Семинар по основным свойствам скалярного поля

Yury Holubeu, December 31, 2023

Данный семинар предполагается дольше, чем обычный, потому что тем много, и пусть они начальные, тем не менее, для понимания всех их нужно больше обычного времени.

Contents

1 Main Theory

1.1 Подробнее о скалярном поле

1.1.1 Повторение формализма и основных формул скалярного поля

(напишу еще раз коротко формулы)

1.1.2 Скалярный электрон в атоме

Модель

Исторически Шрёдингер при формулировке волновой квантовой механики решил задачу о релятивистском атоме водорода для случая скалярного поля. Фиксируем калибровку электростатического поля условием

$$\mathcal{A} \equiv 0,$$

так что

$$\mathcal{A}_0(r) = -\frac{e}{r}$$

есть кулоновский потенциал притяжения для заряда e. Тогда уравнение Клейна-Гордона-Фока для стационарных связанных уровней примет вид

$$\left\{ \left(p_0 + \frac{e^2}{cr} \right)^2 - \boldsymbol{p}^2 - (mc)^2 \right\} \Phi(x) = 0,$$

где $p_0 = E/c$ выражается через искомую энергию E,

$$\Phi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}Et} \Psi(\boldsymbol{r}),$$

а $\boldsymbol{p}$ - оператор импульса. Тогда основное уравнение сводится к виду

$$\left\{ \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{E}{mc^2}\frac{e^2}{r} - \frac{e^4}{c^2}\frac{1}{2mr^2} \right\} \Psi(\boldsymbol{r}) = \frac{E^2 - \left(mc^2\right)^2}{2mc^2} \Psi(\boldsymbol{r}).$$

Это - уравнение со сферической симметрией, так что его решения можно искать в виде

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u(r)}{r} \dagger_{l,m}(\theta, \varphi),$$

где $y_{l,m}$ - сферические гармоники. Радиальное уравнение для функции $u(r)$ принимает вид

$$\left\{ \frac{p_r^2}{2m} - \frac{E}{mc^2}\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(l(l+1) - \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} \right) \right\} u(r) = \frac{E^2 - \left(mc^2\right)^2}{2mc^2} u(r), \quad \hat{p}_r^2 u(r) = -\hbar^2 u_{rr}''(r),$$

или после введения постоянной тонкой структуры и «энергии связи» ϵ :

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha_{\mathrm{em}}, \quad \epsilon = \frac{E^2 - \left(mc^2\right)^2}{2mc^2}$$

находим

$$\left\{ \frac{p_r^2}{2m} - \frac{E}{mc^2}\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[l(l+1) - \alpha_{\mathrm{em}}^2 \right] \right\} u(r) = \epsilon u(r).$$

Таким образом, мы свели задачу к решению того же уравнения, что и в теории нерелятивистского атома водорода, с точностью до нормировки заряда кулоновского притяжения

$$e^2 \mapsto \tilde{e}^2 = \frac{E}{mc^2} e^2, \quad \alpha_{\text{em}} \mapsto \tilde{\alpha}_{\text{em}} = \alpha_{\text{em}} \cdot \frac{E}{mc^2}$$

и переопределения орбитального квантового числа

$$l(l+1) \mapsto \tilde{l}(\tilde{l}+1) = l(l+1) - \alpha_{\text{em}}^2,$$

так что

$$\left\{ \frac{p_r^2}{2m} - \frac{\tilde{e}^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \tilde{l}(\tilde{l}+1) \right\} u(r) = \epsilon u(r),$$

где значение «смещенного орбитального момента» [18] имеет вид

$$\tilde{l} = l - \tilde{\delta}_l,$$

и уравнение для $\tilde{\delta}_l$

$$\tilde{\delta}_l^2 - \tilde{\delta}_l (2l+1) + \alpha_{\text{em}}^2 = 0$$

имеет решение, отвечающее положительным значениям $\tilde{l}$, что необходимо для регулярности функции $u(r)$ в нуле:

$$\tilde{\delta}_l = l + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha_{\text{em}}^2}.$$

Нормируемые решения уравнения отвечают уровням, которые находятся в полной аналогии с уровнями в нерелятивистской задаче после подстановок в (I.7.3)-(I.7.5),

$$\epsilon_n = -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^2 \quad \mapsto \quad \epsilon_\nu = -\frac{mc^2}{2\nu^2} \tilde{\alpha}_{\text{em}}^2 = -\frac{mc^2}{2\nu^2} \frac{E^2}{m^2c^4} \alpha_{\text{em}}^2 = -\frac{\alpha_{\text{em}}^2}{2\nu^2} \frac{E^2}{mc^2},$$

где

$$n = 1 + l + n_r \mapsto \nu = 1 + \tilde{l} + n_r, \quad n_r \in \{0, \mathbb{N}\}.$$

Подставляя определение ϵ через энергию

$$-\frac{\alpha_{\text{em}}^2}{2\nu^2} \frac{E^2}{mc^2} = \frac{E^2 - (mc^2)^2}{2mc^2} \Rightarrow -\frac{\alpha_{\text{em}}^2}{\nu^2} E^2 = E^2 - \left(mc^2\right)^2,$$

легко находим «точную формулу» для энергии связанного состояния

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{em}^2}{\nu^2}}},$$

или энергию связи

$$\mathcal{E}_\nu = E - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{em}^2}{\nu^2}}} - mc^2$$

Во втором приближении по малому параметру α_{em}^2 разложение в ряд Тейлора дает

$$\mathcal{E}_\nu \approx -\frac{mc^2}{2\nu^2} \alpha_{\text{em}}^2 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{\nu^2}\right)$$

где еще необходимо провести разложение

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\left(n - \tilde{\delta}_l\right)^2} \approx \frac{1}{n^2} \left(1 + 2\frac{\tilde{\delta}_l}{n}\right),$$

где

$$\tilde{\delta}_l = \frac{1}{2}(2l+1)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha_{\text{em}}^2}{(2l+1)^2}}\right) \approx \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{2l+1}.$$

В итоге

$$\mathcal{E}_{n,l} \approx -\frac{mc^2}{2n^2}\alpha_{\text{em}}^2 \left\{1 + \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{n^2}\left(\frac{2n}{2l+1} - \frac{3}{4}\right)\right\}.$$

Как видим, релятивистская поправка снимает вырождение по орбитальному моменту l между уровнями с заданным значением главного квантового числа n. Однако эксперимент однозначно опровергает такое значение расщепления, например, для уровней $2s$ и $2p$. Поэтому Шрёдингеру пришлось ограничиться ведущим нерелятивистским приближением в задаче для атома водорода. Причина расхождения кроется, конечно, в наличии спина у электрона.

А если бы электрон имел спин?

(коротко пара слов и формул про дираковское поле в центральном потенциале)

1.1.3 О парадоксе Клейна

Рассмотрим стационарную задачу рассеяния для релятивистского скалярного поля Клейна-ГордонаФока в двумерном пространстве-времени $\{t, x\}$ на потенциальном барьере

$$V(x) = V_0\vartheta(x), \quad V_0 > 0,$$

при условии, что в области $x < 0$, где движение является свободным, энергия $p_0 > m$ имеет значения ниже порога

$$p_0 < V_0.$$

При $x < 0$ стационарное поле

$$\Phi(t, x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0 t}\Psi(x)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(p_0^2 - (\mathrm{i}\partial_x)^2 - m^2\right)\Psi(x) = 0,$$

где в задаче рассеяния $\Psi(x)$ - это суперпозиция падающей на потенциальный барьер волны и отраженной от барьера волны, так что

$$\Psi_+(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + R\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}.$$

При $x > 0$ в силу стационарности рассеянная волна имеет ту же энергию и задается выражением

$$\Psi_-(x) = S\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_- x},$$

где уже из уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$p_-^2 = (p_0 - V_0)^2 - m^2.$$

Здесь квадрат импульса p_-^2 всегда вещественный, но может иметь как отрицательный, так и положительный знак!

Непрерывность поля и его производной в точке $x = 0$, где у потенциала имеет место скачок, приводит к уравнениям

$$\Psi_+(0) = \Psi_-(0), \quad \Psi'_+(0) = \Psi'_-(0) \quad \Rightarrow \quad 1 + R = S, \quad (1 - R)\cdot p = S\cdot p_-,$$

откуда находим, что амплитуды отраженной и прошедшей волн равны

$$R=\frac{p-p_-}{p+p_-},\quad S=\frac{2p}{p+p_-}.$$

Если $(p_0-V_0)^2<m^2$, то квадратично нормируемое при $x>0$ поле имеет

$$p_-=\mathrm{i}\kappa_-,\quad \kappa_-=\sqrt{m^2-(p_0-V_0)^2},$$

а амплитуды для отраженной и прошедшей волн принимают вид

$$R=\frac{p-\mathrm{i}\kappa_-}{p+\mathrm{i}\kappa_-},\quad S=\frac{2p}{p+\mathrm{i}\kappa_-}.$$

Токи поля с единичным зарядом

$$j^x=\Psi^*\left(-\mathrm{i}\partial_x\Psi\right)+\left(-\mathrm{i}\partial_x\Psi\right)^*\Psi$$

для падающей, отраженной и прошедших волн равны

$$j_{\text{in}}=2p,\quad j_{\text{r}}=-2p,\quad j_{\text{out}}=\frac{4p^2}{p^2+\kappa_-^2}\left(p_-+p_-^*\right)=0,$$

так что имеет место полное отражение от потенциального барьера, а ток сохраняется. Если $(p_0-V_0)^2>m^2$, то при $x>0$ поле прошедшей волны имеет импульс

$$p_-=\sqrt{(p_0-V_0)^2-m^2}=\sqrt{p^2+V_0\left(V_0-2p_0\right)}>0,$$

а амплитуды в (I.8.3) задают токи для падающей, отраженной и прошедших волн

$$j_{\text{in}}=2p,\quad j_{\text{r}}=-2p|R|^2=-2p(1-S)^2,\quad j_{\text{out}}=2p_-S^2.$$

При $x<0$

$$j_{\text{in}}+j_{\text{r}}=2pS(2-S)=2p_-S^2.$$

Как видим, для сохранения тока необходимо учитывать при $x<0$ интерференцию падающей волны с отраженной. Тогда

$$j_{\text{in}}+j_{\text{r}}=j_{\text{out}}.$$

Парадокальность ситуации при условии, что барьер превышает пороговую величину, которая задается массой покоя,

$$V_0>2m,$$

видели в том, что вместо затухающей вглубь потенциального барьера волны возникает поток прошедшей барьер волны, что противоречит интуитивному предположению о том, что потенциальный барьер запирает частицу в области, свободной от потенциала. При этом глубина проникновения поля в подбарьерную область, если $(p_0-V_0)^2\ll m^2$, определяется комптоновской длиной, т.е. обратной массой поля. Однако при росте высоты барьера происходит генерация потока поля в запрещенную для нерелятивистских частиц область под барьером. Эта ситуация возможна, если считать, что в статическом случае под воздействием сил на границе потенциала происходит образование виртуальных пар частицаантичасти при $V_0>2m$ так, что частица движется в области рассеяния, а античастица интерферирует с отраженным потоком так, что суммарный ток сохраняется, а реальных античастиц не возникает. Таким образом, никакого парадокса [20] нет, если отойти от интерпретации поля как волновой функции релятивистской частицы, а рассматривать поле как физическую наблюдаемую, описывающую рождение и уничтожение квантов поля, т.е. перейти от физической системы с одной частицей к физической системе с переменным числом частиц при условии сохранения электрического заряда.

1.1.4 Скалярное поле через пропагаторы и интеграл по траекториям

Функциональный формализм

Функциональный интеграл в общем случае невозможно вычислить за исключением случая, когда

$$\mathcal{L}(\varphi)=\frac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2-m^2\varphi^2\right].$$

Соответствующая теория называется свободной или гауссовой теорией. Уравнение движения (9), имеющее вид $\left(\partial^2+m^2\right)\varphi=0$, известно как уравнение Клейна-Гордона [2]. Так как оно линейно, его можно немедленно решить, в результате чего получить $\varphi(\vec{x},t)=e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$с

$$\omega^2=\vec{k}^2+m^2.$$

В используемых нами естественных единицах $\hbar=1$, и поэтому частота ω есть то же самое, что энергия $\hbar\omega$, а волновой вектор $\vec{k}$ - то же самое, что импульс $\hbar\vec{k}$. Таким образом, мы узнаем в (13) соотношение энергии-импульса для частицы с массой m, а именно усовершенствованный вариант простейшей формулы $E=mc^2$. Можно предположить, что эта теория поля описывает релятивистскую частицу с массой m. Теперь вычислим (11) для обозначенного частного случая:

$$Z=\int D\varphi e^{i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2-m^2\varphi^2\right]+J\varphi\right\}}.$$

Интегрируя по частям в $\int d^4x$ и не заботясь о возможных вкладах граничных членов в бесконечности (мы неявно предполагаем, что поля, по которым мы интегрируем, убывают достаточно быстро), запишем

$$Z=\int D\varphi e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi^2+J\varphi\right]}$$

С подобными функциональными интегралами вам неоднократно придется сталкиваться в процессе изучения теории поля. Трюк состоит в воображаемом переходе к дискретному пространству-времени. Делать вам на самом деле ничего такого не нужно: просто вообразите себе, что вы его квантуете. Опишу в общих чертах, как это работает. Заменим функцию $\varphi(x)$ вектором $\varphi_i=\varphi(ia)$ с целым числом i и периодом решетки a. (Для просты я пишу все так, как если бы мы находились в 1-мерном пространстве-времени. В более общем случае индексом i нумеруются каким-либо способом узлы решетки.) При этом дифференциальные операторы превращаются в матрицы. Например, $\partial\varphi(ia)\to(1/a)\left(\varphi_{i+1}-\varphi_i\right)\equiv\sum_j M_{ij}\varphi_j$ с соответствующей матрицей M. Интегралы становятся суммами. К примеру, $\int d^4xJ(x)\varphi(x)\to a^4\sum_i J_i\varphi_i$.

Вот теперь интеграл (15), подумать только!, есть просто интеграл, который мы вычислили в (I.2.15):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}dq_1dq_2\ldots dq_Ne^{(i/2)q\cdot A\cdot q+iJ\cdot q}=\left(\frac{(2\pi i)^N}{\det A}\right)^{1/2}e^{-(i/2)J\cdot A^{-1}\cdot J}.$$

Роль A из (16) играет в (15) дифференциальный оператор $-\left(\partial^2++m^2\right)$. Определяющее уравнение для обратной матрицы $A\cdot A^{-1}$ или $A_{ij}A_{jk}^{-1}=\delta_{ik}$ в непрерывном пределе сводится к виду

$$-\left(\partial^2+m^2\right)D(x-y)=\delta^{(4)}(x-y).$$

Мы обозначаем непрерывный предел от $A_{jk}^{-1}D(x-y)$ (который, как мы знаем, должен быть функцией от $x-y$, но не x и y по отдельности, поскольку ни одна точка пространства-времени не является особой). Обратите внимание, что при переходе от решетки к континууму

Кронекер заменяется Дираком. Очень полезно уметь мысленно осуществлять переходы между решеткой и континуумом. Итак, приходим к окончательному результату

$$Z(J)=\mathcal{C}e^{-(i/2)\iint d^4xd^4yJ(x)D(x-y)J(y)}\equiv\mathcal{C}e^{iW(J)},$$

в котором $D(x)$ определяется решением уравнения (17). Общий множитель $\mathcal{C}$, соответствующий общему множителю с детерминантом в (16), не зависит от J и, как станет ясно из дальнейших обсуждений, зачастую не представляет особого интереса. Как правило, я буду опускать множитель $\mathcal{C}$. Очевидно, что $\mathcal{C}=Z(J=0)$, поэтому $W(J)$ определяется как

$$Z(J)\equiv Z(J=0)e^{iW(J)}.$$

Заметьте, что

$$W(J)=-\frac{1}{2}\iint d^4xd^4yJ(x)D(x-y)J(y)$$

является простым квадратичным функционалом от J. В отличие от него, $Z(J)$ зависит от произвольно высокой степени J.

Пропагатор

Функция $D(x)$, известная как пропагатор, играет важную роль в квантовой теории поля. Будучи обратной дифференциальному оператору, она тесно связана с функцией Грина, знакомой вам из курса электромагнетизма.

Физики не очень обращают внимание на математическую строгость, но и им время от времени следует быть осторожными, чтобы удостовериться, что их действия на самом деле имеют смысл. Для того чтобы интеграл (15) сходился для больших φ, заменим $m^2\to m^2-i\varepsilon$ так, чтобы подынтегральное выражение содержало множитель $e^{-\varepsilon\int d^4x\varphi^2}$, где ε - положительная бесконечно малая величина [3], которую мы позднее устремим к нулю.

Можно легко решить (17), если перейти в импульсное пространство и вспомнить представление дельта-функции Дирака.

$$\delta^{(4)}(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)}.$$

Решением будет

$$D(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\varepsilon},$$

что легко проверить, подставив его в (17). Заметьте, что так называемая $i\varepsilon$-прескрипция, которую мы только что сделали, является существенной; в противном случае k-интеграл будет содержать полюс.

$$D(x)=-i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left[e^{-i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\theta\left(x^0\right)+e^{i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\theta\left(-x^0\right)\right]$$

2 Additional Theory

(!!!!!! все это буду сокращать, удаляя дополнительное и может быть математическое!!!)

2.0.1 Об энергии вакуума и эффекте Казимира

Энергия вакуума

В качестве содержательного упражнения вычислим для теории свободного скалярного поля среднее

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\int d^D x \left\langle 0 \left| \pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right| 0 \right\rangle,$$

которое мы условно назовем «энергией вакуума». Все, что нам нужно, это объединить вместе (7), (11) и (12). Сфокусируемся на третьем члене в $\langle 0|H|0\rangle$, который мы уже фактически вычислили, так как

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t)|0\rangle = \langle 0|\varphi(\overrightarrow{0},0),\varphi(\overrightarrow{0},0)|0\rangle = \lim_{\vec{x},t\to\overrightarrow{0},0}\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)|0\rangle = \\ = \lim_{\vec{x},t\to\overrightarrow{0},0}\int \tfrac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega_k} e^{-i\left(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} = \int \tfrac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega_k}.$$

Первое равенство следует из трансляционной инвариантности, которая означает, что мы можем заменить $\int d^D x$ в $\langle 0|H|0\rangle$ на объем пространства V. Вычисление двух других членов производится во многом аналогично: например, два множителя $\vec{\nabla}$ в $(\vec{\nabla}\varphi)^2$ просто дают множитель $\vec{k}^2$. Таким образом

$$\langle 0|H|0\rangle = V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega_k}\left[\frac{1}{2}\left(\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2\right)\right] = V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{1}{2}\hbar\omega_k,$$

где мы восстановили $\hbar$.

Полученный результат должен вызвать у вас чувство удовлетворения и тревоги одновременно: удовлетворения потому, что мы узнаем в нем энергию нулевых колебаний гармонического осциллятора, проинтегрированную по всем импульсным модам, а тревоги из-за того, что интеграл по $\vec{k}$ явно расходится. Нам, однако, не следует тревожиться: энергия любой физической конфигурации, например масса частицы, должна измеряться относительно «энергии вакуума». Нас интересует разница между энергией мира с частицей и энергией мира без частицы. Другими словами, мы могли бы просто определить правильный гамильтониан как $H - \langle 0|H|0\rangle$.

Об эффекте Казимира

(тут очень хорошо можно было бы написать про устранение расходимостей, но пока нет на это времени, так что следуем Зи. Потом если дойду - перепишу!)

А что случится, если мы возмутим вакуум? Разумеется, не только скалярное поле вносит вклад в энергию вакуума. Электромагнитное поле, например, также испытывает квантовые флуктуации и добавляет к плотности энергии вакуума ε что-то типа $2\int\left[d^3k/(2\pi)^3\right]\frac{1}{2}\hbar\omega_k$. В 1948 году Казимир сделал блестящее предположение, что вызванное нами возмущение вакуума может привести к сдвигу $\Delta\varepsilon$. Хотя ε является экспериментально ненаблюдаемой величиной, сдвиг $\Delta\varepsilon$ должен поддаваться измерению, поскольку мы можем контролировать процесс возмущения нами вакуума. В частности, Казимир рассматривал ситуацию со внесением в вакуум двух параллельных «идеально» проводящих пластин (которые формально имеют бесконечную протяженность и нулевую толщину). Изменение $\Delta\varepsilon$ в зависимости от расстояния d между пластинами приводило к возникновению силы между ними, известной как сила Казимира.

Назовем направление, перпендикулярное пластинам, осью x. В силу граничных условий, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на пластинах, волновой вектор может принимать лишь значения $(\pi n/d, k_y, k_z)$ с целым n. Таким образом, энергия между пластинами в расчете на единицу площади изменяется на величину

$$\frac{1}{2}\sum_{n}\int\frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2}\sqrt{\left(\frac{\pi n}{d}\right)^2+k_y^2+k_z^2}.$$

Для вычисления силы мы изменяем d, но при этом должны учитывать, как изменяется плотность энергии снаружи двух пластин. Существует, однако, хитрый прием, позволяющий этого избежать: надо вставить третью пластину, как показано на рис. I.8.1! Расстояние L между двумя внешними пластинами можно выбрать произвольно большим.

В соответствии с общей атмосферой книги (и моей философией), я стараюсь избегать, насколько это возможно, утомительных вычислений, поэтому предлагаю ввести два упрощения: (1) провести вычисления для безмассового скалярного, а не электромагнитного поля, чтобы не беспокоиться о поляризации и тому подобном, и (2) перейти в $(1+1)$-мерное пространство-время, чтобы не интегрировать по k_y и k_z. Как вы увидите, вычисления окажутся очень поучительными, они позволят ощутить прелесть выделения конечных физических результатов из явно расходящихся выражений. Это называется перенормировкой, мы рассмотрим ее в главах III.1-3.

При такой формальной постановке энергия равна $E=f(d)+f(L-d)$, где

$$f(d)=\frac{\pi}{2d}\sum_{n=1}^{\infty}n$$

поскольку моды задаются выражением $\sin(n\pi x/d)(n=1,\ldots,\infty)$, а соответствующая энергия равна $\omega_n=n\pi/d$.

Ой! А что нам делать с $\sum_{n=1}^{\infty}n$? Никто из древних греков, начиная с Зенона, нам не подскажет.

Им следовало бы нам ответить, что мы решаем физическую, а не математическую задачу. Физические пластины не могут препятствовать прохождению волн произвольно большой частоты. Чтобы учесть это крайне важное физическое свойство, нам следует ввести множитель $e^{-a\omega_n}$, с тем чтобы исключить вклад мод с $\omega_n\gg a^{-1}$: этим модам не видны пластины. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}f(d)=\frac{\pi}{2d}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-an\pi/d}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-an\pi/d}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{1-e^{-a\pi/d}}=\\ =\frac{\pi}{2d}\frac{e^{a\pi/d}}{\left(e^{a\pi/d}-1\right)^2}.\end{aligned}$$

Так как мы хотим, чтобы a^{-1} было большим, рассмотрим предел малого a, когда

$$f(d)=\frac{d}{2\pi a^2}-\frac{\pi}{24d}+O\left(a^2\right).$$

Заметим, что $f(d)$ устремляется к бесконечности при $a\to 0$, как и должно быть, иначе мы бы возвратились к (17). Но сила между двумя проводящими пластинами не должна устремляться к бесконечности. Экспериментаторы это бы точно заметили!

Итак, сила дается выражением

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial d}=f'(d)-f'(L-d)=\left(\frac{1}{2\pi a^2}+\frac{\pi}{24d^2}+\ldots\right)-(d\to L-d)\underset{a\to 0}{\longrightarrow}\\ \underset{a\to 0}{24}\left(\frac{1}{d^2}-\frac{1}{(L-d)^2}\right)\underset{L\gg d}{\simeq}\frac{\pi\hbar c}{24d^2},\qquad(20)\end{aligned}$$

взятым с обратным знаком. Расходимость $1/a^2$ сократилась.

Видите, наша любимая физика приводит к разумному результату. Мы восстановили $\hbar$, чтобы подчеркнуть квантовую природу силы. Так как $\partial E/\partial d > 0$, сила Казимира между двумя пластинами является притягивающей. Чтобы измерить эту крошечную силу, потребовались довольно сложные эксперименты.

2.0.2 От поля к частице

(все по Зи)

В предыдущей главе для свободной теории мы получили выражение

$$W(J) = -\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y J(x)D(x-y)J(y),$$

которое мы сейчас запишем через преобразование Фурье

$$\begin{aligned} &J(k) \equiv \int d^4x e^{-ikx} J(x): \\ &W(J) = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J(k)^* \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J(k). \end{aligned}$$

(Заметим, что $J(k)^* = J(-k)$ для вещественного $J(x)$.) Мы можем как угодно прыгать на матраце вверх-вниз. Иными словами, мы можем выбирать любой $J(x)$ и, используя эту свободу выбора, получать большое количество физической информации.

Рассмотрим $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$, где $J_1(x)$ и $J_2(x)$ сосредоточены в двух локальных областях 1 и 2 пространства-времени (рис. I.4.1). Тогда $W(J)$ содержит четыре члена вида $J_1^* J_1, J_2^* J_2, J_1^* J_2$ и $J_2^* J_1$. Рассмотрим два последних членах, один из которых имеет следующую форму:

$$W(J) = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(\pi)^4} J_2(k)^* \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J_1(k).$$

Мы видим, что $W(J)$ является большим только тогда, когда фурье-компоненты $J_1(x)$ и $J_2(x)$ значительно перекрываются и когда в области перекрытия в импульсном пространстве член $k^2 - m^2$ близок к нулю. В точке $k^2 = m^2$ существует пик «резонансного типа», при этом выполняется соотношение энергии и импульса для частицы массой m. (Мы будем пользоваться языком, принятым в теории относительности, и писать «импульсное пространство», вместо «пространство энергии-импульса», переходя на нерелятивистский язык только тогда, когда того требует контекст, как, например, в случае словосочетания «соотношение энергии-импульса».)

Итак, мы интерпретируем физические свойства, содержащиеся в нашей простой теории поля, следующим образом: источник в области 1 пространства-времени создает «возмущение поля», которое позднее поглощается стоком в области 2 пространства-времени. Экспериментаторы предпочитают называть это возмущением поля частицей с массой m. Наше предположение, основанное на уравнении движения, о том, что теория содержит частицу массой m, нашло свое подтверждение.

Немного жаргона: при $k^2 = m^2$ говорят, что k находится на массовой поверхности. Заметьте, однако, что в (3) мы интегрировали по всем k, включая k, удаленные от массовой оболочки. Для произвольного k удобно говорить о «виртуальной частице» с импульсом k, распространяющейся от источника к стоку.

2.0.3 От частицы к силе

(все по Зи)

Продолжим исследовать другие возможности для $J(x)$ (которые мы обобщенно будем называть источниками), например, $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$, где $J_a(x) = \delta^{(3)}\left(\vec{x} - \vec{x}_a\right)$. Иначе говоря, $J(x)$ есть сумма источников, являющихся стационарными бесконечно острыми пиками, расположенными в $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ в пространстве. (Если вам нужна бо́льшая математическая точность, чем предлагается здесь, замените дельта-функцию функциями с пиками в $\vec{x}_a$. Правда, этим вы лишь загромоздите формулы, не добившись ничего существенного.) Образно выражаясь, мы описываем два массивных сгустка, расположенных на матраце в $\vec{x}_1$ и являющихся абсолютно неподвижными [в $J(x)$ нет временно́й зависимости].

Что квантовые флуктуации поля φ, то есть вибрации матраца, делают с двумя массами, находящимися на матраце? Если вы считаете, что между этим массами существует взаимное притяжение, то вы совершенно правы.

Как и прежде, $W(J)$ содержит четыре члена. Мы пренебрежем членом «самодействия» $J_1 J_1$, так как он присутствовал бы в W вне зависимости от присутствия J_2. Нас интересует взаимодействие между двумя «массивными сгустками», представленными посредством J_1 и J_2. Аналогично мы пренебрегаем членом $J_2 J_2$.

Подставляя в (1) и вычисляя интеграл по d^3x и d^3y, мы немедленно получаем

$$W(J) = -\iint dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{2\pi} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$W(J) = -\iint dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{2\pi} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

(Множитель 2 обусловлен двумя членами $J_2 J_1$ и $J_1 J_2$.) Интегрируя по y^0, получаем дельта-функцию, которая обнуляет k^0 (так что, если говорить на жаргонном языке, k определенно не находится на массовой поверхности). Итак, мы остаемся с

$$W(J) = \left(\int dx^0\right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Обратите внимание, что бесконечно малое $i\varepsilon$ можно опустить, поскольку знаменатель $\vec{k}^2 + m^2$ всегда положителен.

Множитель $\left(\int dx^0 \right)$ может вселить в нас ужас и тревогу: интеграл по времени кажется бесконечным. Не бойтесь! Вспомним, что в формализме интеграла по траекториям $Z = \mathcal{C}e^{iW(J)}$ представляет собой $\left\langle 0 \left| e^{-iHT} \right| 0 \right\rangle = = e^{-iET}$, где E - энергия, обусловленная двумя источниками, воздействующими друг на друга. Множитель $\left(\int dx^0 \right)$ дает в точности временной интервал T. Все в порядке. Подставляя $iW = -iET$, из (5) получаем

$$E = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Эта энергия отрицательна! Наличие двух дельта-функциональных источников в $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ уменьшило энергию. Иными словами, два источника притягивают друг друга в силу их взаимодействия с полем φ. Мы добились первого физического результата в квантовой теории поля!

Величина E отождествляется с потенциальной энергией между двумя статическими источниками. Даже без вычисления интеграла видно, что с увеличением расстояния $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ между источниками осциллирующая экспонента обрезает интеграл. Характерное расстояние является обратным характерному значению k, равному m. Итак, можно ожидать, что взаимодействие между двумя источниками быстро убывает до нуля на расстоянии $1/m$.

Радиус действия силы притяжения, порождаемой полем φ, определяется обратной массой m частицы, описываемой полем. Это понятно? Интеграл вычисляется в приложении к этой главе, в итоге получаем

$$E = -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr}.$$

Результат вполне ожидаемый: потенциал убывает экспоненциально на масштабе расстояний $1/m$. Очевидно, $dE/dr > 0$: две расположенные на матраце массы могут уменьшить энергию, приближаясь друг к другу.