Введение в формализм теории поля и математику

Yury Holubeu, December 25, 2023

Contents

1 Main Theory

1.0.1 Основы векторного анализа

О символе Кронекера

Инвариантный симметричный тензор - символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ по определению в матричном виде есть просто тождественная единица:

$$\delta_{\alpha\beta} = \mathbb{I}_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следуют его важнейшие свойства

1. Умножение на себя:

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} = (\mathbb{I}\cdot\mathbb{I})_{\alpha\gamma} = \mathbb{I}_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

2. След:

$$\delta_{\alpha\alpha} = \operatorname{tr}\mathbb{I} = 3.$$

3. Свертка индексов:

$$t_{\gamma\alpha}\delta_{\alpha\beta}u_{\beta\lambda} = (t\cdot\mathbb{I}\cdot u)_{\gamma\lambda} = t_{\gamma\alpha}u_{\alpha\lambda}.$$

О Леви-Чивита

$$[\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\gamma$$

Действительно, если тройка $\{\alpha\beta\gamma\}$ правая, то $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$, если два индекса одинаковые, то тензор обращается в нуль, если же тройка левая, то получаем -1, что и требовалось. Значит, для двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \left[\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\right] = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\gamma$$

т.е. в покомпонентн ой записи

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha b_\beta.$$

Перечислим основные свойства псевдотензора $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$: 1. Произведение двух тензоров

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda}$$

должно образовывать тензор, который принимает значения $(-1, 0, 1)$, так как мы составили его только из нулей и единиц. Важнейшее свойство такого произведения его антисимметрия в каждой тройке индексов и симметрия по перестановкам индексов обеих троек целиком. Так, если первая тройка совпадает со второй, то, очевидно, получится единица, т.е.

$$\{\alpha\beta\gamma\} = \{\mu\nu\lambda\} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\rho} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda},$$

откуда, пользуясь указанными свойствами антисимметрии и симметрии, получим перестановками все ненулевые вклады:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda} &= \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu} \\ &- \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}\end{aligned}$$

что компактно можно записать в виде детерминанта:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\lambda} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\lambda} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\lambda} \end{vmatrix}$$

образованного по правилу: в первой строке стоят символы Кронекера с первым индексом из первой тройки и последовательными индексами из второй тройки, а далее аналогично для второй и третьей строк, построенных со вторым и третьим индексами из первой тройки. 2. Свертку произведения по паре индексов

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\nu\lambda} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\delta_{\alpha\mu},$$

можно получить, и спользуя детерминант, откуда

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\nu\lambda} &= \delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\alpha}\\ &- \delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\nu}\\ &= \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\nu}\end{aligned}$$

3. Свертка двух индексов легко вычисляется с использованием предыдущей формулы:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\lambda} = 2\delta_{\gamma\lambda}$$

4. Свертка по трем индексам:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3! = 6.$$

Вычислить $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$

Решение. Запишем покомпонентно векторы

$$\boldsymbol{g} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \quad \boldsymbol{h} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}],$$
$$\boldsymbol{g}_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k, \quad \boldsymbol{h}_i = \epsilon_{imn} c_m d_n.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{h} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{imn} c_m d_n =< \text{ свертка по 1 индексу } i >\\ = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\, a_j b_k c_m d_n = (a_j c_j)\,(b_k d_k) - (a_j d_j)\,(b_k c_k)\end{gathered}$$

Т.е.

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}] = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Вычислить $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot [[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]]$

Запишем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{g} \cdot [\boldsymbol{h}, \boldsymbol{f}] = \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{ilp} \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot \epsilon_{pqr} c_q a_r =\\ < \text{ свертка по } p >= (\delta_{iq}\delta_{lr} - \delta_{ir}\delta_{lq})\, \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot c_q a_r\\ = \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot c_i a_l - \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot c_l a_i =\\ =< \epsilon_{ijk} a_j b_k c_i = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c}, \quad \epsilon_{lmn} b_m c_n a_l = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} >=\\ =< \epsilon_{ijk} a_j b_k a_i = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] \cdot \boldsymbol{b} = 0 >=\\ = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c})^2.\end{gathered}$$

В итоге,

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot [[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c})^2.$$

О метрике в линейном приближении и обозначениях

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

В линейном приближении удобно поднимать и опускать индексы с помощью фоновой метрики $\eta_{\mu\nu}$. Иногда вводится черточка:

$$h^{\bar{\mu}}_{\nu} = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu}$$

и т.д. В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \quad |g| = 1 + h, \quad h = h^{\bar{\mu}}_{\mu}$$

Симметризация

Симметризация обозначается как

$$a_{(\mu_1\dots\mu_n)}=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S^n}a_{\mu_{\sigma_1}\dots\mu_{\sigma_n}}$$

Например, две формулы ниже об одном и том же

$$\begin{aligned}
R_{ik}&=\frac{1}{2}\left(-g^{lm(0)}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\partial x^m}+\frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 h}{\partial x^i\partial x^k}\right)\\
R_{\mu\nu}^{(1)}&=\frac{1}{2}\left(-\eta^{\lambda\kappa}h_{\mu\nu,\lambda\kappa}+2h^{\bar{\lambda}}_{(\mu,\nu)\lambda}-h_{,\mu\nu}\right),
\end{aligned}$$

Антисимметризация

$$t_{[\mu_1\dots\mu_k]\nu_1\dots}=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^\sigma t_{\mu_{\sigma_1}\dots\mu_{\sigma_k}\nu_1\dots}$$

Например, тензор Вейля:

$$\begin{aligned}
C_{ik\ell m}&=R_{ik\ell m}+\frac{1}{n-2}\left(R_{im}g_{k\ell}-R_{i\ell}g_{km}+R_{k\ell}g_{im}-R_{km}g_{i\ell}\right)+\frac{1}{(n-1)(n-2)}R\left(g_{i\ell}g_{km}-g_{im}g_{k\ell}\right)\\
C_{abcd}&=R_{abcd}-\frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}R_{d]b}-g_{b[c}R_{d]a}\right)+\frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}
\end{aligned}$$

О свертки симметричного и антисимметричного тензора Легко показать, что

$$C=t_{ij}s_{ij}=<\text{ перестановка индексов } i\leftrightarrow j>=\left(-t_{ji}\right)s_{ji}=-C,$$

где последнее равенство получается, если переобозначить индексы свертки. Из равенства $C=-C$ следует $C=0$:

$$t_{[ij]}s_{\{ij\}}=0.$$

Усреднение

Задача 6. Вычислить средние значения произведений единичного вектора $\boldsymbol{n}$ на сфере

$$\langle n_\alpha\rangle,\quad \langle n_\alpha n_\beta\rangle\dots$$

Решение. Усреднение по сфере определяется выражением

$$\langle\bullet\rangle=\frac{1}{4\pi}\int(\bullet)\mathrm{d}\Omega.$$

Поскольку усреднение по единичной сфере - центрально симметричная операция, в результате ее действия на тензор с необходимостью должна получаться тензорная величина, симметричная относительно вращений. Так, при усреднении вектора должен получаться вектор же, вращения которого оставляют его инвариантным; существует только один инвариантный при вращениях вектор - нулевой. Поэтому согласно приведенным нами соображениям симметрии следует ожидать

$$\langle n_\alpha\rangle=0.$$

B этом можно убедиться прямыми вычислениями, полагая в полярных координатах

$$n_1=\sin\theta\cos\phi,\quad n_2=\sin\theta\sin\phi,\quad n_3=\cos\theta,$$

И
$$\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\phi,$$
так что для первых двух компонент интеграл по ϕ за полный период, очевидно, дает нуль, и, аналогично, интеграл по θ для 3-ей компоненты также равен нулю.

Для усреднения пары единичных векторов не будем проводить вычисления в явном виде, а воспользуемся приведенными выше соображениями симметрии. В самом деле, результат усреднения $\langle n_\alpha n_\beta\rangle$ должен быть симметричным, инвариантным относительно вращений тензором второго ранга, так что единственная возможность - это
$$\langle n_\alpha n_\beta\rangle=A\delta_{\alpha\beta},$$
где A - константа, которую можно определить, домножая обе стороны равенства на $\delta_{\alpha\beta}$ и суммируя по повторяющимся индексам, т.е. просто сворачивая равенство по α и β :
$$\langle n_\alpha n_\alpha\rangle=A\delta_{\alpha\alpha}=3A.$$
Однако
$$\langle n_\alpha n_\alpha\rangle=\left\langle\boldsymbol{n}^2\right\rangle=\langle 1\rangle=1,$$
откуда
$$3A=1,$$
и окончательно
$$\langle n_\alpha n_\beta\rangle=\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}$$

Далее, очевидно, что, имея только один инвариантный относительно вращений тензор $\delta_{\alpha\beta}$ для построения результатов усреднения, мы можем построить из него только тензоры с четным количеством индексов. Поэтому усреднение нечетного числа единичных векторов по сфере тождественно равно нулю:
$$\underbrace{\langle n_{\alpha_1}\ldots n_{\alpha_k}\rangle}_{k\text{ нечетное}}\equiv 0.$$
Для усреднения четырех векторов вычислим коэффициент в равенстве, построенном по при нципу симметризации индексов в тензоре $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda}$:
$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\lambda\rangle=B\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\lambda}+\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\gamma\beta}\right).$$
Сворачивая по α и β, найдем
$$\langle n_\alpha n_\alpha n_\gamma n_\lambda\rangle=B\left(\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\gamma\lambda}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\alpha\lambda}+\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\gamma\alpha}\right)=(3+1+1)B\delta_{\gamma\lambda},$$
т.е. с учетом $n_\alpha n_\alpha=\boldsymbol{n}^2=1$
$$\langle n_\gamma n_\lambda\rangle=5B\delta_{\gamma\lambda}.$$
Используя известный уже результат для усреднения пары единичных векторов, находим $5B=1/3$ и
$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\lambda\rangle=\frac{1}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\lambda}+\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\gamma\beta}\right)$$

2 Additional Theory

2.1 Примеры

(все это перепишу, уберу лишнюю математику)

Пример усреднения в квадрупольном излучении в теории поля

Введение в электродинамику Уравнения Максвелла

$$\partial_\mu\left(\partial^\mu \mathcal{A}^\nu-\partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)=\frac{4\pi}{c} j^\nu .$$

Решаются в виде

$$\mathcal{A}^\nu(\omega, \boldsymbol{k})=k^\nu f+\mathcal{A}_{\perp \text{ free}}^\nu(\omega, \boldsymbol{k})+\frac{4\pi}{c} \mathcal{P}^{\mu\nu} j_\mu(\omega, \boldsymbol{k}) \frac{1}{k^2}$$

где $\mathcal{P}^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -g^{\mu\nu}+\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$ - вещественная симметричная поляризационная матрица.

$$\mathcal{A}_{\text{ret}}^\mu(k)=\frac{4\pi}{c} \frac{1}{k^2+\mathrm{i} k_0 0} \mathcal{P}^{\mu\nu} j_\nu(k)=-\frac{4\pi}{c} \frac{1}{k^2+\mathrm{i} k_0 0} j^\mu(k)$$

Решения уравнений Максвелла для задач излучения имеют вид

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{R}, t)=\frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} \frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}, t_r\right)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|},$$

где t_r - время, которое отличается от момента регистрации сигнала на интервал запаздывания, необходимый для того, чтобы электромагнитная волна достигла точки наблюдения (время распространения):

$$t_r=t-\frac{1}{c}\left|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}\left(t_r\right)\right|$$

Для системы частиц

$$\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}, t_r\right)=\sum_q e_q \boldsymbol{v}_q\left(t_r\right) \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\left(t_r\right)\right)$$

так что после снятия интегрирования за счет дельта-функции вектор-потенциал равен 3

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}, t)=\frac{1}{c} \sum_q e_q \boldsymbol{v}_q\left(t_r\right) \frac{1}{\left|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}\left(t_r\right)\right|}$$

Это значение можно искать приближенно. Посмотрим на один член приближения 2-го порядка для иллюстрации приемов усреднения.

После разложения, во втором порядке малости один из членов имеет вид

$$\mathcal{A}_\alpha^{\Delta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \frac{1}{c} \sum_q e_q \frac{1}{2 R^3}\left(r_\alpha r_\beta\right) R_\beta$$

Скалярный потенциал найдется из калибровки, так что, опуская преобразования, напишем ответ:

$$\mathcal{A}_{(D)}^\alpha=\frac{1}{6 c^2 R} \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\beta,$$

где $D_{\alpha\beta}=\sum_q e_q\left(3 r_\alpha r_\beta-r^2 \delta_{\alpha\beta}\right)$.

Магнитное поле от вклада квадрупольного члена равно

$$\mathcal{H}_{\text{кв.}}^\alpha \stackrel{\text{в.з.}}{\approx}-\frac{1}{6 c^3 R} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \dddot{D}_{\gamma\nu} n_\nu .$$

Для расчета интенсивности квадрупольного излучения $\mathfrak{I}_{(D)}=\frac{c}{4\pi}\left\langle\mathcal{H}_{\text{кв.}}^2\right\rangle 4\pi R^2$ необходимо провести усреднение по углам величины

$$\mathfrak{D}=\left\langle\epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \dddot{D}_{\gamma\nu} n_\nu \epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} n_{\beta'} \dddot{D}_{\gamma'\nu'} n_{\nu'}\right\rangle,$$

где $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор, D_{ij} - симметричный тензор. Для усреднения на сфере пользуемся $\langle n_\beta n_\nu n_{\beta'} n_{\nu'}\rangle = \frac{1}{15}\left(\delta_{\beta\beta'}\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\beta\nu'}\delta_{\nu\beta'} + \delta_{\beta\nu}\delta_{\beta'\nu'}\right)$, получим:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{15}\left(2\,\dddot{D}_{\gamma\nu}\dddot{D}_{\gamma\nu} + \dddot{D}_{\gamma\nu}\dddot{D}_{\gamma'\beta}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\nu\gamma'} + \dddot{D}_{\gamma\beta}\dddot{D}_{\gamma'\beta'}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta'\gamma'}\right).$$

Тут последний член обращается в нуль как произведение симметричного $D_{\gamma\beta}$ на антисимметричный $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Во втором члене подстановка $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\nu\gamma'} = \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'}\delta_{\nu\gamma}$ приводит к

$$\dddot{D}_{\gamma\nu}\dddot{D}_{\gamma'\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\nu\gamma'} = \dddot{D}_{\gamma\beta}\dddot{D}_{\gamma\beta} - \dddot{D}_{\gamma\gamma}D_{\beta\beta},$$

и тут так как тензор квадрупольного момента является бесследовым, $\dddot{D}_{\beta\beta} = 0$, получаем ответ

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{5}\dddot{D}_{\gamma\nu}\dddot{D}_{\gamma\nu} = \frac{1}{5}(\dddot{D}\cdot\dddot{D})$$

Интенсивность квадрупольного излучения

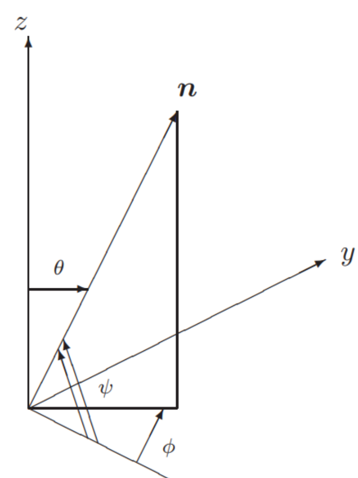
$$\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{c}{4\pi}\left\langle\mathcal{H}^2\right\rangle 4\pi R^2 = \frac{1}{36c^5}\mathfrak{D} = \frac{1}{36c^5}\frac{1}{5}\dddot{D}_{\gamma\nu}\dddot{D}_{\gamma\nu}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\gamma\nu}\dddot{D}_{\gamma\nu}$$

Пример усреднения в рассеяния электромагнитных волн

Падает волна:



Случай линейной поляризации Сечение рассеяния:

$$\mathrm{d}\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\langle S_0\rangle}\mathrm{d}\mathfrak{I},$$

где $\mathrm{d}\mathfrak{I}_{(d)} = \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{4\pi c^3}|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega$ и $|\boldsymbol{S}| = \frac{c}{4\pi}|\mathcal{E}|^2$.

Вообще, $\mathfrak{I}_{(d)} = \frac{2}{3c^3}|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2$.

Пусть линейно поляризованная волна падает на диполь. Рассмотрим уравнение движения свободного покоящегося заряда под воздействием поля электромагнитной волны

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \gamma\dot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\mathcal{E}_0$$

Решаем это уравнение, получаем

$$\ddot{\boldsymbol{d}}(t) = e\ddot{\boldsymbol{r}}(t).$$

Находим электрическое поле в волновой зоне

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{H}| = \frac{1}{c^2 r}|\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}| = \frac{1}{c^2 r}|\ddot{\boldsymbol{d}}| \sin\psi,$$

В случае линейной поляризации

$$\sin^2\psi = 1 - \cos^2\psi$$

и

$$\cos\psi = \sin\theta\cos\phi,$$

Отсюда получаем интенсивность излучения

$$\mathrm{d}^2\mathfrak{I}(\omega) = \frac{c}{4\pi}\frac{e^4}{m^2c^4}\mathcal{E}_0^2(\omega)\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\sin^2\psi \mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\phi$$

И полное сечение в итоге равно

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Для свободных частиц, получаем сечение Томсона

$$\sigma_{\text{free}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8\pi}{3}r_e^2$$

Случай произвольной поляризации света В случае произвольной поляризации света угловое распределение задается угловой зависимостью величины

$$\mathcal{H}^2 \sim (\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{d}})^2 \sim (\boldsymbol{n} \times \mathcal{E}_0)^2 \sim (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2,$$

где, напомним, вектор поперечной поляризации связан с вектором электрического поля:

$$\mathcal{E} \sim \epsilon_\perp.$$

Для простоты сравнения со случаем линейной поляризации будем считать вектор поляризации единичным. Рассмотрим естественно поляризованный свет.

Запишем

$$|\vec{n} \times \vec{\epsilon}_\lambda|^2 = \vec{n}^2\vec{\epsilon}_a^2 - (\vec{n}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda)^2 = 1 - (\vec{n}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda)(\vec{n}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda^*) = 1 - n_\alpha n_\beta \cdot \Pi^{\alpha\beta},$$

где тензор поляризации естественного света равен

$$\Pi^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \epsilon_\perp^\alpha \epsilon_\perp^{*\beta} \right\rangle$$

Случай естественного света Выбирая ось z вдоль волнового вектора падающей волны $\boldsymbol{k}_0$, перечислим свойства вектора поляризации для естественного света имеем свойства:

1. единичная нормировка:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp = a_x\mathfrak{e}_1 + a_y\mathfrak{e}_2, \quad |a_x|^2 + |a_y|^2 = 1,$$

2. поперечность:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp \cdot \boldsymbol{k}_0 = 0,$$

3. равновероятность обеих поперечных поляризаций:

$$\left\langle |a_x|^2 \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad \left\langle |a_y|^2 \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle a_x a_y \rangle = 0.$$

Эти свойства позволяют нам вычислить тензор поляризации естественного света

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\lambda^\alpha \epsilon_\lambda^{*\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{e}_1^\alpha \mathfrak{e}_1^\beta + \mathbf{e}_2^\alpha \mathbf{c}_2^\beta\right).$$

У него есть свойства

$$\Pi^{\alpha\alpha} \equiv \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2) = 1$$
$$\Pi^{\alpha\beta} \cdot k_0^\alpha = 0$$

т.к. $e_x k_0 = 0$.

Усреднение на окружности Можно тензор поляризации записать иначе. У нас есть всегда свойства

$$\Pi^{\alpha\alpha} = 1 \qquad \Pi^{\alpha\beta}\frac{k_0^\alpha}{k_0} = 0.$$

обозначим $\frac{\vec{k}_0}{k_0} = \vec{e}_k$.

То есть по сути у нас написано усреднение вектора $\Pi^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \epsilon_\perp^\alpha \epsilon_\perp^{*\beta} \right\rangle$ по окружности, перпендикулярной вектору $\vec{e}_k$.

Чтобы усреднить по окружности, ищем инварианты с двумя индексами при вращении вокруг нее. Это:

$$\delta_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta},$$

так как $\vec{e}$ сам инвариантен относительно вращения вокруг оси окружности.

Тогда в общем случае

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = A\delta_{\alpha\beta} + Be_\alpha e_\beta$$

Применим условия нормируемости и поперечности:

$$\left\langle \vec{n}^2 \right\rangle = 1 = A \cdot 3 + B\vec{e}^2 = 3A + B = 1$$
$$e_\alpha \langle n_\alpha n_\beta \rangle = \langle e_\alpha n_\alpha n_\beta \rangle = 0.$$

и с другой стороны

$$e_\alpha A\delta_{\alpha\beta} + e_\alpha Be_\alpha e_\beta = Ae_\beta + B\vec{e}^2 \cdot e_\beta = (A+B)e_\beta \equiv 0$$

Отсюда находим, что на окружности

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta\right)$$

Получили общий вид усреднения по поляризациям

$$\left\langle \Pi^{\alpha\beta} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta\right)$$

так что

$$\left\langle (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left(1 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q})^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\theta\right),$$

где мы ввели угол θ между волновыми векторами падающей и рассеянной волн.

Короткий обзор общей теории относительности

Об уравнениях Уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

имеет параметры: тензор Риччи

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^{l}_{ilk},$$

скалярная кривизна

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}$$

определяются тензором кривизны Римана

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right),$$

где символы Кристоффеля

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$$

О сохранении энергии В произвольной системе координат псевдотензор энергии-импульса Ландау-Лифшица определяется равенством

$$|g| t^{\mu\nu} = |g| T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \tau^{\mu\nu\lambda},$$

где

$$\chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}\left(g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}\right),$$

а также $T^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}_{\text{грав}}$, и $T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)$.

Или, в другом виде,

$$t_{\mu x} \equiv \frac{1}{8\pi G}\left[R_{\mu x} - \frac{1}{2} g_{\mu x} R^{\lambda}{}_{\lambda} - R^{(1)}_{\mu\varkappa} + \frac{1}{2}\eta_{\mu x} R^{(1)\lambda}{}_{\lambda}\right],$$

где линейная часть тензора Риччи $R^{(1)}{}_{\mu x} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{x}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{x}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu x}}{\partial x^{\lambda} \partial x_{\lambda}}\right)$.

О случае слабого поля

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна типично пишутся через параметр

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h,$$

как

$$\Box \psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu},$$

если мы пользуемся калибровкой $\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0$. Обратно $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2} h$. Отсюда

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00} \text{ и } h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

На больших расстояниях

$$|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|,$$

Пример излучения в гравитации

Квадрупольный момент определен так, чтобы его след был равен нулю: $\sum_{i=1}^{3} D_{ii} = 0$. Имеем

$$h_+(t, R\partial_1) = -\frac{G}{3R}\left(\ddot{D}_{22}(t-R) - \ddot{D}_{33}(t-R)\right), \quad h_\times(t, R\partial_1) = -\frac{2G}{3R}\ddot{D}_{23}(t-R).$$

Теперь найдем плотность потока энергии в волне. Компонента t^{01} псевдотензора энергии-импульса в нашем случае равна

$$t^{01}(t+R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2(t)\right)$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить поток энергии $dI(t, \boldsymbol{n})$ в элемент телесного угла $d = \sin\theta d\theta d\varphi$ и, в конечном счете, потери энергии $-d\mathcal{E}/dt$ системой. Для элемента телесного угла в направлении x^1 имеем

$$dI(t, \partial_1) = t^{01}(t+R, R\partial_1) R^2 do = \frac{G}{36\pi}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2(t)\right) do$$

Мы специально «откатили» поток dI на R назад во времени, поскольку он должен характеризовать потери энергии системы именно в момент времени t, когда сигнал излучается, и не зависеть от точки наблюдения.

Обратим внимание, что формула $dI(t, \partial_1)$ имеет вид суммы по двум поляризациям гравитационной волны. Перепишем ее в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(\dddot{D}_{ij}e_{ij}^{(s)}\right)^2 do,$$

где два трехмерных тензора поляризации имеют вид

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям бесследовости, симметричности, поперечности и ортонормированности

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \quad e_{ij}^{(s)} = e_{ji}^{(s)}, \quad e_{ij}^{(s)} n_j = 0, \quad e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(s')} = \delta^{ss'}.$$

Нетрудно показать, что формула $dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(\dddot{D}_{ij}e_{ij}^{(s)}\right)^2 do$ верна для любой пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Теперь мы можем повернуть систему координат любым способом и написать

$$dI(t, \boldsymbol{n}) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(\dddot{D}_{ij}e_{ij}^{(s)}\right)^2 do = \frac{G}{72\pi}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}E_{ijkl}(\boldsymbol{n}) do, \quad E_{ijkl}(\boldsymbol{n}) = \sum_{s=1}^{2} e_{ij}^{(s)} e_{kl}^{(s)}$$

для произвольного $\boldsymbol{n}$. Нам осталось найти явно тензор $E_{ijkl}(\boldsymbol{n})$. Для этого воспользуемся его свойствами:

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl} n_i = 0,$$
$$E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2},$$

которые немедленно следуют из свойств и явного вида $e_{ii}^{(s)}$. Используя второе свойство, запишем E_{ijkl} в виде

$$\begin{aligned} E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 \left(n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}\right) \\ + E_3 \left(n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}\right) + E_4 \delta_{ij}\delta_{kl} + E_5 \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \end{aligned}$$

Коэффициенты $E_1, \ldots, E_5$ находим из остальных условий:

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}.$$

Подставляя E_{ijkl}, получаем

$$dI(\boldsymbol{n}) = \frac{G}{36\pi} \left(\frac{1}{4} \left(\dddot{D}_{ij} n_i n_j\right)^2 + \frac{1}{2} \dddot{D}_{ij}^2 - \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{ik} n_j n_k \right) do$$

Интегрируя по углам, находим полную скорость потери энергии системой

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45} \dddot{D}_{ij}^2$$

Для звездных систем эта потеря энергии очень мала, и может быть измерена только для очень тесных систем. Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором в системе, состоящей из двух нейтронных звезд, было первым подтверждением существования гравитационных волн. В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии за это открытие и проверку других общерелятивистских эффектов на данной системе.