

Семинар по паре математических методов

Yury Holubeu, December 31, 2023

Contents

1	Main Theory	2
1.1	Элементы векторного анализа	2
1.1.1	О символе Кронекера, Леви-Чивита	2
1.1.2	Примеры векторных операций	3
1.1.3	Симметризация и антисимметризация	4
1.1.4	Усреднение	4
2	Additional Theory	5
2.1	Физические примеры	5
2.1.1	Примеры усреднения в типичной электродинамике	6
2.1.2	Пример усреднения в гравитации	9

1 Main Theory

1.1 Элементы векторного анализа

Важно понимать, что невозможно даже 1/3 основных математических методов обсудить за 1 семинар, поэтому я выбрал лишь пару типичных тем, и предлагаю их обсудить вмеру подробно и с приложениями.

1.1.1 О символе Кронекера, Леви-Чивита

О символе Кронекера

Инвариантный симметричный тензор - символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ по определению в матричном виде есть просто тождественная единица:

$$\delta_{\alpha\beta} = \mathbb{I}_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следуют его важнейшие свойства

1. Умножение на себя:

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} = (\mathbb{I} \cdot \mathbb{I})_{\alpha\gamma} = \mathbb{I}_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

2. След:

$$\delta_{\alpha\alpha} = \text{tr } \mathbb{I} = 3.$$

3. Свертка индексов:

$$t_{\gamma\alpha}\delta_{\alpha\beta}u_{\beta\lambda} = (t \cdot \mathbb{I} \cdot u)_{\gamma\lambda} = t_{\gamma\alpha}u_{\alpha\lambda}.$$

О Леви-Чивита

$$[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\gamma$$

Действительно, если тройка $\{\alpha\beta\gamma\}$ правая, то $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$, если два индекса одинаковые, то тензор обращается в нуль, если же тройка левая, то получаем -1 , что и требовалось. Значит, для двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\gamma$$

т.е. в покомпонентной ой записи

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta.$$

Перечислим основные свойства псевдотензора $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$: 1. Произведение двух тензоров

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda}$$

должно образовывать тензор, который принимает значения $(-1, 0, 1)$, так как мы составили его только из нулей и единиц. Важнейшее свойство такого произведения его антисимметрия в каждой тройке индексов и симметрия по перестановкам индексов обеих троек целиком. Так, если первая тройка совпадает со второй, то, очевидно, получится единица, т.е.

$$\{\alpha\beta\gamma\} = \{\mu\nu\lambda\} \Rightarrow \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\rho} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda},$$

откуда, пользуясь указанными свойствами антисимметрии и симметрии, получим перестановками все ненулевые вклады:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda} &= \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu} \\ &\quad - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu} \end{aligned}$$

что компактно можно записать в виде детерминанта:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\lambda} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\lambda} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\lambda} \end{vmatrix}$$

образованного по правилу: в первой строке стоят символы Кронекера с первым индексом из первой тройки и последовательными индексами из второй тройки, а далее аналогично для второй и третьей строк, построенных со вторым и третьим индексами из первой тройки. 2. Свертку произведения по паре индексов

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\nu\lambda} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\delta_{\alpha\mu},$$

можно получить, и спользуя детерминант, откуда

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\nu\lambda} &= \delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\alpha} \\ &\quad - \delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\nu} \\ &= \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\nu} \end{aligned}$$

3. Свертка двух индексов легко вычисляется с использованием предыдущей формулы:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\lambda} = 2\delta_{\gamma\lambda}$$

4. Свертка по трем индексам:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3! = 6.$$

1.1.2 Примеры векторных операций

Вычислить $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$

Решение. Запишем покомпонентно векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \mathbf{h} = [\mathbf{c}, \mathbf{d}], \\ \mathbf{g}_i &= \epsilon_{ijk}a_jb_k, \quad \mathbf{h}_i = \epsilon_{imn}c_md_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} &= \epsilon_{ijk}a_jb_k\epsilon_{imn}c_md_n = < \text{свертка по 1 индексу } i > \\ &= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})a_jb_kc_md_n = (a_jc_j)(b_kd_k) - (a_jd_j)(b_kc_k) \end{aligned}$$

Т.е.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Вычислить $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [[\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]]$ Запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot [\mathbf{h}, \mathbf{f}] &= \epsilon_{ijk}a_jb_k \cdot \epsilon_{ilp} \cdot \epsilon_{lmn}b_mc_n \cdot \epsilon_{pqr}c_qa_r = \\ &< \text{свертка по } p > = (\delta_{iq}\delta_{lr} - \delta_{ir}\delta_{lq})\epsilon_{ijk}a_jb_k \cdot \epsilon_{lmn}b_mc_n \cdot c_qa_r \\ &= \epsilon_{ijk}a_jb_k \cdot \epsilon_{lmn}b_mc_n \cdot c_ia_l - \epsilon_{ijk}a_jb_k \cdot \epsilon_{lmn}b_mc_n \cdot c_la_i = \\ &= < \epsilon_{ijk}a_jb_kc_i = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}, \quad \epsilon_{lmn}b_mc_na_l = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} > = \\ &= < \epsilon_{ijk}a_jb_kc_i = [\mathbf{a}, \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b} = 0 > = \\ &= ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c})^2. \end{aligned}$$

В итоге,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot [[\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c})^2.$$

1.1.3 Симметризация и антисимметризация

Симметризация обозначается как

$$a_{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} a_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}$$

Например, две формулы ниже об одном и том же

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(-g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu, \lambda\kappa} + 2h_{(\mu, \nu)\lambda}^{\bar{\lambda}} - h_{, \mu\nu} \right),$$

Антисимметризация

$$t_{[\mu_1 \dots \mu_k] \nu_1 \dots} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma t_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_k} \nu_1 \dots}$$

Например, тензор Вейля:

$$C_{iklm} = R_{iklm} + \frac{1}{n-2} (R_{im}g_{kl} - R_{il}g_{km} + R_{kl}g_{im} - R_{km}g_{il}) + \frac{1}{(n-1)(n-2)} R (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})$$

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c}g_{d]b}$$

О свертки симметричного и антисимметричного тензора Легко показать, что

$$C = t_{ij} s_{ij} = \langle \text{перестановка индексов } i \leftrightarrow j \rangle = (-t_{ji}) s_{ji} = -C,$$

где последнее равенство получается, если переобозначить индексы свертки. Из равенства $C = -C$ следует $C = 0$:

$$t_{[ij]} s_{\{ij\}} = 0.$$

1.1.4 Усреднение

Задача 6. Вычислить средние значения произведений единичного вектора \mathbf{n} на сфере

$$\langle n_\alpha \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta \rangle \dots$$

Решение. Усреднение по сфере определяется выражением

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{4\pi} \int (\bullet) d\Omega.$$

Поскольку усреднение по единичной сфере - центрально симметричная операция, в результате ее действия на тензор с необходимостью должна получаться тензорная величина, симметричная относительно вращений. Так, при усреднении вектора должен получаться вектор же, вращения которого оставляют его инвариантным; существует только один инвариантный при вращениях вектор - нулевой. Поэтому согласно приведенным нами соображениям симметрии следует ожидать

$$\langle n_\alpha \rangle = 0.$$

В этом можно убедиться прямыми вычислениями, полагая в полярных координатах

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad n_3 = \cos \theta,$$

И

$$d\Omega = d \cos \theta d\phi,$$

так что для первых двух компонент интеграл по ϕ за полный период, очевидно, дает нуль, и, аналогично, интеграл по θ для 3-ей компоненты также равен нулю.

Для усреднения пары единичных векторов не будем проводить вычисления в явном виде, а воспользуемся приведенными выше соображениями симметрии. В самом деле, результат усреднения $\langle n_\alpha n_\beta \rangle$ должен быть симметричным, инвариантным относительно вращений тензором второго ранга, так что единственная возможность - это

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = A \delta_{\alpha\beta},$$

где A - константа, которую можно определить, домножая обе стороны равенства на $\delta_{\alpha\beta}$ и суммируя по повторяющимся индексам, т.е. просто сворачивая равенство по α и β :

$$\langle n_\alpha n_\alpha \rangle = A \delta_{\alpha\alpha} = 3A.$$

Однако

$$\langle n_\alpha n_\alpha \rangle = \langle \mathbf{n}^2 \rangle = \langle 1 \rangle = 1,$$

откуда

$$3A = 1,$$

и окончательно

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}$$

Далее, очевидно, что, имея только один инвариантный относительно вращений тензор $\delta_{\alpha\beta}$ для построения результатов усреднения, мы можем построить из него только тензоры с четным количеством индексов. Поэтому усреднение нечетного числа единичных векторов по сфере тождественно равно нулю:

$$\underbrace{\langle n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_k} \rangle}_{k \text{ нечетное}} \equiv 0.$$

Для усреднения четырех векторов вычислим коэффициент в равенстве, построенном по принципу симметризации индексов в тензоре $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda}$:

$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\lambda \rangle = B (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\gamma}).$$

Сворачивая по α и β , найдем

$$\langle n_\alpha n_\alpha n_\gamma n_\lambda \rangle = B (\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\gamma\lambda} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\alpha\lambda} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\gamma\alpha}) = (3 + 1 + 1)B\delta_{\gamma\lambda},$$

т.е. с учетом $n_\alpha n_\alpha = \mathbf{n}^2 = 1$

$$\langle n_\gamma n_\lambda \rangle = 5B\delta_{\gamma\lambda}.$$

Используя известный уже результат для усреднения пары единичных векторов, находим $5B = 1/3$ и

$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\lambda \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\gamma})$$

2 Additional Theory

2.1 Физические примеры

(все это перепишу, уберу лишнюю математику)

2.1.1 Примеры усреднения в типичной электродинамике

Пример усреднения в квадрупольном излучении в теории поля

Введение в электродинамику Решения уравнений Максвелла для задач излучения имеют вид

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t_r)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|},$$

где t_r - время, которое отличается от момента регистрации сигнала на интервал запаздывания, необходимый для того, чтобы электромагнитная волна достигла точки наблюдения (время распространения): $t_r = t - \frac{1}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_r)|$. Для системы частиц

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t_r) = \sum_q e_q \mathbf{v}_q(t_r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_r))$$

так что после снятия интегрирования за счет дельта-функции вектор-потенциал равен 3

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{c} \sum_q e_q \mathbf{v}_q(t_r) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_r)|}$$

Это значение можно искать приближенно. Посмотрим на один член приближения 2-го порядка для иллюстрации приемов усреднения.

После разложения, во втором порядке малости один из членов имеет вид

$$\mathcal{A}_\alpha^\Delta = \frac{d}{dt} \frac{1}{c} \sum_q e_q \frac{1}{2R^3} (r_\alpha r_\beta) R_\beta$$

Скалярный потенциал найдется из калибровки, так что, опуская преобразования, напомним ответ:

$$\mathcal{A}_{(D)}^\alpha = \frac{1}{6c^2 R} \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\beta,$$

где $D_{\alpha\beta} = \sum_q e_q (3r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$.

Магнитное поле от вклада квадрупольного члена равно

$$\mathcal{H}_{\text{кв.}}^\alpha \stackrel{\text{в.з.}}{\approx} -\frac{1}{6c^3 R} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{D}_{\gamma\nu} n_\nu.$$

Для расчета интенсивности квадрупольного излучения $\mathcal{I}_{(D)} = \frac{c}{4\pi} \langle \mathcal{H}_{\text{кв.}}^2 \rangle 4\pi R^2$ необходимо провести усреднение по углам величины

$$\mathfrak{D} = \left\langle \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{D}_{\gamma\nu} n_\nu \epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} n_{\beta'} \ddot{D}_{\gamma'\nu'} n_{\nu'} \right\rangle,$$

где \mathbf{n} - единичный вектор, D_{ij} - симметричный тензор. Для усреднения на сфере пользуемся $\langle n_\beta n_\nu n_{\beta'} n_{\nu'} \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{\beta\beta'} \delta_{\nu\nu'} + \delta_{\beta\nu'} \delta_{\nu\beta'} + \delta_{\beta\nu} \delta_{\beta'\nu'})$, получим:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{15} \left(2 \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu} + \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma'\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\nu\gamma'} + \ddot{D}_{\gamma\beta} \ddot{D}_{\gamma'\beta'} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} \right).$$

Тут последний член обращается в нуль как произведение симметричного $D_{\gamma\beta}$ на антисимметричный $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Во втором члене подстановка $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\nu\gamma'} = \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\nu\gamma}$ приводит к

$$\ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma'\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\nu\gamma'} = \ddot{D}_{\gamma\beta} \ddot{D}_{\gamma\beta} - \ddot{D}_{\gamma\gamma} D_{\beta\beta},$$

и тут так как тензор квадрупольного момента является бесследовым, $\ddot{D}_{\beta\beta} = 0$, получаем ответ

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{5} \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu} = \frac{1}{5} (\ddot{\mathbf{D}} \cdot \ddot{\mathbf{D}})$$

Интенсивность квадрупольного излучения

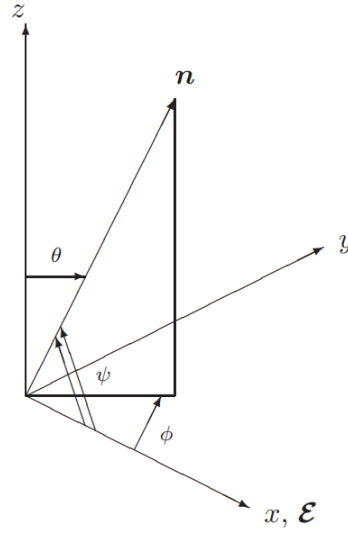
$$\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{c}{4\pi} \langle \mathcal{H}^2 \rangle 4\pi R^2 = \frac{1}{36c^5} \mathfrak{D} = \frac{1}{36c^5} \frac{1}{5} \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu}$$

Пример усреднения в рассеяния электромагнитных волн

Падает волна:



Случай линейной поляризации Сечение рассеяния:

$$d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\langle S_0 \rangle} d\mathfrak{I},$$

где $d\mathfrak{I}_{(d)} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \theta d\Omega$ и $|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathcal{E}|^2$.

Вообще, $\mathfrak{I}_{(d)} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2$.

Пусть линейно поляризованная волна падает на диполь. Рассмотрим уравнение движения свободного покоящегося заряда под воздействием поля электромагнитной волны

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0$$

Решаем это уравнение, получаем

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = e \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Находим электрическое поле в волновой зоне

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{H}| = \frac{1}{c^2 r} |\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}| = \frac{1}{c^2 r} |\ddot{\mathbf{d}}| \sin \psi,$$

В случае линейной поляризации

$$\sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi$$

и

$$\cos \psi = \sin \theta \cos \phi,$$

Отсюда получаем интенсивность излучения

$$d^2\mathfrak{I}(\omega) = \frac{c}{4\pi} \frac{e^4}{m^2 c^4} \mathcal{E}_0^2(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \psi d \cos \theta d\phi$$

И полное сечение в итоге равно

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Для свободных частиц, получаем сечение Томсона

$$\sigma_{\text{free}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

Случай произвольной поляризации света В случае произвольной поляризации света угловое распределение задается угловой зависимостью величины

$$\mathcal{H}^2 \sim (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})^2 \sim (\mathbf{n} \times \mathcal{E}_0)^2 \sim (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2,$$

где, напомним, вектор поперечной поляризации связан с вектором электрического поля:

$$\mathcal{E} \sim \boldsymbol{\epsilon}_\perp.$$

Для простоты сравнения со случаем линейной поляризации будем считать вектор поляризации единичным. Рассмотрим естественно поляризованный свет.

Запишем

$$|\vec{n} \times \vec{\epsilon}_\lambda|^2 = \vec{n}^2 \vec{\epsilon}_\lambda^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda)^2 = 1 - (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda) (\vec{n} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^*) = 1 - n_\alpha n_\beta \cdot \Pi^{\alpha\beta},$$

где тензор поляризации естественного света равен

$$\Pi^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \epsilon_\perp^\alpha \epsilon_\perp^{*\beta} \right\rangle$$

Случай естественного света Выбирая ось z вдоль волнового вектора падающей волны \mathbf{k}_0 , перечислим свойства вектора поляризации для естественного света имеем свойства:

1. единичная нормировка:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2, \quad |a_x|^2 + |a_y|^2 = 1,$$

2. поперечность:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp \cdot \mathbf{k}_0 = 0,$$

3. равновероятность обеих поперечных поляризаций:

$$\langle |a_x|^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle |a_y|^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle a_x a_y \rangle = 0.$$

Эти свойства позволяют нам вычислить тензор поляризации естественного света

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\lambda^\alpha \epsilon_\lambda^{*\beta} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_1^\alpha \mathbf{e}_1^\beta + \mathbf{e}_2^\alpha \mathbf{e}_2^\beta \right).$$

У него есть свойства

$$\Pi^{\alpha\alpha} \equiv \frac{1}{2} (e_x^2 + e_y^2) = 1$$

$$\Pi^{\alpha\beta} \cdot k_0^\alpha = 0$$

т.к. $e_x k_0 = 0$.

Усреднение на окружности Можно тензор поляризации записать иначе. У нас есть всегда свойства

$$\Pi^{\alpha\alpha} = 1 \quad \Pi^{\alpha\beta} \frac{k_0^\alpha}{k_0} = 0.$$

обозначим $\frac{\vec{k}_0}{k_0} = \vec{e}_k$.

То есть по сути у нас написано усреднение вектора $\Pi^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \epsilon_\perp^\alpha \epsilon_\perp^{*\beta} \rangle$ по окружности, перпендикулярной вектору \vec{e}_k .

Чтобы усреднить по окружности, ищем инварианты с двумя индексами при вращении вокруг нее. Это:

$$\delta_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta},$$

так как \vec{e} сам инвариантен относительно вращения вокруг оси окружности.

Тогда в общем случае

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = A \delta_{\alpha\beta} + B e_\alpha e_\beta$$

Применим условия нормируемости и поперечности:

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}^2 \rangle &= 1 = A \cdot 3 + B \vec{e}^2 = 3A + B = 1 \\ e_\alpha \langle n_\alpha n_\beta \rangle &= \langle e_\alpha n_\alpha n_\beta \rangle = 0. \end{aligned}$$

и с другой стороны

$$e_\alpha A \delta_{\alpha\beta} + e_\alpha B e_\alpha e_\beta = A e_\beta + B \vec{e}^2 \cdot e_\beta = (A + B) e_\beta \equiv 0$$

Отсюда находим, что на окружности

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta)$$

Получили общий вид усреднения по поляризациям

$$\langle \Pi^{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta)$$

так что

$$\langle (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})^2) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta),$$

где мы ввели угол θ между волновыми векторами падающей и рассеянной волн.

2.1.2 Пример усреднения в гравитации

Помните законы гравитации?

(если нет - то повторяем те же уравнения, которые просто написали на лекции.)

Пример излучения в гравитации

Квадрупольный момент определен так, чтобы его след был равен нулю: $\sum_{i=1}^3 D_{ii} = 0$. Имеем

$$h_+(t, R\partial_1) = -\frac{G}{3R} \left(\ddot{D}_{22}(t-R) - \ddot{D}_{33}(t-R) \right), \quad h_\times(t, R\partial_1) = -\frac{2G}{3R} \ddot{D}_{23}(t-R).$$

Теперь найдем плотность потока энергии в волне. Компонента t^{01} псевдотензора энергии-импульса в нашем случае равна

$$t^{01}(t+R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2} \left(\left(\frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right)$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить поток энергии $dI(t, \mathbf{n})$ в элемент телесного угла $d = \sin \theta d\theta d\varphi$ и, в конечном счете, потери энергии $-d\mathcal{E}/dt$ системой. Для элемента телесного угла в направлении x^1 имеем

$$dI(t, \partial_1) = t^{01}(t + R, R\partial_1) R^2 do = \frac{G}{36\pi} \left(\left(\frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right) do$$

Мы специально «откатали» поток dI на R назад во времени, поскольку он должен характеризовать потери энергии системы именно в момент времени t , когда сигнал излучается, и не зависеть от точки наблюдения.

Обратим внимание, что формула $dI(t, \partial_1)$ имеет вид суммы по двум поляризациям гравитационной волны. Перепишем ее в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 \left(\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)} \right)^2 do,$$

где два трехмерных тензора поляризации имеют вид

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям бесследовости, симметричности, поперечности и ортонормированности

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \quad e_{ij}^{(s)} = e_{ji}^{(s)}, \quad e_{ij}^{(s)} n_j = 0, \quad e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(s')} = \delta^{ss'}.$$

Нетрудно показать, что формула $dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 \left(\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)} \right)^2 do$ верна для любой пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Теперь мы можем повернуть систему координат любым способом и написать

$$dI(t, \mathbf{n}) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 \left(\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)} \right)^2 do = \frac{G}{72\pi} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} E_{ijkl}(\mathbf{n}) do, \quad E_{ijkl}(\mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 e_{ij}^{(s)} e_{kl}^{(s)}$$

для произвольного \mathbf{n} . Нам осталось найти явно тензор $E_{ijkl}(\mathbf{n})$. Для этого воспользуемся его свойствами:

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl} n_i = 0, \\ E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2},$$

которые немедленно следуют из свойств и явного вида $e_{ii}^{(s)}$. Используя второе свойство, запишем E_{ijkl} в виде

$$E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) \\ + E_3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) + E_4 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Коэффициенты E_1, \dots, E_5 находим из остальных условий:

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}.$$

Подставляя E_{ijkl} , получаем

$$dI(\mathbf{n}) = \frac{G}{36\pi} \left(\frac{1}{4} (\ddot{D}_{ij} n_i n_j)^2 + \frac{1}{2} \ddot{D}_{ij}^2 - \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ik} n_j n_k \right) d\omega$$

Интегрируя по углам, находим полную скорость потери энергии системой

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45} \ddot{D}_{ij}^2$$

Для звездных систем эта потеря энергии очень мала, и может быть измерена только для очень тесных систем. Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором в системе, состоящей из двух нейтронных звезд, было первым подтверждением существования гравитационных волн. В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии за это открытие и проверку других общерелятивистских эффектов на данной системе.