Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Квантовая теория поля**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: **ЛФИ**

подразделение: **теоретической физики**
курс: 4
семестр: 7

Трудоемкость:
теор. курс: вариат. часть – 4 зачет. ед.
лекции – 45 часов
Экзамен – 7 семестр
практические (семинарские)
занятия – 45 часов
Курсовые и контрольные работы – 0

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90
Самостоятельная работа – 60 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф.
В. В. Киселев

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
23 мая 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
Ю. М. Белоусов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ I

1. **Свободные релятивистские поля.** Группа Лоренца: генераторы вращений, их коммутатор, спин векторной частицы, полный момент количества движения, генераторы бустов и полная алгебра группы Лоренца, собственные ортохронные преобразования, дискретные операции инверсии пространства и времени, классификация преобразований полной группы Лоренца, базис полей и группа $SL(2, \mathbb{C})$, релятивистские спиноры, индексы с точкой и без точки, 4-векторное поле в терминах спинорных индексов. Группа Пуанкаре: трансляции и неоднородная группа Лоренца, коммутаторы генераторов, вектор Паули–Любанского, классификация Вигнера для массивных и безмассовых полей, спиральность, киральные поля, действие дискретных преобразований на генераторы, $\mathbb{CPT}$-теорема.

2. **Вторичное квантование скалярного поля.** Свободные классические вещественное и комплексное скалярные поля, положительно- и отрицательно-частотные решения, совокупность осцилляторов, динамические переменные поля и их квантование, операторы рождения и уничтожения скалярных частиц, их зависимость от времени и координаты, классическое поле как среднее значение оператора поля по когерентным состояниям, пространство Фока, ток Нётер, оператор заряда, античастицы, зарядовое сопряжение и инверсии пространства и времени в фоковском пространстве и их действие на квантованное скалярное поле. Скалярное поле с источником: причинная функция Грина, амплитуда квантовых переходов при наличии источника как производящий функционал многоточечных функций Грина, T-произведение операторов поля и интеграл по траекториям, производящий функционал связных функций Грина, преобразование Лежандра от источников к полям и функционал эффективного действия. Уравнения Швингера–Дайсона. Голоморфное представление для интеграла по траекториям, нормальное упорядочение, асимптотические состояния, стабильность вакуума, переходы вакуум–вакуум при наличии источников, фейнмановские граничные условия, причинный пропагатор Фейнмана, физический смысл двухточечной функции Грина, $\mathcal{S}$-матрица как функционал от свободного классического решения, физический смысл коэффициентных функций, их связь с многоточечными функциями Грина, графическое представление редукционных формул.

3. **Свободные вейлевские и дираковские спиноры.** Уравнения движения для киральных безмассовых спиноров Вейля, действие кирального поля, гамильтониан и заряд, базисные спиноры и квантование вейлевского спинора, античастицы с противоположной спиральностью и CP-инвариантность, инверсия времени, безмассовый биспинор Дирака и операция пространственной инверсии, гамма-матрицы и их алгебра, киральные проекторы, дираковски сопряженный спинор, зарядовое сопряжение биспинора, дираковский спинор с массой, уравнение Дирака, квантование, проекторы на состояния с заданным значением спина, сумма по поляризациям, представление Дирака для гамма-матриц, ковариантные билинейные по биспинорам Дирака токи, дискретные симметрии для поля Дирака, зарядово самосопряженные спиноры Майорана, майорановская масса. Поле Дирака с источником: пропагатор электрона.

4. **Калибровочное векторное поле.** Векторное поле и уравнения Максвелла, циркулярная поляризация, продольное поле, преобразования Лоренца и калибровочная инвариантность, действие для поперечных мод, квантованное поле, массивное векторное поле, уравнение Проќа, калибровочное преобразование базиса гильбертова пространства в нерелятивистской и релятивистской квантовой механике, операция трансляций и ковариантная производная, калибровочное поле, тензор напряженности как коммутатор ковариантных производных, минимальное взаимодействие заряженных релятивистских частиц с калибровочным полем.

4. **Релятивистская частица в кулоновском поле:** связанные состояния. Спектр атома водорода из релятивистского уравнения для скалярной частицы, сведение к нерелятивистскому уравнению, расщепление уровней по орбитальному моменту, спектр уровней из уравнения Дирака, квантовые числа состояний, важность P-четности, расщепление уровней по полному моменту.

5. **Нерелятивистское приближение: эффективная теория.** Операторное уравнение для двухкомпонентного спинора во внешнем поле в одночастичном приближении, разложение операторов в ряд по малому отношению v/c, ведущий вклад в нерелятивистское приближение, эффективное действие для спинора Паули, магнитный момент электрона и фактор Ланде $g = 2$, поправки к эффективному действию в случае движения в стати-

ческом потенциале, роль нормировки заряда на единицу, природа кинетической поправки, спин-орбитального взаимодействия и дарвиновского члена, релятивистские поправки как возмущение в атоме водорода.

6. **Диаграммы Фейнмана.** Уравнения Швингера–Дайсона в квантовой электродинамике и их графическое представление, теория возмущений в формулировке континуального интеграла, правила Фейнмана, матричные элементы с хронологическим упорядочиванием, амплитуда квантового перехода при наличии внешних полей, сохранение 4-импульса, вероятность перехода в единицу времени в единичном объеме, поток в релятивистской нормировке, дифференциальное сечение, ширина распада.

7. **Слабое взаимодействие.** Слабый заряженный ток, четырёхфермионное взаимодействие и распад нейтрона, поколения лептонов, W-бозон, распад μ-мезона, распад заряженного пиона, калибровочное слабое взаимодействие и нейтральный ток.

8. **Механизм Хиггса.** Спонтанное нарушение глобальной калибровочной симметрии и голдстоуновский бозон, спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии: массивное калибровочное поле. Механизм Хиггса в электрослабой теории, угол Вайнберга.

9. **Кварки.** Кварковая модель адронов. Цвет. Квантовая хромодинамика – калибровочная теория сильных взаимодействий, генераторы группы $SU(3)$, фундаментальное и присоединенное представления группы $SU(3)$, матрицы Гелл-Мана, самодействие неабелевых калибровочных векторных бозонов – глюонов. Калибровочное условие и трюк Фаддева–Попова: континуальный интеграл в неабелевых теориях поля, пропагатор калибровочного бозона в различных калибровках, духи Фаддева–Попова. Тождества Славнова–Тейлора–Уорда–Такахаши. BRST-инвариантность действия.

Литература

Основная

1. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. Том 1, 2. — Москва : Мир, 1984.
2. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. — Москва : РХД, 2001.

3. *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс. — Москва : Мир, 1984.
4. *Киселев В.В.* Квантовая механика. — Москва : МЦНМО, 2009.

Дополнительная

5. *Зи Э.* Квантовая теория поля в двух словах. — Москва : РХД, 2009.
6. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Том IV. Квантовая электродинамика — Москва : Физматлит, 2006.
7. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. — Москва : Изд-во МГУ, 1986.
8. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Квантовая электроднамика. — Москва : Изд-во МГУ, 1983.

Задание

Упражнения

Первое задание

1.^{C} Рассмотреть вещественный 4-вектор в представлении группы Лоренца $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2.^{C} Доказать равенства

$$(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\beta^{\ \alpha} = 2\, g^{\mu\nu}\, \delta_\beta^\alpha,$$

$$(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} = 2\, g^{\mu\nu}\, \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}.$$

3.^{C} Доказать равенства

$$\mathrm{tr}\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\, \bar{\sigma}^{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}\, \{\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda \delta^\mu_\rho\} - \frac{\mathrm{i}}{2}\, \hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\ \ \mu\nu},$$

$$\mathrm{tr}\{\sigma_{\lambda\rho}\, \sigma^{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}\, \{\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda \delta^\mu_\rho\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\, \hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\ \ \mu\nu}.$$

4.^{C} Показать, что величины

$$\theta\sigma^\mu\bar{\chi} = \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \qquad \text{и} \qquad \bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\chi = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \chi_\alpha$$

ведут себя так же, как 4-векторы.

5.^{C} Доказать, что $(\theta_\alpha)^\dagger = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ и $(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^\dagger = \chi^\alpha$.

6.* Покажите, что представления группы Лоренца со спином $s = 1$: $(1,0)$ и $(0,1)$ отвечают самодуальным и антисамодуальным тензорным полям второго ранга в пространстве-времени Минковского, т.е. при определении поля, дуального к $B_{\mu\nu}$, как

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\hat{\epsilon}^{\mu\nu\mu'\nu'} B_{\mu'\nu'},$$

имеют место соотношения самодуальности и антисамодуальности в пространстве-времени Минковского:

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \pm \mathrm{i}\, B^{\mu\nu}.$$

[Hint: При выводе учесть, что представления $(1,0)$ и $(0,1)$ — это бесследовые матрицы в индексах с точками и без точек.]

7.^{C} Доказать, что квадрат псевдовектора Паули–Любанского имеет вид

$$W^2 = -\frac{1}{2}\,\{p^2\, S^2 - 2\, p_\nu p^\mu\, S_{\mu\lambda} S^{\nu\lambda}\}.$$

Второе задание

8.^{C} Пользуясь антикоммутатором, вычислить следы произведений гамма-матриц Дирака:

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu), \quad \mathrm{tr}\,(\gamma_5\gamma^\mu), \quad \mathrm{tr}\,(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu), \quad \mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}),$$

$$\mathrm{tr}\,(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}), \quad \mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}), \quad \mathrm{tr}\,(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}).$$

9.^{C} Доказать, что след нечетного числа гамма-матриц Дирака равен нулю, а для четного n имеет место соотношение редукции

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}) = g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{tr}\,(\gamma^{\mu_3}\ldots\gamma^{\mu_n}) + g^{\mu_1\mu_3}\mathrm{tr}\,(\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\ldots\gamma^{\mu_n}) + \ldots$$

10.^{C} Упростить выражения

$$\gamma_\mu \not{p}\gamma^\mu, \qquad \gamma_\mu \not{p}\not{k}\gamma^\mu.$$

11.^{C} Рассмотреть тождества Фирца для гамма-матриц Дирака.

Задачи

Первое задание

1.^{C} Доказать, что компоненты псевдовектора Паули–Любанского для безмассовых полей равны

$$W_0 = \hbar\, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s}, \qquad W^\alpha = \hbar\,\big\{p_0\, \boldsymbol{s}^\alpha \mp \mathrm{i}\,(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s})^\alpha\big\}.$$

2.^{C} Доказать, что квадрат псевдовектора Паули–Любанского для безмассовых полей имеет вид

$$W^2 = -4\,p_0^2\hbar^2\left\{\boldsymbol{\mathcal{J}}^+\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^- - \frac{1}{p_0^2}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^+)(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^-) - \frac{\mathrm{i}}{p_0}\,\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{J}}^+\times\boldsymbol{\mathcal{J}}^-)\right\}.$$

3.^{C} Найти поток частиц с релятивистской нормировкой состояний

$$\langle\boldsymbol{k}|\boldsymbol{k}'\rangle = 2\epsilon(\boldsymbol{k})\,(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').$$

4.^{C} Показать, что для свободного комплексного скалярного поля электрический заряд выражается через лоренц-инвариантные амплитуды $a(\boldsymbol{k})$ и $a_c(\boldsymbol{k})$ в виде

$$Q = \int \mathrm{d}^3r\,j^0 = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k_0}\,e\,\{a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - a_c^*(\boldsymbol{k})a_c(\boldsymbol{k})\}\,.$$

5.^{C} Для решения в виде плоской монохроматической волны для скалярного поля

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kx}$$

найти, что компоненты тензора энергии-импульса

$$T_0^0 \mapsto k_0, \qquad T_0^\alpha \mapsto \boldsymbol{k}.$$

6.^{C} Для решения в виде плоской монохроматической волны для скалярного поля

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kx}$$

найти, что компоненты тока

$$j^0 \mapsto \pm e, \qquad j^\alpha \mapsto \pm e\,\boldsymbol{k}.$$

7.^{C} Какой вид имеет тензор энергии-импульса релятивистски инвариантного вакуума?

8.^{C} Для правого вейлевского спинора покажите, что из уравнения движения следует тождество

$$\frac{1}{\hbar}\,\boldsymbol{W}\,\bar{\chi} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{p}\,\bar{\chi}.$$

9.^{C} Показать, что если

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\bar{\chi}(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}\,|\,\bar{\chi}(\boldsymbol{p}),$$

то спинор

$$\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = -\mathrm{i}\sigma_2 \bar{\chi}^{\,*}(\boldsymbol{p})$$

удовлетворяет уравнению

$$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}\,|\,\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}).$$

10.^{C} Вычислить гамильтониан правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

11.^{C} Вычислить заряд правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

12.^{C} Показать, что проекторы на состояния с заданной проекцией спина частицы на вектор поляризации имеют вид

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 + \lambda\gamma_5\,\not{\epsilon}),$$

а для античастиц —

$$P^c_{\pm} = \frac{1}{2}(1 - \lambda\gamma_5\,\not{\epsilon}),$$

где λ — направление спина вдоль вектора поляризации ϵ^μ, ортогонального 4-импульсу p:

$$\lambda = \pm 1, \quad \epsilon^2 = -1, \quad \epsilon\cdot p = 0.$$

13.^{C} Вычислить сумму по поляризациям дираковских частиц и античастиц:

$$\Pi(\boldsymbol{p}) = \sum_\lambda u_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{u}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not{p} + mc, \quad \Pi^c(\boldsymbol{p}) = \sum_\lambda v_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{v}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not{p} - mc.$$

14.^{C} Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для биспинора Дирака с юкавским взаимодействием с вещественным скалярным полем. Записать правила Фейнмана.

15.^{C} Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для скалярной электродинамики. Записать правила Фейнмана.

16.^{C} Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для массивного скалярного поля с самодействием $\lambda\,\phi^4/4!$. Записать правила Фейнмана.

17.^{C} Доказать, что число петель N_L в диаграмме с N_V степенями действия взаимодействия V, числом связных компонент диаграммы N_c и числом внутренних линий N_I определяется соотношением

$$N_L = N_I + N_c - N_V .$$

Привести примеры одно- и двухпетлевых диаграмм с одно- и двухсвязными компонентами в теории с взаимодействием $V \sim \lambda\phi^4$.

18.^{C} Доказать, что разложение связных диаграмм по петлям совпадает с разложением по постоянной Планка $\hbar$.

Второе задание

19.^{C} В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон-позитронной аннигиляции в мюон-антимюон: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.

20.^{C} В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон-позитронной аннигиляции в пион-антипион, считая пионы точечными скалярными частицами: $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. Сравнить распределение по углам в системе центра масс с распределением в случае образования мюонов.

21.^{C} В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное сечение комптоновского рассеяния фотона на электроне: $\gamma\, e^- \to \gamma\, e^-$.

22.^{C} Вычислить сечение рассеяния электронов на мюонном нейтрино в модели с четырёхфермионном взаимодействием: $e^-\nu_\mu \to \nu_e\mu^-$.

23.^{C} Вычислить ширину трёхчастичного распада мюона на электрон и нейтрино: $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$.

24.^{C} Вычислить время двухчастичного распада заряженного пиона: $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$. Сравнить ширину распада пиона на электрон и мюон.

25.^{C} Вычислить время распада нейтрона: $n \to p\, e^-\bar{\nu}_e$.

26.* Вычислить ширину двухчастичного распада Z-бозона на нейтрино: $Z \to \nu\,\bar{\nu}$.

27.^{C} В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение рождения очарованных кварков в кварк-антикварковой анигилляции: $\bar{q}\, q \to \bar{c}\, c$.

28.* В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение рождения очарованных кварков в глюон-глюоннном слиянии: $g\,g \to \bar{c}\,c$. Рассмотреть синглетный и октетный по цвету вклады в сечение.

1-я контрольная работа – вторая декада октября

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи 21.10–26.10.2020 года)

2-я контрольная работа – первая декада декабря

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи 10.12–14.12.2020 года)

Задачи со значком ^{C} рассматриваются на семинаре, знаком * помечены дополнительные задачи повышенной сложности.

Ориентировочный план решения задач на семинарах:

№ семинара	задачи	упражнения
1	1, 2	У1, У2, У3
2	3, 4, 6	У4, У5
3	5, 7, 8, 9	У7
4	10, 11, 12, 13	
4	14, 15	
6	16, 17, 18	
7, 8	сдача 1-го задания	
9	19	У8, У9, У10
10	20, 21	У11
11	22, 23	
12	24, 25, 27	
13, 14	сдача 2-го задания	

Подписано в печать 30.06.2020. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 130 экз. Заказ № 83.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru