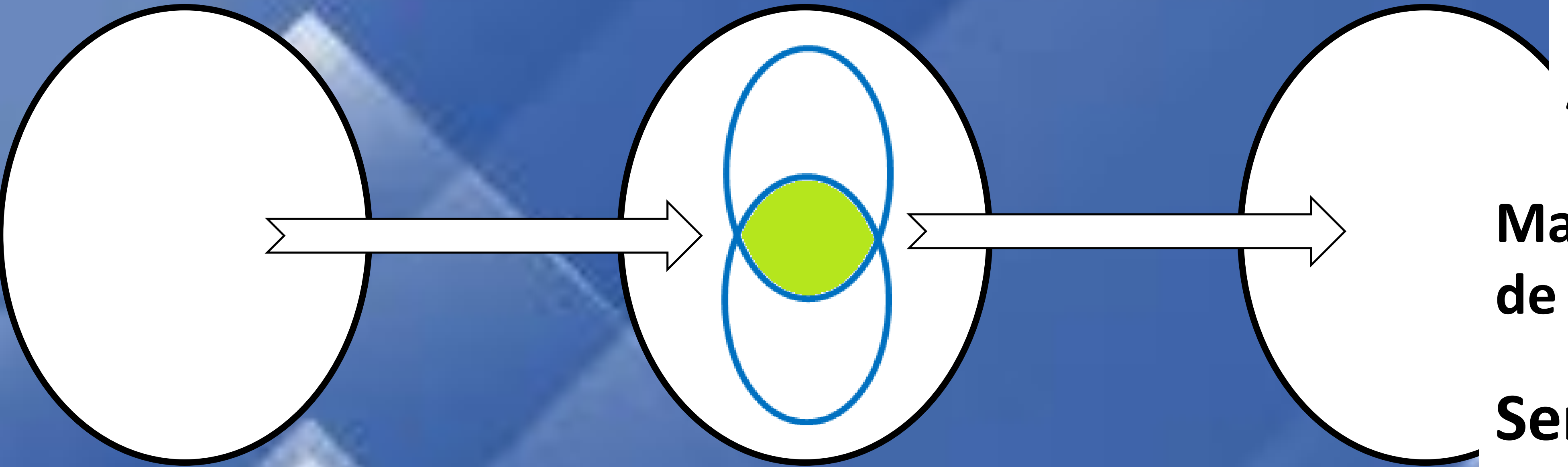


Álgebra

Martes 24 de agosto de 2021

Semestral 5

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$Dom(f) \cap Ran(f) \neq \emptyset$$

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Función par

i) $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$

ii) $f(-x) = f(x)$

Ejemplo:

$Sea:\ f(x) = x^4 - x^2 + 5$

$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 5$

$f(-x) = x^4 - x^2 + 5$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\therefore\ f(x) es\ una\ función\ par$

Función impar

i) $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$

ii) $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo:

$Sea:\ f(x) = x^3 - x$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$

$-f(x) = -(x^3 - x) = -x^3 + x$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\therefore\ f(x) es\ una\ función\ impar$

16. Determine cuántas funciones son pares.

I. $f_{(x)}=x^2-4;\ x \in \mathbb{R}$

II. $g_{(x)}=x^3+1;\ x \in \mathbb{R}$

III. $h_{(x)}=e^{x^2};\ x \in \mathbb{R}$

IV. $P_{(x)}=\cos x;\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 0 E) 1

$f(x)=x^2-4$ ✓

$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4$

$g(x)=x^3+1$ ✗

$g(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$

$h(x)=e^{x^2}$ ✓

$h(-x)=e^{(-x)^2}=e^{x^2}$

$P(x)=\cos x$ ✓

$P(-x)=\cos(-x)=\cos x$

ALGEBRA DE FUNCIONES

Sean f(x) y g(x)
funciones tales que:

$$\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \neq \varnothing$$

Igualdad de funciones

Dos funciones f y g son iguales si:

i) $\mathrm{Dom}\ f = \mathrm{Dom}\ g$

ii) $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}\ f$

Adición de funciones

i) $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g$

ii) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Sustracción de funciones

i) $\mathrm{Dom}(f-g) = \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g$

ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Multiplicación de funciones

i) $\mathrm{Dom}\ (fg) = \mathrm{Dom}\ f \cap \mathrm{Dom}\ g$

ii) $(f \cdot g)(x) = f(x)\ g(x)$

División de funciones

i) $\mathrm{Dom}\ (f/g) = (\mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g) - \{x \in \mathrm{Dom} g \,/\, g(x) = 0\}$

ii) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f/g)$

$Dadas\ las\ funciones$:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$g(x) = \sqrt{x+2}\,.\sqrt{x-2}$

$¿f(x) = g(x)?$

Calculemos el dominio en cada función.

Para f(x):

Dom (f) = $x^2 - 4 \geq 0$

$\Rightarrow (x + 2)(x - 2) \geq 0$

$\Rightarrow x \in \langle -\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty\rangle$

Dom (f) = $\langle -\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty\rangle$

Para g(x):

Dom(g) = $x + 2 \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0$

$\Rightarrow x \geq -2 \wedge x \geq 2$

$\Rightarrow x \in [2 ; +\infty\rangle$

Dom(g) = $[2 ; +\infty\rangle$

Entonces vemos que Dom (f) $\neq$ Dom (g)

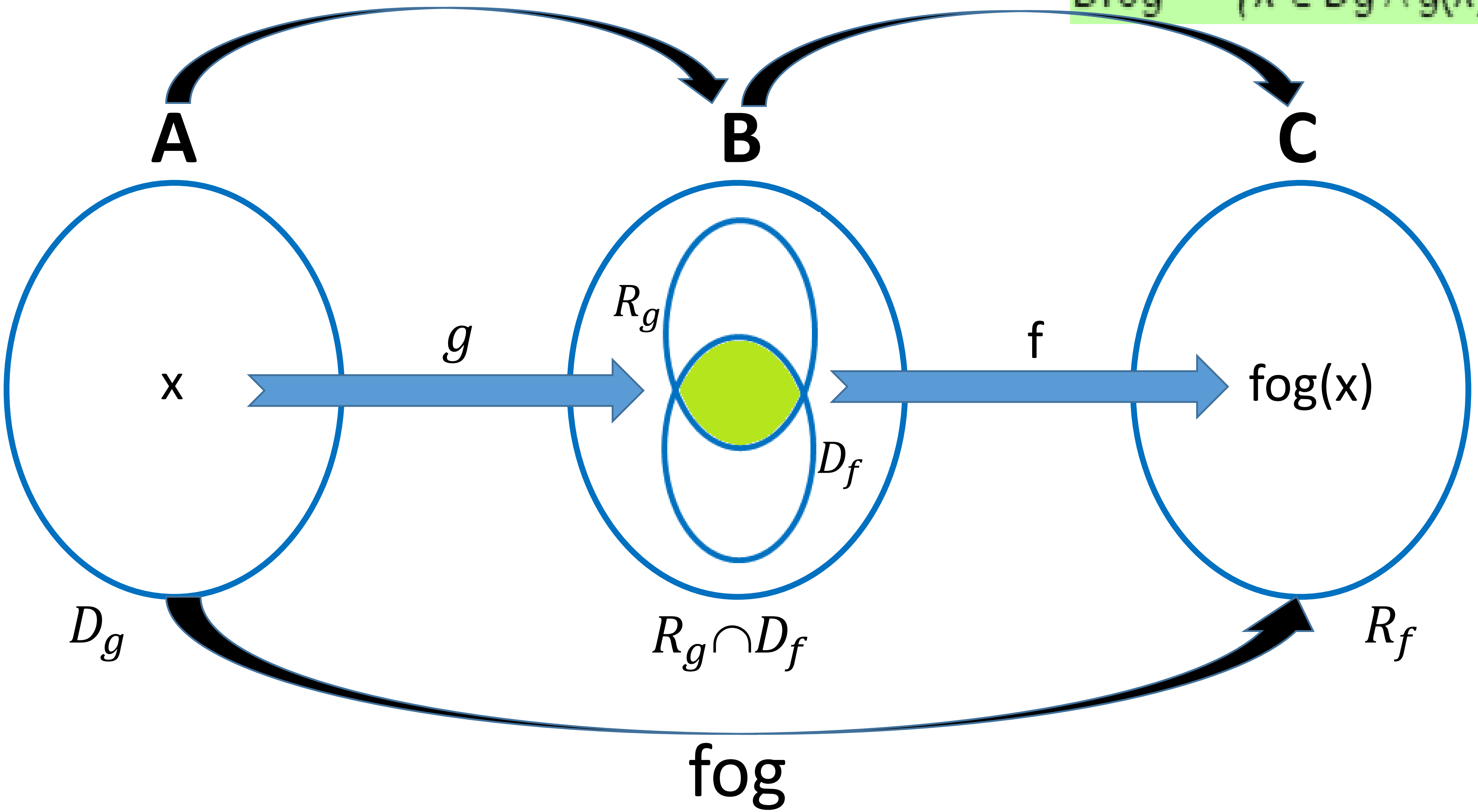
Por lo tanto f(x) $\neq$ g(x)

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas 2 funciones f y g la función composición denotado por fog se define así:

$fog = \{(x;y) \mid y = f(g(x))\}$

$Dfog = \{x \in Dg \wedge g(x) \in Df\}$



02. Calcule $Dom\left(\frac{f}{g}\right)$ si

$f_{(x)}=x^2-4x-3;\ x\in\langle-2;4]$

$g_{(x)}=x^3-4x^2+3x;\ x\in\langle-4;3\rangle$

A) $\langle-4;3\rangle$

B) $\langle-2;3\rangle$

C) $\langle-2;4\rangle-\{0;1\}$

D) $\langle-2;3\rangle-\{0;1\}$

E) $\langle-2;3]-\{0;1\}$

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\{Dom(f)\cap Dom(g)\}-\{x\in Dom(g)/\ g(x)=0\}$$

$$Dom(f)=\langle-2;4]\ \wedge\ Dom(g)=\langle-4;3\rangle$$

$$*\ Dom(f)\cap Dom(g)=\langle-2;3\rangle$$

$$*\ g(x)=x^3-4x^2+3x=0$$

$$x(x^2-4x+3)=0$$

$$x(x-3)(x-1)=0\Rightarrow x=0,3,1$$

$$\therefore\ Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\langle-2;3\rangle-\{0;3;1\}=\langle-2;3\rangle-\{0;1\}$$

06. Dadas las siguientes funciones

$f=\{(2;\ 1),\ (3;\ 5),\ (-1;\ 4),\ (4;\ 7)\}$

$g=\{(2;\ -3),\ (-1;\ -4),\ (4;\ -2),\ (5;\ 1)\}$

determine la suma de elementos del rango de la función f+g.

A) 5 B) 8 C) 2

D) 1 E) 3

$Dom(f)=\{2;3;-1;4\}$

$Dom(g)=\{2;-1;4;5\}$

$* Dom(f)\cap Dom(g)=\{2;-1,4\}=Dom(f+g)$

$*(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$$\left.\begin{aligned} f(2)+g(2)&=1+(-3)=-2\\ f(-1)+g(-1)&=4+(-4)=0\\ f(4)+g(4)&=7+(-2)=5\end{aligned}\right\} Ran(f+g)=\{-2,0,5\}$$

$\therefore \Sigma=-2+0+5=\boxed{3}$

08. Calcule el rango de f · g si

$$f_{(x)} = \frac{1}{x+1} + 1; x \in \langle -1;5 \rangle$$

$$g_{(x)} = 2x + 2; x \in \langle -3;1]$$

A) $\langle 1; 6]$ B) $\langle 2; 6\rangle$ C) $\langle 2; 6]$

D) $\langle -1; 3]$ E) $[2; 6]$

$* \ \mathrm{Dom}(f.g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$

$= \langle -1; 5\rangle \cap \langle -3; 1]$

$= \langle -1; 1] \Rightarrow x$

$\mathrm{Ran}(f.g) = ?$

$* \ (f.g)(x) = f(x).g(x)$

$= \left(\frac{1}{x+1} + 1\right)(2x+2)$

$= \left(\frac{x+2}{\cancel{x+1}}\right).2\cancel{(x+1)}$

$(f.g)(x) = 2x+4$

$\Rightarrow x \in \langle -1; 1]$

$\Rightarrow -1 < x \leq 1$

$-2 < 2x \leq 2$

$2 < 2x+4 \leq 6$

$2 < (f.g)(x) \leq 6$

$\therefore \ \mathrm{Ran}(f.g) = \langle 2; 6]$

10. Dadas las funciones

$f_{(x)} = x^2 - x + 1;\ x \in \mathbb{R}^+$

$g_{(x)} = |x|^2 + x + 1;\ x \in \mathbb{R}^+$

determine el rango de $\frac{g}{f}$.

A) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

B) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right\rangle$

C) $[1; 3]$

D) $\langle -1; 1\rangle$

E) $\langle 1; 3]$

$f(x) = x^2 - x + 1\ ;\ x \in \mathbb{R}^+$ $\quad \text{Ran}\left(\frac{g}{f}\right) = ?$

$g(x) = |x|^2 + x + 1\ ;\ x \in \mathbb{R}^+$

$* \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{|x|^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2}{x - 1 + \frac{1}{x}}$

(HORNER)

$* \text{MA} \geq \text{MG}$

$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x} \geq 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x - 1 + \frac{1}{x}} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{x - 1 + \frac{1}{x}} \leq 2 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{2}{x - 1 + \frac{1}{x}} \leq 3$

$\Rightarrow 1 < \left(\frac{g}{f}\right)(x) \leq 3$ $\quad \therefore \text{Ran}\left(\frac{g}{f}\right) = \langle 1; 3]$

12. Sean las funciones

$f=\{(2; 3), (4; 5), (5; 8), (6; 10), (7; 0)\}$

$g=\{(3; 4), (1; 5), (0; 6), (8; 2), (-1; 3)\}$

Determine $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$.

A) $fog=\{(5; 5), (0; 6), (7;10), (3;10)\}$
$gof=\{(2; 3), (4; 2), (1; 5), (7; 6)\}$

B) $fog=\{(3; 5), (1; 8), (0;10), (8; 3)\}$
$got=\{2; 4), (5; 2), (7; 6)\}$

C) $fog=\{(3; 5), (1; 6), (0;10), (8; 3)\}$
$gof=\{(2; 3), (5; 2), (7; 6)\}$

D) $fog=\{(4; 5), (1; 6), (0;10), (8; 3)\}$
$gof=\{(2; 3), (1; 2), (7; 6)\}$

E) $fog=\{(5; 5), (3;10), (1; 6), (0;10)\}$
$gof=\{(2; 3), (1; 2), (7; 6)\}$

* HALLANDO $g \circ f$:

* $Dom(g)=\{3; 1; 0; 8; -1\}$ $Ran(g)=\{4; 5; 6; 2; 3\}$

$Dom(f)=\{2; 4; 5; 6; 7\}$ $Ran(f)=\{3; 5; 8; 10; 0\}$

* $Dom(g \circ f)=\{x \in Dom(f) \wedge f(x) \in Dom(g)\}$

$x \in \{2; 4, 5; 6; 7\} \wedge \{2; 5; 7\}$

$Dom(g \circ f)=\{2; 5; 7\}$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow g(f(2)) = g(3) = 4$

$\Rightarrow g(f(5)) = g(8) = 2$

$\Rightarrow g(f(7)) = g(0) = 6$

$\therefore g \circ f = \{(2; 4), (5; 2), (7; 6)\}$

18. Determine la suma de los elemento enteros del rango de la función (f o g) si

$f_{(x)} = \sqrt{x+3};\ x < 6$

$g_{(x)} = x^2 - 4x + 1;\ x \in \langle -1;\ 3\rangle$

A) 2 B) 3 C) 6

D) 5 E) 4

$* \operatorname{Dom}(f\circ g) = \{x \in \operatorname{Dom}(g) \wedge g(x) \in \operatorname{Dom}(f)\}$

$= x \in \langle -1; 3\rangle \wedge \underbrace{x^2-4x+1}_{} \in \langle -\infty; 6\rangle$

$(x-2)^2-(-2)^2+1$

$(x-2)^2-3 \in \langle -\infty; 6\rangle$

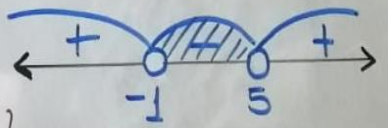
$(x-2)^2-3 < 6$

$(x-2)^2-9 < 0$

$(x-2+3)(x-2-3) < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$

P.C.: $-1, 5$



$\operatorname{Dom}(f\circ g) = \{x \in \langle -1; 3\rangle \cap \langle -1; 5\rangle\}$

$\operatorname{Dom}(f\circ g) = \langle -1; 3\rangle$

$* (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-4x+1) = \sqrt{x^2-4x+1+3} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

Como: $-1 < x < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 1 \Rightarrow 0 \leq |x-2| < 3$

$\Rightarrow \operatorname{Ran}(f\circ g) = [0; 3\rangle$

PIDEN: $\sum_{\text{ENT.}} (\operatorname{Ran}(f\circ g)) = 0 + 1 + 2 = 3$

20. Calcule la suma de elementos del dominio de la función (G o F) a partir de

$$F = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2 - \sqrt{4-x}\}$$

$$G = \{(5;\sqrt{2});(0;3);(1;-5);(2;15);(7;0)\}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 5 E) 7

$$* \ \mathrm{Dom}(G \circ F) = \{x \in \mathrm{Dom}(F) \wedge F(x) \in \mathrm{Dom}(G)\}$$

$$x \in \langle -\infty; 4] \wedge \underbrace{2-\sqrt{4-x} \in \{\cancel{5};0;1;2;\cancel{7}\}}_{x=\{0;3;4\}}$$

$$\mathrm{Dom}(G \circ F) = \{x \in \langle -\infty;4] \cap \{0;3;4\}\}$$

$$\mathrm{Dom}(G \circ F) = \{0;3;4\}$$

PIDEN:

$$\Sigma \text{ ENT. } (\mathrm{Dom}(G \circ F)) = 0+3+4 = 7$$

OBSERVACIÓN

PARA Dom(F):

$$4 - x \geq 0$$

$$x \leq 4$$

$$\Rightarrow \mathrm{Dom}(F) = \langle -\infty; 4]$$