Задание по квантовой теории поля

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

29 ноября 2020 г.

Аннотация

квантовая теория поля

Содержание

Предисловие

тренируемся, практикуемся

Часть I
Первое задание

1 упражнения

Упражнение. 1

Рассмотреть вещественный 4-вектор в представлении группы Лоренца $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Рассмотрим произвольную эрмитово сопряженную величину $\hat{V}$ в представлении $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. $\hat{V}$ несет пару индексов $\{\alpha\dot{\alpha}\}$, может быть разложена по базису матриц σ^{ν} :

$$(\hat{V})_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\alpha}} V_{\nu}$$

причем

$$V^{\mu} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\bar{\sigma}^{\mu}\hat{V}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\hat{V}\bar{\sigma}^{\mu}\right\}$$

так как по определению в (1.58) и (1.59), очевидно, что антисимметричная по пространственным индексам часть произведения матриц не дает вклада в след, ввиду бесследовости обычных 3 -мерных матриц Паули,

$$\operatorname{tr}\{\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$$

Согласно установленным нами законам преобразования верхних и нижних спинорных индексов, преобразования группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ переводят $\hat{V}$ в эрмитову величину

$$\hat{V}' = \Lambda_{-}\hat{V}\Lambda_{-}^{\dagger}$$

которая опять может быть разложена по исходному базису релятивистских матриц Паули:

$$V'^{\mu} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\bar{\sigma}^{\mu}\hat{V}'\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\hat{V}'\bar{\sigma}^{\mu}\right\}$$

Заметим, что

$$\det\hat{V}' = \det\left\{\Lambda_{-}\hat{V}\Lambda_{-}^{\dagger}\right\} = |\det\Lambda_{-}|^{2}\det\hat{V} = \det\hat{V}$$

При этом

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V_0 + V_3 & V_1 - \mathrm{i}V_2 \\ V_1 + \mathrm{i}V_2 & V_0 - V_3 \end{pmatrix}$$

так что

$$\det\hat{V} = V_0^2 - \boldsymbol{V}^2$$

а равенство детерминантов $\det\hat{V}' = \det\hat{V}$ означает, что преобразование сохраняет лоренц-инвариантную длину 4-вектора, т. е. представляет собой элемент группы Лоренца на 4-векторах.

Это представление является двузначным, так как матрицы Λ_{-} и $-\Lambda_{-}$ приводят к идентичным преобразованиям 4-вектора.

В случае инфинитезимальных преобразований $\omega^{\lambda\rho} \to 0$,

$$\Lambda_{-} = \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_{\lambda\rho}\omega^{\lambda\rho}, Lambda_{-}^{\dagger} = \mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\omega^{\lambda\rho}$$

находим, что

$$V'^{\mu} = V^{\mu} + \frac{\mathrm{i}}{4}\operatorname{tr}\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}\}\,\omega^{\lambda\rho}V_{\nu}$$

где, например, разложение на симметричную и антисимметричную по перестановке индексов части
$$\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} = g^{\mu\nu} - 2\mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu\nu}$$
приводит к
$$\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\right\} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\}$$
и затем, как легко заметить, в силу симметрийных свойств по перестановке пространственных индексов выражение для следа матриц должно иметь определенную тензорную структуру,
$$\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\} = A\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} + B\hat{\varepsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$
а коэффициенты A, B можно определить, используя явный вид генераторов при определенном выборе пространственных индексов, так что в итоге полу- чаем
$$\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} - \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\varepsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$
Совершенно аналогично
$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\varepsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

В итоге приведение подобных членов дает
$$V'^{\mu} = V^{\mu} + \omega^{\mu\nu}V_{\nu}$$
т. е. инфинитезимальное преобразование 4-вектора.

Упражнение. 2

Доказать равенства
$$(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})^{\alpha}_{\beta} = 2g^{\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\beta}$$
$$(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = 2g^{\mu\nu}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

По определению $\sigma^{\mu} = (1, \sigma^{i}), \bar{\sigma}^{\mu} = (1, -\sigma^{i})$.

Посчитаем отдельно
$$(\sigma^{0}\bar{\sigma}^{i} + \sigma^{i}\bar{\sigma}^{0}) = (-\sigma^{i} + \sigma^{i}) = 0$$
$$(\sigma^{i}\bar{\sigma}^{j} + \sigma^{j}\bar{\sigma}^{i}) = -(\sigma^{i}\sigma^{j} + \sigma^{j}\sigma^{i}) = -2\delta^{ij}$$

Поэтому
$$(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})^{\alpha}_{\beta} = 2g^{\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\beta}$$

Аналогично доказывается второе.

Упражнение. 3

Доказать равенства
$$\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$
$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

По определению
$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\bar{\sigma}^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\bar{\sigma^{\mu}}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma^{\nu}}\sigma^{\mu})$$

Посмотрим, как можно их расписать через компоненты.

$$\begin{aligned}
&\sigma^{00} = 0\\
&\sigma^{0i} = -\sigma^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\sigma^0(-\sigma^i) - \sigma^i\sigma^0) = -\tfrac{i}{2}\sigma^i\\
&\bar{\sigma^{0i}} = \tfrac{i}{2}\sigma^i\\
&\bar{\sigma}^{ij} = \tfrac{i}{4}(-\sigma^i\sigma^j - (-\sigma^j)\sigma^i) = -\tfrac{i}{4}\cdot 2i\varepsilon_{ijk}\sigma^k = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k\\
&\bar{\sigma}^{ij} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k
\end{aligned}$$

В последних равенствах использовалось соотношение на матрицы Паули:

$$\sigma^i\sigma^j = i\varepsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij}\sigma^0$$

Таким образом, исходное уравнение для пространственных индексов $\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\}$ можно переписать как:

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{kl}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijm}\sigma^m\frac{1}{2}\varepsilon_{kln}\sigma^n\right\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}\,\mathrm{tr}\left\{\sigma_m\sigma^n\right\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}\,\mathrm{tr}\left\{2\delta^{mn}\right\}$$

И дальше просто преобразуем до конца:

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{kl}\right\} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln} = 1\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

А если есть временной индекс, то

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{k0}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^n\frac{i}{2}\sigma^k\right\} = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk0} = \frac{i}{2}\varepsilon_{ij}^{k0}$$

В последнем переходе показано как от трехмерного символа Леви-Чевиты перейти к четырехмерному. Также при подъеме пространственной части метрика домножилась на (-1), а при подъеме временной - на 1.

Осталось разобрать случай

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{i0}\sigma^{k0}\right\} = -\left(\frac{i}{2}\right)^2\mathrm{tr}\left\{\sigma^i\sigma^k\right\} = \frac{1}{2}\delta_{ik} \equiv \frac{1}{2}[\delta_i^k\delta_0^0 - \delta_i^0\delta_0^k]$$

Собирая все вместе, получаем

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta_\lambda^\mu\delta_\rho^\nu - \delta_\lambda^\nu\delta_\rho^\mu\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\mu\nu}$$

Теперь то же самое для $\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\}$

????

действуя аналогично, получаем:

..

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta_\lambda^\mu\delta_\rho^\nu - \delta_\lambda^\nu\delta_\rho^\mu\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\mu\nu}$$

Упражнение. 4

Показать, что величины

$$\theta\sigma^\mu\bar{\chi} = \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad \text{и} \quad \bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\chi = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha$$

ведут себя так же, как 4-векторы.

То есть нужно доказать, что

В самом деле, воспользуемся стандартным способом: построим, например, величину

$$V_\mu \theta \sigma^\mu \bar{\chi} = V_\mu \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$$

и покажем, что она является инвариантом.

Действительно, преобразование из группы $SL(2,\mathbb{C})$ дает

$$\theta^\alpha \mapsto \theta^{\alpha_1} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}_{\alpha_1}, \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \mapsto \bar{\chi}^{\dot{\alpha}_1} \left(\Lambda_+\right)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}_1}, \quad V_\mu \mapsto V_\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\mu}$$

где Λ^ν_μ - матрица преобразований координат, так что ковектор преобразуется обратной матрицей, а также, как мы показали,

$$\hat{V}_{\alpha\dot{\alpha}} = V_\mu \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \mapsto \left(\Lambda_-\right)^{\alpha_1}_{\alpha} \hat{V}_{\alpha_1\dot{\alpha}_1} \left(\Lambda_+^{-1}\right)^{\dot{\alpha}_1}_{\dot{\alpha}}$$

Поэтому величина в явном виде

$$V_\mu \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$$

в явном виде переходит сама в себя, а значит, является инвариантом.

С другой стороны, этот инвариант - скалярное линейное отображение 4-ковектора на числа, и, стало быть, по определению оно представляет собой 4-вектор, что и доказывает наше утверждение о характере преобразований билинейной по киральным полям форме $\theta \sigma^\mu \bar{\chi}$.

Упражнение. 5

Доказать, что $(\theta_\alpha)^\dagger = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ и $\left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right)^\dagger = \chi^\alpha$.

Напомним, что по определению $(\theta_\alpha)^\dagger = (\theta_{\dot{\alpha}})^*$, то есть мы совершаем комплексное сопряжение над спинором, а также заменяем точечный индекс на неточечный. (????)

Совершим преобразования поднятия индексов и перехода из сопряженного спинора к обычному над $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$:

$$\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} [i \sigma_2^{\alpha\dot{\beta}} \theta_\alpha]^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \theta^*_\alpha = \delta^\alpha_{\dot{\alpha}} \theta^*_\alpha = (\theta_\alpha)^\dagger$$

Однако то, что компоненты равны не значит, что это один и тот же объект, потому что они могут преобразовываться по-разному. Поэтому проверим, что они преобразуются одинаково:

$$(\theta')^\dagger_\alpha = ((\Lambda_-)^\beta_\alpha \theta_\beta)^\dagger = \exp\left(-\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right)^\beta_\alpha \theta_\beta$$

????

Теперь докажем что $\left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right)^\dagger = \chi^\alpha$

Упражнение. 5

Покажите, что представления группы Лоренца со спином $s = 1 : (1,0)$ и $(0,1)$ отвечают самодуальным и антисамодуальным тензорным полям второго ранга в пространстве-времени Минковского, т.е. при определении поля, дуального к $B_{\mu\nu}$, как

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\mu\nu\mu'\nu'} B_{\mu'\nu'}$$

имеют место соотношения самодуальности и антисамодуальности в пространстве-времени Минковского:

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \pm \mathrm{i} B^{\mu\nu}$$

[Hint: При выводе учесть, что представления (1,0) и $(0,1)-$ это бесследовые матрицы в индексах с точками и без точек.]

Упражнение. 7

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского имеет вид

$$W^2 = -\frac{1}{2} \left\{ p^2 S^2 - 2 p_\nu p^\mu S_{\mu\lambda} S^{\nu\lambda} \right\}$$

2 задачи

Задача. 1.^{C}

Доказать, что компоненты псевдовектора Паули–Любанского для безмассовых полей равны

$$W_0 = \hbar \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}, \quad W^\alpha = \hbar \left\{ p_0 \boldsymbol{s}^\alpha \mp \mathrm{i} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s})^\alpha \right\}$$

При этом, конечно, на этих полях (т.е. при действии операторов на поля) проекция спина на ось импульса или, как говорят, спиральность имеет значения

$$\frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{j}^\pm}{p_0} = \partial_3^\pm = \pm \lambda_\pm$$

Причем на физических полях $W^2 = 0$ Таким образом, среди безмассовых полей со спином базис составляют так назы ваемые К иральные поля полуцелого спина и поляризованные поля целого спина: npaeble поля с положительной киральностью и спиральностью $\mathfrak{s} = \lambda_+$

$$\boldsymbol{J}^- \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{K} = -\mathrm{i} \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{J}^+ = \boldsymbol{s}$$

левъе поля с отрицательной киральностью и спиральностью $\mathfrak{s} = -\lambda_-$

$$\boldsymbol{J}^+ \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{K} = \mathrm{i} \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{J}^- = \boldsymbol{s}$$

ванны х полей. С учетом

$$S_{\beta\gamma} = \hbar \epsilon_{\beta\gamma\rho} s^\rho$$

нулевая компонента

$$W_0 = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} p_\alpha S_{\beta\gamma} = \hbar p \cdot s = \pm p_0 \hbar \lambda_\pm$$

При вычислении пространственной компоненты необходимо использовать то, что

$$\frac{1}{\hbar} S_{0\gamma} = \mathcal{K}^\gamma = \mp \mathrm{i} s^\gamma$$

откуда

$$W^\alpha = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\alpha 0 \beta\gamma} p_0 S_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} 2 \hat{\epsilon}^{\alpha\beta 0 \gamma} p_\beta S_{0\gamma} = \hbar \left\{ p_0 s^\alpha \mp \mathrm{i} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s})^\alpha \right\}$$

Задача. 2.^{C}

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского для безмассовых полей имеет вид

$$W^2 = -4 p_0^2 \hbar^2 \left\{ \partial^+ \cdot \partial^- - \frac{1}{p_0^2} \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\jmath}^+ \right) \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\jmath}^- \right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0} \boldsymbol{p} \cdot \left(\boldsymbol{J}^+ \times \boldsymbol{j}^- \right) \right\}$$

Псевдовектор Паули-Любанского определяется как

$$W^m = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{mnkl} p_n S_{kl}$$

При $p^2 = 0$

$$\begin{aligned} W^2 &= p_n p^k S_{kl} S^{nl} = p_n p^k S_{k0} S^{n0} + p_n p^k S_{k\alpha} S^{n\alpha} \\ &= -p^\alpha p^\beta S_{0\alpha} S^{0\beta} + p_0^2 S^{0\alpha} S_{0\alpha} - p^\gamma p^\beta S^{\gamma\alpha} S_{\beta\alpha} + p_0 p^\beta \left(S_{\beta\alpha} S^{0\alpha} - S_{0\alpha} S^{\beta\alpha} \right) \\ &= \hbar^2 \left\{ (\boldsymbol{p} \cdot \mathcal{K})^2 - p_0^2 \mathcal{K}^2 - (\boldsymbol{p} \times s)^2 + p_0 \boldsymbol{p} \cdot \left\{ (\boldsymbol{s} \times \mathcal{K}) - (\mathcal{K} \times \boldsymbol{s}) \right\} \right\} \end{aligned}$$

Раскрывая квадрат векторного произведения, находим

$$\frac{1}{\hbar^2} W^2 = -p_0^2 \left(s^2 + \mathcal{K}^2 \right) + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s})^2 + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}})^2 + p_0 \boldsymbol{p} \cdot \left\{ (\boldsymbol{s} \times \mathcal{K}) - (\mathcal{K} \times \boldsymbol{s}) \right\}$$

Выражая генераторы спина и бустов через эрмитовы векторы $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$, получаем

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2\left\{\boldsymbol{j}^+\cdot\boldsymbol{j}^- - \frac{1}{p_0^2}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j}^+\right)\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j}^-\right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0}\boldsymbol{p}\cdot\left(\boldsymbol{j}^+\times\boldsymbol{j}^-\right)\right\}$$

Выберем ось проектирования спина вдоль пространственной компоненты импульса: $\boldsymbol{p}$ $(0,0,p_0)$, откуда $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{J} = p_0\mathcal{J}_3$, тогда

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2\left\{\partial_1^+\partial_1^- + \partial_2^+\partial_2^- - \mathrm{i}\left(\partial_1^+\partial_2^- - \partial_2^+\partial_1^-\right)\right\}$$

или

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2\left\{\partial_1^+ + \mathrm{i}\partial_2^+\right\}\left\{\partial_1^- - \mathrm{i}\partial_2^-\right\} = -4p_0^2\hbar^2\partial_+^+\partial_-^-$$

почти доделал, осталось досмотреть мелочи и все.

Задача. 3.^{C}

Найти поток частиц с релятивистской нормировкой состояний

$$\langle\boldsymbol{k}\mid\boldsymbol{k}'\rangle = 2\epsilon(\boldsymbol{k})(2\pi)^3\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)$$

Задача. 4.^{C}

Показать, что для свободного комплексного скалярного поля электрический заряд выражается через лоренц-инвариантные амплитуды $a(\boldsymbol{k})$ и $a_c(\boldsymbol{k})$ в виде

$$Q = \int \mathrm{d}^3 r j^0 = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} e\left\{a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - a_c^*(\boldsymbol{k})a_c(\boldsymbol{k})\right\}$$

Задача. 5

Для решения в виде плоской монохроматической волны для скалярного поля

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kx}$$

найти, что компоненты тензора энрегии-импульса

$$T_0^0 \mapsto k_0, \quad T_0^\alpha \mapsto \boldsymbol{k}$$

Тензор энергии-импульса определяется как

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial_\nu\varphi + \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\varphi^*}\partial_\nu\varphi^* - \delta_\nu^\mu L$$

Поэтому в случае скалярного поля, когда $L = \partial_\mu\partial^\mu\varphi^* - m^2\varphi\varphi^*$
$L = \frac{1}{2}(\partial_\nu\varphi_0)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi_0^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 - \frac{m^2}{2}$
и дальше там мы подставляем и вытаксиваем компоненты ТЭИ.

Задача. 6

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kx}$$

Найти, что компоненты тока

$$j^0 \mapsto \pm e, \quad j^\alpha \mapsto \pm e\boldsymbol{k}$$

Задача. 7.^{C}

Какой вид имеет тензор энергии-импульса релятивистски инвариантного вакуума?

Задача. 8

Для правого вейлевского спинора покажите, что из уравнения движения следует тождество

$$\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{W}\bar{\chi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\bar{\chi}$$

Задача. 9

Показать, что если

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\bar{\chi}(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\bar{\chi}(\boldsymbol{p}),$$

то спинор

$$\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = -\mathrm{i}\sigma_2\bar{\chi}^*(\boldsymbol{p})$$

удовлетворяет уравнению

$$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\chi_{cp}(-\boldsymbol{p})$$

Задача. 10.

Вычислить гамильтониан правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

Задача. 11.C

Вычислить заряд правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

Задача. 12

Показать, что проекторы на состояния с заданной проекцией спина частицы на вектор поляризации имеют вид

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1+\lambda\gamma_5 \not{\epsilon}\right)$$

а для античастиц -

$$P^c_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1-\lambda\gamma_5 \not{\epsilon}\right)$$

где λ — направление спина вдоль вектора поляризации ε^μ, ортогонального 4-импульсу p:

$$\lambda = \pm 1, \quad \epsilon^2 = -1, \quad \epsilon\cdot p = 0$$

Задача. 13.^{C} Вычислить сумму по поляризациям дираковских частиц и античастиц:

$$\Pi(\boldsymbol{p}) = \sum_\lambda u_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{u}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not{p} + mc, \quad \Pi^c(\boldsymbol{p}) = \sum_\lambda v_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{v}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not{p} - mc$$

Задача. 14 Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для биспинора Дирака с юкавским взаимодействием с вещественным скалярным полем. Записать правила Фейнмана.

Задача. 15.C Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для скалярной электродинамики. Записать правила Фейнмана.

Задача. 16. ^{C} Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для массивного скалярного поля с самодействием $\lambda\phi^4/4!$. Записать правила Фейнмана.

Задача. 17. ^{C}

Доказать, что число петель N_L В диаграмме с N_V степенями действия взаимодействия V, Числом связных компонент диаграммы N_c и числом внутренних линий N_I ОПределяется соотношением

$$N_L = N_I + N_c - N_V$$

Привести примеры одно- и двухпетлевых диаграмм с одно- и двухсвязными компонентами в теории с взаимодействием $V \sim \lambda\phi^4$

Задача. 18.ф ^{C}

Доказать, что разложение связных Диаграмм по петлям совпадает с разложением по постоянной Планка $\hbar$

Часть II
Второе задание

3 упражнения

Упражнение. 8.^{C}

Пользуясь антикоммутатором, вычислить следы произведений Гамма-матриц Дирака:

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\right)$$
$$\mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right)$$

Упражнение. 9. ^{C}

Доказать, что след нечетного числа гамма-матриц Дирака равен нулю, а для четного n имеет место соотношение редукции

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_n}\right) = g^{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_3}\dots\gamma^{\mu_n}\right) + g^{\mu_1\mu_3}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\dots\gamma^{\mu_n}\right) + \dots$$

Упражнение. 10.

Упростить выражения

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu, \quad \gamma_\mu \not{p} \not{k} \gamma^\mu$$

Упражнение. 11

Рассмотреть тождества Фирца для гамма-матриц Дирака.

4 задачи

Задача. 19.^{C}

В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон-позитронной аннигиляции в мюон-антимюон: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Задача. 20.^{C}

В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон-позитронной аннигиляции в пион-антипион, считая пионы точечными скалярными частицами: $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. Сравнить распределение по углами в системе центра масс с распределением в случае образования мюонов.

Задача. 21.^{C}

В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное сечение комптоновского рассеяния фотона на электроне: $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Задача. 22.^{C} Вычислить сечение рассеяния электронов на мюонном нейтрино в модели с четырёхфермионном взаимодействием: $e^-\nu_\mu \to \nu_e\mu^-$

Задача. 23. ^{C} Вычислить ширину трёхчастичного распада мюона на электрон и нейтрино: $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$

Задача. 24.^{C} Вычислить время дВухчастичного распада заряженного пиона: $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$. Сравнить ширину распада пиона на электрон и мюон.

Задача. 25.^{C} Вычислить время распада нейтрона: $n \to pe^-\bar{\nu}_e$

Задача. 26. * Вычислить пирину дВухчастичного распада Z -бозона на нейтриНО : $Z \to \nu\bar{\nu}$

Задача. 27. ^{C} В ведушем порядке теории возмушений КХД вычислить сечение $\bar{q}q \to \bar{c}c$

Задача. В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение рождения очарованных кварков в глюон-глюоннном слиянии: g g cc. Рассмотреть синглетный и октетный по цвету вклады в сечение.

Список литературы