Задачи по теории вероятностей

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

1 октября 2020 г.

Аннотация

Задачи по теории вероятностей

Содержание

Предисловие

Задачи по теории вероятностей.

Часть I
Первое задание

1 Задачи на теорию множеств

Здача. Т 1

Пусть $A, B-$ два события. Найти все события X такие, что $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \bar{A})} = B$
Ищем так:

$$\overline{B} = (X \cup A) \cap (X \cup \bar{A})$$

По правилу де Моргана $(X \cup \bar{A}) = (\overline{\overline{X} \cap A})$, таким образом:

$$(X \cup A) \cap (\overline{\overline{X} \cap A}) = \overline{(X \cup A)} \cup (\overline{X} \cap A) = (\overline{X} \cap \overline{A}) \cup (\overline{X} \cap A) = \overline{X}$$

Ответ $X = B$.

Здача. Т2

Пусть $A, B-$ два события. Найти все события X такие, что $AX = AB \iff A \cup X = A \cup B$.

Очевидно, что необходимо, чтобы $X \in A \cap B$. Но также X может содержать любое множество $Y \in X$, которое при $A \cup X$ дало бы ноль, таким образом задача решена.

Ответ $X = Y \cup (A \cap B)\ \forall\ Y \in \overline{A}$.

Здача. Т3

Пусть $A_1, \ldots, A_n-$ события. Покажите, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1$$

Воспользуемся тем, что $\forall B \quad \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(\overline{B}) = 1$. Возьмем в качестве B выражение: $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, тогда $\overline{B} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}$. Подставляя, получаем:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1$$

Здача. Т4

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - последовательность событий и $\mathrm{P}\left(A_n\right) = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажите, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

Вообще, это очевидно, попробую разве что написать подробнее, почему это так:

Вспомним, что на всем вероятностном пространстве Ω выполняется $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. Таким образом $A_i = \Omega + A_{i0}$, где $A_{i0} : \mathrm{P}(A_{i0}) = 0$. Таким образом,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathrm{P}\left(\Omega + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{i0}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1$$

Я могу написать доказательство с вынесением предела, но оно такое же очевидное, как и то, что выше.

Здача. T5

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - последовательность событий. Покажите, что

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(A_n\right) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(A_n\right) \le \mathrm{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

?????

Здача. T6

Покажите, что для любых двух событий A и B выполняется неравенство

$$|\mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \le \frac{1}{4}$$

Обозначим $AB \equiv$, $A\backslash B \equiv a$, $B\backslash A \equiv b$, тогда доказать нужно нам, что

$$|c - (a+c)(b+c)| \le \frac{1}{4}$$

Причем по условию, так как мы работаем с событиями, должно выполняться: $a+b+c \le 1$.

Докажем, что $c - (a+c)(b+c) \ge -\frac{1}{4}$. Действительно, $2\sqrt{ab} \le a+b \le 1 \to ab \le 1\frac{1}{4}$.

$$c - (a+c)(b+c) = (1 \underbrace{-a-b-c}_{\le 0}) - ab \ge -\frac{1}{4}$$

Докажем, что $c - (a+c)(b+c) \le \frac{1}{4}$. Преобразуем выражение уже в другом виде:

$$c - (a+c)(b+c) \le c - c^2 = c(1-c) = (\sqrt{c}\sqrt{(1-c)})^2 \underbrace{\le}_{\text{неравнство Коши}} \left(\frac{1}{2}(c + (1-c))\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

Таким образом, уж точно

$$|c - (a+c)(b+c)| \le \frac{1}{4}.$$

2 Простые жизненные задачи

Здача. T7

Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

Посмотрим на случай четырех костей.

Можно считать количество успешных исходов, но это сделать сложно, так что пойдем от обратного, посчитаем неудачные исходы.

Вероятность невыпадения единицы в одном испытании: $1-\frac{1}{6}$, в четырех экспериментах она равна $(1-\frac{1}{4})^4$. Это же вероятность того, что среди всех выпавших костей нет ни одной единицы. Тогда вероятность выпадения единицы равна

$$P_1 = 1 - (1 - \frac{1}{4})^4$$

Посмотрим на случай двух костей.

При одном бросании двух костей у нас 36 может быть разных вариантов, что может выпасть, при этом подходит только один вариант. Поэтому аналогично первому пункту, вероятность хотя бы за какой-то бросок получить пару единиц, равна:

$$P_2 = 1 - (1 - 1\frac{1}{36})^{24}$$

Осталось только сравнить эти цифры. Посмотрим на вероятность для случая двух костей:

$$P_2 \leq 1-(1-1\frac{6}{36})^4 \leq 1-(1-1\frac{1}{6})^4 \leq P_1$$

Ответ: удача в случае бросания одной кости имеет большую вероятность.

Здача. T8

Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12.

Посчитаем количество исходов, которые дадут 11 очков в сумме. По сути это количество целочисленных положительных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ при условии $x_1, x_2, x_3 \leq 6$.

(опущены рассуждения?????)

В итоге 25 исходов.

Здача. T9.

Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

Всего карт одной масти 13.

Каждая из 6 карт может быть 4х мастей, так что всего элементарных исходов 4^6.

Нам не подходят исходы, в которых 3, 2, 1 масть. По биномиальному распределению легко найти их вероятности. В итоге нужная вероятность равна:

$$P = 1 - \frac{C_4^3 \cdot 3^6 + C_4^2 \cdot 2^6 + C_4^1 \cdot 1^6}{4^6} = \frac{99}{512}$$

Ответ: $\frac{99}{512}$

Здача. T 10

В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

Пусть A_i - элементарное событие, состоящее в том, что i-е письмо дошло своему адресату. Тогда нужно найти.

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} \mathbf{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}\right)$$

Посмотрим на каждое слагаемое внимательнее. Каждое слагаемое - вероятность того, что у нас будет m попаданий конвертов и писем. Если зафиксировать m писем, то оставшиеся письма можно раскладывать $(n-m)!$ способами. Всего можно n писем по n конвертам разложить $n!$ способами:

$$\mathbf{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}\right) = \frac{(n-m)!}{n!}$$

при этом при любых перестановках адресатов вероятность такая же, а всего перестановок при фиксированном m будет C_n^m. В итоге формула примет вид:

$$\mathbf{P} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1m}_{\quad n} \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{1}{m!}$$

Ответ: $\mathbf{P} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{1}{m!}$

Здача. T11

У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в очереди имеет 100-рублевые купюры, а вторая половина - 50-рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета - 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачу?

Для каждого человека, имеющего 100р чтобы нашлась сдача необходимо, чтобы был перед ним человек, пришедший с 50р.

Таким образом, задача эквивалентна задаче о скобочной последовательности, где есть открывающая и закрывающая скобка. и каждая открытая должна иметь после нее закрывающую.

Известно, что число скобочных последовательностей из n открывающих и n закрывающих скобок равно числу Каталана $_n = \frac{1}{n+1}C_n^{2n}$.

Всего же возможных последовательностей - число сочетаний C_{2n}^n, Поэтому ответ: $P = \frac{1}{n+1}$, для нашего случая, $n = 50$, имеем $P = \frac{1}{51}$

Ответ: $P = \frac{1}{51}$

Здача. T12

Расстояние от пункта A до пункта B автобус проходит за 2 минуты, а пешеход - за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени из пункта A и отправляется в B пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

Будем решать графически. Нарисуем 2D пространство время, как на картинке.

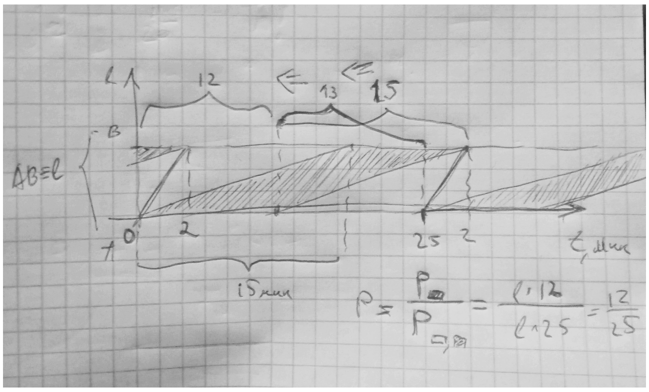

Рис. 1: Здесь короткая линия под наклоном - линия движения автобусе. длинные наклонные линии - линии движения человека. заштрихованная область - область всех возможных линий, где мировая линия человека не пересечет мировую линию автобуса.

Несложные соображения показывают, что заштрихованная область может быть такой и только такой.

Нам нужно понять, какую область от всего квадрата 25-и минут занимает заштрихованная область. В этой области площадь параллелограмма определяется длиной его основания. Последнюю можно найти, вспоминая соображения, с помощью которых строилась правая линия квадрата. Расстояние между началом правой линии и отметкой по времени "25+2"должно быть 15. таким образом, расстояние основания параллелограмма равно $l \cdot 12$. Площадь квадрата: $l \cdot 25$.

Ответ:$\frac{12}{25}$

Здача. T13

На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

Треугольник можно составить если для любых сторон его a, b, c выполняется $a < c + b$. То есть $2c < +b + c = l$ и любая сторона его должна быть меньше $\frac{l}{2}$.

Запишем это графически, введя координаты двух точек x_1 и x_2, тогда на длины сторон неравенства нам дадут систему: $x_1 < \frac{l}{2}$; $l - x_2 < \frac{l}{2}$; $x_2 > \frac{l}{2}$.

Изобразим это графически.

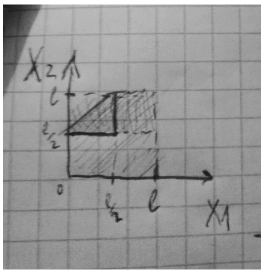

Рис. 2: геометрическая вероятность для этой задачи

В итоге нужная нам область составляет $\frac{1}{8}$ от площади всех возможных вариантов.

Ответ: $\frac{1}{8}$

Здача. Т 14

На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

Введем параметр x - расстояние от середины иглы до ближайшей линии. Этим параметром, а также углом α, который составляет игла с перпендикуляром к линиям определяется однозначно положение иглы.

Таким образом, пространство событий $\Omega = [0, L/2] \times [0, \pi]$.

В нем нам нужны события, соответствующие пересечениям, то есть когда проекция углы на перпендикуляр $l \cos \alpha$ больше расстояния от центра иглы до линии: $x \leq l \cos \alpha$. В итоге в прямоугольнике Ω появляется нужная нам область площадью $S = \frac{l}{2} \int_0^{\pi} \cos \alpha d\alpha = l$.

В итоге по формуле геометрической вероятности $P = \frac{l}{\pi L/2} = \frac{2l}{\pi L}$

Ответ: $\frac{2l}{\pi L}$

Здача. Т 15

На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

Пусть три точки уже находятся на отрезке. Между двумя крайними точками находится одна из них. Она могла бы попасть первой, могла бы второй, а могла бы и третей. Таким образом, из всех способов размещения трех точек только один нужный нам, когда средняя точка попадает последней.

Так как какой бы ни был расклад точек, для каждого расклада только ровно $1/3$ из всех возможных событий успешный, то и в итоге вероятность нужного нам события равна $1/3$.

Ответ $1/3$.

Здача. Т 16

Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков.

Найдем, чему равна вероятность, что при подбрасывании двух игральных костей выпадет 5: всего таких исходов 4: если выпадает 1,4; 4,1; 2,3; 3,2. Таким образом, $p_5 = 4/36 = 9$

Вероятность, что при подбрасывании двух игральных костей выпадет 7: всего таких исходов 4: если выпадает 2,5; 5,2; 2,4; 4,2; 1,6; 6,1. Таким образом, $p_5 = 6/36 = 1/6$

Пусть A - событие, состоящее в выпадении 5 раньше 7. Оно состоит из исхода, при котором на i-м шаге выпадает 5, а на $(i-1)$ шаге не выпадает ни 5, ни 7, обозначим его B_i. Запишем событие A в виде

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

тогда его вероятность:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

Также $P(B_i) = (1 - p_5 - p_7)^{i-1} p_5$, потому что отдельные броски независимы.

Таким образом, осталось посчитать ответ:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p_5 - p_7)^{i-1} p_5 = \frac{p_5}{1 - (1 - p_5 - p_7)} = \frac{p_5}{p_5 + p_7} = 4/(6+4) = 2/5$$

Ответ: $\frac{2}{5}$

Здача. Т 17

Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Найти вероятности выигрыша каждого игрока

Пусть A_i - вероятность того, что у первого игрока при i-м бросании будет герб. Аналогично, B_i - вероятность того, что у второго игрока при i-м бросании будет герб, C_i - у третьего.

Тогда запишем $A = \bigcup A_i,\ B = \bigcup B_i,\ = \bigcup_i$.

И также..

По формуле полной вероятности $P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(\overline{A_1})P(A|\overline{A_1})$. И понятно, что $P(A|\overline{A_1}) = 1$, $P(A_1) = P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2}$

а дальше я хз вообще говоря...

Здача. Т 18

В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

Здача. Т 19

По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA, BBBB, CC$ причем априорные вероятности равны 0,3,0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до $0,6$, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и $0,2$. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ACAB$.

Здача. Т 20

Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки Оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

Здача. Т 21

Т.21. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из m отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

3 Распределения и случайные величины

Здача. Т

Т.22. Пусть ξ и $\eta-$ две случайные величины и $\mathrm{P}(\xi\eta=0)=1$ $\mathrm{P}(\xi=1)=\mathrm{P}(\xi=-1)=\mathrm{P}(\eta=1)=\mathrm{P}(\eta=-1)=\frac{1}{4}$. Найти совмест- ное распределение этих случайных величин.

Здача. Т

Т.23. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$, а $\mathrm{P}(\eta=0)=\mathrm{P}(\eta=1)=\mathrm{P}(\eta=-1)=\frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi+\eta$

Здача. Т

Т.24. В квадрат $\{(x_1,x_2):0\leqslant x_i\leqslant 1; i=1,2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1,ξ_2- ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\eta=\xi_1+\xi_2$

Здача. Т

Т.25. Пусть $\xi_k, k=1,2,-$ независимые сл учайные величины с распредеЛением Пуассона. Найт и распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1+\xi_2$

Здача. Т.23. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$, а $\mathrm{P}(\eta=0)=\mathrm{P}(\eta=1)=\mathrm{P}(\eta=-1)=\frac{1}{3}$. Найти Закон распределения случайной величины $\xi+\eta$

Здача. Т.24. В квадрат $\{(x_1,x_2):0\leqslant x_i\leqslant 1; i=1,2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1,ξ_2- ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\eta=\xi_1+\xi_2$

Здача. Т.25. Пусть $\xi_k, k=1,2,-$ независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1+\xi_2$

Здача. Т.26. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастаюшуyо непрерывную функцию распределения $F_{\xi}(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta=F_{\xi}(\xi)$.

Здача. Т.2 7. Пусть ξ имеет имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения и плотность случайной величины ξ^2

Здача. Т. 28. Пусть $X_1,\ldots,X_n-$ независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x)$. Для каждого элементарного события $\omega\in\Omega$ вектор $(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$ преобразуем в упорядоченный $\left(X_{(1)}(\omega),\ldots,X_{(n)}(\omega)\right)$, гДе $X_{(1)}(\omega)\leq\ldots\leq X_{(n)}(\omega)$. Упорядоченный век- тор $\left(X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\right)$ в математической статистике называют вариационным рядом, а случайные величины $X_{(k)}, k=1,\ldots,n-$ порядковыми статистиками. Покажите, что плотность совместного распределения по- рядКОВых статистик определяется равенст ВОМ

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=n!f\left(x_1\right)\cdot\ldots\cdot f\left(x_n\right)\nVdash_{\{x_1\leq\ldots\leq x_n\}}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

Здача. Т. 29. Вдоль дороги, длиной в 1 км расположены случайным образом три человека. Найти вероятность того, что никакие два человека не нахоДятся друг от друга на расстоя нии, меньшем 1/4 км.

4 Математическое ожкидание и Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции

Здача. Т.30. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе-Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть $\xi-$ число пустых ячеек. Найти $\mathrm{E}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$.

Здача. Т.31. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть $\xi-$ число появлений единицы, а $\eta-$ число появлений шестёрки. Найти коэффициент корре- Лящии этих сл учайных величин.

Здача. Т.32. Подбрасывают две игральные кости. Пусть ξ_1- число очков на первой игральной кости, а ξ_2- на второй. Определим $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$. Найти $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)$ и выяснить, являются ли η_1 и η_2 незави- СИМыми.

Здача. Т.33. Доказать, что если случайные величины ξ и η принимают только по два Значения каждая, то из некоррелируемости следует их независи- МОСТЬ.

Здача. Т.34. А вария происходит в точке X, которая равномерно распределена на дороге длиной L. Во время аварии машина скорой помоши находится в точке Y, которая также равномерно распределена на дороге. Считая, что X и Y независимы, найдите математическое ож идание расстояния между машиной скорой помоши и точкой аварии.

Часть II
Второе задание

5 Неравенства Чебышева и Маркова. Законы больших чисел

Здача. Т. **1**. Известно, что число посетителей некоторого салона в день является случайной величиной со средним значением 50. (a) Оценить вероятность того, что число посетителей в конкретный день превысит 75 (b) При условии, что дисперсия числа посетителей в день равна 25, оце- нить вероятность того, что в конкретный день их число будет между 40 и 60.

Здача. Т. 2. С помошью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что при 1000 бросаниях монеты число выпадений герба окажется в промежутке [450,550]

Здача. Т.3. Вероятность того, что изделие качественное, равна $0,9$. Каков должен быть объем партии изделий, чтобы с вероятностью $\geq 0,95$ можно было утверждать, что отклонение (по абсолютной вел ичине) доли качествен- ных изделий от 0,9 не превысит $0,01$?

Здача. Т.4. (Одностороннее неравенство Чебышева.) Пусть случайная величина ξ имеет нулевое среднее и дисперсию σ^2. Показать, что для $\varepsilon > 0$ выпол- няется неравенство

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$$

Здача. Т. 5. (Неравенство Иенсена.) Пусть $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}-$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$ (т. е. φ Выпуклая функция, и допускается $a = -\infty$ и $b = \infty$). Допустим также, что $\xi-$ слу чайная величина, которая принимает значения из (a, b) и $\mathrm{E}\xi = m, \mathrm{E}\varphi(\xi)$ конеч ны. Показать, что тогда

$$\mathrm{E}\varphi(\xi) \geq \varphi(\mathrm{E}\xi) = \varphi(m)$$

Здача. Т.6. Пусть $\xi-$ слу чайная вел ичина, имеющая нормал ьное распределение с параметрами (a, σ^2) . Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\mathrm{P}(|\xi - a| \geq \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon^2/2}, \quad \varepsilon > 0$$

Здача. Т.7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - последовательность одинаково распределенных сл учайных величин такая, что $\mathrm{E}\xi_k = a, \mathrm{D}\xi_k = \sigma^2$ и $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j}v\ i \neq j$. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотно- Шение

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Здача. Т.8. Пусть $\{\xi_n\}-$ последовательность неотрицательных случайных величин с конечными математическими ожиданиями и $\xi_n \stackrel{\text{п.н.}}{\rightarrow} \xi, \mathrm{E}\xi < \infty\ \mathrm{E}\xi_n \rightarrow \mathrm{E}\xi$ при $n \rightarrow \infty$. Покажите, что тогда $\mathrm{E}|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ Т. е. $\xi n \stackrel{L}{\rightarrow} \xi$

6 Метод характеристических функций. Центральная предельная теорема

Здача. Т.9. Найти характеристическую функцию распределения Лапласа, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Здача. Т.10. Найти характеристи ческую функцию нормального распределения с параметрами (a, σ^2)

Здача. Т.11. Найти распределения, которым соответствуют следуюшие характеристические функции:

$$h_1(t) = \cos t; \quad h_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad h_3(t) = \frac{1}{2 - e^{-it}}$$

Здача. Т.12. Найти распределение, которому соответствует характеристическая фу нкция $h(t) = e^{-t^2}\cos t$

Здача. Т. 13. Является ли функция $h(t) = \cos t^2$ характеристической?

Здача. Т.14. Случайная вел ичина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметрom λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$$

Здача. Т. 15. Используя резул Бтат предыдушей задачи, найти предел

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=n}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

Здача. Т.16. Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$ $m = 1, 2, \ldots, n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}, x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum_{m=1}^{n} \xi_{m,n}$

7 Элементы теории случайных процессов и математической статистики

Здача. Т. 17. Население региона делится по некоторому социально-экономи ческоМу признаку на три подгруппы. Следуюшее поколение с вероятностями 0,4; $0,6$ и $0,2$, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не Остается, то с равным и вероятностями переходит в Любую из остальных пОДгрупп. Найти: а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следуюшем поколении, если в настоящем поколении в 1 -ой подгруппе было 20% населения, во 2 -ой подгруппе -30%, и в 3 -ей подгру ппе -50% б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

Здача. Т.18. Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с ДВумя состоя ния м и и меет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1$$

Найти вероятности перехода за n шагов и предельные вероятности.

Здача. Т.19. Производящая функция процесса Гальтона-Ватсона имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{m+1-mz}, \quad m > 0$$

Выяснить при каких значениях параметра m процесс является: докритическим, крити ческим, надкритическим. Найти вероятность вырождения процесса в надкритическом случае. Показать, что n -тая итерация производяшей функции может быть представлена в виде

$$\begin{array}{l} f^n(z) = \frac{m^n-1-m\left(m^{n-1}-1\right)z}{m^{n+1}-1-m(m^n-1)z} \\ \text{при } m \neq 1 \text{ и} \\ f^n(z) = \frac{n-(n-1)z}{n+1-nz} \end{array} \tag{7.1}$$

Здача. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{20}\cdot$ Пусть $(W_t, t \geq 0)-$ винеровский процесс. Для $u \in \mathbb{R}$ определяется

$$\tau_u = \inf\{t : W_t = u\}$$

- момент первого достижения уровня u траекторией винеровского процесса. Найти плотность распределения случайной величины τ_u

Здача.

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, \quad t > 0$$

где $(W_t, t \geq 0)-$ ви неровский процесс. Найти плотность распределения сл у чайной вел и ч ИНы M_t

Здача. Т.22. Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)-$ выборка из пуассоновского распределения с параметром λ. Найти оценку наибольшего правдоподобия параметра λ

Здача. Т.23. Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)-$ выборка из нормального распределения $N\left(a, \sigma^2\right)$. Найти оцен ки наибольшего правдоподобия параметров a и σ^2

Список литературы