

# статистическая физика

Юрий Голубев  
yura.winter@gmail.com

30 октября 2020 г.

## Аннотация

Задачи по статической физике.

## Содержание

Предисловие	1
I упражнения	2
II задачи	9

## Предисловие

Задачи по статистической физике.

# Часть I

## упражнения

### Упражнение. 1

$N$  молекул идеального газа в объеме  $V$ . Определить вероятность того, что в объеме  $v < V$  находится  $n$  молекул. Получить приближенное выражение, когда  $v \ll V$ . Найти среднее число частиц  $\bar{n}$  в объеме  $v$ , его среднюю абсолютную и относительную флуктуации.

Вероятность попадания ровно одной молекулы в объем  $V$  равна  $p = \frac{v}{V}$ . Поэтому вероятность попадания ровно  $n$  молекул в объем  $V$  равна

$$p^n(1-p)^{N-n}$$

В объем сосуда могут попасть разные молекулы, всего нужных нам комбинаций:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Поэтому искомая вероятность:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Поищем предел  $v \ll V$ , для него можно считать, что  $p \ll 1, n \gg 1$ , также можно предположить, что  $np = \lambda$ , которое конечно и не слишком мало, не слишком велико. В таком случае имеется известный предел - распределение становится распределением Пуассона.

$$P(n) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{np^k}{k!} e^{-np}$$

Среднее значение  $\bar{n}$  можно найти, зная, что вероятность попадания в данный объем линейно зависит от объема:

$$\bar{n} = \frac{v}{V} N = Np$$

Или то же самое, если записать по определению среднего:

$$\bar{n^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_N^n n^k p^n q^{N-n} = \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right)^k \sum_{n=0}^{\infty} C_N^n p^n q^{N-n} = \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right)^k (p+q)^N$$

Тогда

$$\bar{n} = \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p+q)^N = pN(p+q)^{N-1} = pN$$

$$\bar{n^2} = \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 (p+q)^N = pN + pNp(N-1) = pN[1 + p(N-1)]$$

и дисперсия  $\sigma_n^2 = \bar{n^2} - \bar{n}^2 = pN[1 + pN - p - pN] = Npq$

А относительная флуктуация равна:

$$\frac{\sqrt{Dn}}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{Np}}.$$

Пусть  $v \ll V, \bar{n} \gg 1$

$$P_u(v) = P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Используя формулу Стирлинга, получаем:

$$P_n(\sigma) \approx \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi n}} \left( \frac{e\lambda}{n} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left( -\lambda + n + n \ln \left( \frac{\lambda}{n} \right) \right)$$

Просто преобразуем  $P(v)$ , введя  $x \equiv \lambda - n$ , тогда логарифм раскрывается так:  $\ln \frac{\lambda}{n} = \ln \left( \frac{n+x}{n} \right) = \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \approx \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{n} \right)^2$

$$P_4(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left( -x + x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{n} \right) = P_4(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left( -\frac{(\lambda - n)^2}{2\lambda} \right)$$

это распределение Гаусса

### Упражнение. 2

Вычислить  $C_p - C_v$  в переменных  $V, T$  и  $P, T$ .

Определить  $C_p - C_v$  для больцмановского газа, газа Ван-дер-Ваальса, ферми и бозе-газа и черного излучения.

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + pdV,$$

поэтому:

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Считая внутреннюю энергию  $U$  функцией температуры и объема, можем записать

$$C_p = C_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (1)$$

Выражение в квадратных скобках в правой части легко вычислить, воспользовавшись фундаментальным равенством Гиббса:

$$TdS = dU + pdV$$

Имеем:

$$T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p$$

Далее, из соотношения

$$dF = -SdT - pdV$$

следует равенство

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Поэтому

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Теперь с помощью соотношения 1 получаем

$$C_p - C_V = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

И используя

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = -1,$$

запишем:

$$C_p - C_V = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2 \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T^{-1} \quad (2)$$

или

$$C_p - C_V = -T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T^{-1} \quad (3)$$

Теперь применим эти формулы для больцмановского газа, для которого  $pV = \nu RT$ , имеем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p &= \frac{\nu R}{p} \\ \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T &= -\frac{\nu RT}{p^2} \end{aligned}$$

Поэтому при подстановке в 2 много множителей сокращаются и имеем:

$$C_p - C_V = \nu R$$

Теперь применим эти формулы для газа Ван-дер-Ваальса, для которого  $\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT$ . Будем для просто ты считать, что  $\nu = 1$ . И также тут разумнее подставлять все в 3. Получаем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V &= \frac{R}{V - b} \\ \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T &= -\frac{RT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3} \end{aligned}$$

Таким образом, подставляем и получаем:

$$C_p - C_V = \frac{TR}{T - \frac{2a}{V^3}(V - b)^2}$$

Теперь применим эти формулы для фермии и бозе-газа, для которых  $\frac{pV}{NT} = 1 \pm \alpha \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2}$ . Подставим, посчитаем производные, придем к ответу:

$$C_p - C_V = \frac{N(\alpha T_0^{3/2} N \mp 2T^{3/2}V)^2}{\pm 8\alpha T_0^{3/2} NT^{3/2} + 4T^3V^2}$$

Теперь применим эти формулы для черного излучения. Для такого:  $p = \frac{a}{3}T^4$ . Поэтому для него  $C_p - C_V \rightarrow \infty$

### Упражнение. 3

Вычислить число состояний одноатомного больцмановского газа.

Пусть имеется частиц  $N$  частиц в объеме  $V$ . Поступательное движение частиц всегда квазиклассично. В классической механике состояние системы характеризуется точкой в  $6N$ - мерном фазовом пространстве

$$\alpha = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) \quad (4)$$

Число точек в элементе 6-мерного фазового объема  $dr^3 dp^3$  согласно правилу Бора-Зоммерфельда равно отношению этого объема к  $(2\pi\hbar)^3$ . Обобщение этого правила на случай  $N$  одинаковых частиц дает дифференциал числа состояний

$$d\Gamma_\alpha = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{d^3 r_i d^3 p_i}{(2\pi\hbar)^3}$$

Произведение дифференциалов поделено на  $N!$  для того, чтобы все конфигурации, положения частиц в  $6N$ -мерном фазовом пространстве, отличающиеся друг от друга лишь перестановками тождественных частиц, учитывались только один раз. С помощью 4 произвольная сумма по состояниям может быть представлена в форме интеграла

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha} = \int d\Gamma_{\alpha} F_{\alpha}$$

Полное число состояний - число точек в  $6N$ -мерном пространстве с энергией

$$E_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$$

А так как  $\Gamma(E) = \sum_{\alpha} \theta(E - E_{\alpha})$ , то в интервале между 0 и  $E$  выражается интегралом:

$$\Gamma(E) = \int d\Gamma_{\alpha} \theta(E - E_{\alpha}) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 r_i d^3 p_i}{(2\pi\hbar)^3} \theta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}\right)$$

Интегрирование по пространственным координатам каждой частицы дает объем  $V$ , и с учетом формулы Стильтьеса получаем

$$\Gamma(E) = \left(\frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3}\right)^N J_{3N}(E)$$

$$J_{3N}(E) = \int \prod_{i=1}^N d^3 p_i \theta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}\right) - \text{объем } 3n \text{ мерного шара радиусом } p$$

$$V_{3N}(p) = \frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} p^{3N} \approx \left(\frac{2e\pi p^2}{3N}\right)^{3N/2}$$

Тогда:

$$\Gamma(E) = \left(\frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3}\right)^N \left(\frac{4e\pi m E^2}{3N}\right)^{3N/2}$$

#### Упражнение. 4

Вычислить число состояний системы  $N$  независимых спинов  $1/2$ .

Систему  $N$  спинов  $S = \frac{1}{2}$ , находящихся в магнитном поле  $B$ , будем описывать гамильтонианом

$$H = -2\mu B \sum_{i=1}^N \left(s_i^z - \frac{1}{2}\right)$$

Энергия одного спина в магнитном поле, равная  $-2\mu B s^z$  ( $s^z = \pm \frac{1}{2}$ ), сдвинута на константу, чтобы минимальная энергия была равна нулю. Если  $(\vec{N} - M)$  спинов находятся в основном состоянии ( $s^z = 1/2$ ), а  $M$  спинов — в возбужденном ( $s^z = -1/2$ ), то система имеет энергию  $E = M\Delta E$ , где  $\Delta E = 2\mu B$ . Такая энергия может быть получена числом способов, равным:

$$\Delta\Gamma_M = \frac{N!}{M!(N-M)!} \quad (5)$$

Это и есть наше требуемое число состояний.

При больших значениях аргумента по формуле Стирлинга факториал приближенно равен

$$N! \approx (N/e)^N$$

и выражение 5 принимает вид

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{M}\right)^M \left(\frac{e}{N-M}\right)^{N-M} = \frac{N^N}{M^M(N-M)^{N-M}}$$

Из этого выражения можно найти энтропию и другие характеристики, но о них не спрашивается, так что задача решена.

### Упражнение. 5

Вычислить число состояний системы  $N$  одинаковых независимых осцилляторов.

За вычетом энергии нулевых колебаний энергия системы равна

$$E = \Delta E \sum_{i=1}^N n_i, \quad \Delta E = \hbar\omega$$

где  $n_i$  - номер возбуждения  $i$ -того осциллятора. Это значение энергии может быть получено числом способов, которое следует из комбинаторики

$$\Gamma = \frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!} \approx \frac{(N+M)^{N+M}}{N^N M^M}$$

### Упражнение. 6

Получить выражения для неравновесной энтропии ферми- и бозе-газов

Вероятность произвольного состояния:

$$w_\alpha = w(p_1) \cdot w(u_{p_2}) w(u_{p_3}) \cdot \dots$$

$$S = - \sum_x w_\alpha \ln w_\alpha = - \sum_{n_{p_1}} \sum_{n_{p_2}} \sum_{n_{p_3}} \dots (w(u_{p_2}) w(u_{p_3}) \cdot \dots) (\ln w(n_{p_1}) + \ln w(n_{p_2}) + \dots)$$

$$S = - \sum_{n_{p_1}} w(n_{p_1}) \ln w(n_{p_1}) + \dots$$

Для ферми газа:  $n_p = \{0, 1\}$

$$- \sum_{n_p} w(n_p) \ln w(n_p) = -w(n_{p_1}) \ln w(n_{p_1}) + w(n_{p_0}) \ln w(n_{p_0})$$

среднее число частиц с импульсом  $p$ :  $\bar{n}_p = \sum_{n_p} w(n_p) n_p = w(1_p)$

$$w(0_p) = 1 - \bar{n}_p$$

поэтому:

$$- \sum_{n_p} w(n_p) \ln w(n_p) = -(1 - \bar{n}_p) \ln(1 - \bar{n}_p) - \bar{n}_p \ln \bar{n}_p$$

В итоге энтропия для ферми газа равна:

$$S_F = - \sum_p \left( (1 - \bar{n}_p) \ln(1 - \bar{n}_p) + \bar{n}_p \ln \bar{n}_p \right)$$

Теперь то же для бозе-газа. Для него  $n_p \in \{0, \dots, \infty\}$

Сумма  $\left[ - \sum_{n_p} w(n_p) \ln(n_p) \right]$  принимает максимальное значение при заданном  $\bar{n}_p$  при условии на функцию Лагранжа:

$$L = - \sum_{n_p} w(n_p) \ln(n_p) - \lambda_1 \sum_n n w(n) - \lambda_2 \sum_n w(n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w(n)} = - \ln w(n) - 1 - \lambda_1 n - \lambda_2$$

$$w(n) = \exp(-1 - \lambda_1 n - \lambda_2)$$

$$\sum w_n = 1 \Rightarrow \exp(-1 - \lambda_1 n - \lambda_2) = 1$$

$$\sum \exp(-1 - \lambda_2) \sum_n \exp(-\lambda_1 n) = 1$$

$$\sum_n \exp(-\lambda_1 n) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1}} \Rightarrow \exp(-1 - \lambda_2) = 1 - e^{-\lambda_1}$$

$$\bar{n} = \sum_n w(n) n = \exp(-1 - \lambda_2) \sum_n n \exp(-\lambda_1 n) = \exp(-1 - \lambda_2)$$

$$\left( - \frac{d}{d\lambda_1} \sum_n \exp(-\lambda_1 n) \right) = - \exp(-1 - \lambda_2) \frac{d}{d\lambda_1} \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1}}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\lambda_1} - 1}$$

$$e^{-\lambda_1} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}$$

Поэтому после преобразований получаем:

$$w(n) = \frac{1}{\bar{n} + 1} \left( \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n$$

$$\begin{aligned} S &= - \sum_n w(n) \ln w(n) = \sum_n w(n) (\lambda_1 n + \lambda_2 + 1) = \\ &= \sum_n w_n (\lambda_2 + 1) + \sum_n n w_n \lambda_1 = (\lambda_2 + 1) + \bar{n} \lambda_1 = \\ &= (\bar{n} + 1) \ln(\bar{n} + 1) - \bar{n} \ln \bar{n} \quad (6) \end{aligned}$$

В итоге:

$$S = \sum_p [(1 + \bar{n}_p) \ln(1 + \bar{n}_p) - \bar{n}_p \ln \bar{n}_p]$$

### Упражнение. 7

Вычислить основные термодинамические величины ферми- и бозе-газов при  $T = 0$   
Для ферми газа:

$$N = \sum_p N_p \approx \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} n_p 4\pi p^2 dp = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3$$

$$E = \sum_p (E_p n_p) \approx \frac{2V4\pi}{(2\pi\hbar)^3 2m} \int_0^{p_F} p^4 d(p) = \frac{3}{5} N E_F$$

Давление находится по известной формуле:

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{3}{10} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{N^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} n E_F$$

### Упражнение. 8

Из функционала Гинзбурга–Ландау получить выражение для плотности тока в магнитном поле, получить уравнение Лондонов и квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце.

### Упражнение. 9

Вычислить среднее от произведения четырех ферми-операторов  $\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_p^+ \hat{a}_u \hat{a}_v \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle$  — усреднение по состоянию невзаимодействующих частиц с заданной температурой и химическим потенциалом.

### Упражнение. 10

Записать оператор взаимодействия электронов с внешними электрическим и магнитным полями в представлении вторичного квантования.

### Упражнение. 11

Вычислить  $\langle \exp(-iq\hat{x}) \rangle$ , где  $\hat{x}$  оператор смещения одномерного гармонического осциллятора.

### Упражнение. 12

Определить температурную зависимость среднеквадратичного смещения атомов от положения равновесия  $\langle R_k R_p \rangle$ , где  $\dots$  обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой,  $R_k$  — смещение атома в  $k$ -направлении. Объяснить происхождение нулевых колебаний.

### Упражнение. 13

Используя результаты предыдущей задачи, вычислить среднее от произведения четырех операторов смещения, относящихся к одной и той же ячейке:  $\langle \hat{R}_k \hat{R}_p \hat{R}_i \hat{R}_j \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по состоянию невзаимодействующих фононов с заданной температурой,  $\hat{R}_k$  — смещение атома в  $k$ -направлении ( $k = x, y, z$ )

### Упражнение. 14

Для электронов, находящихся под поверхностью Ферми, произвести переход к дырочному представлению. Записать полный гамильтониан идеального ферми-газа, используя операторы рождения и уничтожения квазичастиц (электронов над поверхностью Ферми и дырок под поверхностью Ферми). Определить химический потенциал и энергетический спектр полученных квазичастиц.

### Упражнение. 15

Вычисляя первую поправку термодинамической теории возмущений, найти вклад прямого и обменного взаимодействия для ферми- и бозе-частиц. Сравнить результаты

### Упражнение. 16

В преобразовании Боголюбова для электронов получить при  $T \ll T_c$  связь операторов поглощения квазичастиц и поглощения голых электронов.



## Часть II

## Задачи

### Задача. 1

Показать, что замкнутая система из двух равновесных подсистем имеет максимальную энтропию, когда у подсистемы равны температура, давление и химические потенциалы.

Энтропию замкнутой системы, образованной из двух равновесных подсистем, определим как:

$$S = S_1(E_1) + S_2(E_2)$$

Такая энтропия максимальна, когда обе подсистемы имеют одинаковую температуру, химический потенциал и давление. Действительно: при постоянстве полной энергии  $E = E_1 + E_2$  будет выполняться:

$$\frac{dS}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{d(E-E_1)}{dE_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0$$

$$\frac{d^2 S}{dE^2} = - \left( \frac{1}{T^2 C_V} \right)_1 - \left( \frac{1}{T^2 C_V} \right)_2 < 0$$

Поэтому в случае максимума энтропии температуры подсистем одинаковы.

Аналогично, варьируя энтропию системы по объему и числу частиц одной из подсистем при условии постоянства полного объема и полного числа частиц (Используя  $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{1}{T}(-p)$ ,  $\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{1}{T}\mu$ ), находим, что Энтропия максимальна, когда равны друг другу давления и химические потенциалы подсистем.

### Задача. 2

Найти кривую фазового равновесия газ-жидкость  $p(T)$ .

При изменении  $T$  и  $P$  выполняются равенства

$$d\mu_1 = -s_1 dT' + v_1 dP, \quad d\mu_2 = -s_2 dT + v_2 dP$$

Поскольку  $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T')$ , то  $d\mu_1 = d\mu_2$ , отку да следует

$$(s_2 - s_1) dT = (v_2 - v_1) dP \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

Введем обозначение:  $q_{12} = T(s_2 - s_1)$ . Тогда последнее уравнение примет вид

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2 - v_1)}$$

Пусть фаза 1 - пар, фаза 2 - жидкость,  $s_2 \ll s_1$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_1}{v_1} = \frac{pS_1}{T}$$

Если  $s_1 = \text{const}$ , то  $p = AT^{s_1}$

### Задача. 3

Определить энтропию газа  $N$  невзаимодействующих спинов  $\sigma = 1/2$  в магнитном поле при заданной энергии. Определить понятие температуры и показать, что она может быть

отрицательной. Обсудить температурную зависимость теплоемкости. Сравнить с задачей о системе невзаимодействующих двухуровневых частиц.

Вспомним упражнение, в котором мы вычисляли число состояний для системы спинов. Это число оказалось равным

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{M}\right)^M \left(\frac{e}{N-M}\right)^{N-M} = \frac{N^N}{M^M(N-M)^{N-M}}$$

Логарифм этой величины можно представить в форме

$$\sigma^* = \ln \Delta\Gamma = -N(n \ln(n) + (1-n) \ln(1-n))$$

Величина

$$n = \frac{M}{N} = \frac{E}{(N\Delta E)}$$

Определим температуру  $\tau$  с помощью формул статистической физики:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E} \ln\left(\frac{1-n}{n}\right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1-n)}$$

Обратим внимание, что с ростом среднего числа возбужденных спинов  $n$  от нуля до половины температура  $\tau$  растет от нуля до бесконечности, а при дальнейшем возрастании числа  $n$  в интервале  $1/2 < n < 1$  "температура"  $\tau$  отрицательна.

Состояние с отрицательной температурой возможно только для систем с конечным числом всех состояний системы. В данном случае это число равно  $2^N$ .

Исследуем зависимость теплоемкости. Для этого ее по определению посчитаем:

$$c(T) = \frac{dE}{dT} = \Delta E_N \frac{dn}{dT} = \frac{\Delta E^2 N \exp(\Delta E/T)}{T^2(1 + \exp(\Delta E/T))^2}$$

Видим, что теплоемкость спадает по закону  $c(T) \sim \exp\left(\frac{-\delta E}{T}\right)$ ,  $T \rightarrow 0$ ;  $c(T) \sim \frac{1}{T^2}$ ,  $T \rightarrow \infty$

#### Задача. 4

Определить энтропию газа  $N$  невзаимодействующих осцилляторов при заданной энергии  $E$ . Получить связь между энергией и температурой  $T$ . Обсудить отличие температурного поведения теплоемкости от предыдущей задачи.

Из упражнения про осциллятор мы имеем значение числа состояний:

$$\frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!} \approx \frac{(N+M)^{N+M}}{N^N M^M}$$

Статистическая энтропия системы равен логарифму формулы выше:

$$\sigma = \ln \Delta\Gamma = N(-n \ln(n) + (1+n) \ln(1+n)), \quad n = \frac{M}{N}$$

здесь  $n = M/N = E/(N\Delta E)$  — среднее число возбуждений, приходящихся на Один осциллятор. Производные статистической энтропии равны

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E} \ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1+n)}$$

Число состояний системы осцилляторов бесконечно, и состояния с отрицательной температурой отсутствуют.

**Задача. 5**

Вычислить магнитную восприимчивость одноатомного парамагнитного газа  $\chi(T)$  с моментом  $J$ .

$$\varepsilon_n = g\mu_b H_m, m \in \{-J, \dots, J\}$$

$$\text{Полная энергия } E_n = \sum_{i=1}^N g\mu_b M m_i, n = \{m_1, \dots, m_N\}$$

Статсумма для системы из  $N$  частиц:

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum e^{-E_n/T} = \sum_{m_1, \dots, m_N} \exp\left(-\frac{g\mu_b H(m_1 + \dots + m_N)}{T}\right) = \\ &= \left(\sum_{m_1} e^{-g\mu_b H m_1/T}\right) \left(\sum_{m_2} e^{-g\mu_b H m_2/T}\right) \dots \left(\sum_{m_N} e^{-g\mu_b H m_N/T}\right) = \left(\sum_m e^{-g\mu_b H m/T}\right)^N \equiv Z_1^N \end{aligned} \quad (7)$$

Также введем обозначение  $x := g\mu_b H/T$ , тогда перепишем:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{m=-J}^J e^{-xm} = e^{xJ} + e^{x(J-1)} + \dots + e^{-xJ} = e^{-xJ} (1 + e^x + \dots + e^{2Jx}) = \\ &= e^{-xJ} \cdot \frac{e^{(2J+1)x} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{(J+\frac{1}{2})x} - e^{-(J+\frac{1}{2})x}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{\text{sh}\left(J + \frac{1}{2}\right)x}{\text{sh}\frac{x}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

далее через свободную энергию  $F = -T \ln Z_N = -TN \ln Z_1$  считаем магнитный момент как производную ее по магнитному полю.

$$M = \left(-\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,N} = \frac{TN}{z_1} \frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{TN}{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial H} = \frac{TN}{z_1} \cdot \frac{g\mu_b}{T} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

далее пару строк не успеваю вписать в латех, короче говоря, простая математика тут.

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right) = g\mu_b \left(\frac{\partial B(x)}{\partial H}\right) = \frac{(g\mu_b)^2}{T} B'_y(x)$$

При  $T \gg g\mu_b H \Rightarrow \chi \approx \frac{1}{T}$ , что есть закон Кюри.

**Задача. 6**

Вычислить для парамагнитного газа изменение температуры при адиабатическом изменении магнитного поля  $(\partial T/\partial H)_S$ , если его свободная энергия может быть представлена в виде:  $F = F_0(T) - (1/2)\chi(T)H^2$

$$dE = TdS - pdV + \mu dN - MdH$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H = \frac{\partial(M, H)}{\partial(S, H)} = \frac{\partial(M, H)}{\partial(T, H)} \frac{\partial(T, H)}{\partial(S, H)} = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H} = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_H \frac{T}{C_H}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \frac{T}{C_H}$$

При  $M = \chi H$  получаем закон Кюри:

$$\chi = \frac{A}{T}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = H \frac{\partial \chi}{\partial T} = -\frac{HA}{T^2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{AH}{C_H T}$$

**Задача. 7** Найти флуктуации

$$\overline{\Delta E^2}, \overline{\Delta N^2}, \overline{\Delta S^2}, \overline{\Delta P^2}, \overline{\Delta S \Delta P}, \overline{\Delta V \Delta P}, \overline{\Delta S \Delta T}, \overline{\Delta T^2}, \overline{\Delta V^2}, \overline{\Delta T \Delta V}, \overline{\Delta T \Delta P}, \overline{\Delta S \Delta V}$$

Используя гауссову теорию флуктуаций, выразим в формуле  $w \sim \exp \frac{\Delta p \Delta V - \Delta T \Delta S}{2kT}$  величины  $\Delta S$  и  $\Delta p$  через флуктуации независимых переменных  $V$  и  $T$ :

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T$$

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T \quad (9)$$

С помощью равенства  $dF = -SdT - pdV$  имеем  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ . Далее,  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T}$ . Подставляя эти значения в 9 имеем

$$\Delta S = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T$$

Теперь выражение для плотности вероятности  $w$  после подстановки найденных выражений для  $\Delta S$  и  $\Delta p$  принимает гауссов вид в переменных  $V$  и  $T$ :

$$w \sim \exp \left[ -\frac{C_V}{2kT^2} (\Delta T)^2 + \frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (\Delta V)^2 \right] \quad (10)$$

Из 10 видно, что плотность вероятности распалась на произведение...

Это означает, что флуктуации температуры и объема статистически Независимы:

$$\langle \Delta V \Delta T \rangle = 0$$

Сравнивая 10 с соотношением  $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx = \alpha^{-1}$  находим

$$\langle (\Delta T)^2 \rangle = \frac{kT^2}{C_V}$$

$$\langle (\Delta V)^2 \rangle = -kT \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Для вычисления средних значений комбинаций, содержащих одну из выбранных независимых переменных, удобно выразить флуктуации второй величины через  $\Delta V$  и  $\Delta T$ . Тогда получим, например, для  $\langle \Delta T \Delta p \rangle$

$$\langle \Delta T \Delta p \rangle = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \langle \Delta T \Delta V \rangle + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \langle (\Delta T)^2 \rangle$$

Подставляя сюда соотношения выше, найдем

$$\langle \Delta T \Delta p \rangle = \frac{kT^2}{C_V} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Аналогично

$$\langle \Delta V \Delta p \rangle = \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \langle (\Delta V)^2 \rangle + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \langle \Delta V \Delta T \rangle$$

Подставляя  $\langle (\Delta T)^2 \rangle$  и  $\langle \Delta V \Delta T \rangle = 0$  имеем

$$\langle \Delta V \Delta p \rangle = -kT$$

Далее,

$$\begin{aligned} \langle \Delta S \Delta V \rangle &= \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \langle (\Delta V)^2 \rangle + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \langle \Delta V \Delta T \rangle = \\ &= -kT \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = kT \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

Для вычисления флуктуации  $\langle (\Delta S)^2 \rangle$ ,  $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ , и  $\langle \Delta p \Delta S \rangle$ , можно выразить их через  $\Delta V$  и  $\Delta T$ . Например,

$$\langle (\Delta S)^2 \rangle = \left\langle \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T \right]^2 \right\rangle$$

Раскрывая квадрат суммы и учитывая формулы других флуктуаций найдем

$$\langle (\Delta S)^2 \rangle = - \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T kT + \frac{C_V^2}{T^2} \frac{kT^2}{C_V}$$

Учитывая соотношение

$$C_p - C_V = -T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (11)$$

окончательно получаем

$$\langle (\Delta S)^2 \rangle = kC_p$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle (\Delta p)^2 \rangle &= \left\langle \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T \right]^2 \right\rangle = \\ &= -kT \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \frac{kT^2}{C_V} \end{aligned} \quad (12)$$

С помощью 11 имеем

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 = -\frac{C_p - C_V}{T} \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

Подставим это выражение в 12 и приведем подобные члены:

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = -kT \frac{C_p}{C_V} \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -kT \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \langle \Delta p \Delta S \rangle &= \left\langle \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T \right] \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T \right] \right\rangle = \\ &= \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \langle (\Delta V)^2 \rangle + \frac{C_V}{T} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \langle (\Delta T)^2 \rangle \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\langle(\Delta T)^2\rangle$  и  $\langle(\Delta V)^2\rangle$  приходим к равенству

$$\langle\Delta p\Delta S\rangle = 0$$

### Задача. 8

Вычислить для одноатомного и двухатомного Больцмановских газов  $F, \mu, P, S, C, (\partial P/\partial \rho)_S$   
а) одномерный газ

$$Z_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{-\frac{p^2}{2mT}} d^3x d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \left( \int e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp_x \right)^3 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi mT)^{3/2}$$

$$Z = \frac{e^N V^N}{N^N (2\pi k)^{3N}} (2\pi mT)^{3N/2}$$

$$F = -T \ln Z = -NT \ln \left( \frac{eV}{(2\pi\hbar)^3 N} (2\pi mT)^{3/2} \right)$$

$$E = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2}NT; \quad C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3}{2}N; \quad \mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{3}{2}T; \quad P = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{NT}{V};$$

$$S = -\frac{\partial E}{\partial T} = N \left( \ln \left( \frac{eV}{(2\pi\hbar)^3 N} (2\pi mT)^{3/2} \right) + \frac{5}{2} \right)$$

$$S = \text{const} \Rightarrow VT^{3/2} = \text{const}; \quad V \sim \rho^{-1}, T \sim p/\rho \Rightarrow p\rho^{-5/3} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{5p}{3\rho}$$

б) двумерный газ.

$$E = E_{\text{пост}} + E_{\text{вращ}} \Rightarrow Z = Z_{\text{пост}} \cdot Z_{\text{вращ}}$$

$$\hat{H}_{\text{вращ}} = \frac{\hbar^2}{2I} \hat{L}^2 \Rightarrow E_{\text{вращ}} = \frac{\hbar^2}{2I} L(L+1)$$

$$Z_{\text{вращ}} = \sum_{l=1}^{\infty} (2L+1) \exp \left( -\frac{2\hbar}{2I} \frac{L(L+1)}{T} \right) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} (2L+1) \exp \left( -\frac{T_c L(L+1)}{T} \right)$$

где  $T = \frac{\hbar^2}{2I} \approx 1 \div 10K$

при  $T \gg T_c$   $Z_{\text{вращ}, 1} \approx \int_0^{\infty} (2L+1) e^{-T_c L(L+1)/T} dL \equiv \int_0^{\infty} e^{-T_c z/T} dz = \frac{T}{T_c}$

т.о.  $Z_{\text{вращ}} = \left( \frac{T}{T_c} \right)^N$   
поэтому

$$Z = \frac{e^N V^N}{N^N (2\pi k)^{3N}} (2\pi m)^{3N/2} \frac{T^{5N/2}}{T_c^N}$$

$$F = -T \ln Z = -NT \ln \left[ \frac{eV}{N(2\pi k)^3} (2\pi m)^{3/2} \frac{T^{5/2}}{T_c} \right]$$

$$E = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{5}{2}NT$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5}{2}N; \quad \mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{5}{2}T; \quad P = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{NT}{V};$$

$$S = \text{const} \Rightarrow VT^{5/2} = \text{const} \Rightarrow p\rho^{-7/5} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{7p}{5\rho}$$

### Задача. 9

Найти теплоемкость идеального газа без внутренних степеней свободы, помещенного в однородное гравитационное поле в коническом сосуде высоты  $h$  (основание конуса расположено внизу, вверх). Рассмотреть случаи:  $mgh \ll T, mgh \gg T$

а) случай основания снизу

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

$$Z = \frac{1}{N!} Z_1^N \approx \left(\frac{eZ_1}{v}\right)^N$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) \exp\left(-\frac{mgz}{T}\right) = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^h \pi (tgz)^2 \exp\left(\frac{mgz}{T}\right) dz = \\ &= \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \pi tg^2 \alpha \left(\frac{T}{mg}\right)^2 \left[ \exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left(\frac{mgh}{T} - 1\right) + 1 \right] \quad (13) \end{aligned}$$

$$E = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = N \left( \frac{9}{2}T - mgh \frac{\exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right]}{\exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1} - \frac{mgh}{\left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1} \right)$$

$$E = N \left[ \frac{9}{2}T - \frac{(mgh)^2 \exp\left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right]}{T \left(\frac{mgh}{T}\right) \left[\frac{mgh}{T} - 1\right] + 1} \right]$$

$mgh \ll T$  - тогда  $E = \frac{9}{2}NT - NT = \frac{5}{2}NT \Rightarrow C = \frac{7}{2}N$

$mgh \gg T$  - тогда  $E = \frac{9}{2}NT - mghN = \frac{7}{2}NT \Rightarrow C = \frac{9}{2}N$

б) случай основания сверху

просто заменим  $h$  на  $-h$

$mgh \ll T \Rightarrow C = \frac{7}{2}N$

$mgh \gg T \Rightarrow C = \frac{9}{2}N$

### Задача. 10.

Вычислить температурную зависимость теплоемкости двухатомного Больцмановского газа, учесть диссоциацию молекул.

$$Z_{\text{дисс}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^6} (2\pi mT)^3 = \alpha T^3$$

для двухатомного газа:

$$Z_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 T_c} (2\pi m)^{3/2} T^{5/2} = \beta T^{5/2}$$

$$Z = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \frac{1}{(N-n)!} (Z_{\text{дисс}})^n Z_1^{N-n} = \frac{1}{N!} (Z_{\text{дисс}} + Z_1)^N \approx \left(\frac{e}{N} (Z_{\text{дисс}} + Z_1)\right)^N$$

$$\ln Z \approx N \ln (Z_{\text{дисс}} + Z_1) + N \ln \frac{e}{N}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = NT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln (Z_{\text{дисс}} + Z_1) = NT^2 \frac{3\alpha T^2 + \frac{5}{2}\beta T^{3/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}}$$

$$C = \frac{dE}{dT} = N \left( \frac{12\alpha T^3 + \frac{35}{4}\beta T^{5/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}} - T^2 \left( \frac{3\alpha T^2 + \frac{5}{2}\beta T^{3/2}}{\alpha T^3 + \beta T^{5/2}} \right)^2 \right)$$

### Задача. 11.

Построить изохоры, изобары и изотермы для бозе-газа.

$$PV = \frac{2}{3} AT^{5/2} J_{1/2}(y) : \quad y = -\frac{\mu}{T}$$

$$J_\alpha(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{e^{x+y} - 1}$$

$$T_c \approx 6,6 \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3}$$

$$T < T_c \Rightarrow p \simeq \alpha T^{5/3}$$

$$T \gg T_c \Rightarrow \frac{P_V}{NT} \approx 1 - \alpha \left( \frac{T_0}{T} \right)^{3/2}$$

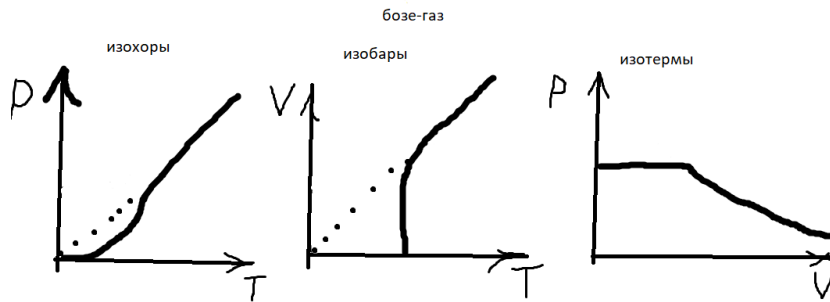


Рис. 1

### Задача. 12.

Построить изохоры, изобары и изотермы для ферми-газа.

При  $T \ll \varepsilon_r$   $p \approx \gamma \left( \frac{N}{v} \right)^{5/3}$



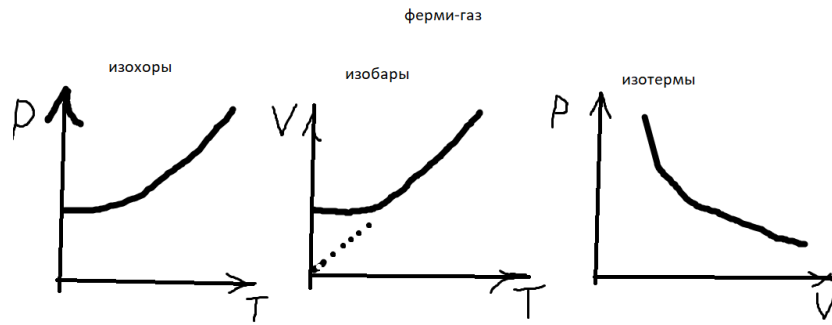


Рис. 2

**Задача. 13.**

Вычислить теплоемкость двумерного вырожденного идеального ферми-газа.

$$dN_p = g\bar{n}_p \frac{dp_x dp_y dV}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{gV p dp}{2\pi\hbar^2 (\exp(\frac{\varepsilon - \mu}{T}) + 1)}$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p dp = m d\varepsilon$$

$$dN_\varepsilon = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) V \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1} = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT \frac{dx}{e^{x-y} + 1}$$

$$E = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT^2 \int_0^\infty \frac{x dx}{e^{x-y} + 1} \approx \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) VT^2 \left( \left(\frac{\mu^2}{2T^2}\right) + \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$C = \frac{1}{V} \frac{dE}{dT} = \left(\frac{gm}{2\pi\hbar^2}\right) \frac{\pi^2}{3} T$$

**Задача. 14.**

Вычислить теплоемкость черного излучения.

Химический потенциал фотонного газа равен нулю.

Распределение фотонов дается соотношением:

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega_k}{T}) - 1}$$

Число состояний определяется соотношением

$$2 \frac{V 4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = 2 \frac{V 4\pi \omega_k^2 d\omega_k}{(2\pi c)^3}$$

Дополнительный фактор 2 возникает из-за двух поляризаций фотонов.

Подставляя это число в  $\bar{N}_n$ , получаем:

$$dN_\omega = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

Энергия излучения получается из  $dN_\omega$  умножением на энергию фотона

$$dE_\omega = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} \frac{V\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3} \quad (14)$$

Формула 14 - называется формулой Планка.

Дальше считаем свободную энергию.

$$F = T \sum_k \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon_k}{T} \right) \right] = T \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar\omega}{T} \right) \right] d\omega$$

Заменяя переменную интегрирования  $x = \hbar\omega/T$  и интегрируя по частям, отсюда получим

$$F = -\frac{VT^4}{3\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1}$$

Безразмерный интеграл в этом соотношении равен  $\pi^4/15$ . Итак, свободная энергия равна

$$F = -\frac{\pi^2 VT^4}{45 \hbar^3 c^3} = -\frac{4\sigma}{3c} VT^4$$

Коэффициент  $\sigma$  называется постоянной Стефана-Больцмана:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Г}}{\text{сек}^3 \text{град}^4}$$

(если температура измеряется в градусах Кельвина). Зная свободную энергию, определяем обычную энергию (закон Больцмана)

$$E = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = \frac{4\sigma}{c} VT^4$$

Для теплоемкости излучения в полости с заданным объемом получаем

$$C_V = \frac{16\sigma}{c} VT^3$$

### Задача. 15

Найти равновесную плотность и теплоемкость акустических фононов в кристалле при температурах выше  $T$  и ниже  $T$  дебаевской

### Задача. 16

Используя представление оператора смещения гармонического осциллятора

$$\hat{x} = \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{1/2} (\hat{b}^+ + \hat{b}), \text{ получить формулу } \langle e^{ik\hat{x}} \rangle = e^{-\frac{k^2 \hbar}{4m\omega}} \text{ при температуре } T = 0$$

### Задача. 17

Описать парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Рассмотреть эффект де Гааза-ван Альфена в двумерном металле.

### Задача. 18.

Сравнить низкотемпературные зависимости теплоемкости идеальных бозе- и ферми-газов, черного излучения и твердого тела, парамагнетика и ферромагнетика, неидеального бозе-газа и, наконец, сверхпроводника.

### Задача. 19.

Показать, что фазовая скорость элементарного возбуждения в бозе-конденсате равна гидродинамической скорости звука.

**Задача. 20**

Найти распределение частиц по импульсам и полное число надконденсатных частиц в идеальном и неидеальном бозе-газах при  $T = 0$  и низких температурах.

**Задача. 21**

Определить свободную энергию одномерной цепочки спинов  $1/2$  с гамильтонианом

$$\hat{H} = -J \sum_k^N \hat{\sigma}_k^z \hat{\sigma}_{k+1}^z, \quad \hat{\sigma}_{N+1}^z = \hat{\sigma}_1^z$$

Вычислить теплоёмкость и объяснить причину отсутствия фазового перехода при  $X \neq 0$

**Задача. 22.** Для ферромагнетика в модели Гейзенберга при  $T = T_c$  определить спектр возбуждений (магнонов) и найти температурную зависимость намагниченности и теплоемкости спиновых волн.

**Задача. 23.** Для ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении самосогласованного поля определить температуру Кюри  $T_c$ , температурную зависимость магнитной восприимчивости и спонтанной намагниченности вблизи  $T_c$ . Сравнить с результатами теории Ландау.

**Задача.** Определить корреляционный радиус флуктуации параметра порядка в нулевом внешнем поле вблизи точки фазового перехода II рода. Найти флуктуационную поправку к теплоемкости при  $T = T_c$  в теории Гинзбурга–Ландау.

**Задача. 25.** Доказать, что плотность сверхтекучей компоненты электронного газа при  $T = 0$  равна полной плотности числа частиц.

**Задача. 26.** В модели БКШ определить скачок теплоемкости.

**Задача. 27.** Диагонализуя гамильтониан для фотонов и экситонов с учетом гибридизации, получить спектр поляритонов.

**Задача. 28.** Мешок Нагаоки (спиновый полярон большого радиуса в антиферромагнетике)