

Задачи по теории вероятностей

Юрий Голубев
yura.winter@gmail.com

30 сентября 2020 г.

Аннотация

Задачи по теории вероятностей

Содержание

Предисловие	1
I первое задание	2
1 задачи на теорию множеств	2
2 Простые жизненные задачи	3
3 распределения и случайные величины	5
4 Математическое ожидание и Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции	6
II Второе задание	7
5 Неравенства Чебышева и Маркова. Законы больших чисел	7
6 Метод характеристических функций. Центральная предельная теорема	8
7 Элементы теории случайных процессов и математической статистики	8
Список литературы	9

Предисловие

Задачи по теории вероятностей.

Часть I

первое задание

1 задачи на теорию множеств

Задача. Т1

Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \bar{A})} = B$
Ищем так:

$$\bar{B} = (X \cup A) \cap (X \cup \bar{A})$$

По правилу де Моргана $(X \cup \bar{A}) = \overline{(\bar{X} \cap A)}$, таким образом:

$$(X \cup A) \cap \overline{(\bar{X} \cap A)} = \overline{(\bar{X} \cup \bar{A})} \cup (\bar{X} \cap A) = (\bar{X} \cap \bar{A}) \cup (\bar{X} \cap A) = \bar{X}$$

Ответ $X = B$.

Задача. Т2

Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что $AX = AB \iff A \cup X = A \cup B$.

Очевидно, что необходимо, чтобы $X \in A \cap B$. Но также X может содержать любое множество $Y \in X$, которое при $A \cup X$ дало бы ноль, таким образом задача решена.

Ответ $X = Y \cup (A \cap B) \forall Y \in \bar{A}$.

Задача. Т3

Пусть A_1, \dots, A_n — события. Покажите, что

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) = 1$$

Воспользуемся тем, что $\forall B \quad P(B) + P(\bar{B}) = 1$. Возьмем в качестве B выражение:
 $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$, тогда $\bar{B} = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k$. Подставляя, получаем:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) = 1$$

Задача. Т4

Пусть A_1, A_2, \dots — последовательность событий и $P(A_n) = 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$.
Покажите, что

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

Вообще, это очевидно, попробую разве что написать подробнее, почему это так:

Вспомним, что на всем вероятностном пространстве Ω выполняется $P(\Omega) = 1$. Таким образом $A_i = \Omega + A_{i0}$, где $A_{i0} : P(A_{i0}) = 0$. Таким образом,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\Omega + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{i0}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1$$

Я могу написать доказательство с вынесением предела, но оно такое же очевидное, как и то, что выше.

Задача. Т5

Пусть A_1, A_2, \dots - последовательность событий. Покажите, что

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

?????

Задача. Т6

Покажите, что для любых двух событий A и B выполняется неравенство

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

Обозначим $AB \equiv c$, $A \setminus B \equiv a$, $B \setminus A \equiv b$, тогда доказать нужно нам, что

$$|c - (a + c)(b + c)| \leq \frac{1}{4}$$

Причем по условию, так как мы работаем с событиями, должно выполняться: $a + b + c \leq 1$.

Докажем, что $c - (a + c)(b + c) \geq -\frac{1}{4}$. Действительно, $2\sqrt{ab} \leq a + b \leq 1 - c \rightarrow ab \leq \frac{1}{4}(1 - c)^2$.

$$c - (a + c)(b + c) = (1 - \underbrace{a - b - c}_{\leq 0}) - ab \geq -\frac{1}{4}$$

Докажем, что $c - (a + c)(b + c) \leq \frac{1}{4}$. Преобразуем выражение уже в другом виде:

$$c - (a + c)(b + c) \leq c - c^2 = c(1 - c) = (\sqrt{c}\sqrt{1 - c})^2 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}(c + (1 - c))\right)^2}_{\text{неравенство Коши}} \leq \frac{1}{4}$$

Таким образом, уж точно

$$|c - (a + c)(b + c)| \leq \frac{1}{4}.$$

2 Простые жизненные задачи**Задача. Т7**

Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

Посмотрим на случай четырех костей.

Можно считать количество успешных исходов, но это сделать сложно, так что пойдем от обратного, посчитаем неудачные исходы.

Вероятность невыпадения единицы в одном испытании: $1 - \frac{1}{6}$, в четырех экспериментах она равна $(1 - \frac{1}{6})^4$. Это же вероятность того, что среди всех выпавших костей нет ни одной единицы. Тогда вероятность выпадения единицы равна

$$P_1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4$$

Посмотрим на случай двух костей.

При одном бросании двух костей у нас 36 может быть разных вариантов, что может выпасть, при этом подходит только один вариант. Поэтому аналогично первому пункту, вероятность хотя бы за какой-то бросок получить пару единиц, равна:

$$P_2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24}$$

Осталось только сравнить эти цифры. Посмотрим на вероятность для случая двух костей:

$$P_2 \leq 1 - \left(1 - \frac{6}{36}\right)^4 \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 \leq P_1$$

Ответ: удача в случае бросания одной кости имеет большую вероятность.

Задача. Т8

Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12.

Посчитаем количество исходов, которые дадут 11 очков в сумме. По сути это количество целочисленных решений уравнений $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ при условии $x_1, x_2, x_3 \leq 5$ (опущены рассуждения)

В итоге 25 исходов.

Задача. Т9. Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

Задача. Т 10

В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

Задача. Т

Т.11. У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в Очереди имеет 100-рублевые купюры, а вторая половина - 50-рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета - 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачи?

Задача. Т

Т.12. Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход - за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту А и отправляется в В пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит Очередной автобус.

Задача. Т

Т.13. На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, Что из пол учившихся трех отрезков можно составить треугольник?

Задача. Т

Т.14. На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L , бросают иглу длины $l \leq L$. Какова вероятность того, Что игла пересечет линию?

Задача. Т

Т.1 5. На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между ДВумя первыми?

Задача. Т

Т.16. Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 ОЧКОВ появится раньше, чем сумма в 7 очков.

Задача. Т

Т.17. Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится крест. Найти вероятности выигрыша каждого ИГРОКА.

Задача. Т

Т.18. В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

Задача. Т

Т.19. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: АААА, ВВВВ, СССС, причем априорные вероятности равны 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность АААА, если на приемном устройстве получено АСАВ.

Задача. Т

Т.20. Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

Задача. Т

Т.21. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p . При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из m отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

3 распределения и случайные величины

Задача. Т

Т.22. Пусть ξ и η — две случайные величины и $P(\xi\eta = 0) = 1$, $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = P(\eta = 1) = P(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти совместное распределение этих случайных величин.

Задача. Т

Т.23. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$, а $P(\eta = 0) = P(\eta = 1) = P(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

Задача. Т

Т.24. В квадрат $\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$

Задача. Т

Т.25. Пусть $\xi_k, k = 1, 2$, — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1 , если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$

Задача. Т.23. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $P(\eta = 0) = P(\eta = 1) = P(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти Закон распределения случайной величины $\xi + \eta$

Задача. Т.24. В квадрат $\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$

Задача. Т.25. Пусть $\xi_k, k = 1, 2$, — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1 , если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$

Задача. Т.26. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

Задача. Т.27. Пусть ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения и плотность случайной величины ξ^2

Задача. Т.28. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x)$. Для каждого элементарного события $\omega \in \Omega$ вектор $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ преобразуем в упорядоченный $(X_{(1)}(\omega), \dots, X_{(n)}(\omega))$, где $X_{(1)}(\omega) \leq \dots \leq X_{(n)}(\omega)$. Упорядоченный вектор $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ в математической статистике называют вариационным рядом, а случайные величины $X_{(k)}, k = 1, \dots, n$ — порядковыми статистиками. Покажите, что плотность совместного распределения порядковых статистик определяется равенством

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_n) \mathbb{I}_{\{x_1 \leq \dots \leq x_n\}}(x_1, \dots, x_n)$$

Задача. Т.29. Вдоль дороги, длиной в 1 км расположены случайным образом три человека. Найти вероятность того, что никакие два человека не находятся друг от друга на расстоянии, меньшем $1/4$ км.

4 Математическое ожидание и Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции

Задача. Т.30. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе-Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть ξ — число пустых ячеек. Найти $E\xi$ и $D\xi$.

Задача. Т.31. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть ξ — число появлений единицы, а η — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Задача. Т.32. Подбрасывают две игральные кости. Пусть ξ_1 — число очков на первой игральной кости, а ξ_2 — на второй. Определим $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$. Найти $\text{cov}(\eta_1, \eta_2)$ и выяснить, являются ли η_1 и η_2 независимыми.

Задача. Т.33. Доказать, что если случайные величины ξ и η принимают только по два значения каждая, то из некоррелируемости следует их независимость.

Задача. Т.34. Авария происходит в точке X , которая равномерно распределена на дороге длиной L . Во время аварии машина скорой помощи находится в точке Y , которая также равномерно распределена на дороге. Считая, что X и Y независимы, найдите математическое ожидание расстояния между машиной скорой помощи и точкой аварии.

Часть II

Второе задание

5 Неравенства Чебышева и Маркова. Законы больших чисел

Задача. Т. 1. Известно, что число посетителей некоторого салона в день является случайной величиной со средним значением 50. (а) Оценить вероятность того, что число посетителей в конкретный день превысит 75 (б) При условии, что дисперсия числа посетителей в день равна 25, оценить вероятность того, что в конкретный день их число будет между 40 и 60.

Задача. Т. 2. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что при 1000 бросаниях монеты число выпадений герба окажется в промежутке $[450, 550]$

Задача. Т.3. Вероятность того, что изделие качественное, равна 0,9. Каков должен быть объем партии изделий, чтобы с вероятностью $\geq 0,95$ можно было утверждать, что отклонение (по абсолютной величине) доли качественных изделий от 0,9 не превысит 0,01?

Задача. Т.4. (Одностороннее неравенство Чебышева.) Пусть случайная величина ξ имеет нулевое среднее и дисперсию σ^2 . Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$$

Задача. Т. 5. (Неравенство Йенсена.) Пусть $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$ (т. е. φ — выпуклая функция, и допускается $a = -\infty$ и $b = \infty$). Допустим также, что ξ — случайная величина, которая принимает значения из (a, b) и $E\xi = m$, $E\varphi(\xi)$ конечны. Показать, что тогда

$$E\varphi(\xi) \geq \varphi(E\xi) = \varphi(m)$$

Задача. Т.6. Пусть ξ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами (a, σ^2) . Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(|\xi - a| \geq \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\varepsilon^2/2}$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon^2/2}, \quad \varepsilon > 0$$

Задача. Т.7. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность одинаково распределенных случайных величин такая, что $E\xi_k = a$, $D\xi_k = \sigma^2$ и $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j} \sigma^2$ $i \neq j$. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Задача. Т.8. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин с конечными математическими ожиданиями и $\xi_n \xrightarrow{n.u.} \xi$, $E\xi < \infty$, $E\xi_n \rightarrow E\xi$ при $n \rightarrow \infty$. Покажите, что тогда $E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Т. е. $\xi_n \xrightarrow{L} \xi$

6 Метод характеристических функций. Центральная предельная теорема

Задача. Т.9. Найти характеристическую функцию распределения Лапласа, которое определяется плотностью

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Задача. Т.10. Найти характеристическую функцию нормального распределения с параметрами (a, σ^2)

Задача. Т.11. Найти распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$h_1(t) = \cos t; \quad h_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i \frac{\sin t}{6}; \quad h_3(t) = \frac{1}{2 - e^{-it}}$$

Задача. Т.12. Найти распределение, которому соответствует характеристическая функция $h(t) = e^{-t^2} \cos t$

Задача. Т. 13. Является ли функция $h(t) = \cos t^2$ характеристической?

Задача. Т.14. Случайная величина ξ_{λ} распределена по закону Пуассона с параметром λ . Найти

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P \left(\frac{\xi_{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x \right)$$

Задача. Т. 15. Используя результат предыдущей задачи, найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=n}^n \frac{n^k}{k!}$$

Задача. Т.16. Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$ $m = 1, 2, \dots, n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \rightarrow \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum_{m=1}^n \xi_{m,n}$

7 Элементы теории случайных процессов и математической статистики

Задача. Т. 17. Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в Любую из остальных подгрупп. Найти: а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-ой подгруппе было 20% населения, во 2-ой подгруппе — 30%, и в 3-ей подгруппе — 50% б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

Задача. Т.18. Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями m и n имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha, \quad \beta \leq 1$$

Найти вероятности перехода за n шагов и предельные вероятности.

Здача. Т.19. Производящая функция процесса Гальтона-Ватсона имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{m+1-mz}, \quad m > 0$$

Выяснить при каких значениях параметра m процесс является: докритическим, критическим, надкритическим. Найти вероятность вырождения процесса в надкритическом случае. Показать, что n -тая итерация производящей функции может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f^n(z) &= \frac{m^n - 1 - m(m^{n-1} - 1)z}{m^{n+1} - 1 - m(m^n - 1)z} \\ \text{при } m \neq 1 \text{ и} \\ f^n(z) &= \frac{n - (n-1)z}{n+1-nz} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здача. Т. 20. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ – винеровский процесс. Для $u \in \mathbb{R}$ определяется

$$\tau_u = \inf \{t : W_t = u\}$$

– момент первого достижения уровня u траекторией винеровского процесса. Найти плотность распределения случайной величины τ_u

Здача.

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, \quad t > 0$$

где $(W_t, t \geq 0)$ – винеровский процесс. Найти плотность распределения случайной величины M_t

Здача. Т.22. Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка из пуассоновского распределения с параметром λ . Найти оценку наибольшего правдоподобия параметра λ

Здача. Т.23. Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка из нормального распределения $N(a, \sigma^2)$. Найти оценки наибольшего правдоподобия параметров a и σ^2

Список литературы