Задачи теории вероятностей

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

30 августа 2020 г.

Аннотация

Задачи теории вероятностей

Содержание

Предисловие

потом переставлю задачи местами, чтобы схожие были рядом

Часть I
первое задание

1 задачи на аксиомы теории вероятностей

Здача 1. ***T***

Т.1. Пусть $A, B-$ два события. Найти все события X такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \bar{A})} = B$$

Здача 2. ***T***

Т. 2. П *усть $A, B-$ два события. Найти все события X такие, что $AX = AB$.*

Здача 3. ***T***

Т.3. Пусть $A_1, \ldots, A_n-$ события. Покаж ите, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1$$

Здача 4. ***T***

Т.4. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - последовательность событий и $\mathrm{P}(A_n) = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажите, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

Здача 5. ***T***

Т.5. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - последовательность событий. Покажите, что

$$P\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \le \mathrm{P}\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right)$$

Здача 6. ***T***

Т.6. Покажите, что для любых двух событий A и B выполняется неравен- СТВО

$$|\mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \le \frac{1}{4}$$

2 текстовые задачи о жизни

Здача 7. ***T***

Т.7. Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух КОСТ е**Й**?

Здача 8. ***T***

Т.8. Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 оч- Ков выпадают чаще, чем 12 очков.

Здача 9. ***T***

Т.9. Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

Здача 10. ***T***

Т.10. В конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

Здача 11. ***T***

Т.11. У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в Очереди имеет 100-рублевые купюры, а вторая половина - 50-рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета - 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачу?

Здача 12. ***T***

Т.12. Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход - за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту А и отправляется в В пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит Очередной автобус.

Здача 13. ***T***

Т.13. На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, Что из пол учившихся трех отрезков можно составить треугольник?

Здача 14. ***T***

Т.14. На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, *бросают иглу длины* $l \leqslant L$. *Какова вероятность того, Что игла пересечет линию?*

Здача 15. ***T***

Т.1 5. На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между ДВумя первыми?

Здача 16. ***T***

Т.16. Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 ОЧКОВ пОявится раньше, чем сумма в 7 очков.

Здача 17. ***T***

Т.17. *Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится кгербж. Найти вероятности выигрыша каждого ИГрОКа.*

Здача 18. ***T***

Т.18. В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мя ча, которые после игры возвращают в яшик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

Здача 19. ***T***

Т.19. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA, BBBB, CCCC$, *причем априорные вероятности равны 0,3,0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до* $0,6$, *а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и* $0,2$. *Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность* $AAAA$, *если на приемном устройстве получено* $ACAB$.

Здача 20. ***T***

Т.20. Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью 1/2. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки Оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправНый?

Здача 21. ***T***

Т.21. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ *затопляется один из m отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.*

3 распределения и случайные величины

Здача 22. ***T***

Т.22. Пусть ξ *и* $\eta-$ *две случайные величины и* $\mathrm{P}(\xi\eta=0)=1$ $\mathrm{P}(\xi=1)=\mathrm{P}(\xi=-1)=\mathrm{P}(\eta=1)=\mathrm{P}(\eta=-1)=\frac{1}{4}$. *Найти совмест- ное распределение этих случайных величин.*

Здача 23. ***T***

Т.23. Случайные величины ξ *и* η *независимы;* ξ *имеет плотность распределения* $f_\xi(x)$, *а* $\mathrm{P}(\eta=0)=\mathrm{P}(\eta=1)=\mathrm{P}(\eta=-1)=\frac{1}{3}$. *Найти закон распределения случайной величины* $\xi+\eta$

Здача 24. ***T***

Т.24. В квадрат $\{(x_1,x_2): 0\leqslant x_i\leqslant 1; i=1,2\}$ *наудачу брошена точка. Пусть* ξ_1,ξ_2- *ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины* $\eta=\xi_1+\xi_2$

Здача 25. ***T***

Т.25. Пусть $\xi_k, k=1,2,-$ *независимые сл учайные величины с распредеЛением Пуассона. Найт и распределение их суммы и условное распределение* ξ_1, *если известна сумма* $\xi_1+\xi_2$

Здача 26. *Т.23. Случайные величины* ξ *и* η *независимы;* ξ *имеет плотность распределения* $f_\xi(x)$, *а* $\mathrm{P}(\eta=0)=\mathrm{P}(\eta=1)=\mathrm{P}(\eta=-1)=\frac{1}{3}$. *Найти Закон распределения случайной величины* $\xi+\eta$

Здача 27. *Т.24.* В *квадрат* $\{(x_1,x_2): 0\leqslant x_i\leqslant 1; i=1,2\}$ *наудачу брошена точка. Пусть* ξ_1,ξ_2- *ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины* $\eta=\xi_1+\xi_2$

Здача 28. *Т.25. Пусть* $\xi_k, k=1,2,-$ *независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение* ξ_1, *если известна сумма* $\xi_1+\xi_2$

Здача 29. *Т.26. Известно, что случайная величина* ξ *имеет строго возрастаюшуую непрерывную функцию распределения* $F_\xi(x)$. *Найти распределение случайной величины* $\eta=F_\xi(\xi)$.

Здача 30. *Т.2 7. Пусть* ξ *имеет имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения и плотность случайной величины* ξ^2

Здача 31. *Т. 28. Пусть* $X_1, \ldots, X_n-$ *независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью* $f(x)$. *Для каждого элементарного события* $\omega \in \Omega$ *вектор* $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ *преобразуем в упорядоченный* $\left(X_{(1)}(\omega), \ldots, X_{(n)}(\omega)\right)$, *гДе* $X_{(1)}(\omega) \leq \ldots \leq X_{(n)}(\omega)$. *Упорядоченный век- тор* $\left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ *в математической статистике называют вариационным рядом, а случайные величины* $X_{(k)}, k=1, \ldots, n-$ *порядковыми статистиками. Покажите, что плотность совместного распределения по- рядКОВых статистик определяется равенст ВОМ*

$$f_{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}}\left(x_1, \ldots, x_n\right)=n! f\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot f\left(x_n\right) \Bbbk_{\left\{x_1 \leq \ldots \leq x_n\right\}}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

Здача 32. *Т. 29. Вдоль дороги, длиной в 1 км расположены случайным образом три человека. Найти вероятность того, что никакие два человека не нахоДятся друг от друга на расстоя нии, меньшем* $1/4$ *км.*

4 Математическое ожкидание и Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции

Здача 33. *Т.30. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе-Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть* $\xi-$ *число пустых ячеек. Найти* $\mathrm{E} \xi$ *и* $\mathrm{D} \xi$.

Здача 34. *Т.31. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть* $\xi-$ *число появлений единицы, а* $\eta-$ *число появлений шестёрки. Найти коэффициент корре- Лящии этих сл учайных величин.*

Здача 35. *Т.32. Подбрасывают две игральные кости. Пусть* ξ_1- *число очков на первой игральной кости, а* ξ_2- *на второй. Определим* $\eta_1=\xi_1+\xi_2$ $\eta_2=\xi_1-\xi_2$. *Найти* $\operatorname{cov}\left(\eta_1, \eta_2\right)$ *и выяснить, являются ли* η_1 *и* η_2 *незави- СИМыми.*

Здача 36. *Т.33. Доказать, что если случайные величины* ξ *и* η *принимают только по два Значения каждая, то из некоррелируемости следует их независи- МОСТь.*

Здача 37. *Т.34. А вария происходит в точке* X, *которая равномерно распределена на дороге длиной* L. *Во время аварии машина скорой помоши находится в точке* Y, *которая также равномерно распределена на дороге. Считая, что* X *и* Y *независимы, найдите математическое ож идание расстояния между машиной скорой помоши и точкой аварии.*

Часть II
Второе задание

5 Неравенства Чебышева и Маркова. Законы больших чисел

Здача 38. *Т.* **1**. *Известно, что число посетителей некоторого салона в день является случайной величиной со средним значением* 50. *(a) Оценить вероятность того, что число посетителей в конкретный день превысит 75 (b) При условии, что дисперсия числа посетителей в день равна* 25, *оце- нить вероятность того, что в конкретный день их число будет между 40 и* 60.

Здача 39. *Т. 2.* С *помошью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что при 1000 бросаниях монеты число выпадений герба окажется в промежутке [450,550]*

Здача 40. *Т.3. Вероятность того, что изделие качественное, равна* $0,9$. *Каков должен быть обьем партии изделий, чтобы с вероятностью* $\geq 0,95$ *можно было утверждать, что отклонение (по абсолютной вел ичине) доли качествен- ных изделий от 0,9 не превысит* $0,01$?

Здача 41. *Т.4. (Одностороннее неравенство Чебышева.) Пусть случайная величина* ξ *имеет нулевое среднее и дисперсию* σ^2. *Показать, что для* $\varepsilon > 0$ *выпол- няется неравенство*

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$$

Здача 42. *Т. 5. (Неравенство Иенсена.) Пусть* $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}-$ *дважды непрерывно дифференцируемая функция и* $\varphi''(x) \geq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$ *(т. е.* φ *Выпуклая функция, и допускается* $a = -\infty$ *и* $b = \infty$ *). Допустим также, что* $\xi-$ *слу чайная величина, которая принимает значения из* (a, b) *и* $\mathrm{E}\xi = m, \mathrm{E}\varphi(\xi)$ *конеч ны. Показать, что тогда*

$$\mathrm{E}\varphi(\xi) \geq \varphi(\mathrm{E}\xi) = \varphi(m)$$

Здача 43. *Т.6. Пусть* $\xi-$ *слу чайная вел ичина, имеющая нормал ьное распределение с параметрами* (a, σ^2) . *Показать, что для* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство*

$$\mathrm{P}(|\xi - a| \geq \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \leq \frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon^2/2}, \quad \varepsilon > 0$$

Здача 44. *Т.7. Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *- последовательность одинаково распределенных сл учайных величин такая, что* $\mathrm{E}\xi_k = a, \mathrm{D}\xi_k = \sigma^2$ *и* $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j}v$ $i \neq j$. *Доказать, что для всякого* $\varepsilon > 0$ *выполняется предельное соотно- Шение*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Здача 45. *Т.8. Пусть* $\{\xi_n\}-$ *последовательность неотрицательных случайных величин с конечными математическими ожиданиями и* $\xi_n \overset{n.н.}{\to} \xi, \mathrm{E}\xi < \infty$ $\mathrm{E}\xi_n \to \mathrm{E}\xi$ *при* $n \to \infty$. *Покажите, что тогда* $\mathrm{E}|\xi_n - \xi| \to 0$ *при* $n \to \infty$ *Т. е.* $\xi n \overset{L}{\to} \xi$

6 Метод характеристических функций. Центральная предельная теорема

Здача 46. *Т.9. Найти характеристическую функцию распределения Лапласа, которое определяется плотностью*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Здача 47. *Т.10. Найти характеристи ческую функцию нормального распределения с параметрами* (a, σ^2)

Здача 48. *Т.11. Найти распределения, которым соответствуют следуюшие характеристические функции:*

$$h_1(t) = \cos t; \quad h_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad h_3(t) = \frac{1}{2 - e^{-it}}$$

Здача 49. *Т.12. Найти распределение, которому соответствует характеристическая фу нкция* $h(t) = e^{-t^2}\cos t$

Здача 50. *Т.* 13. *Является ли функция* $h(t) = \cos t^2$ *характеристической?*

Здача 51. *Т.14. Случайная вел ичина* ξ_λ *распределена по закону Пуассона с параметрот* λ. *Найти*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$$

Здача 52. *Т. 15. Используя резул Бтат предыдушей задачи, найти предел*

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=n}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

Здача 53. *Т.16. Пусть положительные независимые случайные величины* $\xi_{m,n}$ $m = 1, 2, \ldots, n$ *одинаково распределены с плотностью* $\alpha_n e^{-\alpha_n x}, x > 0$, *где* $\alpha_n = \lambda n$ *и* $\lambda > 0$. *Найти предельное при* $n \to \infty$ *распределение случайной величины* $\xi_n = \sum_{m=1}^{n}\xi_{m,n}$

7 Элементы теории случайных процессов и математической статистики

Здача 54. *Т.* 17. *Население региона делится по некоторому социально-экономи ческоМу признаку на три подгруппы. Следуюшее поколение с вероятностями 0,*$4; 0,6$ *и* $0,2$, *соответственно, остается в своей подгруппе, а если не Остается, то с равным и вероятностями переходит в Любую из остальных пОДгрупп. Найти: а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следуюшем поколении, если в настоящем поколении в 1 -ой подгруппе было* 20% *населения, во 2 -ой подгруппе* −30%, *и в 3 -ей подгру ппе* −50% *б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.*

Здача 55. *Т.18. Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с ДВумя состоя ния м и и меет вид*

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1$$

Найти вероятности перехода за n шагов и предельные вероятности.

Здача 56. *Т.19. Производящая функция процесса Гальтона-Ватсона имеет вид*

$$f(z)=\frac{1}{m+1-mz}, \quad m>0$$

Выяснить при каких значениях параметра т процесс является: докритическим, крити ческим, надкритическим. Найти вероятность вырождения процесса в надкритическом случае. Показать, что п -тая итерация производяшей функции может быть представлена в виде

$$\begin{gathered} f^{n}(z)=\frac{m^{n}-1-m\left(m^{n-1}-1\right)z}{m^{n+1}-1-m\left(m^{n}-1\right)z} \\ \text{при } m \neq 1 \text{ и} \\ f^{n}(z)=\frac{n-(n-1)z}{n+1-nz} \end{gathered} \tag{7.1}$$

Здача 57. Т · 20· *Пусть* $(W_t, t \geq 0)-$ *винеровский процесс. Для* $u \in \mathbb{R}$ *определяется*

$$\tau_u=\inf \left\{t: W_t=u\right\}$$

- момент первого достижения уровня и траекторией винеровского процесса. Найти плотность распределения случайной величины τ_u

Здача 58.

$$M_t=\max_{0 \leq s \leq t} W_s, \quad t>0$$

где $(W_t, t \geq 0)-$ *ви неровский процесс. Найти плотность распределения сл у чайной вел и ч ИНы* M_t

Здача 59. *Т.22. Пусть* $\mathbb{X}=(X_1, \ldots, X_n)-$ *выборка из пуассоновского распределения с параметром* λ*. Найти оценку наибольшего правдоподобия параметра* λ

Здача 60. *Т.23. Пусть* $\mathbb{X}=(X_1, \ldots, X_n)-$ *выборка из нормального распределения* $N\left(a, \sigma^2\right)$. *Найти оцен ки наибольшего правдоподобия параметров а и* σ^2

Список литературы