Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Статистическая физика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**

кафедра: **теоретической физики**
курс: 4
семестр: 7

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов
Экзамен – 7 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф.
А. В. Михеенков

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
23 мая 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
Ю. М. Белоусов

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

I. ТЕРМОДИНАМИКА

1.1. Замкнутые системы. Термодинамические величины. Температура. Термодинамическое равновесие. Энтропия. Неравновесная энтропия и второй закон термодинамики. Термодинамические тождества и неравенства. Принцип минимальности термодинамических потенциалов.

1.2. Термодинамические потенциалы в магнитном поле. Термодинамические флуктуации. Термодинамика фазовых переходов I рода.

II. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2.1. Макроскопические системы. Средние значения. Эргодическая гипотеза. Статистическая независимость и закон больших чисел. Принцип ослабления корреляций. Термодинамический предел. Число состояний, плотность числа состояний. Статистическая энтропия Больцмана. Функция распределения и матрица плотности. Уравнение Лиувилля. Распределение Гиббса (канонический ансамбль). Эквивалентность канонического и микроканонического распределений в термодинамическом пределе. Флуктуации энергии из распределения Гиббса. Статистическая сумма. Главная формула статистической физики ($F = -T\ln Z$). Энтропия Гиббса. Неравновесная (*информационная*) энтропия по Больцману и по Гиббсу. Теорема Нернста.

2.2. Представление чисел заполнения. Описание бозе- и ферми-газов в представлении чисел заполнения. Термодинамика излучения. Вторичное квантование колебаний решетки, фононы.

III. ИДЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

3.1. Больцмановский газ и вычисление его термодинамических величин.

3.2. Большой канонический ансамбль. Идеальный ферми-газ. Химический потенциал, давление и теплоемкость электронов в металле. Парамагнетизм Паули. Диамагнетизм Ландау. Эффект де Гааза–ван Альфена в 2D-металле. *Квантовый эффект Холла.*

3.3. Идеальный бозе-газ. Бозе-конденсация. Термодинамические величины.

3.4. Химический потенциал, давление и теплоёмкость черного излучения и твердого тела. Концепция квазичастиц.

IV. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

4.1. Фазовые переходы I и II рода. Изменение симметрии фазы. Параметр порядка в различных физических системах. Теория фазовых переходов II рода Ландау (теория среднего поля) в применении к ферромагнетику.

4.2. Флуктуационная теплоемкость. Критерий применимости теории Ландау. Критические индексы.

V. НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СВОЙСТВА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

4.1. Микроскопическая теория ферромагнетизма в приближении самосогласованного поля.

4.2. Микроскопическая теория сверхтекучести неидеального бозе-газа. Элементарные возбуждения Боголюбова. Критерий сверхтекучести Ландау. *Функция сверхтекучего состояния Хуанга.*

4.3. *Уравнение Гросса–Питаевского сверхтекучего состояния. Основное состояние в ловушке. «Гидродинамические уравнения» сверхтекучего бозе-газа и элементарные возбуждения.*

4.4. Микроскопическая теория сверхпроводимости БКШ.

4.5. Сверхпроводимость в магнитном поле. Эффект Мейсснера. *Сверхпроводники второго рода. Вихри Абрикосова. Квантование магнитного потока. Эффект Джозефсона.*

VI. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ et. al.

5.1. Теория плазменных колебаний в металле и горячей плазме.

5.2. Спиновые волны в приближении самосогласованного поля.

5.3. *Экситоны Френкеля и Мотта.*

5.4. *Поляроны и спиновые поляроны.*

5.5. Спиновые стекла. Модель Шеррингтона–Киркпатрика.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. – Москва : Физматлит, 2010.

2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. 2. – Москва : Физматлит, 2005.

3. *Исихара А.* Статистическая физика. – Москва : Мир, 1973.

4. *Максимов Л.А., Михеенков А.В., Полищук И.Я.* Лекции по статистической физике: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2011, 2015 (2-е изд.)

5. *Горелкин В. Н.* Методы теоретической физики. Ч. 2.: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

Дополнительная

1. *Беляев С.Т.* [и др.]. Теория конденсированного состояния: учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 1982.

2. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика – Новосибирск : изд-во НГУ, 2000, 2001.

3. *Зайцев Р.О.* Введение в современную статистическую физику. – Москва : ЛИБРОКОМ, 2016.

4. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. — Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2013.

5. *Хуанг К.* Статистическая механика. – Москва : Мир, 1966.

6. *Кубо Р.* Статистическая механика. – Москва : Мир, 1967.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

I. Основы статистики и термодинамики

1. Термодинамика

$$dE = TdS - PdV + \mu dN,$$

$$dW = TdS + VdP + \mu dN,$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN,$$

$$C_{V,P} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,P}.$$

$$d\Phi = -SdT + VdP + \mu dN,\ \Phi = \mu N;$$

$$d\Omega = -SdT - PdV - dN\mu,\ \Omega = -PV.$$

2. Термодинамические неравенства

$$C_V > 0; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0.$$

3. Флуктуации

$$W(\chi) \sim \exp\{S_{\text{полн.}}(\chi) - S_{\text{полн.}}(\overline{\chi})\} = e^{\delta F/T},$$

$$W \sim \exp\left\{-\frac{1}{2T}(\Delta S \Delta T - \Delta P \Delta V)\right\};$$

$$\overline{\Delta T^2} = T^2/C_V; \quad \overline{\Delta V^2} = -T/\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T.$$

Дополнительные сведения

$$\frac{\partial(AB)}{\partial(xy)} = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y;$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(Ay)}{\partial(xy)};$$

$$\frac{\partial(AB)}{\partial(xy)} = -\frac{\partial(BA)}{\partial(xy)} \Rightarrow \partial(AB) = -\partial(BA);$$

$$\frac{\partial(AB)}{\partial(xy)} \cdot \frac{\partial(CD)}{\partial(uv)} = \frac{\partial(CD)}{\partial(xy)} \cdot \frac{\partial(AB)}{\partial(uv)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial(AB)\partial(CD) = \partial(CD)\partial AB;$$

$$\partial(AB)\partial(CD) = \partial(AC)\partial(BD) - \partial(AD)\partial(BC);$$

$$\partial(AB) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y \partial(xB) + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x \partial(yB);$$

$$\partial(E\chi) = T\partial(S\chi) - P\partial(V\chi);$$

$$\partial(TS) = \partial(PV), \quad \partial(SV) = \frac{C_V}{T}\partial(TV), \quad \partial(SP) = \frac{C_P}{T}\partial(TP).$$

II. Равновесие фаз и фазовые переходы

1. Равновесие двух подсистем. Фазовое равновесие

$$T_1 = T_2; \quad P_1 = P_2; \quad \mu_1 = \mu_2.$$

2. Химическое равновесие

$$\sum_i \nu_i \mu_i = 0.$$

3. Формула Саха:

$$\frac{C_a}{C_i C_e} = n \frac{g_a}{g_e g_i} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} e^{J/T}.$$

4. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2}.$$

5. Теория Ландау:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \alpha|\eta|^2 + \frac{\beta}{2}|\eta|^4, \quad \alpha = \alpha_0(T - T_0);$$

$$|\eta|^2 = \begin{cases} -\alpha/\beta, & T < T_c; \\ 0, & T > T_c. \end{cases} \qquad \Delta c = \tfrac{\alpha^2}{\beta} T_c.$$

6. Флуктуации при $T > T_c$ (теория Орнштейна–Цернике)

$$\xi(T) = \mathrm{const}/\sqrt{T - T_c} \quad \text{– корреляционный радиус}$$

$$\delta c \sim 1/\sqrt{T - T_c} \quad \text{– теплоемкость}$$

III. Основные соотношения

1. Энтропия

$$S = \ln \Delta = -\sum_n w_n \ln w_n.$$

2. Распределение Гиббса по состояниям

$$w_n = w(E_n) = e^{\frac{F - E_n}{T}}.$$

Распределение по энергиям

$$f(E) = w(E) e^{S(E)}.$$

Флуктуации энергии

$$\overline{(E - \overline{E})^2} \,|_V = C_V T^2.$$

3. Статсумма

$$F = -T\ln Z, \quad Z = \sum_n e^{-E_n/T}.$$

Схема вычислений

$$(E_n, \hat{H}) \to Z \to F(T, V, N) \to (S, P, \mu).$$

4. Распределение с переменным числом частиц

$$W_{nN} = e^{\frac{\Omega+\mu N - E_{nN}}{T}}; \quad \Omega = -T\ln\Xi;$$

$$\Xi = \sum_{n,N} e^{\frac{\mu N - E_{nN}}{T}}.$$

$$\overline{\Delta N^2} = T\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T = -\frac{TN^2}{V^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}.$$

IV. Матрица плотности и вторичное квантование

1. Матрица плотности

$$\langle n \mid \hat{\rho} \mid m\rangle = \sum_\alpha c(n,\alpha,t)c^*(m,\alpha,t),$$

$$\mid \psi\rangle = \sum_{n,\alpha} c(n,\alpha,t) \mid n\rangle \mid \alpha\rangle.$$

$$\langle \hat{A}\rangle = \sum_{n,m}\langle m \mid \hat{A} \mid n\rangle\langle n \mid \hat{\rho} \mid m\rangle = Sp\,\hat{A}\hat{\rho},$$

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^+, \quad Sp\rho = 1, \quad \langle n \mid \hat{\rho} \mid n\rangle = w_n \gg 0.$$

Для чистого состояния $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$:

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H} + \hat{V}(t); \quad \hat{V}(t) = -\hat{A}_\alpha F_\alpha(t),$$

2. Уравнение Лиувилля–фон Неймана:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}_{tot}\hat{,}\rho\right], \qquad \rho_0 = \exp\left(\frac{F-\hat{H}}{T}\right),$$

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} e^{-i\hbar^{-1}\hat{H}(t-t')}\left[\hat{V}(t'), \hat{\rho}(t')\right] e^{-i\hbar^{-1}\hat{H}(t-t')}\,dt'.$$

3. Вторичное квантование бозонов

$$\langle \dots, N_p - 1, \dots | \hat{a}_p | \dots, N_p, \dots \rangle =$$
$$= \langle \dots, N_p, \dots | \hat{a}_p^+ | \dots, N_p - 1, \dots \rangle = \sqrt{N_p},$$
$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = \hat{a}_p, \hat{a}_{p'} - \hat{a}_{p'}, \hat{a}_p = 0; \quad [\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+] = 0;$$
$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] = \delta_{pp'}; \quad \hat{a}_p^+ \hat{a}_p | \dots, N_p, \dots \rangle = N_p | \dots, N_p, \dots \rangle$$

($\hat{a}_p^+ \hat{a}_p$ – оператор числа частиц в состоянии p).

4. Вторичное квантование фермионов

$$\langle \dots, 0_p, \dots | \hat{a}_p | \dots, 1_p, \dots \rangle =$$
$$= \quad \langle \dots, 1_p, \dots | \hat{a}_p^+ | \dots, 0_p, \dots \rangle = \eta_p = \pm 1,$$
$$\{\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}\} = \hat{a}_p, \hat{a}_{p'} + \hat{a}_{p'}, \hat{a}_p = 0; \quad \{\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+\} = 0;$$

$$\{\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+\} = \delta_{pp'};$$

$$\hat{\psi}(x) = \sum_p \psi_p(x) \hat{a}_p, \quad \hat{\psi}^+(x) = \sum_p \hat{a}_p^+ \psi_p^*(x),$$
$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\} = 0, \quad \{\hat{\psi}^+(x), \hat{\psi}^+(x')\} = 0,$$

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x')\} = \delta(x - x'),$$
$$\hat{N} = \int dx \hat{\psi}^+(x') \hat{\psi}(x) = \sum_p \hat{a}_p^+ \hat{a}_p$$

($\hat{\psi}^+(x)\hat{\psi}(x)$ – оператор плотности частиц в точке x).

$$\hat{T} = \int dx \hat{\psi}^+(x) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \hat{\psi}(x) = \sum_p \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p,$$
$$\hat{U} = \int dx \hat{\psi}^+(x) U(x) \hat{\psi}(x) = \sum_{p\, p'} U_{pp'} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p,$$

$$\hat{V} = \int dx_1 dx_2 \hat{\psi}^+(x_1) \hat{\psi}^+(x_2) V(x_1 - x_2) \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p_1 p_2\, p_1' p_2'} V_{p_2' p_1' p_2 p_1} \hat{a}_{p_1'}^+ \hat{a}_{p_2'}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}.$$

V. Идеальные газы

1. Больцмановский газ

$$F = -NT \ln \frac{ez_1}{N}, \quad z_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi mT)^{3/2} \sum_k e^{-\varepsilon_k/T},$$

$$\mu = -T \ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} z_{in} \right\}.$$

2. Ферми-газ

$$p = (\mathbf{p}, \sigma), \quad p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i, \quad V = L^3, \quad \sigma = \pm 1;$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p},\,\sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m},$$

$$\langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = n_{\mathbf{p}\sigma} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} + 1},$$

$$\sum_{\mathbf{p},\,\sigma} n_{\mathbf{p}\sigma} = 2 \int \frac{V d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = V \int\limits_{-\mu}^{\infty} d\xi \nu(\xi) n(\xi),$$

плотность состояний $\nu(\varepsilon) = \dfrac{2^{1/2} m^{3/2} \varepsilon^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3}; \quad \nu(\varepsilon_F) = \dfrac{3}{2\varepsilon_F} \dfrac{N}{V};$

$$\Omega = -T \sum_k \ln \Theta_k, \qquad \Theta_k = 1 + e^{(\mu - \varepsilon_k)/T},$$

$$\overline{n_p} = \left((1 + e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} \right)^{-1},$$

$$N = \sum_k \overline{n}_k \quad \text{– уравнение, задающее} \quad \mu = \mu(T).$$

При $T = 0$

$$\mu = \varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}, \quad N = \frac{V p_F^3}{3\pi^2\hbar^2}, \quad E = \frac{3}{5}\varepsilon_F N.$$

Условие вырождения $\quad T \ll \varepsilon_F$

$$c \sim T/\varepsilon_F, \quad pV = \frac{2}{3}E.$$

Парамагнетизм Паули:

$$\chi_p = \frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F}\mu_s^2, \quad T = 0, \quad \mu_s = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

$$\chi_p = \frac{\mu_s^2 N}{T}, \quad T \gg \varepsilon_F.$$

Диамагнетизм Ландау:

$$\chi_L = -\frac{1}{2}\frac{N}{\varepsilon_F}\mu_s^2, \qquad T = 0;$$

$$\chi_L = -\frac{1}{3}\frac{N}{T}\mu_s^2, \qquad T \gg \varepsilon_F.$$

3. Бозе-газ

$$\Omega = -T\sum_k \ln\Theta_k; \qquad \Theta_k = \left(1 - e^{(\mu-\varepsilon_k)/T)}\right)^{-1};$$

$$\overline{n}_p = \left(\mathrm{e}^{(\varepsilon_p-\mu)/T} - 1\right)^{-1}; \qquad \mu < 0.$$

Бозе-конденсация

$$N_0 = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_o}\right)^{3/2}\right); \quad T_o \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}; \quad C_v \sim VT^{3/2}.$$

4. Фононы

$$\hat{H} = \sum_{k\lambda}\hbar\omega_{k\lambda}(\hat{b}^+_{k\lambda}\hat{b}_{k\lambda} + \frac{1}{2}),$$

$$\overline{n}_{k\lambda} = \langle b^+_{k\lambda}\hat{b}_{k\lambda}\rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{k\lambda}/T} - 1}; \qquad \mu = 0,$$

$$W^2_{k\lambda} = c^2_\lambda k^2; \qquad c_{1,2} = c_t; \qquad c_3 = c_2;$$

$$\sum_{k\lambda} 1 = \int_0^{\omega_D} dwg(\omega) = 3N,$$

$$g(\omega) = \frac{3\omega^2}{2\pi^2\overline{c}^3}; \qquad \Theta_D = \hbar\omega_D = \hbar\overline{c}k_D.$$

Теплоемкость решетки

$$C = \begin{cases} \sim (T/\Theta_D)\,; & T \ll \Theta_D, \\ 3N; & T > \Theta_D. \end{cases}$$

Среднеквадратичное отклонение атома от положения равновесия

$$\langle \vec{u}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \begin{cases} 1/\Theta_D + \mathrm{const}\,\frac{T^2}{\Theta_D^3}; & T \ll \Theta_D\,, \\ T/\Theta_D^2; & T \geq \Theta_D\,. \end{cases}$$

5. Классический слабонеидеальный газ

$$F = F_{\text{ид}} + B(T)\frac{TN^2}{V}; \quad B(T) = b - \frac{a}{T};$$

$$P = nT(1 + nB(T)).$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$(P + \frac{N^2 a}{V^2})(V - Nb) = NT.$$

VI. Микроскопическая теория ферромагнетизма

Гамильтониан Гейзенберга:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R_1} \neq \mathbf{R_2}} J\,(\mathbf{R_1} - \mathbf{R_2}) \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{R_1}} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{R_2}} - 2\mu_B\, \mathbf{B} \sum_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{R}},$$

$$T_c = \frac{1}{3} S(S+1) zJ, \quad J_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{R}} J(\mathbf{R}) e^{-\mathbf{qR}}, \quad J_0 = zJ.$$

Спектр и масса магнонов:

$$\hbar\omega(q) = 2\mu_B B + (J_0 - J_{\mathbf{q}})S, \quad m^* = \frac{\hbar^2}{2JSa^2}.$$

Закон Блоха для спиновых волн:

$$C(T) \sim \left(\frac{T}{J_0}\right)^{3/2}, \quad [\mathcal{M}(0) - \mathcal{M}(T)] \sim \left(\frac{T}{J_0}\right)^{3/2}.$$

VII. Микроскопическая теория сверхтекучести

Гамильтониан неидеального бозе-газа при $T = 0$:

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu\right) \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}'}.$$

Преобразования Боголюбова:

$$\hat{a}_0^+ \approx \hat{a}_0 \approx \sqrt{N_0}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ = u_p \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ + v_p \hat{b}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}} = u_p \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_p \hat{b}_{-\mathbf{p}}^+,$$

где $\hat{b}_{\mathbf{p}}^+$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастиц со спектром возбуждений:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - g\frac{N}{V}\right)^2 - \left(g\frac{N}{V}\right)^2} \approx cp \quad \text{при } p \to 0,$$

g — фурье-образ парного потенциала при $q \ll \hbar/a$.
Скорость боголюбовского звука:

$$c = \sqrt{\frac{gN}{mV}}.$$

Критерий сверхтекучести Ландау:

$$v < v_c = \min \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{p}}}{p}.$$

VII. Микроскопическая теория сверхпроводимости

Гамильтониан неидеального ферми-газа БКШ:

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{p},\sigma} \xi_p \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^+ - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}\uparrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}\downarrow}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}'\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}'\uparrow}.$$

Преобразования Боголюбова:

$$\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^+ = u_p \hat{\alpha}_{\mathbf{p},\sigma}^+ + \sigma v_p \hat{\alpha}_{-\mathbf{p},-\sigma}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma} = u_p \hat{\alpha}_{\mathbf{p},\sigma} + \sigma v_p \hat{\alpha}_{-\mathbf{p},-\sigma}^+,$$

где $\hat{\alpha}_{\mathbf{p},\sigma}^+$ и $\hat{\alpha}_{\mathbf{p},\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастиц с энергетическим спектром:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}, \quad \xi_p = \frac{p^2}{2m} - \mu = v_F(|\mathbf{p}| - p_F),$$

g — фурье-образ потенциала взаимодействия вблизи поверхности Ферми $|\xi_p| < \hbar\omega_D$. При $T = 0$

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g\nu_F}\right),$$

при $T \simeq T_c$

$$\Delta = \left[\frac{8\pi^2 T_c (T_c - T)}{7\zeta(3)}\right]^{1/2},$$

где $\pi T_c = \gamma\Delta_0$, $\nu_F = \frac{mp_F}{2\pi^2\hbar^2}$, $\gamma \approx 1.78$ — постоянная Эйлера.

IX. Теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау

Функционал Гинзбурга–Ландау:

$$\Omega_s = \Omega_n + \int \left\{ a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{4m}\left| \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right\} dV,$$

$$a = \alpha(T - T_c), \quad \alpha > 0, \quad b > 0, \quad |T - T_c| \ll T_c,$$

$$|\psi_0|^2 = \frac{n_s}{2} = -\frac{a}{b} \quad \text{при } T < T_c.$$

Уравнения Гинзбурга–Ландау:

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 \psi + a\psi + b\psi^3 = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s, \quad \mathbf{j}_s = \frac{e\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\psi|^2\mathbf{A}.$$

Плотность сверхпроводящего тока:

$$\psi = |\psi|e^{i\varphi}, \quad \mathbf{j}_s = \frac{c|\psi/\psi_0|^2}{4\pi\lambda^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\varphi - \mathbf{A}\right).$$

Квантование потока:

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} \approx 2 \cdot 10^{-7}\ \text{Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Глубина проникновения, длина когерентности:

$$\lambda^2 = \frac{mc^2 b}{8\pi e^2|a|}, \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|a|}, \quad \xi, \lambda \backsim (T_c - T)^{-1/2}.$$

Критические магнитные поля:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}\ln\frac{\lambda}{\xi}, \quad H_c = \frac{1}{2^{3/2}\pi}\frac{\Phi_0}{\lambda\xi}, \quad H_{c2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Phi_0}{\xi^2}.$$

ФОРМУЛЫ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕСЯ ИЗВЕСТНЫМИ ИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ КУРСОВ

1. Факториал и формула Стирлинга:

$$N! = \int_0^\infty x^N e^{-x}\, dx.$$

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N (1 + o(1/N))\,.$$

2. Формула суммирования Эйлера–Маклорена для медленно меняющихся функций:

$$\sum_{n=0}^\infty F\left(n+\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty F(x)dx + \frac{1}{24}F'(0).$$

3. Объем и поверхность N-мерной сферы единичного радиуса

$$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!}, \quad S_N = NV_N.$$

4. Бозе- и ферми-интегралы

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\, dx}{e^x \mp 1} = (n-1)!\zeta(n)\begin{cases}1,\\ 1-2^{1-n}.\end{cases}$$

Дзета-функция Римана:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) = 1.20, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(3/2) = 2.61, \quad \zeta(5/2) = 1.34.$$

5. Около квантовой механики

Формула Сохоцкого:

$$\frac{1}{z - i0} = \mathcal{P}\frac{1}{z} + i\pi\delta(z).$$

Преобразование Фурье:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}\varphi(\mathbf{k}, \omega)\frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4},$$

$$\varphi(\mathbf{k},\omega)=\int e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\varphi(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}dt.$$

Шпуры:

$$\mathrm{Sp}\hat{A}=\sum_n A_{nn},\quad \mathrm{Sp}\hat{A}\hat{B}\hat{C}=\mathrm{Sp}\hat{B}\hat{C}\hat{A}=\mathrm{Sp}\hat{C}\hat{A}\hat{B},$$

$$\mathrm{Sp}\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]=\mathrm{Sp}\hat{C}[\hat{A},\hat{B}]=\mathrm{Sp}\hat{B}[\hat{A},\hat{C}].$$

6. Спин

$$s=\frac{1}{2},\qquad \hat{\rho}=\frac{1}{2}+p_\alpha\hat{s}_\alpha,$$

$$\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta=\frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}\hat{s}_g,\qquad \mathrm{Sp}\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}.$$

7. Осциллятор $\qquad E_n=\hbar\omega(n+1/2).$

7. Расщепление в слабом магнитном поле (эффект Зеемана):

$$E_m=-\mu_B g_J M,\quad \text{где}\quad \mu_B=e\hbar/2mc\ \ \text{– магнетон Бора,}$$

$$M\ \text{– проекция полного момента}\quad J\quad \text{на ось } z,$$

$$g_J=1+\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}\ \text{– фактор Ланде.}$$

8. Уровни Ландау

Орбитальное движение в однородном магнитном поле

$$E_n=\frac{|e|\hbar}{mc}H\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_z^2}{2m},$$

e – заряд, m – масса частицы, p_z – импульс движения вдоль оси z.

9. Теорема Гельмана—Фейнмана:

$$\langle n|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}|n\rangle=\frac{\partial E_n}{\partial\lambda},\quad \left\langle\!\!\left\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right\rangle\!\!\right\rangle=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right)_{T,V,\mu}.$$

ЗАДАНИЕ

Упражнения

1. N молекул идеального газа в объеме V. Определить вероятность того, что в объеме $v < V$ находится n молекул. Получить приближенное выражение, когда $v \ll V$. Найти среднее число частиц $\overline{n}$ в объеме v, его среднюю абсолютную и относительную флуктуации. Найти вид распределения в случае $v \ll V$, $\overline{n} \gg 1$.

2. Вычислить $C_P - C_V$ в переменных V, T и P, T. Определить $C_P - C_V$ для больцмановского газа, газа Ван-дер-Ваальса, ферми- и бозе-газа и черного излучения.

3. Вычислить число состояний одноатомного больцмановского газа.

4. Вычислить число состояний системы N независимых спинов $1/2$.

5. Вычислить число состояний системы N одинаковых независимых осцилляторов.

6. Получить выражения для неравновесной энтропии ферми- и бозе-газов.

7. Вычислить основные термодинамические величины ферми- и бозе-газов при $T = 0$.

8. Из функционала Гинзбурга–Ландау получить выражение для плотности тока в магнитном поле, получить уравнение Лондонов и квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце.

9. Вычислить среднее от произведения четырех ферми-операторов $\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_p^+ \hat{a}_u \hat{a}_v \rangle$, где $\langle \cdots \rangle$ — усреднение по состоянию невзаимодействующих частиц с заданной температурой и химпотенциалом.

10. Записать оператор взаимодействия электронов с внешними электрическим и магнитным полями в представлении вторичного квантования.

11. Вычислить $\langle \exp(-iq\hat{x}) \rangle$, где $\hat{x}$ — оператор смещения одномерного гармонического осциллятора.

12. Определить температурную зависимость среднеквадратичного смещения атомов от положения равновесия $\langle \hat{R}_k \hat{R}_p \rangle$, где $\langle \cdots \rangle$ обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой, $\hat{R}_k$ – смещение атома в k-направлении. Объяснить происхождение нулевых колебаний.

13. Используя результаты предыдущей задачи, вычислить среднее от произведения четырех операторов смещения, относящихся к одной и той же ячейке: $\langle \hat{R}_k \hat{R}_p \hat{R}_i \hat{R}_j \rangle$, где $\langle \cdots \rangle$ обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой, $\hat{R}_k$ – смещение атома в k-направлении $(k = x\,, y\,, z)$.

14. Для электронов, находящихся под поверхностью Ферми, произвести переход к дырочному представлению. Записать полный гамильтониан идеального ферми-газа, используя операторы рождения и уничтожения квазичастиц (электронов над поверхностью Ферми и дырок под поверхностью Ферми). Определить химический потенциал и энергетический спектр полученных квазичастиц.

15. Вычисляя первую поправку термодинамической теории возмущений, найти вклад прямого и обменного взаимодействия для ферми- и бозе-частиц. Сравнить результаты.

16. В преобразовании Боголюбова для электронов получить при $T \geq$ $\geq T_c$ связь операторов поглощения квазичастиц и поглощения голых электронов.

Задачи

1. Показать, что замкнутая система из двух равновесных подсистем имеет максимальную энтропию, когда у подсистемы равны температура, давление и химические потенциалы.

2. Найти кривую фазового равновесия газ-жидкость $P(T)$.

3. Определить энтропию газа N невзаимодействующих спинов $\sigma =$ $= 1/2$ в магнитном поле при заданной энергии. Определить понятие температуры и показать, что она может быть отрицательной. Обсудить температурную зависимость теплоемкости. Сравнить с задачей о системе невзаимодействующих двухуровневых частиц.

4. Определить энтропию газа N невзаимодействующих осцилляторов при заданной энергии E. Получить связь между энергией и температурой T. Обсудить отличие температурного поведения теплоемкости от предыдущей задачи.

5. Вычислить магнитную восприимчивость одноатомного парамагнитного газа $\chi(T)$ с моментом J.

6. Вычислить для парамагнитного газа изменение температуры при адиабатическом изменении магнитного поля $(\partial T/\partial H)_S$, если его свободная энергия может быть представлена в виде: $F = F_0(T) - -(1/2)\chi(T)H^2$.

7. Найти флуктуации $\overline{\Delta E^2}$, $\overline{\Delta N^2}$, $\overline{\Delta S^2}$, $\overline{\Delta P^2}$, $\overline{\Delta S \Delta P}$, $\overline{\Delta V \Delta P}$, $\overline{\Delta S \Delta T}$, $\overline{\Delta T^2}$, $\overline{\Delta V^2}$, $\overline{\Delta T \Delta V}$, $\overline{\Delta T \Delta P}$, $\overline{\Delta S \Delta V}$.

8. Вычислить для одноатомного и двухатомного больцмановских газов F, μ, P, S, C, $(\partial P)(\partial \rho)_S$.

9. Найти теплоемкость идеального газа без внутренних степеней свободы, помещенного в однородное гравитационное поле в коническом сосуде высоты h (основание конуса расположено внизу, вверху). Рассмотреть случаи: $mgh \ll T, mgh \gg T$.

10. Вычислить температурную зависимость теплоемкости двухатомного больцмановского газа, учесть диссоциацию молекул.

11. Построить изохоры, изобары и изотермы для бозе-газа.

12. Построить изохоры, изобары и изотермы для ферми-газа.

13. Вычислить теплоемкость двумерного вырожденного идеального ферми-газа.

14. Вычислить теплоемкость черного излучения.

15. Найти равновесную плотность и теплоемкость акустических фононов в кристалле при температурах выше $T \gg \Theta_D$ и ниже $T \ll \Theta_D$ дебаевской.

16. Используя представление оператора смещения гармонического осциллятора $\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\hat{b}^+ + \hat{b})$, получить формулу $\left\langle e^{ik\hat{x}} \right\rangle = = e^{-\frac{k^2\hbar}{4m\omega}}$ при температуре $T = 0$.

17. Описать парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Рассмотреть эффект де Гааза–ван Альфена в двумерном металле.

18. Сравнить низкотемпературные зависимости теплоемкости идеальных бозе- и ферми-газов, черного излучения и твердого тела, парамагнетика и ферромагнетика, неидеального бозе-газа и, наконец, сверхпроводника.

19. Показать, что фазовая скорость элементарного возбуждения в бозе-конденсате равна гидродинамической скорости звука.

20. Найти распределение частиц по импульсам и полное число надконденсатных частиц в идеальном и неидеальном бозе-газах при $T = 0$ и низких температурах.

21. Определить свободную энергию одномерной цепочки спинов 1/2 с гамильтонианом

$$\hat{H} = -J \sum_{k}^{N} \hat{\sigma}_k^z \hat{\sigma}_{k+1}^z, \quad \hat{\sigma}_{N+1}^z = \hat{\sigma}_1^z.$$

Вычислить теплоёмкость и объяснить причину отсутствия фазового перехода при $T \neq 0$.

22. Для ферромагнетика в модели Гейзенберга при $T \ll T_c$ определить спектр возбуждений (магнонов) и найти температурную зависимость намагниченности и теплоемкости спиновых волн.

23. Для ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении самосогласованного поля определить температуру Кюри T_c, температурную зависимость магнитной восприимчивости χ и спонтанной намагниченности вблизи T_c. Сравнить с результатами теории Ландау.

24. Определить корреляционный радиус флуктуации параметра порядка в нулевом внешнем поле вблизи точки фазового перехода II рода. Найти флуктуационную поправку к теплоемкости при $T \simeq T_c$ в теории Гинзбурга–Ландау.

25. Доказать, что плотность сверхтекучей компоненты электронного газа при $T = 0$ равна полной плотности числа частиц.

26. В модели БКШ определить скачок теплоемкости.

27. Диагонализуя гамильтониан для фотонов и экситонов с учетом гибридизации, получить спектр поляритонов.

28. Мешок Нагаоки (спиновый полярон большого радиуса в антиферромагнетике).

Срок сдачи 1-го задания: 12.10 – 19.10.2020 г.
Срок сдачи 2-го задания: 30.11 – 07.12.2020 г.

Подписано в печать 30.06.2020. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 120 экз. Заказ № 83.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru