Задание по квантовой теории поля

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

8 октября 2020 г.

Аннотация

квантовая теория поля

Содержание

Предисловие

тренируемся, практикуемся

Часть I

Первое задание

1 упражнения

Упражнение. 1

Рассмотреть вещественный 4-вектор в представлении группы Лоренца $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

!!! потом разберу, пока просто из киселева выписки.

4-вектор. Произвольная эрмитово самосопряженная величина V в представлении $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, т.е. несушая пару индексов $\{\alpha\dot{\alpha}\}$, может быть разложена по базису матриц σ^n :

$$(\hat{V})_{\alpha\dot{\alpha}}=\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}V_n$$

причем

$$V^m=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\bar{\sigma}^m\hat{V}\right\}$$

так как, очеви Дно,

$$\operatorname{tr}\{\bar{\sigma}^m\sigma^n\}=2g^{mn}$$

CorJacно установленным нами законами преобразования верхних и нижних спинорных инДексов, преобразования группы $SL(2,\mathbb{C})$ переводят $\hat{V}$ в эрмитову величину

$$\hat{V}'=\Lambda_-\hat{V}\Lambda_-^{\dagger}$$

Которая опять может быть разложена по исходному базису:

$$V'm=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\bar{\sigma}^m\hat{V}'\right\}$$

Заметим, что

$$\det\hat{V}'=\det\left\{\Lambda_-\hat{V}\Lambda_-^{\dagger}\right\}=|\det\Lambda_-|^2\det\hat{V}=\det\hat{V}$$

П ри этом

$$\hat{V}=\left(\begin{array}{cc}V_0+V_3 & V_1-iV_2\\ V_1+iV_2 & V_0-V_3\end{array}\right)$$

а pabenctBo детерминантов (3.61) означает, что преобразование сохраняет лоренцИн вариантную длину 4-вектора, т.е. представляет собой элемент группы Лоренца на 4− векторах. Это представление является Двузначным, так как матрицы Λ_- и $-\Lambda_-$ приводят К иденти чным преобразованиям 4-вектора. В случае инфинитезималь ных преобразований $\omega^{kl}\to 0$

$$\Lambda_-=\not{1}-\frac{i}{2}\sigma_{kl}\omega^{kl},\quad \Lambda_-^{\dagger}=1+\frac{i}{2}\bar{\sigma}_{kl}\omega^{kl}$$

находим, что

$$V'm=V^m+\frac{i}{4}\operatorname{tr}\left\{\bar{\sigma}_{kl}\bar{\sigma}^m\sigma^n-\sigma_{kl}\sigma^n\sigma^m\right\}\omega^{kl}V_n$$

Упражнение. 2

Доказать равенства

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\beta^{\alpha}=2g^{\mu\nu}\delta_\beta^\alpha$$
$$(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu+\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}=2g^{\mu\nu}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$$

По определению $\sigma^\mu=(1,\sigma^i),\bar{\sigma}^\mu=(1,-\sigma^i)$.

Посчитаем отдельно

$$(\sigma^0\bar{\sigma}^i + \sigma^i\bar{\sigma}^0) = (-\sigma^i + \sigma^i) = 0$$
$$(\sigma^i\bar{\sigma}^j + \sigma^j\bar{\sigma}^i) = -(\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) = -2\delta^{ij}$$

Поэтому

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^\alpha_\beta = 2g^{\mu\nu}\delta^\alpha_\beta$$

?????????
Что с точечным индексом? в чем его особенность?

Упражнение. 3
Доказать равенства

$$\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda\delta^\mu_\rho\right\} - \tfrac{i}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$
$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\lambda\delta^\mu_\rho\right\} + \tfrac{i}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

По определению

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\bar{\sigma}^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\bar{\sigma^\mu}\sigma^\nu - \bar{\sigma^\nu}\sigma^\mu)$$

Посмотрим, как можно их расписать через компоненты.

$$\sigma^{00} = 0$$
$$\sigma^{0i} = -\sigma^{\nu\mu} = \tfrac{i}{4}(\sigma^0(-\sigma^i) - \sigma^i\sigma^0) == -\tfrac{i}{2}\sigma^i$$
$$\bar{\sigma^0}^i = \tfrac{i}{2}\sigma^i$$
$$\bar{\sigma}^{ij} = \tfrac{i}{4}(-\sigma^i\sigma^j - (-\sigma^j)\sigma^i) = -\tfrac{i}{4}\cdot 2i\varepsilon_{ijk}\sigma^k = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k$$
$$\bar{\sigma}^{ij} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k$$

В последних равенствах использовалось соотношение на матрицы Паули:

$$\sigma^i\sigma^j = i\varepsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij}\sigma^0$$

Таким образом, исходное уравнение для пространственных индексов $\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\}$ можно переписать как:

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{kl}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijm}\sigma^m\frac{1}{2}\varepsilon_{kln}\sigma^n\right\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}\,\mathrm{tr}\left\{\sigma_m\sigma^n\right\} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}\,\mathrm{tr}\left\{2\delta^{mn}\right\}$$

И дальше просто преобразуем до конца:

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{kl}\right\} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln} = 1\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

А если есть временной индекс, то

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{ij}\sigma^{k0}\right\} = \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^n\frac{i}{2}\sigma^k\right\} = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk0} = \frac{i}{2}\varepsilon^{k0}_{ij}$$

В последнем переходе показано как от трехмерного символа Леви-Чевиты перейти к четырехмерному. Также при подъеме пространственной части метрика домножилась на (-1), а при подъеме временной - на 1.

Осталось разобрать случай

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{i0}\sigma^{k0}\right\} = -\left(\frac{i}{2}\right)^2\mathrm{tr}\left\{\sigma^i\sigma^k\right\} = \frac{1}{2}\delta_{ik} \equiv \frac{1}{2}[\delta^k_i\delta^0_0 - \delta^0_i\delta^k_0]$$

Собирая все вместе, получаем

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

Теперь то же самое для $\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right\}$
????
действуя аналогично, получаем:
..

$$\mathrm{tr}\left\{\sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$$

Упражнение. 4

Показать, что величины

$$\theta\sigma^{\mu}\bar{\chi} = \theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad \text{и} \quad \bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\chi = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}^{\mu}\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_{\alpha}$$

ведут себя так же, как 4-векторы.

То есть нужно доказать, что

Упражнение. 5

Доказать, что $(\theta_{\alpha})^{\dagger} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$и $\left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right)^{\dagger} = \chi^{\alpha}$.

Напомним, что по определению $(\theta_{\alpha})^{\dagger} = (\theta_{\dot{\alpha}})^{*}$, то есть мы совершаем комплексное сопряжение над спинором, а также заменяем точечный индекс на неточечный. (????)

Совершим преобразования поднятия индексов и перехода из сопряженного спинора к обычному над $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$:

$$\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}[i\sigma_2^{\alpha\dot{\beta}}\theta_{\alpha}]^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \theta^{*}_{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\theta^{*}_{\alpha} = (\theta_{\alpha})^{\dagger}$$

Упражнение. 5

Покажите, что представления группы Лоренца со спином $s = 1 : (1,0)$ и $(0,1)$ отвечают самодуальным и антисамодуальным тензорным полям второго ранга в пространстве-времени Минковского, т.е. при определении поля, дуального к $B_{\mu\nu}$, как

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu\mu'\nu'}B_{\mu'\nu'}$$

имеют место соотношения самодуальности и антисамодуальности в пространстве-времени Минковского:

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \pm\mathrm{i}B^{\mu\nu}$$

[Hint: При выводе учесть, что представления (1,0) и $(0,1)-$ это бесследовые матрицы в индексах с точками и без точек.]

Упражнение. 7

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского имеет вид

$$W^2 = -\frac{1}{2}\left\{p^2S^2 - 2p_{\nu}p^{\mu}S_{\mu\lambda}S^{\nu\lambda}\right\}$$

2 задачи

Задача. 1.^{C}

Доказать, что компоненты псевдовектора Паули–Любанского для безмассовых полей равны

$$W_0 = \hbar \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}, \quad W^\alpha = \hbar \left\{ p_0 \boldsymbol{s}^\alpha \mp \mathrm{i} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s})^\alpha \right\}$$

Задача. 2.^{C}

Доказать, что квадрат псевдовектора Паули-Любанского для безмассовых полей имеет вид

$$W^2 = -4 p_0^2 \hbar^2 \left\{ \partial^+ \cdot \partial^- - \frac{1}{p_0^2} \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\jmath}^+ \right) \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\jmath}^- \right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0} \boldsymbol{p} \cdot \left(\boldsymbol{J}^+ \times \boldsymbol{\jmath}^- \right) \right\}$$

Задача. 3.^{C}

Найти поток частиц с релятивистской нормировкой состояний

$$\langle \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k}' \rangle = 2\epsilon(\boldsymbol{k}) (2\pi)^3 \delta \left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}' \right)$$

Задача. 4.^{C}

Показать, что для свободного комплексного скалярного поля электрический заряд выражается через лоренц-инвариантные амплитуды $a(\boldsymbol{k})$ и $a_c(\boldsymbol{k})$ в виде

$$Q = \int \mathrm{d}^3 r j^0 = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} e \left\{ a^*(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) - a_c^*(\boldsymbol{k}) a_c(\boldsymbol{k}) \right\}$$

Задача. 5

Для решения в виде плоской монохроматической волны для скалярного поля

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} kx}$$

найти, что компоненты тензора энрегии-импульса

$$T_0^0 \mapsto k_0, \quad T_0^\alpha \mapsto \boldsymbol{k}$$

Задача. 6

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} kx}$$

Найти, ЧТО КОМПОНенТы ТОКа

$$j^0 \mapsto \pm e, \quad j^\alpha \mapsto \pm e \boldsymbol{k}$$

Задача. 7.^{C} Какой вид имеет тензор энергии-импульса релятивистски инВариантного вакуума?

Задача. 8

Для правого вейлевского спинора покажите, что из уравнения движения следует тождество

$$\frac{1}{\hbar} \boldsymbol{W} \bar{\chi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{p} \bar{\chi}$$

Задача. 9

Показать, что если

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\bar{\chi}(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\bar{\chi}(\boldsymbol{p}),$$

то спинор

$$\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = -\mathrm{i}\sigma_2\bar{\chi}^*(\boldsymbol{p})$$

удовлетворяет уравнению

$$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_{cp}(-\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|\chi_{cp}(-\boldsymbol{p})$$

Задача. 10.

Вычислить гамильтониан правого вейлевского спИнора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод. 11.С Вычислить заряд правого вейлевского

Задача. Вычислить заряд правого вейлевского спинора в терминах амплитуд релятивистски нормированных мод.

Задача. 12

Показать, что проекторы на состояния с заданной проекцией спина частицы на вектор поляризации имеют вид

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 + \lambda\gamma_5 \notin\right)$$

а для античастиц -

$$P_{\pm}^{c} = \frac{1}{2}\left(1 - \lambda\gamma_5 \notin\right)$$

НОГО 4 -имПульсу p :

$$\lambda = \pm 1, \quad \epsilon^2 = -1, \quad \epsilon\cdot p = 0$$

Задача. 13.^{C} Вычислить сумму по поляризациям дираковских частиц и античастиц:

$$\Pi(\boldsymbol{p}) = \sum_{\lambda} u_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{u}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not{p} + mc, \quad \Pi^c(\boldsymbol{p}) = \sum_{\lambda} v_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{v}_\lambda(\boldsymbol{p}) = \not{p} - mc$$

Задача. 14 Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для биспинора Дирака с юкавским взаимодействием с вещественным скалярным полем. Записать правила Фейнмана.

Задача. 15.С Вывести уравнения Швингера–Дайсона и графическое представление для двухточечной вершинной функции для скалярной электродинамики. Записать правила Фейнмана.

Задача. 16. ^{C} Вывести уравнения ШВИНГера-Дайсона и графическое представЛение для дВухточечной вершинной фунКции для массивного скалярНОГО ПОЛя с самодействием $\lambda\phi^4/4!$. Записать правила Фейнмана.

Задача. 17. ^{C} Доказать, ЧТО число петель N_L В ДИаграмме с N_V степенями Действия взаимодействия V, Числом связных компонент диаграммы N_c и числом внутренних линий N_I ОПределяется соотношением

$$N_L = N_I + N_c - N_V$$

Привести примеры одно- и ДВухпетлевых диаграмм с одно- и ДВухсвяЗНыми компонентами в теории с взаимодействием $V \sim \lambda\phi^4$

Задача. 18. ^{C} Доказать, что разложение связных Диаграмм по петЛЯм совПадает с разложением по постоянной Планка $\hbar$

Часть II
Второе задание

3 упражнения

Упражнение. 8. ^{C} Пользуясь антикоммутатором, ВычислИТь следы произведений Гамма-матриц Дирака:

$$\begin{array}{c} \mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{\mu}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu'}\right) \\ \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu'}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right), \quad \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\right) \end{array}$$

Упражнение. 9. ^{C} Доказать, что след нечетного числа гамма-матриц Дирака равен НулЮ, а ДЛя четного n Имеет место соотношение редукции

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\right) = g^{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_3}\ldots\gamma^{\mu_n}\right) + g^{\mu_1\mu_3}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}\ldots\gamma^{\mu_n}\right) + \ldots$$

Упражнение. Упростить Выражения

$$\gamma_{\mu}\,\not{p}\gamma^{\mu}, \quad \gamma_{\mu}\,\not{p}\,\not{k}\gamma^{\mu}$$

Упражнение. Рассмотреть тождества Фирца для гамма-матриц Дирака.

4 задачи

Задача. 19.^{C} В ведушем порядке теории возмушений КВантовой электродиНамики вычислить дифференциальное и полное сечения элеткронПОЗитронной аннигиляции в мюон-антимюон: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Задача. 20.^{C} В ведушем порядке теории возмушений Квантовой электродиНамиКи Вычислить дифференциальное и полное сечения элеткрон- скалярными частицами: $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. Сравнить распределение по уГЛам в системе центра масс с распределением в случае образования МНООНОВ

Задача. 21.^{C} В ведушем порядке теории возмушений КВантовой электродинаМИКи Вычислить дифференциальное сечение комптоновского рассеяния фотона на электроне: $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Задача. 22.^{C} Вычислить сечение рассеяния электронов на мюонном нейтрино в модели с четырёхфермионном взаимодействием: $e^-\nu_\mu \to \nu_e\mu^-$

Задача. 23. ^{C} Вычислить ширину трёхчастичного распада мюона на электрон и нейтрино: $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$

Задача. 24.^{C} Вычислить время дВухчастичного распада заряженного пиона: $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$. Сравнить ширину распада пиона на электрон и мюон.

Задача. 25.^{C} Вычислить время распада нейтрона: $n \to pe^-\bar{\nu}_e$

Задача. 26. * Вычислить пирину дВухчастичного распада Z -бозона на нейтриНО : $Z \to \nu\bar{\nu}$

Задача. 27. ^{C} В ведушем порядке теории возмушений КХД вычислить сечение $\bar{q}q \to \bar{c}c$

Задача. В ведущем порядке теории возмущений КХД вычислить сечение рождения очарованных кварков в глюон-глюоннном слиянии: g g cc. Рассмотреть синглетный и октетный по цвету вклады в сечение.

Список литературы