Введение в группу Пуанкаре и ее следствия

Yury Holubeu, December 25, 2023

Contents

1 Main Theory

1.1 Что такое группа Пуанкаре?

1.2 И как пользоваться группой Пуанкаре?

1.3 Что такое векторное поле и откуда получаются уравнения Максвелла?

(тут слова, что имеется в виду, что безмассовое поле, и что это именно в некотором смысле "получаются")

Квадрат псевдовектора Паули-Любанского для безмассовых полей

Для безмассовых частиц по определению $p^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = 0$, так что можно написать в компонентах

$$\frac{1}{\hbar^2} W^2 = -p_0^2 \left(\boldsymbol{s}^2 + \tilde{\boldsymbol{s}}^2\right) + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s})^2 + (\boldsymbol{p} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}})^2 + p_0 \boldsymbol{p} \cdot \{(\boldsymbol{s} \times \tilde{\boldsymbol{s}}) - (\tilde{\boldsymbol{s}} \times \boldsymbol{s})\}.$$

Или через эрмитовы векторы $\mathbf{s}^{\uparrow}$ и $\mathbf{s}^{\downarrow}$, получаем

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2 \left\{\mathbf{s}^{\uparrow} \cdot \mathbf{s}^{\downarrow} - \frac{1}{p_0^2}\left(\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{s}^{\uparrow}\right)\left(\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{s}^{\downarrow}\right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0} \boldsymbol{p} \cdot \left(\mathbf{s}^{\uparrow} \times \mathbf{s}^{\downarrow}\right)\right\}.$$

Выберем ось проецирования спина вдоль пространственной компоненты импульса : $\boldsymbol{p} = (0, 0, p_0)^{\mathrm{T}}$. То есть для безмассовых состояний мы выбрали стандартный 4-импульс в виде $p^{\mu} = (p_0, 0, 0, p_0)^{\mathrm{T}}$, а малая группа Вигнера - это группа непрерывных преобразований на световом конусе с инвариантным 4-вектором, которую обозначают как ISO(2). В эту группу входят вращения и трансляции в евклидовой плоскости, которые изоморфны указанным преобразованиям на световом конусе. В этом случае $\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{s}^{\uparrow\downarrow} = p_0 \mathbf{s}_3^{\uparrow\downarrow}$, тогда

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2 \left\{ \mathrm{s}_1^{\uparrow}\mathrm{s}_1^{\downarrow} + \mathrm{s}_2^{\uparrow}\mathrm{s}_2^{\downarrow} - \mathrm{i}\left(\mathrm{s}_1^{\uparrow}\mathrm{s}_2^{\downarrow} - \mathrm{s}_2^{\uparrow}\mathrm{s}_1^{\downarrow}\right)\right\},$$

или

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2 \left\{ \mathrm{s}_1^{\uparrow} + \mathrm{i}\mathrm{s}_2^{\uparrow}\right\}\left\{\mathrm{s}_1^{\downarrow} - \mathrm{i}\mathrm{s}_2^{\downarrow}\right\} = -4p_0^2\hbar^2\ \mathrm{s}_+^{\uparrow}\mathrm{s}_-^{\downarrow}.$$

Левые и правые безмассовые поля

Поскольку мы включаем инвариантный оператор W^2 в полный набор наблюдаемых для построения базиса полей из решений уравнений на собственные значения операторов из этого полного набора, в искомом базисе поля удовлетворяют уравнению на собственные значения оператора W^2. Но у повышающего оператора в группе SU(2) существуют только два собственных вектора: во-первых, это "вакуум" $|0\rangle$ с нулевыми значениями $\mathrm{s_u} = m_\mathrm{u} = 0$

$$\mathbf{s}^{\uparrow}|0\rangle = 0,$$

а во-вторых, это старший вектор с нулевым собственным значением (при $m_\mathrm{u} = \mathrm{s_u}$)

$$\mathrm{s}_+^{\uparrow}\left|\mathrm{s_u}, \mathrm{s_u}\right\rangle = 0.$$

Точно так же для понижающего оператора есть два собственных вектора: вакуум $|0\rangle$ с нулевыми значениями $\mathrm{s_d} = m_\mathrm{d} = 0$

$$\mathbf{s}^{\downarrow}|0\rangle = 0,$$

и младший вектор с нулевым собственным значением (при $m_{\mathrm{d}} = -\mathrm{s}_{\mathrm{d}}$)

$$\mathrm{s}_{-}^{\downarrow}\left|\mathrm{s}_{\mathrm{d}}, -\mathrm{s}_{\mathrm{d}}\right\rangle = 0.$$

Отсюда следует, что во-первых, на физических полях $W^2 = 0$, а во-вторых, на этих полях (т. е. при действии операторов на поля) проекция спина на ось импульса или, как говорят, спиральность проекция спина на импульс

$$\frac{\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{s}}{p_0} = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}}{p_0} = \mathrm{s}_3^{\uparrow\downarrow},$$

имеет строго фиксированные значения

$$\mathrm{s}_3^{\uparrow} = \mathrm{s}_{\mathrm{u}}, \quad \mathrm{s}_3^{\downarrow} = -\mathrm{s}_{\mathrm{d}}.$$

Таким образом, среди безмассовых полей со спином базис составляют так называемые правые и левые поля: киральные поля полуцелого спина и поляризованные поля целого спина, такие что правые поля по определению имеют положительную киральность и спиральность $\mathfrak{s} = \mathrm{s}_{\mathrm{u}}$:

$$\mathbf{s}^{\downarrow} \equiv 0 \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{s}} = -\mathrm{i}\boldsymbol{s}, \quad \mathbf{s}^{\uparrow} = \boldsymbol{s},$$

левые поля по определению имеют отрицательную киральность и спиральность $\mathfrak{s} = -\mathrm{s}_{\mathrm{d}}$:

$$\mathbf{s}^{\uparrow} \equiv 0 \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{s}} = \mathrm{i}\boldsymbol{s}, \quad \mathbf{s}^{\downarrow} = \boldsymbol{s},$$

а также их произведения и вакуум. При этом произведения полей, т.е. составные или композитные поля, конечно, могут реализовывать приводимые представления группы Пуанкаре.

Вывод основного уравнения для определения свойств полей

Рассмотрим компоненты псевдовектора Паули-Любанского для киральных и поляризованных полей в представлениях, отвечающим полям группы Лоренца $(\mathrm{s}_{\mathrm{u}}, 0)$ и $(0,\ \mathrm{s}_{\mathrm{d}})$, в которых генераторы $\mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}$, отличные от нуля, совпадают со спином s.

Вспомним свойства алгебры группы Лоренца, $S_{\beta\gamma} = \hbar\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\rho}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\rho}$ нулевая компонента

$$W_0 = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma}p_\alpha S_{\beta\gamma} = \hbar\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s} = \pm p_0\hbar\mathrm{s}_{\mathrm{u,d}},$$

где верхний знак относится к операторам «s-up», а нижний - к «s-down». При вычислении пространственной компоненты необходимо использовать то, что

$$\frac{1}{\hbar}S_{0\gamma} = \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \mp\mathrm{i}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma},$$

откуда

$$W^\alpha = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\alpha0\beta\gamma}p_0S_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}2\hat{\epsilon}^{\alpha\beta0\gamma}p_\beta S_{0\gamma} = \hbar\left\{p_0\boldsymbol{s}^\alpha \mp \mathrm{i}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s})^\alpha\right\}$$

И также можем записать основное уравнение, определяющее базис безмассовых полей

$$\frac{1}{\hbar}W^\mu = \mathfrak{s}p^\mu, \quad \mathfrak{s} = \pm\mathrm{s}_{\mathrm{u,d}}.$$

Именно это основное уравнение, которое позволит нам найти в явном виде уравнения для безмассового векторного поля.

О коммутационных соотношениях

Особо эффективно разбираться с тем, как выглядят генераторы, решая задачу про поиск коммутаторов. Знание генераторов необходимо для проделывания всех преобразований вектора Паули-Любанского, что крайне важно для нормального понимания группы Пуанкаре и её использования!

Только лишь этой целью, следуя В. В. Киселеву, вычислим коммутаторы генераторов группы Лоренца с компонентами псевдовектора Паули-Любанского,

$$\left[\boldsymbol{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{W}_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = \mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{W}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [\boldsymbol{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_0] = 0,$$
$$\left[\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{W}_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = \mathrm{i}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta}W_0, \quad \left[\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_0\right] = \mathrm{i}W_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

пользуясь известными коммутационными соотношениями для $\boldsymbol{j}_{\mathbb{E}} = \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}} + \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathbb{E}} = \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}} + \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}$ друг с другом и с компонентами импульса.

Для упрощения выкладок положим $\hbar = 1$ и найдем, как компоненты псевдовектора Паули-Любанского выражаются через генераторы гуппы Пуанкаре. Временная компонента

$$W^0 = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma}p_\alpha S_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\left(-p_{\mathbb{E}}^{\alpha}\right)\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha'}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} = (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}})$$

Пространственные компоненты

$$W^\alpha = W_{\mathbb{E}}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\alpha\nu\lambda\rho}p_\nu S_{\lambda\rho} = -\frac{1}{2}\left(\hat{\epsilon}^{\alpha0\beta\gamma}p_0 S_{\beta\gamma} + 2\hat{\epsilon}^{\alpha\beta0\gamma}p_\beta S_{0\gamma}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}p_0\epsilon^{\beta\gamma\alpha'}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} - \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\left(-p_{\mathbb{E}}^{\beta}\right)\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = p_0\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha} + (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \times \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}})^{\alpha}.$$

Отсюда сразу заключаем, что $[p^\mu, W^\nu] = 0$, поскольку дифференциальные операторы импульсов коммутируют между собой и с матричными операторами.

Учтем теперь, что пространственные части генераторов $\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{l}_{\mathbb{E}}$ коммутируют с матричными вкладами $\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}$. Тогда сначала найдем

$$\left[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W^0\right] = \left[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}})\right] = \left[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\beta}\right]\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} = \mathrm{i}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta}p_0\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} = \mathrm{i}p_0\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

а потом

$$\left[\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W^0\right] = [\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}})] = \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\beta}\left[\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\beta}\mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \mathrm{i}\left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \times \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right)^{\alpha},$$

и после сложения этих вкладов устанвливаем

$$\left[\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_0\right] = \mathrm{i}W_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

В том же стиле

$$\left[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = \left[\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_0\right]\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} + \left[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'}\right]\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} + \mathrm{i}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'}p_0\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} - \mathrm{i}p_0\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma},$$

а

$$\left[\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = p_0\left[\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] + \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma}\left[\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma}\right] = \mathrm{i}p_0\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma} + \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma}(-\mathrm{i})\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma\beta'}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta'},$$

где

$$-\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma}\mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma\beta'}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta'} = \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta'}\left(\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha'\beta'} - \delta_{\mathbb{E}}^{\beta\beta'}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'}\right) = \mathrm{i}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}\right) - \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}$$

и после сложения этих вкладов найдем

$$\left[\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = \mathrm{i}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta}W^0.$$

Итак, мы установили, что W^μ при лоренцевых бустах преобразуется как 4-вектор, а значит, квадрат 4-вектора - это инвариант. Для генераторов поворотов

$$[\boldsymbol{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, W_0] = \left[\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^\alpha, \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\beta\right] \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\beta + \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\beta \left[\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\alpha, \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\beta\right] = \mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\gamma \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\beta + \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\beta \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\gamma = 0,$$

а стало быть, временная компонента 4-вектора Паули-Любанского является трехмерным скаляром.

Затем вычислим

$$\left[\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^\alpha, W_{\mathbb{E}}^\beta\right] = [\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^\alpha, p_0]\, \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\beta + \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} \left[\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^\alpha, \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'}\right] \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma'} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} \mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'\gamma} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\gamma \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma'} = \mathrm{i}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} \left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right) - \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\beta \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha$$

и

$$\left[\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\alpha, W_{\mathbb{E}}^\beta\right] = p_0 \left[\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\alpha, \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\beta\right] + \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \left[\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\alpha, \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma'}\right] = \mathrm{i}p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\gamma + \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} \mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma'\beta'} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta'},$$

где

$$\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma'\beta'} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta'} = \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta'} \left(-\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha'\beta'} + \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta\beta'}\right) = -\mathrm{i}\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} \left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right) + \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\alpha \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^\beta$$

Приведение подобных членов дает

$$\left[\boldsymbol{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, W_{\mathbb{E}}^\beta\right] = \mathrm{i}p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\gamma + \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\alpha \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^\beta - \mathrm{i}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^\beta \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha = \mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \left(p_0 \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^\gamma + \left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \times \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right)^\gamma\right) = \mathrm{i}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} W_{\mathbb{E}}^\gamma,$$

и $\boldsymbol{W}_{\mathbb{E}}^\beta$ преобразуется при поворотах как 3 -мерный вектор.

Запись основного уравнения для безмассового представления группы Пуанкаре

Выше была сделана большая подготовка, чтобы прийти к следующему.

Запишем общее операторное уравнение

$$\frac{1}{\hbar} W^\nu = \mathfrak{s} p^\nu .$$

Тут оператор $(s^\alpha)_\gamma^\beta = -\mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Он не имеет временны́х компонент, т. е. не приводит к смешиванию 3-мерного поля $\mathcal{A}^\beta$ с $\mathcal{A}_0$. $\frac{1}{\hbar} W_0 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}, \quad \frac{1}{\hbar} \boldsymbol{W} = p_0 \boldsymbol{s} - \operatorname{sign}(\mathfrak{s}) \mathrm{i}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s})$. Также $\mathfrak{s} = \lambda = \pm 1$, поэтому получаем уравнения

$$\begin{aligned} p_0 \mathcal{A}^\beta &= \lambda (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s})_\gamma^\beta \mathcal{A}^\gamma, \\ \lambda p^\alpha \mathcal{A}^\beta &= p_0 \left(s^\alpha\right)_\gamma^\beta \mathcal{A}^\gamma - \lambda \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} p^{\beta'} \left(s^{\gamma'}\right)_\gamma^\beta \mathcal{A}^\gamma . \end{aligned}$$

Подставляя операторы 4 -импульса $(p_0, \boldsymbol{p}) = \mathrm{i}\hbar \left(\partial_0, -\boldsymbol{\nabla}\right)$ и выражение для оператора спина, находим из первого уравнения

$$\mathrm{i}\, \partial_0 \mathcal{A} = \lambda \operatorname{rot} \mathcal{A} .$$

Второе уравнение имеет вид

$$-\mathrm{i}\lambda \partial_\alpha \mathcal{A}^\beta = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_0 \mathcal{A}^\gamma + \mathrm{i}\lambda \left(\delta_\alpha^\beta \partial_\gamma \mathcal{A}^\gamma - \partial_\beta \mathcal{A}^\alpha\right).$$

Оно содержит симметричную и антисимметричную относительно перестановок индексов части тензора, которые соответственно дают

$$\partial_\gamma \mathcal{A}^\gamma = \operatorname{div} \mathcal{A} = 0, \quad -\mathrm{i}\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A} = \partial_0 \mathcal{A}$$

Последнее соотношение повторяет полученное выше $\mathrm{i}\, \partial_0 \mathcal{A} = \lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}$, так что, суммируя все связи для безмассового векторного поля, получаем систему

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \mathrm{i}\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}, \quad \operatorname{div} \mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A}_0 \equiv 0.$$

Тут первое уравнение динамическое, так как оно содержит производную по времени, а два последних - условия, исключающие компоненты 4 -векторного поля, не имеющие отношения к безмассовому векторному полю.

Важно заметить, что динамическое уравнение $-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \mathrm{i}\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}$ устанавливает операторное равенство для линейных уравнений поля

$$\operatorname{rot} \cong \mathrm{i}\lambda \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Приведение к привычному виду

Запишем полученные уравнения в ковариантном виде. Пока что они имеют нековариантный вид, то есть они не могут выполняться в произвольной системе отсчета.

Из полученных уравнений следует уравнение массовой поверхности, ведь $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathcal{A}$, откуда

$$\Box \mathcal{A} = 0.$$

Запишем иначе уравнения связей, обеспечивающие калибровку. Перейдем в импульсное представление, так что $\operatorname{div}\mathcal{A} = 0 \mapsto \boldsymbol{k}\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{k}) = 0$, т. е. это условие говорит, что поле является поперечным. С учетом $\mathcal{A}_0 \equiv 0$ находим ковариантную форму поперечности

$$k_\nu \mathcal{A}^\nu = 0 \Leftrightarrow \partial_\nu \mathcal{A}^\nu = 0,$$

и это уравнение уже справедливо в произвольной системе отсчета.

Уравнение массовой поверхности примет вид

$$\left(k_0^2 - \boldsymbol{k}^2\right)\mathcal{A}(\boldsymbol{k}) = k^2\mathcal{A}(\boldsymbol{k}) = 0.$$

Динамическое уравнение также можно записать ковариантно, если ввести антисимметричный тензор напряженности поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu,$$

откуда

$$F_{0\alpha} = -\partial_0 \mathcal{A}^\alpha - \partial_\alpha \mathcal{A}_0 \mapsto -\partial_0 \mathcal{A}^\alpha,$$

если учесть условие $\mathcal{A}_0 \equiv 0$. Стандартным образом определяют электрическое поле

$$\mathcal{E}^\alpha = F_{0\alpha}$$

и магнитное поле

$$\mathcal{H}^\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}^\gamma.$$

Подставляя определение тензора напряженности поля, находим

$$\mathcal{H} = \operatorname{rot}\mathcal{A}$$

Поэтому обязательно должно быть

$$\operatorname{div}\mathcal{H} = 0.$$

Тогда динамическое уравнение примет вид

$$\mathcal{E} = \mathrm{i}\lambda\mathcal{H}.$$

Беря дивергенцию, получаем

$$\operatorname{div}\mathcal{E} = 0.$$

Уравнение $\mathcal{E} = \mathrm{i}\lambda\mathcal{H}$ после применения оператора $\mathrm{rot} \cong \mathrm{i}\lambda\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ дает

$$\mathrm{rot}\,\mathcal{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}.$$

В итоге мы получили уравнения Максвелла для свободного электромагнитного векторного поля.

Полученные уравнения могут быть записаны ковариантно

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0$$

при условии

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0, \quad \mathcal{A}_0 \equiv 0.$$

Это мы обсудим на семинаре про основы электродинамики. Эти уравнения, как известно, как раз и описывают две поперечных поляризации безмассового векторного поля.

Вопрос со звездочкой

Также основное уравнение можно записать. введя $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{\epsilon}_{\mu\nu\mu'\nu'}F^{\mu'\nu'}$. Докажите, что оно будет иметь вид

$$F_{\mu\nu} = \mathrm{i}\lambda\tilde{F}_{\mu\nu}$$

2 Additional Theory

2.1 Потренируемся в математике для группы Пуанкаре

2.2 А зачем еще она нужна?