Задание по квантовой теории поля

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

8 октября 2020 г.

Аннотация

квантовая теория поля

Содержание

Предисловие

тренируемся, практикуемся

Часть I

Первое задание

1 упражнения

Упражнение. 1

Рассмотреть вещественный 4-вектор в представлении группы Лоренца $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

!!! потом разберу, пока просто из киселева выписки.

4-вектор. Произвольная эрмитово самосопряженная величина V в представлении $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, т.е. несушая пару индексов $\{\alpha\dot{\alpha}\}$, может быть разложена по базису матриц σ^n :

$$(\hat{V})_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}} V_n$$

причем

$$V^m = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \bar{\sigma}^m \hat{V} \right\}$$

так как, очеви Дно,

$$\operatorname{tr} \left\{ \bar{\sigma}^m \sigma^n \right\} = 2g^{mn}$$

CorJacно установленным нами законами преобразования верхних и нижних спинорных инДексов, преобразования группы $SL(2, \mathbb{C})$ переводят $\hat{V}$ в эрмитову величину

$$\hat{V}' = \Lambda_- \hat{V} \Lambda_-^\dagger$$

Которая опять может быть разложена по исходному базису:

$$V'm = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \bar{\sigma}^m \hat{V}' \right\}$$

Заметим, что

$$\det \hat{V}' = \det \left\{ \Lambda_- \hat{V} \Lambda_-^\dagger \right\} = |\det \Lambda_-|^2 \det \hat{V} = \det \hat{V}$$

П ри этом

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V_0 + V_3 & V_1 - iV_2 \\ V_1 + iV_2 & V_0 - V_3 \end{pmatrix}$$

а pabenctBo детерминантов (3.61) означает, что преобразование сохраняет лоренцИн вариантную длину 4-вектора, т.е. представляет собой элемент группы Лоренца на 4− векторах. Это представление является Двузначным, так как матрицы Λ_- и $-\Lambda_-$ приводят К иденти чным преобразованиям 4-вектора. В случае инфинитезималь ных преобразований $\omega^{kl} \to 0$

$$\Lambda_- = \not{1} - \frac{i}{2} \sigma_{kl} \omega^{kl}, \quad \Lambda_-^\dagger = 1 + \frac{i}{2} \bar{\sigma}_{kl} \omega^{kl}$$

находим, что

$$V'm = V^m + \frac{i}{4} \operatorname{tr} \left\{ \bar{\sigma}_{kl} \bar{\sigma}^m \sigma^n - \sigma_{kl} \sigma^n \sigma^m \right\} \omega^{kl} V_n$$

Упражнение. 2

Доказать равенства

$$(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\beta^\alpha = 2g^{\mu\nu} \delta_\beta^\alpha$$
$$(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = 2g^{\mu\nu} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$$

По определению $\sigma^\mu = (1, \sigma^i), \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$.

Посчитаем отдельно

$$(\sigma^0\bar{\sigma}^i + \sigma^i\bar{\sigma}^0) = (-\sigma^i + \sigma^i) = 0$$
$$(\sigma^i\bar{\sigma}^j + \sigma^j\bar{\sigma}^i) = -(\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) = -2\delta^{ij}$$

Поэтому

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^\alpha_\beta = 2g^{\mu\nu}\delta^\alpha_\beta$$

?????????

Что с точечным индексом? в чем его особенность?

Упражнение. 3

Доказать равенства

$$\operatorname{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda\delta^\mu_\rho\right\} - \tfrac{i}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$
$$\operatorname{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda\delta^\mu_\rho\right\} + \tfrac{i}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

По определению

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\bar{\sigma}^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\bar{\sigma^\mu}\sigma^\nu - \bar{\sigma^\nu}\sigma^\mu)$$

Посмотрим, как можно их расписать через компоненты.

$$\sigma^{00} = 0$$
$$\sigma^{0i} = -\sigma^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\sigma^0(-\sigma^i) - \sigma^i\sigma^0) = -\tfrac{i}{2}\sigma^i$$
$$\bar{\sigma^{0i}} = \tfrac{i}{2}\sigma^i$$
$$\bar{\sigma}^{ij} = \tfrac{i}{4}(-\sigma^i\sigma^j - (-\sigma^j)\sigma^i) = -\tfrac{i}{4}\cdot 2i\varepsilon_{ijk}\sigma^k = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k$$
$$\bar{\sigma}^{ij} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k$$

В последних равенствах использовалось соотношение на матрицы Паули:

$$\sigma^i\sigma^j = i\varepsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij}\sigma^0$$

Таким образом, исходное уравнение для пространственных индексов $\operatorname{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\}$ можно переписать как:

$$\operatorname{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{kl}\right\} = \operatorname{tr}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijm}\sigma^m\frac{1}{2}\varepsilon_{kln}\sigma^n\right\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}\operatorname{tr}\left\{\sigma_m\sigma^n\right\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}\operatorname{tr}\left\{2\delta^{mn}\right\}$$

И дальше просто преобразуем до конца:

$$\operatorname{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{kl}\right\} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln} = 1\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

А если есть временной индекс, то

$$\operatorname{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{k0}\right\} = \operatorname{tr}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^n\frac{i}{2}\sigma^k\right\} = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk0} = \frac{i}{2}\varepsilon^{k0}_{ij}$$

В последнем переходе показано как от трехмерного символа Леви-Чевиты перейти к четырехмерному. Также при подъеме пространственной части метрика домножилась на (-1), а при подъеме временной - на 1.

Осталось разобрать случай

$$\operatorname{tr}\left\{\sigma_{i0}\sigma^{k0}\right\} = -\left(\frac{i}{2}\right)^2\operatorname{tr}\left\{\sigma^i\sigma^k\right\} = \frac{1}{2}\delta_{ik} \equiv \frac{1}{2}[\delta^k_i\delta^0_0 - \delta^0_i\delta^k_0]$$

Собирая все вместе, получаем

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

Теперь то же самое для $\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\}$
????
действуя аналогично, получаем:
..

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

Упражнение. 4

Показать, что величины

$$\theta\sigma^{\mu}\bar{\chi} = \theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad \text{и} \quad \bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\chi = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^{\mu}\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_{\alpha}$$

ведут себя так же, как 4-векторы.

То есть нужно доказать, что

Упражнение. 5

Доказать, что $(\theta_{\alpha})^{\dagger} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ и $\left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right)^{\dagger} = \chi^{\alpha}$.

Напомним, что по определению $(\theta_{\alpha})^{\dagger} = (\theta_{\dot{\alpha}})^{*}$, то есть мы совершаем комплексное сопряжение над спинором, а также заменяем точечный индекс на неточечный. (????)

Совершим преобразования поднятия индексов и перехода из сопряженного спинора к обычному над $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$:

$$\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}[i\sigma_2^{\alpha\dot{\beta}}\theta_{\alpha}]^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \theta^{*}_{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\theta^{*}_{\alpha} = (\theta_{\alpha})^{\dagger}$$

Однако то, что компоненты равны не значит, что это один и тот же объект, потому что они могут преобразовываться по-разному. Поэтому проверим, что они преобразуются одинаково:

$$(\theta')^{\dagger}_{\alpha} = ((\Lambda_{-})^{\beta}_{\alpha}\theta_{\beta})^{\dagger} = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\right)^{\beta}_{\alpha}\theta_{\beta}$$

????

Теперь докажем что $\left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right)^{\dagger} = \chi^{\alpha}$

Упражнение. 5

Покажите, что представления группы Лоренца со спином $s = 1 : (1, 0)$ и $(0, 1)$ отвечают самодуальным и антисамодуальным тензорным полям второго ранга в пространстве-времени Минковского, т.е. при определении поля, дуального к $B_{\mu\nu}$, как

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu\mu'\nu'}B_{\mu'\nu'}$$

имеют место соотношения самодуальности и антисамодуальности в пространстве-времени Минковского:

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \pm\mathrm{i}B^{\mu\nu}$$

[Hint: При выводе учесть, что представления (1,0) и $(0, 1)-$ это бесследовые матрицы в индексах с точками и без точек.]

Упражнение. 7

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского имеет вид

$$W^2 = -\frac{1}{2}\left\{p^2S^2 - 2p_{\nu}p^{\mu}S_{\mu\lambda}S^{\nu\lambda}\right\}$$

2 задачи

Задача. 1.[C]

Доказать, что компоненты псевдовектора Паули–Любанского для безмассовых полей равны

$$W_0 = \hbar \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}, \quad W^\alpha = \hbar \left\{ p_0 \boldsymbol{s}^\alpha \mp \mathrm{i} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s})^\alpha \right\}$$

При этом, конечно, на этих полях (т.е. при действии операторов на поля) проекция спина на ось импульса или, как говорят, спиральность имеет значения

$$\frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{j}^\pm}{p_0} = \partial_3^\pm = \pm \lambda_\pm$$

Причем на физических полях $W^2 = 0$ Таким образом, среди безмассовых полей со спином базис составляют так назы ваемые К иральные поля полуцелого спина и поляризованные поля целого спина: праеble поля с положительной киральностью и спиральностью $\mathfrak{s} = \lambda_+$

$$\boldsymbol{J}^- \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{K} = -\mathrm{i} \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{J}^+ = \boldsymbol{s}$$

левъе поля с отрицательной киральностью и спиральностью $\mathfrak{s} = -\lambda_-$

$$\boldsymbol{J}^+ \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{K} = \mathrm{i} \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{J}^- = \boldsymbol{s}$$

ванны х полей. С учетом

$$S_{\beta\gamma} = \hbar \epsilon_{\beta\gamma\rho} s^\rho$$

нулевая компонента

$$W_0 = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} p_\alpha S_{\beta\gamma} = \hbar p \cdot s = \pm p_0 \hbar \lambda_\pm$$

При вычислении пространственной компоненты необходимо использовать то, что

$$\frac{1}{\hbar} S_{0\gamma} = \mathcal{K}^\gamma = \mp \mathrm{i} s^\gamma$$

откуда

$$W^\alpha = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\alpha 0 \beta\gamma} p_0 S_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} 2 \hat{\epsilon}^{\alpha\beta 0 \gamma} p_\beta S_{0\gamma} = \hbar \left\{ p_0 s^\alpha \mp \mathrm{i} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s})^\alpha \right\}$$

Задача. 2.[C]

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского для безмассовых полей имеет вид

$$W^2 = -4 p_0^2 \hbar^2 \left\{ \partial^+ \cdot \partial^- - \frac{1}{p_0^2} \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\jmath}^+ \right) \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\jmath}^- \right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0} \boldsymbol{p} \cdot \left(\boldsymbol{J}^+ \times \boldsymbol{j}^- \right) \right\}$$

Псевдовектор Паули-Любанского определяется как

$$W^m = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{mnkl} p_n S_{kl}$$

При $p^2 = 0$

$$\begin{aligned}
W^2 &= p_n p^k S_{kl} S^{nl} = p_n p^k S_{k0} S^{n0} + p_n p^k S_{k\alpha} S^{n\alpha} \\
&= -p^\alpha p^\beta S_{0\alpha} S^{0\beta} + p_0^2 S^{0\alpha} S_{0\alpha} - p^\gamma p^\beta S^{\gamma\alpha} S_{\beta\alpha} + p_0 p^\beta \left(S_{\beta\alpha} S^{0\alpha} - S_{0\alpha} S^{\beta\alpha} \right) \\
&= \hbar^2 \left\{ (\boldsymbol{p} \cdot \mathcal{K})^2 - p_0^2 \mathcal{K}^2 - (\boldsymbol{p} \times s)^2 + p_0 \boldsymbol{p} \cdot \{ (\boldsymbol{s} \times \mathcal{K}) - (\mathcal{K} \times \boldsymbol{s}) \} \right\}
\end{aligned}$$

Раскрывая квадрат векторного произведения, находим

$$\frac{1}{\hbar^2} W^2 = -p_0^2 \left(s^2 + \mathcal{K}^2 \right) + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s})^2 + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}})^2 + p_0 \boldsymbol{p} \cdot \{ (\boldsymbol{s} \times \mathcal{K}) - (\mathcal{K} \times \boldsymbol{s}) \}$$

Выражая генераторы спина и бустов через эрмитовы векторы $\mathcal{J}^{+}$ и $\mathcal{J}^{-}$, получаем

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2 \left\{ \boldsymbol{j}^{+} \cdot \boldsymbol{j}^{-} - \frac{1}{p_0^2} \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{j}^{+}\right) \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{j}^{-}\right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0} \boldsymbol{p} \cdot \left(\boldsymbol{j}^{+} \times \boldsymbol{j}^{-}\right) \right\}$$

Выберем ось проектирования спина вдоль пространственной компоненты импульса: $\boldsymbol{p}$ $(0, 0, p_0)$, откуда $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{J} = p_0 \mathcal{J}_3$, тогда

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2 \left\{ \partial_1^{+}\partial_1^{-} + \partial_2^{+}\partial_2^{-} - \mathrm{i}\left(\partial_1^{+}\partial_2^{-} - \partial_2^{+}\partial_1^{-}\right) \right\}$$

или

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2 \left\{ \partial_1^{+} + \mathrm{i}\partial_2^{+} \right\} \left\{ \partial_1^{-} - \mathrm{i}\partial_2^{-} \right\} = -4p_0^2\hbar^2 \partial_{+}^{+}\partial_{-}^{-}$$

почти доделал, осталось досмотреть мелочи и все.

Задача. 3.^{C}

Найти поток частиц с релятивистской нормировкой состояний

$$\langle \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k}' \rangle = 2\epsilon(\boldsymbol{k})(2\pi)^3 \delta\left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'\right)$$

Задача. 4.^{C}

Показать, что для свободного комплексного скалярного поля электрический заряд выражается через лоренц-инвариантные амплитуды $a(\boldsymbol{k})$ и $a_c(\boldsymbol{k})$ в виде

$$Q = \int \mathrm{d}^3 r j^0 = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} e \left\{ a^*(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) - a_c^*(\boldsymbol{k}) a_c(\boldsymbol{k}) \right\}$$

Задача. 5

Для решения в виде плоской монохроматической волны для скалярного поля

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} k x}$$

найти, что компоненты тензора энергии-импульса

$$T_0^0 \mapsto k_0, \quad T_0^\alpha \mapsto \boldsymbol{k}$$

Тензор энергии-импульса определяется как

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi} \partial_\nu \varphi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^*} \partial_\nu \varphi^* - \delta_\nu^\mu L$$

Поэтому в случае скалярного поля, когда $L = \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*$
$L = \frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi_0)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi_0^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 - \frac{m^2}{2}$
и дальше там мы подставляем и вытаксиваем компоненты ТЭИ.

Задача. 6

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} k x}$$

Найти, что компоненты тока

$$j^0 \mapsto \pm e, \quad j^\alpha \mapsto \pm e \boldsymbol{k}$$

Задача. 7.^{C} Какой вид имеет тензор энергии-импульса релятивистски инВариантного вакуума?

Задача. 8

Для правого вейлевского спинора покажите, что из уравнения движения следует тождество

$$\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{W}\bar{\chi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\bar{\chi}$$

Задача. 9

Показать, что если

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\bar{\chi}(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\bar{\chi}(\boldsymbol{p}),$$

то спинор

$$\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = -\mathrm{i}\sigma_2\bar{\chi}^*(\boldsymbol{p})$$

удовлетворяет уравнению

$$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\chi_{cp}(-\boldsymbol{p})$$

Задача. 10.

Вычислить гамильтониан правого вейлевского спИнора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

Задача. 11.C

Вычислить заряд правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

Задача. 12

Показать, что проекторы на состояния с заданной проекцией спина частицы на вектор поляризации имеют вид

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1+\lambda\gamma_5 \not\in\right)$$

а для античастиц -

$$P^c_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1-\lambda\gamma_5 \not\in\right)$$

где λ — направление спина вдоль вектора поляризации ε^μ, ортогонального 4-импульсу p:

$$\lambda = \pm 1, \quad \epsilon^2 = -1, \quad \epsilon\cdot p = 0$$

Задача. 13.^{C} Вычислить сумму по поляризациям дираковских частиц и античастиц:

$$\Pi(\boldsymbol{p}) = \sum_\lambda u_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{u}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not p + mc, \quad \Pi^c(\boldsymbol{p}) = \sum_\lambda v_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{v}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not p - mc$$

Задача. 14 Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для биспинора Дирака с юкавским взаимодействием с вещественным скалярным полем. Записать правила Фейнмана.

Задача. 15.С Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для скалярной электродинамики. Записать правила Фейнмана.

Задача. 16. ^{C} Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для массивного скалярного поля с самодействием $\lambda\phi^4/4!$. Записать правила Фейнмана.

Задача. 17. ^{C} Доказать, ЧТО число петель N_L В ДИаграмме с N_V степенями Действия взаимодействия V, Числом связных компонент диаграммы N_c и числом внутренних линий N_I ОПределяется соотношением

$$N_L = N_I + N_c - N_V$$

Привести примеры одно- и двухпетлевых диаграмм с одно- и двухсвязными компонентами в теории с взаимодействием $V \sim \lambda\phi^4$

Задача. 18. ^{C} Доказать, что разложение связных Диаграмм по петлям совпадает с разложением по постоянной Планка $\hbar$

Часть II
Второе задание

3 упражнения

Упражнение. 8.^{C}

Пользуясь антикоммутатором, вычислить следы произведений Гамма-матриц Дирака:

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\right)$$
$$\mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right)$$

Упражнение. 9. ^{C}

Доказать, что след нечетного числа гамма-матриц Дирака равен нулю, а для четного n имеет место соотношение редукции

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\right) = g^{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_3}\ldots\gamma^{\mu_n}\right) + g^{\mu_1\mu_3}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\ldots\gamma^{\mu_n}\right) + \ldots$$

Упражнение. 10.

Упростить выражения

$$\gamma_\mu \not{p}\gamma^\mu, \quad \gamma_\mu \not{p} \not{k}\gamma^\mu$$

Упражнение. 11

Рассмотреть тождества Фирца для гамма-матриц Дирака.

4 задачи

Задача. 19.^{C}

В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон-позитронной аннигиляции в мюон-антимюон: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Задача. 20.^{C}

В ведущем порядке теории возмущений квантовой электродинамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон-позитронной аннигиляции в пион-антипион, считая пионы точечными скалярными частицами: $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. Сравнить распределение по углами в системе центра масс с распределением в случае образования мюонов.

Задача. 21.^{C}

В ведушем порядке теории возмушений КВантовой электродинаМИКи Вычислить дифференциальное сечение комптоновского рассеяния фотона на электроне: $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Задача. 22.^{C} Вычислить сечение рассеяния электронов на мюонном нейтрино в модели с четырёхфермионном взаимодействием: $e^-\nu_\mu \to \nu_e\mu^-$

Задача. 23. ^{C} Вычислить ширину трёхчастичного распада мюона на электрон и нейтрино: $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$

Задача. 24.^{C} Вычислить время дВухчастичного распада заряженного пиона: $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$. Сравнить ширину распада пиона на электрон и мюон.

Задача. 25.^{C} Вычислить время распада нейтрона: $n \to pe^-\bar{\nu}_e$

Задача. 26. * Вычислить пирину дВухчастичного распада Z -бозона на нейтриНО : $Z \to \nu\bar{\nu}$

Задача. 27. ^{C} В ведушем порядке теории возмушений КХД вычислить сечение $\bar{q}q \to \bar{c}c$

Задача. В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение рождения очарованных кварков в глюон-глюоннном слиянии: g g cc. Рассмотреть синглетный и октетный по цвету вклады в сечение.

Список литературы