# Лекция по основам электродинамики

Yury Holubeu, December 31, 2023

## Contents

# 1 Main Theory

## 1.1 Основные законы электродинамики

### 1.1.1 Ковариантные уравнения движения

В уравнениях Эйлера-Лагранжа с учетом суммы функции Лагранжа свободной частицы и члена взаимодействия возникает выражение

$$\frac{\partial L}{\partial u^{\mu}} = -mu_{\mu} - \frac{e}{c}\mathcal{A}_{\mu}(x(\tau)),$$

а значит, дифференцирование сложной функции дает

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial u^{\mu}} = -m\frac{\mathrm{d}u_{\mu}}{\mathrm{d}\tau} - \frac{e}{c}\partial_{\nu}\mathcal{A}_{\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\mathrm{d}p_{\mu}}{\mathrm{d}\tau} - \frac{e}{c}u^{\nu}\partial_{\nu}\mathcal{A}_{\mu}$$

Величина обобщенного импульса, как видим, связана с кинетическим импульсом $p_{\mu}$ и векторным полем

$$P_{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial u^{\mu}} = p_{\mu} + \frac{e}{c}\mathcal{A}_{\mu}.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = -\frac{e}{c}u^{\nu}\partial_{\mu}\mathcal{A}_{\nu}$$

В итоге, уравнения движения Эйлера-Лагранжа дают ковариантные выражения

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c}\left(\partial_{\mu}\mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\mathcal{A}_{\mu}\right)u^{\nu}$$

Тензор второго ранга

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\mathcal{A}_{\mu}$$

называют тензором напряженности векторного поля. Здесь

$$\mathcal{A}_{\mu} = (\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\alpha}) = \left(\mathcal{A}_0, -\mathcal{A}_{\alpha}^{\mathbb{E}}\right).$$

Тензор напряженности антисимметричен относительно перестановки индексов

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

Отсюда находим, что $F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$. Интересно, что его компоненты

$$F_{0\alpha} = \partial_0\mathcal{A}_{\alpha} - \partial_{\alpha}\mathcal{A}_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{A}_{\alpha}^{\mathrm{E}}}{\partial t} - \nabla_{\alpha}\mathcal{A}_0$$

в точности совпадают с электрическим полем в терминах 4-потенциала:

$$F_{0\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha}^{\mathbb{E}}$$

Компоненты

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\mathcal{A}_{\beta} - \partial_{\beta}\mathcal{A}_{\alpha} = -\partial_{\alpha}\mathcal{A}_{\beta}^{\mathbb{E}} + \partial_{\beta}\mathcal{A}_{\alpha}^{\mathbb{E}},$$

так что

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}F_{\alpha\beta} = -2\left(\mathrm{rot}\,\mathcal{A}_{\mathbb{E}}\right)_{\gamma} = -2\mathcal{H}_{\gamma}^{\mathbb{E}}.$$

Значит,

$$F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}\mathcal{H}_{\gamma}^{\mathbb{E}}.$$

С учетом того, что $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma, u^\mu = \gamma(c, \boldsymbol{v})$, найдем компоненты уравнения движения (4.6): при $\mu \mapsto 0$

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c} F_{0\alpha} v^\alpha \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{v},$$

т.е. работу силы Лоренца. Аналогично, при $\mu \mapsto \alpha$ в (4.6) находим действие силы Лоренца

$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c}\left\{F_{\alpha 0} c + F_{\alpha\beta} v^\beta\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathbb{E}}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{E}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_{\mathbb{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathbb{E}},$$

где мы учли смену знака при поднимании пространственного индекса у вектора импульса и антисимметричность тензора напряженности поля.

Таким образом, мы показали, что 4 -потенциалы $\mathcal{A}^\mu$ действительно можно отождествить с 4 -вектором пространства-времени Минковского, и они задают законы движения частицы в электромагнитном поле,

$$m\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu.$$

### 1.1.2 Дуальность

Полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты в пространстве-времени Минковского определяется заданием значения с верхними индексами $\epsilon^{0123} \stackrel{\text{def}}{=} 1$. С его помощью можно определить дуальный тензор напряженности [4]

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\mu'\nu'} F^{\mu'\nu'}$$

Тогда

$$\tilde{F}_{0\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon_{0\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}\right)\left(-\epsilon^{\mathbb{E}}_{\beta\gamma\alpha'}\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_{\alpha'}\right) = \mathcal{H}^{\mathbb{E}}_\alpha,$$

в то время как

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{\epsilon_{\alpha\beta 0\gamma} F^{0\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma 0} F^{\gamma 0}\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}\left(-\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_\gamma\right) + \epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_\gamma\right\} = \epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_\gamma.$$

Итак, мы установили, что дуальное преобразование $\tilde{\mathcal{D}}$ соответствует переходу

$$\mathcal{E} \stackrel{\overline{\mathcal{M}}}{\mapsto} \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} \stackrel{\overline{\mathcal{D}}}{\mapsto} -\mathcal{E}.$$

Здесь уместно напомнить о понятии пространственной четности $\lambda_{\mathbb{P}} = \pm 1$ при зеркальном отражении координат векторного евклидова пространства, которое было введено на стр. ??. Если тензор обладает определенной пространственной четностью, то при зеркальной инверсии пространства он переходит сам в себя с мультипликативным фактором, равным $\lambda_{\mathbb{P}}(-1)^k$, где $k$ - ранг тензора. При отрицательном значении пространственной четности тензор называют псевдотензором.

(может, потом добавлю теорию, что такое дуальность в общем случае?)

### 1.1.3 Ковариантные уравнения Максвелла и их следствия

Найдем 4-дивергенцию дуального тензора напряженности

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\partial_\mu\left(\partial_{\mu'}\mathcal{A}_{\nu'} - \partial_{\nu'}\mathcal{A}_{\mu'}\right) \equiv 0$$

как свертка антисимметричного тензора (Леви-Чивиты) с симметричным, к примеру, $\partial_\mu\partial_{\mu'}$. По компонентам: при $\nu \mapsto 0$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 0} = \nabla \cdot \mathcal{H} = 0, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathcal{H} = 0$$

При $\nu \mapsto \alpha$

$$\partial_0 \tilde{F}^{0\alpha} + \partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = \frac{1}{c}\partial_t \left(-\mathcal{H}^\alpha_{\mathrm{E}}\right) + \epsilon^{\mathbb{E}}_{\beta\alpha\gamma}\nabla_\beta \mathcal{E}^\gamma_{\mathrm{E}} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Значит, первая пара уравнений Максвелла имеет ковариантный вид в пространстве-времени Минковского

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Аналогично, 4-дивергенция тензора напряженности - это некоторый 4-вектор

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = K^\nu$$

Найдем компоненты $K^\nu$. Так при $\nu \mapsto 0$, имея ввиду преобразования дуальности (4.13), сразу находим

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \operatorname{div}\mathcal{E}$$

откуда $K^0 = 4\pi\rho$ согласно уравнениям Максвелла (2.20). Таким же образом,

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}^\alpha_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \left(\operatorname{rot}\mathcal{H}_{\mathrm{E}}\right)^\alpha$$

так что из (2.20) выводим, что $\boldsymbol{K} = 4\pi\boldsymbol{j}/$. Значит,

$$K^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Найдем 4-дивергенцию дуального тензора напряженности

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\partial_\mu \left(\partial_{\mu'}\mathcal{A}_{\nu'} - \partial_{\nu'}\mathcal{A}_{\mu'}\right) \equiv 0$$

как свертка антисимметричного тензора (Леви-Чивиты) с симметричным, к примеру, $\partial_\mu\partial_{\mu'}$. По компонентам: при $\nu \mapsto 0$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 0} = \nabla \cdot \mathcal{H} = 0, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathcal{H} = 0$$

При $\nu \mapsto \alpha$

$$\partial_0 \tilde{F}^{0\alpha} + \partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = \frac{1}{c}\partial_t \left(-\mathcal{H}^\alpha_{\mathrm{E}}\right) + \epsilon^{\mathbb{E}}_{\beta\alpha\gamma}\nabla_\beta \mathcal{E}^\gamma_{\mathrm{E}} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Значит, первая пара уравнений Максвелла имеет ковариантный вид в пространстве-времени Минковского

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Аналогично, 4-дивергенция тензора напряженности - это некоторый 4-вектор

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = K^\nu$$

Найдем компоненты $K^\nu$. Так при $\nu \mapsto 0$, имея ввиду преобразования дуальности (4.13), сразу находим

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \operatorname{div}\mathcal{E}$$

откуда $K^0 = 4\pi\rho$ согласно уравнениям Максвелла (2.20). Таким же образом,

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}^\alpha_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \left(\operatorname{rot}\mathcal{H}_{\mathrm{E}}\right)^\alpha$$

так что из (2.20) выводим, что $\boldsymbol{K} = 4\pi\boldsymbol{j}/$. Значит,

$$K^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

(по сути тут готовимся к тому, что будет на следующей лекции, к выводу пропагатора)

### 1.1.4 Инварианты, действие, преобразования

#### Инварианты поля

В евклидовом пространстве из векторов электрического и магнитного полей можно построить два скаляра и один псевдоскаляр: $\mathcal{E}^2, \mathcal{H}^2$ и $\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}$, соответственно. Любая функция этих скаляров будет являться инвариантом относительно поворотов и трансляций евклидова пространства.

Поскольку указанные преобразования евклидова пространства образуют часть поворотов, бустов и трансляций пространства-времени Минковского, мы заключаем, что релятивистские инварианты поля квадратичны по электрическому и магнитному полям, а значит, они квадратичны по тензору напряженности поля и дуальному тензору напряженности. Другие релятивистские инварианты будут функциями от квадратичных инвариантов. Итак, квадратичные скаляры это -

$$\mathcal{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{I}_2 \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \mathcal{I}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

Вычислим их в терминах электрического и магнитного полей:

$$\mathcal{I}_1 = F_{0\alpha}F^{0\alpha} + F_{\alpha 0}F^{\alpha 0} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -2\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_{\alpha}\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_{\alpha} + \epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_{\gamma}\epsilon^{\mathbb{E}}_{\alpha\beta\gamma'}\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_{\gamma'} = 2\left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2\right).$$

Аналогично с учетом преобразования дуальности (4.13) найдем

$$\mathcal{I}_2 = -4\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}, \quad \mathcal{I}_3 = -\mathcal{I}_1$$

Итак, независимыми релятивистскими инвариантами поля являются скаляры, квадратичные по тензору напряженности: $\mathcal{I}_{1,2}$. При этом они являются также калибровочными инвариантами, но первый евклидов скаляр, а второй - евклидов псевдоскаляр.

#### Преобразования поля

Тензор напряженности при замене координат пространства-времени Минковского преобразуется так же, как и всякий ковариантный тензор второго ранга, в частности, как метрика, т.е. при переходе от одной инерциальной системы $K$ к движущейся относительно ее системе $K'$ для матрицы $\|\hat{F}\|^{\mu}_{\nu} = F_{\mu\nu}$ имеют место преобразования

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu'\nu'}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{F}' = \Lambda'^{T} \cdot \hat{F} \cdot \Lambda', \quad (\Lambda')^{\mu'}_{\bullet\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}.$$

При бусте вдоль оси $x$ матрица обратного преобразования 4-координат

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в то время как, согласно (4.8) и (4.10),

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}^{\mathbb{E}}_x & \mathcal{E}^{\mathbb{E}}_y & \mathcal{E}^{\mathbb{E}}_z \\ -\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_x & 0 & -\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_z & \mathcal{H}^{\mathbb{E}}_y \\ -\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_y & \mathcal{H}^{\mathbb{E}}_z & 0 & -\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_x \\ -\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_z & -\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_y & \mathcal{H}^{\mathbb{Z}}_x & 0 \end{pmatrix},$$

так что элементарное умножение матриц приводит к результату

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'^{\mathbb{E}}_x &= \mathcal{E}^{\mathbb{E}}_x, & \mathcal{H}'^{\mathbb{E}}_x &= \mathcal{H}^{\mathbb{E}}_x, \\ \mathcal{E}'^{\mathbb{E}}_y &= \gamma\left(\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_y - \beta\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_z\right), & \mathcal{H}'^{\mathbb{E}}_y &= \gamma\left(\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_y + \beta\mathcal{E}^{\Xi}_z\right), \\ \mathcal{E}'^{\mathbb{E}}_z &= \gamma\left(\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_z + \beta\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_y\right), & \mathcal{H}'^{\mathbb{E}}_z &= \gamma\left(\mathcal{H}^{\mathbb{E}}_z - \beta\mathcal{E}^{\mathbb{E}}_y\right). \end{aligned}$$

### Действие

В случае свободного поля, когда $j^\mu \equiv 0$, калибровочная инвариантность действия имеет место, если только лагранжиан зависит от калибровочно инвариантного тензора напряженности, а требование скаляра для $\mathcal{L}$ означает, что он зависит только от инвариантов поля $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

В состав тензора напряженности входит производная по времени в компоненте $F_{0\alpha} = \partial_0\mathcal{A}_\alpha - \partial_\alpha\mathcal{A}_0$, а это значит, что, во-первых, скалярный потенциал $\mathcal{A}_0$ не эволюционирует, так как производная скалярного потенциала по времени $\partial_0\mathcal{A}_0$ не входит в число компонент тензора напраяженности, т.е. он не является динамической величиной в отличие от компонент векторного потенциала $\mathcal{A}$, а во-вторых, по принципу причинности в классической теории [2] уравнения поля могут включать в себя производные по времени полевых переменных не выше второго порядка. И наконец, центральный физический аргумент: мы потребуем, чтобы уравнения для свободных полей удовлетворяли принципу суперпозиции, так что линейная оболочка независимых решений для свободных полей также будет решением уравнений движения, а система независимых решений будет образовывать базис всех решений для свободного поля. Физическое обоснование принципа суперпозиции вполне естественно: решения для свободного поля действительно являются свободными и никак не влияют друг на друга. В основе принципа суперпозиции свободных полей лежит гипотеза об асимптотически свободных состояниях: существуют условия и область параметров теории, в которых взаимодействиями полей можно пренебречь, так что уравнения движения становятся линейными по полям. В случае электродинамики эта важная гипотеза становится элементарной: уравнения Максвелл по факту имеют широкую область эмпирической применимости, а они линейны по 4-вектору потенциалов даже при наличии внешних источников.

Из принципа причинности и требования суперпозиции решений для свободных полей следует, что лагранжиан свободного поля - это квадратичный инвариант поля, а в действие свободного поля производные первого порядка могут входить лишь квадратично:

$$\mathcal{L} = a_I F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a_{II} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}.$$

Однако второй инвариант является псевдоскаляром, который меняет знак при зеркальной инверсии пространства, и следовательно, зависимость действия от этого релятивистского инварианта приводила бы к нарушению инвариантности взаимодействий поля относительно пространственной четности, чего не наблюдается. Таким образом, лагранжиан электромагнитного поля зависит только от первого инварианта. Коэффициент пропорциональности $a_I$ в (5.1) определяет используемые единицы измерения поля и зарядов. Этот коэффициент отрицателен, поскольку инвариант включает в себя квадратичные слагаемые скорости изменения поля

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\partial_t\mathcal{A}_\alpha\partial_t\mathcal{A}^\alpha + \ldots = -\frac{1}{c^2}\left(\partial_t\mathcal{A}_F\right)^2 + \ldots$$

так что слагаемому с кинетической энергией нужно сменить знак, чтобы давать положительный вклад в общую энергию. В гауссовой системе единиц [3] действие свободного поля запишется в виде

$$S_{\text{field}} = -\frac{1}{16\pi c}\int \mathrm{d}^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

При обсуждении вкладов в действие свободного электромагнитного поля (5.1) мы ответили на 2 из 3 -х основных научных вопросов: «Что?» и «Как?». Осталось обратиться к 3 -ему вопросу: «Почему?». Почему Природа устроила так, что вклад псевдоскалярного инварианта в действие свободного электромагнитного поля тождественно равен нулю? Научный ответ на этот вопрос - механизм Печчеи-Квинн (Peccei-Quinn).

Прежде всего, параметр $a_{II}$ в (5.1) рассматривается как константа, так что вклад в лагранжиан такого же вида по замечанию Печчеи и Квинн может возникнуть динамически в квантовой теории поля за счет флуктуаций в вакууме. Но тогда наблюдаемая величина $a_{II}$ будет определяться как сумма исходного параметра и вклада от квантовых флуктуаций. Если считать, что эта сумма сохраняет более общую новую симметрию относительно непрерывных однопараметрических преобразований в виде поворотов, скажем, левого базиса 3 -мерного евклидова пространства относительно правого базиса, а не только относительно замены правого на левое и обратно, то суммарное значение параметра $a_{\mathrm{II}}$ должно обращаться в нуль. Эта группа преобразований называется аксиальной и обозначается $U_A(1)$. В механизме Печчеи-Квинн угол поворота не зависит от координат и времени, т.е. симметрия является глобальной. Как мы уже понимаем, нарушение глобальной $U_A(1)$ симметрии за счет квантовой аномалии означает, что дивергенция аксильного тока не равна нулю. В механизме Печчеи-Квинн эта дивергенция равна константе, которая компенсирует исходное значение $a_{II}$.

Интересно пойти еще дальше и спросить: Что произойдет, если параметр $a_{II}$ рассматривать как динамическое поле? Это означает, что в системе единиц Хевисайда вводят

$$a_{II} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^2}{32\pi^2}\frac{a(x)}{f_a},$$

так что слагаемому с кинетической энергией нужно сменить знак, чтобы давать положительный вклад в общую энергию. В гауссовой системе единиц [3] действие свободного поля запишется в виде

$$S_{\text{field}} = -\frac{1}{16\pi c}\int \mathrm{d}^4 x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

При обсуждении вкладов в действие свободного электромагнитного поля (5.1) мы ответили на 2 из 3 -х основных научных вопросов: «Что?» и «Как?». Осталось обратиться к 3 -ему вопросу: «Почему?». Почему Природа устроила так, что вклад псевдоскалярного инварианта в действие свободного электромагнитного поля тождественно равен нулю? Научный ответ на этот вопрос - механизм Печчеи-Квинн (Peccei-Quinn).

Прежде всего, параметр $a_{II}$ в (5.1) рассматривается как константа, так что вклад в лагранжиан такого же вида по замечанию Печчеи и Квинн может возникнуть динамически в квантовой теории поля за счет флуктуаций в вакууме. Но тогда наблюдаемая величина $a_{II}$ будет определяться как сумма исходного параметра и вклада от квантовых флуктуаций. Если считать, что эта сумма сохраняет более общую новую симметрию относительно непрерывных однопараметрических преобразований в виде поворотов, скажем, левого базиса 3 -мерного евклидова пространства относительно правого базиса, а не только относительно замены правого на левое и обратно, то суммарное значение параметра $a_{\mathrm{II}}$ должно обращаться в нуль. Эта группа преобразований называется аксиальной и обозначается $U_A(1)$. В механизме Печчеи-Квинн угол поворота не зависит от координат и времени, т.е. симметрия является глобальной. Как мы уже понимаем, нарушение глобальной $U_A(1)$ симметрии за счет квантовой аномалии означает, что дивергенция аксильного тока не равна нулю. В механизме Печчеи-Квинн эта дивергенция равна константе, которая компенсирует исходное значение $a_{II}$.

Интересно пойти еще дальше и спросить: Что произойдет, если параметр $a_{II}$ рассматривать как динамическое поле? Это означает, что в системе единиц Хевисайда вводят

$$a_{II} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^2}{32\pi^2}\frac{a(x)}{f_a},$$

Но отсюда из принципа наименьшего действия следует, что при вариации действия по полям с фиксированными значениями полей на границе $\partial V_4$ граничные члены не дадут вклад в уравнения движения!

# 2 Additional Theory

## 2.1 О деталях законов электродинамики

### 2.1.1 Где у нас классическая электродинамика, а где квантовая?

(идея про связь с КЭД рассказать)

(тут пара слов про дираковское поле, потому что с ним и работаем)

Требование локальной калибровочной инвариантности приводит к необходимости введения в теорию динамического безмассового векторного поля путем «удлинения производных», т. е. введения обобщенного импульса [1]

$$\hat{p}_\mu \mapsto \hat{P}_\mu = \hat{p}_\mu - \frac{e}{c}\mathcal{A}_\mu, \quad \hat{p}_\mu = \mathrm{i}\hbar\partial_\mu,$$

который дает взаимодействие заряженных полей с калибровочным полем. Такой вид взаимодействия называют минимальным, так как, наряду с такими взаимодействиями, калибровочная инвариантность не запрещает вводить дополнительные калибровочно инвариантные слагаемые в действие. Второй важнейший вывод - калибровочное поле $\mathcal{A}_\mu$ является динамическим безмассовым векторным полем, и, следовательно, у него есть собственный кинетический член, который определяется коммутатором ковариантных производных

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}F_{\mu\nu},$$

т. е. напряженностью поля, уже известным нам образом

$$S_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{4c}\int \mathrm{d}^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Действие для поля Дирака, взаимодействующего с калибровочным полем:

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left\{\bar{\psi}\left(\not{p} - \frac{e}{c}\not{\mathcal{A}} - mc\right)\psi\right\} + S_{\text{g.f.}} \ .$$

Член с взаимодействием представи́м в виде

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}, \not{\mathcal{A}}\psi = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{A}_\mu j^\mu,$$

где, конечно,

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

есть 4-вектор тока фермиона. Значит, взаимодействие построено по типу ток-источник. Для скалярного комплексного поля Клейна–Гордона-Фока

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left\{-\frac{1}{2c\hbar^2}\left(\left[p^\mu - \frac{e}{c}\mathcal{A}^\mu\right]\Phi\right)^\dagger\left[p_\mu - \frac{e}{c}\mathcal{A}_\mu\right]\Phi - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^\dagger\Phi\right\} + S_{\text{g.f.}} \ .$$

Отметим, что взаимодействие для скалярного поля содержит вклад, квадратичный по калибровочному полю. Этот вклад при наличии ненулевого вакуумного среднего поля из-за введения потенциала с минимумом, расположенным при ненулевом значении поля, как мы увидим, служит основой для эффекта Хиггса: вакуум-среда дает массовый член для калибровочного поля, т. е. калибровочное поле в такой среде может стать массивным даже без нарушения инвариантности действия относительно локальной группы внутренней симметрии.