Семинар по основам электродинамики

Yury Holubeu, January 7, 2024

Contents

1 Main Theory **2**

1.1 Еще раз про законы электродинамики . . . 2

1.1.1 Уравнения Максвелла по отдельности . . . 2

1.1.2 Уравнения движения: вторая пара . . . 7

1.1.3 Импульсное представление . . . 7

2 Additional Theory **9**

2.1 А как еще можно было бы строить/модифицировать электродинамику? . . 9

2.2 О разных теоретических деталях . . . 9

2.2.1 Об электромагнитном поле в гравитации . . . 9

1 Main Theory

1.1 Еще раз про законы электродинамики

1.1.1 Уравнения Максвелла по отдельности

Предполагается, что слушатель уже знает темы из этого раздела, так что они - напоминание.

Сила Лоренца, суперпозиция полей

Векторы электрического $\mathcal{E}$ и магнитного $\mathcal{H}$ полей в вакууме задают силу Лоренца $\mathcal{F}$, действующую на частицу с зарядом e и скоростью $\boldsymbol{v}$, (в Гауссовых единицах):

$$\mathcal{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \mathcal{H}$$

Сила Лоренца задает уравнение движения как для импульса частицы в электромагнитном поле

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \mathcal{H}$$

так и для энергии

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \mathcal{F} = e\mathcal{E} \cdot \boldsymbol{v}$$

что задает мощность работы силы Лореца. Поля удовлетворяют принципу суперпозиции:

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k,$$

т.е. поле многих источников получается суммированием полей от каждого из источников. Из этого принципа следует, что законы для электромагнитного поля точечного заряда позволяют записать динамику произвольного распределения зарядов. Таким образом, достаточно изучить эти законы для точечного заряда.

Закон Кулона

Точечный источник, помещенный в центре координат, т.е. заряд e, создает электрическое поле согласно закону Кулона:

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Вычислим поток электрического поля через сферу радиуса r с элементом площади $\mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma} = r^2\ \mathrm{d}\Omega\boldsymbol{r}/r$, где телесный угол $\mathrm{d}\Omega$ в сферических координатах $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\cos\theta$,

$$\oint_{\partial V_r} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathcal{E} = e\int \mathrm{d}\Omega = 4\pi e,$$

так что закон Кулона может быть переписан в интегральной форме

$$\oint_{\partial V_r} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathcal{E} = 4\pi\int_V \mathrm{d}V\rho,$$

где мы ввели плотность заряда ρ. Согласно теореме Гаусса поток вектора через замкнутую поверхность ∂V, являющуюся границей объема V, равен интегралу дивергенции вектора по этому объему

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathcal{E} = \int_V \mathrm{d}V\,\mathrm{div}\,\mathcal{E},$$

откуда

$$\int_V \mathrm{d}V \,\mathrm{div}\, \mathcal{E} = 4\pi \int_V \mathrm{d}V \rho$$

Заметим, что сферу, охватывающую заряд в ее центре, можно «деформировать» в замкнутую фигуру любой формы. В самом деле, если поверхность замкнутая, то интеграл по ее ориентированной поверхности равен нулю [1]. Тогда поток электрического поля по поверхности бесконечно малого объема, внутри которого нет заряда, можно представить как интеграл от постоянного значения электрического поля в точке внутри объема плюс поправки второго порядка малости из-за зависимости поля от точки на поверхности (сингулярность возникает, если только заряд внутри объема), а поток постоянного поля по замкнутой поверхности обращается в нуль. Суммирование по таким бесконечно малым объемам, не содержащим заряд, дает конечный объем, произвольной формы, поток электрического поля через поверхность которого равна нулю. Теперь представим себе, например, куб, содержащий сферу с зарядом. Интеграл по поверхности куба и поверхности сферы, обращенной внутрь, равен нулю, поскольку между кубом и сферой нет заряда, т.е. дополнение сферы до куба имеет поверхность, поток электрического поля через поверхность которого равен нулю. Отсюда сразу следует, что поток поля по поверхности куба равен потоку по поверхности сферы, обращенной наружу. Это рассуждение, очевидно, справедливо для произвольных замкнутых поверхностей.

Поскольку выражение (2.3) справедливо для произвольного распределения зарядов вследствие принципа суперпозиции полей, можно записать его для произвольного объема и плотности, $\forall V$, откуда сразу следует, что имеет место локальная форма закона Кулона

$$\mathrm{div}\, \mathcal{E} = 4\pi\rho.$$

В частности, электрическое поле единичного заряда, расположенного в точке $\boldsymbol{r}'$,

$$\mathcal{E}_{\text{unit}}\left(\boldsymbol{r}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3},$$

имеет плотность заряда, которая равна нулю всюду, кроме точки $\boldsymbol{r}'$, что обозначают дельта-функцией Дирака:

$$\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right),$$

обладающей свойством

$$\int \mathrm{d}^3 r \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right) f(\boldsymbol{r}) = f\left(\boldsymbol{r}'\right).$$

Значит, из (2.6) следует, что

$$\mathrm{div}\, \mathcal{E}_{\text{unit}}\left(\boldsymbol{r}\right) = \mathrm{div}\, \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} = 4\pi\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)$$

Закон сохранения заряда

Сохранение электрического заряда означает, что изменение заряда $q = \int \mathrm{d}V \rho$ в некотором фиксированном объеме V обусловлено лишь тем, что через поверхность ∂V протекают токи, плотностью $j = \rho \boldsymbol{v}$, где ρ - плотность заряда, а v - скорость зарядов:

$$\partial_t q = -\oint_{\partial V} \mathrm{d}^2 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{j}, \quad \partial_t \int_V \mathrm{d}V \rho = -\oint_{\partial V} \mathrm{d}^2 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{j},$$

что представляет собой интегральную форму записи закона сохранения заряда. С помощью теоремы Гаусса и произвольной величины объема находим локальный вид закона сохранение заряда

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0.$$

[1] Это следует из теоремы Гаусса в случае интеграла по замкнутой поверхности от постоянного ненулевого вектора, имеющего, следовательно, нулевую дивергенцию.

Используя введенные ранее 4-компонентные обозначения $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$ и 4-компонентую плотность тока $j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{v}\rho)$, запишем закон сохранения тока в форме [2]

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \rho \frac{\mathrm{d} x^\mu}{\mathrm{d} t}.$$

Поскольку закон сохранения заряда во всех системах отсчета имеет один и тот же вид (2.12), т.е. он является инвариантом при преобразованиях координат и времени, а ∂_μ преобразуется как четырехмерный ковектор в пространственно-временном континууме $x^\mu = (x_0, \boldsymbol{r})$, мы заключаем, что инвариантность закона сохранения может иметь место только в случае, если j^μ преобразуется как 4 -вектор [3].

Закон Био-Савара

В случае стационарных токов возникает магнитное поле, направление и величина которого были установлены эмпирически. По принципу суперпозиции это поле является суммой полей от каждой из частиц тока. Движущаяся частица, проходя центр координат, создает магнитное поле согласно закону Био-Савара

$$\mathcal{H} = \frac{e}{c} \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3},$$

что можно записать в более общем виде для малого заряда $de = \rho(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}V'$ в точке $\boldsymbol{r}'$:

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \frac{\mathrm{d}V' \rho(\boldsymbol{r}')}{c} \frac{\boldsymbol{v}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3},$$

и с учетом определения плотности тока $\boldsymbol{v}\rho$ поле интегрирования по распределению зарядов, находим магнитное поле стационарных токов или интегральную форму записи закона Био-Савара:

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \mathrm{d}V' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}.$$

Вычислим ротор магнитного поля стационарных токов, используя равенство для двойного векторного произведения $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})) = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$,

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int_{\boldsymbol{V}'} \mathrm{d}V' \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \operatorname{div} \mathcal{E}_{\text{unit}} - (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \cdot \nabla) \mathcal{E}_{\text{unit}}\right),$$

где

$$\mathcal{E}_{\text{unit}} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

- это поле единичного заряда, помещенного в точку $\boldsymbol{r}'$. Тогда согласно (2.10)

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_{\text{unit}} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),$$

так что

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{c} \int_{V'} \mathrm{d}V' (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \cdot \nabla) \mathcal{E}_{\text{unit}},$$

где второе слагаемое можно преобразовать, заметив, что дифференцирование по штрихованным координатам связано с дифференцированием по не штрихованным координатам: $\nabla_\alpha \mathcal{E}_{\text{unit}} = -\nabla'_\alpha \mathcal{E}_{\text{unit}}$, и проведя интегрирование по частям (в случае стационарных токов полагаем, что интеграл по границе объема с замкнутыми токами, т.е. по замкнутой поверхности, по которой токи не текут, равен нулю), так что

$$\int_{V'} \mathrm{d}V' \left(\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\right) \cdot \nabla\right) \mathcal{E}_{\text{unit}} = -\int_{V'} \mathrm{d}V' \left(\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\right) \cdot \nabla'\right) \mathcal{E}_{\text{unit}} = \int_{V'} \mathrm{d}V' \mathcal{E}_{\text{unit}} \left(\nabla' \cdot \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right) = 0,$$

поскольку для стационарных токов $\partial_t \rho = 0$ и в силу закона сохранения заряда $\operatorname{div} j = 0$. В итоге, локальная форма закона Био-Савара для стационарных токов принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} j.$$

Индукция

Если поток магнитного поля, проходящий сквозь площадь, ограниченную замкнутым проводником, меняется со временем, то в проводнике возникает электродвижущая сила, т.е. возникает электрическое поле, совершающее работу по закону индукции

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \cdot \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathrm{d}^2 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathcal{H},$$

что представляет собой интегральную форму записи закона индукции. По теореме Стокса

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \cdot \mathcal{E} = \int_S \mathrm{d}^2 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \operatorname{rot} \mathcal{E}.$$

Поскольку контур замкнутого проводника может быть любым, приходим к локальной форме закона индукции

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Магнитные заряды

Для магнитного поля стационарных токов можно вычислить дивергенцию

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int dV' \nabla \cdot \left(\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\right) \times \mathcal{E}_{\text{unit}}\right) = -\frac{1}{c} \int dV' \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\right) \cdot \left(\nabla \times \mathcal{E}_{\text{unit}}\right),$$

где мы поменяли местами векторы в смешанном произведении, причем $\mathcal{E}_{\text{unit}}$ - это электрическое поле покоящегося единичного заряда. Заметим теперь, что ротор электрического поля стационарного точечного заряда, т.е. заряда, который покоится, тождественно обращается в нуль [4] согласно закону индукции (2.17), поскольку магнитное поля такого заряда тождественно равно нулю: $\operatorname{rot} \mathcal{E}_{\text{unit}} = 0$. Значит,

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0.$$

По аналогии с электрическим полем (см. (2.6)), дивергенция магнитного поля могла бы быть пропорциональна плотности магнитных зарядов. Однако, если магнитное поле создается только при движении электрических зарядов, как следует из закона Био-Савара, то плотность магнитных зарядов тождественно равна нулю: магнитных зарядов в электродинамике Максвелла нет.

Ток смещения

Для стационарных токов из (2.14) следует, что дивергенция плотности тока обращается в нуль

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathcal{H} = 0,$$

что согласуется, конечно, с законом сохранения заряда (2.12) в случае плотности заряда, постоянной во времени

$$\operatorname{div} j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

В общем, нестационарном случае

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left\{ j + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right\} = 0,$$

где мы использовали дифференциальную форму закона Кулона (2.6). Величина

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

имеет смысл плотности тока, названного Максвеллом током смещения, который возникает в нестационарном случае. Сумма тока электрических зарядов и тока смещение обладает нулевой дивергенцией, что является тождеством, если эта сумма - ротор вектора. В стационарном случае этот вектор - магнитное поле с точностью до численного коэффициента, поэтому естественно было предположить, что и в нестационарном случае при наличии тока смещения следует рассматривать тот же вектор магнитного поля, так что

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}.$$

О существовании световых волн

Уравнения Максвелла образуют первую и вторую пары, соответственно, без источников и с источниками

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{H} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi\rho. \end{cases}$$

Рассмотрим решения для свободных электромагнитных волн, т.е. при $\rho = 0$ и $\boldsymbol{j} = 0$. Например из первой пары уравнений для ротора электрического поля найдем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{H},$$

где мы учли и вторую пару уравнений Максвелла для ротора магнитного поля. Легко показать в рамках векторного анализа, что для любого вектора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathcal{H}) - \nabla^2 \mathcal{H}$$

но с учетом нулевой дивергенции магнитного поля найдем волновое уравнение для свободного магнитного поля

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathcal{H} = 0.$$

Точно такое же уравнение можно вывести и для электрического поля. Плоские волны вдоль оси x зависят только от времени и координаты x, так что волновое уравнение примет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

где символом f мы обозначили любую из компонент электромагнитного поля. Решения уравнения (2.22) легко найти, если переписать его в факторизованном виде

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)f=0,$$

так что уравнение второго порядка сводится к уравнениям первого порядка

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial x}=0, \text{ либо } \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

с общим решением вида

$$f=f(x\pm ct),$$

отвечающим волнам произвольного профиля, распространяющимся со скоростью c по или против оси x.

1.1.2 Уравнения движения: вторая пара

В уравнениях движения для электромагнитного поля (7.6) перейдем к покомпонентной записи. Положим индекс $m=0$:

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0}=\frac{4\pi}{c}j^0,$$

и подставим

$$F^{\alpha 0}=-F^{0\alpha}=F_{0\alpha}=\mathcal{E}^\alpha, \quad j^0=c\rho,$$

так что найдем

$$\partial_\alpha\mathcal{E}^\alpha=\nabla\cdot\mathcal{E}=4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\mathcal{E}=4\pi\rho.$$

Затем положим в (7.6) $m=\beta$,

$$\partial_n F^{n\beta}=\partial_0 F^{0\beta}+\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=< F^{0\beta}=-\mathcal{E}^\beta >=$$
$$< F^{\alpha\beta}=-\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}^\gamma >=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}^\beta}{\partial t}-\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\mathcal{H}^\gamma=$$
$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}^\beta}{\partial t}+[\nabla,\mathcal{H}]^\beta.$$

Поэтому из равенства

$$\partial_n F^{n\beta}=\frac{4\pi}{c}j^\beta$$

находим

$$\operatorname{rot}\mathcal{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}j.$$

Таким образом, динамические уравнения движения электромагнитного поля в форме (7.6) эквивалентны (7.7) и (7.8), которые составляют вторую пару уравнений Максвелла.

1.1.3 Импульсное представление

Запишем электромагнитное поле в виде фурье-образа:

$$\mathcal{A}_m(x)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathcal{A}_m(k)e^{\mathrm{i}k\cdot x}+\text{ h.c. }=$$
$$\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\left[\mathcal{A}_m(k)e^{\mathrm{i}k\cdot x}+\mathcal{A}^*_m(k)e^{-\mathrm{i}k\cdot x}\right],$$

где мы обозначили произведение 4-векторов

$$k \cdot x = k_n x^n,$$

и добавили комплексно сопряженное выражение, чтобы получить вещественное поле [3]. Проводя в интеграле замену переменных $k \to -k$, требование вещественности поля можно переписать в виде

$$\mathcal{A}_m(-k) = \mathcal{A}_m^*(k),$$

так как мы получим в этом случае исходное выражение для фурье-преобразования. Далее

$$\int \mathrm{d}^4 x \mathcal{A}_m(x) e^{\mathrm{i} k \cdot x} = \mathcal{A}_m(-k) + \mathcal{A}_m^*(k) = 2\mathcal{A}_m^*(k),$$

и обратно

$$\mathcal{A}_m(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} 2\mathcal{A}_m^*(k) e^{-\mathrm{i} k \cdot x}.$$

Выражение (7.9) представляет собой разложение поля по плоским волнам, т.е. волновой пакет. При этом принимается соглашение, что положителъно частотными волнами являются

$$e^{-\mathrm{i} k \cdot x}$$

Рассмотрим фазу плоской волны более детально. Ее можно переписать в виде

$$k \cdot x = k_0 x^0 - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x},$$

где мы ввели обозначения для

$$\begin{aligned}
\omega &= c k_0 && - \text{ фазовой частоты,} \\
\lambda &= \frac{2\pi}{|\boldsymbol{k}|} && - \text{ длины волны,} \\
\boldsymbol{e} &= \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} && \text{- единичного волнового вектора.}
\end{aligned}$$

Очевидно, например, что частная производная, действуя на поле в форме (7.9), дает алгебраическое умножение на 4 -вектор ik :

$$\begin{aligned}
\partial_n \mathcal{A}_m(x) = &\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}_m(k) \partial_n e^{\mathrm{i} k \cdot x} + \text{ h.c. } = \\
&\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{A}_m(k) \mathrm{i} k_n e^{\mathrm{i} k \cdot x} + \text{ h.c.}
\end{aligned}$$

Этим фактом и определяется важность представления в виде фурье-образа, которое мы будем называть импульсным и [4] : уравнения в частных производных в импульсном представлении становятся алгебраическими. Поэтому

$$\begin{gathered}
\partial_n F^{nm} = \partial_n \left(\partial^n \mathcal{A}^m - \partial^m \mathcal{A}^n\right) \longrightarrow \\
\mathrm{i} k_n \left(\mathrm{i} k^n \mathcal{A}^m(k) - \mathrm{i} k^m \mathcal{A}^n(k)\right) = -\left[k^2 \mathcal{A}^n(k) - k^n k_m \mathcal{A}^m(k)\right] = \\
k^2 \left[-g^{nm} + \frac{k^n k^m}{k^2}\right] \mathcal{A}_m(k).
\end{gathered}$$

Тогда уравнения движения (7.6) в импульсном представлении примут вид

$$k^2 \mathcal{P}^{mn}(k) \mathcal{A}_n(k) = \frac{4\pi}{c} j^m(k),$$

где мы ввели обозначение

$$\mathcal{P}^{mn}(k) \equiv \left[-g^{nm} + \frac{k^n k^m}{k^2}\right],$$

2 Additional Theory

2.1 А как еще можно было бы строить/модифицировать электродинамику?

(пару интересных теорий посмотрим. вообще, это лекция 12, так что тут просто указание на нее. формул и конкретики тут планируется мало, просто обсуждение идей. формулы - лекция 12)

О физических идеях за некоторыми теориями

(как можно иначе видеть физику? пока не готов написать)

Об электродинамике в других размерностях

2.2 О разных теоретических деталях

(я не уверен, что это нужно, но пока пару заготовок сделаю)

2.2.1 Об электромагнитном поле в гравитации

(многие крутые формулы тут мб напишу, но вряд ли в них большая потребность)