квантовая теория поля

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

17 сентября 2020 г.

Аннотация

квантовая теория поля

Содержание

Предисловие

тренируемся, практикуемся

Часть I
Первое задание

1 упражнения

Задача 1.1. *1*
Рассмотреть вещественный 4-вектор в представлении группы Лоренца $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Задача 1.2. *2*
Доказать равенства

$$\begin{aligned}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\beta^\alpha = 2g^{\mu\nu}\delta_\beta^\alpha \\ (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = 2g^{\mu\nu}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}\end{aligned}$$

Задача 1.3. *3*
Доказать равенства

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta_\lambda^\mu\delta_\rho^\nu - \delta_\lambda^\nu\delta_\rho^\mu\right\} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\mu\nu} \\ \operatorname{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta_\lambda^\mu\delta_\rho^\nu - \delta_\lambda^\nu\delta_\rho^\mu\right\} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Задача 1.4. *4*
Показать, Что величины

$$\theta\sigma^\mu\bar{\chi} = \theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \qquad \text{и} \qquad \bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\chi = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha$$

Задача 1.5. *5*
Доказать, что $(\theta_\alpha)^\dagger = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ *и* $\left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right)^\dagger = \chi^\alpha$

Задача 1.6. 6* *Покажкте, что представления группы Лоренца со спИном* $s = 1$: *ПОЛЯМ ВТорого ранга в пространстве-времени МинКОВСКОГО, т.е. При ОПределении поля, Дуального к* $B_{\mu\nu}$, *КаК*

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu\mu'\nu'}B_{\mu'\nu'}$$

Задача 1.7. *ИМеют место соотноШения самодуальНОСТи и антисамодуальНОСТИ В Пространстве-времени МИНКОВСКОГО:*

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \pm\mathrm{i}B^{\mu\nu}$$

[Hint: При выводе учесть, что представления (1,0) и $(0, 1)-$ *это бесследовые матрицы в индексах с точками и без точек.]*

Задача 1.8. *Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского имеет вид*

$$W^2 = -\frac{1}{2}\left\{p^2S^2 - 2p_\nu p^\mu S_{\mu\lambda}S^{\nu\lambda}\right\}$$

2 задачи

Задача 2.1. *1*
безМассовых полей равНы

$$W_0 = \hbar\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s}, \quad W^\alpha = \hbar\left\{p_0\boldsymbol{s}^\alpha \mp \mathrm{i}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s})^\alpha\right\}$$

Задача 2.2. **2**.^{C} *Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского для безмассовых полей имеет вид*

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2\left\{\partial^+ \cdot \partial^- - \frac{1}{p_0^2}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j}^+\right)\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j}^-\right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0}\boldsymbol{p}\cdot\left(\boldsymbol{J}^+\times\boldsymbol{j}^-\right)\right\}$$

Задача 2.3. **3**.^{C} *Найти поток частиц с релятивистской нормировкой состояний*

$$\langle\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k}'\rangle = 2\epsilon(\boldsymbol{k})(2\pi)^3\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)$$

Задача 2.4. *4.* ^{C} *Показать, что Для свободного комплексного скалярного поля электрический заряд выражается через лоренц-инвариантные амплитуды* $a(\boldsymbol{k})$ *и* $a_c(\boldsymbol{k})$ *В ВИДе*

$$Q = \int \mathrm{d}^3 r j^0 = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} e\left\{a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - a_c^*(\boldsymbol{k})a_c(\boldsymbol{k})\right\}$$

Задача 2.5. *ЛЯрного ПОЛЯ*

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kx}$$

НайтИ, ЧТО КОМПОНенты тензора энрегии-импульса

$$T_0^0 \mapsto k_0, \quad T_0^\alpha \mapsto \boldsymbol{k}$$

Задача 2.6. *ЛЯрНОГО ПОЛЯ*

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kx}$$

Найти, ЧТО КОМПОНенТы ТОКа

$$j^0 \mapsto \pm e, \quad j^\alpha \mapsto \pm e\boldsymbol{k}$$

Задача 2.7. **7**.^{C} *Какой вид имеет тензор энергии-импульса релятивистски инВариантного вакуума?*

Задача 2.8. **8**.^{C} *Для правого вейлевского спинора покажите, что из уравнения ДВИЖения следует тожддество*

$$\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{W}\bar{\chi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\bar{\chi}$$

Задача 2.9. **9**.^{C} *Показать, что если*

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\bar{\chi}(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\bar{\chi}(\boldsymbol{p}),$$

то спинор

$$\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = -\mathrm{i}\sigma_2\bar{\chi}^*(\boldsymbol{p})$$

удовлетворяет уравнению

$$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\chi_{cp}(-\boldsymbol{p})$$

Задача 2.10. *10.* ^{C} *Вычислить гамильтониан правого вейлевского спИнора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод. 11.С Вычислить заряд правого вейлевского*

Задача 2.11. *Вычислить заряд правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.*

Задача 2.12. *12.* ^{C} *Показать, что проекторы на состояния с заданной проекцией спИна частицы на вектор поляризации имеют вид*

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 + \lambda\gamma_5 \notin\right)$$

а ДЛЯ аНТИчастиЩ -

$$P_{\pm}^{c} = \frac{1}{2}\left(1 - \lambda\gamma_5 \notin\right)$$

НОГО 4 -имПульсу p :

$$\lambda = \pm 1, \quad \epsilon^2 = -1, \quad \epsilon \cdot p = 0$$

Задача 2.13. 13.^{C} *Вычислить сумму по поляризациям дираковских частиц и античастиц:*

$$\Pi(\boldsymbol{p}) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\boldsymbol{p})\bar{u}_{\lambda}(\boldsymbol{p}) = \not{p} + mc, \quad \Pi^c(\boldsymbol{p}) = \sum_{\lambda} v_{\lambda}(\boldsymbol{p})\bar{v}_{\lambda}(\boldsymbol{p}) = \not{p} - mc$$

Задача 2.14. *14 Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для биспинора Дирака с юкавским взаимодействием с вещественным скалярным полем. Записать правила Фейнмана.*

Задача 2.15. *15.С Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для скалярной электродинамики. Записать правила Фейнмана.*

Задача 2.16. *16.* ^{C} *Вывести уравнения IIIВИНГера-Дайсона и графическое представЛение для дВухточечной вершинной функции для массивного скалярНОГО ПОЛя с самодействием* $\lambda\phi^4/4!$. *Записать правила Фейнмана.*

Задача 2.17. *17.* ^{C} *Доказать, ЧТО число петель* N_L *В ДИаграмме с* N_V *степенями Действия взаимодействия* V, *Числом связных компонент диаграммы* N_c *и числом внутренних линий* N_I *ОПределяется соотношением*

$$N_L = N_I + N_c - N_V$$

Привести примеры одно- и ДВухпетлевых диаграмм с одно- и ДВухсвяЗНыми компонентами в теории с взаимодействием $V \sim \lambda\phi^4$

Задача 2.18. *18.* ^{C} *Доказать, что разложение связных Диаграмм по петЛЯм совПадает с разложением по постоянной Планка* $\hbar$

Часть II
Второе задание

3 упражнения

Задача 3.1. *8. ^{C} Пользуясь антикоммутатором, ВычислИТъ следы произведений Гамма-матриц Дирака:*

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu), \quad \operatorname{tr}(\gamma_5\gamma^\mu), \quad \operatorname{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu), \quad \operatorname{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\right)$$
$$\operatorname{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\right), \quad \operatorname{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right), \quad \operatorname{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right)$$

Задача 3.2. *9. ^{C} Доказать, что след нечетного числа гамма-матриц Дирака равен НулЮ, а ДЛя четного n Имеет место соотношение редукции*

$$\operatorname{tr}(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}) = g^{\mu_1\mu_2}\operatorname{tr}(\gamma^{\mu_3}\ldots\gamma^{\mu_n}) + g^{\mu_1\mu_3}\operatorname{tr}(\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\ldots\gamma^{\mu_n}) + \ldots$$

Задача 3.3. *Упростить Выражения*

$$\gamma_\mu \not{p}\gamma^\mu, \quad \gamma_\mu \not{p} \not{k}\gamma^\mu$$

Задача 3.4. *Рассмотреть тождества Фирца для гамма-матриц Дирака.*

4 задачи

Задача 4.1. 19.^{C} *В ведушем порядке теории возмушений КВантовой электродиНамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткронПОЗитронной аннигиляции в мюон-антимюон: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$*

Задача 4.2. 20.^{C} *В ведушем порядке теории возмушений Квантовой электродиНами-Ки Вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон- скалярными частицами: $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. Сравнить распределение по уГЛам в системе центра масс с распределением в случае образования* МНООНОВ

Задача 4.3. 21.^{C} *В ведушем порядке теории возмушений КВантовой электродинаМИКи Вычислить дифференциальное сечение комптоновского рассеяния фотона на электроне: $\gamma e^- \to \gamma e^-$*

Задача 4.4. 22.^{C} *Вычислить сечение рассеяния электронов на мюонном нейтрино в модели с четырёхфермионном взаимодействием: $e^-\nu_\mu \to \nu_e\mu^-$*

Задача 4.5. *23. ^{C} Вычислить ширину трёхчастичного распада мюона на электрон и нейтрино: $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$*

Задача 4.6. 24.^{C} *Вычислить время дВухчастичного распада заряженного пиона: $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$. Сравнить ширину распада пиона на электрон и мюон.*

Задача 4.7. 25.^{C} *Вычислить время распада нейтрона: $n \to pe^-\bar{\nu}_e$*

Задача 4.8. *26. * Вычислить пирину дВухчастичного распада Z -бозона на нейтри*НО : $Z \to \nu\bar{\nu}$

Задача 4.9. *27. ^{C} В ведушем порядке теории возмушений КХД вычислить сечение $\bar{q}q \to \bar{c}c$*

Задача 4.10. *В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение рождения очарованных кварков в глюон-глюоннном слиянии: g g cc. Рассмотреть синглетный и октетный по цвету вклады в сечение.*

Список литературы