

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Юрий Голубев  
yura.winter@gmail.com

4 октября 2020 г.

## Аннотация

квантовая теория поля

## Содержание

Предисловие	1
I Первое задание	2
1 упражнения	2
2 задачи	2
II Второе задание	5
3 упражнения	5
4 задачи	5
Список литературы	6

## Предисловие

тренируемся, практикуемся

## Часть I

# Первое задание

## 1 упражнения

### Упражнение. 1

Рассмотреть вещественный 4-вектор в представлении группы Лоренца  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

### Упражнение. 2

Доказать равенства

$$\begin{aligned}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^\alpha_\beta &= 2g^{\mu\nu} \delta^\alpha_\beta \\ (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} &= 2g^{\mu\nu} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\end{aligned}$$

### Упражнение. 3

Доказать равенства

$$\begin{aligned}\text{tr} \{ \bar{\sigma}_{\lambda\rho} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \} &= \frac{1}{2} \{ \delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda \delta^\mu_\rho \} - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \\ \text{tr} \{ \sigma_{\lambda\rho} \sigma^{\mu\nu} \} &= \frac{1}{2} \{ \delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda \delta^\mu_\rho \} + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\end{aligned}$$

### Упражнение. 4

Показать, что величины

$$\theta \sigma^\mu \bar{\chi} = \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad \text{и} \quad \bar{\theta} \bar{\sigma}^\mu \chi = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \chi_\alpha$$

### Упражнение. 5

Доказать, что  $(\theta_\alpha)^\dagger = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$  и  $(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^\dagger = \chi^\alpha$ .

### Упражнение. 5

Покажите, что представления группы Лоренца со спином  $s = 1 : (1, 0)$  и  $(0, 1)$  отвечают самодуальным и антисамодуальным тензорным полям второго ранга в пространстве-времени Минковского, т.е. при определении поля, дуального к  $B_{\mu\nu}$ , как

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} B_{\mu'\nu'}$$

имеют место соотношения самодуальности и антисамодуальности в пространстве-времени Минковского:

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \pm i B^{\mu\nu}$$

[Hint: При выводе учесть, что представления  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  — это бесследовые матрицы в индексах с точками и без точек.]

### Упражнение. 7

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского имеет вид

$$W^2 = -\frac{1}{2} \{ p^2 S^2 - 2p_\nu p^\mu S_{\mu\lambda} S^{\nu\lambda} \}$$

## 2 задачи

### Задача. 1.<sup>C</sup>

Доказать, что компоненты псевдовектора Паули–Любанского для безмассовых полей равны

$$W_0 = \hbar \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}, \quad W^\alpha = \hbar \{p_0 \mathbf{s}^\alpha \mp i(\mathbf{p} \times \mathbf{s})^\alpha\}$$

### Задача. 2.<sup>C</sup>

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули–Любанского для безмассовых полей имеет вид

$$W^2 = -4p_0^2 \hbar^2 \left\{ \partial^+ \cdot \partial^- - \frac{1}{p_0^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{j}^+) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{j}^-) - \frac{i}{p_0} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{J}^+ \times \mathbf{j}^-) \right\}$$

### Задача. 3.<sup>C</sup>

Найти поток частиц с релятивистской нормировкой состояний

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = 2\epsilon(\mathbf{k})(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

### Задача. 4.<sup>C</sup>

Показать, что для свободного комплексного скалярного поля электрический заряд выражается через лоренц-инвариантные амплитуды  $a(\mathbf{k})$  и  $a_c(\mathbf{k})$  в виде

$$Q = \int d^3r j^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} e \{a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - a_c^*(\mathbf{k})a_c(\mathbf{k})\}$$

### Задача. 5

Для решения в виде плоской монохроматической волны для скалярного поля

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{\mp i k x}$$

найти, что компоненты тензора энергии-импульса

$$T_0^0 \mapsto k_0, \quad T_0^\alpha \mapsto \mathbf{k}$$

### Задача. 6

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{\mp i k x}$$

Найти, ЧТО КОМПОНЕНТЫ ТОКА

$$j^0 \mapsto \pm e, \quad j^\alpha \mapsto \pm e \mathbf{k}$$

**Задача. 7.<sup>C</sup>** Какой вид имеет тензор энергии-импульса релятивистски инвариантного вакуума?

### Задача. 8

Для правого вейлевского спинора покажите, что из уравнения движения следует тождество

$$\frac{1}{\hbar} \mathbf{W} \bar{\chi} = \frac{1}{2} \mathbf{p} \bar{\chi}$$

**Задача. 9**

Показать, что если

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \bar{\chi}(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}| \bar{\chi}(\mathbf{p}),$$

то спинор

$$\chi_{cp}(-\mathbf{p}) = -i\sigma_2 \bar{\chi}^*(\mathbf{p})$$

удовлетворяет уравнению

$$-\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_{cp}(-\mathbf{p}) = |\mathbf{p}| \chi_{cp}(-\mathbf{p})$$

**Задача. 10.**

Вычислить гамильтониан правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод. 11.С Вычислить заряд правого вейлевского

**Задача.** Вычислить заряд правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

**Задача. 12**

Показать, что проекторы на состояния с заданной проекцией спина частицы на вектор поляризации имеют вид

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (1 + \lambda \gamma_5 \not{\epsilon})$$

а для античастиц -

$$P_{\pm}^c = \frac{1}{2} (1 - \lambda \gamma_5 \not{\epsilon})$$

НОГО 4 -имПульсу  $p$  :

$$\lambda = \pm 1, \quad \epsilon^2 = -1, \quad \epsilon \cdot p = 0$$

**Задача. 13.**<sup>C</sup> Вычислить сумму по поляризациям дираковских частиц и античастиц:

$$\Pi(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\lambda}(\mathbf{p}) = \not{p} + mc, \quad \Pi^c(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} v_{\lambda}(\mathbf{p}) \bar{v}_{\lambda}(\mathbf{p}) = \not{p} - mc$$

**Задача. 14** Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для биспинора Дирака с юкавским взаимодействием с вещественным скалярным полем. Записать правила Фейнмана.

**Задача. 15.**<sup>C</sup> Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для скалярной электродинамики. Записать правила Фейнмана.

**Задача. 16.**<sup>C</sup> Вывести уравнения ШВИНГера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для массивного скалярНОГО ПОЛЯ с самодействием  $\lambda\phi^4/4!$ . Записать правила Фейнмана.

**Задача. 17.**<sup>C</sup> Доказать, ЧТО число петель  $N_L$  В ДИАГРАММЕ с  $N_V$  степенями Действия взаимодействия  $V$ , Числом связных компонент диаграммы  $N_c$  и числом внутренних линий  $N_I$  ОПределяется соотношением

$$N_L = N_I + N_c - N_V$$

Привести примеры одно- и ДВухпетлевых диаграмм с одно- и ДВухсвязными компонентами в теории с взаимодействием  $V \sim \lambda\phi^4$

**Задача. 18.**<sup>C</sup> Доказать, что разложение связных Диаграмм по петЛЯм совпадает с разложением по постоянной Планка  $\hbar$

## Часть II

# Второе задание

### 3 упражнения

**Упражнение. 8.** <sup>C</sup> Пользуясь антикоммутатором, ВычислИТЬ следы произведений Гамма-матриц Дирака:

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu), \quad \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu), \quad \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu), \quad \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^{\mu'}) \\ & \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^{\mu'}), \quad \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'}), \quad \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'}) \end{aligned}$$

**Упражнение. 9.** <sup>C</sup> Доказать, что след нечетного числа гамма-матриц Дирака равен Нулю, а Для четного  $n$  Имеет место соотношение редукции

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = g^{\mu_1 \mu_2} \text{tr}(\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}) + g^{\mu_1 \mu_3} \text{tr}(\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}) + \dots$$

**Упражнение.** Упростить Выражения

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu, \quad \gamma_\mu \not{p} \not{k} \gamma^\mu$$

**Упражнение.** Рассмотреть тождества Фирца для гамма-матриц Дирака.

### 4 задачи

**Задача. 19.** <sup>C</sup> В ведущем порядке теории возмущений КВантовой электродинамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон-Позитронной аннигиляции в мюон-антимюон:  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

**Задача. 20.** <sup>C</sup> В ведущем порядке теории возмущений Квантовой электродинамики Вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон- скалярными частицами:  $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ . Сравнить распределение по угЛам в системе центра масс с распределением в случае образования МНООНОВ

**Задача. 21.** <sup>C</sup> В ведущем порядке теории возмущений КВантовой электродинамики Вычислить дифференциальное сечение комптоновского рассеяния фотона на электроном:  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

**Задача. 22.** <sup>C</sup> Вычислить сечение рассеяния электронов на мюонном нейтрино в модели с четырёхфермионном взаимодействием:  $e^- \nu_\mu \rightarrow \nu_e \mu^-$

**Задача. 23.** <sup>C</sup> Вычислить ширину трёхчастичного распада мюона на электрон и нейтрино:  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

**Задача. 24.** <sup>C</sup> Вычислить время дВухчастичного распада заряженного пиона:  $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ . Сравнить ширину распада пиона на электрон и мюон.

**Задача. 25.** <sup>C</sup> Вычислить время распада нейтрона:  $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$

**Задача. 26.** \* Вычислить ширину дВухчастичного распада  $Z$ -бозона на нейтриНО:  $Z \rightarrow \nu \bar{\nu}$

**Задача. 27.** <sup>C</sup> В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение  $\bar{q} q \rightarrow \bar{c} c$

**Задача.** В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение рождения очарованных кварков в глюон-глюонном слиянии:  $g g \rightarrow c \bar{c}$ . Рассмотреть синглетный и октетный по цвету вклады в сечение.

## Список литературы