Лекция по динамике электромагнитного поля

Yury Holubeu, December 31, 2023

Contents

1 Main Theory

1.1 Решение уравнений Максвелла

(та самая типичная теория пропагаторов)

1.1.1 Свободные волны

В частности, если $j^m \equiv 0, \mathcal{A}_m^{\|} \equiv 0$, то

$$\left.\begin{array}{lll} k^2 \neq 0 & \Rightarrow & \mathcal{A}_m = 0 \\ k^2 = 0 & \Rightarrow & \mathcal{A}_m \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_m \sim \delta\left(k^2\right).$$

Поэтому для свободных волн

$$\mathcal{A}_m(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathfrak{a}_m(\boldsymbol{k}) 2\pi\delta\left(k^2\right) e^{\mathrm{i}k\cdot x} + \text{ h.c.}$$

Снимем интегрирование по нулевой компоненте 4 -вектора k

$$\int \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} 2\pi\delta\left(k^2\right) = \int \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} 2\pi\delta\left(k_0^2 - \boldsymbol{k}^2\right) = \frac{1}{2k_0(\boldsymbol{k})},$$

где

$$k_0(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\boldsymbol{k}^2} \equiv \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}_m(x) = \int \frac{c \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}(2\pi)^3} \mathfrak{a}_m(\boldsymbol{k}) e^{\mathrm{i}k\cdot x} + \text{ h.c.}$$

Величина

$$\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}(2\pi)^3}$$

представляет собой инвариантную меру интегрирования по импульсому пространству свободных волн.

Опуская метку импульса, запишем 4-вектор амплитуды

$$\mathfrak{a}_m = (\mathfrak{a}_0, -\mathfrak{a})$$

в калибровке

$$\mathfrak{a}_0 = 0,$$

откуда следует, что зануление продольной компоненты поля, которая не влияет на описание физически измеряемых величин, дает

$$\mathcal{A}_m^{\|} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^m \mathcal{A}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega a_0 - \boldsymbol{k}\cdot\mathfrak{a} = 0 \quad \Rightarrow$$

в заданной калибровке

$$\boldsymbol{k}\cdot\mathfrak{a} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}_\perp,$$

т.е. амплитуда поля является поперечной. Значит, поле свободной волны имеет, как говорят, две поляризации. Например, линейными называют поляризации, построенные по ортонормальным базисным векторам. Так, если $e_{1,2,3}$ - тройка базисных единичных векторов и $\boldsymbol{k}\|\boldsymbol{e}_3$, то

$$\mathfrak{a}_\perp^{(1)} \sim e_1, \quad \mathfrak{a}_\perp^{(2)} \sim e_2.$$

Круговые (циркулярные, спиральные) поляризации являются комплексными амплитудами:

$$\mathfrak{a}_{\perp}^{*(+)} \sim e_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2, \quad \mathfrak{a}_{\perp}^{*(-)} \sim e_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2.$$

Найдем электрическое и магнитное поля в импульсном представлении [6] :

$$\mathcal{E}^*(\boldsymbol{k}) = \Big\langle \partial_0 \mathcal{A}_\alpha - \partial_\alpha \mathcal{A}_0 >= \mathrm{i}\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\mathfrak{a}_{\perp}^*,$$
$$\mathcal{H}^*(\boldsymbol{k}) =< -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta \mathcal{A}_\gamma >= \mathrm{i}\left[\boldsymbol{k}, \mathfrak{a}_{\perp}^*\right],$$

и набор векторов $(\boldsymbol{k}, \mathcal{E}, \mathcal{H})$ образует правую тройку ортогональных векторов. В частности,

$$\mathcal{H} = \left[e_3, \mathcal{E}\right], \quad \mathcal{E} = -\left[e_3, \mathcal{H}\right]$$

Кроме того,

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{H}|,$$

т.е. в свободной волне электрическое и магнитное поля равны по модулю.

1.1.2 Волны от источника

Внешний ток $\equiv$ источник $j(k)$ создает поле

$$\mathcal{A}_m^{\text{ext}}(k) = \frac{1}{k^2}\mathcal{P}_{mn}(k)\frac{4\pi}{c}j^n(k),$$

где важно задать способ интегрирования сингулярной функции

$$\frac{1}{k^2}$$

Прескрипция Фейнмана гласит, что

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2 + \mathrm{i}0}$$

и мы имеем дело с интегрированием комплексной функции, в формализм которого мы здесь не будем углубляться [7]. Отметим лишь, что такой подход дает расходящиеся в будущем волны излучаемого электромагнитного поля и поглощение волн, пришедших из прошлого. Величина же

$$G^{mn}(k) = \frac{1}{k^2 + \mathrm{i}0}\mathcal{P}^{mn}(k)$$

называется причинным пропагатором фотона. В частности, пусть внешний ток - статический точечный заряд

$$j^m = (j_0, \mathbf{0}), \quad j_0 = ce\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}).$$

Тогда в импульсном представлении (см. (7.10))

$$j_0(k) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x e^{-\mathrm{i}(k_0 x_0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\,\mathrm{ce}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) = \pi ce\delta\left(k_0\right).$$

Подставляя в формулу для поля внешнего источника (7.17), находим, что отличная от нуля временн**á**я компонента -

$$\mathcal{A}_0^{\text{ext}}(k) = \frac{1}{-\boldsymbol{k}^2}\mathcal{P}_{00}(k)4\pi\pi e\delta\left(k_0\right) = \frac{1}{\boldsymbol{k}^2}4\pi^2 e\delta\left(k_0\right),$$

где мы подставили в пропагатор нулевое значение k_0 и $\mathcal{P}_{00}(k) = -g_{00} = -1$. Поэтому

$$\mathcal{A}_0^{\text{ext}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} 2\mathcal{A}_0^{\text{ext}}(k) e^{\mathrm{i}k\cdot x} = 4\pi e \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\boldsymbol{k}^2} e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},$$

и последний интеграл можно вычислить явно. Действительно, полагая

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kr\cos\theta, \quad \cos\theta = \varkappa, \quad \mathrm{d}^3 k = 2\pi k^2 \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}\varkappa,$$

находим

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\boldsymbol{k}^2} e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \int \frac{\mathrm{d}k \, \mathrm{d}\varkappa}{(2\pi)^2} e^{-\mathrm{i}kr\varkappa} =$$

$$\frac{1}{-\mathrm{i}4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\varkappa(-\mathrm{i}kr) e^{-\mathrm{i}kr\varkappa} =$$

$$\frac{1}{-\mathrm{i}4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} \left[e^{-\mathrm{i}kr} - e^{\mathrm{i}kr}\right] = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} \sin kr.$$

Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} \sin kr = \frac{\pi}{2}$$

В самом деле,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} \sin kr = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z} \sin z = \frac{1}{2} \operatorname{Im} m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z} e^{\mathrm{i}z},$$

так что, вводя вспомогательный параметр χ, получаем

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} m \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \frac{\mathrm{i}}{2} \int_{-1}^{1} e^{\mathrm{i}\chi z} \, \mathrm{d}\chi = \frac{1}{4} \operatorname{Im} m\mathrm{i} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\chi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\chi z} \, \mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{Im} m\mathrm{i} \int_{-1}^{1} 2\pi\delta(\chi) \mathrm{d}\chi = \frac{\pi}{2}.$$

В итоге, поле статического точечного заряда равно

$$\mathcal{A}_0^{\text{ext}}(x) = \frac{e}{r}$$

2 Additional Theory

2.1 О других способах решать уравнения Максвелла

(пока не до этого, но по идее коротко тут и про вектор Римана-Сильберштейна, и про что-то еще добавлю.)