выполняется определённое (заданное) свойство.

Обозначение для отношения R.

Если пара $(x_i, x_j) \in R$, то x_iRx_j (x_i находится в отношении R с x_j). Множество X – область задания отношений (отношения R).

Способы задания отношений:

1. Задание матрицей. Если множество X состоит из n элементов, то элементы $x_i \in X$ могут быть проидентифицированы индексами i такими, что $i = \overline{1, n}$; тогда для решений $x_i \in X$ может быть введена в рассмотрение матрица A размерности $n \times n$.

При этом если x_iRx_j, то, $a_{ij}=1$; если x_iRx_j не является верным (т.е. $(x_i, x_j) \notin R$), то $a_{ij}=0$, тогда общее правило определения элементов матрицы A следующее ($(a_{ij}) = A$):

$$a_{ij}(A)=\begin{cases}1, если\ x_iRx_j\ ;\\ 0, если\ x_iRx_j\ неверно;\end{cases}$$

при этом $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$.

Пример 1. Задание вида матрицы A (при $n = 4$).

$$A=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

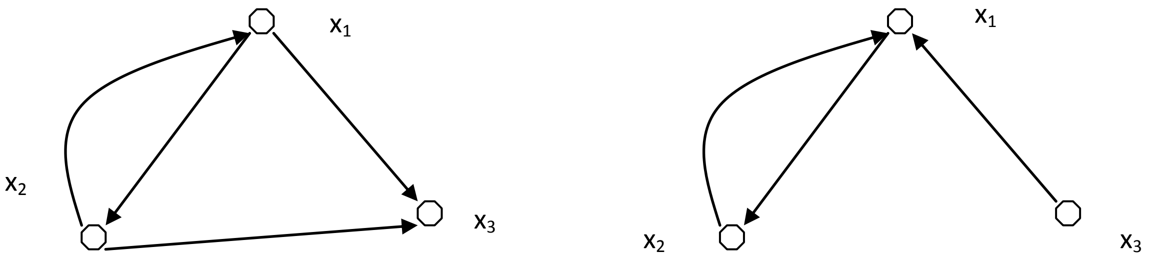
Заметим, что $a_{ii}=0$, (т.е. в данном (общем) рассматриваемом случае $(x_i, x_i) \notin R$).

2. Задание графом. Графом G называется пара $G(X, \Gamma)$, где X – конечное множество вершин, Γ (гамма) – конечное подмножество произведения X^2, множество дуг, соединяющих вершины; дугу, соединяющую вершину x_i с вершиной x_j, обозначим как (x_i, x_j).

Если множество решений (альтернатив) X однозначно соответствует множеству вершин графа X, тогда дуга (x_i, x_j) соединяет две вершины x_i и x_j в том случае, если выполнено отношение x_iRx_j.

Если задан граф G с n вершинами (где $|X| = n$), нумерация вершин G соответствует нумерации решений (альтернатив) из X, тогда на графе G (для элементов множества X) задаётся отношение R такое, что при $x_i R x_j$ на графе определяется дуга (формируется дуга) (x_i, x_j).

Пример 2. Задание графа отношения $G(R)$ (Рисунок 1).



а) б)

Рисунок 1 – Виды графов отношений $G(R)$

3. Задание сечением. Верхнее сечение множества (отношения) R обозначается как $R^+(x_i)$ (т.е. определяется для каждого элемента x_i множества X) и формируется в соответствии с выражением вида:

$$(x_i, x_j) \in R : R^+(x_j) = \{x_i \in X | x_i R x_j\}.$$

Если R – отношение предпочтения (доминирования), то для элемента x_j верхнее сечение $R^+(x_j)$ отношения R – это те решения x_i, которые предпочтительнее, чем рассматриваемое решение x_i. Нижнее сечение отношения R определяется аналогичным образом:

$$(x_i, x_j) : R^-(x_i) = \{x_j \in X | x_i R x_j\}$$

Таким образом, $R^+(x_j)$ – те элементы (решения) x_i, которые находятся с элементом x_j в отношении R; $R^-(x_i)$ – те элементы X (решения x_j), с которыми фиксированный элемент x_i находится в отношении R.

Отношения специального вида.

1. Пустое отношение. Отношение называется пустым Ø, если оно не выполняется ни для одной пары $(x_i, x_j) \in X^2$. Тогда матрица $A(\varnothing)$ такая, что $a_{ij}(\varnothing) = 0$ для всех i, j граф $G(\varnothing)$ не имеет дуг, сечения $R^+(x) = R^-(x) = \varnothing$.
2. Полное отношение. Отношение называется полным, если оно выполняется для всех пар $(x_i, x_j) \in X^2$. Полное отношение обозначается ***P***. Тогда $A(P)$ такая, что $a_{ij}(P) = 1$ для всех индексов i, j; граф $G(P)$ такой, что дуги соединяют любую пару вершин; $R^+(x) = R^-(x) = X \setminus \{x\}$ для любого $x \in X$.

Операции над отношениями.

1. Вложение отношений. Отношение R_1 вложено или включено в отношение R_2 (обозначается $R_2 \succ R_1$), если множество пар (x_i, x_j), для которых выполнено отношение R_1, содержится в множестве пар, для которых выполнено отношение R_2. Если $R_2 \succeq R_1$, то либо $R_2 = R_1$, либо $R_2 \succ R_1$.

2. Дополнение отношения R. Отношение $\overline{R}$ называется дополнением отношения R, если оно выполняется для тех пар (x_i, x_j), для которых не выполняется отношение R. Таким образом, если $(x_i, x_j) \notin R$, то $(x_i, x_j) \in \overline{R}$ (т.е. $\overline{R} = X \setminus R$). Тогда $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R)$, граф $G(\overline{R})$ содержит те дуги, которые отсутствуют в графе $G(R)$.

3. Обратное отношение. Обратным к отношению R называется отношение R^{-1}, определяемое условием:

$$x_i R^{-1} x_j <=> x_j R x_i .$$

Если R– отношение «меньше» на множестве действительных чисел, то обратное отношение R^{-1} – «больше». Для обратного отношения справедливо:

1) $a_{ij}(R^{-1}) = a_{ji}(R)$ при $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$;

2) граф $G(R^{-1})$ получается из графа $G(R)$ изменением направления дуг.

Свойства отношений

1. Рефлексивность. Отношение R называется рефлексивным, если $x_i R x_i$. Тогда:

а) в матрице $A(R)$ рефлексивного отношения R на главной диагонали заданы 1;

б) в графе $G(R)$ при каждой вершине имеется петля.

Соответственно, если отношение R антирефлексивно, то выражение вида $x_i R x_i$ не является верным, в этом случае диагональные элементы матрицы $A(R)$ равны 0.

2. Симметричность. Отношение R - симметрично, если из $x_i R x_j$ вытекает $x_j R x_i$. Тогда:

а) матрица $A(R)$ отношения R симметрична, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

б) каждая вершина x_i графа $G(R)$ имеет исходящую дугу (x_i, x_j) и входящую дугу (x_j, x_i).

3. Асимметричность. Для пары (x_i, x_j) выполняется либо $x_i R x_j$, либо $x_j R x_i$, т.е. если $x_i R x_j$ выполняется, то $x_j R x_i$ нет. В этом случае граф $G(R)$ не может содержать одновременно дуги (x_i, x_j) и (x_j, x_i) (содержит одну из этих дуг).

4. Антисимметричность. Для антисимметричного отношения R выражения $x_i R x_j$ и $x_j R x_i$ справедливы тогда, когда $x_i = x_j$. Для антисимметричного отношения R граф $G(R)$ не может одновременно содержать дуги (x_i, x_j) и (x_j, x_i) при $i \neq j$.

5. Транзитивность. Из xRz и zRy следует xRy.

6. Ацикличность. Из $x_i R x_j$, $x_j R x_k, \ldots$, $x_{k+l} R x_m$ следует, что $x_i \neq x_m$ (т.е. путь на графе не является циклом).

Виды отношений, используемых в ТПР

1. Отношение эквивалентности $\sim$ (вид отношения, связывающего пару решений (x_i, x_j) – $(x_i \sim x_j)$. Свойства отношения: рефлексивно $(x_i \sim x_i)$, симметрично $(x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_i)$, транзитивно $(x_i \sim x_j$, $x_j \sim x_k$, $x_i \sim x_k)$. Отношение эквивалентности $\sim$ определяет, что два решения x_i и x_j эквивалентны.

2. **Отношение нестрогого предпочтения** $x_i \succeq x_j$ определяет, что решение x_i не хуже, чем решение x_j (т.е. лучше или эквивалентно). Таким образом для пары решений выполняется либо $x_i \succ x_j$ либо $x_i \sim x_j$. Свойства отношения: рефлексивность ($x_i \succeq x_i$), антисимметричность (если $x_i \succeq x_j$ и $x_j \succeq x_i$, то $x_i \sim x_j$), транзитивность (если $x_i \succeq x_j$ и $x_j \succeq x_k$, то $x_i \succeq x_k$). Таким образом, отношение $\succeq$ позволяет реализовывать упорядоченность решений при возможной их эквивалентности. **Отношение нестрогого предпочтения индуцирует отношение нестрогого (частичного) порядка на множестве *X*.**

3. **Отношение строгого предпочтения** $x_i \succ x_j$ (т.е. решение x_i строго лучше, чем x_j). Свойства отношения: антирефлексивность ($x_i \succ x_j$ не является верным), антисимметричность (если верно $x_i > x_j$, то $x_j \succ x_i$ - не верно и наоборот). Отношение $\succ$ также соответствует отношению строгого предпочтения (доминирования). Т.е. при $x_i \succ x_j$ решение x_i строго предпочтительнее решения x_j, решение x_i доминирует решение x_j. Отношение строгого предпочтения индуцирует отношение строгого порядка на множестве решений X.

Тогда с использованием отношений $\succ$ и $\sim$ может быть определён порядок (предпочтительность, доминирование) решений.

Пример 3. Задание вида порядка решений.

$x_i \succ x_j \sim x_k \succ x_l$

2.2. Выбор эффективных решений, порождённый бинарными отношениями

Если X - множество решений, тогда в нём может быть определено подмножество $C(X)$ решений, называемых предпочтительными элементами (решениями) в X. Для определения в множестве X подмножества $C(X)$ в рассмотрение введена функция отображения C, составляющая множеству X его подмножество $C(X)$, т.е. $C: X \to C(X)$.

Функция выбора – это способ построения подмножества предпочтительных решений $C(X)$ на основе множества решений X. Если на множестве решений X определено (задано) бинарное отношение R (в частности, отношение строгого предпочтения $\succ$), то этому отношению может быть поставлена в соответствие функция выбора C. Тогда с использованием функции выбора на основе бинарного отношения R $(\succ)$ может быть определено множество предпочтительных решений.

В случае, если для каждой пары $(x_i, x_j) \in X^2$ выполнено (задано) отношение R (т.е. задано $x_i R x_j$, $x_i \succ x_j$), тогда при определении подмножества $C(X) \subseteq X$ могут быть использованы следующие рассуждения:

1) если $x_i \succ x_j$, то при определении выбора решения $x_i, x_j \in X$ из X считается, что $x_j \notin C(X)$;

2) если $x_i \succ x_j$, то x_i может быть включено в $C(X)$.

Если $\succ$ – отношение предпочтения ($x_i \succ x_j, x_i$ предпочтительнее x_j), $\bar{\succ}$ - отсутствие предпочтения ($x_i \bar{\succ} x_j$, x_i не предпочтительнее x_j), тогда из отношения $\succ$ $(x_i \succ x_j)$ вытекают два способа формирования множества $C(X)$.

Первый способ.

Множество $C^R(X)$ образуется теми решениями x_i, для которых условие предпочтительности ими других решений (решений x_j) не выполняется (т.е. $\forall x_j \in x$ не предпочтительнее решений $x_i \in C^R(X)$). Данная формулировка может быть представлена следующим выражением:

$$C^R(X) = \{x_i \in X \mid \forall x_j \in X\,,\ x_j \bar{\succ} x_i\}. \tag{1}$$

Тогда $C^R(X)$ - это те решения x_i, для которых все возможные решения $x_j \in X$ не предпочтительнее их.

Второй способ.

Решения x_i, формирующие $C_R(X)$, предпочтительнее любого решения $x_j \in X$.

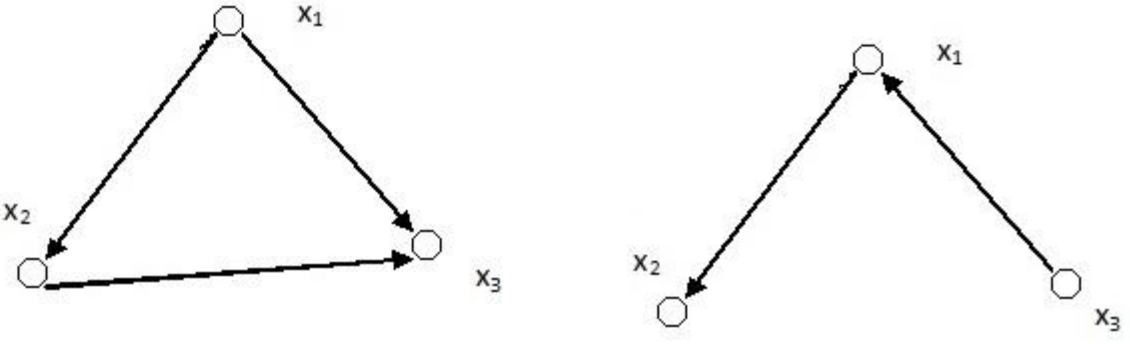
Данная формулировка формализована в виде выражения:

$$C_R(X) = \{x_i \in X \ \ \forall x_j \in X, x_i \succ x_j\}. \tag{2}$$

Условие для определения $C^R(X)$ называется условием блокировки, условие для определения $C_R(X)$ - условие предпочтения.

Таким образом, решения x_i, входящие в множество $C^R(X)$ или $C_R(X)$, определяемые выражениями (1), (2), являются наилучшими решениями, т.к. они непосредственно доминируют (являются предпочтительными) остальные решения x_j либо не доминируются ни одним из решений x_j.

Пример определения наилучших (предпочтительных) решений на основе графовой модели представления бинарных отношений приведён на Рисунке 2.



а) б)

Рисунок 2 – Вид графовой моделей для определения наилучших (предпочитаемых) решений

На Рис. 2а) решение x_1 является предпочитаемым так как оно домирирует оставшиеся решения x_2 и x_3. На Рис. 2б) решение x_3 является предпочитаемым, т.к. оно не диминируется ни одним из решений, входящих в множество X. Определение предпочтительных решений $x_i \in X$, доминирующих остальные решения множества X, на основе графовых моделей рассмотрено ниже.

Альтернативный вариант графа отношения строго предпочтения представлен на Рисунке 3.

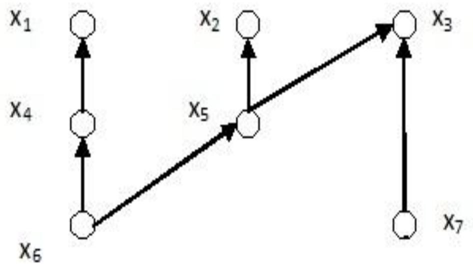


Рисунок 3 – Вид графовой модели отношения, для которой не выполняются условия для наилучший решений

На Рис.3 решения x_6 и x_7. являются не сравнимыми и они не доминируются ни одним другим решением из множества X.

В случае, если для множества X не может быть сформировано множество предпочитаемых решений, то для этого множества может быть сформировано множество максимальных элементов обозначенное как $Max_R X$, среди которых могут быть выбраны эффективные решения. Для включения элемента (решения) x_i множества $X(x_i \in X)$ в множество максимальных элементов $Max_R X$ (где R - отношение предпочтения/доминирования $\succ$) должно выполняться одно из следующих условий:

1) $\forall x_j : x_i \succ x_j$ (x_i предпочтительнее x_j для всех x_j), тогда если элемент x_j доминируем , то он не включается в $Max_R X$;

2) решения x_i и x_j эквивалентны ($x_i \sim x_j$) и решение $x_i \in Max_R X$;

3) решения x_i и x_j не сравнимы.

Реализация второго условия предполагает, что для пары элементов $(x_i, x_j) \in R$ между вершинами имеются две разнонаправленные стрелки. Реализация третьего условия предполагает, что решения x_i и x_j не связаны отношением предпочтения (т.е. не сравнимы), тогда между ними нет стрелки на графе $G(R)$;

Тогда $x_i \in X$ является максимальным элементом в модели $< X, R >$ если:

$$\forall x_j \in X : (x_i, x_j) \in R <=> (x_j, x_i) \in R .$$

Таким образом, основное понятие для принятия решений с использованием бинарного отношения предпочтения $\succ$ – это максимальный элемент и множество максимальных элементов $Max_R X$. Тогда формирование множества $Max_R X$ – это выделение наилучших элементов $x_i \in X$ по бинарному отношению $\succ$.

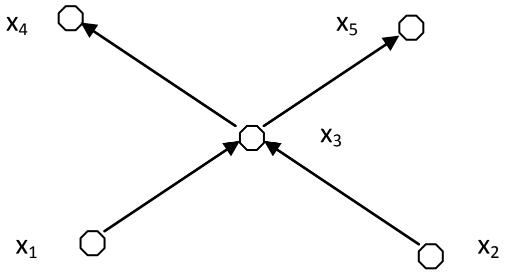
Определение. Множество $Max_R X$ называется внешне устойчивым, если для любого элемента $x_j \in X \setminus Max_R X$ найдется такой элемент $x_i \in Max_R X$, что $x_i R x_j$.

Если множество $Max_R X$ внешне устойчиво, то выбор эффективных решений x_i производится только в пределах $Max_R X$. Множество $Max_R X$ называется ядром множества X .

Тогда под задачей принятия решений с использованием бинарных отношений подразумевается задача выделения ядра $Max_R X$ из множества X . На Рис. 3 множество $Max_R X$ имеет вид: $Max_R X = \{x_6, x_7\}$, но при этом оно не является внешне устойчивым, т.е. в нем не могут быть выбраны эффективные решения.

Особенности построения алгоритма формирования множества $Max_R X$ далее прокомментированы на примерах.

Пример 4. Вид графа $G(R)$ и матрицы отношения (Рис. 4).



$$(a_{ij}) = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 4 – Вид графовой модели и матрицы отношений, для которых формируется множество $Max_R X$

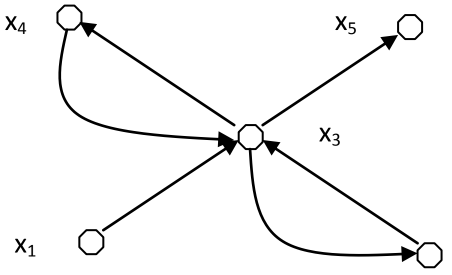
Матрица (a_{ij}) отображает непосредственное предпочтение решения x_i над решением x_j $(x_i R x_j)$.

Так как элементы x_i строго упорядочены с точки зрения отношения $\succ$, то $a_{ij} \neq a_{ji}$. Решения x_1 и x_2 доминируют все остальные решения (предпочтительнее всех остальных решений) поэтому в столбцах $j = 1, j = 2$ $a_{ij} = 0$ для всех i.

Для рассматриваемого примера синтаксис определения состава множества $Max_R X$ (в рассмотрение введен массив $MaxR$) имеет следующий вид:

```
Цикл i=1 до 5
  MaxR[i]=1;
Цикл j=1 до 5
  Цикл i=1 до 5
    Если a[i,j]=1 то
        MaxR[j]=0;
```

Пример 5. Вид графа $G(R)$ и матрицы парных сравнений для отношения $\succ$ (Рисунок 5).



$$(a_{ij}) = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 5 – Вид графовой модели и матрицы отношений, для которых формируется множество $Max_R X$

Предлагаемый код программы для формирования множества $Max_R X$ (вектора $MaxR$) следующий:

```
Цикл i=1 до 5
  MaxR[i]=1;
Цикл i=1 до 5
  Цикл j=1 до 5
    Если a[i,j]=1 то
      Если a[j,i]=0 то
          MaxR[j]=0;
      Если (a[j,i]=1)&( MaxR[i]=0) то
          MaxR[j]=0;
```

Подобный синтаксис определения элементов множества $Max_R X$ (массива Max_X) может быть применен и для вида графа $G(R)$ в Примере 6 (Рисунок 6).

Пример 6. Вид графа $G(R)$ бинарных отношений для множества решений X.

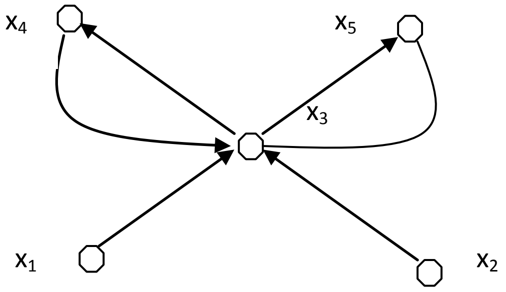


Рисунок 6 – Вид графовой модели отношений, для которой формируется множество $Max_R X$

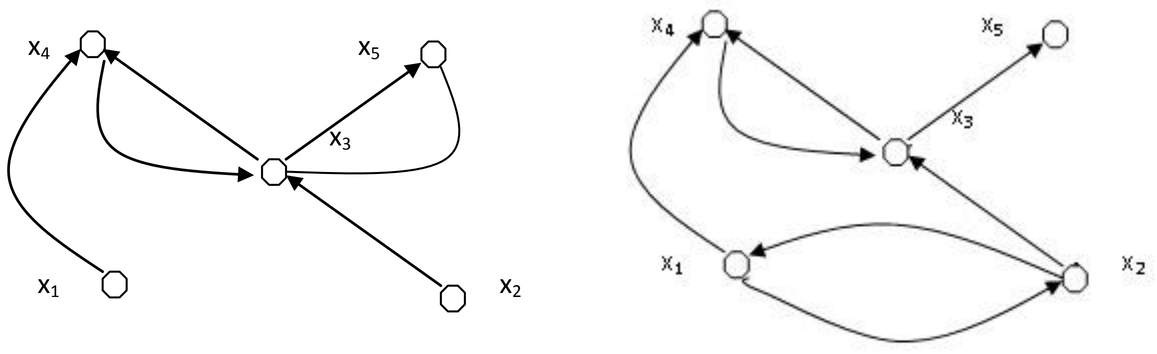
Понятно, что в результате должно быть получено множество $Max_R X$ в виде: $Max_R X = \{x_1 x_2\}$. Таким образом условиями включения/не включения элемента $x_i \in X$ в множество $Max_R X$ являются:

1) $x_i \succ x_j \Rightarrow x_j \notin Max_R X$;

2) если $\forall x_j : x_i \succ x_j \Rightarrow x_i \in Max_R X$;

3) если $x_i \bar{\succ} x_j$ $x_j \bar{\succ} x_i$ $\Rightarrow x_i \in Max_R X$ и $x_j \in Max_R X$ при условии, что ни x_i ни x_j не доминируются.

Задание. Выполнить проверку применимости приведенного программного кода для графов отношений следующего вида (Рис.7).



а) **б)**

Рисунок 7– Виды графовых моделей отношений, для которых формируются множества $Max_R X$

2.3.Определение порядка решений для графовых моделей бинарных отношений

Бинарные отношения между решениями могут быть представлены в виде графовой модели $G(R)$, дуги на графе соединяют вершины x_i и x_j если бинарное отношение R связывает решения x_i и x_j.

Задание. На графе $G(R)$, определяющем бинарные отношения и представленным на Рис.8, идентифицировать сравнимые и несравнимые решения.

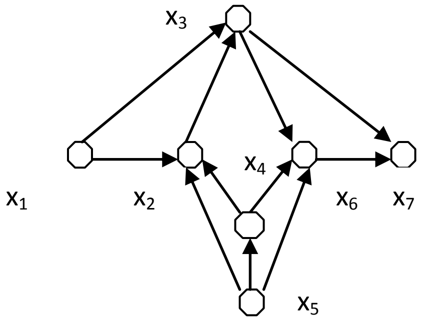


Рисунок 8 – Вид графовой модели $G(R)$ бинарных отношений

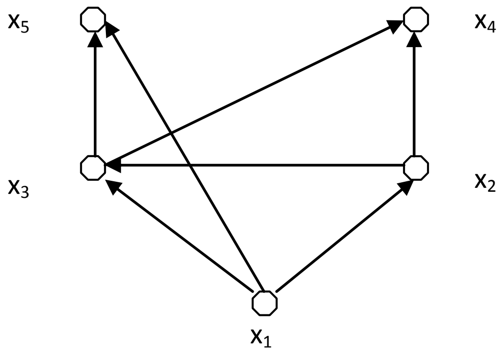
Если граф не содержит контуров, то все его вершины могут быть упорядочены таким образом, что направления всех дуг будут совпадать. В результате вершины графа $G(R)$ (решения x_i) могут быть распределены по ярусам. В вершины x_j яруса k входят дуги из вершин x_i $(k-1)$-го яруса если $x_i R x_j$, из вершин x_j k-го яруса вы ходят дуги в вершины x_h

$(k+1)$-го яруса в том случае, если $x_j R x_h$. Формирование распределения вершин x_i по ярусам для графовой модели $G(R)$ позволяет определить порядок этих вершин (порядок решений) и, соответственно, выделить лучшие решения. Для определения порядка (упорядочивания) решений (вершин графа $G(R)$) может быть реализован следующий алгоритм. На i-ой итерации алгоритм реализует выделение вершин источников (т.е.вершин. в которые не входят стрелки). Решения, соответствующие этим вершинам, ставятся на i-е место в последовательности решений Π, после чего выбранные вершины отбрасываются. Обобщенный порядок шагов алгоритма, реализующего определение последовательности решений с точки зрения бинарного отношения предпочтения, следующий:

1) $i=1$;
2) выбрать варианты–источники (вершины, решения). Если таковые отсутствуют – переход на шаг 7;
3) выбранные вершины отнести к i-ому ярусу;
4) $i=i+1$;
5) выбранные на втором шаге вершины – источники удаляются из графа (в дальнейшем не рассматриваются);
6) переход к шагу 2;
7) конец.

Пример реализации данного алгоритма ориентирован на работу с матрицей инциденций. Элемент матрицы $(a_{ij})=1$ в случае, если из вершины x_i в вершину x_j идет направленная дуги. Если вершина является источником, то отсутствуют дуги, идущие в неё. Тогда весь j-ый столбец, соответствующий вершине-источнику x_i, должен содержать нулевые элементы (т.к. данная вершина не зависит от других и в неё не ведут дуги).

Реализацию алгоритма построим на примере графа $G(R)$, представленного на Рис. 9, и соответствующей ему матрицы инциденций.



$$a_{ij} = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рисунок 9 – Вид графовой модели $G(R)$ бинарных отношений и соответствующая ей матрица отношений

В результате реализации приведенного фрагмента программы все решения будут упорядочены, при этом лучшее решение будет являться первым в массиве $MaxR$.

Аналогичный подход может быть реализован и при анализе вершин-приемников, т.е вершин, в которые идут стрелки. Тогда самыми первыми в упорядоченном массиве решений $MaxR$будут являться те вершины, из которых не выходят стрелки, а самым лучшим решением в их последовательности будет являться последнее решений.

//**Обозначение параметров, используемых при реализации алгоритма**

// K - количество элементов, добавленных в массив $Max[i]$

// $MaxR[i]$ - массив решений, упорядоченных с точки зрения убывания предпочтения

```
// счётчик – текущее количество решений, которые могут быть проанализированы

Счётчик =5;     К =0;  К1=1;

Пока счётчик >=0
    // определение исключаемых элементов
    Цикл $j = 1$ до 5
        Сумма =0;
        Цикл $i = 1$ до 5
            Сумма=Сумма + $a[i, j]$;
        Если Сумма =0 то
            $К = К + 1$;
            $MaxR[K] = j$;
    Цикл $q = K1$ до $К$
        // обнуление элементов в $a_{ij}$, зависящих только от решений,
        //  находящихся в массиве $MaxR$.
        Цикл $j = 1$ до 5
            $a[MaxR[q], j] = 0$;
        // исключение элементов, добавленных в $MaxR$
    Цикл $q = K1$ до $К$
        Цикл $i = 1$ до 5
            $a[j, MaxR[q]] = 1;$;

    K1=K+1;  Счетчик=5-К;
Конец цикла пока;
```

3. Программа выполнения работы

3.1. Для Варианта 1 задания на работу, связанного с формированием подмножества максимальных элементов $MaxR$множества X, необходимо по заданному варианту графа отношений предпочтения между решениями сформировать матрицу А отношения R (где R–отношение $\succ$). При этом убедиться, что первый элемент множества X является строго независящим от других решений.

3.2. Выполнить формирование множества $MaxR$вручную для заданного вида графа и соответствующего ему вида матрицы *А*.

3.3. Выполнить формирование программного кода соответствующей процедуры определения множества $MaxR$, при этом возможно руководствоваться ориентировочным видом процедуры определения этого множества, предложенным в теоретическом введении данной лабораторной работы.

3.4. Выполнить вывод результатов работы процедуры и сравнить полученные в процедуре результаты с результатами, сформированными аналитически.

3.5. Изменить исходные данные программы, используя графы отношений из примера 5 (Рис 7). Проверить получаемые с использованием процедуры результаты с аналитическим результатами, формируемыми для этих графов.

3.6. Варианты 2 и 3 задания на работу, связаны с построением упорядоченного множества решений, формируемого на основе задаваемого множества X и отношений между его элементами, представленными в виде графа. Для реализации задания необходимо на основе графа заданного вида сформировать матрицу А отношений между решениями x_i.

3.7. Для полученного вида матрицы А аналитически выполнить определение порядка решений– множества упорядоченных решений $MaxR$. Упорядочить рассматриваемые решения по ярусам. Определить количество элементов на первом (либо последнем) ярусе формируемой схемы, эти элементы (решения) являются эффективными.

3.8. В соответствии с предложенным возможным синтаксисом процедуры определения упорядоченного множества решений *MaxR* выполнить формирование программы, которая в соответствии с видом матрицы отношений *A* реализует определение множества *MaxR*. Предусмотреть при написании программы указание номера яруса схемы, на котором находятся соответствующие решения. Руководствуясь нумерацией ярусов определить эффективные решения (на первом либо последнем ярусах).

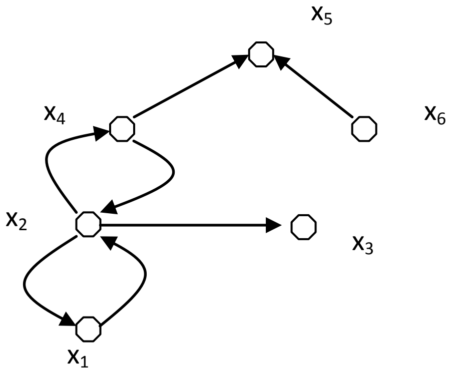
3.9. Выполнить сравнение полученных с использованием процедуры результатов с результатами, полученными аналитически.

3.10. Изменить в реализуемой программе исходные данные, изменив их на данные Рис.9. Выполнить аналитическое построение множества *MaxR*для этих данных и сравнить его с результатами, полученными с использованием процедуры.

3.11. В отчете представить графы отношений между решениями в соответствии с вариантом задания, виды матриц *A* отношений между решениями, аналитические виды решений поставленной задачи, распечатки результатов решения задачи с использованием разработанной программы.

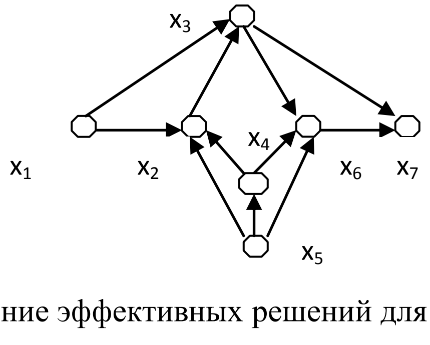
4. Варианты заданий

Вариант 1. Выполнит разработку программы, реализующей определение множества максимальных элементов *Max*., руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества *MaxR*. При разработке программы использовать следующий вид графа отношений между решениями множества *X*.



Применить разработанную процедуру к графам на Рис. 7.

Вариант 2. Выполнит разработку программы, реализующей определение упорядоченного множества решений *MaxR* для множества *X*, руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества *MaxR*с учетом рассмотрения вершин-источников на каждом шаге алгоритма. При формировании упорядоченного множества решений указывать номер яруса, на котором находятся решения. Определить эффективные решения. При разработке программы использовать следующий вид графа отношений между решениями множества *X*.



Реализовать определение эффективных решений для графа на Рис.9.

Вариант 3. Выполнит разработку программы, реализующей определение упорядоченного множества решений $MaxR$ для множества X, руководствуясь заданной формой графа отношений. При разработке программы использовать приведенные в теоретическом введении правила формирования множества $MaxR$с учетом рассмотрения вершин-приемников на каждом шаге алгоритма (задача, обратная рассматриваемой для Варианта 2). При формировании упорядоченного множества решений указывать номер яруса, на котором находятся решения. Определить эффективные решения. При разработке программы использовать вид графа отношений между решениями множества X, аналогичный варианту 2. Реализовать определение эффективных решений для графа на Рис.9.

5. Контрольные вопросы.

5.1. Что такое бинарные отношения и что они характеризуют?

5.2. Каковы способы задания бинарных отношений?

5.3. Каковы свойства бинарных отношений и операции над ними?

5.4. Что такое функция выбора для предпочитаемых элементов и каким образом выбор предпочитаемых элементов формализуется?

5.5. Что такое условия блокировки и предпочтения и как они формализуются?

5.6. Что такое наилучшие элементы множества решений и каким образом реализуется из определение?

5.7. Что такое подмножество максимальных элементов $Max_R X$ в множестве решений X и каковы условия принадлежности решения этому множеству?

5.8. Что такое внешняя устойчивость множества $Max_R X$ и как она определяется (каковы условия внешней устойчивости множества $Max_R X$)?

5.9. Какой вид может иметь примерный синтаксис программы определения элементов в $Max_R X$ при выполнении условия эквивалентности (несравнимости) решений?

5.10. Какие условия для вершин графа $G(R)$ должны выполняться, чтобы решения могли быть упорядочены?

5.11. Что из себя представляет алгоритм упорядочивания решений при рассмотрении вершин-источников на графе $G(R)$?

5.12. Что из себя представляет алгоритм упорядочивания решений при рассмотрении вершин-приемников на графе $G(R)$?

5.13. Какой вид имеет примерный синтаксис программы для упорядочивания решений при рассмотрении вершин-источников на графе $G(R)$?

5.14. Какой вид имеет примерный синтаксис программы для упорядочивания решений при рассмотрении вершин-приемников на графе $G(R)$?

5.15. Каким образом будут сформированы (какой вид имеют) множества $Max_R X$ для графов отношений $G(R)$ на Рис.7?

5.15. Каким образом будут сформированы (какой вид имеют) упорядоченное множество решений для множества X и для графа отношений $G(R)$ на Рис.9?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. Цель работы: исследовать применение аппарата теории полезности при принятии решений по выбору альтернатив

2. Теоретическое введение

Общие понятия теории полезности и связь полезности с бинарными отношениями

В основу использования теории полезности при принятии решений при полной определенности положено утверждение о том, что каждой альтернативе (решению x_i) в множестве возможных решений X может быть поставлено в соответствие некоторое значение (значение функции полезности, соответствующее альтернативе). При этом для любых двух альтернатив (решений) если одна из них предпочтительнее других (т.е. $x_i \succ x_j$), тогда полезность одной альтернативы больше полезности другой альтернативы. Обозначим через $U(x_i)$ функцию полезности для решений множества X. В рассматриваемом случае предполагается, что множество альтернатив X является счетным и конечным.

Таким образом, использование функции полезности предполагает определение числовых значений, характеризующих решения, связанные отношением предпочтения. Т.е. значения функции полезности $U(x_i)$ и $U(x_j)$ вытекают из отношения предпочтения между альтернативами x_i и x_j на множестве альтернатив X.

Если решение x_i характеризуется одним параметром, тогда сравнение решений выполняется с использованием непосредственно отношения предпочтения, в результате для каждого x_i формируется единственное значение функции $U(x_i)$. Тогда предпочтение для решений (отношение предпочтения $\succ$ для пары решений (x_i, x_j)) может быть охарактеризовано функцией полезности (предпочтение альтернатив может быть охарактеризовано соотношением значений функции полезности $U(x_i)$). В этом случае эффективным решением x_i^* (эффективной альтернативой $x_i^* \in X$) является та альтернатива, для которой выполняется условие вида:

$$x_i^* = arg \max_{1 \le i \le N} U(x_i).$$

В случае, когда альтернативы (решения) x_i могут быть рассмотрены как системы нескольких признаков (факторов, свойств, критериев), тогда общие предпочтения для альтернатив (решений) могут быть представлены как системы предпочтений (как совокупность предпочтений) по различным факторам. Таким образом, формируются предпочтения для решений по каждому фактору (признаку, критерию), выраженные в виде значений функции полезности $U_j(x_i)$, где j - индекс критерия (фактора), по которому формируются предпочтения для решений x_i ($j - я$ функция полезности). Затем на основе $U_j(x_i)$ формируется система предпочтений по всем факторам (аддитивная функция полезности). Использование аддитивной функции полезности для сравнения альтернатив $x_i \in X$ предполагает, что полезность целого представлена в виде суммы полезностей частей (определенных отдельных факторов).

Таким образом, в теории полезности рассматривается использование функции полезности для идентификации эффективных среди решений, каждое из которых характеризуется единственным параметром (фактором, критерием), а также для идентификации эффективных решений, характеризующихся группой (совокупностью) параметров (факторов, критериев). При этом для упорядочения решений используется аддитивная функция полезности.

При определении функции полезности $U(x_i)$ для альтернатив (решений) x_i множества X должны быть решены следующие вопросы:

1) существование функций полезности $U(x)$ на множестве альтернатив, сохраняющих (функции полезности сохраняют) упорядочение альтернатив (решений), основанное на бинарном отношении строгого предпочтения;

2) способы определения значений функции полезности;

3) для аддитивной функции полезности должны быть введены условия для того, чтобы функции полезности для нескольких факторов (аддитивные функции полезности), сохраняющие упорядочение по бинарному отношению предпочтения, могут быть представлены в виде комбинаций функций полезности отдельных факторов; в результате должно быть определено, каким условиям должны удовлетворять предпочтения для того, чтобы функция полезности, сохраняя упорядочивание альтернатив, была представлена в виде комбинации (суммы) функций полезности отдельных факторов.

Таким образом, функция полезности – это некоторая числовая характеристика решения, являющаяся вещественно значной, значения которой определяются для каждого решения x_i в соответствии с бинарным отношением строгого предпочтения $\succ$ (т.е. из $x_i \succ x_j$). При этом функция полезности сохраняет порядок решений, такой же, какой был сформирован бинарным отношением предпочтения $\succ$ (т.е. упорядочивающая альтернативы (решения) из множества X таким же образом, как и бинарные отношения – бинарное отношение предпочтения $\succ$).

Перед тем, как сформулировать условия, выполнение которых позволяет устанавливать связь между альтернативами $x_i \in X$ $(i=\overline{1,n})$ и соответствующими им значениями функции полезности, необходимо напомнить основные сведения, касающиеся отношения безразличия ~ (эквивалентности). В первую очередь отношение ~ является отношением безразличия (в общем случае) и лишь затем являются отношением эквивалентности (в частном случае). В общем случае отношение безразличия ~ определятся как отсутствие предпочтений между двумя решениями x_i и x_j, т.е.: $x_i \sim x_j <=> (x_i \overline{\succ} x_j$ и $x_j \overline{\succ} x_i)$.

Отношение безразличия может быть определено в соответствии со следующими предпосылками:

1) лицо, принимающее решения (ЛПР), рассматривая решения x_i и x_j, не видит между ними разницы, т.е. решения являются эквивалентными, т.е. $x_i \sim x_j$ (где ~ – отношение безразличия (эквивалентности));

2) ЛПР не может определить, какое из решений x_i и x_j является для него более предпочтительным (т.е. он не уверен в выборе решения x_i или x_j в качестве наиболее предпочтительного), в этом случае отношение ~ – это отношение безразличия, а сами решения x_i и x_j являются несравнимыми (в смысле отношения строгого предпочтения $\succ$,т.е. $x_i \sim x_j$).

В общем случае отношение безразличия ~ может не быть транзитивным, т.е. из несравнимости x_i с x_j и x_j с x_k не следует несравнимость x_i с x_k. Тогда из $x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_k \neq> x_i \sim x_k$. Однако, если рассматривать отношение ~ как отношение эквивалентности, то свойство транзитивности отношений должно выполняться. Действительно, если $x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_k$ (где ~ – отношение эквивалентности), то $x_i \sim x_k$. Т.к. в дальнейшем отношение ~ для решений x_i и x_j рассматривается как эквивалентность, то предполагается его транзитивность. Понятно, что из отношений $\succ$ и ~ вытекает отношение нестрогого предпочтения $\succeq$ (т.е. $x_i \succeq x_j$ – решение x_i не хуже решения x_j).

После уточнения рассматриваемых отношений $\succ$, $\sim$ и $\succeq$ могут быть сформированы условия существования функции полезности $U(x_i)$ для решений x_i множества X.

Условия, определяющие возможность сопоставления альтернативам x_i и x_j соответствующих им значений $U(x_i)$ и $U(x_j)$, рассматриваемых как значения функции полезности, формируются следующим образом:

1) конечность и счетность множества альтернатив X; множество X является счетным, если количество n элементов в нем является задаваемым и ограниченным;

2) отношение предпочтения $\succ$ позволяет реализовать слабое упорядочивание элементов x_i множества X; если наряду с отношением $\succ$, определенном на множестве X, на этом же множестве определено отношение эквивалентности $\sim$, то отношение $\succ$ позволяет на множестве X определить слабый порядок элементов x_i этого множества (решений x_i) с учетом возможной эквивалентности между решениями $x_i, x_j \in X$.

В случае выполнения введенных выше условий элементам x_i, x_j множества X (решениям $x_i, x_j \in X$) могут быть поставлены в соответствие числа $U(x_i)$ и $U(x_j)$ такие, что:

$$x_i \succ x_j <=> U(x_i) > U(x_j),$$

где числа $U(x_i)$, $U(x_j)$ могут быть проинтерпретированы как значения дискретной функции полезности $U(x)$ (функции полезности, характеризующие дискретные решения счетного множества X).

Для введенного в рассмотрение понятия слабого упорядочивания элементов $x_i \in X$ (решений $x_i \in X$) может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема 1. Предположим, что отношение $\succ$ является слабым упорядочением на X, т.е. ассиметрично и отрицательно транзитивно, тогда:

а) для любых пар решений $x_i, x_j \in X$ выполняется одно из трех соотношений:

$$x_i \succ x_j, x_j \succ x_i, x_i \sim x_j;$$

б) отношение $\succ$ является транзитивным по полезности ;

в) отношение ~ является эквивалентностью (т.е. рефлексивно, симметрично, транзитивно);

г) $(x_i \succ x_j$ и $x_k \sim x_j) => x_i \succ x_k$ либо

$(x_i \succ x_j$ и $x_i \sim x_k) => x_k \succ x_j$;

$(x_i \sim x_j$ и $x_k \succ x_j) => x_k \succ x_i$ либо

$(x_i \sim x_k$ и $x_k \succ x_j) => x_i \succ x_j$;

д) отношение $\succeq$ (вытекающее из отношений $\succ$ и ~) транзитивно и связно (т.е. с помощью отношения $\succeq$ могут быть связаны любые два решения $x_i, x_j \in X$).

Так как предварительно было задано, что на множестве решений X определены отношения $\succ$ и $\sim$ (и, соответственно, может быть определено отношение $\succeq$), т.е. выполняются пункты а)-е) сформулированной теоремы, тогда отношение $\succ$ позволяет формировать слабый порядок (т.е. выполнение пунктов а)-е) свидетельствует об определении с помощью отношения $\succ$ слабого порядка между решениями $x_i, x_j \in X$).

В дополнение к свойствам отношения $\succ$, формирующего слабый порядок на множестве решений X, рассмотренным (сформулированным) в **Теореме 1**, могут быть введены в рассмотрение следующие аксиомы полезности (аксиомы теории полезности решений):

1) если $\succ$ – отношение предпочтения (ассиметричное), ~ – отношение безразличия, то для любых x_i, x_j имеет место одно из событий: $x_i \succ x_j, x_j \succ x_i, x_i \sim x_j$;

2) $x_i \sim x_i$, т.е. исход не отличим от самого себя;

3) $x_i \sim x_j, x_j \sim x_k => x_i \sim x_k$ – транзитивность отношения безразличия (следовательно, отношение безразличия являются отношением эквивалентности);

4) $x_i \succ x_j, x_j \succ x_k \Rightarrow x_i \succ x_k$;

5) $x_i \succ x_j, x_j \sim x_k \Rightarrow x_i \succ x_k$; $x_i \sim x_j, x_j \succ x_k \Rightarrow x_i \succ x_k$;

Если заданные в аксиомах полезности условия выполняются, то в рассмотрение может быть введена функция полезности, характеризующая предпочтительность решений. В этом случае для пары альтернатив $(x_i, x_j) \in X^2$ могут быть определены значения $U(x_i)$ и $U(x_j)$, которые интерпретируются как значения функции полезности для рассматриваемых альтернатив и при этом $x_i \succ x_j \Leftrightarrow U(x_i) > U(x_j)$, что также может быть сформулировано для отношения $\succeq$ в виде: $x_i \succeq x_j \Leftrightarrow U(x_i) \geq U(x_j)$.

Так как выполняются условия, позволяющие интерпретировать отношение $\succ$ (при определенном на множестве X отношение эквивалентности ~) как слабый порядок и определяющие возможность сопоставления решениям x_i значений $U(x_i)$, вытекающие из бинарных отношений x_i с другими решениями x_j, тогда должен быть определен способ формирования значений $U(x_i)$ рассматриваемой дискретной функции полезности $U(x)$.

Таким образом, если на множестве X определены отношения $\succ$, $\succeq$ и ~, само множество X является счетным и конечным, тогда может быть определена функция $U: X \to R$ (функция полезности, представляющая отношения $\succ$, $\succeq$ и ~) и для пары $(x_i, x_j) \in X^2$ решений из множества X выражение $x_i \succ x_j$ $(x_i \succeq x_j)$ выполняются в том случае, когда $U(x_i) > U(x_j)$ $(U(x_i) \geq U(x_j))$. Для формулировки способа определения значения функции полезности $U(x_i)$ для некоторого x_i предполагаем, что элементы множества X связаны отношением нестрогого предпочтения ($\succeq$). В этом случае алгоритм формирования значения $U(x_i)$ предполагает выполнение рассматриваемых ниже шагов.

Пусть значения функции полезности $U(x_i)$ присвоены n альтернативам. Таким образом, является сформированным множество X^n альтернатив (в виде $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$), для которых уже определены значения функции полезности $U(x_i)$. Тогда на текущем шаге алгоритма рассматривается альтернатива x_{n+1}, для которой должно быть определено значение $U(x_{n+1})$. Для альтернативы (решения) x_{n+1} и множества X^n могут быть сформированы множества X^n_+ и X^n_- следующим образом:

$$X^n_+ = \{x_i \in X^n \mid x_i \succeq x_{n+1}\}$$

$$X^n_- = \{x_i \in X^n \mid x_{n+1} \succeq x_i\}$$

Таким образом, множество X^n_+ представляет собой решения x_i, которые являются не худшими, чем рассматриваемое решение x_{n+1} (т.е. связаны с решением x_{n+1} следующим образом: $x_i \succeq x_{n+1}$). Множество X^n_- представляет собой решения x_i, для которых решение x_{n+1} является не худшим (предпочтительнее им эквивалентно – в виде $x_{n+1} \succeq x_i$).

Через x_i' обозначим такой элемент множества X^n_+, что $x_l \succeq x_i'$ для всех $x_l \in X^n_+$. Т.е. элемент (решение) x_i' представляет собой “наименьший” элемент множества X^n_+. Через x_i'' обозначим такой элемент множества X^n_-, что $x_i'' \succeq x_l$ для всех $x_l \in X^n$. Таким образом, элемент (решение) x_i'' – это "наибольший" элемент множества X^n_-.

Т.е. элемент (решение) x_i' – это то решение, у которого $U(x_i')$ является минимальным среди всех значений $U(x_l)$ (при $x_l \in X^n_+$), решение x_i'' – это то решение, у которого значение $U(x_i')$ является наибольшим среди значений $U(x_l)$ элементов x_l множества X^n_-. Если элементов x_i' и x_i'' несколько (в каждом из множеств X^n_+, X^n_-), то выбирается любой из них.

Выполняется анализ сформированных множеств X^n_+ и X^n_-. Возможны следующие варианты состава этих множеств:

1. $X_+^n = \varnothing$ (тогда $X_-^n \neq \varnothing$);
2. $X_-^n = \varnothing$ (тогда $X_+^n \neq \varnothing$);
3. $X_+^n \neq \varnothing$, $X_-^n \neq \varnothing$; $X_+^n \cap X_-^n = \varnothing$;
4. $X_+^n \neq \varnothing$, $X_-^n \neq \varnothing$; $X_+^n \cap X_-^n \neq \varnothing$.

В случае 1 значение $U(x_{n+1}) = U(x_i') + 1$; во втором случае $U(x_{n+1}) = U(x_i') - 1$, в третьем случае $U(x_{n+1}) = [U(x_i') + U(x_i'')]/2$; в четвертом случае принимается, что $U(x_{n+1}) = U(x_i)$, где x_i - любой (произвольный) элемент множества $X_+^n \cap X_-^n$ (элементы множества $X_+^n \cap X_-^n$ имеют одинаковую полезность).

Для реализации приведенного (изложенного) алгоритма должны быть заданы начальные условия в следующем виде: $X^1 = \{x_1\}$ и $U(x_1) = 0$.

Реализация приведенного алгоритма позволяет выполнить следующее свойство функции полезности: $x_i \succeq x_j <=> U(x_i) \geq U(x_j)$, и в итоге определить альтернативу, для которой $x_i^* = arg \max_{1 \leq i \leq N} U(x_i)$. Таким образом, от предпочтений (отношений $\succ$ или $\succeq$), связывающих пары решений (x_i, x_j), выполняется переход к числовым значениям $U(x_i)$, $U(x_j)$, характеризующим рассматриваемые альтернативы, и определение (в завершении) эффективного решения x_i^*. Рассматриваемый выше подход предполагает, что возможная эквивалентность решений x_i и x_j ($x_i \sim x_j$) учитываются непосредственно в отношении «не хуже» ($\succeq$) и на основе этого определяется значение функции полезности $U(x_i)$ и $U(x_j)$ (при этом $U(x_i) = U(x_j)$).

Пример. Определение значений функции полезности с использованием (формированием) множеств X_+^n и X_-^n.

Исходный вид матрицы отношений $\succeq$ ($x_i \succeq x_j$) следующий:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Прокомментируем вычисление значений функции полезности $U(x_i)$ по шагам.

1) Решение x_1, $U(x_1) = 0$;

2) Решение x_2:

$X_+^1 = \varnothing$; $X_-^1 = \{x_1\}$; $U(x_2) = 1$;

3) Решение x_3:

$X_+^2 = \{x_2\}$; $X_-^2 = \varnothing$; $U(x_3) = 0$;

4) Решение x_4:

$X_+^3 = \{x_3\}$; $X_-^3 = \{x_2\}$; $U(x_4) = (U(x_3) + U(x_2))/2 = 1/2$;

5) Решение x_5:

$X_+^4 = \{x_4\}$; $X_-^4 = \{x_2\}$; $U(x_5) = (U(x_4) + U(x_2))/2 = 3/4$;

6) Решение x_6:

$X_{+}^{5} = \{ x_4 \}$; $X_{-}^{5} = \{ x_1, x_4 \}$; $X_{+}^{5} \cap X_{-}^{5} = \{ x_4 \}$; $U(x_6) = U(x_4) = 1/2$;

7) Решение x_7:

$X_{+}^{6} = \{ x_3 \}$; $X_{-}^{6} = \{ x_3, x_6 \}$; $X_{+}^{6} \cap X_{-}^{6} = \{ x_3 \}$; $U(x_7) = U(x_3) = 0$.

Таким образом, эффективным решение является решение x_2 .

Альтернативный подход к определению значений функции полезности $U(x)$ для различных решений $x_i \in X$ при условии наличия в множестве X эквивалентных решений $x_j (x_i \sim x_j)$ связан с определением классов эквивалентности, множества классов эквивалентности и последующего определения значений функции полезности для классов эквивалентности в их множестве. Определение значений функции полезности для каждого класса эквивалентности позволяет упорядочить эти классы, выделить среди них эффективные и, соответственно, определить эффективные решения, принадлежащие этим классам.

Ход изложения метода определения значений функции полезности возможно прокомментировать с использованием примера. Предположим, что каждому решению $x_i \in X$ соответствует хотя бы одно (т.е. возможно и более) эквивалентное решение. Тогда должны быть определены два отношения – отношение строгого предпочтения $\succ$ (его матрицу обозначим как A_1) и отношение эквивалентности ~ (его матрицу обозначим как A_2). Для вводимого в рассмотрение примера вид матриц отношений A_1 (для $\succ$) и A_2(для ~) следующий:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} ; \quad A_2 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} .$$

Эквивалентность решений на множестве X определяет его разбиение на непересекающиеся непустые классы элементов (непустые непересекающиеся подмножества), два элемента (или более) принадлежат одному из классов в том случае, когда они эквивалентны. Формируемые на основе отношения ~ классы элементов (решений $x_i \in X$) называются классами эквивалентности.

Через $R(x_i)$ обозначим множество решений, эквивалентных данному решению x_i . Тогда определение $R(x_i)$ будет выполнено следующим образом:

$$R(x_i) = \{ x_j \mid x_j \in X \text{ и } x_j R\, x_i \},$$

где R - отношение эквивалентности ~.

Для рассматриваемого примера множества X вида: $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \}$ и заданных видов матриц A_1 и A_2 множества эквивалентных элементов имеют вид:

$R(x_1) = \{ x_1, x_3, x_6 \}$;

$R(x_2) = \{ x_2, x_5 \}$;

$R(x_3) = \{ x_1, x_3, x_6 \}$;

$R(x_4) = \{ x_4, x_7 \}$;

$R(x_5) = \{ x_2, x_5 \}$;

$R(x_6) = \{ x_1, x_3, x_6 \}$;

$R(x_7) = \{ x_4, x_7 \}$.

Видно, что $R(x_i) = R(x_j)$ в том случае, если $x_i \sim x_j$. Тогда любые два множества $R(x_i)$ и $R(x_j)$ либо совпадают, либо не пересекаются. На основе множеств $R(x_i)$ и $R(x_j)$ формируются классы эквивалентности. Реализация рассматриваемого алгоритма предполагает упорядочивание классов эквивалентности.

Для идентификации различных классов эквивалентности (не пересекающихся классов эквивалентности) введен в рассмотрение параметр k_l, где l - номер класса (в рассматриваемом случае $l = \overline{1,3}$). Если отношение R есть отношение эквивалентности, определенное на множестве X, то множество классов эквивалентности $R(x_i)$, порождаемых отношением R обозначено как $X/\sim$ (таким образом $X/\sim$ – множество классов эквивалентности множества X). В результате после выполненных преобразований получим множество $X/\sim$ в виде:

$k_1 \rightarrow \{ x_1, x_3, x_6 \};$

$k_2 \rightarrow \{ x_2, x_5 \};$

$k_3 \rightarrow \{ x_4, x_7 \}.$

Для реализации дальнейших рассуждений в рассмотрение введено отношение R', обозначенное как $\succ'$. Отношение $\succ'$ определяет строгое предпочтение класса эквивалентности, обозначенного как k_i (множество эквивалентных решений, соответствующего параметру k_i), над классом эквивалентности, обозначенным как k_j (над множеством эквивалентных решений, соответствующих параметру k_j). Тогда обозначение $k_i \succ' k_j$ соответствует строгому предпочтению класса эквивалентности, обозначенного как k_i, над классом эквивалентности, обозначенным как k_j.

В соответствии с введенным обозначением отношения строго предпочтения $\succ'$ для классов эквивалентности, сформированная выше теорема 1 о свойствах отношения $\succ$, реализующего (при определенном на множестве X отношении эквивалентности $\sim$) слабое упорядочивание альтернатив x_i, может быть дополнена еще одним пунктом.

Теорема 1 (Продолжение). Если отношение $\succ$ является слабым упорядочением на X (отношение ассиметрично и отрицательно транзитивно), тогда если на множестве $X/\sim$ (множестве классов эквивалентности на X в смысле отношения $\sim$) определено отношение $\succ'$, то:

$$k_h \succ' k_p \Leftrightarrow \exists x_i \in k_h \text{ и } x_j \in k_p \text{ такие, что } x_i \succ x_j .$$

В соответствии с введенной в рассмотрение формулировкой **Теоремы 1** из отношения предпочтения для пары решений (x_i, x_j) (т.е. $x_i \succ x_j$) следует строгое предпочтение $\succ'$ между классами эквивалентности решений k_h и k_p (т.е. $k_h \succ' k_p$), при этом отношение $\succ'$ является строгим упорядочиванием. С другой стороны, если реализуется упорядочивание классов эквивалентности решений, то это обеспечивает и упорядочивание решений в множестве X.

Таким образом, введение в рассмотрение классов эквивалентности, обозначенных как k_l, и отношения строгого предпочтения $\succ'$ для классов эквивалентности позволяет устранить свойство нестрогого (частичного) упорядочения, вытекающее из отношений $\succ$ (при определении на множестве X отношения эквивалентности), и перейти к строгому упорядочению классов эквивалентности, обеспечиваемому отношением $\succ'$ (т.е. эквивалентность классов не рассматривается, она исключена). Тогда переход от слабой упорядоченности решений, обеспечиваемой отношением $\succ$ совместно с отношением $\sim$, к строгому порядку, обеспечиваемому отношением $\succ'$, реализуется путем формирования классов эквивалентности решений (множества $X/\sim$) и исключении отношения $\sim$ при рассмотрении этих классов (т.е. классы не могут быть эквивалентными).

Свойства введенного в рассмотрение отношения $\succ'$:

1) асимметрия: если $k_l \succ' k_h$ и $k_h \succ' k_l$, то найдутся такие x_i, x_j и x'_i, x'_j, что $x_i \succ x_j$ и $x'_j \succ x'_i$, при этом $x_i \sim x'_i$ и $x_j \sim x'_j$;

2) отрицательная транзитивность: если $k_l \succ' k_h$ при $x_i \in k_l$ и $x_j \in k_h$, тогда $x_i \succ x_j$; в этом случае для любого $k_p \in X/\sim$ и любого $x_s \in k_p$ следует, что либо $x_i \succ x_s$ (и в этом случае $k_l \succ' k_p$) либо $x_s \succ x_j$ (в этом случае $k_p \succ' k_h$).

Возможность упорядочения классов эквивалентности, идентифицируемых параметрам k_l, путем определения значений функции полезности для каждого класса, обосновывается следующей теоремой.

Теорема 2. Если отношение $\succ$ на X реализует слабое упорядочивание решений (при условии наличия для множества X отношения эквивалентности), а множество $X/\sim$ является счетным, то существует функция U на X такая, что $x_i \succ x_j <=> U(x_i) > U(x_j)$ для $x_i, x_j \in X$.

В соответствии с формулировками теорем 1 и 2: упорядочивание элементов x_i и x_j множества X вытекает из упорядочения классов эквивалентности, идентифицируемых параметром k_l; в случае счетности множества $X/\sim$ каждому классу эквивалентности может быть поставлено в соответствие значение функции полезности $U(k_l)$, которое в дальнейшем может быть отождествлено со значением функции полезности элементов x_i, x_j, входящих в этот класс, т.е. $U(k_l) = U(x_i) = U(x_j)$ при $x_i, x_j \in R(x_i)$ либо $x_i, x_j \in R(x_j)$ (т.к. классы эквивалентности $R(x_i)$ и $R(x_j)$ в случае $x_i \sim x_j$ совпадают (т.е. $R(x_i) = R(x_j)$ при $x_i \sim x_j$)).

Исходя из формулировок теорем 1 и 2 должны быть определены значения функции полезности для классов эквивалентности множества $X/\sim$ (идентифицируемых параметром k_l), т.е. значения $U(k_l)$. Затем значение функции полезности класса k_l должно быть сопоставлено функции полезности отдельных элементов (решений) x_i, образующих этот класс эквивалентности. Таким образом, если $x_i \in R(x_i)$, то $U(x_i) = U(k_l)$, где k_l – идентификатор (индекс, номер) уникального класса эквивалентности, соответствующего $R(x_i)$. При формировании значений $U(k_l)$ в рассматриваемом ниже алгоритме используется перечисление множества рациональных чисел в виде: $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Напомним, что рациональными являются числа вида:

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\ldots;$$

$$\frac{2}{1};\frac{2}{2};\frac{2}{3};\frac{2}{4};\frac{2}{5};\frac{2}{6};\frac{2}{7};\ldots;$$

$$\frac{3}{1};\frac{3}{2};\frac{3}{3};\frac{3}{4};\frac{3}{5};\frac{3}{6};\frac{3}{7};\ldots;$$

Таким образом, в рассмотрение введены значения рациональных чисел, которые в дальнейшем могут быть использованы при инициализации значений функции полезности $U(k_l)$ классов эквивалентности k_l. Тогда через $k_1, k_2, k_3, \ldots$ обозначены элементы множества $X/\sim$, через $r_1, r_2, r_3, \ldots$ – некоторое перечисление множества рациональных чисел (некоторая упорядоченная цепочка рациональных чисел). В качестве начального условия для реализации алгоритма определения функции полезности U для элементов $X/\sim$ примем, что $U(k_1) = 0$. Алгоритм формирования значений функции полезности для оставшихся элементов множества $X/\sim$ базируется на анализе свойств отношения $\succ'$ и имеет следующий порядок шагов:

1) рассматривается некоторый «текущий» класс эквивалентности k_m в предположении, что всем «предшествующим» $(m\text{-}1)$-ому классу эквивалентности присвоены значения $U(k_1),\ldots,U(k_{m\ 1})$.

2) для рассматриваемого k_m-го класса эквивалентности возможна одна из трех рассматриваемых ниже ситуаций:

а) $k_m \succ' k_h$ для всех $h < m$ (понятно, что отношение $k_m \succ' k_h$ вытекает из отношения $x_i \succ x_j$, где $x_i \in R_{k_m}(x), x_j \in R_{k_h}(x)$), в этом случае $U(k_m) = m$;

б) $k_h \succ' k_m$ для всех $h < m$ (аналогично отношение $k_h \succ' k_m$ вытекает из отношения $x_j \succ x_i$, где $x_j \in R_{k_h}(x),\ x_i \in R_{k_m}(x)$); в этом случае $U(k_m) = -m$;

в) $k_h \succ' k_m \succ' k_l$ для некоторых h и $l < m$, и ни для какого $s < m$ и отличного от h и l не выполняется $k_h \succ' k_s \succ' k_l$, тогда значение $U(k_m)$ принимается равным первому в перечислении $r_1, r_2, r_3,...$ числу r_k такому, что $U(k_h) > r_k > U(k_l)$.

После того, как значения функции полезности $U(k_l)$ для классов эквивалентности k_l множества $X/\sim$ сформированы, этими значениями инициализируется функция полезности $U(x_i)$ решений $x_i \in X$, входящих в соответствующие классы: $U(x_i) = U(k_l)$ при $x_i \in R(x_i)$, где $R(x_i)$ –класс эквивалентности, для которого используется идентификатор (индекс, номер класса k_l). В случае, если для решений $x_i \in X$ вычислены значения функции полезности $U(x_i)$, определяется эффективное решение в соответствии с условием $x_i^* = arg \max\limits_{1 \le i \le N} U(x_i)$.

3. Программа выполнения работы

Для варианта задания, связанного с использованием множеств X_+^n и X_-^n, предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) реализовать объявление и инициализацию матрицы отношений между решениями в соответствии с вариантом задания;

2) реализовать процедуру определения для каждого рассматриваемого решения x_{n+1} соответствующих ему множеств X_+^n и X_-^n, которые определяют для решения x_{n+1} не худшие по отношению к нему решения (множество X_+^n) и не лучшие по отношению к нему решения (множество X_-^n); при определении множества X_+^n необходимо выполнять просмотр *(n+1)*-го столбца матрицы отношений, при определении множества X_-^n необходимо выполнять просмотр *(n+1)*-ой строки матрицы отношений, для рассматриваемого элемента x_{n+1} выполнить вывод множеств X_+^n, X_-^n;

3) реализовать процедуру выполнения условий $X_+^n = \varnothing$ $(X_+^n \ne \varnothing)$, $X_-^n = \varnothing (X_-^n \ne \varnothing)$, $X_+^n \cap X_-^n = \varnothing$, $X_+^n \cap X_-^n \ne \varnothing$; тем самым определяется способ вычисления значений функции полезности для решения x_{n+1}; реализовать вывод информации о выполняющемся условии;

4) реализовать процедуру вычисления значения функции полезности для текущего рассматриваемого решения x_{n+1};

5) реализовать процедуру управления процессом вычисления значений функции полезности для каждого элемента множества *X* (решения множества *X*); реализовать в рассматриваемой процедуре определение максимального значения функции полезности и соответствующего ему решения; выполнить вывод всех решений $x_i \in X$ и соответствующих им значений функции полезности.

Для варианта задания, связанного с использованием классов эквивалентности, предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) реализовать инициализацию матриц отношений строго предпочтения A_1 и эквивалентности A_2;

2) реализовать процедуру, формирующую на основе матрицы отношения эквивалентности A_2 классы эквивалентности $R(x_i)$ ($x_i \in X$);

3) реализовать процедуру, выполняющую сравнение полученных классов эквивалентности $R(x_i)$ $(x_i \in X)$, исключение повторяющихся классов, формирующую множество $X/\sim$ уникальных классов эквивалентности решений k_l;

4) реализовать процедуру, выполняющую упорядочивание классов эквивалентности k_l с определение соответствующих им значений функции полезности $U(k_l)$;

5) реализовать процедуру, которая выполняет инициализацию значений функции полезности элементов (решений) $U(x_i)$ множества X, входящих в соответствующие классы эквивалентности k_l, значениями функции полезности этих классов $U(k_l)$; разрабатываемая процедура также выполняет упорядочивание решений $x_i \in X$ с точки зрения значений их функции полезности и определяет решение $x_i^* \in X$, для которого значение функции полезности является максимальным;

6) реализовать вывод исходных данных, промежуточных и конечных результатов: матриц отношений A_1 и A_2, классов эквивалентности $R(x_i)$ $(x_i \in X)$, множества $X/\sim$ не повторяющихся ("уникальных") классов эквивалентности, полученных значений функции полезности $U(k_l)$ для каждого класса k_l, значений функции полезности для решений $x_i \in X$, соответствующих этим классам, эффективных решений с максимальным значением функции полезности.

4.Задание на работу

Вариант 1. Используя метод, реализующий формирование множеств X_+^n и X_-^n, а также их последующий анализ (с точки зрения $X_+^n = \varnothing$ $(X_+^n \neq \varnothing)$, $X_-^n = \varnothing\,(X_-^n \neq \varnothing)$, $X_+^n \cap X_-^n = \varnothing$, $X_+^n \cap X_-^n \neq \varnothing)$, выполнить для заданного вида матрицы отношения предпочтения A_1 определение значений функции полезности $U(x_i)$ решений и определение по формируемым значениям функции полезности эффективных решений $x_i^* \in X$. Матрица отношения предпочтения имеет следующий вид:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Вариант 2. Используя метод, реализующий формирование классов эквивалентности $R(x_i)$ $(x_i \in X)$, формирование множества $X/\sim$ неповторяющихся классов эквивалентности k_l, выполнить разработку программы, определяющей значения функции полезности $U(k_l)$ для этих классов и значения функции $U(x_i)$ для решений $x_i \in X$, с последующим определением эффективных решений, для которых $x_i^* = arg \max\limits_{1 \le i \le N} U(x_i)$. Вид матриц отношений предпочтения и эквивалентности следующий:

$$A_1 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} ; \quad A_2 = \begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} .$$

Вариант 3. Задана матрица отношения нестрогого предпочтения. Используя метод, реализующий формирование классов эквивалентности $R(x_i)$ $(x_i \in X)$, формирование множества $X/\sim$ неповторяющихся классов эквивалентности k_l, выполнить разработку программы, определяющей значения функции полезности $U(k_l)$ для этих классов и значения функции $U(x_i)$ для решений $x_i \in X$, с последующим определением эффективных решений, для которых $x_i^* = arg \max\limits_{1 \le i \le N} U(x_i)$. Вид матрицы следующий:

$$A = \begin{array}{|c|cccccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_8 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{10} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

5. Контрольные вопросы

5.1. Чем вызвана необходимость использования аппарата функции полезности?

5.2. В чем состоят условия существования функции полезности, определяемой на множестве решений?

5.3. Какова связь между бинарным отношением для пары решений и значениями их функции полезности?

5.4. В чем заключается слабый порядок на множестве решений X?

5.5. В чем заключается строгий порядок на множестве решений X?

5.6. В чем состоят аксиомы теории полезности и каков их смысл?

5.7. Каков алгоритм процедуры определения значений функции полезности с использованием множеств доминируемых и доминирующих решений?

5.8. Какие особенности задания отношений на множестве решений X позволяет учесть введение классов эквивалентности (какой вид отношения на множестве X позволяет исключить введение классов эквивалентности)?

5.9. Каким образом реализуется связывание классов эквивалентности с использованием отношения предпочтения для классов?

5.10. Какое условие должно быть выполнено для существования функции полезности на множестве классов эквивалентности?

5.11. В чем заключается алгоритм определения значений функции полезности для классов эквивалентности?

5.12. Каким образом определяются значения функции полезности для решений, если значения функции полезности для классов эквивалентности известны?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА МНОГОМЕРНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1. Цель работы: исследовать применение аппарата теории многомерной полезности при принятии решений по выбору эффективных альтернатив.

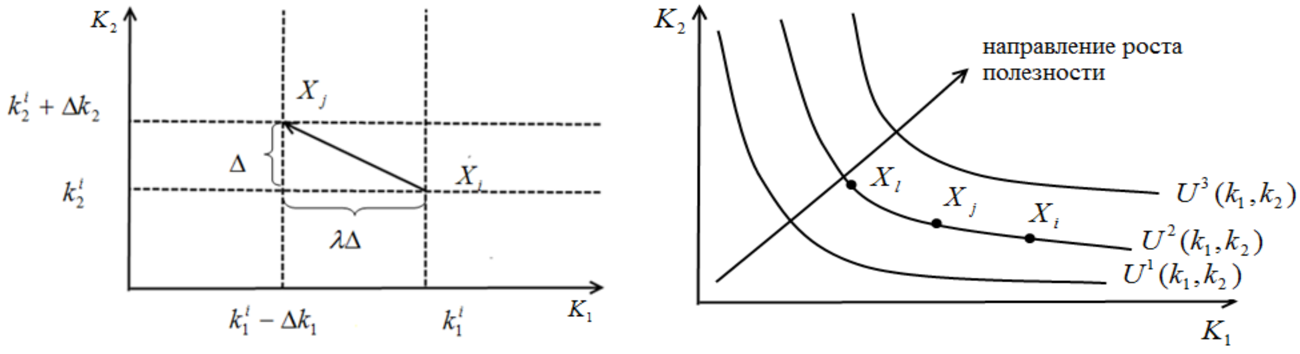
2. Теоретическое введение

При реализации принятия решений в случае многих критериев (свойств, характеристик) используется многомерная функция полезности, т.е. функция полезности, учитывающая для каждого решения его полезности по каждому критерию. Подход, определяющий использование многомерной полезности, рассмотрим на примере двух критериев (свойств, характеристик решений). Обозначим через K_1 и K_2 множества возможных значений каждого из критериев, k_1^i, k_2^i - соответственно значения каждого из критериев для некоторого решения x_i (т.е. $k_1^i \in K_1; k_2^i \in K_2, i = \overline{1,n}$). Понятно, что множества значений K_1 и K_2 соответствующих критериев являются счетными и конечными. Если через x_i обозначено некоторое i-е решение $(x_i \in X)$, тогда это решение характеризуется парой значений (k_1^i, k_2^i). В соответствии с постановкой задачи необходимо определить то решение x_i^*, которое будет являться эффективным с точки зрения его общей полезности.

Основное понятие многокритериальной теории полезности (теории многомерной полезности) – это понятие замещения по полезности или просто замещения. Понятие замещения по полезности (в дальнейшем замещения) связано с предположением о том, что приращение по одному критерию (Δk_2) может быть скомпенсировано путем уступки по другому критерию (Δk_1). Для увеличения оценки полезности по второму критерию на Δk_2 требуется выполнить уступку по первому критерию - Δk_1 (т.е. для первого критерия найдется такая уступка - Δk_1, которая обеспечит увеличение второго критерия на Δk_2). Если x_i и x_j - некоторые решения, тогда (k_1^i, k_2^i) – значения критериев, соответствующие решению x_i, а $(k_1^i - \Delta k_1, k_2^i + \Delta k_2)$ (или же (k_1^j, k_2^j)) – значения критериев, соответствующие решению x_j.

Если существует возможность уступки по первому критерию (уступки $-\Delta k_1$) для решения x_i с целью получения нового решения x_j с увеличением для него на Δk_2 значения критерия K_2, тогда решение x_i эквивалентно решению x_j с точки зрения общей полезности (полезность решения x_i равна полезности решения x_j, решение x_i эквивалентно решению x_j, $x_i \sim x_j$). Данный факт может быть обозначен следующим образом: $(k_1^i, k_i^2) \sim (k_1^i - \Delta k_1, k_2^i + \Delta k_2)$, либо если $k_1^j = k_1^i - \Delta k_1, k_2^j = k_2^i + \Delta k_2$, то $(k_1^i, k_2^i) \sim (k_1^j, k_2^j)$. Аналогичным образом может быть выполнен переход из точки x_j с координатами (k_1^j, k_2^j) в точку x_l с координатами $(k_1^l = k_1^j - \Delta k_1^{'}, k_1^l = k_2^j + \Delta k_2^{'})$, где $\Delta k_1^{'}$ и $\Delta k_2^{'}$ - уступки и приращение, соответствующие переходу отрешения x_j к решению x_l. При этом $x_j \sim x_l$ и $(k_1^j, k_2^j) \sim (k_1^l, k_2^l)$. Тогда могут быть сформированы все возможные замещения для каждого решения x_i (полученные точки x_j, x_l и т.д.) т.е. получено множество точек критериального пространства $K_1 \times K_2$, которые эквивалентны решению x_i с точки зрения общей полезности (полезности по двум критериям). Точки такого (одного) множества образуют одну кривую, называемую кривой безразличия. Точки, лежащие на разных кривых безразличия, имею разную полезность (обладают разной полезностью).

Понятия замещения для решений x_i и x_j, а также кривых безразличия прокомментированы на Рис.1.



а) б)

Рисунок 1 – Замещение по полезности и кривые безразличия для двух критериев
а) замещение по полезности; б) кривые безразличия для двух критериев

Обозначив $U(k_1,k_2)$ общую полезность решений $(x_i, x_j, x_{l,...})$ (многомерную функцию полезности) имеем, что $U^1(k_1,k_2) = const$, $U^2(k_1,k_2) = const$, $U^3(k_1,k_2) = const$, т.е. полезность решений при переходе по кривой безразличия $U^h(k_1,k_2) = const \quad (h = \overline{1,3})$ не изменяется. Решения x_i, x_j, x_l, которым соответствуют (k_1^i,k_2^i), (k_1^j,k_2^j), (k_1^l,k_2^l) являющиеся эквивалентными, лежат на одной кривой безразличия.

Кривые безразличия – это линии одинаковых значений двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$, согласованных с предпочтениями ЛПР (с предпочтениями ЛПР согласуются значения двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$). Под согласованностью следует понимать выполнение следующих условий, связанных с кривыми безразличия:

$$(x_i \succeq x_j) <=> (k_1^i,k_2^i) \succeq (k_1^j,k_2^j) <=> U(k_1^i,k_2^i) \geq U(k_1^j,k_2^j),$$

где $U(k_1^i,k_2^i)$ и $U(k_1^j,k_2^j)$ - разные кривые безразличия, соответствующие решениям x_i и x_j, лежащим на них.

Т.к. понятие замещения связано с приращением одного критерия за счет уступок по другому критерию, то в рассмотрение должен быть введен коэффициент замещения, обозначенный через λ. Если в точке (k_1^i,k_2^i) за Δ единиц критерия K_2 можно уступить $\lambda\ \Delta$ единиц критерия K_1, тогда предельный коэффициент замещения в точке (k_1^i,k_2^i) равен λ (Рис. 1а)). Тогда при наличии кривых безразличия могут быть вычислены локальные коэффициенты замещения λ в каждой точке. Понятно, что коэффициент λ в общем виде не является постоянным, а зависит от вида кривой безразличия и выбора точки (k_1^i,k_2^i) на этой кривой. Т.е. при использовании даже одной кривой безразличия и разных точек на ней могут быть получены разные коэффициенты λ.

Для формирования вида многомерной (двумерной) функции полезности $U(k_1,k_2)$ необходимо выполнить априорное задание свойств предпочтений (условий, которым должны удовлетворять предпочтения), которые приводят к удобным видам функции полезности. Таким образом, должно быть определено условие, обеспечивающее существование простых (в частном случае, аддитивных) функций полезности $U(x)$, т.е. предпочтения по каждому из критериев (предпочтения по группе критериев) должны быть такими, чтобы обеспечивать существование аддитивной функции полезности. В общем виде аддитивная функция полезности имеет форму:

$$U(k_1, k_2,..., k_h) = \sum_{j=1}^{n} U_j(k_j),$$

где U_j – j-я функция полезности для j-го критерия. В частном случае двух критериев K_1 и K_2 аддитивная функция полезности имеет вид: $U(k_1,k_2)=U_1(k_1)+U_2(k_2)$.

Условием, определяющим существование аддитивной (в частном случае, двумерной) функции полезности является условие соответственных замещений. Условие соответственных замещений может быть прокомментировано следующим образом на основе Рис. 2. Для формулировки условия рассматриваются четыре точки (решения): x_1 с координатами (k_1^1,k_2^1), x_2 с координатами (k_1^1,k_2^2), x_3 с координатами (k_1^2,k_2^1) и x_4 с координатами (k_1^2,k_2^2). В точке x_1 (k_1^1,k_2^1) за увеличение K_2 на b единиц необходимо заплатить (уступка) a единиц, в точке x_2 (k_1^1,k_2^2) за увеличение K_2 на c единиц необходимо заплатить a единиц, в точке x_3 (k_1^2,k_2^1) за увеличение K_2 на b единиц необходимо заплатить d единиц. Сколько необходимо заплатить в точке x_4 (k_1^2,k_2^2), чтобы получить увеличение K_2 на c единиц.

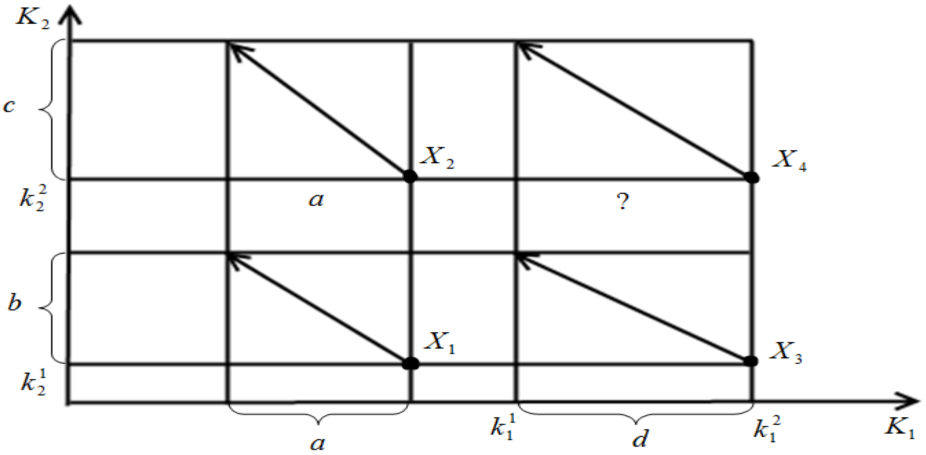


Рисунок 2 – Изменение значений критериев для условия соответственных замещений

Условие соответственных замещений предполагает, что если при заданных условиях для точек x_1,x_2,x_3, значениях a,b,c,d получим, что для приращения в точке x_4 дополнительно по критерию K_2 c единиц необходимо заплатить (уступка) d единиц по критерию K_1, то условие замещения выполняется. Таким образом, условие соответственных замещений выполняются, если для точки (решения) x_4 при увеличении K_2 на c единиц необходимо заплатить (уступка) d единиц по K_1. Выполнение условия соответственных замещений гарантирует аддитивный вид функции полезности: $U(k_1,k_2)=U_1(k_1)+U_2(k_2)$. Существование аддитивной функции полезности $U(k_1,k_2)$ обосновывается в соответствующей теореме Льюиса-Тьюки (формулируемой ниже), в доказательстве которой сформулирован способ (алгоритм) построения изолиний функции полезности (линий одинаковых значений функции полезности), определения на их основе вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. При этом данный алгоритм обеспечивает выполнение условия соответственных замещений для формируемых изолиний аддитивной функции полезности $U(k_1,k_2)$ и вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. Т.е. реализация алгоритма обеспечивает определение $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, изолиний $U(k_1,k_2)$ при выполнении условия соответственных замещений.

Теорема о существовании аддитивной функции полезности (Льюиса-Тьюки). Структура предпочтений аддитивна, т.е. аддитивная функция полезности $U(k_1,k_2)=U_1(k_1)+U_2(k_2)$ существует тогда, когда выполняется условие соответственных замещений.

Доказательство. Доказательство необходимости выполним на основе Рис.2. Т.к. точки (k_1^1,k_2^1) и (k_1^1-a,k_2^1+b) лежит на одной кривой безразличия (изолинии функции полезности), то для них выполняется условие (с учетом предположения об аддитивности $U(k_1,k_2)$):

$$U_1(k_1^1)+U_2(k_2^1)=U_1(k_1^1-a)+U_2(k_2^1+b).$$

Аналогичные условия выполняются для точек $x_2(k_1^1,k_2^2)$ и $x_3(k_1^2,k_2^1)$:

$$U_1(k_1^1)+U_2(k_2^2)=U_1(k_1^1-a)+U_2(k_2^2+b);$$

$$U_1(k_1^2)+U_2(k_2^1)=U_1(k_1^2-a)+U_2(k_2^1+b).$$

Складывая второе и третье равенства и вычитая из полученной суммы первое, получим, что для точки $x_4(k_1^2,k_2^2)$ выполняются:

$$U_1(k_1^2)+U_2(k_2^2)=U_1(k_1^2-d)+U_2(k_2^2+c)$$

т.е. условие соответственных замещений выполняется.

Доказательство достаточности выполним с точки зрения обоснования способа определения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ в предположении, что условие соответственных замещений выполняется. Т.е. при обосновании процедуры, которая носит название процедуры совместного шкалирования (процедуры определения $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$), проконтролируем выполнение условия соответственных замещений. Доказательство достаточности и обоснование процедуры определения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ выполним с использованием Рис. 3.

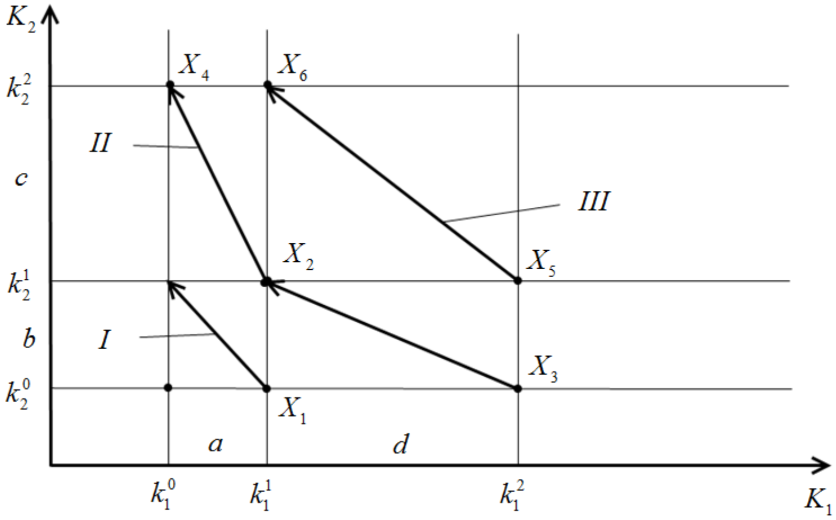


Рисунок 3 – Реализация совместного шкалирования при аддитивной структуре
предпочтений.
I– первая кривая безразличия;
II– вторая кривая безразличия;
III– третья кривая безразличия.

Алгоритм формирования значений $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ имеет следующие шаги:

1) пусть k_1^0 и k_2^0 - наименьшие значения оценок соответствующих критериев K_1 и K_2; для координат k_1^0, k_2^0 (решения с координатами (k_1^0,k_2^0)) предполагается, что $U(k_1^0,k_2^0)=U_1(k_1^0)=U_2(k_2^0)=0$;

2) для значения k_1^1 параметра k_1 $(k_1^1>k_1^0)$ задается, что $U(k_1^1)=1$; это будет первая кривая безразличия, которая характеризуется значением $U(k_1,k_2)=1$; при этом $k_2=0$; т.е. $U(k_1^1,k_2^0)=1$ (при $k_2^0=0$)

3) определим такое значение второго критерия K_2, что $(k_1^1,k_2^0)\sim(k_1^0,k_2^1)$ (т.е. решение с координатами (k_1^0,k_2^1) лежит на одной кривой безразличия с решением (k_1^1,k_2^0)), тогда $U_2(k_2^1)=1$; т.к. коэффициенты k_1^1,k_2^1 известны, то они соответствуют решению x_2, которое не находится (не лежит) на кривой безразличия с $U(k_1,k_2)=1$ (т.е. $x_2(k_1^1,k_2^1)$ не принадлежит кривой безразличия с $U_2(k_1^1)=1$ и $U_2(k_2^1)=1$);

4) т.к. решение $x_2(k_1^1,k_2^1)$ является известным, тогда определяются решения $x_3(k_1^2,k_2^0)$ и $x_4(k_1^0,k_2^2)$, которые лежат на одной кривой безразличия с x_2; таким образом для решений x_2, x_3, x_4 выполняется условие $x_2 \sim x_3 \sim x_4$ (или $(k_1^1,k_2^1) \sim (k_1^2,k_2^0) \sim (k_1^0,k_2^2)$); при этом значение $U(k_1,k_2)$ и $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ задается следующим образом: $U(k_1^1,k_2^1) = U(k_1^2,k_2^0) = U(k_1^0,k_2^2) = 2$;
$U_1(k_1^2) = 2; U_2(k_2^2) = 2$;
5) реализация предшествующих шагов процедуры позволяет определить, что в соответствии с условием соответственных замещений $k_2^1 - k_1^1 = d$, тогда решения x_5 и x_6 являются одинаковыми (эквивалентными) по предпочтительности (т.е. $x_5 \sim x_6$) и принадлежит одной кривой безразличия;
6) т.к. значения критериев K_1 и K_2 для решений x_5 и x_6 определены, должны быть идентифицировать значения k_1^3 и k_2^3 такие, что для них выполняется условие:

$$(k_1^3,k_2^0) \sim (k_1^2,k_2^1) \sim (k_1^1,k_2^2) \sim (k_1^0,k_2^3),$$

т.е. выбираются такие значения k_1^3, k_2^3, для которых и формулируется приведенное условие; для решений с координатами $(k_1^3,k_2^0), (k_1^2,k_2^1), (k_1^1,k_2^2), (k_1^0,k_2^3)$ задается значение функции полезности $U(k_1,k_2) = 3$; откуда значения одномерных функций полезности определяются следующим образом $U_1(k_1^3) = 3; U_2(k_2^3) = 3$; итоги реализации данного шага является определение координат $(k_1^1,k_2^3), (k_1^2,k_2^2), (k_1^3,k_2^1)$ тех решений, которые лежат на следующей кривой безразличия $c\, U(k_1,k_2) = 4$; при этом для решений с рассматриваемыми значениями критериев K_1 и K_2 выполняется условиие эквивалентности (вытекающее из условия соответственных замещений) $(k_1^1,k_2^3) \sim (k_1^2,k_2^2) \sim (k_1^3,k_2^1)$;
7) продолжая действия подобным образом, должны быть получены значения k_1^j и k_2^j $(j = \overline{4,n})$, которые входят в пары (k_1^j,k_2^0), (k_1^0,k_2^j); эти значения (при условии присвоения соответствующих решениям значений $U(k_1,k_2)$) используются при определении значений одномерных функций полезности $U_1(k_1^j)$, $U_2(k_2^j)$ $(j = \overline{4,n})$.

Итогом рассмотренной процедуры являются дискретные значения одномерных дискретных функций полезности решений по каждому критерию $U_1(k_1^h)$, $U_2(k_2^h)$ где $h = \overline{1,n}$.

После формирования вида функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ с использованием введенного в рассмотрение метода необходимого выполнить агрегирование этих функций для получения многомерной (двумерной) функции полезности $U(k_1,k_2)$. Агрегирование функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ (получение обобщенной многомерной функции полезности $U(k_1,k_2)$) используется выражение $U(k_1,k_2) = jU_1(k_1) + (1-j)U_2(k_2)$, где j - коэффициент шкалирования. Для определения шкалирующего коэффициента необходимо:
1) на основе заключений ЛПР определить два эквивалентных решения x_i и x_j (т.е. $(k_1^i,k_2^i) \sim (k_1^j,k_2^j)$), лежащие на одной кривой безразличия;
2) вычислить значение j путем решения уравнения вида $jU_1(k_1^i) + (1-j)U_2(k_2^i) = jU_1(k_1^j) + (1-j)U_2(k_2^j)$.

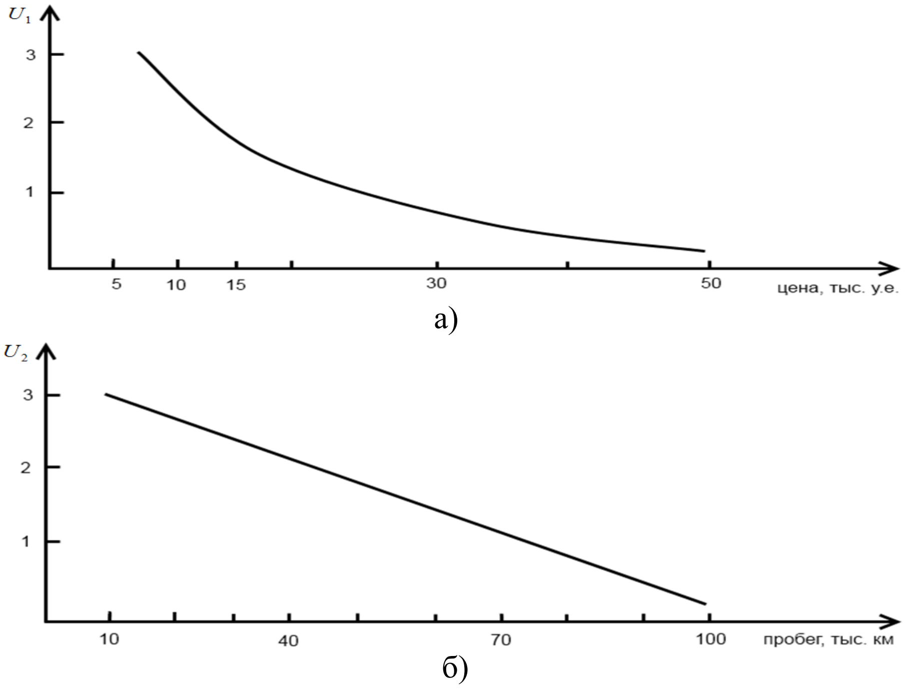
<u>Пример</u> реализации принятия решения на основе аппарата теории многомерной полезности.

Рассматривается задача покупки автомобиля. Параметрами, характеризующими решение (модель автомобиля), являются цены и пробег. Т.к. известно, что по мере роста цены на некоторый предмет (объект, приобретение и т.д.) полезность этого предмета (и в конечном итоге решения) стремится к 0. Т.е. при достаточно большой цене предмет (решение) становятся бесполезным. Наоборот, при небольшой цене полезность предмета (решения) является более значительной. Поэтому с точки зрения параметра «цена» полезность решения будет минимальный при большом значении этого параметра и максимальный при малом значении параметра. Поэтому в качестве критерия K_1 (свойства, характеристики решения) следует рассматривать критерий вида $K_1 = 1/\text{цена}$. Аналогичные рассмотрения могут быть выполнены с точки зрения параметра «пробег». Если пробег минимальный, то полезность решения будет являться значительной, если пробег значительный, то полезность решения наоборот будет являться минимальной. Поэтому в качестве второго критерия K_2 следует рассматривать критерий вида $K_2 = 1/\text{пробег}$.

Диапазон значений для первого параметра решения (цена), на основании которого определяется критерий K_1, заданы равным $[\,5\text{ тыс};50\text{тыс}\,]$ или в единицах тысяч - $[\,5;50\,]$. Для определения многомерной функции полезности $U(k_1, k_2)$ и одномерных функций $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ на интервале $[\,5;50\,]$ определим следующие значения (дискретные значения), для некоторых значения функций будут вычисляться: 5, 10, 20, 50. Соответственно при переходе к критерию $(K_1 = 1/\text{цена})$ его значения будут определены на интервале $[\,0.02;0.2\,]$, а значения K_1, которые будут рассматриваться следующие: 0.02; 0.05; 0.1; 0.2.

Аналогичным образом строятся рассуждения относительно критерия K_2. Диапазон значений параметра «пробег», на основании которых определяются значения критерия K_2, задан в виде $[\,10;100\,]$ (измеряется в тысячах километров). Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1, k_2)$, $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$ заданы следующими: 10,40,70,100. Тогда при переходе к критерию $K_2 = 1/\text{пробег}$ диапазон значений получен в виде $[\,0.01;0.1\,]$, а дискретные значения критерия следующие: 0,01; 0,0143; 0,025; 0,1.

В результате для диапазонов $[\,0.02;0.2\,], [\,0.01;0.1\,]$ (значений 0,02; 0,05; 0,1; 0,2 и 0,01; 0,0143; 0,025; 0,1) сформирована двумерная функция полезности (в соответствии с приведенным алгоритмом) $U(k_1, k_2)$ и одномерные функции полезности $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$. При переходе от значений критериев $K_1 = 1/\text{цена}$ и $K_2 = 1/\text{пробег}$ к указанным выше значениям параметров «цена» и «пробег» одномерные функции полезности каждого из параметров получены в виде, представленном на Рис.4.



а)

б)

Рисунок 4 – Виды сформированных функций полезности U_1 и U_2

а) функция полезности для параметра «цена»;

б) функция полезности для параметра «пробег»;

Так как дискретные значения функций $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, тогда должны быть определены аналитические формы этих функций (для постановки в них произвольных значений рассматриваемых параметров, характеризующих решения). Т.к. в большинстве случаев функции являются нелинейными, то для них может быть задана следующая аналитическая форма: $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$. Для определения коэффициентов $a_i, b_i (i = \overline{1,2})$ в приведенных аналитических функциях U_1, U_2 применимы методы аппроксимации (данный этап в рамках лабораторной работы необходимо выполнить самостоятельно).

Т.к. вид двумерной функции полезности $U(k_1, k_2) = jU_1(k_1) + (1-j)U_2(k_2)$, тогда должен быть определен коэффициент масштабирования j. Для этого должны быть определены два решения, являющиеся эквивалентными (лежащими на одной кривой безразличия), т.е. $(k_1^i, k_2^i) \sim (k_1^j, k_2^j)$. Допустим, что равноценными являются решения с $k_1^i = 10$, $k_2^i = 90$ и $k_1^j = 40$, $k_2^j = 10$ (пробег – 90 тыс. км, цена – 10 тыс. у.е.; пробег – 10 тыс. км, цена – 40 тыс. у.е.). Тогда получим $jU_1(10) + (1-j)U_2(90) = jU_1(40) + (1-j)U_2(10)$. В итоге значение $j = 0.59$.

Т.к. аналитические формы выражений для $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, значение j вычислено, тогда могут быть определены значения $U(k_1, k_2)$ при любых значениях входных параметров k_1 и k_2. Результаты сравнения четырех вариантов решений сведены в Таблицу 1.

Таблица 1. Двумерная функция полезности в задаче выбора решения.

Вариант	Цена	Пробег	$U_1(k_1)$	$U_2(k_2)$	$U(k_1, k_2)$
1	40	10	0,5	3	1,525
2	10	80	2	0,8	1,508
3	18	40	1,5	2	***1,708***
4	25	60	1,3	1,3	1,3

В результате эффективным решением является третье, у которого обобщенная функция полезности U имеет максимальное значение.

3. Программа выполнения работы

Выполнение задания предусматривает реализацию следующего порядка действий по выполнению лабораторной работы:

1. Для введенных диапазонов изменения параметров решений (критериев решений) и соответствующих значений этих критериев реализовать процедуру построения двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$, в которой выполнить определение дискретных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$ для соответствующих критериев (реализовать процедуру формирования значений $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$).
2. Выполнить построение линий безразличия для двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$, которые в дальнейшем будут использоваться для определения эквивалентных решений, лежащих на одной из этих линий. Координаты этих решений будут использованы при вычислении коэффициента масштабирования j.
3. Реализовать процедуру аппроксимации полученных дискретных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$ с использованием полиномов второй степени $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, результатом реализации этой процедуры являются коэффициенты этих аналитических кривых a_1, b_1, a_2, b_2.

4. Выполнить формирование процедуры вычисления значения коэффициента масштабирования *j*, при реализации которой используются координаты (k_1^i,k_2^i) и (k_1^j,k_2^j) соответствующих эквивалентных решений x_i и x_j, лежащих на одной кривой безразличия (т.е. в качестве исходных данных для этой процедуры использованы координаты (k_1^i,k_2^i) и (k_1^j,k_2^j) решений x_i и x_j, выбранных на одной кривой безразличия, сформированной в пункте 2).

5. Для задаваемых в варианте характеристик решений с использованием определенных ранее (процедурой в пункте 3) аналитических функций $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2; U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$ реализовать процедуру вычисления значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$, а затем двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$ с учетом коэффициента масштабирования *j*. В разрабатываемой процедуре выполнить определение эффективного решения с максимальным значением двумерной функции полезности (передаваемыми в реализуемую процедуру наряду с исходными данными являются параметры a_1, b_1, a_2, b_2).

6. Выполнить вывод: а) линий безразличия, б) полученных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$и $U_2(k_2)$, в) видов аппроксимирующих функций $U_1 = a_1k_1 + b_1(k_1)^2$; $U_2 = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, г) значений одномерных и двумерной функций полезности для решений, указанных в варианте задания, д) эффективных решений x_i^* с максимальным значением двумерной функции полезности $U(k_1,k_2)$.

4.Задание на работу

Вариант 1. Задача состоит в выборе одной из альтернатив, представляющих собой выставленные на продажу автомобили. Критериями (характеристиками) решений являются: $K_1 = 1/\text{цена}$ и $K_2 = 1/\text{пробег}$. Используя метод, реализующий построение и исследование двумерной функции полезности, для заданных диапазонов значений критериев и их (критериев) дискретных оценок выполнить: формирование линий безразличия $U(k_1,k_2)$, определение на их основе дискретных значений оценок одномерных функций полезности для каждого из критериев k_1 и k_2, аппроксимацию дискретных значений одномерных функций полезности с использованием полиномов второй степени, вычисление коэффициента масштабирования *j* на основе выбираемых ЛПР по кривым безразличия решениям. С использованием сформированных промежуточных решений выполнить для задаваемых характеристик альтернатив вычисление значений одномерных функций полезности, двумерной функции полезности и реализовать выбор эффективного решения. Выполнить вывод исходных данных, всех промежуточных и конечных результатов. Исходными данными для решаемой задачи являются: параметр "цена" изменяется в диапазоне $[25,100]$, параметр "пробег" в диапазоне $[20,80]$. Шаг дискретизации первого параметра задан равным 25, шаг дискретизации второго параметра задан равным 20. Соответственно, для первого критерия диапазон изменения его значений задан в виде $[0,001; 0,04]$, для второго критерия диапазон задан в виде $[0,0125;0,05]$. Выбор двух эквивалентных решений на одной из кривых безразличия, сформированных программно, выполнить самостоятельно. Данные, на основании которых выбирается эффективное решение, имеют следующие значения:

Вариант	Цена	Пробег
1	30	45
2	50	30
3	80	20
4	25	55

Вариант 2. Перед выпускником учебного заведения стоит проблема выбора оптимального места дальнейшей работы. Выбор определяется значениями критериев:

K_1 - величина зарплаты;

K_2 - процент творческой работы;

K_3 - время, за которое можно добраться до работы.

Диапазон значений для первого параметра решения (зарплата), на основании которого определяется критерий K_1, заданы равным [50 тыс; 200 тыс] или в единицах тысяч – [50,200]. Для определения многомерной функции полезности $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерной функции $U_1(k_1)$ на интервале [50,200] заданы следующие значения (дискретные значения), для некоторых значения функций будут вычисляться: 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200.

Диапазон значений параметра «процент творческой работы», на основании которых определяются значения критерия K_2, задан в виде [20;60]. Дискретные значения, для которых определяются значения функции $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_2(k_2)$ заданы следующими: 20,30, 40, 50, 60.

Диапазон значений параметра «время, за которое можно добраться до работы», на основании которых определяются значения критерия K_3, задан в виде [20;70]. Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_3(k_3)$ заданы следующими: 20,30, 40, 50, 60, 70.

Для сформированных диапазонов значений критериев необходимо определить дискретные значения одномерных функций полезности $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$

На основании полученных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$,$U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ должны быть определены аналитические формы этих функций (для постановки в них произвольных значений рассматриваемых параметров, характеризующих решения). Для них должны быть заданы следующие аналитические формы: $U_1(k_1) = a_1k_1 + b_1(k_1)^2$, $U_2(k_2) = a_2k_2 + b_2(k_2)^2$, $U_3(k_3) = a_3k_3 + b_3(k_3)^2$. Для определения коэффициентов в приведенных аналитических функциях $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ необходимо применить метод наименьших квадратов

Т.к. аналитические формы выражений для $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, а многомерная полезность $U(k_1,k_2,k_3)$ является аддитивной функцией, тогда для заданных в таблице значений параметров определить эффективное решение.

Предприятие	Критерии		
	k_1	k_2	k_3
x_1	100	50	30
x_2	140	30	50
x_3	170	25	45
x_4	130	15	10
x_5	140	40	40

Вариант 3. Перед ЛПР стоит проблема выбора объекта недвижимости, в который он может вложить средства (покупка дачи). Выбор определяется значением критериев:

K_1 - качество дачи;

K_2 - расстояние до города;

K_3 - цена.

Диапазон значений для первого параметра решения (качество дачи), на основании которого определяется критерий K_1, заданы равным [20; 100] (измеряется в процентах). Для определения многомерной функции полезности $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_1(k_1)$ на интервале [20,100] заданы следующие значения (дискретные значения), для некоторых значения функций будут вычисляться: 20, 40, 60, 80, 100.

Диапазон значений параметра «расстояние до города», на основании которых определяются значения критерия K_2, задан в виде [20;120]. Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_2(k_2)$ заданы следующими: 20,40, 60, 80, 100, 120 (понятно, что чем расстояние до города ниже, тем полезность больше, поэтому требуется использовать величину, обратную критерию «расстояние до города»).

Диапазон значений параметра «цена», на основании которых определяются значения критерия K_3, задан в виде [20;70]. Дискретные значения, для которых определяются значения функций $U(k_1,k_2,k_3)$ и одномерная функция $U_3(k_3)$ заданы следующими: 20,30, 40, 50, 60, 70 (понятно, что чем цена ниже, тем полезность больше, поэтому требуется использовать величину, обратную критерию «цена»).

Для сформированных диапазонов значений критериев необходимо определить дискретные значения одномерных функций полезности $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$

На основании полученных значений одномерных функций полезности $U_1(k_1)$,$U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ должны быть определены аналитические формы этих функций (для постановки в них произвольных значений рассматриваемых параметров, характеризующих решения). Для них должны быть заданы следующие аналитические формы: $U_1(k_1)=a_1k_1+b_1(k_1)^2$, $U_2(k_2)=a_2k_2+b_2(k_2)^2$, $U_3(k_3)=a_3k_3+b_3(k_3)^2$. Для определения коэффициентов в приведенных аналитических функциях $U_1(k_1)$, $U_2(k_2)$, $U_3(k_3)$ необходимо применить метод наименьших квадратов

Т.к. аналитические формы выражений для $U_1(k_1)$ и $U_2(k_2)$ получены, а многомерная полезность $U(k_1,k_2,k_3)$ является аддитивной функцией, тогда для заданных в таблице значений параметров определить эффективное решение.

Вариант решения	Критерии		
	k_1	k_2	k_3
x_1	40	50	30
x_2	80	30	50
x_3	50	90	45
x_4	75	40	60
x_5	60	80	40

5. Контрольные вопросы

5.1. В чем состоит понятие замещения по полезности и его связь с уступкой и приращением?
5.2. Какие решения являются эквивалентными по полезности?
5.3. Что из себя представляют кривые безразличия?
5.4. Каким образом предпочтения ЛПР интерпретируются с точки зрения кривых безразличия?
5.5. Каким образом используется принцип замещения при построении функции полезности?
5.6. Что такое коэффициент замещения по полезности и в какой точке кривой безразличия он является максимальным?
5.7. Что такое аддитивная функция полезности и в чем заключаются условие ее существования?
5.8. В чем заключается условие соответственных замещений и что оно определяет?
5.8. В чем заключается алгоритм формирования кривых безразличия с учетом аддитивных свойств многомерной функции полезности?
5.10. Какие результаты построения кривых безразличия будут использоваться для дальнейшего принятия решений?
5.11. В чем заключается алгоритм процедуры определения эффективных решений с использованием многомерной функции полезности?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

1. Цель работы: исследовать способы формирования множества Парето-оптимальных решений и определения эффективных решений в этом множестве

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия о формировании множества Парето-оптимальных решений

Для формализации задачи формирования множества Парето-оптимальных решений в множестве допустимых решений в рассмотрение введены следующие обозначения:
1) X - множество допустимых решений многокритериальной задачи определения эффективных решений;
2) $f_i\ (i=\overline{1,m})$ – локальные частные критерии, соответствующие целям функционирования системы, тогда $f=(f_1, f_2,.., f_m)$ - векторный критерий принятия решений; для определения значений векторных оценок $f=(f_1, f_2,.., f_m)$ в рассмотрение введено обозначений $y=(f_1, f_2,.., f_m)$, тогда Y^m- критериальное пространство значений векторного критерия f, используемого при выборе решений;

Таким образом рассматривается задача принятия решений при многих критериях, при этом скалярные критерии $f_i\ (i=\overline{1,m})$ образуют векторный критерий f.

Способ определения наилучших вариантов (решений) при многих критериях предполагает определение множества Парето в пространстве допустимых решений *X*.

Для идентификации (определения) множества эффективных решений в рассмотрение введено отношение предпочтения вида: $x_i \succ x_j$, которое предполагает, что решение x_i является более предпочтительным, чем решение x_j в множестве X. По аналогии для значений y оценок векторного критерия $f(x)$ введено отношение $\geq$, т.е. $y_1 \geq y_2$ либо $f(x_1) \geq f(x_2)$, где y_1 и y_2 –соответствующие значения оценок векторного критерия f для решения x_1 и x_2.

В общем виде (для m критериев) отношение $\geq$ для значений y_1 и y_2 (где y_1 и y_2 соответствующие значения векторных оценок), либо для значений векторов $f(x_1)$ и $f(x_2)$ выполняется в том случае, если $f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$ и хотя бы для одного из критериев $f_j(x_1) \neq f_j(x_2)$. Таким образом, для случая $m=2$ имеем: $f(x_1) \geq f(x_2)$, если $f_1(x_1) \geq f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, то $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) \geq f_2(x_2)$ (соответственно, $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, либо $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, а также $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$ либо $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) = f_2(x_2)$).

Так как связь между решениями x_i и значениями y_i векторного критерия $f(x_i)$ является однозначной, тогда при реализации $f(x_i) \geq f(x_j)$ выполняется отношение предпочтения в виде $x_i \succ x_j$. Тогда решение x_i доминирует решение x_j, если по всем критериям решение x_i не хуже решения x_j (отношение "не хуже" имеет вид $\succeq$), а по одному критерию x_i строго лучше x_j. Данное заключение в формализованной форме имеет следующий вид: $f_1(x_i) \geq f_1(x_j)$, $f_2(x_1) \geq f_2(x_2),.., f_i(x_1) > f_i(x_2),.., f_m(x_1) \geq f_m(x_2)$. В рассматриваемом случае доминирование решения x_j решением x_i является однозначным. В основу приведенных рассуждений положена аксиома Парето о предпочтениях ЛПР: «Лицо, принимающее решения, стремится получить большие значения всех компонент векторного критерия».

В соответствии с введёнными отношениями предпочтения и доминирования может быть определено условие формирования множества недоминируемых решений:

– если $\nexists x_j$ такого, что $x_j \succ x_i$, то x_i является недоминируемым решением.

Понятно, что в соответствии с этим условием можно сформировать множество недоминируемых решений. Однако, в силу того, что выполняется решение многокритериальной задачи оптимизации, не все решения могут быть связаны отношением предпочтения (доминирования), т.е. не к каждой паре решений x_1 и x_2 ($x_1, x_2 \in X$) может быть применено отношение предпочтения. В общем виде (для m критериев) данные утверждения могут быть прокомментированы следующим образом.

Решение x_i не доминирует решение x_j, а x_j не доминирует решение x_i, если:

$$f_1(x_i) \geq f_1(x_j),\ f_2(x_1) \geq f_2(x_2),..,\ f_i(x_1) < f_i(x_2),..,\ f_m(x_1) \geq f_m(x_2);$$

(1)

$$f_1(x_i) \leq f_1(x_j),\ f_2(x_1) \leq f_2(x_2),..,\ f_i(x_1) > f_i(x_2),..,\ f_m(x_1) \leq f_m(x_2).$$

(2)

В этом случае решения x_i и x_j являются несравнимыми с использованием отношения предпочтения. Таким образом, могут быть выделены решения, которые являются недоминируемыми какими-либо решениями множества *X*, т.к. решения x_i и x_j несравнимы, поэтому недоминируемы.

Для случая двух критериев f_1 и f_2 условие (1) может быть представлено в следующем виде:

$$f_1(x_i) \geq f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) < f_2(x_j), \tag{4}$$

Либо

$$f_1(x_i) > f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) \leq f_2(x_j). \tag{5}$$

По аналогии условие (2) для двух критериев примет следующий вид:

$$f_1(x_i) \leq f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) > f_2(x_j), \tag{6}$$

либо

$$f_1(x_i) < f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) \geq f_2(x_j). \tag{7}$$

Те решения x_i и x_j, для которых выполняются либо условия (4), (5) либо условия (6), (7) не могут быть сравнимы с использованием отношения $\succ$.

Таким образом, если условия $x_i \succ x_j$ либо $x_j \succ x_i$ не выполняются, то решения x_i и x_j входят в так называемую границу Парето допустимого множества решений. Границе Парето поставлено в соответствие множество решений $x_i \in X$, которые не могут быть сравнимы между собой с помощью отношения предпочтения $\succ$ и, как следствие, являются недоминируемыми. Элементы $x_i \in X$, которые являются недоминируемыми и не сравнимыми с другими решениями с использованием отношения $\succ$, образуют множество Парето. Парето - границу множества X допустимых решений обозначим как $P(X)$. Способ формирования Парето- границы определяет аксиома о доминируемости (Парето – доминируемости) решений.

Аксиома Парето о доминируемости решений.

Если $x_i \succ x_j$, то $x_j \notin P(X)$, где x_j – решение, доминируемое решением x_i.

Тогда решение x_j не может входить в Парето-множество (лежать на Парето-границе). И, соответственно, если $\exists x_j$ такой, что $x_j \succ x_i$, то $x_i \notin P(X)$. Тогда Парето-множество содержит так называемые Парето - оптимальные решения.

Т.к. сформулировано условие формирования Парето-границы $P(X)$ множества допустимых решений X, тогда принцип Эджворта – Парето [8,9] определяет способ идентификации множества эффективных решений: выбираемые эффективные решения будут Парето-оптимальными. Т.е. эффективные решения в множестве X нужно выбирать только среди Парето-оптимальных решений. В результате эффективное решение (множество эффективных решений) будет выбираться (определяться) в множестве Парето-оптимальных решений (эффективное решение будет выбираться на Парето- границе).

Таким образом, если решение $x_i \in P(X)$ является недоминируемым ни одним из решений $x_j \in X$ (т.е. условие $x_j \succ x_i$ не выполняется ни для одного $x_j \in X$) и не может быть сравнимо с другими решениями, принадлежащими этой границе, с использованием отношения предпочтения $\succ$, тогда решение добавляется в Парето – границу (в Парето – множество). При этом оно недоминируется другими решениями, уже находящимися на границе.

Решение добавляется в Парето-границу, если нет решений, которые бы его доминировали, и, соответственно, удаляется из границы, если оно доминируется рассматриваемыми на данном шаге алгоритма решениями. Данная формулировка целиком согласуется с формулировкой аксиомы о доминировании (о Парето – границе), приведённой в [9]: если для какой-либо пары решений x_i и x_j выполняется $f(x_i) \geq f(x_j)$ (соответственно $x_i \succ x_j$), то $x_j \notin P(x)$.

Тогда доминируемое решением x_i решение x_j не может быть включено в Парето-границу, а для решения x_i выполняется условие: $\nexists x_j$ такого, что $x_j \succ x_i$, $x_i, x_j \in X$

В связи с тем, что в реализацию метода многокритериальной оптимизации положен принцип Эджворта – Парето (выбор эффективных решений на Парето-границе (в множестве Парето)), то возникает вопрос по поводу существования этого множества (т.к. требуется, чтобы $P(X) \neq \varnothing$).

В соответствии с заключениями, приведёнными в [9], при условии, что множество X является конечным, множество $P(X)$ является непустым. Допустим, что решаемая задача является задачей с конечным и счетным множеством возможных решений X, то $P(X) \neq \varnothing$.

Таким образом, выполнение поиска эффективных решений многокритериальной задачи осуществляется путём реализации двух этапов:

1) формирование множества Парето-оптимальных решений (Парето-границы $P(X)$) множества допустимых решений X;

2) определение на Парето-границе тех эффективных решений, которые позволят максимизировать (в наибольшой степени) все критерии в многокритериальной задаче (в соответствии с аксиомой о предпочтениях ЛПР).

Так как рассматриваемая задача предполагает наличие конечного множества допустимых решений, при поиске эффективных альтернатив реализуется переход от одного решения к другому, тогда должны быть определены особенности формирования Парето-границы $P(X)$ множества допустимых решений X.

Выяснение особенностей формирования Парето-границы (определения решений, входящих в Парето-границу) выполняется на основе Рис. 1 с использованием аксиом о предпочтениях ЛПР, о доминировании решений (понятий доминируемых и недоминируемых по Парето решений). Для Рис. 1 рассуждения, определяющие особенности формирования Парето-границы, строятся следующим образом:

1) при формировании решения x_2 решение x_1 исключается из рассмотрения, т.к. $x_2 \succ x_1$ (в результате x_1 не может входить в Парето-границу);

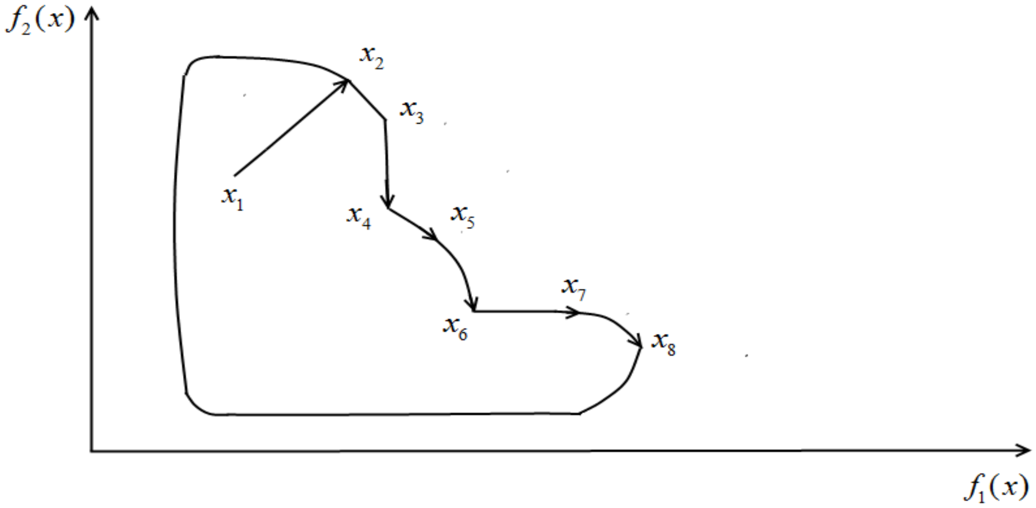


Рисунок 1 – Особенности определение решений, входящих в Парето-границу множества допустимых решений X

2) при переходе от решения x_2 к решению x_3 сравнение их с использованием отношения предпочтения $\succ$ невозможно, т.к. $f_1(x_2) < f_1(x_3)$ и $f_2(x_2) \geq f_2(x_3)$; в соответствии с этим решения x_2 и x_3 могут быть включены в границу Парето $(x_2 \in P(X), x_3 \in P(X))$;

3) переход от решения x_3 к решению x_4 обуславливает эквивалентность решений по одному из критериев $(f_1(x_3) = f_1(x_4))$ и доминирование решением x_3 решения x_4 по другому критерию $(f_2(x_3) > f_2(x_4))$, в соответствии с этим $x_3 \succ x_4$ (по введённому выше понятию отношения предпочтения (доминирования) решений) и решение $x_4 \notin P(X)$ (в соответствии с аксиомой);

4) при переходе от решения x_4 к решению x_5 должна быть исследована возможность включения решения x_5 в Парето- границу (при условии, что решение x_4 исключено из неё); т.к. множество Парето $P(X)$ образуют только те решения, которые не сравнимы с использованием отношения $\succ$, а решение x_4 исключено из $P(X)$, тогда должно быть выполнено сравнение решения x_5 с решением x_3, входящим в $P(X)$, т.к. (в соответствии с Рис. 1) связывание решений x_3 и x_5 отношение $\succ$ невозможно, то $x_5 \in P(X)$, также как $x_3 \in P(X)$;

5) по аналогии решение x_6 не может быть связано с решением x_5 отношением предпочтения $\succ$, поэтому на данном этапе рассуждений x_6 должно быть включено в $P(X)$ $(x_6 \in P(x))$;

6) переход от решения x_6 к решению x_7 обуславливает эквивалентность решений по критерию f_2 $(f_2(x_6) = f_2(x_7))$ и доминирование решением x_7 решения x_6 по критерию f_1 $(f_1(x_7) > f_1(x_6))$, тогда выполняется $x_7 \succ x_6$ и в соответствии с аксиомой о Парето- границе x_6 должно быть исключено из множества $P(X)$; аналогичные рассуждения, касающиеся решения x_8, которое не может быть связано с решением x_7 отношением $\succ$, позволяют сделать вывод о том, что $x_8 \in P(X)$.

Выполненные рассуждения касаются доминирования и не доминирования решений x_i $(i = \overline{1,8})$, они позволили сформировать множество Парето в следующем виде:

$$P(X) = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_8\}.$$

В общем виде при переходе от решения x_i к решению x_{i+1} возможны следующие ситуации, определяющие реализацию отношения $\succ$ для них: 1) $x_i \succ x_{i+1}$; 2) $x_{i+1} \succ x_i$; 3) $x_i \overline{\succ} x_{i+1}$ и $x_{i+j} \overline{\succ} x_i$.

Понятно, что в первом случае $x_{i+1} \notin P(X)$, во втором – $x_i \notin P(X)$, в третьем – $x_i \in P(x)$ и $x_{i+1} \in P(X)$ на рассматриваемом текущем шаге формирования Парето-границы.

Таким образом, в основу формирования множества $P(X)$ положена аксиома «о предпочтениях ЛПР» и аксиома «о Парето- границе множества X ».

Следует отметить, что вид границы Парето (выпуклость либо вогнутость) не рассматривается, определяется принадлежность (возможность включения) следующего рассматриваемого решения Парето-границе и необходимость исключения предыдущего рассматриваемого решения из этой границы в случае его доминирования. При этом принадлежность решения Парето-границе определяется на основе рассматриваемых условий доминирования и недоминирования решений (условий для отношений предпочтения/ доминирования). Т.к. в соответствии с принципом Эджворта – Парето эффективные решения принадлежат Парето-границе, тогда должен быть сформирован способ определения наиболее эффективного решения (эффективных решений) среди тех, которые принадлежат $P(X)$. В литературе [7-9] изложены различные способы определения эффективных решений, выбор которых будет обеспечивать выполнение аксиомы «о предпочтениях ЛПР» (выбор решения, в наибольшей степени максимизирующего все используемые критерии) [9].

Наиболее развитыми методами определения эффективных решений на Парето-границе являются: метод идеальной точки (метод точки утопии), метод последовательных уступок. Рассмотрим аппарат этих методов с точки зрения решения задачи принятия решений при двух критериях.

В основу первого способа определения эффективного решения в множестве Парето (на Парето-границе) положено понятие идеальной точки (точки утопии) и метрики (расстояния) от текущего рассматриваемого решения до этой идеальной точки (Рис.2.).

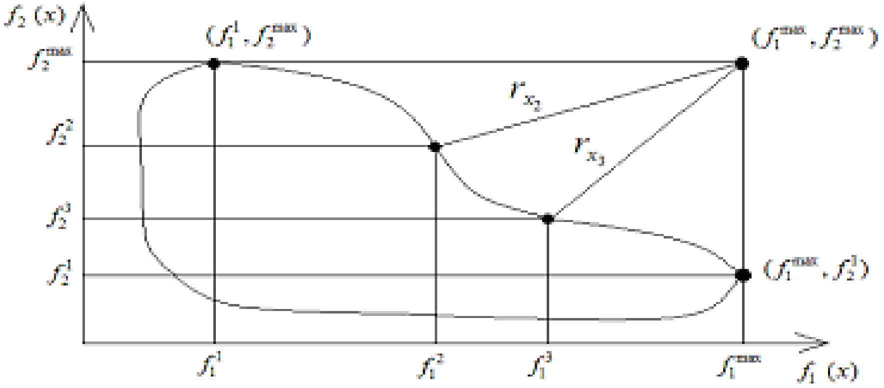


Рисунок 2 – Определение эффективных решений на Парето-границе с использованием метода идеальной точки

Точка утопии – это точка с координатами $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$, где $f_i^{\max} (i = \overline{1,2})$ - максимально возможные значения каждого из критериев. Значения $f_i^{\max} (i = \overline{1,2})$ фиксируются как значения соответствующих решений с координатами (f_1^{max}, f_2^1) и (f_1^1, f_2^{max}), т.е. решений с максимальными значениями соответствующих критериев.

В качестве меры удалённости точки критериального пространства от точки утопии для текущего рассматриваемого решения x используется эвклидова метрика в виде:

$$r_x = \left[(f_1^{\max} - f_1)^2 + (f_2^{\max} - f_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что эффективным выбирается решение $x_i^* \in P(X)$, для которого выполняется условие: $x_i^* = arg \min_{x_i \in P(X)} r_{x_i}$. Таким образом, для каждого решения $x_i \in X$ определяется принадлежность его к Парето-границе (множеству Парето $P(X)$), затем в случае, если $x_i \in P(X)$, тогда для решения x_i вычисляется расстояние r_{x_i} точки утопии $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$, выполняется сравнение полученного для решения x_i расстояния до точки утопии с расстоянием текущего локально эффективного решения x_j^*. Если для текущего решения x_i расстояние r_{x_i} является меньшим, чем $r_{x_j^*}$, то решение x_i становится локально эффективным $(x_j^* = x_i)$.

Тогда для задачи определения эффективных решений на Парето-границе при наличии двух критериев (при векторном критерии) разработан алгоритм соответствующей процедуры принятия решений. Для реализации алгоритма принятия решений при двух критериях в рассмотрение введены следующие обозначения:

1) $P1$– множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P1$); $P2$– множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_2(x_i) \in P2 \mid x_i \in P(X)$);

2) kp – количество элементов в множествах $P1$ и $P2$;

3) i – индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$;

4) $P1_i$, $P2_i$ – i-е текущие рассматриваемые элементы множеств $P1$ и $P2$;

5) j– индекс рассматриваемого решения из множества X, принадлежность которого Парето-границе будет исследована на текущем шаге алгоритма;

6) x_i - некоторое текущее решение, принадлежность которого к Парето-границе определена на предыдущих шагах алгоритма и значения критериев которого $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ сри исследуется возможность включения его в Парето-границу, решению x_i соответствуют значения критериев $f_1(x_i)$ и $f_2(x_i)$.

7) x_j - некоторое текущее решение ($x_j \in X$), для которого исследуется возможность включения его в Парето-границу, решению x_j соответствуют значения критериев $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$;

5) s – индекс текущего шага алгоритма.

7) n– количество решений в множестве X (мощность множества решений X).

Первоначальная инициализация введенных параметров, выполняемых на первом шаге алгоритма (при $s = 1$) выглядит следующим образом: 1) $P1(1) = 0$; $P2(1) = 0$; 2) $kp(1) = 0$.

В случае рассмотрения первого решения x_1 (при $P1 = 0; P2 = 0; kp = 0$), преобразование введенных параметров выполняется в соответствии с выражениями вида (при этом индекс шага алгоритма $s = 2$):

$$P1(2) = P1(1) \cup \{ f_1(x_1) \}; P2(2) = P2(1) \cup \{ f_2(x_1) \};$$
$$kp(2) = kp(1) + 1.$$

Для решения x_1 выполняется вычисление расстояния до идеальной точки $r_{x_1} = \left[(f_1^{\max} - f_1(x_1))^2 + (f_2^{\max} - f_2(x_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, после чего реализуется присваивание $r_{x^*} = r_{x_1}$ и, соответственно, $x^* = x_1$. Т.е. локально эффективным решением на начальной стадии реализации алгоритма является решение x_1.

Для всех последующих решений x_i $(i = \overline{2,n})$ шаги алгоритма принятия решений при двух критериях предполагают: определение принадлежности x_i $(i = \overline{2,n})$ Парето-границе (определение, что $x_i \in P(X)$), вычисление расстояния r_{x_i} до точки утопии (точки

$(f_1^{\max}, f_2^{\max})$), определение выполнения условия минимума значения метрики до этой точки $x_i^* = arg \min\limits_{x_i \in P(X)} r_{x_i}$ (фиксация локально эффективного и глобально эффективного решений). Если *kp* соответствует количеству элементов, включенных в результате реализации алгоритма в Парето-границу, тогда возможность включения в эту границу нового x_j-го решения исследуется путем сравнения его значений критериев f_1 и f_2 (значений $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$) со значениями этих критериев для решений x_i (с его значениями $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, при этом $i = \overline{1,kp}$).

В этом случае алгоритм определения эффективных решений в множестве *X* на основе метода идеальной точки имеет следующую последовательности шагов:

1) значения индекса *j* решения $x_j \in X$, возможность добавления которого в Парето-границу исследуется на текущем шаге алгоритма, задается равным 2 (*j=2*);

2) значение индекса *i* текущего рассматриваемого решения в множестве *P(X)* (т.е. $x_i \in P(X)$) задается равным 1 ($i = 1$); для рассматриваемого элемента x_i, значения критериев равны соответственно $P1_i$, $P2_i$;

3) если для решения x_j значение $f_1(x_j) > P1_i$, тогда решение x_j доминирует решение x_i по критерию f_1 $(x_j \succ_{f_1} x_i)$, которому соответствует значение $(f_1(x_i) = P1_i) \in P1$; если условие доминирования решением x_j решения x_i по критерию f_1 выполняется, тогда необходимо реализовать проверку условия ($f_2(x_j) < P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$); при невыполнении условия $f_1(x_j) > P1_i$ требуется осуществить переход к шагу 8;

4) если ($f_2(x_j) < P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$), то рассматриваемое решение x_j не может быть сравнимо с использование отношения предпочтения $\succ$ с решением x_i, которому соответствуют значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ (т.е. $x_j \overline{\succ} x_i$ и $x_i \overline{\succ} x_j$), выполняется переход к шагу 15;

5) если ($f_2(x_j) \geq P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$), то $(x_j \succ x_i)$, где $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, тогда x_i не может входить в Парето-границу, т.к. является доминируемым, поэтому значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ необходимо исключить из множеств *P1* и *P2* следующим образом:

$$P1(s+1) = P1(s) \setminus \{P1_i\};$$
$$P2(s+1) = P2(s) \setminus \{P2_i\};$$

6) смещение элементов массивов $P1$ и $P2$ с индексами *(i+1),...,kp* в позиции с индексами *i,...,kp-1* (изменение вида массивов (множеств) $P1$ и $P2$ после исключения из них значений $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, соответствующих решению x_i, доминируемому решением x_j); при исключении *i*-ых элементов из множеств *P1* и *P2* на их место должны быть размещены значения $P1_{i+1}$ и $P2_{i+1}$, поэтому индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$ изменяться не должен;

7) если *i=kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 15; если *i<kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1 и* переход на шаг 3;

8) если условие ($f_1(x_j) < P1_i \mid x_i \in P(X)$) выполняется, то решение x_i доминирует решение x_j по критерию f_1 $(x_i \succ_{f_1} x_j)$, должна быть выполнена проверка условия $f_2(x_j) > P2_i$

($x_i \in P(X)$); если условие $f_1(x_j) < P1_i$ выполняется, то реализуется переход к шагу 9; при невыполнении условия $f_1(x_j) < P1_i$ реализуется переход к шагу 11;

9) выполняется проверка условия $f_2(x_j) > P2_i$, если это условие выполняется, то решения x_j и $x_i \in P(X)$ не могут быть сравнимы с использованием отношения предпочтения $\succ$ ($x_{kp}\overline{\succ}x_i$ и $x_i\overline{\succ}x_{kp}$), выполняется переход к шагу 15;

10) реализуется проверка условия $f_2(x_j) \le P2_i$, если условие $f_2(x_j) \le P2_i$ выполняется, то решение x_i доминирует решение x_j по векторному критерию f ($x_i \succ_f x_j$), т.е. рассматриваемое решение x_j не может быть включено в Парето-границу; тогда должно быть определено следующее решение x_j, его значения критериев $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$, выполнен последующий анализ возможности включения его в *P(X)*, для этого реализуется переход на шаг 19;

11) выполняется проверка условия $f_1(x_j) = P1_i$ (при реализации перехода на этот шаг данное условие выполняется априори); реализуется проверка условия $f_2(x_j) \le P2_i$, если условие ($f_2(x_j) < P2_i$) является истинным, то решение x_j доминируется решением x_i (которому соответствует значение $f_2(x_i) = P2_i$), поэтому решение x_j не может быть включено в Парето-границу, реализуется переход к шагу 19; если $f_2(x_j) = P2_i$, то решение x_j эквивалентно решению x_i (переход к решению x_j не приводит к улучшению значения векторного критерия и анализируемое решение x_j не включается в Парето-границу), выполняется переход к шагу 19;

12) выполняется проверка $f_2(x_j) > P2_i$, если это условие является верным, то по критерию f_2 решение x_j доминирует решение x_i ($x_j \succ_{f_2} x_i$); т.к. по критерию f_1 решения x_j и x_i эквивалентны и $x_j \succ_{f_2} x_i$, то решение x_j доминирует решение x_i по векторному критерию f ($x_j \succ_f x_i$ или $x_j \succ x_i$), следовательно решение x_i должно быть исключено из Парето-границы, а его значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ из множеств *P1* и *P2* соответственно, тогда преобразования этих множеств выполняется с использованием выражений:

$$P1(s+1) = P1(s) \setminus \{P1_i\};$$
$$P2(s+1) = P2(s) \setminus \{P2_i\};$$

13) смещение элементов массивов $P1$ и $P2$ с индексами *(i+1),...,n* в позиции с индексами *i,...,n-1* (изменение вида массивов (множеств) $P1$ и $P2$ после исключения из них значений $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, соответствующих решению x_i, доминируемому решением x_j); при исключении *i*-ых элементов из множеств *P1* и *P2* на их место должны быть размещены значения $P1_{i+1}$ и $P2_{i+1}$, поэтому индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$ изменяться не должен;

14) если *i=kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 15; если *i<kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 3;

15) изменение индекса *i* текущих рассматриваемых элементов $P1_i$ и $P2_i$ множеств $P1$ и $P2$ следующим образом: *i=i+1,* если $i \le kp$, то выполняется переход к шагу 3; если $i > kp$, то выполняется переход на шаг 16;

16) значения критериев f_1 и f_2 для анализируемого решения x_j добавляются в множества $P1$ и $P2$ соответственно (само решение x_j принадлежит Парето-границе $P(X)$):

$$P1(s+1) = P1(s) \cup \{ f_1(x_j) \};$$
$$P2(s+1) = P2(s) \cup \{ f_2(x_j) \};$$
$$kp(s+1) = kp(s) + 1;$$

17) для решения $x_j \in P(X)$ вычисляется значение расстояния r_{x_j} до точки утопии:

$$r_{x_j} = \left[(f_1^{\max} - f_1(x_j))^2 + (f_2^{\max} - f_2(x_j))^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

18) реализуется сравнение полученного значения со значением r_{x^*} текущего эффективного решения, если $r_{x^*} > r_{x_j}$, то: $r_{x^*} = r_{x_j}$; $x^* = x_j$ (т.е. выполняется сохранение (буферизация) текущего локального эффективного решения);

19) изменение индекса текущего рассматриваемого решения j следующим образом: $j=j+1$; если $j \le n$, то переход к шагу 2; в противном случае – шаг 20;

20) останов алгоритма (окончание алгоритма).

После окончания алгоритма множества (массивы) *P1* и *P2* содержат значения всех решений x_i ($i = \overline{1, kp}$), которые входят в Парето-границу (множество *P(X)*), а параметр x^* представляет собой то решение, которое ближе всего находится к точке утопии.

Предложенный алгоритм может быть модифицирован следующим образом:

1) определение координат идеальной точки (координат точки утопии);

2) формирование Парето-границы для множества *X* (определение множества *P(X)* решений и соответствующих им значений критериев f_1 *и* f_2);

3) определение среди элементов множества *P(X)* такого решения x_j^*, расстояние r_{x_j} до идеальной точки $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$ для которого будет являться минимальным.

Метод уступок при определении эффективного решения x_j^* также предполагает, что первоначально должна быть сформирована Парето-граница, затем, начиная от решений с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$ и $(f_1^2, f_2^{\max})$, выполняются последовательные уступки по каждому из критериев:

1) для точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$ – уступки по критерию f_1 для получения приращения по критерию f_2;

2) для точки $(f_1^2, f_2^{\max})$ – уступки по критерию f_2 для получения приращения по критерию f_1.

Порядок последовательных уступок по критериям для поиска эффективных решений на Парето-границе комментирует Рис.3.

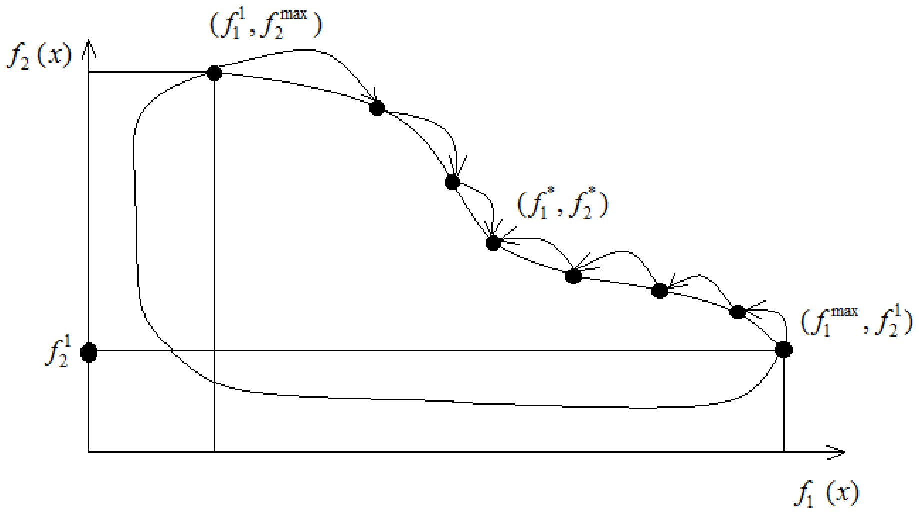


Рисунок 3– Реализация процедуры метода последовательных уступок

Реализация метода уступок предполагает, что по каждому из критериев может быть выполнена уступка (в значении этого критерия) для получения приращения по другому критерию. Т.е. может быть выполнен переход от одного решения к другому, который гарантирует при уменьшении значения одного из критериев увеличение значения другого критерия. Реализация метода предусматривает переход между решениями на Парето-границе при анализе уступок и приращений критериев f_1 и f_2. Реализация метода последовательных уступок позволит:

1) при переходе от решения с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$ путем выполнения уступки по критерию f_2 получить приращение по критерию f_1;

2) при переходе от решения с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$ путем выполнения уступки по критерию f_1 получить приращение по критерию f_2.

При этом, т.к. критерии f_1 и f_2 являются равными по важности, то величины приращений по каждому критерию (размеры приращений по критериям) должны быть если не одинаковыми, то хотя бы сравнимыми друг с другом (сравнимыми с точки зрения их величин). Если при реализации уступки по критерию f_2 (при переходе из точки с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$) получено приращение критерия f_1, обозначенное Δ_1, а при реализации уступки по критерию f_1 (при переходе из точки с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$) получено приращение критерия f_2, обозначенное Δ_2, тогда желательной является ситуация $\Delta_1 \approx \Delta_2$.

Если $\Delta_1 >> \Delta_2$ (либо $\Delta_1 > \Delta_2$), тогда на следующем шаге реализации алгоритма метода уступка по критерию f_2 для получения нового приращения Δ_1 по критерию f_1 может не выполняться, в то же время уступка по критерию f_1 для получения приращения Δ_2 по критерию f_2 должна быть выполнена. Если $\Delta_1 << \Delta_2$ (либо $\Delta_1 < \Delta_2$), тогда уступка по критерию f_1 для получения приращения Δ_2 по критерию f_2 может не выполняться, при этом уступка по f_2 для получения приращения Δ_1 по критерию f_1 должна быть выполнена. Сформулированные рассуждения должны обеспечивать одинаковый порядок приращений по каждому из критериев при реализации метода последовательных уступок.

Уступки по каждому из критериев будут продолжаться до тех пор, пока не будут определена некоторая «общая» точка критериального пространства, достижимая как из точки с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$, так и из точки с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$. Если такая точка не может быть найдена (т.е. не может быть выполнено одинакового количества уступок по каждому критерию для определения «общей» точки), тогда по каждому критерию выбираются те повторяющиеся решения, которые уже были выбраны (рассмотрены) до этого при реализации уступок по противоположному критерию, т.е.: 1) при реализации уступки по критерию f_2 определяется решение, которое уже было рассмотрено при выполнении уступок по критерию f_1; 2) при реализации уступки по критерию f_1 выполняется переход к решению, которое уже было рассмотрено при выполнении уступок по критерию f_2. При этом выполнение приведенных выше условий фиксируется одновременно, алгоритм реализации дальнейших уступок останавливается, а в качестве действующего (эффективного) решения может быть выбрано любое из двух решений, на которых алгоритм последовательных уступок был остановлен.

Для реализации метода последовательных уступок при сформированной Парето-границе в рассмотрение введены следующие дополнительные обозначения (дополняющие введенные выше в рассмотрение обозначения):

1) $P11$– множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P11$), соответствующее множеству $P1$, используемое при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$, $P21$– множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е.

$f_2(x_i) \in P21$), соответствующее множеству $P2$, используемое при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$;

2) $P12-$ множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P12$), соответствующее множеству $P1$, используемое при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$, $P22-$ множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_2(x_i) \in P22$), соответствующее множеству $P2$, используемое при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

3) $i1-$ индекс элементов векторов (множеств) $P\tilde{O}1, P11, P21$ при реализации уступок по критерию f_2;

4) $i2-$ индекс элементов векторов (множеств) $P\tilde{O}2, P12, P22$ при реализации уступок по критерию f_1;

5) $PX1$ – множество решений $x_i \in P(X)$, которым соответствуют значения критериев $f_1(x_i) = P11_{i1}$ и $f_2(x_i) = P21_{i2}$ при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$

4) $PX2$ – множество решений $x_i \in P(X)$, которым соответствуют значения критериев $f_1(x_i) = P12_{i1}$ и $f_2(x_i) = P22_{i2}$ при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

8) *delta1*– параметр, определяющий общую величину приращения по критерию f_1 при реализации уступок по критерию f_2 при переходе из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$;

9) *delta2*– параметр, определяющий общую величину приращения по критерию f_2 при реализации уступок по критерию f_1 при переходе из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

Первоначальная инициализация значений параметров алгоритма выполняется следующим образом: *delta1=0; delta2=0.* В соответствии с введенными обозначениями порядок шагов алгоритма метода последовательных уступок следующий (при условии сформированной предварительно Парето-границы и множеств $P1$ и $P2$ значений критериев $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$):

1) на основе множества решений PX и множеств $P1$ и $P2$ значений критериев f_1 и f_2 реализовать инициализацию значений элементов множеств $PX1$ и $PX2$, $P11$ и $P21$, $P12$ и $P22$ следующим образом: $PX1 = PX2 = PX$, $P11 = P12 = P1$, $P21 = P22 = P2$ (множества $PX1, P11$, $P21$ используются для реализации уступок по критерию f_2, множества $PX2$, $P12$, $P22$ для реализации уступок по критерию f_1);

2) элементы множеств (векторов) сортируются по: убыванию значений критерия f_2 для вектора (множества) $P21$, по возрастанию критерия f_1 для вектора (множества) $P12$;

3) в соответствии с выполненным упорядочиванием элементов векторов (множеств) $P21$ и $P12$ реализовать упорядочивание элементов связанных с ними векторов (множеств) $PX1$ и $P11$; $PX2$ и $P22$; тогда элементы всех векторов (множеств) будут упорядочены следующим образом: а) $P11$, $P21$, $PX1$ – в соответствии с убыванием значений критерия f_2, б) $P12$, $P22$, $PX2-$ в соответствии с убыванием критерия f_1; первые элементы в векторах $P11$ и $P21$ имеют значения f_1^2 и f_2^{max}, а первый элемент в векторе $PX1$ соответствует решению x_j с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$; первые элементы в векторах $P12$ и $P22$ имеют значения f_1^{max} и f_2^1, а первый элемент в векторе $PX2$ соответствует решению x_j с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

4) значение индекса *i1* элементов в векторах (множествах) $P11$, $P21$, $PX1$ задается равным 2 (*i1=2*);

5) значение индекса *i2* элементов в векторах (множествах) $P12$, $P22$, $PX2$ задается равным 2 (*i2=2*);

6) реализуется сравнение элементов векторов (множеств) $P11_{i1}$ и $P12_{i2}$, $P21_{i1}$ и $P22_{i2}$; если выполняются условия $p11_{i1} = p12_{i2}$ и $P21_{i1} = P22_{i2}$, то выполненные уступки позволили получить некоторое «общее» решение (при упорядочивании векторов (множеств) $P11$, $P21$ в

соответствии с убыванием значений критерия f_2 и упорядочивании векторов (множеств) $P12$, $P22$ в соответствии с возрастанием значений критерия f_1 выполнение первого равенства гарантирует автоматическое выполнение второго), в этом случае $x^* = PX1_{i1}$, выполнить переход на шаг 12;

7) если условия $P11_{i1} = P12_{i2}$ и $P21_{i1} = P22_{i2}$ не являются истинными (не выполняются), то реализуется следующая проверка: $P11_{i1} = P12_{i2-1}$ и $P22_{i2} = P21_{i1-1}$; если данные условия выполняются, то решение x_{i1} было рассмотрено ранее при выполнении уступки по критерию f_1, решение x_{i2} также было рассмотрено ранее при выполнении уступки по критерию f_2; в этом случае «общее» решение, достигаемое путем реализации уступок по критериям f_1 и f_2, получено быть не может; в этом случае выполняется вычисление значений параметров *delta1* и *delta2* следующим образом:

$$delta1 = delta1 + (P11_{i1} - P11_{i1-1});$$

$$delta2 = delta2 + (P22_{i2} - P22_{i2-1});$$

в том случае, если $delta1 > delta2$, то в качестве эффективного решения выбирается решение $x^* = x1_{i1}$; при $delta1 < delta2$ эффективным выбирается решение $x^* = x2_{i2}$; при $delta1 = delta2$ в качестве эффективного решения может быть выбран любой из элементов $x1_{i1}$ либо $x2_{i2}$ множеств $X1$ и $PX2$ (т.е. $x^* = px1_{i1}$ либо $x^* = px2_{i2}$), выполняется переход на шаг 10; при невыполнении условий $P11_{i1} = P12_{i2-1}$ и $P22_{i2} = P21_{i1-1}$ реализуется переход на шаг 8;

8) выполняется вычисление значений параметров *delta1* и *delta2* следующим образом:

$$delta1 = delta1 + (P11_{i1} - P11_{i1-1});$$

$$delta2 = delta2 + (P22_{i2} - P22_{i2-1});$$

9) определение значений индексов элементов векторов (множеств) $P11$ и $P21$, $P12$ и $P22$ выполняется следующим образом:

если $delta1 > delta2$, то $i2 = i2 + 1$, индекс $i1$ остается без изменения, реализуется переход на шаг 7;

если $delta1 < delta2$, то $i1 = i1 + 1$, индекс $i2$ остается без изменения, реализуется переход на шаг 7;

если $delta1 = delta2$, то $i1 = i1 + 1$ и $i2 = i2 + 1$, реализуется переход на шаг 7;

10) окончание алгоритма.

Реализация приведенного алгоритма позволяет определить единственное решение на Парето-границе, эффективное с точки зрения приращений по критериям f_1 и f_2 при реализации уступок по критериям f_2 и f_1.

3. Программа выполнения работы

3.1. Для первого и третьего вариантов в соответствии с заданием необходимо реализовать следующий порядок действий для выполнения лабораторной работы:

а) разработать процедуру определения на основе задаваемого множества решений X и соответствующих им значений критериев f_1 и f_2 множества $P(X)$, представляющего собой Парето-границу X;

б) разработать процедуру определения координат идеальной точки (f_1^{max}, f_2^{max}) (точки утопии);

в) разработать процедуру расчета расстояния r_{x_i} до точки утопии для координат текущего рассматриваемого решения x_i;

г) разработать процедуру определения эффективного решения x^*, расстояние r_{x^*} до которого от идеальной точки (f_1^{max}, f_2^{max}) является минимальным.

3.1. Для второго варианта в соответствии с заданием необходимо реализовать следующий порядок действий для выполнения лабораторной работы:

а) разработать процедуру определения на основе задаваемого множества решений X и соответствующих им значений критериев f_1 и f_2 множества $P(X)$, представляющего собой Парето-границу X;

б) разработать процедуру определения решений x_i с координатами точек (f_1^{max}, f_2^1) и (f_1^2, f_2^{max}) в критериальном пространстве;

в) разработать процедуру упорядочивания векторов (множеств) $PX1, P11, P21$ по убыванию значений критерия f_2, начиная от значения f_2^{max}, векторов (множеств) $PX2, P12, P22$ по убыванию значений критерия f_1, начиная от значения f_1^{max};

г) разработать процедуру, реализующую переход между решениями в множестве (векторе) $PX1$ при осуществлении уступок по критерию f_2 и приращении по критерию f_1, в множестве (векторе) $PX2$ при осуществлении уступок по критерию f_1 и приращении по критерию f_2; кроме перехода между решениями в разрабатываемой процедуре требуется предусмотреть контроль выполнения условий реализации уступок на каждом шаге алгоритма, контролировать условие окончания процесса реализации перехода между решениями (контролировать условие окончания процесса осуществления уступок при переходе между решениями).

4. Задание на работу

Вариант 1. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{ x_i, i = \overline{1,10} \}$ выполнить определение эффективных решений двухкритериальной задачи выбора с использованием метода идеальной точки. Значения критериев f_1 и f_2 для соответствующих решений x_i $(i = \overline{1,10})$ сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2
x_1	3	2
x_2	4	5
x_3	5	3
x_4	8	3
x_5	6	2
x_6	3	8
x_7	6	4
x_8	2	5
x_9	6	4
x_{10}	2	5

Вариант 2. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{ x_i, i = \overline{1,10} \}$ выполнить определение эффективных решений двухкритериальной задачи выбора с использованием метода последовательных уступок. Значения критериев f_1 и f_2 для соответствующих решений x_i $(i = \overline{1,10})$ сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2
x_1	3	2
x_2	5	6
x_3	5	3
x_4	8	4
x_5	6	2
x_6	3	8
x_7	6	4
x_8	2	5
x_9	9	2
x_{10}	3	9

Вариант 3. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{ x_i, i = \overline{1{,}10} \}$ выполнить определение эффективных решений трехкритериальной задачи выбора с использованием метода идеальной точки. Значения критериев f_1, f_2 и f_3 для соответствующих решений x_i ($i = \overline{1{,}10}$) сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2	f_3
x_1	3	2	2
x_2	5	6	4
x_3	5	3	3
x_4	8	4	4
x_5	6	2	6
x_6	3	8	5
x_7	6	4	3
x_8	2	5	2
x	9	2	5
x_{10}	3	5	2

5. Контрольные вопросы

5.1. В чем заключаются условия доминирования вектора $f(x_j)$ со стороны вектора $f(x_i)$ (условие для выполнения отношения $x_i \succ x_j$ при многих критериях).

5.2. В чем заключаются условия, в соответствии с которыми решение x_i несравнимо с решением x_j с использованием отношения предпочтения (при векторном критерии f).

5.3. В чем состоит смысл аксиомы Парето о предпочтениях ЛПР с точки зрения условия доминирования вектора $f(x_j)$ вектором $f(x_i)$.

5.4. В чем заключается условие формирования Парето-границы множества решений X с точки зрения аксиомы Парето о доминировании решений, какой вид имеет формализация этого условия.

5.5. Каким образом осуществляется определение эффективных решений в множестве X с точки зрения принципа Эджворта-Парето.

5.6. Каковы особенности определения решений, входящих в Парето-границу с точки зрения аксиомы о предпочтениях ЛПР (для двухкритериальной задачи).

5.7. В чем состоит понятие идеальной точки (точки утопии) и как она используется при определении эффективного решения на Парето-границе.

5.8. В чем состоит алгоритм метода построения Парето-границы множества решений *X* (определить обобщенно последовательность шагов).

5.9. Проверка каких условий включения текущего рассматриваемого решения в границу Парето и каким образом реализуется в алгоритме метода формирования *P(X)*.

5.10. Истинность каких условий в алгоритме метода формирования *P(X)* позволяет исключить решение из Парето-границы.

5.11. Истинность каких условий в алгоритме метода формирования *P(X)* позволяет не включать решение в Парето-границу.

5.12. Каким образом в методе идеальной точки выполняется выбор эффективного решения на Парето-границе.

5.13. В чем состоит подход к определению эффективных решений в методе последовательных уступок.

5.14. В чем заключается условие реализации на следующем шаге алгоритма уступки по одному (либо по каждому) из критериев в одноименном методе.

5.15. В чем состоит алгоритм метода последовательных уступок при условии использования сформированной Парето-границы.

5.16. Истинность каких условий позволяет выполнить остановку алгоритма метода последовательных уступок.

5.17. В чем заключаются причины использования метода идеальной точки и метода последовательных уступок при поиске эффективных решений на Парето-границе.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. **Цель работы:** исследовать применение аппарата теории важности критериев при принятии решений по выбору альтернатив

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия теории важности критериев

Основное понятие, используемое при решении многокритериальных задач – это понятие относительной важности критериев. С точки зрения важности критериев определены понятия «один критерий важнее другого», «критерии равноважны» (имеют одинаковую важность), на основе этих понятий сформулирована качественная теория важности критериев. Развитие качественной теории важности критериев определило количественное сравнение важности критериев (т.е. «во сколько раз один критерий важнее другого»).

Математическая модель задачи принятия решений при многих критериях и учете их (критериев) важности имеет вид: X – множество решений; K – векторный критерий; $\succ, \sim$ – отношения предпочтения и безразличия ЛПР соответственно; x_i - некоторое i-е решение, характеризуется значениями критериев $K_j(j=\overline{1,m})$; K_j – некоторый частный критерий. Тогда векторный критерий K имеет вид $K=(K_1,K_2,...,K_m)$, т.е. векторный критерий K – это упорядоченный набор критериев. Тогда решение x_i характеризуется векторный его оценкой в виде $K(x_i)=(K_1(x_i),K_2(x_i),...,K_m(x_i))$. Через K^j может быть обозначено множество возможных значений критерия K^j, тогда $K^X = \underset{i=1}{\overset{m}{X}} K^j$ - множество всех векторных оценок, соответствующих возможным решениям, где X – декартово произведение множеств.

Пример постановки задачи многокритериального принятия решений.

Определено (задано) множество из 7 студентов, каждый из которых получил оценки по 4 предметам, тогда $|X|=7$, количество критериев равно 4, k_{ij} – оценки j-го критерия для i-го студента (т.е. оценка для i-го студента по j-му предмету). Таким образом, $X=\{x_1,x_2,...,x_7\}$, шкала для каждого критерия имеет вид $\{2,3,4,5\}$. Полученные данные сведены в Таблицу 1.

Таблица 1. Скалярные оценки k_{ij} критериев K_j для решений x_i ($i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,4}$)

Варианты	Критерии			
	K_1	K_2	K_3	K_4
x_1	3	5	5	4
x_2	4	4	4	5
x_3	5	4	3	3
x_4	3	5	3	5
x_5	4	2	4	5
x_6	3	5	3	5
x_7	5	3	4	3

Требуется выбрать лучшего по успеваемости студента из семи претендентов, учитывая оценки по четырем предметам. Наряду с приведенными векторными оценками $K(x_i)$ вариантов могут быть указаны возможные векторные оценки, тогда $K^X = \underset{j=1}{\overset{4}{X}} K^j$, $|K^X| = 256$. Сравнение вариантов осуществляется на основе их векторных оценок. Варианты x_4 и x_6 являются эквивалентными ($x_4 \sim x_6$).

Если через $\succ$ обозначено отношение предпочтения, тогда для x_2 и x_5 является верным:
$(4,4,4,5) \succ (4,2,4,5)$, т.к. для оценок $k_{2j} \geq k_{5j} (j = \overline{1,4})$, а по критерию k_2 решение x_2 строго лучше решения x_5 ($k_{22} > k_{52}$). Таким образом, решение x_2 является предпочтительнее решения x_5, так как по всем оценкам $k_{2j} \geq k_{5j}$, а по одной оценке вариант x_2 строго лучше x_5 ($k_{22} > k_{52}$), тогда $x_2 \succ x_5$. Для векторных оценок $(3,5,5,4)$ и $(4,4,4,5)$ отношение $\succ$ не реализуется, так как однозначно для них введенные условия предпочтения не выполняются. Таким образом, $(3,5,5,4) \bar{\succ} (4,4,4,5)$ и $(4,4,4,5) \bar{\succ} (3,5,5,4)$ в итоге $x_1 \bar{\succ} x_2$, $x_2 \bar{\succ} x_1$ и векторные оценки для решений x_1, x_2 и сами эти решения являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$. Аналогичные выводы могут быть сделаны для пар решений: $(x_1, x_3), (x_1, x_4)$, (x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_1, x_7), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_7). Таким образом, приведенные в парах решения являются несравнимыми по отношению $\succ$. Так для решений x_1 и x_6 вектора оценок имеют вид: $(3,5,5,4)$ и $(3,5,3,5)$, для критерия K_4 имеем $k_{64} > k_{14}$, хотя $k_{1j} \geq k_{6j} (j = \overline{1,3})$, поэтому x_1 и x_6 – несравнимы.

Если $x_i \succ x_j$ выполняется, то решение x_j является доминируемым и не может быть выбрано наилучшим.

Решение x_i^* такое, что $\forall x_j \in X$, $x_j \bar{\succ} x_i^*$ называется недоминируемым (оптимальным по Эджворту-Парето). Множество таких решений – множество Эджворта-Парето обозначим как X^*. Решение x_5 доминируется решением x_2, а все остальные решения являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$, то для рассматриваемого случая имеем $X^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ при этом $x_4 \sim x_6$. Т.к. $|X^*| > 1$, то не может быть выбрано решение x_i^* являющееся наилучшим, поэтому должна быть привлечена дополнительная информация о предпочтениях ЛПР. Для этого могут быть использованы следующие виды дополнительной информации: 1) сведения об относительной важности критериев; 2) сведения о шкалах критериев. Вид дополнительной информации обозначим как Ω, тогда $\sim_\Omega$ и $\succ_\Omega$ – отношения, вытекающие из этой информации.

Простейший способ скаляризации оценок критериев K_j - это формирование обобщенного критерия на основе аддитивной свертки следующим образом:

$$\Phi = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_m K_m, \tag{1}$$

где Φ – обозначение оценки обобщенного (агрегированного) критерия, $\alpha_i (i = \overline{1,m})$ – коэффициенты важности (веса) критериев, $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$.

В случае одинаковой важности критериев $\alpha_i = 1/m$, а значение Φ для рассматриваемого примера представляет собой средний балл. Т.к. в рассматриваемом случае разные дисциплины могут иметь разную значимость, следовательно должна быть определена относительная важность критериев и значения α_i в выражении (1). Таким образом, базовые методы анализа (и решения) многокритериальных задач основаны на свертывании набора исходных критериев в один обобщенный (агрегированный, в частности используется аддитивная свертка) критерий, имеющий вид взвешенный при помощи коэффициентов важности суммы исходных критериев. Однако данные методы обладают рядом недостатков, ограничивающих их использование.

При многокритериальном принятии решений должна быть учтена информация о предпочтениях ЛПР (какой из критериев является более предпочтительным), выраженная в виде сведений об относительной их (критериев) важности. При этом сведения об относительной важности критериев должны быть строго формализованы.

2.2. Использование качественной теории важности критериев при принятии решений

Определение важности критериев возможно в случае их (критериев) однородности, т.е. критерии должны иметь сопоставимый вид. Условиями однородности критериев являются: 1) наличие единой (общей) шкалы; 2) каждая градация шкалы должна отражать одинаковый уровень предпочтений для каждого критерия.

Требованиями для градаций шкалы (требованиями к шкале) являются: 1) градации нумеруются в порядке возрастания предпочтительности оценок критериев, для работы с которыми используются шкалы; 2) номера градаций шкалы отражают упорядоченность оценок критерия по предпочтениям; 3) с номерами градаций не могут быть выполнены какие-либо арифметические операции для получения оценок предпочтений; 4) решения (для реализации требования их однородности) оцениваются по всем критериям в единой бальной шкале, при этом градации шкалы (отражающие степень предпочтения одного решения перед другим) для всех критериев являются одинаковыми.

В этом случае используемая для определения оценок критерия (критериев) шкала (шкалы) является качественной, все критерии являются однородными, т.е. имеют единую порядковую шкалу. В случае неоднородных критериев (вес, стоимость, площадь) перед сравнением этих критериев по важности их нужно привести к единой порядковой шкале с одинаковым числам градаций q. Т.е. критерии не нормализуются по формуле k_i / k_{max}, а их исходная шкала разделяется на q частей таким образом, чтобы некоторый l-ый интервал исходной шкалы соответствовал l-ой градации обобщенной шкалы. Тогда любое значение k_{ij} критерия K_j, принадлежащее l-му интервалу, интерпретируется как l-я градация формируемой единой шкалы.

Качественными оценками важности критериев являются суждения вида: «Критерий K_i важнее критерия K_j». Для формализации важности критерия K_i по отношению (по сравнению) с критерием K_j также как и для решений может быть использовано отношение предпочтения $\succ$ и безразличия (эквивалентности) ~. Т.е. выражение вида $K_i \succ K_j$ означает, что критерий K_i важнее (предпочтительнее) критерия K_j, а $K_i \sim K_j$ – что критерии являются эквивалентными. Если $K_1 \succ K_2$ и $K_2 \sim K_3$, то критерий K_1 важнее критерия, а критерии K_2 и K_3 эквивалентны.

Обозначим через $K(x)$ некоторую векторную оценку для решения x. Вид векторной оценки: $K(x)=(K_1(x),K_2(x),..,K_m(x))$. Через $K^{ij}(x)$ обозначим векторную оценку решения x, полученную из оценки $K(x)$ путем перестановки в ней i-ой и j-ой компонент (т.е. k_i и k_j).

Пример формирования векторных оценок $K^{ij}(x)$. Исходная векторная оценка: $K(x)=(5,4,3,4)$, $K^{14}(x)=(4,4,3,5)$, $K^{23}(x)=(5,3,4,4)$.

Критерии K_i и K_j равно важны (эквивалентны с точки зрения важности) если две векторные оценки $K(x)$ и $K^{ij}(x)$ одинаковы по предпочтению. Т.е. если перестановка значений i-го и j-го критериев в векторной оценке $K(x)$ позволяет получить векторную оценку $K^{ij}(x)$ эквивалентную $K(x)$.

Пример перестановки в векторе оценок критериев для равно важных критериев K_i и K_j. Исходная векторная оценка имеет вид $K(x)=(5,4,3,4)$. Критерии K_2 и K_3 являются равно важными (т.е. $K_2 \bar{\succ} K_3$ и $K_3 \bar{\succ} K_2$).

Тогда формируемая векторная оценка $K^{23}(x)=(5,3,4,4)$ будет являться эквивалентной оценке $K(x)$, т.е. $(5,4,3,4) \sim (5,3,4,4)$ при $K_2 \sim K_3$ (где $\sim$ – отношение эквивалентности, т.е. критерии не различаются с точки зрения их важности и векторные оценки тоже не могут быть сравнимы с использованием отношения $\succ$, векторные оценки фактически не изменились при перестановке значений критериев). Т.е. перестановка оценок k_i и k_j соответствующих критериев позволяет получить для дальнейшего анализа вектор оценок $K^{ij}(x)$, который эквивалентен исходному вектору $K(x)$.

Пример перестановки в векторе оценок критериев при условии разной важности критериев.

Критерий K_1 является более важным, чем критерий $K_2 (K_1 \succ K_2)$. Исходная оценка имеет вид $K(x)=(5,4,3,4)$. Тогда оценка $K^{12}(x)=(4,5,3,4)$. При этом полученная оценка не является эквивалентной исходной оценке $K(x)$, т.к. рассматриваемые критерии не равны по важности. Т.к. критерий K_1 более важный, чем критерий K_2, то получаемая оценка $(4,5,3,4)$ является худшей, чем исходная оценка $(5,4,3,4)$ по значению первого (более важного критерия). Таким образом, исходная оценка $K(X)=(5,4,3,4)$, оценка $K^{12}(x)=(4,5,3,4)$. При этом $(5,\overline{4,3},4) \sim (4,5,3,4,)$, т.к. $K_1 \succ K_2$, то $(5,4,3,4) \succ (4,5,3,4)$.

Таким образом, с точки зрения качественной теории важности критериев возможны следующие ситуации: $K_i \succ K_j$, $K_j \succ K_i$, $K_i \sim K_j$, K_i и K_j являются несравнимыми по важности $(K_i \bar{\succ} K_j, \overline{K}_j \bar{\succ} K_i, K_i \sim K_j)$.

Введем в рассмотрение обозначения: $\sim_{ij}$ – отношение эквивалентности векторных оценок, вторая из которых получена путем перестановки *i*-го и *j*-го элементов в первой; $\succ_{ij}$– отношение предпочтения векторных оценок, вторая из оценок получена путем перестановки *i*-го и *j*-го элементов в первой. Тогда в рассмотренных примерах $(5,4,3,4) \sim_{23} (5,3,4,4)$ и $(5,4,3,4) \succ_{12} (4,5,3,4)$. Т.е. предпочтение векторных оценок вида $(3,5,4,5) \succ (3,5,3,5)$– это предпочтение, полученное в результате сравнения значений скалярных оценок критериев на соответствующих позициях, а $(3,5,5,4) \succ_{34} (3,5,4,5)$ - предпочтение первой векторной оценки перед второй, полученной в результате перестановки скалярных оценок в 3-ей и 4-ой позициях при условии разной важности критериев K_3 и $K_4 (K_3 \succ K_4)$, при этом по критерию K_3 в полученной оценке меньшее значение.

Дополнительной информацией Ω для определения предпочтений ЛПР с точки зрения важности критериев, используемой для принятия решений, является информация о предпочтительности (важности) критериев или их эквивалентности (безразличии при анализе оценок для соответствующих критериев). Пример дополнительной информации о предпочтениях ЛПР, используемой в рассуждениях выше, имеет вид: $\Omega = \{ k_1 \succ k_2, k_2 \sim k_3, k_3 \succ k_4 \}$.

Таким образом, комбинируя отношения $\succ_{ij}$,$\sim_{ij}$ и отношение $\succ$ для векторных оценок (соответственно, решений), можно выполнить сравнение по предпочтению всех векторных оценок с использованием информации Ω.

Тогда могут быть определены (сформированы) новые отношения $\succ$, порождаемые информацией о предпочтениях ЛПР с точки зрения важности критериев Ω. Обозначим отношение предпочтения $\succ$, формируемое для векторных оценок решений x с использованием дополнительной информации Ω через $\succ_{\Omega}$.

Пример использования качественной информации о важности критериев Ω при решении двухкритериальной задачи. Вид информации $\Omega = \{K_1 \succ K_2\}$, даны две векторные оценки $K(x_1)=(5,3)$, $K(x_2)=(2,4)$.

Т.к. векторные оценки не сравнимы между собой (т.е. $(5,3)\bar{\succ}(2,4)$ и $(2,4)\bar{\succ}(5,3)$ и $x_1\bar{\succ}x_2$, $x_2\bar{\succ}x_1$) тогда при отсутствии предпочтений ЛПР с точки зрения важности критериев эффективное решение не может быть определено.

При учете информации $\Omega=\{K_1 \succ K_2\}$ о важности критериев в векторной оценке $K(x_1)=(5,3)$ выполнена перестановка скалярных оценок (в позициях 1 и 2, соответствующих информации Ω). В результате получена модифицированная векторная оценка $K^{12}(x_1)=(3,5)$. Т.к. для критериев K_1 и K_2 выполняется $K_1 \succ K_2$, тогда для оценок $K(x_1)$ и $K^{12}(x_1)$ выполняется $K(x_1)\succ_{12} K^{12}(x_1)$ (т.к. значение по первому критерию является более важным, чем значении по второму), т.е. $(5,3)\succ_{12}(3,5)$. Полученная оценка $K^{12}(x_1)$ может быть соотнесена с оценкой $K(x_2)$, при этом $(3,5)\succ(2,4)$ или $K^{12}(x_1)\succ K(x_2)$. В итоге получены две пары отношений: для $K(x_1)$, $K^{12}(x_1)$ и $K^{12}(x_1)$, $K(x_2)$ в виде: $(5,3)\succ_{12}(3,5)$ и $(3,5)\succ(2,4)$ (либо $K(x_1)\succ_{12} K^{12}(x_1)$ и $K^{12}(x_1)\succ K(x_2)$), которые в сокращенной форме могут быть записаны в виде последовательности отношений: $(5,3)\succ_{12}(3,5)\succ(2,4)$.

Т.к. через $\succ_\Omega$ обозначено отношение предпочтения, полученное с использованием дополнительной информации Ω о важности критериев, тогда $(5,3)\succ_\Omega(2,4)$, $K(x_1)\succ_\Omega K(x_2)$.

Пример использования дополнительной информации Ω о равной важности критериев K_1 и K_2 при выборе эффективного решения.

Вид информации $\Omega=\{K_1\sim K_2\}$, вид векторных оценок $K(x_1)=(5,3)$, $K(x_2)=(2,4)$. Тогда $(5,3)\bar{\succ}(2,4)$, $(2,4)\bar{\succ}(5,3)$, $x_1\bar{\succ}x_2$, $x_2\bar{\succ}x_1$, $(5,3)\sim(2,4)$ (где ~ – отношение безразличия (не сравнимости) двух векторных оценок и, соответственно, решений). Использование информации Ω о равной важности критериев для ЛПР позволяет на основе оценки $K(x_1)=(5,3)$ сформировать оценку $K^{12}(x_1)$ в виде: $K^{12}(x_1)=(3,5)$. При этом $K(x_1)\sim_{12}K^{12}(x_1)$, так как при этом $K^{12}(x_1)\succ K(x_2)$, то следовательно $K(x_1)\succ_\Omega K(x_2)$ и $x_1\succ_\Omega x_2$.

Вариант (решение) x_i^*, такой, для которого не существует решений x_j таких, что $x_j\succ_\Omega x_i^*$ называется не доминируемым (по отношению $\succ_\Omega$), т.е. $\forall x_j \mid x_j\bar{\succ}_\Omega x_i^*$. Таким образом, решение x_i^* является не доминируемым по отношению $\succ_\Omega$, т.е. с учетом дополнительной информации о важности критериев. Тогда может быть сформировано множество X_Ω не доминируемых решений: $X_\Omega=\{x_i \mid \forall x_j, x_j\bar{\succ}_\Omega x_i\}$. Только среди этих решений может быть выбрано эффективное.

Алгоритм формирования множества X_Ω содержит рассматриваемую ниже последовательность шагов:

1) сформировать первоначальный вид множества не доминируемых решений следующим образом: $X_\Omega=\{x_i \mid i=\overline{1,n}\}$, где n - общее количество решений;

2) выполнить проверку условия доминирования решением x_i решения x_l (условие вида $k_{ij}\geq k_{lj}$ для всех j и $k_{ij'}>k_{lj'}$ для одного j'), при этом $l=\overline{1,n}$; если условие доминирования решения x_l решением x_i выполняется, то исключить x_l из множества не доминируемых решений $X_\Omega : X_\Omega = X_\Omega \setminus x_l$;

3) шаг 2 повторить для каждого решения x_i $(i=\overline{1,n})$, исключая из множества X_Ω на каждом шаге доминируемые решения x_l ;

4) для решения x_i в соответствии с информацией о важности критериев Ω, содержащей отношение предпочтения для критериев $K_j \succ K_h$, сформировать на основе векторной оценки $K(x_i)$ новую векторную оценку $K^{jh}(x_i)$, получаемую в результате перестановок значений скалярных критериев K_j и K_h (значения k_{ij} и k_{ih});

5) проверить выполнение условия доминирования для векторных оценок $K(x_i)$ и $K^{jh}(x_i)$, если условие $K(x_i) \succ_{jh} K^{jh}(x_i)$ выполняется, тогда выполнить проверку условия доминирования векторных оценок $K(x_l)$ векторной оценкой $K^{jh}(x_i)$ (при этом проверка выполняется последовательно для каждого l-го решения, где $l=\overline{1,n}$); если условия доминирования оценки $K(x_l)$ оценкой $K^{jh}(x_i)$ выполняется (т.е. $K^{jh}(x_i) \succ K(x_l)$ и, соответственно, $K(x_i) \succ_\Omega K(x_l)$), то решение $K(x_l)$ исключается из множества X_Ω как доминируемое : $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_l$;

6) изменение индекса текущего рассматриваемого решения x_i (переход к следующему решению), доминирование которым остальных решений x_l $(l=\overline{i+1,n})$ в соответствии с отношением $\succ_\Omega$ будет исследоваться (при учете текущей информации о важности критериев $K_j \succ K_h$); если решение x_i , для которого исследуется доминирование им остальных решений x_l $(l=\overline{i+1,n})$, имеется в наличии $(i \le n)$, тогда выполнить переход к шагу 4;

7) если для всех решений $x_i \in X_\Omega$ выполнена проверка доминирования ими (текущим рассматриваемым решением x_i) других решений x_l $(l=\overline{i+1,n})$ в соответствии о текущей информацией о важности критериев $K_j \succ K_h$, то в Ω выполнить переход к следующей информации о важности критериев $(K_{j'} \succ K_{h'})$, если $|X_\Omega| > 1$ и в Ω имеется информация о важности критериев $K_{j'} \succ K_{h'}$, то выполняется переход к шагу 4;

8) если в Ω дополнительная информация о предпочтительности критериев $(K_{j'} \succ K_{h'})$ отсутствует, то выполняется переход к информации об эквивалентности критериев $K_j \sim K_h$;

9) в соответствии с информацией об одинаковой важности критериев K_j и K_h для некоторого решения x_i на основе его векторной оценки $K(x_i)$ формируется новая векторная оценка $K^{jh}(x_i)$, где j и h - позиции в векторе критериев, являющихся одинаковыми по важности; полученная оценка $K^{jh}(x_i)$ в силу равной важности критериев K_j и $K_h (K_j \sim K_h)$ является эквивалентной исходной оценке $K(x_i)$ (т.е. проверять условие доминирования $K(x_i) \succ_{jh} K^{jh}(x_i)$ не требуется, $K(x_i) \sim K^{jh}(x_i)$);

10) проверка выполнения условия доминирования векторных оценок $K(x_l)$ $(l=\overline{i+1,n})$ полученной векторной оценкой $K^{jh}(x_i)$; если условие доминирования оценки $K(x_l)$

оценкой $K^{jh}(x_i)$ (условие $K^{jh}(x_i) \succ K(x_l)$) выполняется, тогда реализуется $K(x_i) \succ_{\Omega} K(x_l)$ (т.е. доминирование с учетом дополнительной информации о равной важности критериев); тогда решение x_l исключается из X_{Ω} как доминируемое : $X_{\Omega} = X_{\Omega} \setminus x_l$;

11) изменение индекса рассматриваемого решения x_i (переход к следующему решению), т.е. выполняется переход к решению, доминирование которым остальных решений x_l ($l = \overline{i+1,n}$) будет исследоваться (при учете дополнительной информации об одинаковой (равной) важности критериев K_j и K_h ($K_j \sim K_h$)); при наличии решения x_i (условие $i \le n$), доминирование которым решений x_l при учете $K_j \sim K_h$ будет исследоваться, выполняется переход к шагу 9;

12) в случае, если проверка для всех x_i ($i = \overline{1,n}$) условия доминирования ими решений x_l ($l = \overline{i+1,n}$) (с учетом текущей рассматриваемой дополнительной информации $K_j \sim K_h$) выполнена, тогда при условии $|X_{\Omega}| > 1$ в Ω выделяется информация, касающаяся эквивалентности других критериев ($K_{j'} \sim K_{h'}$), индекс текущего рассматриваемого решения задается равным 1($i = 1$, рассматривается решение x_1), выполняется переход к шагу 9.

Примечание. Необходимость исключения решений x_l из множества X_{Ω} исследуется первоначально с точки зрения разной важности критериев K_j и K_h (предпочтений для критериев K_j и K_h – $K_j \succ K_h$), а затем с точки зрения одинаковой важности критериев ($K_j \sim K_h$). Это объясняется тем, что дополнительная информация Ω, используемая при принятии решений, представляется в виде двух матриц – первая матрица A_1 предпочтений для критериев ($a_{jh} = 1$ если $K_j \succ K_h$ и $a_{jh} = 0$, если $K_j \overline{\succ} K_h$, $j = \overline{1,n}, h = \overline{1,n}$), вторая матрица A_2 «эквивалентных» критериев (критериев, имеющих одинаковую важность, $K_j \sim K_h$).

Пример матрицы предпочтений критериев и матрицы отношения эквивалентности критериев (с одинаковой (равной) важностью).

$$A_1 = \begin{array}{c|cccc|} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; \qquad A_2 = \begin{array}{c|cccc|} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Пример применения алгоритма многокритериального поиска эффективных решений при учете важности критериев для задачи ранжирования студентов.

Информация о важности критериев имеет следующий вид: $\Omega = \{ K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ K_4 \}$. Векторные оценки $K(x_i)$ для каждого решения x_i приведены в Таблице 1. Рассматривается решение x_1. Т.к. $K_3 \succ K_4$, то на основе векторной оценки $K(x_1) = (3{,}5{,}5{,}4)$ может быть сформирована модифицированная векторная оценка $K^{34} = (3{,}5{,}4{,}5)$. Однако оценка $K(x_1) = (3{,}5{,}5{,}4)$ предпочтительной оценки $K^{34}(x_1) = (3{,}5{,}4{,}5)$ в силу важности: критериев ($K(x_1) \succ_{34} K^{34}(x_1)$ или $(3{,}5{,}5{,}4) \succ_{34} (3{,}5{,}4{,}5)$). Сравниваем векторную оценку $K^{34}=(3{,}5{,}4{,}5)$ с векторной оценкой $K(x_4)=(3{,}5{,}3{,}5)$ с точки зрения выполнения условия $k_{1j}\geq k_{4j}$ для всех k_{ij} $(i=\overline{1{,}4})$ и для одного $k_{13}>k_{43}$. Т.к. эти условия выполняются, то $x_4\notin X_{\Omega}$, при этом т.к. $x_4\sim x_6$, то $x_6\notin X_{\Omega}$. Таким образом:

$$(3{,}5{,}5{,}4)\succ_{34}(3{,}5{,}4{,}5)\succ_{\Omega}(3{,}5{,}3{,}5)\ ;\ K(x_1)\succ_{34}K^{34}(x_1)\succ_{\Omega}K(x_4)\sim K(x_6).$$

Для решения x_1 выполним модификацию его векторной оценки $K(x_1)$ следующим образом: $K(x_1)=(3{,}5{,}5{,}4)$, $K^{12}(x_1)=(5{,}3{,}5{,}4)$. Если бы оценка $K(x_1)$ доминировала оценку $K^{12}(x_1)$, тогда при $K^{12}(x_1)\succ_{\Omega}K(x_7)$ имели: $K(x_1)\succ_{\Omega}K(x_7)$, но т.к. $K(x_1)\overline{\succ}_{\Omega}K^{12}(x_1)$, то $K(x_1)\overline{\succ}_{\Omega}K(x_7)$, следовательно, решение x_7 не может быть исключено из множества X_{Ω}. Рассмотренным действием была учтена важность критериев вида $K_1\succ K_2$ в Ω. Проинтерпретируем информацию об одинаковой важности K_2 и K_3 в Ω. Для K_1 и K_2 изменение позиций оценок k_{12},k_{13} и k_{22},k_{23} не имеет смысла т.к. оценки $K(x_1)$ и $K(x_2)$ при этом не изменяются, x_4,x_5,x_6 исключены из рассмотрения, поэтому информация $K_2\sim K_3$ может быть применена только к решениям x_3 и x_7. Для решения x_3 на основе его векторной оценки $K(x_3)$ при учете $(K_2\sim K_3)$ может быть сформирована новая векторная оценка $K^{23}(x_3)=(5{,}3{,}4{,}3)$, т.к. $K_2\sim K_3$, то $K(x_3)\sim K^{23}(x_3)$. Сравнение $K^{23}(x_3)$ с $K(x_7)$ показывает, что $K^{23}(x_3)\sim K(x_7)$. Тогда может быть сформирована следующая цепочка: $K(x_3)\sim K^{23}(x_3)\sim K(x_7)$, поэтому в итоге $K(x_3)\sim K(x_7)$ и $x_3\sim x_7$. Поэтому множество недоминируемых решений X_{Ω}, сформированное с учетом информации о различной и одинаковой важности критериев, будет иметь вид: $X_{\Omega}=\{x_1,x_2,x_3,x_7\}$.

2.3. Использование количественной теории важности критериев при принятии решений

При использовании количественной теории важности критериев для принятии решений используются следующие формы задания их (критериев) важности:

1) степень превосходства в важности одних критериев над другими (критерий K_i в h раз важнее критерия K_j), степень превышения важности критерия K_i относительно критерия K_j обозначается через h, где $h>0$, понятно, что при $h>1$ критерий K_i в h раз важнее критерия K_j, при $h<1$ (для $K_i\succ K_j$) критерий K_j в $1/h>1$ раз важнее критерия K_i, при $h=1$ критерии K_i и K_j равно важны (эквивалентны по важности, т.е. $K_i\sim K_j$);

2) задание абсолютного значения важности критериев, количественно измеряемой по общей шкале важности, в этом случае важность критерия K_i имеет величину β_i, $\beta_i>0$.

Первый способ задания важности критериев связан со вторым способом с помощью следующей формулы: $h=\beta_i/\beta_j$, где h - степень превосходства важности β_i критерия K_i над важностью β_j критерия K_j.

Утверждение о степени превосходства важности критерия K_i над важностью критерия K_j в h раз обозначается следующим образом: $K_i\succ^{h}K_j$. Для обозначения количественной информации о степенях превосходства важностей критериев K_i введен в рассмотрение символ Θ (т.е. Θ – информация о важности критериев, характеризующая предпочтения ЛПР). Для использования количественной информации о важности критериев выполняется расширение исходной модели «качественной» важности критериев до так называемой N-

кратной модели (N-модели). Способ построения N-модели может быть рассмотрен на основе примера, введенного в рассмотрение выше (определение студентов, наиболее предпочтительных с точки зрения успеваемости).

Для упомянутого примера качественная информация о важности критериев K_1, K_2, K_3, K_4 имеет вид: $\Omega = \{K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ K_4\}$. Допустим, что на основе качественной информации Ω получена количественная информация Θ в следующем виде:

$$\Theta = \{ K_1 \succ^{3/2} K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ^{2} K_4 \}.$$

С точки зрения изучаемых дисциплин, каждой из которых соответствует свой критерий K_i, введенную в рассмотрение дополнительную информацию Θ о важности критериев можно прокомментировать следующим образом. Предмет 3 (критерий K_3) состоит из двух разделов, каждый из которых эквивалентен предмету 4 (критерий K_4). Т.к. предмет 3 содержит два раздела, а предмет 4 один раздел, то $K_3 \succ^{2} K_4$. Предмет 1 (критерий K_1) состоит из трех разделов, каждый из которых имеет одинаковую важность с одним из двух разделов второго предмета (критерий K_2), поэтому $K_1 \succ^{3/2} K_2$. Рассмотрим для принятия решений на основе качественной информации о важности критериев полученное в предыдущем разделе множество X_Ω. Расширенная модель принятия решений введена в следующем виде:

1) Исходное множество решений X_Ω, для которого формируется расширенная N-модель имеет вид $X_\Omega = \{ x_1, x_2, x_3, x_7 \}$;

2) для каждого решения x_i ($i \in \{1,2,3,7\}$) его векторная оценка формируется путем повторения скалярной оценки k_{ij} (где i – индекс решения, j – индекс критерия) такое количество раз, сколько равноважных разделов содержит соответствующий j-ый предмет;

3) сформированная расширенная модель с учетом количественной важности критериев примет в этом случае следующий вид (формируются новые векторные оценки):

$$K^{\Theta}(x_1) = (\underbrace{3,3,3,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{5,5,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{5,5,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^{\Theta}(x_2) = (\underbrace{4,4,4,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{5}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^{\Theta}(x_3) = (\underbrace{5,5,5,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3,3,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}});$$

$$K^{\Theta}(x_4) = (\underbrace{5,5,5,}_{\substack{1\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3,3,}_{\substack{2\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{4,4,}_{\substack{3\text{–ый}\\ \text{предмет}}} \quad \underbrace{3}_{\substack{4\text{–ый}\\ \text{предмет}}}).$$

Полученные векторные оценки $K^{\Theta}(x_i)$ могут быть проинтерпретирована как состоящие из восьми критериев с одинаковой важностью. Число повторений для критериев K_i определяется на основе значений Θ_i, соответствующих этим критериям: для критерия K_1: $n_1 = 3$; для K_2: $n_2 = 2$; для K_3: $n_3 = 2$; для K_4: $n_4 = 1$. Тогда N-модель представляет собой совокупность количества повторений скалярных оценок для каждого критерия, т.е. N-модель представляет собой вектор $N=(n_1,n_2,...,n_m)$, где m - количество критериев, который содержит количество повторений скалярных оценок k_{ij} каждого из критериев K_j. Таким образом, N-модель – это модель с $n_1+n_2+...+n_m$ скалярными оценками, где первые n_1 оценок – это повторение n_1 раз оценки k_{i1} в исходном векторе K_j, вторые n_2 оценок – это повторение n_2 раз оценки k_{i2} в исходном векторе K_j и т.д. Если N-модель в виде $N=(n_1,n_2,...,n_m)$ сформирована, то отдельный коэффициент α_i в аддитивной многокритериальной модели (аддитивная свертка) может быть определен следующим образом: $\alpha_i = n_i / \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Таким образом N - модель – это совокупность чисел n_i, каждое из которых определяет число повторений скалярной оценки k_{ij} из исходной векторной оценки в формируемом новом векторе значений.

Определение. Критерий K_i в h раз важнее критерия K_j, если на основе N-модели коэффициент важности h может быть определен следующим образом: $n_i / n_j = h$. При этом каждая из n_i оценок критерия K_i в формируемом векторе $K^{\Theta}(x_l)$ имеет равную важность с любой из n_j оценок критерия K_j в этом же векторе.

В соответствии с сформированным определением и введенным выше выражением вида $h=\beta_i/\beta_j$ приходим к выводу, что $h=n_i/n_j=\beta_i/\beta_j$, где β_i и β_j - коэффициенты важности критериев. Владея информацией о значениях β_i и β_j может быть выполнен переход к значениям n_i и n_j, формирование N-модели и ее использование для принятия решений.

Один из способов определения коэффициентов важности критериев $\beta_i (i=\overline{1,m})$ предполагает из попарное сравнение по абсолютной важности. В ходе использования данного метода строится матрица $A=(a_{ij})_{m\times m}$ парных сравнений критериев $K_1,...,K_m$ по важности. ЛПР указывает свои предпочтения относительно важности критериев следующим образом: $a_{ij}=1$ если $K_i \succeq K_j$ и $a_{ij}=0$, если $K_i \prec K_j$. Тогда важность *i*-го критерия K_i (выраженная коэффициентомх β_i), определяется формулой $\beta_i = a_i / m$ $(a_i \neq 0)$, где $a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$. Если значения β_i являются дробными (если дробная часть β_i не равна 0), а значения n_i должно быть строго целым, то для приведения β_i к требуемому виду их необходимо умножить на соответствующее натуральное число. Рассмотрим пример для двух критериев.

Пример приведения дробных значений коэффициентов важности β_o к целому виду :

1) $\beta_i = 0{,}2$; $\beta_j = 0{,}4$, следовательно, коэффициенты должны быть умножены на 10, тогда $n_i = 2$; $n_j = 4$;

2) $\beta_i = 0{,}25$; $\beta_j = 0{,}45$, следовательно, коэффициенты должны быть умножены на 100, тогда $n_i = 25$; $n_j = 45$;

Таким образом, если получены значения $n_1,n_2,...,n_m$, то N-модель может быть представлена в следующем виде: $N=(n_1,n_2,..,n_m)$. Например, если $n_1 = 2$, а $n_2 = 4$ то N-модель имеет вид $N=(2{,}4)$.

Пример построения n_i-оценок для соответствующих N-моделей.

1) если $m=2$, исходная векторная оценка $K(x_i)$ имеет вид $(2{,}5)$, а N-модель имеет вид $(3{,}4)$, тогда $K^{\Theta}(x_i)$ - оценка будет представлена в виде $K^{\Theta}(x_i)=(2{,}2{,}2{,}5{,}5{,}5{,}5)$;

2) если $m=2$, исходная векторная оценка $K(x_i)$ имеет вид $(3{,}6)$, а N - модель имеет вид $(3{,}5)$, тогда $K^{\Theta}(x_i)$ - оценка будет представлена в виде $K^{\Theta}(x_i)=(3{,}3{,}3{,}6{,}6{,}6{,}6{,}6)$.

В силу того, что в построенной N- модели (соответственно, в оценках $K^{\Theta}(x_i)$ $(i=\overline{1,m})$) все критерии являются одинаково важными, тогда для определения не доминируемых решений (решений $x_i \in X_{\Theta}$, где X_{Θ} - множество не доминируемых решений, сформированное на основе количественной информации Θ о важности критериев) используются введенные выше условия вида: $k_{ij} \geq k_{il}$ и $k_{ij'} > k_{il'}$ хотя бы для одной оценки $k_{ij'}$. Таким образом, формирование *N*-модели должно обеспечивает приведение всех критериев к одинаковой степени важности (все оценки в $K^{\Theta}(x_i)$ являются равными по важности). Для удобства выполнения действий по сравнению оценок k_{ij}^{Θ} вектора K эти оценки могут быть предварительно упорядочены по убыванию. Таким образом, выполняется сравнение непосредственное сравнение оценок k_{ij}^{Θ} для соответствующих решений, устанавливается отношение предпочтения (доминирования) $\succ$ между оценками $K^{\Theta}(x_i)$ и $K^{\Theta}(x_l)$, и, соответственно, между самими решениями (т.е. $x_i \succ x_l$).

Пример выбора недоминируемых решений $x_i^* \in X_{\Theta}$ на основе множества X_{Ω}, полученного путем анализа качественной информации о важности критериев.

В процессе решения рассматриваются альтернативы X_1, X_2, X_3, X_7. Оценки $K(x_i)$ для них приведены в Таблице 1. Информация Θ о степенях важности критериев имеет вид: $\Theta=\{K_1 \succ^{3/2} K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \succ^{2} K_4\}$, т.е. N -модель, имеет вид: $N=(3{,}2{,}2{,}1)$. Оценки $K^{\Theta}(x_i)$ в соответствии с N - модели следующие: $K^{\Theta}(x_1)=(3{,}3{,}3{,}5{,}5{,}5{,}5{,}4)$; $K^{\Theta}(x_2)=(4{,}4{,}4{,}4{,}4{,}4{,}4{,}5)$; $K^{\Theta}(x_3)=(5{,}5{,}5{,}4{,}4{,}3{,}3{,}3)$; $K^{\Theta}(x_7)=(5{,}5{,}5{,}3{,}3{,}4{,}4{,}3)$. Для удобства дальнейших действий полученные оценок отсортированы по убыванию. В итоге: $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)=(5{,}5{,}5{,}5{,}4{,}3{,}3{,}3)$; $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)=(5{,}4{,}4{,}4{,}4{,}4{,}4{,}4)$; $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_3)=K_{\downarrow}^{\Theta}(x_7)=(5{,}5{,}5{,}4{,}4{,}3{,}3{,}3)$.

С точки зрения введенных условий для недоминирования (предпочтения) и доминирования решений имеем: $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1) \succ K_{\downarrow}^{\Theta}(x_3)$, $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1) \succ K_{\downarrow}^{\Theta}(x_7)$. Т.е. решения x_3 и x_7 не могут быть включены в множество недоминируемых решений X_{Θ} (т.е. $X_{\Theta}=X_{\Theta} \setminus \{x_3, x_7\}$). Сравнение оценок $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)$ и $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)$ показывает, что $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1) \overline{\succ} K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)$ и $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2) \overline{\succ} K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)$, т.е. оценки $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_1)$ и $K_{\downarrow}^{\Theta}(x_2)$ являются несравнимыми с использованием отношения $\succ$. В итоге имеем $x_1 \succ_{\Theta} x_3$, $x_1 \succ_{\Theta} x_7$, $x_1 \overline{\succ}_{\Theta} x_2$, $x_2 \overline{\succ}_{\Theta} x_1$, где $\succ_{\Theta}$ – отношение предпочтения, формулируемое с учетом количественной информации Θ о важности критериев.

Понятно, что приведенный подход может быть применен непосредственно к множеству решений X без выделения множества X_{Ω} недоминируемых решений с использованием качественной информации о важности критериев.

2.4. Использование теории относительной важности критериев при принятии решений

При реализации выбора эффективных решений (в частности, в случае двух критериев) возможными стратегиями, которыми руководствуется ЛПР, являются: 1) стратегия компенсации; 2) стратегия исключения.

Стратегия компенсации предполагает, что незначительное уменьшение значения по одному из критериев компенсируется более значительным увеличением второго критерия. Стратегия исключения предполагает удаление из рассмотрения решения, которые не удовлетворяют введенным в рассмотрение ограничивающим условиям. По аналогии с рассмотренным ранее подходом теории важности критериев принятые обозначения имеют вид: $K = (K_1, K_2, ..., K_m)$ - векторный критерий, X - множество возможных решений, $\succ (x_i \succ x_j)$ – отношение предпочтения, заданное на множестве векторных оценок $K(x_i)$. Понятно, что $K(x_i) \succ K(x_j) <=> (x_i \succ x_j)$.

В основе теории относительной важности критериев положено следующее определение уступки и приращения для рассматриваемых критериев (в нашем случае, $m = 2$). Пусть i и j - два различных номера критериев. Тогда критерий K_i важнее критерия K_j с заданными положительными параметрами w_i и w_j, если для двух векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$ вида:

$$K(x_l) = (K_1(x_l), K_2(x_l), .., K_i(x_l), .., K_j(x_l), .., K_m(x_l)),$$
$$K(x_h) = (K_1(x_h), K_2(x_h), .., K_i(x_h), .., K_j(x_h), .., K_m(x_h))$$

имеет место $K(x_h) \succ K(x_l)$, при этом $k_{h,i} = k_{l,i} + w_i; k_{h,j} = k_{l,j} - w_j$ и $k_{hs} = k_{ls}$ при $s = 1,2,...,m$ и $s \neq i$, $s \neq j$.

В силу введенного в рассмотрение определения векторы $K(x_l)$ и $K(x_h)$ отличаются только i-ой и j-ой компонентами (т.е. значениями $k_{h,i}$, $k_{h,j}$, $k_{l,i}$, $k_{l,j}$).

Таким образом, в соответствии с введенными определением $K(x_h) \succ K(x_l)$, тогда ЛПР может выполнить уступки w_j по критерию K_j, для того, что получить приращение w_i по критерию K_i ($k_{h,i} > k_{l,i}$ на величину w_i, а $k_{h,j} > k_{l,j}$ на величину w_j). Т.е. если для критерия K_j может быть выполнения уступка w_j для получения приращения w_i критерия K_i (а в результате решение x_h предпочтительнее решения x_l), то критерий K_i является более важным, чем критерий K_j. Т.к. в результате $x_h \succ x_l$, то $K_i \succ K_j$.

Степень важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j определяется как w_i / w_j. Для того, чтобы важность критерия K_i по сравнению с критерием K_j была пронормирована, должен быть использован коэффициент относительной важности критерия K_i, вычисляемый следующим образом:

$$\Theta_{ij} = \frac{w_j}{w_i + w_j}.$$

Если $\Theta_{ij} \to 1$, то за небольшое приращение w_i критерия K_i должна быть реализована значительная уступка w_j по критерию K_j (т.е. $w_i < w_j$). В этом случае критерий K_i имеет высокую степень важности по сравнению с критерием K_j. Если $\Theta_{ij} \to 0$, то потери w_j по критерию K_j должны обеспечивать значительное приращение w_i по критерию K_i. В этом случае критерий K_j является более важным, чем критерий K_i и $w_i > w_j$. Если $w_i = w_j$, то $\Theta_{ij} = 1/2$. Таким образом, определение относительной важности критериев K_i и K_j реализуется путем задания значений уступок w_j и приращений w_i для соответствующих критериев K_j и K_i. Использование относительной важности критериев (коэффициента относительной важности Θ_{ij}) в процедуре принятия решений для выявления эффективных альтернатив основывается на понятии инвариантности отношения предпочтения.

Бинарное отношение R, заданное на пространстве R^m, называется инвариантным относительно линейного положительного преобразования, если для произвольных двух векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$ из выражения $K(x_l) \succ K(x_h)$ следует соответствие $(\alpha K(x_l)+C) \succ (\alpha K(x_h)+C)$, где C - задаваемый вектор значений, α - положительный коэффициент $(\alpha > 0)$. Для задач многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$ может считаться инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Из свойств инвариантности отношения $\succ$ вытекают свойства аддитивности и однородности этого отношения, т.е.: из $K(x_l) \succ K(x_h) \Rightarrow (K(x_l)+C) \succ (K(x_h)+C)$; из $K(x_l) \succ K(x_h) \Rightarrow \alpha K(x_l) \succ \alpha K(x_h)$. Т.е. к векторам значений критериев $K(x_l)$ и $K(x_h)$ может быть прибавлен вектор C и при этом отношение предпочтения не изменится. Вектора $K(x_l)$ и $K(x_h)$ могут быть умножены на положительное число α и при этом отношение предпочтения также не изменится.

2.5. Использование понятия относительной важности критериев для сужения множества эффективных решений в многокритериальной задаче

Рассмотрение механизма использования относительной важности критериев для сужения множества выбираемых (эффективных) решений предварим формулировками аксиом ЛПР, которыми он руководствуется в процессе выбора. Для вводимых в рассмотрение аксиом определим следующие обозначения: $C(X)$ – множество эффективных (выбираемых) решений, $C(K)$ – множество соответствующих этим решениям векторов значений критериев.

Аксиома 1. Для всякой пары векторов $K(x_l)$ и $K(x_h)$, для которых имеет место $K(x_l) \succ K(x_h)$, выполняется $K(x_h) \notin C(K)$. Аналогично, для всякой пары допустимых решений x_l и x_h, для которых имеет место соотношение $x_l \succ x_h$, выполняется $x_h \notin C(X)$.

Аксиома 2. Иррефлексивное отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, является транзитивным бинарным отношением.

Аксиома 3. Каждый из критериев $K_1, K_2,..., K_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$ (при прочих равных значениях критериев K_j $(j=\overline{1,m})$ сравнение решений может быть выполнено с использованием одного критерия K_i (при $i \neq j$)); данное свойство выполняется для каждого критерия.

Тогда при условии, что для задачи многокритериального принятия решений выполняются аксиомы 1-3 и условие инвариантности отношения $\succ$, при условии большей важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j на основе множества $C(X)$ и множества $C(K)$ (выбираемых решений и выбираемых критериев) могут быть сформулированы новые множества $C'(X)$ и $C'(K)$, где множество $C'(X)$ является сужением исходного множества $C(X)$, а множество векторов $C'(K)$ определяется в соответствии с изложенной ниже процедурой.

Если критерий K_i является более важным, чем критерий K_j с параметрами w_i и w_j, то модифицированная оценка K_j' менее важного критерия может быть определена следующим образом:

$$K_j' = w_j K_i + w_i K_j,$$

$$K_s' = K_s \text{, при } s = 1,2,...,m \text{ и } s \neq j.$$

В результате для некоторого решения x_h формируется вектор модифицированных значений критериев $K'(x_h) = (K_1'(x_h), K_2'(x_h),..,K_j'(x_h),..,K_m'(x_h))$. В результате на основе полученных модифицированных векторов $K'(x_h)$ критериев $K_s'(x_h)$ $(s=\overline{1,m})$ для решений $x_h \in C(X)$ должна быть выполнена проверка выполнения отношения строгого предпочтения. Те решения x_h, для которых выполняется условие $x_l \succ x_h$ (при $K'(x_l) \succ K'(x_h)$), в множество $C'(X)$ включены быть не могут. Тем самым количество элементов в $C'(X)$ может быть уменьшено (т.е. $|C'(X)|<|C(X)|$). Для введенного в рассмотрение выражения, с использованием которого вычисляется оценка K_j', могут быть выполнены следующие преобразования. Вследствие инвариантности отношения $\succ$ (и множества $C(X)$ соответственно) правую часть выражения для критерия K_j' разделим на $w_i + w_j$, оставив для K_j' тоже обозначение. Получим $K_j' = \Theta_{ij}K_i + (1-\Theta_{ij})K_j$, где критерий K_i более важен, чем критерий K_j, Θ_{ij} - коэффициент важности критерия. В дальнейшем с целью сужения множества $C(X)$ при получении векторных оценок $K'(x_h)$ должна быть использована полученная формула.

Таким образом, «новый» векторный критерий K' получен из «старого» критерия K заменой менее важного скалярного критерия K_j на линейную комбинацию критериев K_i и K_j с коэффициентами w_i и w_j (коэффициентом Θ_{ij}). Все остальные скалярные критерии K_s сохраняются (при $s=1,2,...,m$ и $s \neq j$).

Пример сужения множества выбираемых решений C(X) на основе относительной важности критериев с коэффициентами w_i и w_j.

Заданными являются значения коэффициентов w_1 и w_2: $w_1=1$; $w_2=2$. Т.е. уступка по критерию K_1 в одну единицу должно обеспечивать приращение по критерию K_2 в две единицы (критерий K_1 является более важным, чем критерий K_2). Тогда $\Theta_{ij}=0.67$, а $(1-\Theta_{ij})=0.33$. Исходное множество решений X имеет вид: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$, значения критериев K_i $(i=\overline{1,4})$ для соответствующих значений сведены в Таблицу 2.

Таблица 2. Значения критериев K_i $(i=\overline{1,4})$ для решений x_l $(l=\overline{1,})$

K_i x_l	K_1	K_2	K_3	K_4
x_1	3	5	5	4
x_2	5	4	3	5
x_3	5	4	4	3
x_4	2	5	3	3
x_5	4	2	4	5
x_6	3	5	3	2
x_7	4	5	3	5

Решение x_5 доминируется решением x_7 $(x_7 \succ x_5)$, поэтому $x_5 \notin C(X)$, решение x_6 доминируется решением x_1, поэтому $x_6 \notin C(X)$ при $x_1 \succ x_6$. Решения x_1,x_2,x_3,x_4,x_7 являются не сравнимыми между собой, поэтому $C(X)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_7\}$. Значения $K'(x_l)$ определены в соответствии с введенной в рассмотрение формулой и сведены в Таблицу 3. Из анализа значений K_i' $(i=\overline{1,4})$ видно, что $x_2 \succ x_7$, $x_3 \succ x_4$, поэтому сформированное множество $C'(X)$ будет иметь вид: $C'(X)=\{x_1,x_2,x_3\}$. Решения, входящие в это множество, являются эффективными.

Таблица 3. Значения критериев K_i' ($i=\overline{1,4}$) для решений x_l ($l=\overline{1},$)

K_i x_l	K_1	K_2	K_3	K_4
x_1	3	3.66	5	4
x_2	5	4.67	3	5
x_3	5	4.67	4	3
x_4	2	2.99	3	5
x_7	4	4.33	3	5

Из анализа значений K_i' ($i=\overline{1,4}$) видно, что $x_2 \succ x_7$, $x_3 \succ x_4$, поэтому сформированное множество $C'(X)$ будет иметь вид: $C'(X)=\{x_1,x_2,x_3\}$. Решения, входящие в это множество, являются эффективными.

3. Программа выполнения работы

Для первого варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе информации Ω о качественной важности критериев сформировать матрицы *A1* и *A2* отношений предпочтения и эквивалентности для критериев K_i ($i=\overline{1,n}$);

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения x_l сравнение его значений скалярных оценок k_{li} вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками k_{hi} решений x_h; тем самым должны быть определены решения x_h, доминируемые текущим рассматриваемым решением x_l (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество X_Ω не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$ решений;

3) разработать процедуру, использующую информацию Ω о важности критериев, входными данными для которой будет являться матрица A_1 отношения предпочтения для критериев; разрабатываемая процедура должна выполнять следующие операции:

а) для решений x_l (при $l=\overline{1,n}$) формировать новые векторные оценки $K^{ji}(x_l)$ путем перестановки скалярных компонент k_{li} и k_{lj} в исходной векторной оценке $K(x_l)$ (индексы *i* и *j* соответствуют критериям K_i и K_j, связанным отношением предпочтения в следующем виде: $K_i \succ K_j$);

б) для каждого решения x_l для его модифицированных векторных оценок $K^{ji}(x_l)$ проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K^{ji}(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K^{ji}(x_l)$ и $K^{ji}(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X_Ω: $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_h$;

в) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X_Ω, сформированного на основе информации Ω о предпочтениях критериев вида $K_i \succ K_j$;

4) разработать процедуру, использующую информацию Ω о важности критериев, входными данными для которой будет являться матрица A_2 отношения эквивалентности для критериев; разрабатываемая процедура должна выполнять следующие операции:

а) для решений x_l (при $l=\overline{1,n}$) формировать новые векторные оценки $K^{ji}(x_l)$ путем перестановки скалярных компонент k_{li} и k_{lj} в исходной векторной оценке $K(x_l)$ (индексы *i* и *j* соответствуют критериям K_i и K_j, связанным отношением эквивалентности в следующем виде: $K_i \sim K_j$);

б) для модифицированных векторных оценок $K^{ji}(x_l)$ каждого решения x_l (при $l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K^{ji}(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K^{ji}(x_l)$ и $K^{ji}(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X_Ω: $X_\Omega = X_\Omega \setminus x_h$;

в) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X_Ω, сформированного на основе информации Ω об эквивалентности критериев вида $K_i \sim K_j$;

5) выполнить вывод множества X_Ω, полученного в результате исключения из него доминируемых решений x_h при учете дополнительной информации Ω о предпочтениях и эквивалентности критериев.

Для второго варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе информации Θ о количественной важности критериев сформировать *N*-модель в виде вектора, каждый *i*-ый элемент которого соответствует *i*-му критерию и определяет число повторений исходных скалярных оценок k_{li} в формируемом векторе $K^\Theta(x_l)$ (при $l=\overline{1,n}$);

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения x_l сравнение его значений скалярных оценок k_{li} вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками k_{hi} решений x_h; тем самым должны быть определены решения x_h, доминируемые текущим рассматриваемым решением x_l (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество X_Θ не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$ решений;

3) разработать процедуру, использующую информацию Θ о важности критериев, входными данными для которой будет являться сформированный вектор значений, интерпретируемый как *N*-модель; разрабатываемая процедура реализует формирование векторов $K^\Theta(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$), представляющих собой модификацию исходных векторных оценок $K(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$) по соответствующему виду *N*-модели; таким образом, результатом реализации процедуры являются модифицированные с учетом информации Θ о количественной важности критериев векторные оценки $K^\Theta(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$);

4) разработать процедуру, упорядочивающую по убыванию скалярные оценки k_{li} ($i=\overline{1,n}$) для каждой сформированной векторной оценки $K^\Theta(x_l)$ ($l=\overline{1,n}$);

5) для модифицированных векторных оценок $K^\Theta(x_l)$ каждого решения x_l ($l=\overline{1,n}$) проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K^\Theta(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K^\Theta(x_l)$ и $K^\Theta(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X_Θ: $X_\Theta = X_\Theta \setminus x_h$;

6) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X_Θ, сформированного на основе информации Θ о количественной важности критериев;

7) выполнить вывод множества X_Θ, полученного в результате исключения из него доминируемых решений x_h при учете дополнительной информации Θ о количественной важности критериев.

Для третьего варианта задания предусматривается следующий порядок действий по выполнению лабораторной работы:

1) на основе задаваемых в качестве входных данных значений w_i и w_j, соответствующих уступкам и приращениям для критериев K_i и K_j, вычислить значения коэффициентов относительной важности критериев Θ_{ij};

2) разработать процедуру определения доминируемых решений, выполняющую для каждого решения x_l сравнение его значений скалярных оценок k_{li} вектора $K(x_l)$ с такими же скалярными оценками k_{hi} решений x_h $(h=\overline{1,n}$ и $h \neq l)$; тем самым должны быть определены решения x_h, доминируемые текущим рассматриваемым решением x_l (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$); результатом выполнения процедуры является множество X'_Θ не сравнимых между собой с использованием отношения предпочтения $\succ$ решений;

3) разработать процедуру определения значений векторных оценок $K'(x_l)$ для всех n решений $(l=\overline{1,n})$ с учетом вычисленных значений Θ_{ij}; при этом учесть, что при $w_i < w_j$ критерий является менее важным, чем критерий K_i; в этом случае пересчитываются скалярные оценки k_{lj}, соответствующие этому j-му критерию (в этом случае определяется скалярная оценка k'_{lj}, входящая в модифицируемый вектор $K'(x_l)$);

4) для модифицированных векторных оценок $K'(x_l)$ каждого решения x_l $(l=\overline{1,n})$ проконтролировать выполнение условия доминирования им других решений x_h для их векторных оценок $K'(x_h)$ (при $h=\overline{1,n}$ и $h \neq l$) (т.е. выполняется поэлементное сравнение оценок k_{li} и k_{hi} из соответствующих векторов $K'(x_l)$ и $K'(x_h)$); при выполнении условия $x_l \succ x_h$, процедура реализует исключение решения x_h из множества X'_Θ: $X'_\Theta = X'_\Theta \setminus x_h$;

5) результатом выполнения разрабатываемой программы является определение множества не сравнимых решений X'_Θ, сформированного на основе информации об относительной важности критериев;

7) выполнить вывод множества X'_Θ, полученного в результате исключения из него доминируемых решений x_h при учете информации об относительной важности критериев.

4.Задание на работу

В качестве исходных данных для выполнения задания по лабораторной работе (для всех вариантов) заданы: множество решений вида $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, оценки пяти критериев сведены в Таблицу 4.

Таблица 4. Скалярные оценки k_{ij} критериев K_j для решений x_i $(i=\overline{1,8}, j=\overline{1,5})$

Варианты	Критерии				
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
x_1	3	5	5	4	4
x_2	4	4	4	5	4
x_3	5	4	3	3	5
x_4	3	5	3	5	3
x_5	4	2	4	5	5
x_6	3	5	3	5	3
x_7	5	3	4	3	4
x_8	4	5	3	4	3

Вариант 1. Определить множество несравнимых решений X_Ω, используя качественную информацию о важности критериев Ω в следующем виде:

$\Omega = \{ K_1 \succ K_2, K_2 \sim K_3, K_3 \sim K_4, K_4 \succ K_5 \}$.

Вариант 2. Определить множество несравнимых решений X_Θ, используя количественную информацию о важности критериев Θ в следующем виде:
$\Theta = \{ K_3 \succ^3 K_4, K_1 \succ^2 K_4, K_4 \succ^2 K_2, K_2 \sim K_5 \}$.

Вариант 3. Определить множество несравнимых решений $C'(X)$, используя информацию об относительной важности критериев в следующем виде:
$w_1 = 2$, $w_2 = 1$;
$w_4 = 1$, $w_5 = 2$.

5. Контрольные вопросы.

5.1. В каких ситуациях возникает необходимость учета важности критериев?
5.2. В чем состоят условия доминирования векторной оценки со стороны другой векторной оценки (одного решения другим решением при наличии векторного критерия) ?
5.3. В чем заключается понятие качественной важности критериев?
5.4. В какой форме может быть задана информация о качественной важности критериев?
5.5. В чем состоит способ формирования модифицированных векторных оценок решений на основе исходных векторных оценок с учетом качественной информации?
5.6. В чем заключаются условия доминирования сформированной модифицированной векторной оценкой исходной векторной оценки при учете качественной информации о важности критериев для одного и того же решения (в каком случае модифицированная векторная оценка доминирует исходную векторную оценку) ?
5.7. В какой ситуации сформированная модифицированная векторная оценка не доминирует исходную векторную оценку?
5.8. В чем состоят условия доминирования векторной оценкой одного решения векторной оценки другого решения при учете качественной информации о важности критериев?
5.9. В чем причина доминирования сформированной векторной оценкой исходной векторной оценки при условии эквивалентности критериев?
5.10. Какие шаги формируют алгоритм определения состава множества X_Ω не сравнимых решений при учете информации Ω о качественной важности критериев?
5.11. Что представляет из себя понятие количественной важности критериев?
5.12. Как определить относительную важность критерия K_i по сравнению с критерием K_j, если важность K_i равна β_i, а важность K_j равна β_j?
5.13. В чем заключается способ построения N-модели с учетом количественной информации Θ о важности критериев?
5.14. В чем заключается способ формирования модифицированных векторных оценок $K^\Theta(x_l)$ на основе исходных оценок $K(x_l)$ с учетом N-модели?
5.15. Каким образом можно выполнить переход от значений n_i в N-модели к значениям коэффициентов a_i в аддитивной свертке значений всех критериев K_i ($i = \overline{1,m}$) для решения x_l?
5.16. Как определяется коэффициент важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j на основе N-модели?
5.17. В чем состоит суть метода определения множества несравнимых решений X_Θ (в чем заключается алгоритм формирования множества X_Θ)?
5.18. Как в теории относительной важности критериев задается преобладание важности критерия K_i по сравнению с критерием K_j?
5.19. В чем заключается понятие уступки и приращения и как они характеризуют относительную важность критериев?

5.20. Каким образом вычисляется коэффициент относительной важности критерия K_i (по сравнению с критерием K_j) и как значение этого коэффициента характеризует относительную важность критериев K_i и K_j?

5.21. Каким образом формулируются аксиомы принятия решений при многих критериях

5.22. В чем заключается способ модификации исходных векторных оценок $K(x_l)$ для получения оценок $K'(x_l)$?

5.23. Каким образом выполняется сужение множества несравнимых решений с использованием информации об относительной важности критериев (какова последовательность шагов алгоритма сужения множества несравнимых решений с использованием информации об относительной важности критериев)?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. Цель работы: исследовать применение аппарата метода анализа иерархий при принятии решений по выбору альтернатив

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия метода анализа иерархий

При принятии решений в сложной системе, состоящей из взаимосвязанных компонент различного вида (ресурсы, желаемые исходы либо цели и т.д.), процесс функционирования которой необходимо проанализировать, может быть применен метод анализа иерархий (МАИ). Метод анализа иерархий сводит принятие решений в сложной системе к последовательности попарных сравнений ее отдельных компонент.

Метод может быть применен для принятия решений при покупке оборудования, планировании распределения энергии, вложениях в условиях неопределенности и т.д.

Для принятия решений в соответствии с МАИ выполняется декомпозиция сложной системы (задачи) на отдельные её компоненты (составляющие) и определяются отношения между составляющими. В результате формируется модель системы (задачи), имеющая вид иерархии. Вид иерархии предполагает наличие следующих уровней:

1) первый (верхний) уровень – одна глобальная (общая) цель принятия решений;

2) второй уровень – локальные подцели, полученные в результате декомпозиции глобальной (общей) цели;

3) третий уровень – воздействия (управления), реализация которых в системе позволяет достичь сформированных подцелей (решения, стратегии, приводящие к достижению подцелей);

4) четвертый (нижний) уровень – исходы, представляющие собой результаты реализации решений в системе (стратегий).

После формирования иерархии «цель – подцели – решения - результаты» реализуется сравнение отдельных компонент уровней иерархии между собой. В результате сравнения отдельных компонент системы между собой определяется относительная степень интенсивности взаимодействия элементов в иерархии.

Упорядоченным множеством называется множество X с отношением порядка $\succeq$ (не хуже), если отношение $\succeq$ удовлетворяет законам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Если решения x_1 и x_2 связаны отношением $\succeq$ (т.е. $x_1 \succeq x_2$), то x_1 не хуже x_2 (т.е. x_1 лучше, чем x_2, либо x_1 и x_2 эквивалентны). Тогда x_1 предшествует x_2 (если $x_1 \succeq x_2$) в цепочке решений. Свойства отношения $\succeq$ (не хуже):

а) рефлексивность: для всех x_i, $x_i \succeq x_i$ (т.е. x_i не может быть хуже самого себя);

б) антисимметричность: если $x_1 \succeq x_2$ и $x_2 \succeq x_1$, то $x_2 = x_1$;

в) транзитивность: если $x_1 \succeq x_2$ и $x_2 \succeq x_3$, то $x_1 \succeq x_3$.

Отношение $\succ$ - отношение «лучше».

Тогда, если $x_1 \succ x_2$, то x_1 лучше x_2. Решение x_1 доминирует решение x_2, если $x_1 \succ x_2$, $x_1 \succ x_i \succ x_2$ невозможно ни для какого x_i.

Подмножество X' упорядоченного множества X называется ограниченным сверху, если существует элемент $x_i \in$X такой, что $x_i \succeq x_j$ для любого $x_j \in X'$. Элемент x_i - верхняя граница множества (подмножества) X'.

Способ задания иерархии. Обозначения: $X^- = \{ x_j \mid x_i$ покрывает $x_j \}$, т.е. X^-– те решения x_j, которые покрываются рассматриваемым решением x_i; $X^+ = \{ x_j \mid x_j$ покрывает

$x_i\}$, таким образом, X^+ - множество тех элементов x_j, которые покрывают элемент x_i (рассматриваемый элемент x_i). При этом $x_i \in X$ и $x_j \in X$, где X - упорядоченное множество.

Определение иерархии:

1) H – упорядоченное множество (частично упорядоченное множество) с наибольшим элементом b (т.е. упорядоченное множество H ограничено сверху элементом b);

2) выполнено разбиение множества элементов H на подмножества элементов L_k, $k = 1,2,\ldots,h$, при этом $L_1 = \{b\}$, таким образом, L_k - подмножество элементов, соответствующих k-му уровню иерархии, первый уровень состоит из одного элемента b ($L_1 = \{b\}$);

3) если $x_i \in L_k$, то $X^- \subset L_{k+1}$, где X^- – это элементы *(k+1)-го* уровня (множества L_{k+1}), покрываемые элементом x_i;

4) если $x_i \in L_k$, то $X^+ \subset L_{k-1}$, где X^+ – это элементы *(k-1)-го* уровня (множества $L_{k\ 1}$), которые покрывают элемент x_i.

Функция приоритета. Если $X^- = \{x_j \mid x_i$ покрывает $x_j\}$, то может быть определена функция $w_x(x_j)$, такая, что $w_x : X^- \rightarrow [0,1]$, т.е. отображающая элементы x_j множества X^- на интервал $[0,1]$. Таким образом, каждому элементу $x_j \in X^-$ ставится в соответствие весовая функция $w_x(x_j) \rightarrow [0,1]$, при этом выполняется условие: $\sum\limits_{x_j \in X^-} w_x(x_j) = 1$. Т.е. $w_x(x_j)$ – вес, который ставится в соответствие элементу $x_j \in X^-$.

Пример построения иерархии элементов в задаче выбора сетевого оборудования. Элементами множества H являются: 1) цель (выбор оборудования); 2) факторы, влияющие на цель (наименование характеристик моделей сетевого оборудования, на основе анализа значений которых выполняется выбор); 3) модели сетевого оборудования, среди которых будет выполняться выбор эффективного.

Тогда $H = \{$оборудование, производительность процессора, объем ОЗУ, производительность сети, цена, ремонтопригодность, модель 1, модель 2, модель 3$\}$.

Формирование иерархии элементов множества H. Реализуется разбиение множества H на подмножества L_1, L_2, L_3 (т.е. $k = 3$); где $L_1 = \{$оборудование$\}$, $L_2 = \{$ производительность процессора, объем ОЗУ, производительность сети, цена, ремонтопригодность $\}$, $L_3 = \{$ модель 1, модель 2, модель 3$\}$. Вид иерархии цели, характеристик, решений представлен на Рис.1.

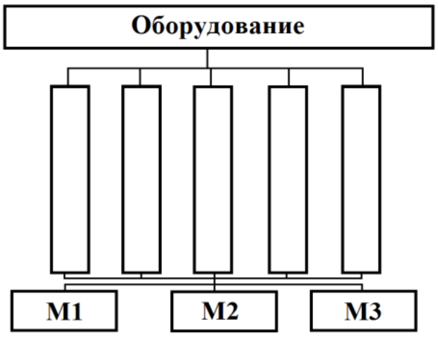


Рисунок 1.– Вид иерархии уровней для задачи выбора оборудования

Если $x_1 =$ оборудование и при этом $x_1 \in L_1$, то $X^- = L_2$.

Если $x_i =$ Модель 1, а при этом $x_i \in L_3$, то $X^+ = L_2$.

Определение весовой функции w_x для элемента $x_i =$оборудование. Эта функция ставит в соответствие характеристикам оборудования (элементам L_2) значения из отрезка [0,1] и определяет приоритет характеристик относительно цели – «выбора оборудования».

Пример определения значений $w_x(x_j)$ следующий (где $x_j \in X^-$)

$W_{оборудование}(производительность\ \ процессора) = 0{,}3$;

$W_{оборудование}(объем\ \ ОЗУ) = 0{,}2$;

$W_{оборудование}(производительность\ \ сети) = 0{,}2$;

$W_{оборудование}(цена) = 0{,}2$;

$W_{оборудование}(релоктопригодность) = 0{,}1$;

При этом $\sum\limits_{x_j \in X^-} W_{оборудование}(x_j) = 1$;

Т.е. характеристика «Производительность процессора» имеет *30%*–ое значение при выборе оборудования, характеристика «объем ОЗУ» имеет *20%*–ое значение при выборе оборудования и т.д.

Понятие полной иерархии предполагает, что иерархия называется полной, если для всех $x \in L_k$ множество $X^+ = L_{k-1}$ $(k = 2,\ldots,h)$. В рассматриваемом случае иерархия является полной.

Свойства элементов уровней иерархии. Упрощенный вид иерархии уровней для принятия решений следующий: цели (общая цель функционирования системы, общая цель принятия решения); критерии, раскрывающие цели (характеристики цели); виды деятельности (решения), обеспечивающие достижение целей; характеристики видов деятельности.

С точки зрения анализа общей цели выполняется выбор видов деятельности, обеспечивающих достижение цели с точки зрения различных критериев. Т.е. критерии – это свойства (характеристики) цели, реализация которых (реализация свойств цели) обеспечивается тем или иным видом деятельности.

Возможен также расширенный подход к построению иерархии уровней, предусматривающий определение: 1) цели системы; 2) подцелей системы; 3) критериев, раскрывающих цель и подцели (свойств, характеристик цели либо подцелей); 4) Компонент системы, обеспечивающих достижение цели; 5) локальные цели компонент вышестоящего (4-го) уровня; 6) виды деятельности (сценарии, решения), обеспечивающие достижение локальных целей компонент системы, деятельность которых приводит к достижению общей цели.

Стандартный подход предполагает задание трех уровней иерархии:

1) нижний уровень – виды деятельности (т.е. альтернативы, решения);
2) второй уровень – характеристики видов деятельности (видов действий);
3) верхний уровень – общая цель функционирования системы.

Пример. Нижний уровень – различные маршруты движения транспорта между двумя пунктами (виды деятельности), второй уровень – характеристики видов деятельности (время следования, сужения, выбоины, безопасность и т.д.), верхний уровень – общая цель – выбор эффективного маршрута.

Таким образом, формируемая иерархия является моделью системы, в которой реализуется принятие решений.

В общем виде задача принятия решений – это определение видов деятельность. В общем виде действия по определению видов деятельности, наиболее эффективных с точки зрения реализации общей цели, следующие:

1) задание важности характеристик видов деятельности относительно общей цели (важность критериев, используемых для оценки решений с точки зрения достижения общей цели);
2) для каждой характеристики деятельности определяется степень влияния соответствующего вида деятельности на эту характеристику, т.е. степень соответствия вида деятельности определенной на втором уровне ее характеристике (т.е. в какой степени данный вид деятельности предполагает реализацию данной характеристики).

В результате определяется степень обеспечения видом деятельности рассматриваемой общей цели.

Степень влияния элементов одного уровня на один элемент другого (вышестоящего уровня) представляет собой важность каждого элемента нижнего уровня для одного рассматриваемого элемента верхнего уровня (т.е. приоритет элемента нижнего уровня для соответствующего элемента верхнего уровня). Для определения приоритетов влияния *j*-ых элементов *(k+1)*-го уровня на *i*-ый элемент *k*-го уровня реализуются следующие действия:

1) выполняется сравнение (попарное) элементов *(k+1)*-го уровня ($j=\overline{1,n_{k+1}}$) по степени их влияния на *i*-ый элемент *k*-го уровня; в результате будет сформирована матрица суждений о степенях влияния;

2) определяется собственный вектор и собственное значение сформированной матрицы парных сравнений; собственный вектор обеспечивает упорядочивание приоритетов, собственное значение является мерой согласованности суждений.

Если характеристика x_j *(k+1)*-го уровня важнее характеристики x_i того же уровня, то степень важности определяется по таблице (матрице) парных уравнений. Т.е., если альтернатива x_j *(k+1)*-го уровня реализует некоторое свойство (критерий) с предшествующего уровня в большей степени, чем альтернатива x_i, то вес w_j альтернативы x_j имеет большее значение, чем вес w_i альтернативы x_i. А значения w_i и w_j соответствующих альтернатив x_i и x_j определяются на основе матрицы A парных сравнений альтернатив (задаются в матрице парных сравнений альтернатив). Матрица парных сравнений A предполагает, что элемент a_{ij} равен степени превышения важности альтернативы x_i над альтернативой x_j для некоторого рассматриваемого свойства. При формировании матрицы парных сравнений должно быть выполнено условие ее согласованности (условие согласованности оценок сравнений).

Пример матрицы парных сравнений для трех альтернатив. Альтернативы $x_i(i=\overline{1,3})$ представляют собой модели оборудования, матрица парных сравнений предполагает определение (задание) степени превосходства одной альтернативы x_i над альтернативой x_j с точки зрения реализации критерия (свойства) «производительность оборудования»).

Если $x_1=3x_2,\ x_1=6x_3$, тогда $3x_2=6x_3,\ x_2=2x_3, x_3=1/2x_2$.

Т.е. в альтернативе x_2 (модель оборудования x_2) рассматриваемое свойство (критерий) «производительность оборудования» в 2 раза превышает этот же критерий в альтернативе x_3. В итоге матрица парных сравнений реализации рассматриваемого свойства (критерия) в альтернативах $x_i(i=\overline{1,3})$ имеет вид:

$$A=\begin{array}{c|ccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
x_1 & 1 & 2 & 6 \\
x_2 & 1/2 & 1 & 2 \\
x_3 & 1/6 & 1/2 & 1
\end{array}.$$

Если матрица A сформирована, то необходимо выполнить проверку согласованности оценок парных сравнений (проверить согласованность матрицы A). Если условие согласованности выполняется, то сформированная матрица A может быть использована для расчета приоритетов (весов) w_i соответствующих альтернатив x_i. Если матрица A не согласована, то значения элементов a_{ij} этой матрицы должны быть изменены. Для проверки согласованности матрицы A на ее основе должен быть вычислен вектор приоритетов влияния $w_{ij}\,(j=\overline{1,3})$ *j*-ых компонент рассматриваемого уровня иерархии на *i*-ый компонент предшествующего уровня (вычисляются веса w_{ij} текущих *j*-ых элементов). Таким образом, должно быть определено значение $w_{i_k j_{k+1}}$ приоритета влияния *j*-ой компоненты *(k+1)*-го уровня на i-ый элемент k-го уровня, в итоге определяется вектор собственных значений $\overline{W}$ матрицы A - вектор приоритетов.

С математической точки зрения – это вычисление главного собственного вектора матрицы A, который после нормализации становится вектором приоритетов (собственный вектор матрицы A есть вектор приоритетов).

Методы получения собственного вектора матрицы A сформулированы в приложении A.

2.2. Метод получения грубой оценки согласованности

Имеем матрицу парных сравнений A в виде:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате реализации одного из методов получен вектор собственных значений w матрицы A в виде:

$$w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{vmatrix}.$$

На основе вектора w необходимо вычислить вектор w’ следующим образом: $w' = Aw$ (произведение матрицы A на вектор w). Далее на основе вектора w' определяется вектор w'' следующим образом: $w''[i] = w'[i] / w[i]$, где $i = \overline{1, n}$. Значение $\lambda_{\max}$ (собственное значение матрицы A) на основе вектора w’’ будет вычислено следующим образом:

$$\lambda_{max} = \sum_{i=1}^{n} w''[i] / n .$$

Если $\lambda_{\max} \to n$, то матрица парных сравнений значений характеристик альтернатив является хорошо согласованной. Если $\Delta = n - \lambda_{\max}$ имеет большое значение, то степень согласования низкая и должна быть переопределена матрица парных сравнений A.

Степень согласованности может быть выражена величиной $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$, которая называется индексом согласованности (ИС). Если значение $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ приближается к 0, то согласованность достаточная.

Группа экспертов формирует суждения об относительной важности объектов (действий), всего n объектов (действий). В итоге реализации метода необходимо количественно интерпретировать суждения по всем объектам (совместно количественно интерпретировать суждения по всем объектам). Таким образом, из количественных суждений, ассоциированных с каждой из пар объектов, реализуется формирование весов, ассоциированных с отдельными объектами (вес каждого объекта отражает количественные суждения всей группы экспертов). Обозначения: x_1, x_2, ..., x_n– совокупность объектов (действий). Для пары (x_i, x_j) определяется элемент a_{ij} матрицы парных сравнений A, соответствующий степени важности элемента x_i относительно элемента x_j.

Элементы a_{ij} определяются следующим образом:

1) если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$;

2) если x_i и x_j имеют одинаковую важность, то $a_{ij} = 1$ и $a_{ji} = 1$.

Тогда матрица суждений (парных сравнений) A примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

На основе сформированной матрицы A необходимо определить числовые веса $w_1, w_2, ..., w_n$, которые соответствовали бы каждому действию (объекту). Т.е. реализовать способ получения весов w_i на основе суждений a_{ij}. Результатом является определение вектора приоритетов ($w_1, w_2, ..., w_n$). Определение вектора приоритетов действия (решений, альтернатив) реализуется путем нахождения собственных векторов матриц A парных сравнений для каждого уровня (данный подход введен в рассмотрение выше).

После того, как для каждого вида деятельности сформированы приоритеты с точки зрения удовлетворения характеристик (критериев), выполняется определение приоритетов характеристик (критериев) относительно общей цели (т.е. как рассматриваемые свойства будут обеспечивать общую цель).

Для получения общей характеристики вида деятельности (например, i-го вида деятельности) по каждому критерию необходимо:

1) умножить вес оценки i-го вида деятельности по некоторому j-ому критерию на вес этого критерия в общей цели принятия решения (таким образом, $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$, где w_{ij}^2– вес оценки i-го вида деятельности относительно j-ой характеристики второго уровня иерархии, w_j^1 – вес j-ой характеристики относительно общей цели системы (первого уровня иерархии); всего должно быть получено m значений $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$, где m – количество критериев(характеристик) видов деятельности;

2) полученные значения $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$ для каждого i-го вида деятельности сложить по всем j-ой критериям ($j = \overline{1, m}$) (критериям, характеризующим общую цель принятия решений), тогда общая характеристика i-го вида деятельности D_i будет определена следующим образом:

$$D_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^2 \cdot w_j^1 .$$

Понятно, что тот i'-ый вид деятельности, который гарантирует максимальное значение оценки D_i, будет являться эффективным. Условие определения эффективного вида деятельности i' имеет следующий вид:

$$i' = arg \underset{i=1,n}{\underline{max}} D_i = arg \underset{i=1,n}{\underline{max}} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^2 \cdot w_j^1 .$$

Пример применения метода анализа иерархий для реализации принятия решения по выбору вида сетевого оборудования, приобретаемого компанией.

Т.к. общая цель реализации процедуры принятия решения состоит в выборе эффективного оборудования, то верхний уровень иерархии принятия решений содержит узел «эффективное оборудование» (это и будет общая цель в иерархии).

Второй уровень представляет собой критерии (характеристики), в соответствии с которыми выполняется определение эффективного решения по выбору оборудования (т.е. критерии, определяющие цель выбора оборудования). Множество характеристик (критериев) определено следующим образом: {производительность процессора, скорость передачи данных, объем памяти для хранения пакетов, цена оборудования, ремонтопригодность, срок гарантии}.

В сокращенном виде множество характеристик оборудования представлено в следующем виде: {производительность, скорость, объем памяти, цена, ремонтопригодность, гарантия}.

Выбор осуществляется среди трех единиц оборудования. Обозначим их как O_1, O_2, O_3 соответственно. Тогда иерархия «цель – критерии - решения» представлена на Рис.2.

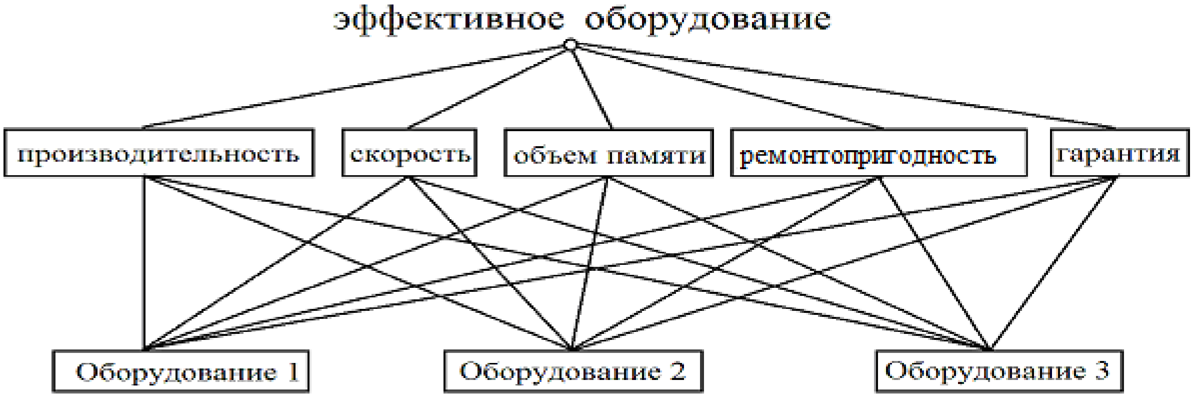


Рисунок 2 – Вид иерархии при принятии решений о выборе оборудования.

Для характеристик, определяющих (соответствующих) эффективному оборудованию сформирована матрица парных сравнений A_1. Элементы этой матрицы соответствуют степени важности какой-либо из характеристик оборудования по сравнению с другими характеристиками с точки зрения общей цели принятия решений.

Вид матрицы парных сравнений A_1 (важность характеристики относительно цели) следующий:

$$A_1 = \begin{array}{c|cccccc|} & \text{производительность} & \text{скорость} & \text{объем памяти} & \text{цена} & \text{ремонто пригодность} & \text{гарантия} \\ \hline \text{производительность} & 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ \text{скорость} & 1/4 & 1 & 7 & 3 & 1/5 & 1 \\ \text{объем памяти} & 1/3 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/6 \\ \text{цена} & 1 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ \text{ремонтопригодность} & 1/3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ \text{гарантия} & 1/4 & 1 & 6 & 3 & 1/3 & 1 \end{array}$$

С использованием одного из приведенных в Приложении *А* методов определения собственного вектора матрицы А (использован первый метод) получены следующие значения w_j^1 элементов вектора приоритетов $W^1(j=\overline{1,m})$: $W^1=(0.32;0.14;0.03;0.13;0.24;0.14)$.

В этом случае вес $w_1^1 = 0.32$ соответствует производительности процессора в общей цели выбора оборудования, вес $w_2^1 = 0.14$ – скорости передачи данных в общей цели, вес $w_3^1 = 0.03$ – объему памяти в общей цели и т.д.

Тогда собственное значение λ_{max}^1 матрицы A_1, определяющее согласованность сформированных суждений определено равным 7.49 $(\lambda_{max}^1 = 7.49)$, а индекс согласованности суждений определен равным 0.3 $(\text{ИС}^1 = 0{,}3)$.

Для уровня иерархии видов оборудования сформированы матрицы парных сравнений по каждой из характеристик $A_j^2(j = \overline{1,m})$. Значения a_{il} элементов этих матриц определяют степень эффективности какого-либо $i-\text{го}$ типа оборудования по сравнению с другими (l-ми) типами для соответствующей $j-\text{ой}$ характеристики (критерия).

Вид матриц A_j^2 и вид собственных векторов w_j^2 соответствующих матриц, коэффициенты согласованности имеют следующий вид:

- Производительность:

$$A_1^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ O_2 & 3 & 1 & 3 \\ O_3 & 2 & 1/3 & 1 \end{array}; \qquad \begin{array}{c} w_1^2 = (0.16;0.59;0.25), \\ \lambda_{max} = 3.05; \\ \text{ИС} = 0.025; \end{array}$$

- Скорость передачи данных:

$$A_2^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 1 & 1 \\ O_2 & 1 & 1 & 1 \\ O_3 & 1 & 1 & 1 \end{array}; \qquad \begin{array}{c} w_2^2 = (0.33;0.33;0.33), \\ \lambda_{max} = 3.0; \\ \text{ИС} = 0; \end{array}$$

- Объем памяти:

$$A_3^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 5 & 1 \\ O_2 & 1/5 & 1 & 1/5 \\ O_3 & 1 & 5 & 1 \end{array}; \qquad \begin{array}{c} w_3^2 = (0.45;0.09;0.46), \\ \lambda_{max} = 3.0; \\ \text{ИС} = 0; \end{array}$$

- Цена оборудования:

$$A_4^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 9 & 7 \\ O_2 & 1/9 & 1 & 1/5 \\ O_3 & 1/7 & 5 & 1 \end{array}; \qquad \begin{array}{c} w_4^2 = (0.77;0.05;0.17), \\ \lambda_{max} = 3.21; \\ \text{ИС} = 0.105; \end{array}$$

- Ремонтопригодность:

$$A_5^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 1/2 & 1 \\ O_2 & 2 & 1 & 2 \\ O_3 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}; \qquad \begin{array}{c} w_5^2 = (0.25;0.5;0.25), \\ \lambda_{max} = 3.21; \\ \text{ИС} = 0; \end{array}$$

- Срок гарантии

$$A_6^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 6 & 4 \\ O_2 & 1/6 & 1 & 1/3 \\ O_3 & 1/4 & 3 & 1 \end{array}; \qquad \begin{array}{c} w_6^2 = (0.69;0.09;0.22), \\ \lambda_{max} = 3.05; \\ \text{ИС} = 0.025. \end{array}$$

В соответствии с полученными векторами $w_j^2(j = \overline{1,m})$ для каждого вида оборудования $O_i(i = \overline{1,3})$ формируется свой вектор значений всех характеристик следующим образом $(j = \overline{1,m})$:

$w_{o_1}^2 = (0.16;0.33;0.45;0.77;0.25;0.69);$

$w_{o_2}^2 = (0.59;0.33;0.09;0.05;0.5;0.09);$

$w^2_{o_3} = (0.25;0.33;0.46;0.17;0.25;0.22)$.

Так как вектора w^1 и $w^2_{o_i}$ $(i = \overline{1,3})$ сформированы, то может быть получена оценка D_i каждого вида оборудования по формуле:

$$D_i = \sum_{j=1}^{m} w^2_{ij} \cdot w^1_j .$$

Полученные значения D_i следующие: $D_1 = 0.37;\ D_2 = 0.38;\ \mathrm{D}_3 = 0.25$. Отсюда следует, что второй вид оборудования наиболее предпочтителен.

3. Программа выполнения работы

3.1. Сформировать следующие матрицы:

а) парных сравнений влияния характеристик альтернатив (решений) на общую цель принятия решений (матрицу A_1);

б) парных сравнений наличия рассматриваемых свойств (характеристик) у предлагаемых к анализу решений x_j – матрицы A^2_j (где $j = \overline{1,m}$, m – количество критериев (свойств, характеристик) рассматриваемых альтернатив);

3.2. Реализовать процедуру, которая используя заданный в варианте метод, определяет вектор собственных значений W каждой из матриц парных сравнений, вычисляет собственное значение матрицы λ_{max} и индекс согласованности (ИС) оценок в ней.

3.3. Проверить выполнение условия согласованности оценок в каждой из матриц парных сравнений на каждом уровне. В случае плохой согласованности повторить шаги 1 и 2.

3.4. Разработать процедуру, которая на основе векторов собственных значений w^2_j матриц A^2_j ($j = \overline{1,m}$, количество элементов в каждом из векторов равно количеству рассматриваемых решений (альтернатив), т.е. n) для каждого из решений сформировать вектор W^2_i весовых коэффициентов w^2_i, каждый из которых соответствует наличию j-ой характеристики (свойства, критерия) у соответствующего i-го решения (количество элементов в каждом из этих векторов равно количеству свойств решений, влияющих на общую цель принятия решений, т.е. m);

3.5. Разработать процедуру, которая на основе векторов весовых коэффициентов на первом уровне – W_1 , на втором уровне – W^2_j ($j = \overline{1,m}$) выполняет расчет оценок D_i для каждого решения, эта же процедура реализует определение на основе значений D_i $(i = \overline{1,n})$ эффективного решения x^*_i .

4. Варианты заданий

Вариант 1. У студентов в процессе обучения возникает необходимость определения предмета, который они хотели бы изучать по выбору. Характеристиками (критериями), соответствующими свойствам предметов, на основе которых выполняется выбор (влияющих на выбор предмета) являются: фундаментальные знания, которые содержит преподаваемый предмет, соответствие современному уровню развития науки в данной области, возможность использования в профессиональной деятельности, симпатии к преподавателю. Для анализа и выбора могут быть предложены следующие предметы: теория принятия решений, теория алгоритмов, теория вероятностей и математическая статистика, теория информационных процессов, технологии обработки информации, технологии программирования. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать первый из предложенных в Приложении А методов.

Вариант 2. В процессе реализации дипломного или курсового проектов возникает необходимость в выборе языка программирования. (цель принятия решений– выбор языка программирования для реализации проекта). Характеристики, соответствующие свойствам альтернатив (решений), влияющие на цель принятия решений: наличие базовых знаний синтаксиса языка, соответствие языка современному уровню развития технологий программирования, сложность синтаксиса, имеющееся время на реализацию проекта. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать второй из предложенных в Приложении А методов.

Вариант 3. В процессе дипломного проектирования возникает необходимость выбора темы дипломного проекта. (дипломный руководитель предлагает несколько тем на выбор). Цель принятия решений состоит в выборе темы для дипломного проектирования из предлагаемого перечня. Характеристиками (критериями) , соответствующими свойствам решений, являются: сложность материала, положенного в основу темы дипломного проект; наличие знаний по материалу, на основе которого реализуется дипломный проект; возможность использования знаний, полученных при дипломном проектировании по выбранной теме, в дальнейшей деятельности; наличие свободного времени для реализации выбранной темы дипломного проекта. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать третий из предложенных в Приложении А методов.

5. Контрольные вопросы

5.1. Какой вид с точки зрения иерархически упорядоченных уровней имеет модель системы в МАИ (какие уровни образуют иерархию с точки зрения модели системы в МАИ)?

5. 2. Какие виды отношений используются при определении иерархической модели системы в МАИ (какие понятия используются при определении иерархии уровней в модели системы в МАИ) ?

5. 3. Каким образом формализуется определение иерархии уровней в модели системы в МАИ?

5. 4. Что такое функция приоритета для элементов уровней и что она определяет (для элементов каждого уровня) ?

5.5. Для чего используются матрицы парных сравнений на каждом уровне иерархической модели системы в МАИ?

5. 6. В чем отличие в формировании матрицы парных сравнений A_1 , формируемой на втором уровне иерархии в модели системы, от матриц парных сравнений $A_j^2(j=\overline{1,m})$, формируемой на третьем уровне иерархии модели системы?

5.7. Каким образом выполняется вычисление вектора собственных значений матрицы парных сравнений?

5. 8. Каким образом выясняется согласованность оценок в матрицах парных сравнений

5. 9. Какие действия должны быть предприняты в случае плохой согласованности оценок в матрицах парных сравнений?

5. 10. Каким образом на основе матриц парных сравнений могут быть получены весовые коэффициенты для характеристик или решений соответственно на втором и третьем уровнях иерархии?

5.11. В чем состоит процедура вычисления значения оценки эффективности каждой альтернативы в МАИ?

5.12. В чем заключается обобщенный алгоритм принятия решений в МАИ?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО ВЫБОРА РЕШЕНИЙ

1. Цель работы: исследовать способы определения эффективных решений при групповом выборе.

2. Теоретическое введение

Имеется *n* различных бинарных отношений $R_1, R_2, \dots, R_N$ на множестве X. Отношение R_i называется индивидуальным. Оно задает предпочтение *i*-го субъекта (ЛПР, эксперта). Требуется сформировать отношение $R \subseteq X \times X$, согласованное с отношениями $R_1, R_2, \dots, R_N$. Отношение R называется *групповым отношением*.

Правило (система правил), описывающее способ построения группового отношения R, исходя из системы индивидуальных отношений $R_1, R_2, \dots, R_N$, называется *принципом согласования отношений*.

Обозначив через F способ (правило) отображения группы отношений $R_1, R_2, \dots, R_N$ в групповое отношение R, имеем: $F: (R_1, R_2, \dots, R_N) \rightarrow R$. Отображение F – принцип согласования. Разные отображения F могут быть использованы для определения отношения R.

<u>**Пример 1**</u>. Множество X имеет вид: $X = \{a,\ b,\ c\}$. Предпочтения трёх экспертов заданы следующими ранжированиями $R_1 = (\ a,\ b,\ c)$ (т.е. элементы x_i в R упорядочены в соответствии с рангами r_i^1, при этом $a \succ b,\ a \succ c,\ b \succ c$), $R_2 = (a \sim b,\ c)$ (т.е. $a \succ c,\ b \succ c,\ a \sim b$), $R_3 = (\ b,\ c \sim a)$ (т.е. $b \succ c,\ b \succ a,\ c \sim a$). Определен принцип отображения F, предполагающий, что $R = R_1$.

Правила согласования группы отношений $R_1, R_2, \dots, R_N$ с отношением R могут быть сформулированы довольно сложно.

<u>Например:</u> $(\ a,b) \in R$, если $(\ b,c) \in R_1$ и $(\ a,c) \notin R_2$.

Правило большинства.

Правило большинства – наиболее распространённый принцип согласования. Пусть $R_1, R_2, \dots, R_N$ – индивидуальные отношения на $X \times X$. Обозначим через $n(\ a,b)$ количество индексов *i* (*i* – индекс отношения), для которых $(\ a,b) \in R_i\ (\ i = \overline{1,N})$. Тогда могут быть сформированы два способа построения (определения) множества R:

1) $(\ a,b) \in R <=> n(\ a,b) \geq \frac{n}{2}$

2) $(\ a,b) \in R^+ <=> n(\ a,b) \geq n(b,a)$, где R и R^+ соответствующие обобщающие отношения.

Отношения R и R^+ называются *мажоритарными отношениями*.

<u>Пример 2</u> определения обобщающего отношения R.

$X = \{a,\ b,\ c\}$, отношения $R_1,\ R_2,\ R_3$ задаются ранжированием в следующем виде:

$R_1 = (\ a,\ b,\ c),\ \ R_2 = (\ c,\ b,\ a),\ \ R_3 = (\ b,\ a,\ c)$.

$n(\ a,b) = 1,\ \ n(\ b,c) = 2,\ \ n(\ b,\ a) = 2,\ \ n(\ a,c) = 2,\ \ n(\ c,a) = 1$

Так как $n(\ b,c) = n(\ b,\ a) = n(\ a,c) = 2$, то $(\ b,c) \in R$, $(\ b,\ a) \in R$ и $(\ a,c) \in R$, то вид отношения R: $R = R_3 = (b,a,c)$. По аналогии рассуждения формируются для R^+. В результате имеем $R = R^+ = R_3$.

<u>Пример 3.</u>

$X = \{a, b, c\}$,

$R_1 = (a, b, c)$, $R_2 = (b, c, a)$, $R_3 = (c, a, b)$.

$n(a,b) = 2$, $n(b,c) = 2$, $n(a,c) = 1$, $n(b, a) = 1$, $n(c,a) = 2$, => aRb, bRc, cRa (но не aRc как следовало бы из рассуждений о транзитивности).

Таким образом, групповое отношение R не является транзитивным, что не приемлемо, если для задания формы отношений R_i использованы ранговые шкалы. Так как групповое отношение R выражает некоторый согласованный признак, то оно должно индуцировать *отношение квазипорядка* (некоторого порядка).

На основе анализа приведенных примеров видно, что правило большинства может приводить как к транзитивным, так и к не транзитивным отношениям R. Необходимо сформировать условия, при которых индивидуальные отношения R_i и мажоритарное отношение R являются линейными квазипорядками (т.е. обеспечивают упорядоченность решений).

Рассмотрим множество $X = \{a, b, c\}$. Существует 13 ранжирований (линейных квазипорядков) этого множества: $R_1 = (a, b, c)$, $R_2 = (b, c, a)$, $R_3 = (c, a, b)$, $R_4 = (b, a, c)$, $R_5 = (a, c, b)$, $R_6 = (c, b, a)$, $R_7 = (a \sim b, c)$, $R_8 = (a \sim c, b)$, $R_9 = (b \sim c, a)$, $R_{10} = (c, a \sim b)$, $R_{11} = (b, c \sim a)$, $R_{12} = (a, b \sim c)$, $R_{13} = (a \sim b \sim c)$. Здесь знак «~» обозначает неразличимость (эквивалентность) решений. Далее при рассмотрении нумерация ранжирований является фиксированной. Через n_i обозначим количество субъектов (ЛПР, экспертов), которые придерживаются отношения R_i (ранжирования R_i). При этом $\sum_{i=1}^{13} n_i = n$.

В рассмотрение вводится подмножество D таких элементов p_i, для которых $n_i \geq 0$. Подмножество $D \subseteq \{R_1, R_2, \dots, R_{13}\}$, при этом $R_i \in D$, если $n_i > 0$, и $R_i \notin D$, если $n_i = 0$. Тогда множество D называется совокупностью ранжирований.

Пусть имеется совокупность трех строгих ранжирований вида: (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), полученных друг из друга циклической перестановкой объектов (решений). Эта совокупность ранжирований называется циклической. Каждое из упорядочений циклической совокупности порождает остальные упорядочивания перестановкой первого элемента на последнее место и перестановкой последнего элемента на первое место. Эти два элемента называются циклическими. Например, упорядочивание (a, b, c) порождает (b, c, a) с циклическим объектом (элементом) a и упорядочивание (c, a, b) с циклическим объектом c.

Рассмотрим ранжирование вида: $(a \sim b, c)$, $(a \sim c, b)$, $(c, a \sim b)$, каждое из которых представляет из себя линейный квазипорядок (частичный порядок). Каждое из этих ранжирований содержит в себе 2 класса объектов: эквивалентные и связанные с ними доминирующие или доминируемые элементы.

Тогда линейный квазипорядок называется *дихотомическим*, им соответствующее ранжирование состоит из 2-х классов (т.е., в частном случае, ранжирование состоит из 3-х элементов, один из классов обязательно содержит один элемент). Дихотомическое ранжирование называется однотипным, если их одноэлементные классы имеют один и тот же номер. Тогда ранжирование $(a \sim b, c)$ и $(a \sim c, b)$ являются однотипными, а $(a \sim b, c)$ и $(c, a \sim b)$ не являются однотипными.

То есть, необходимо охарактеризовать (определить условия) индивидуальные отношения (наборы индивидуальных отношений), для которых хотя бы одно (т.е. построенное с использованием одного из правил) мажоритарное отношение было транзитивно.

Для упрощения рассуждений может быть выполнен переход от множества X к любому его трехэлементному подмножеству (к трехэлементным подмножествам). Требуется сформировать критерий допустимости множества ранжирований D

Обобщенное понятие циклической совокупности строгих ранжирований формируется следующим образом. Множество трех линейных квазипорядков (ранжирований) вида $\{ aRbRc,\ bRcRa,\ cRaRb \}$ называется циклическим, если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) если в одном из отношений объекты (элементы, решения) являются неразрывными, тогда для циклических объектов остальных отношений имеет место строгое предпочтение;

б) все три отношения не могут быть однотипно дихотомическими.

Пример ранжирований, соответствующих условию а).

$(x \sim y \sim z), (y \sim z, x), (z,\ x \sim y)$.

Пример ранжирований, соответствующих условию б).

$(x,\ y \sim z), (y \sim z, x), (z,\ x \sim y)$.

Подмножество $\delta \subseteq \{R_1, R_2, \dots, R_{13}\}$ является допустимым, если при $n_i > 0$ для $R_i \in \mathrm{D}$ и $n_i = 0$ для $R_i \notin \mathrm{D}$ существует транзитивное мажоритарное отношение R. В том случае, если будет сформирована допустимая совокупность ранжирований $\mathrm{D} = \{R_i |\ i = \overline{1,m}\}$, то существует транзитивное мажоритарное отношение R.

На основе рассмотренных свойств (признаков) циклических ранжирований может быть сформировано условие допустимости совокупности ранжирований D.

Теорема 1. Совокупность ранжирований D является допустимой, когда она не включает циклического множества (т.е. всякое циклическое множество недопустимо и не может содержаться в δ).

В качестве примера, комментирующего суть Теоремы 1, рассмотрим циклические ранжирования следующего вида: $\{ (a \sim b \sim c),\ (c, aR_i b), (bR_i c, a)\}$. За каждое отношение отдано одинаковое число голосов. Тогда $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, но $(a, c) \notin R$, следовательно, R не является транзитивным.

Пусть циклическое множество состоит из дихотомических ранжирований и в соответствии с пунктом б) имеет следующий вид: $\{ (a \sim b \sim c),\ (b \sim c, a), (c, a \sim b)\}$, тогда $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, но $(a, c) \notin R$, следовательно, отношение R нетранзитивно.

В итоге получим, что правило большинства позволяет сформировать транзитивное мажоритарное ранжирование R только в том случае, если множество D ранжирований R_i является допустимым, т.е. в него не могут входить циклические ранжирования. В итоге правило большинства может быть применено в частном случае. Для общего случая (когда отсутствуют ограничения на вид ранжирований) правило большинства не позволяет получить транзитивное мажоритарное ранжирование R.

Правило большинства может быть обобщено (т.е. применимо при построении ранжирования R в общем виде) в терминах *расстояния* между исходными отношениями (ранжированиями).

На основе ранжирования R_i может быть сформирована *матрица парных сравнений*

$$A^k = \begin{vmatrix} a_{11}^k & \dots & a_{1n}^k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^k & \dots & a_{nn}^k \end{vmatrix}, \text{ где } a_{ij}^k = \begin{cases} 1 \text{ при } x_i \succ x_j \\ 0 \text{ при } x_i \sim x_j \\ -1 \text{ при } x_j \succ x_i \end{cases},$$

k – индекс эксперта.

В том случае, если заданы два ранжирования R_h и R_l, тогда расстояние между этими двумя ранжированиями будет определено согласно отношению:

$$d(R_h,R_l) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{h} - a_{ij}^{l}\right|$$

Пусть дано множество ранжирований $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$, тогда расстояние от некоторого ранжирования R до этого множества определяется следующим образом:

$$d(R,R_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}^{k} - a_{ij}\right|$$

где a_{ij} – элемент матрицы A соответствующий некоторому ранжированию R (произвольному ранжированию R_i из множества $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$).

В случае рассмотрения отдельного элемента $a_{ij} = 1$ (соответствующего ранжированию R) может быть определено для него расстояние между R и остальными ранжированиями $R_k \in \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{N} d_{ij}(R,R_k) = \sum_{k=1}^{N}\left|a_{ij}^{k} - a_{ij}\right|$$

То есть p_{ij} определяется для тех элементов a_{ij}, соответствующих ранжированию R, которые равны 1. Элемент p_{ij} – коэффициент потерь (при этом $p_{ii} = 0$), а матрица P называется *матрицей потерь.*

Ранжирование R, такое, что $P = \arg\min d(R,R_k)$ называется *медианой* множества $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$. Т.е. это такое ранжирование, которое с точки зрения расстояния является «наиболее близким» ко всем ранжированиям $R_k \in \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$.

Для определения мажоритарного транзитивного ранжирования применим *метод Кемени*, в котором при расчете элемента p_{ij}, матрицы потерь P используются отличия значений элементов a_{ij}^{k} матриц соответствующих ранжирований R_k

Алгоритм Кемени определения меридианы (ранжирования) R, которое будет являться транзитивным, предполагает выполнение следующих шагов.

1 шаг. Для расчета значения элемента p_{ij} матрицы потерь P выполняется идентификация такого ранжирования R^l, для которого выполняется условие:

$$a_{ij}^{l} = \max_{k=\overline{1,N}}(a_{ij}^{k})$$

Тогда значение p_{ij} матрицы потерь определяется согласно отношению:

$$p_{ij} = d_{ij}(R_1,R_l) + d_{ij}(R_2,R_l) + \cdots + d_{ij}(R_N,R_l)$$

В итоге формируется матрица P^N, соответствующая элементам $(x_i,x_j) \in X^2$.

После идентификации матрицы потерь требуется определить матрицу Q, на основе которой в дальнейшем идентифицируются альтернативы, соответствующие удаляемым из матрицы P (и, соответственно из матрицы $A_k(k = \overline{1,N})$.

2 шаг. Определение матрицы Q:

$$Q^n = E^n \cdot P^n \cdot E^n, \text{ где } E^n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

где E^n – матрица, все элементы (кроме диагональных) равны 1.

3 шаг. В полученной матрице Q^n реализуется определение элемента $q_{ij}^n = \min q_{ij}^n$. Альтернативы (решения), определяющие строку и столбец элемента q_{ij}^n обозначаются x_{i_n} и x_{i_l} соответственно (т.е. они размещаются в позиции n и l соответственно).

4 шаг. Полученные таким образом альтернативы x_i и x_j размещаются в n-ой и первой позициях формируемого ранжирования R. После этого реализуется удаление соответствующих i-ой строки и j-го столбца.

Пример определения медианы для множества ранжирований $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$.

Задано 4 эксперта и сформулированные ими ранжирования в следующем виде:

$R_1 = (a_2, a_4, a_1, a_3), R_2 = (a_1, a_3 \sim a_4, a_2), R_3 = (a_2 \sim a_3, a_4, a_1), R_4 = (a_3, a_2, a_1 \sim a_4)$

Ранжированием $R_k(k = \overline{1,N})$ соответствуют матрицы отношений следующего вида:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad R_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1 шаг. Определение матрицы потерь P^N.

Имеем:

$$r_{12}^2 = \max_{k=\overline{1,N}}(r_{12}^k) = 1 \quad => \quad p_{12}^N = d_{12}(R_1, R_2) + d_{12}(R_3, R_2) + d_{12}(R_4, R_2) = 6.$$

По аналогии:

$$r_{13}^2 = \max_{k=\overline{1,N}}(r_{13}^k) = 1 \quad => \quad p_{13}^N = d_{13}(R_1, R_2) + d_{13}(R_3, R_2) + d_{13}(R_4, R_2) = 4.$$

Выполняя расчеты подобным образом, получим матрицу потерь P в следующем виде:

$$P^N = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

2 шаг. Определение матрицы потерь Q^N:

$$Q^n = E^n \cdot P^n \cdot E^n$$

Имеем матрицу Q^N в следующем виде:

$$Q^N = \begin{vmatrix} 24 & 24 & \mathbf{23} & 28 \\ 32 & 24 & 30 & 31 \\ 33 & 26 & 24 & 31 \\ 28 & 25 & 25 & 24 \end{vmatrix}$$

3 шаг. Определение матрицы потерь $q_{ij}^N = \min\limits_{i,j=\overline{1,n}} (q_{ij}^N)$.

В данном случае – это $q_{13}^N = 23$. Тогда альтернативы в результирующем ранжировании разметим следующим образом: $R = \{x_3, \dots, x_1\}$.

Так как решения x_3 и x_1, исключены из рассмотрения, тогда должны быть модифицированы матрицы R_k путём исключения из них 3-го столбца и 1-ой строки. В результате имеем:

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad R_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & - & 0 \end{vmatrix} \qquad R_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & - & 0 \end{vmatrix}$$

1 шаг. Определение матрицы потерь. Матрица $P^{(N-2)}$ имеет вид:

$$P^{(N-2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2 шаг. Определение матрицы потерь $Q^{(N-2)}$. На основе матрицы $P^{(N-2)}$ формируем матрицу $Q^{(N-2)}$ в следующем виде:

$$Q^{(N-2)} = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \end{array}$$

Так как решения x_1 и x_3 уже добавлены в ранжирование R, то нас будет интересовать решения x_2 и x_4. Соответственно рассматриваем элементы $q_{24}^{(N-2)} = 11$ и $q_{42}^{(N-2)} = 8$. Т.к. элемент $q_{42}^{(N-2)} < q_{24}^{(N-2)}$, тогда на основе элемента $q_{42}^{(N-2)}$ определяем позиции x_2 и x_4 в ранжировании. Получаем $x_2 = x_{i_2}$ (т.е. решение *i* во второй позиции в R) и $x_4 = x_{i_3}$ (т.е. решение *i* в третей позиции в R). Тогда результирующее ранжирование имеет вид: $R = \{x_3, x_2, x_4, x_1\}$.

3. Порядок выполнения работы

1. Разработать процедуру, реализующую формирование для заданных ранжирований соответствующих им матриц отношений R_i.
2. Разработать процедуру формирования матрицы потерь Q^n на основе сформированных матрицы отношений R_i.
3. Разработать процедуру определения решений, включаемых в итоговое ранжирование.
4. Разработать процедуру модификации матриц отношений R_i путем исключения решений, добавленных в формируемое итоговое ранжирование.
5. Разработать модуль, координирующий выполнение упомянутых выше процедур.

4. Варианты заданий.

Вариант 1. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$R_1=(x_2, x_4, x_1, x_3, x_5, x_8, x_7, x_6)$;
$R_2=(x_1,x_5,x_4\sim x_2,x_6,x_7\sim x_8, x_6)$;
$R_3=(x_3,x_4,x_8\sim x_7,x_6,x_5,x_2, x_1)$;
$R_4=(x_7,x_8,x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5)$;
$R_5=(x_4,x_8,x_3\sim x_7,x_6\sim x_1,x_2, x_5)$;

Вариант 2. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$R_1=(x_2, x_4, x_1, x_3, x_5, x_6)$;
$R_2=(x_1,x_5,x_4\sim x_2,x_6, x_3)$;
$R_3=(x_3,x_4\sim x_6,x_5,x_2, x_1)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5)$;
$R_5=(x_6\sim x_4,x_1\sim x_2,x_5, x_3)$;
$R_6=(x_3,x_4,x_6,x_2,x_1\sim x_5)$;
$R_7=(x_3, x_4,x_1\sim x_2,x_5, x_6)$;
$R_8=(x_3,x_4,x_6\sim x_2,x_1\sim x_5)$;

Вариант 3. Выполнить определение итогового ранжирования R для исходных ранжирований следующего вида:

$R_1=(x_2, x_4, x_1, x_3, x_7,x_5, x_6)$;
$R_2=(x_1\sim x_7,x_5,x_4\sim x_2,x_6, x_3)$;
$R_3=(x_3,x_4\sim x_6,x_5,x_2\sim x_7, x_1)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1,x_7,x_5)$;
$R_4=(x_3\sim x_4,x_6\sim x_2,x_1, x_5\sim x_7)$;
$R_5=(x_6\sim x_4,x_1\sim x_2,x_7,x_5, x_3)$;
$R_6=(x_7,x_3,x_4,x_6,x_2,x_1\sim x_5)$;
$R_7=(x_7\sim x_3,x_4,x_6,x_2,x_1\sim x_5)$;

5. Контрольные вопросы

1. В чем заключается постановка задачи группового выбора решений?
2. В каком виде представляются исходные отношения, формируемые группой экспертов?
3. В чем заключается правило большинства при построении мажоритарных отношений?
4. В чем состоит причина не выполнения свойства транзитивности для мажоритарного отношения R, обобщающие отношения экспертов?
5. Что из себя представляют дихотомические однотипные и разнотипные ранжирования?
6. Что представляет из себя медиана Кемени с точки зрения группового выбора?
7. Что такое матрица потерь и как она формируется?
8. Как формируются матрицы отношений на основе задаваемых ранжирований?
9. В чем состоит алгоритм формирования итогового ранжирования R?

Библиографический список

1. Петровский А.Б. Теория принятия решений./ А.Б. Петровский – М.: Издательский центр "Академия", 2009.– 400 с.

2. Будаева А.А. Принятие решений: теория, технология, приложения. Учебное пособие. / А.А. Будаева, В.О.Гроппен. – Владикавказ: Изд–во "Фламинго", 2010.– 184 с.

3. Фишберн П.К. Теория полезности для принятия решений./ П.К. Фишберн — М.: Наука, 1978– 353 с.

4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях. Предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.– 250 с.

5. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследования операций для бакалавров информатики. Ч. III.Теория решений. Учебное пособие. – Томск: Изд–во НТЛ, 2012.– 280 с.

6. Турунтаев Л.П. Теория принятия решений. Учебное пособие./ Л.П. Турунтаев. – Томск: Изд–во Томского ун–та систем управления и радиоэлектроники, 2003.– 222 с.

7. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений./ А.В.Лотов, И.И.Поспелова.– М.:Изд–во МГУ, 2008. – 198 с.

8. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. / В.В.Подиновский– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007 – 64 с.

9. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач./ В.В. Подиновский, В.Д. Ногин– М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.— 256 с.

9. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход./ В.Д. Ногин– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 144 с.

10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ A

Метод 1

1) Выполнить суммирование элементов каждой строки
2) Нормализовать каждую из полученных сумм путем ее деления на сумму всех элементов
3) Полученные результаты в сумме должны давать единицу; первый элемент результирующего вектора является приоритетом (весом) первого объекта, второй – второго и т.д.

Метод 2

1) Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (нормализовать элементы каждого столбца)
2) Полученные элементы сложить для каждой строки (выполнить построчное суммирование полученных нормализованных элементов)
3) Разделить каждую из полученных сумм на число элементов в строке (процесс усреднения по нормализованным столбцам)

Метод 3

1) Выполнить суммирование элементов каждого столбца и определить величины, обратные каждой из полученных сумм (обратная величина для рассматриваемого значения – это результат деления единицы на само это значение)
2) Разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин (нормализация обратных величин с тем, чтобы их сумма была равна 1).