статистическая физика

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

14 декабря 2020 г.

Аннотация

Задачи по статической физике.

Содержание

Предисловие

Задачи по статистической физике.

Часть I
упражнения

Упражнение. 1

N молекул идеального газа в объеме V. Определить вероятность того, что в объеме $v < V$ находится n молекул. Получить приближенное выражение, когда $v \ll V$. Найти среднее число частиц $\overline{n}$ в объеме v, его среднюю абсолютную и относительную флуктуации.

Вероятность попадания ровно одной молекулы в объем V равна $p = \frac{v}{V}$. Поэтому вероятность попадания ровно n молекул в объем V равна

$$p^n(1-p)^{N-n}$$

В объем сосуда могут попасть разные молекулы, всего нужных нам комбинаций:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Поэтому искомая вероятность:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Поищем предел $v \ll V$, для него можно считать, что $p \ll 1, n \gg 1$, также можно предположить, что $np = \lambda$, которое конечно и не слишком мало, не слишком велико. В таком случае имеется известный предел - распределение становится распределением Пуассона.

$$P(n) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{np^k}{k!} e^{-np}$$

Среднее значение $\overline{n}$ можно найти, зная, что вероятность попадания в данный объем линейно зависит от объема:

$$\overline{n} = \frac{v}{V} N = Np$$

Или то же самое, если записать по определению среднего:

$$\overline{n^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_N^n n^k p^n q^{N-n} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} C_N^n p^n q^{N-n} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^k (p+q)^N$$

Тогда

$$\bar{n} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)(p+q)^N = pN(p+q)^{N-1} = pN$$

$$\overline{n^2} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 (p+q)^N = pN + pNp(N-1) = pN[1+p(N-1)]$$

и дисперсия $\sigma_n^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = pN[1 + pN - p - pN] = Npq$

А относительная флуктуация равна:

$$\frac{\sqrt{Dn}}{\overline{n}} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{Np}}.$$

Пусть $v \ll V, \overline{n} \gg 1$

$$P_u(v) = P(n,\lambda) = \frac{\lambda^n e^{\lambda}}{n!}$$

Используя формулу Стирлинга, получаем:

$$P_n(\sigma) \approx \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e\lambda}{n}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\lambda + n + n \ln\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)$$

Просто преобразуем $P(v)$, введя $x \equiv \lambda - n$, тогда логарифм раскрывается так: $\ln \frac{\lambda}{n} = \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \approx \frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2$

$$P_4(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-x + x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{n}\right) = P_4(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(\frac{(\lambda - n)^2}{2\lambda}\right)$$

это распределение Гаусса

Упражнение. 2

Вычислить $C_p - C_v$ в переменных V, T и P, T.

Определить $C_p - C_v$ для больцмановского газа, газа Ван-дер-Ваальса, ферми и бозе-газа и черного излучения.

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + pdV,$$

поэтому:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Считая внутреннюю энергию U функцией температуры и объема, можем записать

$$C_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1}$$

Выражение в квадратных скобках в правой части легко вычислить, воспользовавшись фундаментальным равенством Гиббса:

$$TdS = dU + pdV$$

Имеем:

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p$$

Далее, из соотношения

$$dF = -SdT - pdV$$

следует равенство

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Теперь с помощью соотношения 1 получаем

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

И используя

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1,$$

запишем:

$$C_p - C_V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T^{-1} \tag{2}$$

или

$$C_p - C_V = -T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T^{-1} \tag{3}$$

Теперь применим эти формулы для больцмановского газа, для которого $pV = \nu RT$, имеем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\nu R}{p}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{\nu RT}{p^2}$$

Поэтому при подстановке в 2 много множителей сокращаются и имеем:

$$C_p - C_V = \nu R$$

Теперь применим эти формулы для газа Ван-дер-Ваальса, для которого $\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT$. Будем для просто ты считать, что $\nu = 1$. И также тут разумнее подставлять все в 3 Получаем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$

Таким образом, подставляем и получаем:

$$C_p - C_V = \frac{TR}{T - \frac{2a}{V^3}(V-b)^2}$$

Теперь применим эти формулы для фермии и бозе-газа, для которых $\frac{pV}{NT} = 1 \pm \alpha\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}$. Подставим, посчитаем производные, придем к ответу:

$$C_p - C_V = \frac{N(\alpha T_0^{3/2} N \mp 2T^{3/2}V)^2}{\pm 8\alpha T_0^{3/2} N T^{3/2} + 4T^3V^2}$$

Теперь применим эти формулы для черного излучения. Для такого: $p = \frac{a}{3}T^4$. Поэтому для него $C_p - C_V \to \infty$

Упражнение. 3

Вычислить число состояний одноатомного больцмановского газа.

Пусть имеется частиц N частиц в объеме V. Поступательное движение частиц всегда квазиклассично. В классической механике состояние системы характеризуется точкой в $6N-$ мерном фазовом пространстве

$$\alpha = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{r_N}, \mathbf{p_N}) \tag{4}$$

Число точек в элементе 6 -мерного фазового объема dr^3dp^3 согласно правилу Бора-Зоммерфельда равно отношению этого объема к $(2\pi\hbar)^3$. Обобщение этого правила на случай N одинаковых частиц дает дифференциал числа состояний

$$d\Gamma_\alpha = \frac{1}{N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{d^3r_id^3p_i}{(2\pi\hbar)^3}$$

Произведение дифференциалов поделено на $N!$ для того, чтобы все конфигурации, положения частиц в $6N$ -мерном фазовом пространстве, отличающиеся друг от друга лишь перестановками тождествен ных частиц, учитывались только один раз. С помощью 4 произвольная сумма по состояниям может быть представлена в форме интеграла

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha} = \int d\Gamma_{\alpha} F_{\alpha}$$

Полное число состоя ний - число точек в $6N$ -мерном пространстве с энерг ией

$$E_{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

А так как $\Gamma(E) = \sum_{\alpha} \theta\left(E - E_{\alpha}\right)$, то в интервале между 0 и E выражается интегралом:

$$\Gamma(E) = \int d\Gamma_{\alpha} \theta\left(E - E_{\alpha}\right) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^{N} \frac{d^3 r_i d^3 p_i}{(2\pi\hbar)^3} \theta\left(E - \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}\right)$$

Интегрирование по пространственным координатам каждой частицы дает объем V, и с учетом формулы Стильтьеса получаем

$$\Gamma(E) = \left(\frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3}\right)^N J_{3N}(E)$$

$$J_{3N}(E) = \int \prod_{i=1}^{N} d^3 p_i \theta\left(E - \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}\right) \text{ – объем 3n мерного шара радиусом p}$$

$$V_{3N}(p) = \frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} p^n \approx \left(\frac{2e\pi p^2}{3N}\right)^{3N/2}$$

Тогда:

$$\Gamma(E) = \left(\frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3}\right)^N \left(\frac{4e\pi m E^2}{3N}\right)^{3N/2}$$

Упражнение. 4

Вычислить число состояний системы N независимых спинов $1/2$.

Систему N спинов $S = \frac{1}{2}$, находящихся в магнит ном поле B, будем описывать гамильтонианом

$$H = -2\mu B \sum_{i=1}^{N} \left(s_i^z - \frac{1}{2}\right)$$

Энергия одного спина в магнитном поле, равная $-2\mu B s^z \left(s^z = \pm\frac{1}{2}\right)$, сдвинута на константу, чтобы минимальная энергия была равна нулю. Если $(\vec{N} - M)$ спинов находятся в основном состоя нии $(s^z = 1/2)$, а M спинов – в возбужденном $(s^z = -1/2)$, то система имеет энергию $E = M\Delta E$, где $\Delta E = 2\mu B$. Такая энергия может быть полу чена числом способов, равным:

$$\Delta\Gamma_M = \frac{N!}{M!(N-M)!} \tag{5}$$

Это и есть наше требуемое число состояний.

При больших значениях аргумента по формуле Стирлинга факториал приближенно равен

$$N! \approx (N/e)^N$$

и выражение 5 принимает вид

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{M}\right)^M \left(\frac{e}{N-M}\right)^{N-M} = \frac{N^N}{M^M (N-M)^{N-M}}$$

Из этого выражения можно найти энтропию и другие характеристики, но о них не спрашивается, так что задача решена.

Упражнение. 5

Вычислить число состояний системы N одинаковых независимых осцилляторов.

За вычетом энергии нулевых колебаний энергия системы равна

$$E = \Delta E \sum_{i=1}^{N} n_i, \quad \Delta E = \hbar\omega$$

где n_i - номер возбуждения i -того осциллятора. Это значение энергии может быть получено числом способов, которое следует из комбинаторики

$$\Gamma = \frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!} \approx \frac{(N+M)^{N+M}}{N^N M^M}$$

Упражнение. 6

Получить выражения для неравновесной энтропии ферми- и бозе-газов

Вероятность произвольного состояния:

$$w_\alpha = w\left(_{p_1}\right) \cdot w\left(u_{p_2}\right) w\left(u_{p_3}\right) \cdot ...$$

$$S = -\sum_x w_\alpha ln w_\alpha = -\sum_{n_{p_1}} \sum_{n_{p_2}} \sum_{n_{p_3}} \ldots \left(w\left(u_{p_2}\right) w\left(u_{p_3}\right) \cdot ...\right)(\ln w(n_{p_1}) + \ln w(n_{p_2}) + ...)$$

$$S = -\sum_{n_{p_1}} w(n_{p_1}) \ln w(n_{p_1}) + \ldots$$

Для ферми газа:$n_p = \{0, 1\}$

$$-\sum_{n_p} w(n_p) \ln w(n_p) = -w(n_{p_1}) \ln w(n_{p_1}) + w(n_{p_0}) \ln w(n_{p_0})$$

среднее число частиц с импульсом $p : \overline{n_p} = \sum_{n_p} w(n_p) n_p = w(1_p)$

$$w(0_p) = 1 - \overline{n_p}$$

поэтому:

$$-\sum_{n_p} w(n_p) \ln w(n_p) = -(1-\overline{n_p}) \ln(1-\overline{n_p}) - \overline{n_p} \ln \overline{n_p}$$

В итоге энтропия для ферми газа равна:

$$S_F = -\sum_p \left((1-\overline{n_p}) \ln(1-\overline{n_p}) + \overline{n_p} \ln \overline{n_p}\right)$$

Теперь то же для бозе-газа. Для него $n_p \in \{0, ...\infty\}$

Сумма $\left[-\sum_{n_p} w(n_p)\ln(n_p)\right]$ принимает максимальное значение при заданном $\overline{n_p}$ при условии на функцию Лагранжа:

$$L = -\sum_{n_p} w(n_p)\ln(n_p) - \lambda_1 \sum_n n w(n) - \lambda_2 \sum_n w(n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w(n)} = -\ln w(n) - 1 - \lambda_1 n - \lambda_2$$
$$w(n) = \exp\left(-1 - \lambda_1 n - \lambda_2\right)$$

$$\sum w_n = 1 \Rightarrow \exp\left(-1 - \lambda_1 n - \lambda_2\right) = 1$$
$$\sum \exp\left(-1 - \lambda_2\right) \sum_n \exp(-\lambda_1 n) = 1$$

$$\sum_n \exp\left(-\lambda_1 n\right) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1}} \Rightarrow \exp\left(-1 - \lambda_2\right) = 1 - e^{-\lambda_1}$$

$$\bar{n} = \sum_n w(n) n = \exp\left(-1 - \lambda_2\right) \sum_n n \exp\left(-\lambda_1 n\right) = \exp\left(-1 - \lambda_2\right)$$
$$\left(-\frac{d}{d\lambda_1} \sum_n \exp\left(-\lambda_1 n\right)\right) = -\exp\left(-1 - \lambda_2\right) \frac{d}{d\lambda_1} \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1}}$$
$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\lambda_1} - 1}$$
$$e^{-\lambda_1} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}$$

Поэтому после преобразований получаем:

$$w(n) = \frac{1}{\bar{n} + 1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S = -\sum_n w(n) \ln w(n) = \sum_n w(n) \left(\lambda_1 n + \lambda_2 + 1\right) = \\ = \sum_n w_n \left(\lambda_2 + 1\right) + \sum_n n w_n \lambda_1 = \left(\lambda_2 + 1\right) + \bar{n}\lambda_1 = \\ = (\bar{n} + 1)\ln(\bar{n} + 1) - \bar{n}\ln\bar{n} \end{aligned} \tag{6}$$

В итоге:

$$S = \sum_p \left[\left(1 + \bar{n}_p\right) \ln\left(1 + \bar{n}_p\right) - n_p \ln \overline{n_p}\right]$$

Упражнение. 7

Вычислить основные термодинамические величины ферми- и бозе-газов при $T = 0$

Для ферми газа:

$$N = \sum_p N_p \approx \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} n_p 4\pi p^2 dp = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} p_F^3$$

$$E = \sum_p (E_p n_p) \approx \frac{2V4\pi}{(2\pi\hbar)^3 2m} \int_0^{p_F} p^4 d(p) = \frac{3}{5} N E_F$$

Давление находится по известной формуле:

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{3}{10} \left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{N^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{1}{5} \left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} n E_F$$

Упражнение. 8

Из функционала Гинзбурга–Ландау получить выражение для плотности тока в магнитном поле, получить уравнение Лондонов и квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце.

Потенциал Гиббса во внешнем магнитном поле H_0 вблизи T_c можно представить в виде разложения по малому параметру Ψ :

$$G_{sh} = G_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{(\operatorname{rot} \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}, \qquad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$$

G_n– плотность свободной энергии в нормальном состоянии.

Найдем, при каких значениях Ψ и A свободная энергия Гиббса

$$\mathcal{G}_{sH} = \mathcal{G}_n + \int dV \left[\alpha |\Psi|^2 + \tfrac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \tfrac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \tfrac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \tfrac{(\operatorname{rot} \mathbf{A})^2}{8\pi} - \tfrac{\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right]$$

имеет минимум?

Первое условие минимума

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = 0$$

Вычислим его:

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[\alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \tfrac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \tfrac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) \left(-i\hbar \nabla \Psi - \tfrac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) \right]$$

Подчеркнем, что действие оператора ∇ ограничено соответствующими круглыми скобками.

Введем обозначение

$$\mathbf{p} = \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)$$

Тогда последнее слагаемое перепишется в виде

$$\int dV \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) (\mathbf{p} \Psi)$$

Преобразуем выражение:

$$\int dV \left(\nabla \delta \Psi^* \right) (\mathbf{p} \Psi) = \int dV \left(\nabla \delta \Psi^* (\mathbf{p} \Psi) \right) - \int dV \delta \Psi^* \nabla (\mathbf{p} \Psi)$$

Первый интеграл преобразуем в интеграл по поверхности сверхпроводника

$$\int dV \nabla \left(\delta \Psi^* (\mathbf{p} \Psi) \right) = \oint d\mathbf{S} \delta \Psi^* (\mathbf{p} \Psi)$$

Поэтому в вариации с точностью до поверхностного члена выше можно сделать замену

$$(\nabla\delta\Psi^*)\,(\mathbf{p}\Psi) \to -\delta\Psi^*\nabla(\mathbf{p}\Psi)$$

Тогда последний член будет иметь вид:

$$\int dV\frac{1}{4m}\left(i\hbar\nabla\delta\Psi^* - \frac{2e}{c}A\delta\Psi^*\right)(\mathrm{p}\Psi) = \int dV\frac{1}{4m}\delta\Psi^*\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}A\right)^2\Psi$$

И в итоге вариация запишется как:

$$\delta_{\Psi^*}g_{sH} = \int dV\left[\alpha|\Psi| + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\Psi\right]\delta\Psi^* + \oint d\mathbf{S}\delta\Psi^*(\mathbf{p}\Psi) = 0$$

Последнее равенство должно быть справедливым при произвольном $\delta\Psi^*$.
Получаем первое уравнение Гинзбурга-Ландау

$$\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}A\right)^2\Psi = 0$$

и граничное условие

$$\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\Psi\mathbf{n} = 0$$

Последний член преобразуем с помощью тождества

$$\mathbf{a}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{b} = \ \mathrm{brota\text{-}div}\ [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\ .$$

В результате, преобразуя член с дивергенцией в поверхностный интеграл, получим

$$\int dV\frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}}{4\pi} = \int dV\delta\mathbf{A}\frac{\mathrm{rotrot}\,\mathbf{A}}{4\pi} - \oint d\mathbf{S}[\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\times\delta\mathbf{A}]$$

На поверхности сверхпроводника магнитное поле считается заданным, где, следовательно $\delta\mathbf{A} = 0$.

Подставляя это, внутри сверхпроводника получим

$$\frac{i\hbar e}{2mc}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) + \frac{2e^2}{mc^2}\mathbf{A}|\Psi|^2 + \frac{\mathrm{rotrot}\,\mathbf{A}}{4\pi} = 0$$

Вспомним теперь, что

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Уравнение Максвелла гласит

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

Тогда можем получить выражение для сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) - \frac{2e^2}{mc}A|\Psi|^2$$

Перейдем к безразмерной функции ψ, обозначив

$$\psi = \Psi/\Psi_0, \qquad |\Psi_0|^2 = \frac{n_s}{2} = |\alpha|/\beta$$

Введем также обозначения

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} = \frac{mc^2\beta}{8\pi e^2|\alpha|}$$

Тогда уравнения Гинзбурга- Ландау перепишутся в виде

$$\xi^2 \left(i\nabla + \tfrac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A}\right)^2 \psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0$$
$$\mathrm{rotrot}\ \mathbf{A} = -i\tfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \tfrac{|\psi|^2}{\lambda^2}\mathbf{A}$$

Напомним, что $\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e}$

Пренебрежем неоднородностью n_s и представим волновую функцию ψ в виде $\psi = |\psi|e^{i\theta}$.

Тогда второе уравнение ГЛ перепишется в виле

$$\mathrm{rotrot}\,\mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right)$$

Это уравнение обобщает уравнение Лондонов $\mathbf{B} + \lambda_L^2\ \mathrm{rot}\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$, делая его калибровочно инвариантным.

Из него следует интересный эффект - квантование магнитного потока.

Пусть в массивном сверхпроводнике имеется полость.

Поскольку он не является односвязным, то в сверхпроводнике могут существовать поверхностные сверхпроводящие токи, приводящие к наличию магнитного потока в полости.

Выберем в толще сверхпроводника замкнутый контур, охватывающий эту полость, в нем $\mathrm{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0$.

Следовательно, интеграл по этому контуру от левой части уравнения ГЛ равен нулю. Таким образом,

$$\oint\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right)d\mathbf{l} = \mathbf{0}$$

По своему физическому смыслу θ, фаза волновой функции, должна обеспечивать однозначность последней.

Это возможно, если изменение θ при обходе по замкнутому контуру кратно 2π. Интеграл от вектор потенциала $\mathbf{A}$, преобразованный к интегралу от $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ по поверхности, определяет магнитный поток через полость

$$\oint \mathbf{A}d\mathbf{l} = \int \mathrm{rot}\,\mathbf{A}d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}d\mathbf{S} = \Phi$$

Таким образом, получаем

$$\Phi = \oint \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta d\mathbf{l} = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e}, n - \text{ целое.}$$

Таким образом, магнитный поток в полости квантуется, а квантом является параметр Φ_0.

Упражнение. 9

Вычислить среднее от произведения четырех ферми-операторов $\left\langle \hat{a}_k^+\hat{a}_p^+\hat{a}_u\hat{a}_v\right\rangle$, где $\langle\cdots\rangle-$ усреднение по состоянию невзаимодействующих частиц с заданной температурой и химпотенциалом.

(Преподаватель эту задачу убрал)

Упражнение. 10

Записать оператор взаимодействия электронов с внешними электрическим и магнитным полями в представлении вторичного квантования.

???

Упражнение. 11

Вычислить $\langle \exp(-iq\hat{x}) \rangle$, где $\hat{x}$ оператор смещения одномерного гармонического осциллятора.

???

Упражнение. 12

Определить температурную зависимость среднеквадратичного смещения атомов от положения равновесия $\langle R_k R_p \rangle$, где $\langle ... \rangle$ обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой, Rk – смещение атома в k-направлении. Объяснить происхождение нулевых колебаний.

Упражнение. 13

Используя результаты предыдущей задачи, вычислить среднее от произведения четырех операторов смещения, относящихся к одной и той же ячейке: $\left\langle \hat{R}_k \hat{R}_p \hat{R}_i \hat{R}_j \right\rangle$, где $\langle \cdots \rangle$ обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой, $\hat{R}_k$– смещение атома в k -направлении $(k = x, y, z)$

(Преподаватель эту задачу убрал)

Упражнение. 14

Для электронов, находящихся под поверхностью Ферми, произвести переход к дырочному представлению. Записать полный гамильтониан идеального ферми-газа, используя операторы рождения и уничтожения квазичастиц (электронов над поверхностью Ферми и дырок под поверхностью Ферми). Определить химический потенциал и энергетический спектр полученных квазичастиц.

(Преподаватель эту задачу убрал)

Упражнение. 15

Вычисляя первую поправку термодинамической теории возмущений, найти вклад прямого и обменного взаимодействия для ферми- и бозе-частиц. Сравнить результаты

Упражнение. 16

В преобразовании Боголюбова для электронов получить при T Tc связь операторов поглощения квазичастиц и поглощения голых электронов.

(Преподаватель эту задачу убрал)

Часть II

задачи

Задача. 1

Показать, что замкнутая система из двух равновесных подсистем имеет максимальную энтропию, когда у подсистемы равны температура, давление и химические потенциалы.

Энтропию замкнутой системы, образованной из двух равновесных подсистем, определим как:

$$S = S_1(E_1) + S_2(E_2)$$

Такая энтропия максимальна, когда обе подсистемы имеют одинаковую температуру, химический потенциал и давление. Действительно: при постоянстве полной энергии $E = E_1 + E_2$ будет выполняться:

$$\frac{dS}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2}\frac{d(E-E_1)}{dE_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0$$

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\left(\frac{1}{T^2C_V}\right)_1 - \left(\frac{1}{T^2C_V}\right)_2 < 0$$

Поэтому в случае максимума энтропии температуры подсистем одинаковы.

Аналогично, варьируя энтропию системы по объему и числу част иц одной из подсистем при условии постоянства полного объема и полного числа частиц (Используя $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{1}{T}(-p), \frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\partial S}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial N} = \frac{1}{T}\mu\Big)$, находим, что Энтропия максимальна, когда равны друг другу давления и химические потенциалы подсистем.

Задача. 2

Найти кривую фазового равновесия газ-жидкость $p(T)$.

При изменении T и P выполняются равенства

$$d\mu_1 = -s_1dT' + v_1dP, \quad d\mu_2 = -s_2dT + v_2dP$$

Поскольку $\mu_1(P,T) = \mu_2(P,T')$, то $d\mu_1 = d\mu_2$, отку да следует

$$(s_2 - s_1)\, dT = (v_2 - v_1)\, dP \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

Введем обозначение: $q_{12} = T(s_2 - s_1)$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2 - v_1)}$$

Пусть фаза 1 - пар, фаза 2 - жидкость, $s_2 \ll s_1$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_1}{v_1} = \frac{pS_1}{T}$$

Если $s_1 = const$, то $p = AT^{s_1}$

Задача. 3

Определить энтропию газа N невзаимодействующих спинов $\sigma = 1/2$ в магнитном поле при заданной энергии. Определить понятие температуры и показать, что она может быть отрицательной. Обсудить температурную зависимость теплоемкости. Сравнить с задачей о системе невзаимодействующих двухуровневых частиц.

Вспомним упражнение, в котором мы вычисляли число состояний для системы спинов. Это число оказалось равным

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{M}\right)^M \left(\frac{e}{N-M}\right)^{N-M} = \frac{N^N}{M^M(N-M)^{N-M}}$$

Логарифм этой величины можно представить в форме

$$\sigma^* = \ln\Delta\Gamma = -N(n\ln(n) + (1-n)\ln(1-n))$$

Величина

$$n = \frac{M}{N} = \frac{E}{(N\Delta E)}$$

Определим температуру τ с помощью формул статистической физики:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E}\ln\left(\frac{1-n}{n}\right)$$
$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1-n)}$$

Обратим внимание, что с ростом среднего числа возбужденных спинов n от нуля до половины температура τ растет от нуля до бесконечности, а при дальнейшем возрастании числа n в интервале $1/2 < n < 1$ "температура"τ отрицательна.

Состояние с отрицательной температурой возможно только для систем с конечным числом всех состоя ний системы. В данном случае это число равно 2^N.

Исследуем зависимость теплоемкости. Для этого ее по определению посчитаем:

$$c(T) = \frac{dE}{dT} = \Delta E_N \frac{dn}{dT} = \frac{\Delta E^2 N \exp(\Delta E/T)}{T^2(1+\exp(\Delta E/T))^2}$$

Видим, что теплоемкость спадает по закону $c(T) \sim \exp\left(\frac{-\delta E}{T}\right), \quad T \to 0; c(T) \sim \frac{1}{T^2}, \quad T \to \infty$

Задача. 4

Определить энтропию газа N невзаимодействующих осцилляторов при заданной энергии E. Получить связь между энергией и температурой T. Обсудить отличие температурного поведения теплоемкости от предыдущей задачи.

Из упражнения про осциллятор мы имеем значение числа состояний:

$$\frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!} \approx \frac{(N+M)^{N+M})}{N^N M^M}$$

Статистическая энтропия системы равен логарифму формулы выше:

$$\sigma = \ln\Delta\Gamma = N(-n\ln(n) + (1+n)\ln(1+n)), \quad n = \frac{M}{N}$$

здесь $n = M/N = E/(N\Delta E)-$ среднее число возбуждений, приходящихся на Один осциллятор. Производные статистической энтропии равны

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E}\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$$
$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1+n)}$$

Число состоя ний системы осцилляторов бесконечно, и состояния с отрицательной температурой отсутствуют.

Задача. 5

Вычислить магнитную восприимчивость одноатомного парамагнитного газа $\chi(T)$ с моментом J.

$$\varepsilon_n = g\mu_b H_m, m \in \{-J, \dots, J\}$$

$$\text{Полная энергия} \quad E_n = \sum_{i=1}^{N} g\mu_b M m_i, n = \{m_1, \dots, m_N\}$$

Статсумма для системы из N частиц:

$$Z_N = \sum e^{-E_n/T} = \sum_{m_1,\dots,m_N} \exp\left(-\frac{g\mu_b H(m_1 + \dots m_N)}{T}\right) =$$
$$= \left(\sum_{m_1} e^{-g\mu_b H m_1/T}\right)\left(\sum_{m_2} e^{-g\mu_b H m_2/T}\right)\cdots\left(\sum_{m_N} e^{-g\mu_b H m_N/T}\right) = \left(\sum_{m} e^{-g\mu_b H m/T}\right)^N \equiv Z_1^N \tag{7}$$

Также введем обозначение $x := g\mu_s H/T$, тогда перепишем:

$$Z_1 = \sum_{m=-J}^{J} e^{-xm} = e^{xJ} + e^{x(J-1)\dots + e^{-xJ}} = e^{-xJ}\left(1 + e^x \dots + e^{2Jx}\right) =$$
$$= e^{-xJ} \cdot \frac{e^{(2J+1)x} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{\left(J+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-\left(J+\frac{1}{2}\right)_x}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{\operatorname{sh}\left(J + \frac{1}{2}\right)x}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} \tag{8}$$

дальше через свободную энергию $F = -T\ln Z_N = -TN\ln Z_1$ считаем магнитный момент как производную ее по магнитному полю.

$$M = \left(-\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,N} = \frac{TN}{z_1}\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{TN}{z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial H} = \frac{TN}{z_1}\cdot\frac{g\mu_b}{T}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x}$$

дальше пару строк не успеваю вписать в латех, короче говоря, простая математика тут.

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right) = g\mu_b\left(\frac{\partial B(x)}{\partial H}\right) = \frac{(g\mu_b)^2}{T}B_y'(x)$$

При $T \gg g\mu_b H \Rightarrow \chi \approx \dfrac{1}{T}$, что есть закон Кюри.

Задача. 6

Вычислить для парамагнитного газа изменение температуры при адиабатическом изменении магнитного поля $(\partial T/\partial H)_S$, если его свободная энергия может быть представлена в виде: $F = F_0(T) - (1/2)\chi(T)H^2$

$$dE = TdS - pdV + \mu dN - MdH$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H = \frac{\partial(M,H)}{\partial(S,H)} = \frac{\partial(M,H)}{\partial(T,H)}\frac{\partial(T,H)}{\partial(S,H)} = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H} = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H \frac{T}{C_H}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \frac{T}{C_H}$$

При $M = \chi H$ получаем закон Кюри:

$$\chi = \frac{A}{T}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = H\frac{\partial \chi}{\partial T} = -\frac{HA}{T^2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{AH}{C_H T}$$

Задача. 7 Найти флуктуации

$$\overline{\Delta E^2}, \overline{\Delta N^2}, \overline{\Delta S^2}, \overline{\Delta P^2}, \overline{\Delta S\Delta P}, \overline{\Delta V\Delta P}, \overline{\Delta S\Delta T}, \overline{\Delta T^2}, \overline{\Delta V^2}, \overline{\Delta T\Delta V}, \overline{\Delta T\Delta P}, \overline{\Delta S\Delta V}$$

Используя гауссову теорию флуктуаций, выразим в формуле $w \sim \exp\frac{\Delta p\Delta V - \Delta T\Delta S}{2kT}$ величины ΔS и Δp через флуктуации независимых переменных V и T :

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T$$
$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T \qquad (9)$$

С помощью равенства $dF = -SdT - pdV$ имеем $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$. Далее, $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T}$. Подставляя эти значения в 9 имеем

$$\Delta S = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T}\Delta T$$

Теперь выражение для плотности вероятности w после подстановки найденных выражений для ΔS и Δp принимает гауссов вид в переменных V и T :

$$w \sim \exp\left[-\frac{C_V}{2kT^2}(\Delta T)^2 + \frac{1}{2kT}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (\Delta V)^2\right] \qquad (10)$$

Из10 видно, что плотность вероятности распалась на произведение...

Это означает, что флуктуации температуры и объема статистически Независимы:

$$\langle \Delta V \Delta T\rangle = 0$$

Сравнивая 10 с соотношением $\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)dx = \alpha^{-1}$ находим

$$\langle(\Delta T)^2\rangle = \frac{kT^2}{C_V}$$
$$\langle(\Delta V)^2\rangle = -kT\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Для вычисления средних значений комбинаций, содержащих одну из выбранных независимых переменных, удобно выразить флуктуации второй величины через ΔV и ΔT. Тогда получим, например, для $\langle\Delta T\Delta p\rangle$

$$\langle\Delta T\Delta p\rangle = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \langle\Delta T\Delta V\rangle + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \langle(\Delta T)^2\rangle$$

Подставляя сюда соотношения выше, найдем

$$\langle \Delta T \Delta p \rangle = \frac{kT^2}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Аналогично

$$\langle \Delta V \Delta p \rangle = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left\langle (\Delta V)^2 \right\rangle + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \langle \Delta V \Delta T \rangle$$

Подставляя $\langle (\Delta T)^2 \rangle$ и $\langle \Delta V \Delta T \rangle = 0$ имеем

$$\langle \Delta V \Delta p \rangle = -kT$$

Далее,

$$\langle \Delta S \Delta V \rangle = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \langle \, (\Delta V)^2 \rangle + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \langle \Delta V \Delta T \rangle =$$
$$= -kT \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = kT \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Для вычисления флуктуации $\langle (\Delta S)^2 \rangle$, $\langle (\Delta p)^2 \rangle$, и $\langle \Delta p \Delta S \rangle$, можно выразить их через ΔV и ΔT. Например,

$$\left\langle (\Delta S)^2 \right\rangle = \left\langle \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T \right]^2 \right\rangle$$

Раскрывая квадрат суммы и учитывая формулы других флуктуаций найдем

$$\left\langle (\Delta S)^2 \right\rangle = - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T kT + \frac{C_V^2}{T^2} \frac{kT^2}{C_V}$$

Учитывая соотношение

$$C_p - C_V = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \tag{11}$$

окончательно получаем

$$\left\langle (\Delta S)^2 \right\rangle = kC_p$$

Аналогично

$$\left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left\langle \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T \right]^2 \right\rangle = \\ = -kT \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \frac{kT^2}{C_V} \tag{12}$$

С помощью 11 имеем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 = - \frac{C_p - C_V}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

Подставим это выражение в 12 и приведем подобные члены:

$$\left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = -kT \frac{\mathrm{C}_p}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -kT \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$$

Наконец,

$$\langle \Delta p \Delta S \rangle = \left\langle \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T \right] \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta V \right] \right\rangle =$$
$$= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left\langle (\Delta V)^2 \right\rangle + \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left\langle (\Delta T)^2 \right\rangle$$

Подставляя сюда $\langle(\Delta T)^2\rangle$ и $\langle(\Delta V)^2\rangle$ приходим к равенству

$$\langle \Delta p \Delta S\rangle = 0$$

Задача. 8

Вычислить для одноатомного и двухатомного больцмановских газов $F, \mu, P, S, C, (\partial P/\partial\rho)_S$

a) одномерный газ

$$Z_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{-\frac{p^2}{2mT}} d^3x d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\left(\int e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp_x\right)^3 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi mT)^{3/2}$$

$$Z = \frac{e^N V^N}{N^N(2\pi k)^{3N}}(2\pi mT)^{3N/2}$$

$$F = -T\ln Z = -NT\ln\left(\frac{eV}{(2\pi\hbar)^3 N}(2\pi mT)^{3/2}\right)$$

$$E = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2}NT; \quad C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3}{2}N; \quad \mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{3}{2}T; \quad P = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{NT}{V};$$

$$S = -\frac{\partial E}{\partial T} = N\left(\ln\left(\frac{eV}{(2\pi\hbar)^3 N}(2\pi mT)^{3/2}\right) + \frac{5}{2}\right)$$

$$S = const \Rightarrow VT^{3/2} = const; \quad V \sim \rho^{-1}, T \sim p/\rho \Rightarrow p\rho^{-5/3} = const \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S = \frac{5p}{3\rho}$$

b) двумерный газ.

$$E = E_{\text{пост}} + E_{\text{вращ}} \Rightarrow Z = Z_{\text{пост}}\cdot Z_{\text{вращ}}$$

$$\hat{H}_{\text{вращ}} = \frac{\hbar^2}{2I}\hat{L}^2 \Rightarrow E_{\text{вращ}} = \frac{\hbar^2}{2I}L(L+1)$$

$$Z_{\text{вращ}} = \sum_{i=1}^{\infty}(2L+1)\exp\left(-\frac{2\hbar}{2I}\frac{L(L+1)}{T}\right) \equiv \sum_{i=1}^{\infty}(2L+1)\exp\left(-\frac{T_c L(L+1)}{T}\right)$$

где $T = \frac{\hbar^2}{2I} \approx 1 \div 10K$

при $T \gg T_c Z_{\text{вращ, 1}} \approx \int_0^\infty (2L+1)e^{-T_c L(L+1)/T}dL \equiv \int_0^\infty e^{-T_c z/T}dz = \frac{T}{T_c}$

т.о. $Z_{\text{вращ}} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^N$

поэтому

$$Z = \frac{e^N V^N}{N^N(2\pi k)^{3N}}(2\pi m)^{3N/2}\frac{T^{5N/2}}{T_c^N}$$

$$F = -T\ln Z = -NT\ln\left[\frac{eV}{N(2\pi k)^3}(2\pi m)^{3/2}\frac{T^{5/2}}{T_c}\right]$$

$$E = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \frac{5}{2}NT$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5}{2}N; \quad \mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{5}{2}T; \quad P = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{NT}{V};$$

$$S = const \Rightarrow VT^{5/2} = const \Rightarrow p\rho^{-7/5} = const \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{7p}{5\rho}$$

Задача. 9

Найти теплоемкость идеального газа без внутренних степеней свободы, помещенного в однородное гравитационное поле в коническом сосуде высоты h (основание конуса расположено внизу, вверху). Рассмотреть случаи: $mgh \ll T, mgh \gg T$

a) случай основания снизу

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

$$Z = \frac{1}{N!} Z_1^N \approx \left(\frac{eZ_1}{v}\right)^N$$

$$Z_1 = \int \frac{d^3pd^3x}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) \exp\left(-\frac{mgz}{T}\right) = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^h \pi(tgz)^2 \exp\left(\frac{mgz}{T}\right) dz =$$
$$= \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \pi tg^2\alpha \left(\frac{T}{mg}\right)^2 \left[\exp\left(\frac{mgh}{T}\right)\left(\frac{mgh}{T} - 1\right) + 1\right] \quad (13)$$

$$E = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\beta} = N\left(\frac{9}{2}T - mgh\frac{\exp\left(\frac{mgh}{T}\right)\left[\frac{mgh}{T} - 1\right]}{\exp\left(\frac{mgh}{T}\right)\left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1} - \frac{mgh}{\left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1}\right)$$

$$E = N\left[\frac{9}{2}T - \frac{(mgh)^2}{T}\frac{\exp\left(\frac{mgh}{T}\right)\left[\frac{mgh}{T} - 1\right]}{\left(\frac{mgh}{T}\right)\left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1}\right]$$

$mgh \ll T$ - тогда $E = \frac{9}{2}NT - NT = \frac{5}{2}NT \Rightarrow C = \frac{7}{2}N$
$mgh \gg T$ - тогда $E = \frac{9}{2}NT - mghN = \frac{7}{2}NT \Rightarrow C = \frac{9}{2}N$
b) случай основания сверху
просто заменим h на $-h$
$mgh \ll T \;\Rightarrow\; C = \frac{7}{2}N$
$mgh \gg T \;\Rightarrow\; C = \frac{9}{2}N$

Задача. 10.

Вычислить температурную зависимость теплоемкости двухатомного больцмановского газа, учесть диссоциацию молекул.

$$Z_{\text{дисс}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^6}(2\pi mT)^3 = \alpha T^3$$

для двухатомного газа:

$$Z_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 T_c}(2\pi m)^{3/2} T^{5/2} = \beta T^{5/2}$$

$$Z = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\frac{1}{(N-n)!}(Z_{\text{дисс}})^n Z_1^{N-n} = \frac{1}{N!}(Z_{\text{дисс}} + Z_1)^N \approx \left(\frac{e}{N}(Z_{\text{дисс}} + Z_1)\right)^N$$

$$\ln Z \approx N \ln (Z_{\text{дисс}} + Z_1) + N \ln \frac{e}{N}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = NT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln (Z_{\text{дисс}} + Z_1) = NT^2 \frac{3\alpha T^2 + \frac{5}{2}\beta T^{3/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}}$$

$$C = \frac{dE}{dT} = N \left(\frac{12\alpha T^3 + \frac{35}{4}\beta T^{5/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}} - T^2 \left(\frac{3\alpha T^2 + \frac{5}{2}\beta T^{3/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}} \right)^2 \right)$$

Задача. 11.

Построить изохоры, изобары и изотермы для бозе-газа.

$$PV = \frac{2}{3} A T^{5/2} J_{1/2}(y): \quad y = -\frac{\mu}{T}$$

$$J_\alpha(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{e^{x+y} - 1}$$

$$T_c \approx 6,6 \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3}$$

$$T < T_c \Rightarrow p \simeq \alpha T^{5/3}$$

$$T \gg T_c \Rightarrow \frac{P_V}{NT} \approx 1 - \alpha \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2}$$

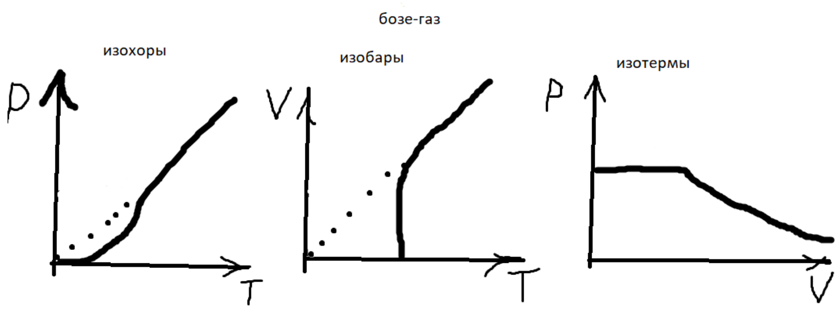

Рис. 1

Задача. 12.

Построить изохоры, изобары и изотермы для ферми-газа.

При $T << \varepsilon_r \quad p \approx \gamma \left(\frac{N}{v}\right)^{5/3}$

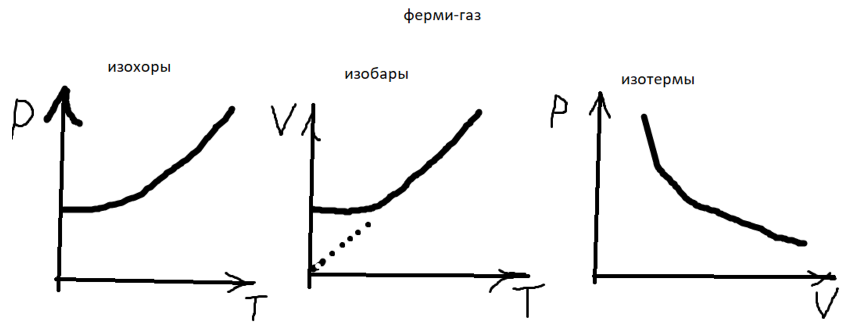

Рис. 2

Задача. 13.

Вычислить теплоемкость двумерного вырожденного идеального ферми-газа.

$$dN_p = g\bar{n}_p \frac{dp_x dp_y dV}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{gVpdp}{2\pi\hbar^2\left(\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{T}\right)+1\right)}$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow pdp = md\varepsilon$$

$$dN_\varepsilon = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) V \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1} = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT \frac{dx}{e^{x-y}+1}$$

$$E = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT^2 \int_0^\infty \frac{xdx}{e^{x-y}+1} \approx \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT^2 \left(\left(\frac{\mu^2}{2T^2}\right) + \frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$C = \frac{1}{V}\frac{dE}{dT} = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right)\frac{\pi^2}{3}T$$

Задача. 14.

Вычислить теплоемкость черного излучения.

Химический потенциал фотонного газа равен нулю.

Распределение фотонов дается соотношением:

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_k}{T}\right)-1}$$

Число состояний определяется соотношением

$$2\frac{V4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = 2\frac{V4\pi\omega_k^2 d\omega_k}{(2\pi c)^3}$$

Дополнительный фактор 2 возникает из-за двух поляризаций фотонов.

Подставляя это число в $\bar{N}_n$, получаем:

$$dN_\omega = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T)-1}\frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

Энергия излучения получается из dN_ω умножением на энергию фотона

$$dE_\omega = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}\frac{V\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3} \tag{14}$$

Формула 14 - называется формулой Планка.

Дальше считаем свободную энергию.

$$F = T\sum_k \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right)\right] = T\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \omega^2 \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)\right] d\omega$$

Заменяя переменную интегрирования $x = \hbar\omega/T$ и интегрируя по частям, отсюда получим

$$F = -\frac{VT^4}{3\pi^2\hbar^3 c^3}\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1}$$

Безразмерный интеграл в этом соотношении равен $\pi^4/15$. Итак, свободная энергия равна

$$F = -\frac{\pi^2 VT^4}{45\hbar^3 c^3} = -\frac{4\sigma}{3c}VT^4$$

Коэффициент σ называется постоянной Стефана-Больцмана:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-5}\frac{\text{г}}{\text{сек}^3\text{град}^4}$$

(если температура измеряется в градусах Кельвина). Зная свободную энергию, определяем обычную энергию (закон Больцмана)

$$E = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{4\sigma}{c}VT^4$$

Для теплоемкости излучения в полости с заданным объемом получаем

$$C_V = \frac{16\sigma}{c}VT^3$$

Задача. 15

Найти равновесную плотность и теплоемкость акустических фононов в кристалле при температурах выше T и ниже T дебаевской

Гамильтониан атомов решётки кристалла может быть диагонализирован, т. е. разложен по нормальным модам колебаний. В представлении вторичного квантования он имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2\mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2\right) = \sum_{\mathbf{k},\ 3\ \text{поляризац.}}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right)$$

Где $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ оператор рождения, $n_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}-$ числа заполнения мод. Мы ограничимся рассмотрением только акустических мод колебаний $\omega_{\text{k}} = v_{l,t}\cdot k$, поскольку при низких температурах в системе возбуждаются состояния с минимальными частотами. У звука в кристалле есть две поперечные моды со скоростью звука v_t и одна продольная со скоростью звука v_l, так что плотность числа состояний

$$g(\omega) = \frac{V\omega^2 d\omega}{2\pi^2}\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}\right)$$

которую для краткости мы будем записывать как

$$g(\omega) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 v^3}$$

введя эффективную скорость звука v :

$$\frac{3}{v^3} = \frac{2}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3}$$

Поскольку фононы являются возбуждениями не пустого пространства, а коллективными колебаниями «пустого» кристалла, состоящего из N атомов, существует важное отличие их одночастичных состояний от фотонов. В $\mathbf{k}$ -пространстве фононные состояния занимают только конечную сферу Дебая с радиусом k_D. Действительно, число степеней свободы кристалла равно числу его атомов $3N$, значит столько же «точек» одночастичных состояний должно быть в сфере Дебая:

$$\frac{3V}{2\pi^2 v^3} \cdot \int_0^{\omega_D} \omega^2 d\omega = 3N$$

где частота Дебая есть

$$\omega_D = ck_D = v\left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$

Физический смысл этого ограничения ясен: длина волны фонона не может быть меньше постоянной решётки $a = (V/N)^{1/3}$, а его частота, соответ- ственно, должна быть меньше дебаевской $\omega \leq 2\pi v/a \sim \omega_D$. Тогда энергия идеального газа фононов в этом приближении равна

$$E(T) = \int_0^{\omega_D} \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} d\omega = \frac{3VT^4}{2\pi^2 v^3 \hbar^3} \cdot \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Энергия $E(T)$ существенно зависит от величины температуры Дебая: $\Theta_D = \hbar\omega_D$.

При низких температурах $T \ll \Theta_D$ верхний предел интегрирования можно заменить на ∞, и фононный газ ведёт себя так же, как тепловое излучение. Для его теплоемкости получаем закон Дебая:

$$C_V(T) = \frac{12\pi^4}{5} N \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \propto T^3$$

При высоких температурах $T \gg \Theta_D$ все состояния сферы Дебая заполнены, и мы получаем закон равнораспределения по степеням свободы Дюлонга-Пти:

$$C_V = 3N$$

Задача. 16

Используя представление оператора смещения гармонического осциллятора $\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \left(\hat{b}^+ + \hat{b}\right)$, получить формулу $\left\langle e^{ik\hat{x}} \right\rangle = = e^{-\frac{k^2\hbar}{4m\omega}}$ при температуре $T = 0$

Задача. 17

Описать парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Рассмотреть эффект де Гааза–ван Альфена в двумерном металле.

Парамагнетизм.

Наиболее просто намагниченность вычисляется в высокотемпературном пределе $T \gg T_{\text{выр}}$. В высокотемпературном приближении электронный газ больцмановский, его статистическая сумма факторизуется и достаточно вычислить её для одной частицы в поле $\mathcal{B}$.

Парамагнетизм связан с наличием у электрона собственного магнитного момента $\mu_B = e\hbar/2mc$, так что его энергия в поле есть $\pm\mu_B\mathcal{B}$. Вводя для удобства $x = \mu_B\mathcal{B}/T$, получаем в расчете на один электрон

$$z = e^{-\frac{\mu_B B}{T}} + e^{\frac{\mu_B B}{T}} = 2\operatorname{ch} x$$
$$f = -T\ln z = -T\ln(2\operatorname{ch} x)$$
$$m = -\left(\tfrac{\partial f}{\partial \mathcal{B}}\right) = \mu_B \tfrac{\partial}{\partial x}\ln(2\operatorname{ch} x) = \mu_B \operatorname{th} x$$

Полученная формула (8.6) имеет ясный физический смысл. В нулевом поле температура «размешивает» моменты электронов по направлениям, и магнитный момент газа отсутствует. При небольших полях $\mu_B\mathcal{B} \ll T$ наведённый магнитный момент линеен по полю, и удобно ввести

Восприимчивость χ в расчете на одну частицу определяется как $\chi = \lim_{\mathcal{B}\to 0} m/\mathcal{B}$.

Поэтому получаем $\chi = \mu_B^2/T$.

Эта зависимость называется законом Кюри и показывает, что при больших температурах магнетизм исчезает.

Кроме положительной парамагнитной восприимчивости, существует еще отрицательная диамагнитная восприимчивость.

Диамагнетизм возникает из-за дискретности уровней Ландау энергии электронов $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ кратностью вырождения $g_L = \mathcal{B}S/\Phi_0$.

Здесь $\hbar\omega = 2\mu_B\mathcal{B}-$ циклотронная частота, а $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e-$ квант потока, так что кратность вырождения уровня Ландау g_L - это просто число квантов потока Φ/Φ_0, проходящего через поперечное к полю сечение образца. В этом случае одночастичная статсумма равна

$$z = g_L \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega}{T}\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{g_L}{2\operatorname{sh} x}$$

где учтено, что $x = \hbar\omega/2T = \mu_B$ B $/T$. Отсюда в расчете на один электрон получаем

$$f = -T\ln z = -T\ln \tfrac{x}{\operatorname{sh} x} + \ldots$$
$$m = -\left(\tfrac{\partial f}{\partial \mathcal{B}}\right) = \mu_B \tfrac{\partial}{\partial x}\ln\tfrac{x}{\operatorname{sh} x} = -\mu_B\left(\operatorname{cth} x - \tfrac{1}{x}\right)$$

Намагниченность описывается функцией Ланжевена: $m = -\mu_B\mathcal{L}(x)$, а диамагнитная восприимчивость

$$\chi_{\text{диа}} = \left(\frac{\partial m}{\partial \mathcal{B}}\right)_{B=0} = -\frac{\mu_B^2}{3T}$$

в три раза меньше парамагнитной $\chi_{\text{диа}} = -\chi_{\text{пара}}/3$. Таким образом, в целом электронный газ парамагнитен: $\chi_{\text{диа}} + \chi_{\text{пара}} > 0$.

Если зеемановская энергия электронов становится больше температуры $T < \mu_B\mathcal{B} \ll \varepsilon_F$, то магнитное поле называют «квантующим». В этих условиях становится существенной дискретность уровней Ландау, что приводит к появлению у намагниченности электронного газа осциллирующей части. Амплитуда этих осцилляций не мала, а «шаг» осцилляций по обратному магнитному полю постоянен. Это доставляет ценную информацию о свойствах ферми-поверхности металла. Поэтому эффект заслужил имя собственное, де Гааза-ван Альфрена (1930). Для того, чтобы оценить амплитуду и «шаг» по полю осцилляций де Гааза-ван Альфена, рассмотрим самый простой случай: двумерный (D $=2$) электронный газ при нулевой температуре ($T = 0$). Тогда в магнитном поле N электронов газа распределены по уровням Ландау следующим образом. На уровнях $0, 1, 2, \ldots, j$ «сидит» по g_L электронов, а на последнем $j+1$ -м уровне - оставшиеся $N - g_L(j+1)$ штук. Таким будет распределение электронов в интервале значений приложенного поля:

$$\frac{(j+1)}{B_0} < \frac{1}{B} < \frac{(j+2)}{B_0}$$

где $\mathcal{B}_0 = N\Phi_0/2S, S-$ площадь образца, $g_L = 2BS/\Phi_0-$ кратность вырождения уровня Ландау с учетом спина.

Вычислим энергию основного состояния газа при $T = 0$:

$$E = g_L \sum_{k=0}^{j} \hbar\omega \left(k + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(j + \tfrac{3}{2}\right) \left(N - g_L(j+1)\right) =$$
$$= 2N\mu_B \left[\tfrac{B}{B_0} \left(j + \tfrac{3}{2}\right) - \left(\tfrac{\mathcal{B}}{B_0}\right)^2 (j+1) \left(\tfrac{j}{2} + 1\right) \right]$$

При нулевой температуре свободная энергия совпадает с внутренней $F = E - TS$. Магнитный момент $M = -\partial E/\partial \mathcal{B}$ основного состояния электронного газа при нулевой температуре в указанном интервале полей равен

$$M(\mathcal{B}) = N \cdot \frac{e\hbar}{mc} \cdot \left[(j+1)(j+2)\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_0} - j - \frac{3}{2} \right]$$

При изменении магнитного поля последний уровень Ландау постепенно заполняется, пока число j скачком не увеличится на единицу. В следующем по $j \to j+1$ интервале обратных полей повторяется точно такая же зависимость $M(\mathcal{B})$. Таким образом, магнитный момент M осциллирует в интервале $\pm N\mu_B$ с постоянным по обратному полю шагом:

$$\frac{1}{\mathcal{B}_0} = \frac{eS}{\pi\hbar c N} = \frac{\mu_B}{\varepsilon_F}$$

Физический смысл осцилляций намагниченности связан с периодическим заполнением и опорожнением последнего по счёту заполняемого уровня Ландау. Чтобы эти осцилляции были выражены и не «размывались» температурными эффектами, необходимо, чтобы поле было квантующим $T \ll \mu_B \mathcal{B}$, а электронный газ вырожденным $\mu_B \mathcal{B} \ll \varepsilon_F$.

Задача. 18.

Сравнить низкотемпературные зависимости теплоемкости идеальных бозе- и ферми-газов, черного излучения и твердого тела, парамагнетика и ферромагнетика, неидеального бозе-газа и, наконец, сверхпроводника.

Вырожденные ферми- и бозе-газы ($T \ll T_{\text{выр}}$) ведут себя очень по- разному.

Рассмотрим сначала ферми-газ.

Запишем, как и ранее, выражение для энергии:

$$E = BV \cdot \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon} \cdot \varepsilon d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1}$$

Низкотемпературные свойства фермионов определяются тем, что при $T = 0$ сфера Ферми заполнена, а при увеличении температуры заполненность состояний изменяется в узком слое шириной $\sim T$ около поверхности Ферми. Как отмечалось выше, при $T \ll T_{\text{выр}}$ функция распределения Ферми-Дирака имеет вид резко выраженной «ступеньки», так что, полагая в $\mu = \mu(0)$, получаем

$$E = \frac{2}{5} BV \mu^{5/2}(0) = \frac{3}{2} PV$$

Чтобы вычислить теплоёмкость вырожденного ферми-газа, нужно «выделить» отличие функции распределения Ферми-Дирака от «ступеньки». Это отличие мало в меру малости $T/\varepsilon_F \ll 1$, то есть наш интеграл нужно разложить по этому малому параметру:

$$\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1} = \int_0^\mu f(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} T^2 f'(\mu) + \dots$$

Тогда

$$E = \frac{2}{5} B V \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{T}{\mu} \right)^2 + \ldots \right]$$

Тогда

$$C_V(T) = \frac{\pi^2}{2} \cdot N \cdot \frac{T}{\varepsilon_F} + \ldots$$

Здесь учтено, что $2BV\mu^{5/2}(0)/5 = 3N\varepsilon_F/5$.

Линейная зависимость теплоемкости от температуры имеет ясный физический смысл. При нулевой температуре сфера Ферми полностью заполнена. При нагревании газа до небольшой температуры T происходит изменение чисел электронов только в узком слое $\sim T$ вблизи поверхности Ферми. Относительная доля электронов, переместившихся в возбужденные состояния, $\sim T/\varepsilon_F$, а изменение энергии каждого $\sim T$, так что теплоёмкость газа получается $C_V \sim NT/\varepsilon_F$.

Теперь вычислим теплоемкость бозе-газа, для этого найдем энергию. Поскольку $\varepsilon_0 = 0$ при $\mathbf{p} = 0$ и $T < T_B$ получаем

$$E = BVT^{5/2} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1}$$

Здесь безразмерный интеграл в численно равен 1.78 , так что

$$E \approx 0.77 \cdot NT \left(\frac{T}{T_B} \right)^{5/2}$$

а теплоёмкость равна

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} \approx 1.92 \cdot N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \propto T^{3/2}$$

А для черного тела теплоемкость была найдена в задаче 14:

$$C_V = \frac{16\sigma}{c} V T^3$$

Для теплоемкости твердого тела известен закон Дебая:

$$C_V(T) = \frac{12\pi^4}{5} N \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \propto T^3$$

Для сверхпроводника по лекциям было получено выражение:

Тогда теплоемкость

$$C_s = C_n + \frac{T_c}{2A} \nu(0)$$

то есть всё линейно, только при переходе в сверхпроводящее состояние имеется скачок.

теплоемкости диа и пара магнетиков определяются свойствами твердого тела и вкладом электронов, а это было уже описано выше.

Задача. 19.

Показать, что фазовая скорость элементарного возбуждения в бозе-конденсате равна гидродинамической скорости звука.

Задача. 20

Найти распределение частиц по импульсам и полное число надконденсатных частиц в идеальном и неидеальном бозе-газах при Т = 0 и низких температурах.

Задача. 21

Определить свободную энергию одномерной цепочки спинов 1/2 с гамильтонианом

$$\hat{H} = -J\sum_{k}^{N}\hat{\sigma}_k^z\hat{\sigma}_{k+1}^z, \quad \hat{\sigma}_{N+1}^z = \hat{\sigma}_1^z$$

Вычислить теплоёмкость и объяснить причину отсутствия фазового перехода при $X \neq 0$

Задача. 22. Для ферромагнетика в модели Гейзенберга при T Tc определить спектр возбуждений (магнонов) и найти температурную зависимость намагниченности и теплоемкости спиновых волн.

Задача. 23. Для ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении самосогласованного поля определить температуру Кюри Tc, температурную зависимость магнитной восприимчивости и спонтанной намагниченности вблизи Tc. Сравнить с результатами теории Ландау.

Задача. 24

Определить корреляционный радиус флуктуации параметра порядка в нулевом внешнем поле вблизи точки фазового перехода II рода.

Найти флуктуационную поправку к теплоемкости при $T = T_c$ в теории Гинзбурга–Ландау.

Задача. 25. Доказать, что плотность сверхтекучей компоненты электронного газа при T = 0 равна полной плотности числа частиц.

Задача. 26.

В модели БКШ определить скачок теплоемкости.

Тепловые свойства сверхпроводника определяются его возбуждениями - квазичастицами, которые можно рассматривать как ферми-газ с нулевым химическим потенциалом. Энтропия этого газа равна

$$S = -\sum[n\ln n + (1-n)\ln(1-n)]$$

здесь $n = \left(e^{\beta\varepsilon}+1\right)^{-1}$, $\varepsilon = \sqrt{\xi^2+\Delta^2}$

Теплоемкость дается формулой из термодинамики:

$$C = T\frac{\partial S}{\partial T} = \sum T\frac{\partial S}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial T} = -\sum T[\ln n - \ln(1-n)]\frac{\partial n}{\partial T}$$

$$\ln n - \ln(1-n) = \ln\frac{n}{1-n} = -\ln\left(\frac{1}{n}-1\right) = -\beta\varepsilon$$

Таким образом

$$C = \sum\varepsilon\frac{\partial n}{\partial T}$$

При низких температурах теплоемкость экспоненциально мала.

Вблизи критической температуры самое сложное - найти производную от распределения квазичастиц

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{\partial n}{\partial\beta\varepsilon}\frac{\partial\beta\varepsilon}{\partial T} = T\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\left(-\frac{\varepsilon}{T^2}+\frac{1}{T}\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial\Delta^2}{\partial T}\right)$$

Квадрат пели линейно зависит от температуры

$$\frac{\partial\Delta^2}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}T_c\frac{T_c-T}{A} = -\frac{T_c}{A}$$

Тогда теплоемкость

$$C_s = \sum \left|\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right| \left(\frac{\varepsilon^2}{T} + \frac{T_c}{2A}\right) = C_n + \frac{T_c}{2A} \sum \left|\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right| = C_n + \frac{T_c}{2A}\nu(0)$$

Так как $C_n = \frac{\pi^2}{3}\nu(0)T$, то скачек теплоемкости в точке фазового перехода равен

$$\frac{C_s - C_n}{C_n} = \frac{T_c \nu(0)}{2A\frac{\pi^2}{3}\nu(0)T} = \frac{3}{2A\pi^2} = 1,43$$

Задача. 27. Диагонализуя гамильтониан для фотонов и экситонов с учетом гибридизации, получить спектр поляритонов.

(Преподаватель эту задачу убрал)

Задача. 28. Мешок Нагаоки (спиновый полярон большого радиуса в антиферромагнетике)

(Преподаватель эту задачу убрал)