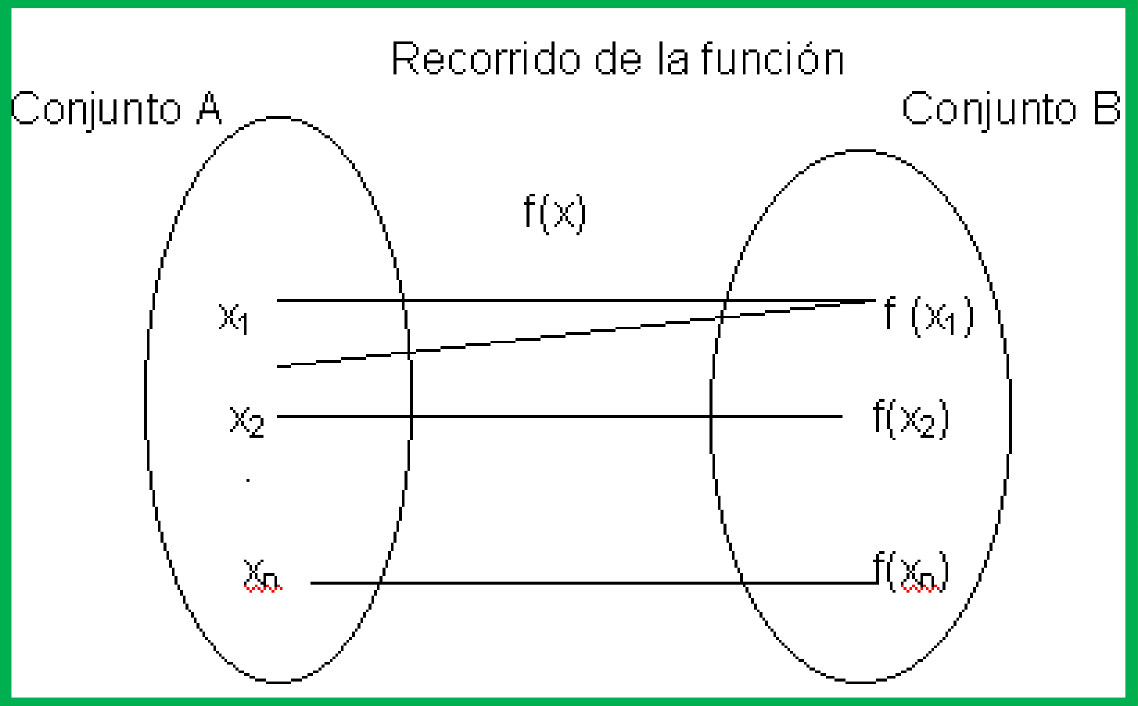
Álgebra

Martes 12 de octubre de 2021

Semestral 6

$$F: A \to B;\ A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$$

$$\boxed{F = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in D_F \ \wedge \ y = F(x) \right\}}$$



FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL I

ALFRED NOBEL

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

$F: A \to B;\ A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$

Es decir:

$$\boxed{F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D_F \ \wedge \ y = F(x)\}}$$

Esencial (Lumbreras)

DEFINICION DE FUNCION

Una función de A en B es una regla que asigna a cada $x \in A$ un $y \in B$, donde A y B son conjuntos no vacíos.

Álgebra (Rubiños)

FUNCIONES

Dados dos conjuntos no vacíos A y B llamaremos función de A en B al conjunto de pares ordenados $(x; y)$ tales que a cada $x \in A$, le corresponde un único $y \in B$.

* Es decir toda relación entre dos conjuntos no vacíos A y B, que verifique:

I) Todo elemento de A está relacionado con alguno del conjunto B.

II) Cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B.

Se llama función de A en B. Formalmente:

$f \subset A \times B$ es una función de A en B, sí y sólo si:

$$\boxed{\forall x \in A, \exists ! y \in B / (x; y) \in f}$$

Católica (Trilce)

DEFINICIÓN

Sean "A" y "B" dos conjuntos no vacíos (pudiendo ser: $A = B$) llamaremos función definida en "A" a valores en "B" (función de "A" en "B") a toda relación: $f \in A \times B$, que tiene la propiedad: $(a; b) \in f$ y $(a; c) \in f$ entonces: $\boxed{b = c}$

Es decir, una función "f" es un conjunto de pares ordenados de elementos, tal que dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento.

Álgebra (Rodo)

DEFINICIÓN

Dada una relación F de A en B ($F \subset A \times B$), se dice que F es una función de A en B, si y sólo si para cada $x \in A$ existe a lo más un elemento $y \in B$ tal que el par $(x; y) \in F$, es decir que dos pares pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

17. Si la siguiente relación f = {(2,a + b–2);(–3,ab);(4,5);(2, 10);(a ,b);(–3,32)} es una función en ℝ, halle el valor de f(a)–f(b)–n ; donde n es el mayor elemento del conjunto (Dom(f) – Ran(f)).

A) 5 B) –9

C) 1 D) –4

$$f=\{(2;a+b-2),(-3;ab),(4;5),(2;10),(a;b),(-3;32)\}$$

$$\Rightarrow a+b-2=10 \wedge ab=32$$

$$\Rightarrow (a=8 \wedge b=4) \vee (a=4 \wedge b=8)$$

$$\Rightarrow f=\{(2;10),(-3;32),(4;5),(8;4)\} \vee f=\{(2;10),(-3;32),(4;5),(4;8)\}$$

NO ES FUNCIÓN

$$\mathrm{Dom}(f)=\{2,-3,4,8\}$$

$$\mathrm{Ran}(f)=\{10,32,5,4\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)-\mathrm{Ran}(f)=\{2,-3,8\} \Rightarrow n=8$$

Piden:

$$f(8)-f(4)-8=4-5-8=\boxed{-9}$$

02. Halle el número de elementos enteros del dominio de la función $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}$.

A) 8 B) 9 C) 7

C) 6 D) 10

$f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}$

$\Rightarrow -x^2+4x+12\geq 0$

$x^2-4x-12\leq 0$

$(x-6)(x+2)\leq 0$

$\Rightarrow x\in[-2;6]=Dom(f)$

Elementos ent.: $-2,-1,0,1,\ldots,6$

$\therefore$ Son 9 elem. ent.

04. Dada la función h definida por $h(x) = \dfrac{18}{x-4} + 2x$; $x > 4$, halle Ran(h).

A) $[14,+\infty\rangle$ B) $\langle 12,20]$ C) $[20,+\infty\rangle$

D) $[12,+\infty\rangle$ E) $\langle 0,+\infty\rangle$

$h(x) = \dfrac{18}{x-4} + 2x$

SIENDO $x > 4$.

PIDEN: $\text{Ran}(h) = ?$

$* \ \dfrac{18}{x-4} + 2x = 2\left(\dfrac{9}{x-4} + x\right)$

$= 2\left(\dfrac{9}{x-4} + x - 4 + 4\right)$

$*$ Si $x > 4 \Rightarrow x - 4 > 0$

$*$ M.A. $\geq$ M.G. $\geq$ M.H.

SIENDO $\dfrac{9}{x-4}$, $x-4$ POSITIVOS:

$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{9}{x-4} + x - 4}{2} \geq \sqrt{\dfrac{9}{\cancel{x-4}} \cdot \cancel{x-4}}$

$\dfrac{9}{x-4} + x - 4 \geq 6$

$\left(\dfrac{9}{x-4} + x \geq 10\right)(2)$

$\dfrac{18}{x-4} + 2x \geq 20$

$h(x) \geq 20$ $\therefore \text{Ran}(h) = [20;+\infty\rangle$

05. Dada la función de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x + 1) = |x^2| - ax + b$; $f(2) = 2$; $f(1) = 3$, halle el $\operatorname{Ran}(-f)$.

A) $\langle -\infty, 2]$ B) $\langle -\infty, -2\rangle$ C) $\langle -\infty, -2]$

D) $\langle -\infty, -1]$ E) $\langle 2, +\infty\rangle$

$f(x+1) = |x^2| - ax + b \Rightarrow f(x) = ?$

* $f(2) = 2 = |1^2| - a(1) + b \Rightarrow 1 = -a + b$

* $f(1) = 3 = |0^2| - a(0) + b \Rightarrow 3 = b \Rightarrow a = 2$

* Piden $\operatorname{Ran}(-f) = ?$

* $f(x+1) = |(x+1-1)^2| - a(x+1-1) + b$

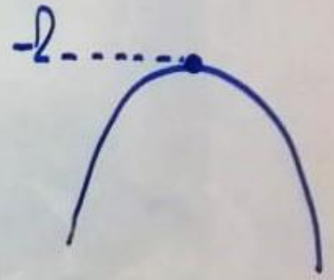
$\Rightarrow f(x) = |(x-1)^2| - a(x-1) + b$

$f(x) = (x-1)^2 - 2x + 2 + 3$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 5$

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ Completando cuadrados.

$f(x) = (x-2)^2 - (-2)^2 + 6 \Rightarrow f(x) = (x-2)^2 + 2$



$\Rightarrow -f(x) = -(x-2)^2 - 2$

$\therefore \operatorname{Ran}(-f) = \langle -\infty; -2]$

06. Sea la función $f(x)=\begin{cases} |3x+9|\,;\ x\in[-6,-2\rangle \\ |1-x|\,;\ x\in[-2,1\rangle \\ |x^2-4x+3|\,;x\in[1,5] \end{cases}$ determine Ran(f).

A) $\langle 1,9]$ B) $[0,9]$ C) $\langle 0,8]$
D) $\langle 3,9]$ E) $[1,8]$

$$f(x)=\begin{cases} |3x+9|\ ;\ x\in[-6;-2\rangle & f_1(x) \\ |1-x|\ ;\ x\in[-2;1\rangle & f_2(x) \\ |x^2-4x+3|\ ;\ x\in[1;5] & f_3(x) \end{cases}$$

* Piden Ran(f).

* Para $f_1(x)$:

$-6\leq x<-2$

$-18\leq 3x<-6$

$-9\leq 3x+9<3$

$0\leq|3x+9|<9$

$\text{Ran}(f_1)=[0;9\rangle$

* Para $f_2(x)$:

$-2\leq x<1$

$-1<-x\leq 2$

$0<1-x\leq 3$

$0<|1-x|\leq 3$

$\text{Ran}(f_2)=\langle 0;3]$

* Para $f_3(x)$:

Obs: $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$\Rightarrow 1\leq x\leq 5$

$-1\leq x-2\leq 3$

$0\leq(x-2)^2\leq 9$

$-1\leq(x-2)^2-1\leq 8$

$0\leq|(x-2)^2-1|\leq 8$

$\text{Ran}(f_3)=[0;8]$

$\therefore \text{Ran}(f)=\text{Ran}(f_1)\cup\text{Ran}(f_2)\cup\text{Ran}(f_3)=[0;9\rangle$

10. Halle la suma de los tres mayores elementos enteros del dominio de la función real f, cuya regla correspondencia está dada por,

$$f(x) = \frac{x^3 - 3}{\sqrt[3]{x+4}} - \frac{x+2}{\log_2(2-x)} + \frac{1}{|x| - 5}\ .$$

A) –1

B) 0

C) –3

D) –2

TAREA

01. Si f = {(–5,2), (3,6), (–5,4a), (a+2,3a), (1,5), (6,3)} es una función, halle el valor de $M = \dfrac{f(2a) + f\left(4f\left(\frac{5}{2}\right)\right)}{f(6a)}$.

A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{11}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

11. Si "k" es el número de elementos enteros del rango de la función real f, definida $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + 2x}$; Dom(f)=[1,4], evalúe f en "x = k + 1".

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{5}{6}$

03. Sea f: R → R una función definida por $f(x) = 2x^2 + 12x - 18$; $-2 < x \leq 3$.
Halle la suma del mayor y menor elemento entero de Ran (f).

A) –54 B) –49 C) –53

D) –52 E) –51

19. Pablo desea comprar un par de sandalias, y visita tres zapaterías, comparando precios, según como se especifica en la siguiente tabla,

Zapatería	Precio (S/)
M	ab
R	ac^2
T	(a + b)c

Si el valor numérico de a, b (primos entre si) y c, se obtienen del Ran(f) = $\left[\frac{a}{b}, c\right]$ de la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x+1}$; Dom(f) = (0,4), ¿cuánto deberá pagar Pablo por el par de sandalias que observó en la zapatería R?

A) 81 soles
B) 85 soles
C) 99 soles
D) 60 soles

16. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones según el orden presentado:

I. f definida por, $f(x) = x|x| + \dfrac{1}{x}$, es una función par.

II. g definida por, $g(x) = \text{sen}(x^2) - \cos(x)$, es una función par.

III. h definida por, $h(x) = |x^3 - 1| - x$; $x \in [-5,5]$ es una función impar.

A) FVV B) VVF

C) VFV D) FVF