



NOVIEMBRE-RM

mes

de

noviembre

Análisis Combinatorio

15-11-21

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Sea n un número entero positivo, el factorial de n , se denota por $n!$ o $n!$ y se define como el producto de los enteros consecutivos desde 1 hasta n o de n hasta la unidad inclusive.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Se lee: factorial de n o n factorial

Ejemplos

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

En general

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$(-3)! \rightarrow \text{no está definida; } -3! = -6$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)! \rightarrow \text{no está definida; } \frac{2!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por convención: $0! = 1! = 1$

Como expresar un factorial en términos de otro factorial menor

$$8! = \overbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}^{7!} = \frac{7!}{6!}$$

$$8! = 8 \times 7!$$

$$8! = 8 \times 7 \times 6!$$

Factorial o semi factorial de un número ($n!$)

• Para n par: producto de números pares.

$$n! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times n, n \text{ es par}$$

• Para n impar: producto de números impares.

$$n! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times n, n \text{ es impar}$$

• $n! = 2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)!$, para n par

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$2!! = 2$$

$$4!! = 4 \times 2$$

$$6!! = 6 \times 4 \times 2$$

$$8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2$$

$$10!! = 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2$$

$$1!! = 1$$

$$3!! = 3 \times 1$$

$$5!! = 5 \times 3 \times 1$$

$$7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1$$

$$9!! = 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1$$

pregunta 1

$$A = \frac{15!}{14!} + \frac{100!}{98!} + \frac{85!}{84!}$$

$$A = \frac{15! \times 14!}{14!} + \frac{100! \times 98!}{98!} + \frac{85! \times 84!}{84!}$$

$$A = 15! + 9900 + 85 = 10000$$

pregunta 2

$$(2x-3)! = 120$$

$$2x-3=5$$

$$2x=8$$

$$x=4$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

pregunta 3

$$2o(n!+6) = n! (n!+1)$$

$$n! = 24 = 4!$$

$$n!^2 - 19n - 120 = 0$$

$$n=4$$

$$\frac{n!}{n!} \times \frac{-24}{5} =$$

pregunta 4

$$E = \frac{200!}{199! + 198!} = \frac{200!}{199! \times 199 + 198!} = 199$$

$$199! + 198! = 198! (199 + 1)$$

pregunta 5

$$\frac{(x+5)!}{(x+3)!} = 156$$

$$\frac{(x+5)(x+4)\cancel{(x+3)!}}{\cancel{(x+3)!}} = 156$$

$$(x+5)(x+4) = 156 : 13 \cdot 12$$

$$x+5 = 13$$

$$x = 8$$

pregunta 6

$$(x+1)! = 30(x-1)!$$

$$(x+1) \times (x-1)! = 30x - 30$$

$$x(x-1)! = 30 = 5 \cdot 6$$

$$x = 5$$

pregunta 7

En la figura si "A, B, C, D" son ciudades y cada línea es un camino. Si una persona desea viajar sin pasar dos veces por la misma ciudad, ¿de cuántas maneras puede elegir su recorrido?

a- Si quiere ir de "A" hacia "D" entonces hay 11 formas distintas de realizarlo. $\rightarrow F$

b- Si se quiere ir de "A" hacia "D" (ir y volver) entonces hay 64 formas distintas de realizarlo. $\rightarrow F$

c- Si se quiere ir de "A" hacia "D" ir y volver considerando que el camino de regreso no es el mismo que el de ida, entonces hay 992 formas distintas de realizarlo. $\rightarrow V$

a) # maneras = $2 \times 3 \times 4 + 2 \times 4 = 32$

b) # maneras = $32 \times 32 = 1024$

c) # maneras = $2 \times 3 \times 4 (3 \times 2 \times 1 + 3 \times 2) + 2 \times 4 (3 \times 1 + 3 \times 3 \times 2)$
 $24 (12) + 1 (60) = 456$

? = $32 \times 31 = 992$

pregunta 8

Luna tiene 4 blusas, 5 faldas, 7 pantalones, 3 pares de zapatos.

a- Si usa pantalón, blusa y zapato, entonces, se podrá vestir de 84 formas distintas.

b- Si se viste de manera correcta, entonces se puede vestir de 144 formas distintas.

c- Si dos blusas son iguales, 4 pantalones son iguales, 2 pares de zapatos son iguales y se viste con blusa, pantalón y zapatos, entonces se podrá vestir de 24 formas distintas.

a: # maneras = $7 \times 4 \times 3 = 84$

b: # maneras = $4 \times 5 \times 3 + 4 \times 7 \times 3 = 60 + 84 = 144$

c: # maneras = $3 \times 4 \times 2 = 24$

4 blusas = $2+1=3$

7 pantalones = $3+1=4$

3 pares de zapatillas = $1+1=2$

problema 9

En una reunión hay 7 amigos (3 varones y 4 mujeres). Indicar V o F

a: Si me preguntan ¿de cuántas maneras se pueden ubicar los 7 amigos? respondo: de mil maneras $\rightarrow F$

b: Si me preguntan ¿de cuántas maneras se pueden sentar de una fila de 4 asientos? respondo 840 maneras $\rightarrow V$

a) # maneras = $7! = 7 \times 6! = 5040$

b) # maneras = $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

problema 10

Una pareja de enamorados fue al cine con tres amigos y se ubicaron en una fila de 5 asientos.

Relacionar de cuántas maneras diferentes se pondrán ubicar en los asientos:

I: Si los enamorados deben estar siempre juntos

II: Si estaban siempre se sienta en el centro

III: Si Raúl y Zaira no se sientan juntos

I: # maneras = $4! \times 2 = 24 \times 2 = 48$

II: # maneras = $4! = 24$

III: # maneras = $5! - 4! \times 2 = 120 - 48 = 72$

problema 11

Lima Huancayo Tingo María

Nota: no se puede pasar 2 veces por la misma ciudad.

¿De cuántas maneras se podrá ir de Lima a Tingo María?

¿De cuántas maneras se podrá ir de Lima a Tingo María y volver?

¿De cuántas maneras se podrá ir de Lima a Tingo María y volver por una ruta diferente del usado en la ida?

$$\# \text{ maneras} = 4 \times 5 = 20$$

$$\# \text{ maneras} = 20 \times 20 = 400$$

$$\# \text{ maneras} = 20 \times 19 = 380$$

problema 12

Una alumna tiene 4 blusas y 5 pantalones, todas las prendas de diferente color.

• ¿De cuántas formas diferentes se podrá vestir?

• ¿De cuántas formas diferentes se podrá vestir si la blusa blanca siempre la usa con el pantalón negro?

• ¿De cuántas formas diferentes se podrá vestir, si la blusa azul y el pantalón blanco siempre los usa juntos?

$$\# \text{ maneras} = 4 \times 5 = 20$$

• blusa blanca \rightarrow pantalón negro

$$\# \text{ maneras} = 3 \times 5 + 1 = 16$$

Si la blusa azul y el pantalón blanco siempre los usa juntos

$$\# \text{ maneras} = 3 \times 4 + 1 = 13$$

problema 13

Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5

• ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar?

• ¿Cuántos números mayores de 400 de tres cifras se pueden formar?

• ¿Cuántos números pares de tres cifras diferentes se pueden formar?

$$\# \text{ formas} = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$\# \text{ formas} = 2 \times 5 \times 5 = 50$$

$$\# \text{ formas} = 5 \times 4 \times 2 = 40$$

Tarea

9-
$$H = \frac{200!}{199!} + \frac{20!}{18!} + \frac{40!}{39!}$$

$$H = \frac{\cancel{200!} \times \cancel{199!}}{\cancel{199!}} + \frac{20! \times \cancel{19} \times \cancel{18!}}{\cancel{18!}} + \frac{40! \times \cancel{39!}}{\cancel{39!}}$$

$$H = 200 + 380 + 40 = 620$$

10-
$$K = \frac{80!}{79! + 78!} + \frac{14!}{13! + 12!}$$

$$K = \frac{80! \times 79 \times 78}{79! \times 78 + 78} + \frac{14! \times 13 \times 12!}{13 \times 12 + 12}$$

$$K = \frac{80! \times 79 \times 78}{78(79+1)} + \frac{14 \times 13 \times 12}{12(13+1)}$$

$$K = 79 + 13 = 92$$

11-
$$R = \frac{60!}{59! + 58!}$$

$$R = \frac{60! \times 59 \times 58}{59! \times 58 + 58} = \frac{\cancel{60} \times 59 \times 58}{58(\cancel{59} + 1)} = 59$$

15-
$$\underbrace{(x-7)}_4 = 24$$

$$x-7=4$$

$$x=11$$

16- Carlos desea comprar un televisor, para lo cual ha consultado en tres tiendas; la primera ofrece 3 sistemas de crédito y la tercera ofrece 4 sistemas de crédito. ¿De cuántas maneras diferentes puede comprar el televisor usando estos sistemas de crédito?

$$\# \text{maneras} = 3 \times 4 \times 4 = 48$$

Situaciones Geométricas

22-11-21

Área triángulo cualquiera



$$S = \frac{bh}{2}$$

Área triángulo rectángulo



$$S = \frac{ab}{2}$$

Área que contiene un triángulo equilátero



Área triángulo en función de sus lados (Fórmula de Herón)

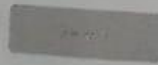


Donde:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Área triángulo en función del radio



$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Donde: r = radio

Área de figuras semejantes

01. Área que contiene un cuadrado



02. Área que contiene un rectángulo



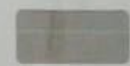
03. Área que contiene un rombo



04. Área que contiene un paralelogramo



05. Área que contiene un trapecio



Área de figuras semejantes

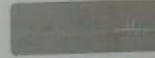
01. Área de un círculo



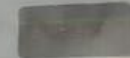
02. Área de un sector circular

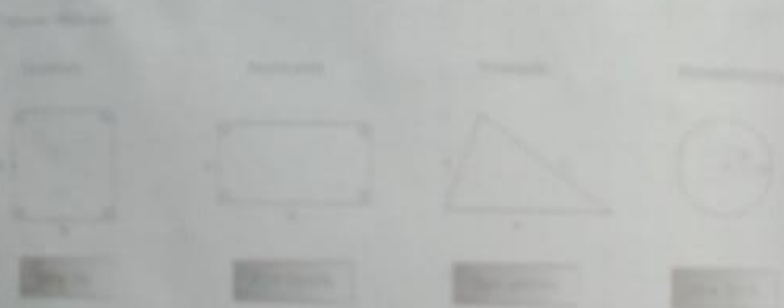


03. Área de los segmentos circulares

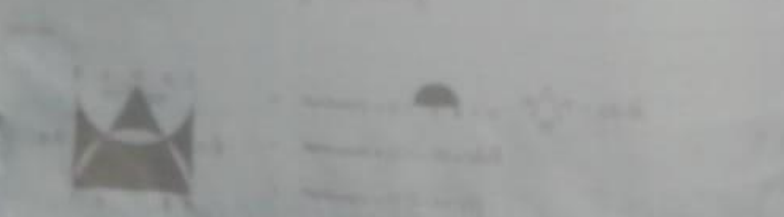


04. Área de dos círculos concéntricos



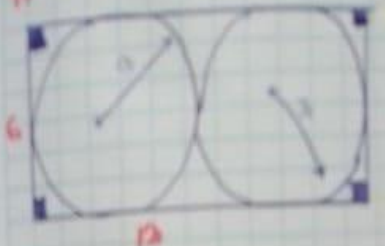


El área de la figura es:



problema 1

Valor d' area de la región sombreada

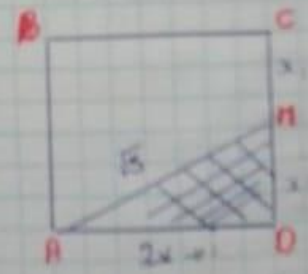


$$\begin{aligned} A_{\square} &= \pi r^2 \\ A_{\square} &= 6 \cdot 12 \\ A_{\square} &= 72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\square} &= 72 \\ 72 &= 4(12) \\ 72 &= 48 + 16(4 - \pi) \end{aligned}$$

problema 2

Valor el perímetro del cuadrado ABCD, si "m" es parte medio del lado CD y \$m = \sqrt{5}\$

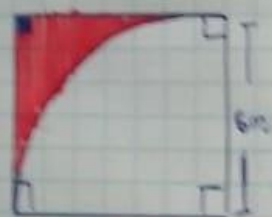


$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= x + (2x - m) \\ 5 &= x^2 + 4x^2 \\ 5 &= 5x^2 \\ x &= \sqrt{5} \cdot x \\ x &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$P = 4(2) = 8$$

problema 3

Hallar el área de la región sombreada si el lado del cuadrado es 6m.



$$\begin{aligned}
 A_{\square} &= 6^2 \\
 A_{\square} &= 36 \\
 A_{\text{cu}} &= \frac{\pi \cdot 6^2}{4} \\
 A_{\text{cu}} &= \frac{\pi \cdot 36}{4} = 9\pi \\
 A_{\text{sh}} &= 36 - 9\pi \\
 A_{\text{sh}} &= 9(4 - \pi)
 \end{aligned}$$

problema 4

Hallar el área de la región sombreada si el lado del cuadrado es 8m.

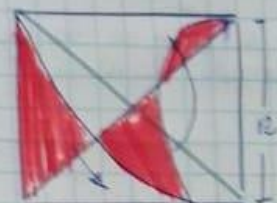


$$\begin{aligned}
 A_{\square} &= 8 \cdot 8 \\
 A_{\square} &= 64 \\
 A_{\text{cu}} &= 2 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} \\
 A_{\text{cu}} &= 32\pi
 \end{aligned}$$

problema 5

Hallar el área de la región sombreada si el lado del

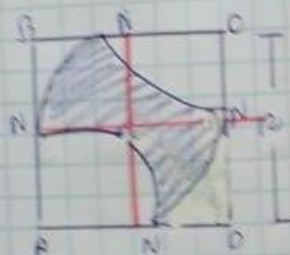
cuadrado es 12m.



$$A = \frac{1}{4} \pi (12)^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 144 = 36\pi$$

problema 6

Hallar el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado y N es un punto medio.

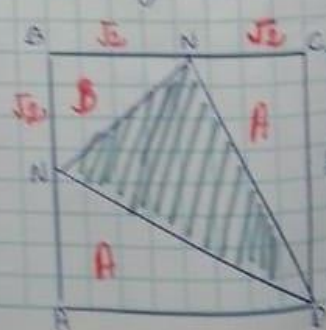


$$A = \frac{1}{2} (12)^2 =$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 144 = 72$$

problema 7

Hallar el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado y N es punto medio.



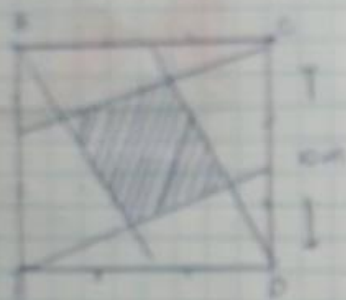
$$A_{\text{cu}} = (12)^2 - \frac{\pi \cdot 12^2}{4} - \frac{\pi \cdot 12^2}{4}$$

$$A_{\text{cu}} = 144 - 36\pi - 36\pi$$

$$A_{\text{cu}} = 144 - 72\pi$$

problema 8

Halla el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado es 10 cm.



$$A_{\text{base}} = \frac{1}{2} \cdot 10^2$$

$$A_{\text{base}} = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

problema 9

Halla el área de las regiones sombreadas, si el lado del cuadrado es 8 cm.

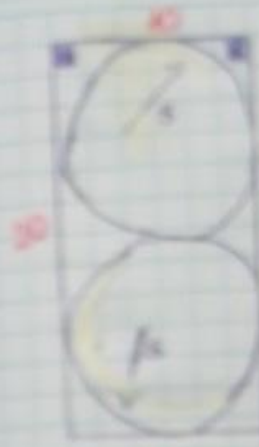


$$A_{\text{base}} = \frac{1}{2} \cdot 8^2$$

$$A_{\text{base}} = \frac{1}{2} \cdot 64$$

$$A_{\text{base}} = 32 \text{ cm}^2$$

problema 10



$$A_{\text{rect}} = 100$$

$$A_{\text{rect}} = 100$$

$$A_{\text{rect}} = 100$$

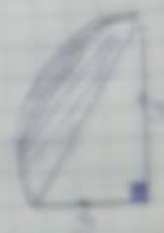
$$A_{\text{rect}} = 100$$

$$A_{\text{rect}} = 100$$

$$A_{\text{rect}} = 100$$

$$100 - 20\pi = 20 - 2\pi$$

problema 11



$$A_{\text{rect}} = 2.25$$

$$A_{\text{rect}} = 2.25$$

$$A_{\text{rect}} = 2.25$$

$$A_{\text{rect}} = 2.25$$

$$A_{\text{rect}} = 2.25$$

$$A_{\text{rect}} = 2.25$$

problema 12

Halla el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado es 10 cm.

$$A_{\text{rect}} = \frac{1}{2} \cdot 10^2$$

$$A_{\text{rect}} = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

