Введение в СТО

Yury Holubeu, December 25, 2023

Contents

1 Main Theory

Семинар по элементам релятивистской кинематики

На данном семинаре обсудим некоторые задачи релятивистской кинематики.

Формулы рел механики

4-импульс:

$$p^i = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}, \boldsymbol{p}\right) = mcu^i = \frac{\partial S}{\partial x^i}$$

При переходах из одной системы в другую

$$(p_i, p_j) = (p_i', p_j')$$

А также всегда

$$p^2 = m$$

Общая формула

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = \boldsymbol{p}^2 + m^2 c^2$$

В общем случае

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}.$$

Поэтому иногда пишут $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\mathscr{E}}$. Это следует из того, что $\boldsymbol{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, а $\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

для безмассовых частиц:

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c}$$

4-вектор силы определяется как:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds} = \left(\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Релятивистское уравнение Гамильтона-Якоби получается подстановкой в $p^i p_i = m^2c^2$ производных $-\partial S/\partial x^i$ вместо p_i :

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2,$$

или, если написать сумму в явном виде:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2$$

Скорости частиц в разных системах отсчета

Частицы с массами m_1 и m_2 имеют импульсы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Определить:
1) скорость системы центра инерции (СЦИ);
2) энергию в системе центра инерции;
3) энергию второй частицы в системе, в которой 1-я частица покоится;
4) относительную скорость частиц.
Положим $c = 1$, а в конце вычислений её восстановим.

Скорость СЦМ Энергия частиц имеет вид

$$\varepsilon_1 = \sqrt{m_1^2 c^4 + \boldsymbol{p}_1^2 c^2} = \sqrt{m_1^2 + \boldsymbol{p}_1^2},$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{m_2^2 c^4 + \boldsymbol{p}_2^2 c^2} = \sqrt{m_2^2 + \boldsymbol{p}_2^2}.$$

Скорость СЦИ $\mathbf{V}$ определим с помощью преобразования Лоренца для суммарного вектора 4-импульса, описывающего переход от лабораторной системы к СЦИ, учитывая, что в этой системе

$$\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = \gamma \left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \mathbf{V} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\right) \equiv 0,$$

получим

$$\mathbf{V} = c^2 \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Энергия в СЦМ Энергия в СЦИ равна эффективной массе M. Найдем ее из условия инвариантности четырехмерного скалярного произведения:

$$\left(p_1 + p_2\right)^2 = \left(p_1' + p_2'\right)^2 \equiv M^2$$

$$m_1^2 + m_2^2 + 2\left(p_1 p_2\right) = \left(\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2'\right)^2 - \left(\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2'\right)^2 = \left(\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2'\right)^2,$$

так как в СЦИ $\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = 0$.

В итоге

$$M = \left[m_1^2 + m_2^2 + 2\left(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2\right)\right]^{1/2},$$

Восстановим по размерности скорость света:

$$\varepsilon = Mc^2 = \left[m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2\left(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 c^2\right)\right]^{1/2}.$$

Энергия в системе первой частицы В системе покоя 1-й частицы $\boldsymbol{p}_1' = 0, \mathcal{E}_1' = m_1$, поэтому

$$\left(p_1 p_2\right) = \left(p_1' p_2'\right),$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \left(\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2\right) = \varepsilon_2' m_1,$$

т. е. в этой системе отсчета энергия второй частицы равна

$$\varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \left(\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2\right)}{m_1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \left(\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2\right) c^2}{m_1 c^2}.$$

Относительная скорость Относительная скорость двух частиц - по определению это скорость второй (или первой) частицы в системе отсчета, где 1-я (или вторая) покоится. Энергия преобразуется по закону:

$$\varepsilon_2' = \frac{m_2}{\sqrt{1 - V_{\text{отн}}^2}},$$

а из $\left(p_1 p_2\right) = \left(p_1' p_2'\right)$ мы нашли, что

$$\varepsilon_2' = \frac{\left(p_1 p_2\right)}{m_1}$$

поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1 - V_{\text{отн}}^2}} = \frac{\left(p_1 p_2\right)}{m_1 m_2} = \left(\underline{u}_1 \underline{u}_2\right),$$

где $\underline{u} = \gamma(1, \mathbf{v})$ - четырехмерная скорость частицы. Как и должно быть, относительная скорость не зависит от масс частиц, а зависит только от их скоростей. Таким образом,

$$V_{\text{отн}} = c\sqrt{1 - \frac{1}{(\underline{u}_1\underline{u}_2)^2}}$$

и является релятивистским инвариантом.

Угол рассеяния на мишени в СЦИ и в ЛСО

Протон с энергией $\mathcal{E} = 3$ ГэВ, рассеиваясь на протоне мишени, передает ему энергию $\varepsilon = 1$ МэВ. Определить угол рассеяния в системе центра инерции и в лабораторной системе отсчета.

Пусть $c = 1$. Далее будем обозначать штрихом импульсы после распада, а индексом 0 - импульсы в системе центра инерции.

Лабораторная система Записываем закон сохранения 4-импульса:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2',$$

где в системе покоя 2-й частицы начальные p и конечные p' 4-импульсы частиц равны

$$\begin{cases} p_1 = (\mathcal{E}, \boldsymbol{p}), \\ p_2 = (m, 0), \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1' = (\mathcal{E} - \varepsilon, \boldsymbol{p}_1'), \\ p_2' = (m + \varepsilon, \boldsymbol{p}_2'). \end{cases}$$

Из ЗСИ условие $(p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2$ для одинаковых частиц даст

$$(p_1 p_1') = (p_2 p_2')$$

или

$$\mathcal{E}(\mathcal{E} - \varepsilon) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}_1' \cos\theta = m(m + \varepsilon).$$

Подставим сюда $\boldsymbol{p} = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, $\boldsymbol{p}_1' = \sqrt{(\mathcal{E} - \varepsilon)^2 - m^2}$, получаем

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{(\mathcal{E} + m)(\mathcal{E} - \varepsilon - m)}{(\mathcal{E} - m)(\mathcal{E} - \varepsilon + m)}} \overset{\text{restore } c}{=} \sqrt{\frac{(\mathcal{E} + mc^2)(\mathcal{E} - \varepsilon - mc^2)}{(\mathcal{E} - mc^2)(\mathcal{E} - \varepsilon + mc^2)}},$$

В итоге численно $\theta \sim 1^\circ$.

Система центра инерции Совершим буст в систему центра инерции. В ней обозначим компоненты 4-импульсов как:

$$\begin{cases} p_{10} = (\mathcal{E}_0, \boldsymbol{p}_0), \\ p_{20} = (\mathcal{E}_0, -\boldsymbol{p}_0), \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{10}' = (\mathcal{E}_0, \boldsymbol{p}_0'), \\ p_{20}' = (\mathcal{E}_0, -\boldsymbol{p}_0'). \end{cases}$$

Здесь равенство импульсов до столкновения следует из определения СЦМ $\boldsymbol{p}_{10} + \boldsymbol{p}_{20} = 0$. Равенство энергий в подвижной системе следует из $E^2 = p^2 + m^2$. Также

$$|\boldsymbol{p}_0'| = |\boldsymbol{p}_0|,$$

что следует из закона сохранения энергии $E = E'$.

Запишем инвариантность скалярного произведения следующих векторов:

$$(p_2 p_1') = (p_{20} p_{10}').$$

В ЛСО $p_2 = (m, 0)$, $p_1' = (\mathcal{E} - \varepsilon, \boldsymbol{p}_1')$, в СЦМ $p_{20} = (\mathcal{E}_0, -\boldsymbol{p}_0)$ $p_{10}' = (\mathcal{E}_0, \boldsymbol{p}_0')$. Учтем, что конечные импульсы направлены под углами θ_0 и $\pi + \theta_0$ к изначальному направлению, получаем

$$m(\mathcal{E} - \varepsilon) = \mathcal{E}_0^2 + \boldsymbol{p}_0^2 \cos\theta_0,$$

отсюда

$$\cos\theta_0 = \frac{m(\mathcal{E} - \varepsilon) - \mathcal{E}_0^2}{\boldsymbol{p}_0^2}.$$

Остается найти $\mathcal{E}$ и $\boldsymbol{p}_0^2$

Запишем инвариантность еще одного скалярного произведения:

$$(p_1 p_2) = (p_{10} p_{20}),$$

тут $p_1 = (\mathcal{E}, \boldsymbol{p}), p_2 = (m, 0)$, а также $p_{10} = (\mathcal{E}_0, \boldsymbol{p}_0), p_{20} = (\mathcal{E}_0, -\boldsymbol{p}_0)$, так что

$$2(m\mathcal{E} + 0) = 2(\mathcal{E}_0^2 + p_0^2).$$

Подставим $p_0^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2$, получим

$$m\mathcal{E} = \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_0^2 - m^2,$$

в итоге находим энергию и импульс в СЦМ через энергию 1-й частицы в ЛСО:

$$\mathcal{E}_0^2 = \frac{m(\mathcal{E} + m)}{2},$$
$$\boldsymbol{p}_0^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2 = \frac{m(\mathcal{E} - m)}{2}.$$

И в итоге по $\cos\theta_0 = \frac{m(\mathcal{E}-\varepsilon)-\mathcal{E}_0^2}{\boldsymbol{p}_0^2}$ получаем

$$\cos\theta_0 = 1 - 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon - m} \overset{\text{restore } c}{=} 1 - 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon - mc^2}.$$

В итоге численно $\theta_0 \sim 2°$.

Преобразования Лоренца

Определение и основные свойства To simplify the notation, we shall assume that the ambient spacetime S has only one spatial dimension rather than three, although the analysis here works perfectly well in three spatial dimensions.

Any inertial reference frame F, the spacetime S is parameterised by two real numbers (t, x). Mathematically, we can describe each frame F as a bijection between S and $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. To normalise these coordinates, let us suppose that all reference frames agree to use a single event O in S as their origin $(0, 0)$:

$$F(O) = (0, 0)$$

for all frames F.

The new frame $F_v : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and the original frame $F : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ must be related by some transformation law

$$F_v = L_v \circ F$$

for some bijection $L_v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A priori, this bijection L_v could depend on the original frame F as well as on the velocity v, but the principle of relativity implies that L_v is in fact the same in all reference frames F, and so only depends on v. It is thus of interest to determine what the bijections $L_v : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ are. From our normalisation we have

$$L_v(0,0) = (0,0)$$

$$L_v(t,x) = \left(t - \frac{vx}{c^2} + \frac{tv^2}{2c^2}, x - vt + \frac{xv^2}{2c^2}\right) + O\left(v^3(|t|+|x|)\right).$$

Буст в произвольном направлении Запишем преобразование координат и времени в случае, когда направление движения инерциальной системы K' выбрано произвольно. Для этого разделим координаты на продольные и поперечные по отношению к скорости движения $\mathfrak{u}$ системы K' :

$$\boldsymbol{r}_\parallel = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\mathfrak{u}^2}\boldsymbol{\mathfrak{u}} = r_\parallel \frac{\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\mathfrak{u}}, \quad \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\parallel.$$

Поперечные координаты не преобразуются, а для продольных имеет место лоренцев буст, так что

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_\perp &= \boldsymbol{r}_\perp, \\
\boldsymbol{r}'_\parallel &= \gamma\left(-\beta x_0 + r_\parallel\right)\frac{\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\boldsymbol{u}}, \\
x'_0 &= \gamma\left(x_0 - \beta r_\parallel\right).
\end{aligned}$$

Собирая $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_\perp + \boldsymbol{r}'_\parallel$, найдем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\mathfrak{u}}\left\{\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\mathfrak{u}}(\gamma-1) - \gamma\beta x_0\right\}, \\
x'_0 &= \gamma\left\{x_0 - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{c}\right\}.
\end{aligned}$$

Обратное преобразование задается заменой $\boldsymbol{\mathfrak{u}} \mapsto -\boldsymbol{\mathfrak{u}}$.

Сложение скоростей Пусть в исходной системе отсчета частица или волна двигалась со скоростью $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, то в штрихованной системе

$$\boldsymbol{v}' = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}x'_0} = \boldsymbol{v}\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{c^2}} + \frac{\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\mathfrak{u}}\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{c^2}}\left\{\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\mathfrak{u}}(\gamma-1) - \gamma\mathfrak{u}\right\}.$$

Отдельно для поперечных и продольных компонент после подстановки $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'_\perp + \boldsymbol{v}'_\parallel$ имеем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'_\perp &= \boldsymbol{v}_\perp\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{c^2}}, &\qquad \boldsymbol{v}_\perp &= \boldsymbol{v}'_\perp\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{c^2}}, \\
\boldsymbol{v}'_\parallel &= \frac{\boldsymbol{v}_\parallel - \boldsymbol{\mathfrak{u}}}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{c^2}}, &\qquad \boldsymbol{v}_\parallel &= \frac{\boldsymbol{v}'_\parallel + \boldsymbol{\mathfrak{u}}}{1+\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{c^2}}.
\end{aligned}$$

Здесь поперечные получаются сразу же, а для параллельных для ускорения вычислений проще ввести вектор вдоль направления скорости $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{u}}}{\mathfrak{u}}$, и быстро сложить слагаемые а факторе перед нем.

В нерелятивистском пределе $v \ll c$, $\mathfrak{u} \ll c$, $\gamma \to 1$, так что преобразования скорости сводятся к преобразованиям Галилея.

Скорость света при этих преобразованиях постоянна. Покажем это. Если в исходной системе отсчета частица или сигнал двигались со скоростью света $v_{\perp}^2 + v_{\|}^2 = c^2$, то прямое вычисление $(v'_{\perp})^2 + \left(v'_{\|}\right)^2$ также дает c^2 :

$$
\begin{aligned}
(v'_{\perp})^2 + \left(v'_{\|}\right)^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_{\|}\mathfrak{u}}{c^2}\right)^2}\left\{v_{\perp}^2\left(1 - \frac{\mathfrak{u}^2}{c^2}\right) + v_{\|}^2 + \mathfrak{u}^2 - 2v_{\|}\mathfrak{u}\right\} \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_{\|}\mathfrak{u}}{c^2}\right)^2}\left\{\left(c^2 - v_{\|}^2\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{u}^2}{c^2}\right) + v_{\|}^2 + \mathfrak{u}^2 - 2v_{\|}\mathfrak{u}\right\} = c^2.
\end{aligned}
$$

О быстротах При $v_{\perp} = 0$ имеет место закон сложения скоростей

$$
v' = \frac{v - \mathfrak{u}}{1 - \frac{vu}{c^2}},
$$

так что, если вспомнить обозначения гиперболической тригонометрии:

$$
\frac{\mathfrak{u}}{c} = \tanh\vartheta, \quad \frac{v}{c} = \tanh\vartheta_1, \quad \frac{v'}{c} = \tanh\vartheta_2,
$$

то

$$
\tanh\vartheta_2 = \frac{\tanh\vartheta_1 - \tanh\vartheta}{1 - \tanh\vartheta_1 \tanh\vartheta} = \tanh\left(\vartheta_1 - \vartheta\right).
$$

А значит, в продольном случае имеет место простое сложение гиперуглов

$$
\vartheta_2 = \vartheta_1 - \vartheta.
$$

Поскольку при $z < 1$

$$
\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},
$$

вводят понятие быстроты

$$
\vartheta(v) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \frac{v_{\|}}{c}}{1 - \frac{v_{\|}}{c}},
$$

для которой, как мы показали, при продольных преобразованиях лоренцева буста имеет место закон сложения $\vartheta\left(v_1\right) = \vartheta\left(v_2\right) + \vartheta(\mathfrak{u})$.

Сокращение длины

Длиной $\mathrm{d}\ell$ называется расстояние между одновременными событиями. Пусть некоторый объект покоится в системе K', тогда назовем его продольную длину собственной длиной $\mathrm{d}\ell_0$ (по направлению движения системы K'). В покоящейся системе K события на концах объекта будут разделены интервалом времени согласно обратному преобразованию лоренцева буста для времени:

$$
c\ \mathrm{d}t = \gamma\left(c\ \mathrm{d}t' + \beta \mathrm{d}\ell_0\right)
$$

Значит, одновременное положение концов объекта $\mathrm{d}t = 0$ отвечает неодновременным событиям на концах в системе K' :

$$
c\ \mathrm{d}t' = -\beta \mathrm{d}\ell_0
$$

Эти одновременные события в системе K задают продольную длину объекта в системе K по тому же обратному преобразованию лоренцева буста для продольных координат:

$$
\mathrm{d}\ell = \gamma\left(\mathrm{d}\ell_0 + \beta c\ \mathrm{d}t'\right) = \gamma \mathrm{d}\ell_0\left(1 - \beta^2\right),
$$

и, в итоге, находим уравнение лоренцева сокращения продольных размеров движущегося объекта:

$$
\mathrm{d}\ell = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}\ell_0
$$

Замедление времени

В пространстве-времени Минковского физическое событие соответствует точке: время и место. Относительное же положение событий во времени и в пространстве теперь связаны с тем, в какой системе отсчета они рассматриваются.

Собственным временем системы τ называется отсчет часов, покоящихся в этой системе. Для малых интервалов отсчета собственного времени можно вычислить интервал этих событий для некоторой движущейся системы K' :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\ \mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}'^2\big|_{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=0} = c^2\ \mathrm{d}t'^2.$$

Значит, собственное время в системе K' пропорционально инварианту

$$\mathrm{d}\tau \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{c}\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t'.$$

Тот же интервал событий отсчета собственного времени системы K' в покоящейся системе K будет отвечать событиям в разных точках пространства, которые будут происходить в разные времена по часам системы K :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\ \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 = c^2\ \mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{\mathfrak{u}^2}{c^2}\right) = \frac{c^2}{\gamma^2}\ \mathrm{d}t^2,$$

где $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \mathfrak{u}$ - скорость движения системы K' относительно K. Так как интервал событий - инвариант, получаем связь отсчета собственного времени в системе K' с интервалом времени пространственно разделенных событий этого отсчета в системе K :

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$$

Как видим, имеет место релятивистское растяжение времени.

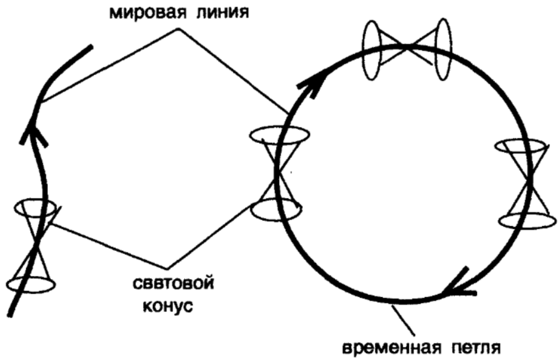
Подчеркнем, что часы, дающие отсчет собственного времени как в покоящейся системе, так и в движущейся, идут совершенно одинаково: принцип относительности, - ибо никакими средствами невозможно установить по собственному времени покоятся часы или движутся прямолинейно и поступательно. Отличается не ход времени в системах, а интервалы времени для событий в одной точке движущейся системы и для этих же событий в разных точках в покоящейся системе отсчета.

2 Additional Theory

О машине времени Геделя

Материальная частица описывается в теории относительности траекторией, называемой мировой линией. Мировая линия состоит из событий. Событие - это точка, мировая точка, в пространстве-времени. Само пространство-время не что иное, как множество, многообразие всех событий во Вселенной. В каждой мировой точке пространства-времени задан световой конус, состоящий из двух половин: конуса прошлого и конуса будущего. Мировая линия материальной частицы должна всегда находиться внутри светового конуса. На каждой мировой линии течет собственное время, идут собственные часы. Наклон и угол раствора этих конусов определяют кривизну пространства-времени, которой в классической физике Ньютона соответствуют гравитационные поля материальных тел.

Оказывается, что гравитационные поля могут в определенных случаях допускать так называемые временные петли, или, как их называли раньше, замкнутые гладкие времениподобные мировые линии. Чтобы понять, как они возникают, надо нарисовать окружность, которая всегда лежит внутри соответствующим образом наклоненных световых конусов. Это и есть машина времени.



Машина времени естественная, природная, если мы найдем где-то гравитационное поле, порождающее нужный наклон конусов, т.е. нужное искривление пространства-времени. Человеку пока не приходилось в своей практической деятельности сталкиваться с такими полями. Но это не значит, что они не существуют. Открытие Гёделя как раз и заключалось в том, что он предложил модель Вселенной, где есть место для машины времени, и эта модель вытекала из уравнений Эйнштейна.

Решение Гёделя уравнений Эйнштейна

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}(R-2\Lambda)=\frac{8\pi G}{c^2}\rho u_i u_k$$

имеет вид:

$$ds^2=\alpha^2\left(dx^{0^2}-dx^{1^2}+\frac{1}{2}e^{2x^1}dx^{2^2}-dx^{3^2}+2e^{x^1}dx^0dx^2\right)$$

где

$$\begin{gathered}\frac{1}{\alpha^2}=\frac{8\pi G}{c^2}\rho,\\ \Lambda=-\frac{1}{2\alpha^2}=-\frac{4\pi G\rho}{c^2}\\ u_i=\left(\alpha,0,\alpha e^{x^1},0\right),\\ \alpha=\text{ const.}\end{gathered}$$

При этом временная петля задается соотношениям

$$\begin{aligned}&x^0=-\sqrt{2}t+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(e^{-\beta}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)+2\sqrt{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}0,0\le t\le\pi,\\ \pi,\pi\le t\le 2\pi,\end{array}\right.\\ &e^{x^1}=\operatorname{ch}\beta+\cos t\ \operatorname{sh}\,t,\\ &x^2=\frac{\sqrt{2}\sin t\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta+\cos t\operatorname{sh}\beta},\\ &x^3=0,\end{aligned}$$

где $\beta=$ const .

Аберрация

Пусть у нас есть две системы отсчета, движущиеся с разными скоростями. Пусть относительно первой движется свет под углом θ. Под каким углом будет двигаться свет относительно другой системы отсчета?

Назовем первую систему отсчета неподвижной. Для света в неподвижной системе $v_\parallel = c\cos\theta$, а в подвижной $v'_\parallel = c\cos\theta'$. По закону сложения скоростей $\boldsymbol{v}'_\parallel = \frac{\boldsymbol{v}_\parallel - \mathbf{u}}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}$, $\boldsymbol{v}_\parallel = \frac{\boldsymbol{v}'_\parallel + \mathbf{u}}{1+\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\mathbf{u}}{c^2}}$ имеем

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}, \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1+\beta\cos\theta'},$$

что называют законом аберрации света.

Эффект Доплера

Решения линейных по полю уравнений Максвелла в виде плоских монохроматических колебаний свободных магнитного и электрического полей зависят от волнового вектора $\boldsymbol{k}$

$$\mathcal{H}(t,\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{k})t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \text{ c.c.}$$

где c.c. означает комплексно сопряженные вклады, а частота связана с волновым вектором уравнением

$$\omega(\boldsymbol{k}) = c\sqrt{\boldsymbol{k}^2} = ck.$$

Покажем, что $k^\mu = (\omega/c, \boldsymbol{k})$ есть 4 -вектор. В самом деле, вектор набла преобразуется как ковектор, а значит, величина $\nabla_\mu f$ преобразуется как произведение ковектора на тензорную величину f. Вычислим

$$\nabla_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{k})t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}, -\mathrm{i}\boldsymbol{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{k})t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\mathrm{i}k_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{k})t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},$$

т.е.

$$\nabla_\mu f = -\mathrm{i}k_\mu f,$$

где слева стоит произведение ковектора на тензорную величину f, а справа - произведение - f с теми же тензорными свойствами, что и f, на 4 -компонентную величину $k_\mu = (\omega/c, -\boldsymbol{k})$, которая, следовательно, должна быть ковектором. Опускание и поднимание индексов тензорных величин метрикой Минковского меняет знак пространственной компоненты: $k^\mu = g^{\mu\nu}k_\nu = (\omega/c, k)$. Значит, фаза электромагнитной волны

$$k_\mu x^\mu = k_0 x_0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$$

есть скаляр, т.е. релятивистский инвариант. Все 4-векторы преобразуются той же матрицей, что и столбец координат x^μ. Отсюда сразу находим частоту, видимую наблюдателем, который движется относительно источника света со скоростью $\mathbf{u}$, так как частота является временной компонентой волнового 4-вектора, и преобразование лоренцева буста дает

$$\omega' = \gamma\left(\omega - uk_\parallel\right).$$

Подставляя $ck_\parallel = \omega\cos\theta$ с учетом аберрации света $\cos\theta = \frac{\cos\theta'+\beta}{1+\beta\cos\theta'}$, находим формулу эффекта Доплера в общем виде

$$\omega' = \omega\gamma\left(1 - \beta\frac{\cos\theta' + \beta}{1+\beta\cos\theta'}\right) = \frac{\omega}{\gamma}\frac{1}{1+\beta\cos\theta'}$$

В частности, выделяют - продольный эффект Доплера $(\cos\theta' = \pm 1)$

$$\omega' = \omega\gamma(1\mp\beta) = \omega\sqrt{\frac{1\mp\beta}{1\pm\beta}},$$

- поперечный эффект Доплера $\left(k'_{\parallel}=0, \cos\theta'=0\right)$

$$\omega'=\omega\frac{1}{\gamma},$$

- нерелятивистский эффект ($\beta \ll 1$, поправка первого порядка малости)

$$\omega' \approx \omega(1-\beta\cos\theta).$$

Поперечный эффект Доплера обусловлен релятивистским эффектом растяжения времени (см. ниже). Нерелятивистский эффект носит чисто кинематический характер: наблюдатель отстает или догоняет волну: перемещается относительно узлов и пучностей.

2.0.1 title