

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Instituto Metr pole Digital
Bacharelado em Tecnologia da Informação
Fundamentos Matemáticos da Computação II

Estudo dirigido do conteúdo da Unidade 2

Autor: Yuri Alessandro Martins

Natal/RN
9 de maio de 2016

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Teoria dos Conjuntos | 2 |
| 1.1 | Os Axiomas de Zermelo-Frankel | 2 |
| 1.1.1 | Extensionalidade | 2 |
| 1.1.2 | Emptyset | 2 |
| 1.1.3 | Pairset | 2 |
| 1.1.4 | Separation | 2 |
| 1.1.5 | Powerset \wp | 3 |
| 1.1.6 | Unionset | 3 |
| 1.1.7 | Infinity Axiom | 4 |
| 1.2 | Relações, Funções e Funções parciais na ZFC | 4 |
| 1.2.1 | Definindo um par ordenado | 4 |
| 1.2.2 | Relações | 4 |
| 1.2.3 | Relações de Equivalência | 5 |
| 1.2.4 | Funções parciais na ZFC | 5 |
| 1.3 | Currying | 6 |
| 1.4 | Cardinais | 6 |
| 1.5 | Os Axiomas de Peano | 6 |
| 1.6 | Teorema da Recursão | 7 |
| 1.7 | Os Naturais na ZFC | 7 |
| 1.7.1 | Existência de \mathbb{N} | 7 |
| 1.7.2 | Singularidade de \mathbb{N} | 8 |
| 1.8 | String Recursion | 9 |
| 2 | λ-Calculus | 11 |
| 2.1 | O conjunto de λ -termos | 11 |
| 2.2 | Conversões α , β e η | 12 |
| 2.2.1 | Conversão α | 12 |
| 2.2.2 | Redução β | 12 |
| 2.2.3 | Redução η | 12 |
| 2.3 | Booleanos naturais no Λ | 12 |
| 2.4 | Combinators I, K, B, S | 13 |
| 3 | Política de Colaboração | 13 |

1 Teoria dos Conjuntos

1.1 Os Axiomas de Zermelo-Frankel

1.1.1 Extensionalidade

Para quaisquer conjuntos A, B :

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

1.1.2 Emptyset

Garante que existe um conjunto vazio (\emptyset).

$$\exists x \forall y \ y \notin x$$

1.1.3 Pairset

Para todo a e b , existe o conjunto $\{a, b\}$.

$$\forall a \forall \exists w \forall x (x \in w \iff x = a \vee x = b)$$

1.1.4 Separation

Para cada condição $P(x)$,

$$\forall a \exists w \forall x (x \in w \iff x \in a \wedge x \in b)$$

Um problema de usar somente esses últimos três axiomas é que só somos capazes de formar conjuntos com cardinalidade ≤ 2 .

- ZF4 (1.1.4) é um axiom-scheme. Isto é, possui infinitos axiomas dentro dele, já que para cada $P(x)$ estamos formando um novo axioma.
- Usando os axiomas anteriores, é possível representarmos algumas coisas como conjuntos:
 - $(x, y) \triangleq \{ \{x\}, \{x, y\} \}$
 - $A \setminus B \triangleq \{ x \in A \mid x \notin B \}$
 - $A \cap B \triangleq \{ x \in A \mid x \in B \}$

1.1.5 Powerset \wp

Para cada conjunto a , existe um conjunto b , onde os elementos de b são subconjuntos de a .

$$\forall a \exists p \forall w (x \in p \iff \forall x (x \in a \Rightarrow x \in w))$$

Esse é o conjunto $\wp(a)$.

Aqui $x \in a$ é uma abreviação de $(\forall t)[t \in x \Rightarrow t \in a]$. O Axioma da Extensionalidade (1.1.1) implica que para cada a , apenas um conjunto b pode satisfazer a definição do Powerset; Nós podemos chamar **Conjunto Potência** de a e denotá-lo como:

$$\wp(a) \triangleq \{x \mid \text{Set}(x) \& x \in a\}$$

Algumas propriedades interessantes:

$$\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Exercício: Para cada conjunto A , existe um conjunto B cujos membros são exatamente singletons dos membros de A :

$$x \in B \iff (\exists t \in A)[x = \{t\}]$$

1.1.6 Unionset

Corresponde ao conjunto $\cup a$.

$$\forall a \exists u \forall x (x \in u \iff (\exists e \in a)[x \in e])$$

$$\text{Ex: } \cup \emptyset = \cup \{\emptyset\} = \emptyset$$

$$\bullet a \cup b = \cup \{a, b\}$$

Usando os axiomas ZF2 (1.1.2) e ZF5 (1.1.6)

$$\begin{aligned} t \in A \cup B &\iff (\exists X \in \{A, B\})[t \in X] \\ t \in A \cup B &\iff t \in A \vee t \in B \end{aligned}$$

$$\bullet a \times b \triangleq \{w \in S \mid \exists x \exists y (w = (x, y) \wedge x \in a \wedge x \in b)\}$$

Onde $S = \wp(\wp(a \cup b))$

$$\bullet \text{singletonset} \triangleq \{x \in \wp a \mid (\exists t \in a)[x = \{t\}]\}$$

$$\bullet \cap a \triangleq \{x \in \cup a \mid (\forall e \in a)[x \in e]\}$$

1.1.7 Infinity Axiom

$\exists I(\emptyset \in I \wedge \forall x(x \in I \Rightarrow \{x\} \in I))$ ou
 $\exists I(\emptyset \in I \wedge \forall x(x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I))$

Esse axioma é garantido pois

$$\begin{aligned}\{x\} &\neq x \\ x \cup \{x\} &\neq x\end{aligned}$$

Com ele, somos capazes de montar o seguinte conjunto infinito:
 $I = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$

1.2 Relações, Funções e Funções parciais na ZFC

1.2.1 Definindo um par ordenado

A operação de par do Kuratowski:

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, como vimos anteriormente na seção 1.1.4

PROOF AND MORE DETAILS...

1.2.2 Relações

Def: Sejam A, B conjuntos, R é uma relação entre A e B se $R \subseteq A \times B$.

Dessa forma,

- $f(a) = b \rightsquigarrow (a, b) \in f$

- União Disjunta: $A \uplus B = (\{0, a\} \times A) \cup (\{1, b\} \times B)$

Sendo R uma relação sobre o conjunto $\mathbb{N}(R \subseteq A \times A)$, R pode ser:

$$\begin{aligned}xRx : Reflexiva &\rightsquigarrow "=", \leq, \geq, \subseteq \\ xRy \Rightarrow yRx : Simetrica &\rightsquigarrow "=" \\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz : Transitiva &\rightsquigarrow "=", \leq, \geq, <, >, \subseteq\end{aligned}$$

Ainda existem outras propriedades como essas, como a Antireflexiva ou Antisimétrica.

1.2.3 Relações de Equivalência

Uma relação sobre um conjunto A é chamada **relação de equivalência** se ela for reflexiva, simétrica e transitiva.

O conjunto de todos os elementos que são relacionados a um elemento a de A é chamado de classe de equivalência de a . Isso implica que:

$$\cup[a] = A$$

- $[a] \cap [b] = \emptyset$ quando $[a] \neq [b]$

Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S . A união de todas as partições resulta, portanto, em S . Em outras palavras, os subconjuntos A_i formam partições de S se e somente se

$$\begin{aligned} A_i &\neq \emptyset \\ A_i \cap A_j &= \emptyset, \text{ quando } i \neq j \\ \cup A_i &= S \end{aligned}$$

Podemos definir classes de equivalência como:

$$\begin{aligned} [x/\sim] &\triangleq \{a \in A \mid x \sim a\} \\ [A/\sim] &\triangleq \{c \in \wp(A) \mid \exists x \ C = [x/\sim]\} \end{aligned}$$

Seja $x, y \in A$, e \sim uma relação de equivalência no A :

$$\begin{aligned} [x/\sim] &= [y/\sim] \iff x \sim y \\ [x/\sim] &= [y/\sim] \iff \begin{cases} [x/\sim] & \text{se } x \sim y \\ \emptyset & \text{se não} \end{cases} \\ \cup\{[x/\sim] \mid x \in A\} &= A \end{aligned}$$

1.2.4 Funções parciais na ZFC

O conceito de funções parciais remete a ideia de uma função em que nem todos os x possuem uma $f(x)$. B

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & \text{Domínio da função} \\ f(x) = \sqrt[3]{x} & x = 3 \text{ não possui uma saída bem definida nesse domínio.} \end{array}$$

1.3 Currying

Dada uma f do tipo $f : (X \times X) \rightarrow Z$, então a técnica de **currying** a torna $(f) : X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$. Isto é, currying torna um parâmetro do tipo X e retorna uma função do tipo $Y \rightarrow Z$.

Achar um $\phi((x, y) \rightarrow A \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow A)))$
 $\phi(F) = G$, onde G é definida pela,
 $G(x)(y) = g$, onde g é definida pela,
 $g(y), f(x, y)$

1.4 Cardinais

Seja A um conjunto. O que é $|A|$?

- c1. $A =_c |A|$
- c2. $A =_c B \iff |A| = |B|$
- c3. para todo conjunto de conjuntos ϵ ,
 $\{|x| \mid x \in \epsilon\}$ é conjunto.

Aqui estaremos definindo funções cardinais fracas (**weak**). Isso porque seria necessário provar o c2, algo extremamante complicado agora. Portanto, podemos o resumir como:

c2. $A =_c B \iff |A| =_c |B|$

Sejam κ, λ, μ números cardinais:

- $\kappa + \lambda \triangleq_c \kappa \uplus \lambda$
- $\kappa \cdot \lambda \triangleq_c \kappa \times \lambda$
- $\kappa^\lambda \triangleq_c (\kappa \rightarrow \lambda)$

1.5 Os Axiomas de Peano

Structed set: $(\mathbb{N}; 0; S)$, onde $0 \in \mathbb{N}$ e $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& 0 \in \mathbb{N} \\
& S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\
& S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\
& (\forall x \in \mathbb{N})[S_n \neq 0] \\
& (\forall x \subseteq \mathbb{N})[[0 \in X \wedge (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \Rightarrow S_n \in X]] \Rightarrow X = \mathbb{N}]
\end{aligned}$$

O axioma de peano 5 é o que nos permite realizar indução matemática. Observe:

$$\begin{aligned}
& \forall x \subseteq \mathbb{N} \text{ corresponde a } \mathbf{base}. \\
& (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \Rightarrow S_n \in X] \text{ corresponde ao } \mathbf{passo indutivo}. \\
& n \in X \text{ corresponde a } \mathbf{hipótese indutiva}.
\end{aligned}$$

1.6 Teorema da Recursão

Theorem. *Sejam: $(\mathbb{N}, 0, S)$ um sistema de naturais conjunto E .*

$$a \in E$$

$$h : E \rightarrow E$$

$$\text{Então existe } f : \mathbb{N} \rightarrow E$$

$$\text{tal que: } f(0) = a \text{ e } f(S_n) = h(f(n)).$$

1.7 Os Naturais na ZFC

Para estabelecermos os Naturais na ZFC, temos que garantir duas coisas:

- Existência de \mathbb{N}
- Singularidade de \mathbb{N}

Para tal, iremos precisar do Teorema da Recursão (1.6).

1.7.1 Existência de \mathbb{N}

Seja $J =$ todos os conjuntos X tal que satisfaz o ZF7 (1.1.7)

$$J = \{X \in \wp I \mid \emptyset \in X \wedge (\forall x \in X)[S \in X]\}$$

$$\text{Seja } \mathbb{N} \triangleq \cap J$$

$$\text{Seja } 0_1 = \emptyset$$

¹Visite [2](#) para λ -Calculus e entender melhor esse ponto

Seja $S_1 = \lambda x. \{x\}$ ¹

Seja $0_2 = \emptyset$

Seja $S_2 = \lambda x. x \cup \{x\}$ ²

Seja $\mathbb{N} \triangleq \cap J$

Encaixando com os Axiomas de Peano:

1. $(\forall x \in J)[\emptyset \in X]$, então $\emptyset \in \cap J$ e $\emptyset \in \mathbb{N}$
2. Também, pela própria definição de J
3. $a \neq b \iff S_a \neq S_b$ ou $a \neq b \iff \{a\} \neq \{b\}$
4. $\forall x \{x\} \neq \emptyset$
5. Seja $X \subseteq \mathbb{N}$, tal que
 $0 \in X$
 $(\forall x \in X)[S_x \in X]$
Seja $n \in \mathbb{N}$
 $\exists p : x = \{p\}$
 \rightarrow Mesmo que $\{p\} \in \cap J = \mathbb{N}$
 \rightarrow Mesmo que $n \in X$ e $x \geq \mathbb{N}$

Basicamente, podemos descrever \mathbb{N} de duas maneiras, agora:

$$0 \quad \emptyset = \emptyset$$

$$1 \quad \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 \quad \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$$

$$3 \quad \{\{\{\emptyset\}\}\} = \{2\}$$

\vdots

$$S = \lambda x. \{x\}$$

$$0 \quad \emptyset = \emptyset$$

$$1 \quad \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 \quad \{\emptyset, \{\emptyset\} \{\{\emptyset\}\}\}$$

\vdots

$$S = \lambda x. x \cup \{x\}$$

1.7.2 Singularidade de \mathbb{N}

“ \mathbb{N} is unique up to isomorphism.”

$\pi : (\mathbb{N}_1; 0_1; S_1) \rightarrow (\mathbb{N}_1; 0_2; S_2)$.

$$\pi(0_1) = 0_2$$

$$\pi(S_1 n_1) = S_2 \pi(n_1)$$

Se traçarmos um paralelo com o Teorema da Recursão (1.6), para tentarmos provar a singularidade de \mathbb{N} , podemos realizar as seguintes associações:

²Veja nota 1

- $\mathbb{N} : \mathbb{N}_1$
- $E : \mathbb{N}_2$
- $a : 0_2$
- $h : S_2$

Demonstração. $\pi : \mathbb{N}_1 \Rightarrow \mathbb{N}_2$

$\pi[\mathbb{N}_1] = \mathbb{N}_2$

- $0_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$
 \rightarrow Como $\pi(0_1) \Rightarrow S_2 n_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$
- $n_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$
 \rightarrow Suponha que $n_2 \in \pi[\mathbb{N}_1] \rightarrow$ H.I
 $\rightarrow (\exists n_1 \in \mathbb{N}_1)[\pi(n_1) = n_2]$
 $\rightarrow \pi(S_1 n_1) = S_2(\pi(n_2))$ que $= S_2 n_2$

MAIS COISA AQUI DEPOIS...[?]

□

1.8 String Recursion

- Dado $[] \in [\mathbb{N}]$
- Se $n \in \mathbb{N}$, e $L \in [\mathbb{N}]$, então $(n : L) \in [\mathbb{N}]$

Exemplo: $2:3:4:[] = [2,3,4]$

Alguns exemplos de funções recursivas que podemos definir utilizando String Recursion:

$iszero : [\mathbb{N}] \rightarrow \mathbb{B}$

$iszero\ 0 = true$

$iszero\ S_n = false$

$empty : [\mathbb{N}] \rightarrow \mathbb{B}$

$empty\ [] = true$

$empty\ (x : x_s) = false$

$$\begin{aligned}
++ : [\mathbb{N}] &\rightarrow [\mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N}] \\
[] ++ y_s &= y_s \\
(x : x_s) ++ y_s &= x : (x_s ++ y_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ex : [1, 2] ++ [6, 7, 8, 9] &= 1 : 2 : [] ++ [6, 7, 8, 9] \\
&= 1 : (2 : [] ++ [6, 7, 8, 9]) \\
&= 1 : (2 : ([] ++ [6, 7, 8, 9])) \\
&= 1 : 2 : [6, 7, 8, 9] \\
&= [1, 2, 6, 7, 8, 9]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
reverse : [\mathbb{N}] &\rightarrow [\mathbb{N}] \\
reverse[] &= [] \\
reverse[x] &= [x] \\
reverse(x : x_s) &= reverse x_s ++ [x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqsubseteq : [\mathbb{N}] &\rightarrow [\mathbb{N}] \rightarrow \mathbb{B} \\
(x : x_s) \sqsubseteq [] &= false \\
[] \sqsubseteq y_s &= true \\
(x : x_s) \sqsubseteq (y : y_s) &= (x = y) \wedge x_s \sqsubseteq y_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ex : [2, 3, 4, 5] \sqsubseteq [2, 3, 5, 7] &= (2 = 2) \wedge ([3, 4, 5] \sqsubseteq [3, 5, 7]) \\
&= (3 = 3) \wedge ([4, 5] \sqsubseteq [5, 7]) \\
&= (4 = 5) \wedge ([5] \sqsubseteq [7]) \\
&= FALSE
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\in : \mathbb{N} &\rightarrow [\mathbb{N}] \rightarrow \mathbb{B} \\
n \in x[] &= false \\
x \in (x : x_s) &= (n = x) \vee (n \in x_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
find : \mathbb{N} \rightarrow [\mathbb{N}] \rightarrow \mathbb{B} \\
findn[] &= 0 \\
findn(n : nx) &= 0 \\
findn(x : x_s) &= 1 + find\ n\ x_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sum : [\mathbb{N}] \rightarrow \mathbb{N} \\
sum[] &= 0 \\
sum(x : xs) &= x + sumxs
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oplus : [\mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N}] \\
'[] \oplus y_s &= y_s \\
x_s \oplus [] &= x_s \\
(x : x_s) \oplus (y : y_s) &= (x + y) : (x_s \oplus y_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
circle : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow [\mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N}] \\
circlef[]y_s &= [] \\
fxs[] &= [] \\
f(x : x_s)(y : y_s) &= [fxy] : (circle\ f\ x_s\ y_s)
\end{aligned}$$

2 λ -Calculus

2.1 O conjunto de λ -termos

Sendo $\Lambda = \lambda$ -termos;

$$\begin{aligned}
X &\in \Lambda \\
s, t \in \Lambda &\Rightarrow (s\ t) \in \Lambda \\
x \in var, t \in \Lambda &\Rightarrow \lambda X.t \in \Lambda
\end{aligned}$$

2.2 Conversões α , β e η

2.2.1 Conversão α

Determina que a escolha da variável ligada, na abstração lambda, não importa (normalmente):

$$\begin{aligned}\lambda x.x &=_{\alpha} \lambda y.y \\ \lambda x.\lambda x.x &=_{\alpha} \lambda y.\lambda x.x\end{aligned}\quad \text{Note que isso não poderá ser transformado em } \lambda y.\lambda x.y$$

Primeiro, quando alfa-conversão atua em uma abstração, as únicas ocorrências de variáveis que podem ser renomeados são aqueles que são vinculados a esta mesma abstração. No segundo exemplo, portanto:

$$\lambda x.\lambda x.x \neq_{\alpha} \lambda y.\lambda x.y \quad \text{Este último tem um significado diferente do original.}$$

Em segundo lugar, uma conversão α não é possível se isto irá resultar em uma variável sendo capturada por uma abstração diferente. Por exemplo, se substituirmos x com y em $\lambda x.\lambda y.x$, nós obteríamos $\lambda y.\lambda y.y$, que tem um significado diferente da expressão anterior.

2.2.2 Redução β

Redução β é a ideia de aplicar uma função. Por exemplo, se temos $f(x) = x * 2$, para $x = 2$ aplicamos o valor a função que irá ficar como $f(2) = 2 * 2$. Essa é basicamente a ideia da redução β .

$$(\lambda x.x * 2) 2 =_{\beta} 2 * 2$$

2.2.3 Redução η

Eta-conversão expressa a ideia de extensionalidade, que neste contexto é que duas funções são as mesmas se e somente se eles dão o mesmo resultado para todos os argumentos.³

2.3 Booleanos naturais no Λ

$$\begin{aligned}\lambda y.x &= \lambda x.(\lambda y.x) := \text{true} := \text{fst} \\ \lambda x.y &= \lambda x.(\lambda y.y) := \text{false} := \text{snd}\end{aligned}$$

³Sujeito a severas mudanças no futuro. Visite [3](#) para saber mais sobre.

2.4 Combinators I, K, B, S

Combinadores⁴

$$I = \lambda x.x$$

$$B = \lambda x \lambda y. \lambda z. x(yz)$$

“Composition”

$$S = \lambda x \lambda y. \lambda z. \lambda xz(yz)$$

3 Política de Colaboração

Você é capaz de alterar o conteúdo desse documento, para corrigir erros, melhorar suas explicações ou dar dicas/exemplos adicionais. Esse foi o objetivo desde começo.

[Visita a página remota do documento](#) para obter sua versão mais atualizada e/ou colaborar também.

Como base foram utilizados os livros “Notes on Set Theory” [2] e “Classic Set Theory” [1]. Caso você queira continuar usando-os como base para esse documento, sinta-se a vontade.

⁴A melhorar bruscamente

Referências

- [1] DC Goldrei. *Classic Set Theory: For Guided Independent Study*. CRC Press, 1996.
- [2] Yiannis Moschovakis. *Notes on set theory*. Springer Science & Business Media, 2006.