

статистическая физика

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

24 октября 2020 г.

Аннотация

Задачи по статической физике.

Содержание

Предисловие	1
I упражнения	2
II задачи	9

Предисловие

Задачи по статистической физике.

Часть I

упражнения

Упражнение. 1

N молекул идеального газа в объеме V . Определить вероятность того, что в объеме $v < V$ находится n молекул.

Получить приближенное выражение, когда $v \ll V$. Найти среднее число частиц \bar{n} в объеме v , его среднюю абсолютную и относительную флуктуации.

Вероятность попадания ровно одной молекулы в объем V равна $p = \frac{v}{V}$. Поэтому вероятность попадания ровно n молекул в объем V равна

$$p^n(1-p)^{N-n}$$

В объем сосуда могут попасть разные молекулы, всего нужных нам комбинаций:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Поэтому итоговая вероятность:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Поищем предел $v \ll V$, для него можно считать, что $p \ll 1, n \gg 1$, также можно предположить, что $np = \lambda$, которое конечно и не слишком мало, не слишком велико. В таком случае имеется известный предел - распределение становится распределением Пуассона.

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{np^n}{n!} e^{-np}$$

Среднее значение \bar{n} найдется с помощью

$$\bar{n} = \frac{v}{V} N = Np$$

Флуктуации найдутся, зная дисперсию $D\hat{n} = En^2 - (En)^2 = N(p - p^2) = Npq$:

$$\frac{\sqrt{Dn}}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{Np}}.$$

Пусть $v \ll V, \bar{n} \gg 1$

$$P_u(v) = P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Используя формулу Стирлинга, получаем:

$$P_n(\sigma) \approx \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e\lambda}{n} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left(-\lambda + n + n \ln \left(\frac{\lambda}{n} \right) \right)$$

Просто преобразуем $P(v)$, введя $x \equiv \lambda - n$, тогда логарифм раскрывается так: $\ln \frac{\lambda}{n} = \ln \left(\frac{n+x}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \approx \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} \right)^2$

$$P_4(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left(-x + x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n} \right) = P_4(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left(-\frac{(\lambda - n)^2}{2\lambda} \right)$$

это распределение Гаусса

Упражнение. 2

Вычислить $C_p - C_v$ в переменных V, T и P, T .

Определить $C_p - C_v$ для больцмановского газа, газа Ван-дер-Ваальса, ферми и бозе-газа и черного излучения.

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + pdV,$$

поэтому:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Считая внутреннюю энергию U функцией температуры и объема, можем записать

$$C_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (1)$$

Выражение в квадратных скобках в правой части легко вычислить, воспользовавшись фундаментальным равенством Гиббса:

$$TdS = dU + pdV$$

Имеем:

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p$$

Далее, из соотношения

$$dF = -SdT - pdV$$

следует равенство

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Теперь с помощью соотношения 1 получаем

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

И используя

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = -1,$$

запишем:

$$C_p - C_V = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T^{-1} \quad (2)$$

или

$$C_p - C_V = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T^{-1} \quad (3)$$

Теперь применим эти формулы для больцмановского газа, для которого $pV = \nu RT$, имеем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{\nu R}{p}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{\nu RT}{p^2}$$

Поэтому при подстановке в 2 много множителей сокращаются и имеем:

$$C_p - C_V = \nu R$$

Теперь применим эти формулы для газа Ван-дер-Ваальса, для которого $\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT$. Будем для просто ты считать, что $\nu = 1$. И также тут разумнее подставлять все в 3. Получаем:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V &= \frac{R}{V-b} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T &= -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}\end{aligned}$$

Таким образом, подставляем и получаем:

$$C_p - C_V = \frac{TR}{T - \frac{2a}{V^3}(V-b)^2}$$

Теперь применим эти формулы для фермии и бозе-газа, для которых $\frac{pV}{NT} = 1 \pm \alpha \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}$. Подставим, посчитаем производные, придем к ответу:

$$C_p - C_V = \frac{N(\alpha T_0^{3/2} N \mp 2T^{3/2}V)^2}{\pm 8\alpha T_0^{3/2}NT^{3/2} + 4T^3V^2}$$

Теперь применим эти формулы для черного излучения. Для такого: $p = \frac{a}{3}T^4$. Поэтому для него $C_p - C_V \rightarrow \infty$

Упражнение. 3

Вычислить число состояний одноатомного бoльцмановского газа.

Пусть имеется частиц N частиц в объеме V . Поступательное движение частиц всегда квазиклассично. В классической механике состояние системы характеризуется точкой в $6N$ - мерном фазовом пространстве

$$\alpha = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) \quad (4)$$

Число точек в элементе 6-мерного фазового объема $dr^3 dp^3$ согласно правилу Бора-Зоммерфельда равно отношению этого объема к $(2\pi\hbar)^3$. Обобщение этого правила на случай N одинаковых частиц дает дифференциал числа состояний

$$d\Gamma_\alpha = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{d^3 r_i d^3 p_i}{(2\pi\hbar)^3}$$

Произведение дифференциалов поделено на $N!$ для того, чтобы все конфигурации, положения частиц в $6N$ -мерном фазовом пространстве, отличающиеся друг от друга лишь перестановками тождественных частиц, учитывались только один раз. С помощью 4 произвольная сумма по состояниям может быть представлена в форме интеграла

$$\sum_\alpha F_\alpha = \int d\Gamma_\alpha F_\alpha$$

Полное число состояний - число точек в $6N$ -мерном пространстве с энергией

$$E_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$$

А так как $\Gamma(E) = \sum_\alpha \theta(E - E_\alpha)$, то в интервале между 0 и E выражается интегралом:

$$\Gamma(E) = \int d\Gamma_\alpha \theta(E - E_\alpha) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 r_i d^3 p_i}{(2\pi\hbar)^3} \theta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}\right)$$

Интегрирование по пространственным координатам каждой частицы дает объем V , и с учетом формулы Стильтьеса получаем

$$\Gamma(E) = \left(\frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3}\right)^N J_{3N}(E)$$

$$J_{3N}(E) = \int \prod_{i=1}^N d^3 p_i \theta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}\right) - \text{объем } 3n \text{ мерного шара радиусом } p$$

$$V_{3N}(p) = \frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} p^n \approx \left(\frac{2e\pi p^2}{3N}\right)^{3N/2}$$

Тогда:

$$\Gamma(E) = \left(\frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3}\right)^N \left(\frac{4e\pi m E^2}{3N}\right)^{3N/2}$$

Упражнение. 4

Вычислить число состояний системы N независимых спинов $1/2$.

Систему N спинов $S = \frac{1}{2}$, находящихся в магнитном поле B , будем описывать гамильтонианом

$$H = -2\mu B \sum_{i=1}^N \left(s_i^z - \frac{1}{2}\right)$$

Энергия одного спина в магнитном поле, равная $-2\mu B s^z$ ($s^z = \pm \frac{1}{2}$), сдвинута на константу, чтобы минимальная энергия была равна нулю. Если $(\vec{N} - M)$ спинов находятся в основном состоянии ($s^z = 1/2$), а M спинов — в возбужденном ($s^z = -1/2$), то система имеет энергию $E = M\Delta E$, где $\Delta E = 2\mu B$. Такая энергия может быть получена числом способов, равным:

$$\Delta\Gamma_M = \frac{N!}{M!(N-M)!} \quad (5)$$

Это и есть наше требуемое число состояний.

При больших значениях аргумента по формуле Стирлинга факториал приближенно равен

$$N! \approx (N/e)^N$$

и выражение 5 принимает вид

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{M}\right)^M \left(\frac{e}{N-M}\right)^{N-M} = \frac{N^N}{M^M (N-M)^{N-M}}$$

Из этого выражения можно найти энтропию и другие характеристики, но о них не спрашивается, так что задача решена.

Упражнение. 5

Вычислить число состояний системы N одинаковых независимых осцилляторов.
За вычетом энергии нулевых колебаний энергия системы равна

$$E = \Delta E \sum_{i=1}^N n_i, \quad \Delta E = \hbar\omega$$

где n_i - номер возбуждения i -того осциллятора. Это значение энергии может быть получено числом способов, которое следует из комбинаторики

$$\Gamma = \frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!} \approx \frac{(N+M)^{N+M}}{N^N M^M}$$

Упражнение. 6

Получить выражения для неравновесной энтропии ферми- и бозе-газов
Вероятность произвольного состояния:

$$w_\alpha = w(p_1) \cdot w(u_{p_2}) w(u_{p_3}) \cdot \dots$$

$$S = - \sum_x w_\alpha \ln w_\alpha = - \sum_{n_{p_1}} \sum_{n_{p_2}} \sum_{n_{p_3}} \dots (w(u_{p_2}) w(u_{p_3}) \cdot \dots) (\ln w(n_{p_1}) + \ln w(n_{p_2}) + \dots)$$

$$S = - \sum_{n_{p_1}} w(n_{p_1}) \ln w(n_{p_1}) + \dots$$

Для ферми газа: $n_p = \{0, 1\}$

$$- \sum_{n_p} w(n_p) \ln w(n_p) = -w(n_{p_1}) \ln w(n_{p_1}) + w(n_{p_0}) \ln w(n_{p_0})$$

среднее число частиц с импульсом p : $\overline{n_p} = \sum_{n_p} w(n_p) n_p = w(1_p)$

$$w(0_p) = 1 - \overline{n_p}$$

поэтому:

$$- \sum_{n_p} w(n_p) \ln w(n_p) = -(1 - \overline{n_p}) \ln(1 - \overline{n_p}) - \overline{n_p} \ln \overline{n_p}$$

В итоге энтропия для ферми газа равна:

$$S_F = - \sum_p \left((1 - \overline{n_p}) \ln(1 - \overline{n_p}) + \overline{n_p} \ln \overline{n_p} \right)$$

Теперь то же для бозе-газа. Для него $n_p \in \{0, \dots, \infty\}$

Сумма $\left[- \sum_{n_p} w(n_p) \ln(n_p) \right]$ принимает максимальное значение при заданном $\overline{n_p}$ при условии на функцию Лагранжа:

$$L = - \sum_{n_p} w(n_p) \ln(n_p) - \lambda_1 \sum_n n w(n) - \lambda_2 \sum_n w(n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w(n)} = - \ln w(n) - 1 - \lambda_1 n - \lambda_2$$

$$w(n) = \exp(-1 - \lambda_1 n - \lambda_2)$$

$$\sum w_n = 1 \Rightarrow \exp(-1 - \lambda_1 n - \lambda_2) = 1$$

$$\sum \exp(-1 - \lambda_2) \sum_n \exp(-\lambda_1 n) = 1$$

$$\sum_n \exp(-\lambda_1 n) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1}} \Rightarrow \exp(-1 - \lambda_2) = 1 - e^{-\lambda_1}$$

$$\bar{n} = \sum_n w(n)n = \exp(-1 - \lambda_2) \sum_n n \exp(-\lambda_1 n) = \exp(-1 - \lambda_2)$$

$$\left(-\frac{d}{d\lambda_1} \sum_n \exp(-\lambda_1 n) \right) = -\exp(-1 - \lambda_2) \frac{d}{d\lambda_1} \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1}}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\lambda_1} - 1}$$

$$e^{-\lambda_1} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}$$

Поэтому после преобразований получаем:

$$w(n) = \frac{1}{\bar{n} + 1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n$$

$$\begin{aligned} S &= - \sum_n w(n) \ln w(n) = \sum_n w(n) (\lambda_1 n + \lambda_2 + 1) = \\ &= \sum_n w_n (\lambda_2 + 1) + \sum_n n w_n \lambda_1 = (\lambda_2 + 1) + \bar{n} \lambda_1 = \\ &= (\bar{n} + 1) \ln(\bar{n} + 1) - \bar{n} \ln \bar{n} \quad (6) \end{aligned}$$

В итоге:

$$S = \sum_p [(1 + \bar{n}_p) \ln(1 + \bar{n}_p) - \bar{n}_p \ln \bar{n}_p]$$

Упражнение. 7

Вычислить основные термодинамические величины ферми- и бозе-газов при $T = 0$
Для ферми газа:

$$N = \sum_p N_p \approx \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} n_p 4\pi p^2 dp = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3$$

$$E = \sum_p (E_p n_p) \approx \frac{2V4\pi}{(2\pi\hbar)^3 2m} \int_0^{p_F} p^4 d(p) = \frac{3}{5} N E_F$$

Давление находится по известной формуле:

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{3}{10} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{N^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} n E_F$$

Упражнение. 8

Из функционала Гинзбурга–Ландау получить выражение для плотности тока в магнитном поле, получить уравнение Лондонов и квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце.

Упражнение. 9

Вычислить среднее от произведения четырех ферми-операторов $\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_p^+ \hat{a}_u \hat{a}_v \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ — усреднение по состоянию невзаимодействующих частиц с заданной температурой и химическим потенциалом.

Упражнение. 10

Записать оператор взаимодействия электронов с внешними электрическим и магнитным полями в представлении вторичного квантования.

Упражнение. 11

Вычислить $\langle \exp(-iq\hat{x}) \rangle$, где \hat{x} оператор смещения одномерного гармонического осциллятора.

Упражнение. 12

Определить температурную зависимость среднеквадратичного смещения атомов от положения равновесия R_k R_p , где \dots обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой, R_k — смещение атомов в k -направлении. Объяснить происхождение нулевых колебаний.

Упражнение. 13

Используя результаты предыдущей задачи, вычислить среднее от произведения четырех операторов смещения, относящихся к одной и той же ячейке: $\langle \hat{R}_k \hat{R}_p \hat{R}_i \hat{R}_j \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой, \hat{R}_k — смещение атома в k -направлении ($k = x, y, z$)

Упражнение. 14

Для электронов, находящихся под поверхностью Ферми, произвести переход к дырочному представлению. Записать полный гамильтониан идеального ферми-газа, используя операторы рождения и уничтожения квазичастиц (электронов над поверхностью Ферми и дырок под поверхностью Ферми). Определить химический потенциал и энергетический спектр полученных квазичастиц.

Упражнение. 15

Вычисляя первую поправку термодинамической теории возмущений, найти вклад прямого и обменного взаимодействия для ферми- и бозе-частиц. Сравнить результаты

Упражнение. 16

В преобразовании Боголюбова для электронов получить при $T \ll T_c$ связь операторов поглощения квазичастиц и поглощения голых электронов.

Часть II

Задачи

Задача. 1

Показать, что замкнутая система из двух равновесных подсистем имеет максимальную энтропию, когда у подсистемы равны температура, давление и химические потенциалы.

Энтропию замкнутой системы, образованной из двух равновесных подсистем, определим как:

$$S = S_1(E_1) + S_2(E_2)$$

Такая энтропия максимальна, когда обе подсистемы имеют одинаковую температуру, химический потенциал и давление. Действительно: при постоянстве полной энергии $E = E_1 + E_2$ будет выполняться:

$$\frac{dS}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{d(E-E_1)}{dE_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0$$

$$\frac{d^2S}{dE^2} = - \left(\frac{1}{T^2 C_V} \right)_1 - \left(\frac{1}{T^2 C_V} \right)_2 < 0$$

Поэтому в случае максимума энтропии температуры подсистем одинаковы.

Аналогично, варьируя энтропию системы по объему и числу частиц одной из подсистем при условии постоянства полного объема и полного числа частиц (Используя $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{1}{T}(-p)$, $\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{1}{T}\mu$), находим, что Энтропия максимальна, когда равны друг другу давления и химические потенциалы подсистем.

Задача. 2

Найти кривую фазового равновесия газ-жидкость $p(T)$.

При изменении T и P выполняются равенства

$$d\mu_1 = -s_1 dT' + v_1 dP, \quad d\mu_2 = -s_2 dT + v_2 dP$$

Поскольку $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T')$, то $d\mu_1 = d\mu_2$, отку да следует

$$(s_2 - s_1) dT = (v_2 - v_1) dP \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

Введем обозначение: $q_{12} = T(s_2 - s_1)$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2 - v_1)}$$

Пусть фаза 1 - пар, фаза 2 - жидкость, $s_2 \ll s_1$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_1}{v_1} = \frac{pS_1}{T}$$

Если $s_1 = \text{const}$, то $p = AT^{s_1}$

Задача. 3

Определить энтропию газа N невзаимодействующих спинов $\sigma = 1/2$ в магнитном поле при заданной энергии. Определить понятие температуры и показать, что она может быть

отрицательной. Обсудить температурную зависимость теплоемкости. Сравнить с задачей о системе невзаимодействующих двухуровневых частиц.

Вспомним упражнение, в котором мы вычисляли число состояний для системы спинов. Это число оказалось равным

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{M}\right)^M \left(\frac{e}{N-M}\right)^{N-M} = \frac{N^N}{M^M(N-M)^{N-M}}$$

Логарифм этой величины можно представить в форме

$$\sigma^* = \ln \Delta\Gamma = -N(n \ln(n) + (1-n) \ln(1-n))$$

Величина

$$n = \frac{M}{N} = \frac{E}{(N\Delta E)}$$

Определим температуру τ с помощью формул статистической физики:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E} \ln\left(\frac{1-n}{n}\right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1-n)}$$

Обратим внимание, что с ростом среднего числа возбужденных спинов n от нуля до половины температура τ растет от нуля до бесконечности, а при дальнейшем возрастании числа n в интервале $1/2 < n < 1$ "температура" τ отрицательна.

Состояние с отрицательной температурой возможно только для систем с конечным числом всех состояний системы. В данном случае это число равно 2^N .

Исследуем зависимость теплоемкости. Для этого ее по определению посчитаем:

$$c(T) = \frac{dE}{dT} = \Delta E_N \frac{dn}{dT} = \frac{\Delta E^2 N \exp(\Delta E/T)}{T^2(1 + \exp(\Delta E/T))^2}$$

Видим, что теплоемкость спадает по закону $c(\tau) \sim \exp\left(\frac{-\delta E}{T}\right)$, $T \rightarrow 0$; $c(r) \sim \frac{1}{T^2}$, $T \rightarrow \infty$

Задача. 4

Определить энтропию газа N невзаимодействующих осцилляторов при заданной энергии E . Получить связь между энергией и температурой T . Обсудить отличие температурного поведения теплоемкости от предыдущей задачи.

Из упражнения про осциллятор мы имеем значение числа состояний:

$$\frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!} \approx \frac{(N+M)^{N+M}}{N^N M^M}$$

Статистическая энтропия системы равен логарифму формулы выше:

$$\sigma = \ln \Delta\Gamma = N(-n \ln(n) + (1+n) \ln(1+n)), \quad n = \frac{M}{N}$$

здесь $n = M/N = E/(N\Delta E)$ — среднее число возбуждений, приходящихся на Один осциллятор. Производные статистической энтропии равны

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E} \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1+n)}$$

Число состояний системы осцилляторов бесконечно, и состояния с отрицательной температурой отсутствуют.

Задача. 5

Вычислить магнитную восприимчивость одноатомного парамагнитного газа $\chi(T)$ с моментом J .

$$\varepsilon_n = g\mu_b H_m, m \in \{-J, \dots, J\}$$

$$\text{Полная энергия } E_n = \sum_{i=1}^N g\mu_b M m_i, n = \{m_1, \dots, m_N\}$$

Статсумма для системы из N частиц:

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum e^{-E_n/T} = \sum_{m_1, \dots, m_N} \exp\left(-\frac{g\mu_b H(m_1 + \dots + m_N)}{T}\right) = \\ &= \left(\sum_{m_1} e^{-g\mu_b H m_1/T}\right) \left(\sum_{m_2} e^{-g\mu_b H m_2/T}\right) \dots \left(\sum_{m_N} e^{-g\mu_b H m_N/T}\right) = \left(\sum_m e^{-g\mu_b H m/T}\right)^N \equiv Z_1^N \end{aligned} \quad (7)$$

Также введем обозначение $x := g\mu_b H/T$, тогда перепишем:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{m=-J}^J e^{-xm} = e^{xJ} + e^{x(J-1)} + \dots + e^{-xJ} = e^{-xJ} (1 + e^x + \dots + e^{2Jx}) = \\ &= e^{-xJ} \cdot \frac{e^{(2J+1)x} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{(J+\frac{1}{2})x} - e^{-(J+\frac{1}{2})x}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{\text{sh}\left(J + \frac{1}{2}\right)x}{\text{sh}\frac{x}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

далее через свободную энергию $F = -T \ln Z_N = -TN \ln Z_1$ считаем магнитный момент как производную ее по магнитному полю.

$$M = \left(-\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,N} = \frac{TN}{z_1} \frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{TN}{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial H} = \frac{TN}{z_1} \cdot \frac{g\mu_b}{T} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

далее пару строк не успеваю вписать в латех, короче говоря, простая математика тут.

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right) = g\mu_b \left(\frac{\partial B(x)}{\partial H}\right) = \frac{(g\mu_b)^2}{T} B'_y(x)$$

При $T \gg g\mu_b H \Rightarrow \chi \approx \frac{1}{T}$, что есть закон Кюри.

Задача. 6

Вычислить для парамагнитного газа изменение температуры при адиабатическом изменении магнитного поля $(\partial T/\partial H)_S$, если его свободная энергия может быть представлена в виде: $F = F_0(T) - (1/2)\chi(T)H^2$

$$dE = TdS - pdV + \mu dN - MdH$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H = \left(\frac{\partial(M, H)}{\partial(S, H)}\right) = \left(\frac{\partial(M, H)}{\partial(T, H)}\right) \left(\frac{\partial(T, H)}{\partial(S, H)}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H} = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H \frac{T}{C_H}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \frac{T}{C_H}$$

При $M = \chi H$ получаем закон Кюри:

$$\chi = \frac{A}{T}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{AH}{CT}$$

Задача. 7 Найти флуктуации

$$\overline{\Delta E^2}, \overline{\Delta N^2}, \overline{\Delta S^2}, \overline{\Delta P^2}, \overline{\Delta S \Delta P}, \overline{\Delta V \Delta P}, \overline{\Delta S \Delta T}, \overline{\Delta T^2}, \overline{\Delta V^2}, \overline{\Delta T \Delta V}, \overline{\Delta T \Delta P}, \overline{\Delta S \Delta V}$$

Используя гауссову теорию флуктуаций, выразим в формуле $w \sim \exp \frac{\Delta p \Delta V - \Delta T \Delta S}{2kT}$ величины ΔS и Δp через флуктуации независимых переменных V и T :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T \\ \Delta p &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T \end{aligned} \quad (9)$$

С помощью равенства $dF = -SdT - pdV$ имеем $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$. Далее, $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T}$. Подставляя эти значения в 9 имеем

$$\Delta S = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T$$

Теперь выражение для плотности вероятности w после подстановки найденных выражений для ΔS и Δp принимает гауссов вид в переменных V и T :

$$w \sim \exp \left[-\frac{C_V}{2kT^2} (\Delta T)^2 + \frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (\Delta V)^2 \right] \quad (10)$$

Из 10 видно, что плотность вероятности распалась на произведение...

Это означает, что флуктуации температуры и объема статистически Независимы:

$$\langle \Delta V \Delta T \rangle = 0$$

Сравнивая 10 с соотношением $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx = \alpha^{-1}$ находим

$$\begin{aligned} \langle (\Delta T)^2 \rangle &= \frac{kT^2}{C_V} \\ \langle (\Delta V)^2 \rangle &= -kT \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \end{aligned}$$

Для вычисления средних значений комбинаций, содержащих одну из выбранных независимых переменных, удобно выразить флуктуации второй величины через ΔV и ΔT . Тогда получим, например, для $\langle \Delta T \Delta p \rangle$

$$\langle \Delta T \Delta p \rangle = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \langle \Delta T \Delta V \rangle + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \langle (\Delta T)^2 \rangle$$

Подставляя сюда соотношения $\langle \dots \rangle$ найдем

$$\langle \Delta T \Delta p \rangle = \frac{kT^2}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Аналогично

$$\langle \Delta V \Delta p \rangle = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \langle (\Delta V)^2 \rangle + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \langle \Delta V \Delta T \rangle$$

Подставляя $\langle (\Delta T)^2 \rangle$ и $\langle \Delta V \Delta T \rangle = 0$ имеем

$$\langle \Delta V \Delta p \rangle = -kT$$

Далее,

$$\begin{aligned} \langle \Delta S \Delta V \rangle &= \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \langle (\Delta V)^2 \rangle + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \langle \Delta V \Delta T \rangle = \\ &= -kT \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = kT \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

Для вычисления флуктуации $\langle (\Delta S)^2 \rangle$, $\langle (\Delta p)^2 \rangle$, и $\langle \Delta p \Delta S \rangle$, можно выразить их через ΔV и ΔT . Например,

$$\langle (\Delta S)^2 \rangle = \left\langle \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T \right]^2 \right\rangle$$

Раскрывая квадрат суммы и учитывая формулы других флуктуаций найдем

$$\langle (\Delta S)^2 \rangle = - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T kT + \frac{C_V^2}{T^2} \frac{kT^2}{C_V}$$

Учитывая соотношение

$$C_p - C_V = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (11)$$

окончательно получаем

$$\langle (\Delta S)^2 \rangle = kC_p$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle (\Delta p)^2 \rangle &= \left\langle \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T \right]^2 \right\rangle = \\ &= -kT \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \frac{kT^2}{C_V} \end{aligned} \quad (12)$$

С помощью 11 имеем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 = -\frac{C_p - C_V}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

Подставим это выражение в 12 и приведем подобные члены:

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = -kT \frac{C_p}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -kT \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \langle \Delta p \Delta S \rangle &= \left\langle \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T \right] \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T \right] \right\rangle = \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \langle (\Delta V)^2 \rangle + \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \langle (\Delta T)^2 \rangle \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\langle(\Delta T)^2\rangle$ и $\langle(\Delta V)^2\rangle$ приходим к равенству

$$\langle\Delta p\Delta S\rangle = 0$$

Задача. 8

Вычислить для одноатомного и двухатомного больцмановских газов $F, \mu, P, S, C, (\partial P)(\partial \rho)_S$
а) одномерный газ

$$Z_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-\frac{p^2}{2mT}} d^3x d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \left(\int e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp_x \right)^3 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi mT)^{3/2}$$

$$Z = \frac{e^N V^N}{N^N (2\pi\hbar)^{3N}} (2\pi mT)^{3N/2}$$

$$F = -T \ln Z = -NT \ln \left(\frac{eV}{(2\pi\hbar)^3 N} (2\pi mT)^{3/2} \right)$$

$$E = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2}NT$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3}{2}N$$

б) двумерный газ.
позже

Задача. 9

Найти теплоемкость идеального газа без внутренних степеней свободы, помещенного в однородное гравитационное поле в коническом сосуде высоты h (основание конуса расположено внизу, вверх). Рассмотреть случаи: $mgh \ll T, mgh \gg T$

а) случай основания снизу

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

$$z = \frac{1}{N!} Z_1^N = \left(\frac{eZ_1}{v} \right)^N$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) \exp\left(-\frac{mgz}{T}\right) = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^h \pi (tgz)^2 \exp\left(\frac{mgz}{T}\right) dz = \\ &= \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \pi tg^2 \alpha \left(\frac{T}{mg}\right)^2 \left[\exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left(\frac{mgh}{T} - 1\right) + 1 \right] \quad (13) \end{aligned}$$

$$E = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = N \left(\frac{9}{2}T - mgh \frac{\exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right]}{\exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1} - \frac{mgh}{\left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1} \right)$$

$$E = N \left[\frac{9}{2}T - \frac{(mgh)^2 \exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right]}{T \left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1} \right]$$

$mgh \ll T$ - тогда $E = \frac{9}{2}NT - NT = \frac{7}{2}NT \Rightarrow C = \frac{7}{2}N$

$mgh \gg T$ - тогда $E = \frac{9}{2}NT - mghN = \frac{7}{2}NT \Rightarrow C = \frac{9}{2}N$

б) случай основания сверху

просто заменим h на $-h$

$mgh \ll T \Rightarrow C = \frac{7}{2}N$

$mgh \gg T \Rightarrow C = \frac{9}{2}N$

Задача. 10.

Вычислить температурную зависимость теплоемкости двухатомного бoльцмановского газа, учесть диссоциацию молекул.

$$Z_{\text{дисс}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^6} (2\pi mT)^3 = \alpha T^3$$

для двухатомного газа:

$$z_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 T_c} (2\pi m)^{3/2} T^{5/2} = \beta T^{5/2}$$

$$Z = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \frac{1}{(N-n)!} (Z_{\text{дисс}})^n Z_1^{N-n} = \frac{1}{N!} (Z_{\text{дисс}} + Z_1)^N \approx \left(\frac{e}{N} (Z_{\text{дисс}} + Z_1) \right)^N$$

$$\ln Z \approx N \ln (Z_{\text{дисс}} + Z_1) + N \frac{e}{N}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = NT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln (Z_{\text{дисс}} + Z_1) = NT^2 \frac{3\alpha T^2 + \frac{5}{2}\beta T^{3/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}}$$

$$C = \frac{dE}{dT} = N \left(\frac{12\alpha T^3 + \frac{35}{4}\beta T^{5/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}} - T^2 \left(\frac{3\alpha T^2 + \frac{5}{2}\beta T^{3/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}} \right)^2 \right)$$

Задача. 11.

Построить изохоры, изобары и изотермы для бозе-газа.

$$PV = \frac{2}{3} AT^{5/2} J_{1/2}(y) : \quad y = -\frac{\mu}{T}$$

$$J_2(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x+y} - 1}$$

$$T_c \approx 6,6 \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3}$$

$$T < T_c \Rightarrow p \simeq \alpha T^{5/3}$$

$$T \gg T_c \Rightarrow \frac{P_V}{NT} \approx 1 - \alpha \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2}$$

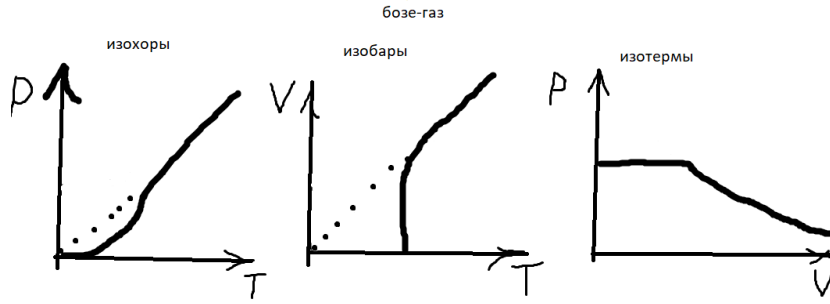


Рис. 1

Задача. 12.

Построить изохоры, изобары и изотермы для ферми-газа.

При $T \ll \varepsilon_F \approx \gamma \left(\frac{N}{v}\right)^{5/3}$

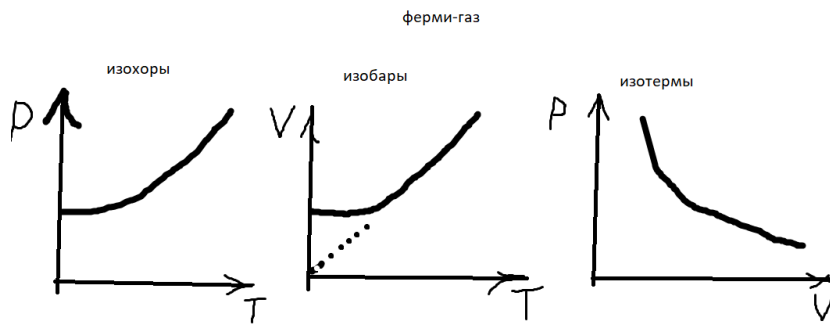


Рис. 2

Задача. 13.

Вычислить теплоемкость двумерного вырожденного идеального ферми-газа.

$$dN_p = g \bar{n}_p \frac{dp_x dp_y dV}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{gV p dp}{2\pi\hbar^2 \left(\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) + 1\right)}$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p dp = m d\varepsilon$$

$$dN_\varepsilon = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) V \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1} = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT \frac{dx}{e^{x-y} + 1}$$

$$E = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT^2 \int_0^\infty \frac{x dx}{e^{x-y} + 1} = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT^2 \left(\left(\frac{\mu^2}{2T^2}\right) + \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$C = \frac{1}{V} \frac{dE}{dT} = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) \frac{\pi^2}{3}$$

Задача. 14.

Вычислить теплоемкость черного излучения.

Химический потенциал фотонного газа равен нулю.

Распределение фотонов дается соотношением:

$$\bar{N}_n = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_k}{T}\right) - 1}$$

Число состояний определяется соотношением

$$2 \frac{V 4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = 2 \frac{V 4\pi \omega_k^2 d\omega_k}{(2\pi c)^3}$$

Дополнительный фактор 2 возникает из-за двух поляризаций фотонов.

Подставляя это число в \bar{N}_n , получаем:

$$dN_\omega = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

Энергия излучения получается из dN_ω умножением на энергию фотона

$$dE_\omega = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} \frac{V \hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

Это - формула Планка.

Дальше считаем свободную энергию.

$$F = T \sum_k \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right) \right] = T \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right] d\omega$$

Заменяя переменную интегрирования $x = \hbar\omega/T$ и интегрируя по частям, отсюда получим

$$F = -\frac{VT^4}{3\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1}$$

Безразмерный интеграл в этом соотношении равен $\pi^4/15$. Итак, свободная энергия равна

$$F = -\frac{\pi^2 VT^4}{45 \hbar^3 c^3} = -\frac{4\sigma}{3c} VT^4$$

Коэффициент σ называется постоянной Стефана-Больцмана:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Г}}{\text{сек}^3 \text{град}^4}$$

(если температура измеряется в градусах Кельвина). Зная свободную энергию, определяем обычную энергию (закон Больцмана)

$$E = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = \frac{4\sigma}{c} VT^4$$

Для теплоемкости излучения в полости с заданным объемом получаем

$$C_V = \frac{16\sigma}{c} VT^3$$

Задача. 15

Найти равновесную плотность и теплоемкость акустических фононов в кристалле при температурах выше T и ниже T дебаевской

Задача. 16

Используя представление оператора смещения гармонического осциллятора

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\hat{b}^+ + \hat{b}), \text{ получить формулу } \langle e^{ik\hat{x}} \rangle = e^{-\frac{k^2\hbar}{4m\omega}} \text{ при температуре } T = 0$$

Задача. 17

Описать парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Рассмотреть эффект де Гааза–ван Альфена в двумерном металле.

Задача. 18. Сравнить низкотемпературные зависимости теплоемкости идеальных бозе-и ферми-газов, черного излучения и твердого тела, парамагнетика и ферромагнетика, неидеального бозе-газа и, наконец, сверхпроводника.

Задача. 19. Показать, что фазовая скорость элементарного возбуждения в бозе-конденсате равна гидродинамической скорости звука.

Задача. 20

. Найти распределение частиц по импульсам и полное число надконденсатных частиц в идеальном и неидеальном бозе-газах при $T = 0$ и низких температурах.

Задача. 21

Определить свободную энергию одномерной цепочки спинов $1/2$ с гамильтонианом

$$\hat{H} = -J \sum_k^N \hat{\sigma}_k^z \hat{\sigma}_{k+1}^z, \quad \hat{\sigma}_{N+1}^z = \hat{\sigma}_1^z$$

Вычислить теплоёмкость и объяснить причину отсутствия фазового перехода при $X \neq 0$

Задача. 22. Для ферромагнетика в модели Гейзенберга при $T = T_c$ определить спектр возбуждений (магнонов) и найти температурную зависимость намагниченности и теплоемкости спиновых волн.

Задача. 23. Для ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении самосогласованного поля определить температуру Кюри T_c , температурную зависимость магнитной восприимчивости и спонтанной намагниченности вблизи T_c . Сравнить с результатами теории Ландау.

Задача. Определить корреляционный радиус флуктуации параметра порядка в нулевом внешнем поле вблизи точки фазового перехода II рода. Найти флуктуационную поправку к теплоемкости при $T = T_c$ в теории Гинзбурга–Ландау.

Задача. 25. Доказать, что плотность сверхтекучей компоненты электронного газа при $T = 0$ равна полной плотности числа частиц.

Задача. 26. В модели БКШ определить скачок теплоемкости.

Задача. 27. Диагонализуя гамильтониан для фотонов и экситонов с учетом гибридизации, получить спектр поляритонов.

Задача. 28. Мешок Нагаоки (спиновый полярон большого радиуса в антиферромагнетике)