Семинар по введению в группу Пуанкаре и в следствия

Yury Holubeu, December 31, 2023

Contents

1 Main Theory

1.1 Еще раз, в чем идея группы Пуанкаре?

Еще раз про схему Вигнера

Связь нерелятивистских обозначений и релятивистских

Для того, чтобы описывать повороты не только в 3 -мерном евклидовом пространстве, необходимо говорить не об оси поворота, а о плоскскти, в которой производится поворот: поворот на угол $\phi_{\mathbb{E}}^{z}$ вокруг оси z обозначается как поворот в плоскости (x, y) на угол $\omega^{xy} = \phi_{\mathbb{E}}^{z}$ и т. п. В такой логике Эли Картаном был введен антисииметричный тензор второго ранга

$$\omega^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\phi_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad \omega^{\beta\alpha} = -\omega^{\alpha\beta}, \quad \phi_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha\beta}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}^{\gamma}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{E}}^{\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha\beta}\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}.$$

Для того, чтобы в подобных выражениях перейти от 3 -мерных обозначений с выделенными евклидовыми координатами и временем к явно ковариантным обозначениям, мы будем также использовать более универсальную запись с использованием отличающихся верхних и нижних индексов в пространствевремени Минковского, выделяя евклидовы величины и индексы символом $\mathbb{E}$, например, «иксовые» координаты $x_\alpha = g_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}^{\beta} = -\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}^{\alpha}, x^\alpha = g^{\alpha\gamma}x_\gamma = r_{\mathbb{E}}^{\alpha}$. Тогда для преобразований поворотов запишем $\delta r_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \delta x^\alpha = \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma}\phi_\beta x_\gamma$, где мы перешли к 4-мерным тензорным обозначениям, так что $\phi_\beta = -\phi_{\mathbb{E}}^{\beta}$, а $\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho}$– полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты в 4-мерном пространствевремени Минковского, для которого мы принимаем следующее соглашение о выборе знака: $\hat{\epsilon}^{0123} = 1$. В 4-мерных обозначениях теперь

$$\omega^{\alpha\beta} = \epsilon_{\mathrm{E}}^{\alpha\beta\gamma}\phi_{\mathrm{E}}^{\gamma} = \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma}\left(-\phi_\gamma\right) = -\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma}\phi_\gamma,$$

а тензорная структура в (17.19)

$$\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}l_{\mathbb{E}}^{\gamma} = -\hat{\epsilon}_{0\alpha\beta\gamma}(-\mathrm{i})\epsilon_{\mathrm{E}}^{\gamma\alpha'\beta'}r_{\mathrm{E}}^{\beta'}\partial_{\gamma'} = \mathrm{i}\hat{\epsilon}_{0\alpha\beta\gamma}\hat{\epsilon}^{0\gamma\alpha'\beta'}\left(-x_{\beta'}\right)\partial_{\gamma'} = \mathrm{i}\left(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha\right).$$

(запищу потом это сравнение, я уже писал это или почти это в своих записях)

Компоненты в лямбда-матрице

(задача из КТП, типа посмотреть, в компонентах что могут быть просто вращения, а могут быть просто бусты)

Идея про построение уравнений поля из представлений группы Пуанкаре

1.2 Потренируемся в математике для группы Пуанкаре

О коммутационных соотношениях в основе группы Пуанкаре

(типичный вывод, написанный у Бухбиндера)

О коммутационных соотношениях для вектора Паули-Любанского

Особо эффективно разбираться с тем, как выглядят генераторы, решая задачу про поиск коммутаторов. Знание генераторов необходимо для проделывания всех преобразований вектора Паули-Любанского, что крайне важно для нормального понимания группы Пуанкаре и её использования!

Только лишь этой целью, следуя В. В. Киселеву, вычислим коммутаторы генераторов группы Лоренца с компонентами псевдовектора Паули-Любанского,

$$\left[\boldsymbol{j}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{W}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \mathrm{i}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{W}^{\gamma}_{\mathbb{E}}, \quad [\boldsymbol{j}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W_0] = 0,$$
$$\left[\tilde{j}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{W}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \mathrm{i}\delta^{\alpha\beta}_{\mathbb{E}} W_0, \quad \left[\tilde{j}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W_0\right] = \mathrm{i}W^{\alpha}_{\mathbb{E}},$$

пользуясь известными коммутационными соотношениями для $\boldsymbol{j}_{\mathbb{E}} = \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}} + \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathbb{E}} = \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}} + \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}$ друг с другом и с компонентами импульса.

Для упрощения выкладок положим $\hbar = 1$ и найдем, как компоненты псевдовектора Паули-Любанского выражаются через генераторы гуппы Пуанкаре. Временная компонента

$$W^0 = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} p_{\alpha} S_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \left(-p^{\alpha}_{\mathbb{E}}\right) \epsilon^{\beta\gamma\alpha'}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\alpha'}_{\mathbb{E}} = (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}})$$

Пространственные компоненты

$$W^{\alpha} = W^{\alpha}_{\mathbb{E}} = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\alpha\nu\lambda\rho} p_{\nu} S_{\lambda\rho} = -\frac{1}{2}\left(\hat{\epsilon}^{\alpha 0\beta\gamma} p_0 S_{\beta\gamma} + 2\hat{\epsilon}^{\alpha\beta 0\gamma} p_{\beta} S_{0\gamma}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} p_0 \epsilon^{\beta\gamma\alpha'} \boldsymbol{s}^{\alpha'}_{\mathbb{E}} - \epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \left(-p^{\beta}_{\mathbb{E}}\right) \tilde{\boldsymbol{s}}^{\gamma}_{\mathbb{E}} = p_0 \boldsymbol{s}^{\alpha}_{\mathbb{E}} + (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \times \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}})^{\alpha}.$$

Отсюда сразу заключаем, что $[p^{\mu}, W^{\nu}] = 0$, поскольку дифференциальные операторы импульсов коммутируют между собой и с матричными операторами.

Учтем теперь, что пространственные части генераторов $\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{l}_{\mathbb{E}}$ коммутируют с матричными вкладами $\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}$. Тогда сначала найдем

$$\left[\tilde{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W^0\right] = \left[\tilde{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}})\right] = \left[\tilde{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{p}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}} = \mathrm{i}\delta^{\alpha\beta}_{\mathbb{E}} p_0 \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}} = \mathrm{i}p_0 \boldsymbol{s}^{\alpha}_{\mathbb{E}},$$

а потом

$$\left[\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W^0\right] = \left[\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, (\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}})\right] = \boldsymbol{p}^{\beta}_{\mathbb{E}} \left[\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \boldsymbol{p}^{\beta}_{\mathbb{E}} \mathrm{i}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \tilde{\boldsymbol{s}}^{\gamma}_{\mathbb{E}} = \mathrm{i}\left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \times \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right)^{\alpha},$$

и после сложения этих вкладов устанвливаем

$$\left[\tilde{\boldsymbol{j}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W_0\right] = \mathrm{i}W^{\alpha}_{\mathbb{E}}.$$

В том же стиле

$$\left[\tilde{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \left[\tilde{\boldsymbol{l}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, p_0\right] \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}} + \left[\tilde{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{p}^{\alpha'}_{\mathbb{E}}\right] \epsilon^{\beta\alpha'\gamma}_{\mathbb{E}} \tilde{\boldsymbol{s}}^{\gamma}_{\mathbb{E}} = \mathrm{i}\boldsymbol{p}^{\alpha}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}} + \mathrm{i}\delta^{\alpha\alpha'}_{\mathbb{E}} p_0 \epsilon^{\beta\alpha'\gamma}_{\mathbb{E}} \tilde{\boldsymbol{s}}^{\gamma}_{\mathbb{E}} = \mathrm{i}\boldsymbol{p}^{\alpha}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}} - \mathrm{i}p_0 \epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \tilde{\boldsymbol{s}}^{\gamma}_{\mathbb{E}},$$

а

$$\left[\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = p_0 \left[\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] + \boldsymbol{p}^{\alpha'}_{\mathbb{E}} \epsilon^{\beta\alpha'\gamma}_{\mathbb{E}} \left[\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \tilde{\boldsymbol{s}}^{\gamma}_{\mathbb{E}}\right] = \mathrm{i}p_0 \epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \tilde{\boldsymbol{s}}^{\gamma}_{\mathbb{E}} + \boldsymbol{p}^{\alpha'}_{\mathbb{E}} \epsilon^{\beta\alpha'\gamma}_{\mathbb{E}} (-\mathrm{i}) \epsilon^{\alpha\gamma\beta'}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\beta'}_{\mathbb{E}},$$

где

$$-\boldsymbol{p}^{\alpha'}_{\mathbb{E}} \epsilon^{\beta\alpha'\gamma}_{\mathbb{E}} \mathrm{i}\epsilon^{\alpha\gamma\beta'}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\beta'}_{\mathbb{E}} = \mathrm{i}\boldsymbol{p}^{\alpha'}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\beta'}_{\mathbb{E}} \left(\delta^{\alpha\beta}_{\mathbb{E}} \delta^{\alpha'\beta'}_{\mathbb{E}} - \delta^{\beta\beta'}_{\mathbb{E}} \delta^{\alpha\alpha'}_{\mathbb{E}}\right) = \mathrm{i}\delta^{\alpha\beta}_{\mathbb{E}} \left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}\right) - \mathrm{i}\boldsymbol{p}^{\alpha}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}}$$

и после сложения этих вкладов найдем

$$\left[\tilde{\boldsymbol{j}}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \mathrm{i}\delta^{\alpha\beta}_{\mathbb{E}} W^0.$$

Итак, мы установили, что W^{μ} при лоренцевых бустах преобразуется как 4-вектор, а значит, квадрат 4-вектора - это инвариант. Для генераторов поворотов

$$[\boldsymbol{j}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, W_0] = \left[\boldsymbol{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{p}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}} + \boldsymbol{p}^{\beta}_{\mathbb{E}} \left[\boldsymbol{s}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \mathrm{i}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{p}^{\gamma}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}} + \mathrm{i}\boldsymbol{p}^{\beta}_{\mathbb{E}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}} \boldsymbol{s}^{\gamma}_{\mathbb{E}} = 0,$$

а стало быть, временная компонента 4-вектора Паули-Любанского является трехмерным скаляром.

Затем вычислим

$$\left[\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}\right]=\left[\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_{0}\right] \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}+\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha^{\prime} \gamma^{\prime}}\left[\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha^{\prime}}\right] \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma^{\prime}}=\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha^{\prime} \gamma^{\prime}} \mathrm{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha^{\prime} \gamma} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\gamma} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma^{\prime}}=\mathrm{i} \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta}\left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right)-\mathrm{i} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\beta} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$$

и

$$\left[\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}\right]=p_{0}\left[\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}\right]+\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha^{\prime} \gamma^{\prime}} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha^{\prime}}\left[\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma^{\prime}}\right]=\mathrm{i} p_{0} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta \gamma} \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}+\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha^{\prime}} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha^{\prime} \gamma^{\prime}} \mathrm{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \gamma^{\prime} \beta^{\prime}} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta^{\prime}},$$

где

$$\mathrm{i} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha^{\prime}} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha^{\prime} \gamma^{\prime}} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \gamma^{\prime} \beta^{\prime}} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta^{\prime}}=\mathrm{i} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha^{\prime}} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta^{\prime}}\left(-\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta} \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha^{\prime} \beta^{\prime}}+\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha^{\prime}} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta \beta^{\prime}}\right)=-\mathrm{i} \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta}\left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right)+\mathrm{i} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta}$$

Приведение подобных членов дает

$$\left[\boldsymbol{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}\right]=\mathrm{i} p_{0} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta \gamma} \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}+\mathrm{i} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta}-\mathrm{i} \boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}^{\beta} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}=\mathrm{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta \gamma}\left(p_{0} \boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}+\left(\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}} \times \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}\right)^{\gamma}\right)=\mathrm{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta \gamma} W_{\mathbb{E}}^{\gamma},$$

и $\boldsymbol{W}_{\mathrm{E}}^{\beta}$ преобразуется при поворотах как 3 -мерный вектор.

1.3 Еще раз, как строим поля?

О построении скалярного поля

О построении векторного поля

2 Additional Theory

2.1 О других свойствах группы Лоренца и Пуанкаре

О дуальности

Для спиновых матриц $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$ выполняются такие же соотношения, поскольку операция дуальности не затрагивает матричные индексы тензора $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$: генератор лоренцевых бустов $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$ дуален генератору спиновых поворотов,

$$\mathfrak{s}_{\mu\nu} \stackrel{\mathcal{D}}{\mapsto} \tilde{\mathfrak{s}}_{\mu\nu}: \quad \boldsymbol{s}_{\mathbb{R}}^{\alpha} \stackrel{\mathcal{D}}{\mapsto} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \stackrel{\mathcal{D}}{\mapsto} -\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Для наглядности приведем вид тензора орбитального момента и дуального тензора в терминах орбитального момента $\boldsymbol{l}_{\mathrm{E}}$ и дуального ему генератора координатных бустов $\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}$, в виде матриц

$$\ell_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{x} & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{y} & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{z} \\ -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{x} & 0 & \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{z} & -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{y} \\ -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{y} & -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{z} & 0 & \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{x} \\ -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{z} & \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{y} & -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{x} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\ell}^{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{x} & \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{y} & \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{z} \\ -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{x} & 0 & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{z} & -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{y} \\ -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{y} & -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{z} & 0 & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{x} \\ -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{z} & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{y} & -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{x} & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\tilde{\ell}_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{x} & -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{y} & -\boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{z} \\ \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{x} & 0 & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{z} & -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{R}}^{y} \\ \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{y} & -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{z} & 0 & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{x} \\ \boldsymbol{l}_{\mathbb{E}}^{z} & \tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{y} & -\tilde{\boldsymbol{l}}_{\mathbb{E}}^{x} & 0 \end{pmatrix}$$

Об алгебрах группы Пуанкаре

(возможно, добавлю какую-то алгебраическую конструкцию, что там чему изморфно и какие из этого следствия?)

2.2 А зачем еще нужна группа Пуанкаре?

2.2.1 О спинорах

2.2.2 О суперсимметрии

(это пока не готов рассказывать, но потом по идее на минут 10 соберу рассказ)