Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Instituto Metrópole Digital
Bacharelado em Tecnologia da Informação
Fundamentos Matemáticos da Computação II

Estudo dirigido do conteúdo da Unidade 2

Autor: Yuri Alessandro Martins

Natal/RN
10 de maio de 2016

O que é esse documento?

Esse é um documento que visa resumir o conteúdo apresentado em sala de aula na disciplina **Fundamentos Matemáticos da Computação** da **Universidade Federal do Rio Grande do Norte**, durante o descorrer da segunda unidade, matéria essa da grade curricular do curso de **Bacharelado em Tecnologia da Informação**.

Tenha em vista que esse documento não server como base concreta/completa de estudo. Ele, na verdade, visa resumir e direcionar o estudo da disciplina. Dessa forma, cabe ao aluno buscar formas complementares de entender o que está sendo dito aqui, como, por exemplo, o material referência utilizado.

Saiba também que esse é um material *open-source*, que pode ter sido alterado por diversas pessoas (você pode conferir isso em 3 - Política de Colaboração), e portanto pode não refletir um conteúdo totalmente "padronizado".

Sumário

1 Teoria dos Conjuntos **3**
- 1.1 Os Axiomas de Zermelo-Frankel . . . 3
  - 1.1.1 Extensionalidade . . . 3
  - 1.1.2 Emptyset . . . 3
  - 1.1.3 Pairset . . . 3
  - 1.1.4 Separation . . . 3
  - 1.1.5 Powerset $\wp$ . . . 4
  - 1.1.6 Unionset . . . 4
  - 1.1.7 Infinity Axiom . . . 5
- 1.2 Relações, Funções e Funções parciais na ZFC . . . 5
  - 1.2.1 Definindo um par ordenado . . . 5
  - 1.2.2 Relações . . . 5
  - 1.2.3 Relações de Equivalência . . . 6
  - 1.2.4 Funções parciais na ZFC . . . 6
- 1.3 Currying . . . 7
- 1.4 Cardinais . . . 7
- 1.5 Os Axiomas de Peano . . . 7
- 1.6 Teorema da Recursão . . . 8
- 1.7 Os Naturais na ZFC . . . 8
  - 1.7.1 Existência de $\mathbb{N}$ . . . 8
  - 1.7.2 Singularidade de $\mathbb{N}$ . . . 9
- 1.8 String Recursion . . . 10

2 λ-Calculus **12**
- 2.1 O conjunto de λ-termos . . . 12
- 2.2 Conversões α, β e η . . . 13
  - 2.2.1 Conversão α . . . 13
  - 2.2.2 Redução β . . . 13
  - 2.2.3 Redução η . . . 13
- 2.3 Booleanos naturais no Λ . . . 13
- 2.4 Combinators I, K, B, S . . . 14

3 Política de Colaboração **14**
- 3.1 Colaboradores . . . 14

Referências **15**

1 Teoria dos Conjuntos

1.1 Os Axiomas de Zermelo-Frankel

1.1.1 Extensionalidade

Para quaisquer conjuntos A, B:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

1.1.2 Emptyset

Garante que existe um conjunto vazio ($\emptyset$).

$$\exists x \forall y \ (y \ \notin \ x)$$

1.1.3 Pairset

Para todo a e b, existe o conjunto $\{a, b\}$.

$$\forall a \forall b \ \exists w \forall x (x \in w \iff x = a \ \vee \ x = b)$$

1.1.4 Separation

Para cada condição $P(x)$,

$$\forall a \exists w \forall x (x \in w \iff x \in a \ \wedge \ P(x))$$

Um problema de usar somente esses últimos três axiomas é que só somos capazes de formar conjuntos com cardinalidade ≤ 2.

- ZF4 (1.1.4) é um axiom-scheme. Isto é, possui infinitos axiomas dentro dele, já que para cada P(x) estamos formando um novo axioma.

- Usando os axiomas anteriores, é possível representarmos algumas coisas como conjuntos:
  - (x, y) $\triangleq$ { {x}, {x, y}}
  - A $\setminus$ B $\triangleq$ { x $\in$ A | x $\notin$ B }
  - $A \cap B \triangleq \{x \in A \mid x \in B\}$

1.1.5 Powerset $\wp$

Para cada conjunto a, existe um conjunto b, onde os elementos de b são subconjuntos de a.

$$\forall a \exists p \forall w (w \in p \iff \forall x (x \in a \implies x \in b))$$

Esse é o conjunto $\wp$(a).

Aqui $x \in a$ é uma abreviação de $(\forall t)[t \in x \implies t \in a]$. O Axioma da Extensionalidade (1.1.1) implica que para cada a, apenas um conjunto b pode satisfazer a defininção do Powerset; Nós podemos chamar **Conjunto Potência** de a e denotá-lo como:
$\wp(a) \triangleq \{x \mid Set(x) \& x \in a\}$

Algumas propriedades interesantes:
$\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\ , \{\emptyset\}\}$

Exercício: Para cada conjunto A, existe um conjunto B cujo membros são exatamente singletons dos membros de A:

$$x \in B \iff (\exists t \in A)[x = \{t\}]$$

1.1.6 Unionset

Corresponde ao conjunto $\cup a$.

$$\forall a \exists u \forall x (x \in u \iff (\exists e \in a)[x \in e])$$

Ex: $\cup\emptyset = \cup\{\emptyset\} = \emptyset$

- $a \cup b = \cup\{a, b\}$
  Usando os axiomas ZF2 (1.1.2) e ZF5 (1.1.6)

$$t \in A \cup B \iff (\exists X \in \{A, B\})[t \in X]$$
$$t \in A \cup B \iff t \in A \vee t \in B$$

- $a \times b \triangleq \{w \in S \mid \exists x \exists y (w = (x, y) \wedge x \in a \wedge x \in b)\}$
  Onde $S = \wp(\wp(a \cup b))$
- sigletonset $\triangleq \{x \in \wp a \mid (\exists t \in a)[x = \{t\}]\}$
- $\cap a \triangleq \{x \in \cup a \mid (\forall e \in a)[x \in e]\}$

1.1.7 Infinity Axiom

$\exists I(\emptyset \in I \wedge \forall x(x \in I \implies \{x\} \in I))$ ou
$\exists I(\emptyset \in I \wedge \forall x(x \in I \implies x \cup \{x\} \in I))$

Esse axioma é garantido pois

$$\{x\} \neq x$$
$$x \cup \{x\} \neq x$$

Com ele, somos capazes de montar o seguinte conjunto infinito:
I $= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \cdots\}$

1.2 Relações, Funções e Funções parciais na ZFC

1.2.1 Definindo um par ordenado

A operação de par do Kuratowski:
$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, como vimos anteriormente na seção 1.1.4

PROOF AND MORE DETAILS...

1.2.2 Relações

Def: Sejam A, B conjuntos, R é uma relação <u>entre</u> A e B se $R \subseteq A \times B$.
Dessa forma,

- $f(a) = b \rightsquigarrow (a, b) \in f$

- União Disjunta: $A \uplus B = (\{0, a\} \times A) \cup (\{1, b\} \times B)$

Sendo R uma relação sobre o conjunto $\mathbb{N}(R \subseteq A \times A), R$ pode ser:

$$\begin{aligned} xRx &: Reflexiva \rightsquigarrow \text{“} =,\ \leq,\ \geq,\ \subseteq'' \\ xRy \implies yRx &: Simetrica \rightsquigarrow \text{“} ='' \\ xRy \wedge yRz \implies xRz &: Transitiva \rightsquigarrow \text{“} =,\ \leq,\ \geq,\ <,\ >,\ \subseteq'' \end{aligned}$$

Ainda existem outras propriedas como essas, como a <u>Antireflexiva</u> ou <u>Antisimétrica</u>.

1.2.3 Relações de Equivalência

Uma relação sobre um conjunto A é chamada **relação de equivalência** se ela for reflexiva, simétrica e transitiva.

O conjunto de todos os elementos que são relacionados a um elemento a de A é chamado de classe de equivalência de a. Isso implica que:

$$\cup[a] = A$$

- $[a] \cap [b] = \emptyset quando [a] \neq [b]$

Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S. A união de todas as partições resulta, portanto, em S. Em outras palavras, os subconjuntos A_i formam partições de S se e somente se

$$\begin{aligned} A_i &\neq \emptyset \\ A_i \cap A_j &= \emptyset, quando\ i \neq j \\ \cap A_i &= S \end{aligned}$$

Podemos definir classes de equivalência como:

$$\begin{aligned} [x/\backsim] &\triangleq \{a \in A \mid x \backsim a\} \\ [A/\backsim] &\triangleq \{c \in \wp(A) \mid \exists x\ C = [x/\backsim]\} \end{aligned}$$

Seja $x, y \in A$, e $\backsim$ uma relação de equivalência no A:

$$\begin{aligned} [x/\backsim] = [y/\backsim] &\iff x \backsim y \\ [x/\backsim] = [y/\backsim] &\iff \begin{cases} [x/\backsim] & \text{se } x \backsim y \\ \emptyset & \text{se não} \end{cases} \\ \cup\{[x/\backsim] \mid x \in a\} &= A \end{aligned}$$

1.2.4 Funções parciais na ZFC

O conceito de funções parciais remete a ideia de uma função em que nem todos os x possuem uma $f(x)$. B

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} && \text{Domínio da função} \\ &f(x) = \sqrt[2]{x} && x = 3 \text{ não possui uma saída bem definida nesse domínio.} \end{aligned}$$

1.3 Currying

Dada uma f do tipo $f : (X \times X) \to Z$, então a técnica de **currying** a torna $(f) : X \to (Y \to Z)$. Isto é, currying torna um paramêtro do tipo X e retorna uma função do tipo $Y \to Z$.

Achar um $\phi((x, y) \to A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (x \to (y \to A)))$
$\phi(F) = G$, onde G é definida pela,
$G(x)(y) = g$, ode g é definida pela,
$g(y), f(x, y)$

1.4 Cardinais

Seja A um conjunto. O que é $|A|$?

c1. $A =_c |A|$

c2. $A =_c B \iff |A| = |B|$

c3. para todo conjunto de conjuntos $\in$,
$\{|x| \mid x \in\in\}$ é conjunto.

Aqui estaremos definindo funções cardinais fracas (**weak**). Isso porquê seria necessário provar o c2, algo extremamanete complicado agora. Portanto, podemos o resumir como:

c2. $A =_c B \iff |A| =_c |B|$

Sejam κ, λ, μ números cardinais:

- $\kappa + \lambda \triangleq_c \kappa \uplus \lambda$
- $\kappa.\lambda \triangleq_c \kappa \times \lambda$
- $\kappa^\lambda \triangleq_c (\kappa \to \lambda)$

1.5 Os Axiomas de Peano

Structed set: $(\mathbb{N}; 0; S)$, onde $0 \in \mathbb{N}$ e $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
0 &\in \mathbb{N} \\
S &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
S &: \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N} \\
(\forall x \in \mathbb{N})&[S_n \neq 0] \\
(\forall x \subseteq \mathbb{N})&[[0 \in X \land (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \implies S_n \in X]] \implies X = \mathbb{N}]
\end{aligned}
$$

O axioma de peano 5 é o que nos permite realizar indução matemática. Observe:

$$
\begin{aligned}
\forall x \subseteq \mathbb{N} &\ \textit{corresponde a } \textbf{base}. \\
(\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \implies S_n \in X] &\ \textit{corresponde ao } \textbf{passo indutivo}. \\
n \in X &\ \textit{corresponde a } \textbf{hipotése indutiva}.
\end{aligned}
$$

1.6 Teorema da Recursão

Theorem. *Sejam:* $(\mathbb{N}, 0, S)$ *um sistema de naturais conjunto* E.
$a \in E$
$h : E \to E$
Então existe $f : \mathbb{N} \to E$
tal que: $f(0) = aef(S_n) = h(f(n))$.

1.7 Os Naturais na ZFC

Para estabelecermos os Naturais na ZFC, temos que garantir duas coisas:

- Existência de $\mathbb{N}$
- Singularidade de $\mathbb{N}$

Para tal, iremos precisar do Teorema da Recursão (1.6).

1.7.1 Existência de $\mathbb{N}$

Seja $J =$ todos os conjuntos X tal que satisfaz o ZF7 (1.1.7)
$J = \{X \in \wp I \mid \emptyset \in X \land (\forall x \in X)[S \in X]\}$

Seja $\mathbb{N} \triangleq \cap J$

Seja $0_1 = \emptyset$

[1]Visiste 2 para λ-Calculus e entender melhor esse ponto

Seja $S_1 = \lambda x.\{x\}$ [1]

Seja $\mathbb{N} \triangleq \cap J$

Seja $0_2 = \emptyset$
Seja $S_2 = \lambda x.x \cup \{x\}$ [2]

Encaixando com os Axiomas de Peano:

1. $(\forall x \in J)[\emptyset \in X]$, então $\emptyset \in \cap J$ e $\emptyset \in \mathbb{N}$
2. Também, pela própria definição de J
3. $a \neq b \iff S_a \neq S_b$ ou $a \neq b \iff \{a\} \neq \{b\}$
4. $\forall x\{x\} \neq \emptyset$
5. Seja $X \subseteq \mathbb{N}$, tal que
   $0 \in \mathrm{X}$
   $(\forall x \in X)[S_X \in X]$
   Seja $n \in \mathbb{N}$
   $\exists p : x = \{p\}$
   –> Mesmo que $\{p\} \in \cap J = \mathbb{N}$
   –> Mesmo que $n \in X$ e $x \geq \mathbb{N}$

Basicamente, podemos descrever $\mathbb{N}$ de duas maneiras, agora:

0 $\emptyset = \emptyset$
1 $\{\emptyset\} = \{0\}$
2 $\{\{\emptyset\}\} = \{1\}$
3 $\{\{\{\emptyset\}\}\} = \{2\}$
$\vdots$
S = λx.$\{x\}$

0 $\emptyset = \emptyset$
1 $\{\emptyset\} = \{0\}$
2 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
3 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\, \{\{\emptyset\}\}\}$
$\vdots$
S = $\lambda x.x \cup \{x\}$

1.7.2 Singularidade de $\mathbb{N}$

"$\mathbb{N}$ is unique up to isomorphism:"
$\pi : (\mathbb{N}_1; 0_1; S_1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathbb{N}_1; 0_2; S_2)$.

$$\pi(0_1) = 0_2$$

$$\pi(S_1 n_1) = S_2 \pi(n_1)$$

Se traçarmos um paralelo com o Teorema da Recursão (1.6), para tentarmos provar a singularidade de $\mathbb{N}$, podemos realizar as seguintes associações:

[2]Veja nota 1

- $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}_1$
- E: $\mathbb{N}_2$
- a: 0_2
- h: S_2

Demonstração. $\pi : \mathbb{N}_1 \implies \mathbb{N}_2$
$\pi[\mathbb{N}_1] = \mathbb{N}_2$

- $0_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$
  –> Como $\pi(0_1) \implies S_2 n_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$
- $n_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$
  –> Suponha que $n_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$ –> H.I
  –> $(\exists n_1 \in \mathbb{N}_1)[\pi(n_1) = n_2]$
  –> $\pi(S_1 n_1) = S_2(\pi(n_2))$ que $= S_2 n_2$

MAIS COISA AQUI DEPOIS...[?]

□

1.8 String Recursion

- Dado [ ] $\in [\mathbb{N}]$
- Se $n \in \mathbb{N}$, e $L \in [\mathbb{N}]$, então $(n : L) \in [\mathbb{N}]$

Exemplo: 2:3:4:[ ] = [2,3,4]

Alguns exemplos de funções recursivas que podemos definir utilizando String Recursion:

$$iszero : [\mathbb{N}] \to \mathbb{B}$$
$$iszero\ 0 = true$$
$$iszero\ S_n = false$$

$$empty : [\mathbb{N}] \to \mathbb{B}$$
$$empty\ [\ \ ] = true$$
$$empty\ (x : x_s) = false$$

$$
\begin{aligned}
++ &: [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \\
[\ \ ] &\ ++\ y_s = y_s \\
(x : x_s) &\ ++\ y_s = x : (x_s + +y_s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ex : [1,2] + +[6,7,8,9] &= 1 : 2 : [\ \ ] + +[6,7,8,9] \\
&= 1 : (2 : [\ \ ] + +[6,7,8,9]) \\
&= 1 : (2 : ([\ \ ] + +[6,7,8,9])) \\
&= 1 : 2 : [6,7,8,9] \\
&= [1,2,6,7,8,9]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
reverse &: [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \\
reverse[\ \ ] &= [\ \ ] \\
reverse[x] &= [x] \\
revese(x : x_s) &= reversexs + +[x]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqsubseteq &: [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \to \mathbb{B} \\
(x : x_s) \sqsubseteq [\ \ ] &= false \\
'[\ \ ] \sqsubseteq y_s &= true \\
(x : x_s) \sqsubseteq (y : y_s) &= (x = y) \wedge xs \sqsubseteq ys
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ex : [2,3,4,5] \sqsubseteq [2,3,5,7] &= (2 = 2) \wedge ([3,4,5] \sqsubseteq [3,5,7]) \\
&= (3 = 3) \wedge ([4,5] \sqsubseteq [5,7]) \\
&= (4 = 5) \wedge ([5] \sqsubseteq [7]) \\
&= \text{FALSE}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\in &: \mathbb{N} \to [\mathbb{N}] \to \mathbb{B} \\
n \in x[\ \ ] &= false \\
x \in (x : x_s) &= (n = x) \vee (n \in x_s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
find &: \mathbb{N} \to [\mathbb{N}] \to \mathbb{B} \\
findn[\ \ ] &= 0 \\
findn(n : nx) &= 0 \\
findn(x : x_s) &= 1 + find\ n\ x_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sum &: [\mathbb{N}] \to \mathbb{N} \\
sum[\ \ ] &= 0 \\
sum(x : xs) &= x + sumxs
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oplus &: [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \\
'[\ \ ] \oplus y_s &= y_s \\
x_s \oplus [\ \ ] &= x_s \\
(x : x_s) \oplus (y : y_s) &= (x + y) : (x_s \oplus y_s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
circle &: (\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \\
circlef[\ \ ]y_s &= [\ \ ] \\
fxs[\ \ ] &= [\ \ ] \\
f(x : x_s)(y : y_s) &= [fxy] : (circle\ f\ x_s\ y_s)
\end{aligned}
$$

2 λ-Calculus

2.1 O conjunto de λ-termos

Sendo $\Lambda = \lambda$-termos;

$$
\begin{aligned}
X &\in \Lambda \\
s, t \in \Lambda &\implies (s\ t) \in \Lambda \\
x \in var, t \in \Lambda &\implies \lambda X.t \in \Lambda
\end{aligned}
$$

2.2 Conversões α, β e η

2.2.1 Conversão α

Determina que a escolha da variável ligada, na abstração lambda, não importa (normalmente):

$$\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y$$
$$\lambda x.\lambda x.x =_\alpha \lambda y.\lambda x.x \qquad \text{Note que isso não poderá ser transformado em } \lambda y.\lambda x.y$$

Primeiro, quando alfa-conversão atua em uma abstração, as únicas ocorrências de variáveis que podem ser renomeados são aqueles que são vinculados a esta mesma abstração. No segundo exemplo, portanto:

$$\lambda x.\lambda x.x \neq_\alpha \lambda y.\lambda x.y \qquad \text{Este último tem um significado diferente do original.}$$

Em segundo lugar, uma conversão α não é possível se isto irá resultar em uma variável sendo capturada por uma abstração diferente. Por exemplo, se substituirmos x com y em $\lambda x.\lambda y.x$, nós obteríamos $\lambda y.\lambda y.y$, que tem um significado diferente da expressão anterior.

2.2.2 Redução β

Redução β é a ideia de aplicar uma função. Por exemplo, se temos $f(x) = x * 2$, para $x = 2$ aplicamos o valor a função que irá ficar como $f(2) = 2 * 2$. Essa é basicamente a ideia da redução β.

$$(\lambda x.x * 2)\ 2 =_\beta 2 * 2$$

2.2.3 Redução η

Eta-conversão expressa a ideia de extensionalidade, que neste contexto é que duas funções são as mesmas se e somente se eles dão o mesmo resultado para todos os argumentos.[3]

2.3 Booleanos naturais no Λ

$$\lambda y.x = \lambda x.(\lambda y.x) := true := fst$$
$$\lambda x.y = \lambda x.(\lambda y.y) := false := snd$$

[3] Sujeito a severas mudanças no futuro. Visite 3 para saber mais sobre.

2.4 Combinators I, K, B, S

Combinadores[4]

$$I = \lambda x.x$$
$$B = \lambda x \lambda y.\lambda z.x(yz) \qquad \text{“Composition”}$$
$$S = \lambda x \lambda y.\lambda z.\lambda xz(yz)$$

3 Política de Colaboração

Você é capaz de alterar o conteúdo desse documento, para corrigir erros, melhorar suas explicações ou dar dicas/exemplos adicionais. Esse foi o objetivo desde começo.

Visita a página remota do documento para obter sua versão mais atualizada e/ou colaborar também.

Como base foram utilizados os livros “Notes on Set Theory” [2] e “Classic Set Theory” [1]. Caso você queira continuar usando-os como base para esse documento, sinta-se a vontade. Caso você queira, também, utilizar outras fontes, não deixe de citá-las para que sejam adicionadas as refêrencias. Tenha em mente que outros estudantes podem estar querendo estudar baseado nesse documento, então busque sempre informações confiáveis que podem ser atestadas (por meio da biblografia, por exemplo).

3.1 Colaboradores

- Yuri Alessandro Martins
- Thanos Tsouanas
- Elton Viana
- Gilney Junior

[4] A melhorar bruscamente

Referências

[1] DC Goldrei. *Classic Set Theory: For Guided Independent Study*. CRC Press, 1996.

[2] Yiannis Moschovakis. *Notes on set theory*. Springer Science & Business Media, 2006.