Лекция по введению в относительность и эффекты

Yury Holubeu, December 31, 2023

Contents

1 Main Theory

1.1 Что такое относительность (упрощенно)?

Упрощенно - значит, в рамках плоского пространства.

Что такое сила и ИСО?

(тут философские рассуждения, с которых и начинает познаваться относительность)

Существует ли абсолютное движение и аргумент ведра Ньютона

(тут философские рассуждения, с которых и начинает познаваться относительность)

Существует ли абсолютное ускорение

(тут философские рассуждения, с которых и начинает познаваться относительность)

1.2 Метрика и преобразования Лоренца

(важная типичная теория Киселева)

Понятие метрики

(мы работаем с метрикой)

В 3 + 1-мерном случае тензор примет вид $g^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ в декартовых координатах. Обычно изложение далее строится для обратного к $g^{\mu\nu}$ ковариантного тензора $g_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu'} g_{\nu'\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}.$$

Этот тензор принято называть метрикой Минковского, поскольку он определяет инвариант

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0, 3},$$

который называют квадратом интервала или, для краткости, просто интервалом. В декартовых координатах интервал имеет вид, аналогичный квадрату длины [8],

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = c^2\, \mathrm{d}t^2 - d\ell^2, \qquad \mathrm{d}s^2(\, \mathrm{d}t = 0) \mapsto -d\ell^2.$$

Таким образом, преобразования координат и времени при смене инерциальной системы отсчета не меняют вид интервала, т.е. сохраняют метрику пространства-времени Минковского, а значит, являются изометриями метрики Минковского.

Определение и основные свойства

To simplify the notation, we shall assume that the ambient spacetime S has only one spatial dimension rather than three, although the analysis here works perfectly well in three spatial dimensions.

Any inertial reference frame F, the spacetime S is parameterised by two real numbers (t, x). Mathematically, we can describe each frame F as a bijection between S and $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. To normalise these coordinates, let us suppose that all reference frames agree to use a single event O in S as their origin $(0, 0)$:

$$F(O) = (0, 0)$$

for all frames F.

The new frame $F_v : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and the original frame $F : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ must be related by some transformation law

$$F_v = L_v \circ F$$

for some bijection $L_v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A priori, this bijection L_v could depend on the original frame F as well as on the velocity v, but the principle of relativity implies that L_v is in fact the same in all reference frames F, and so only depends on v. It is thus of interest to determine what the bijections $L_v : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ are. From our normalisation we have

$$L_v(0,0) = (0,0)$$

$$L_v(t,x) = \left(t - \frac{vx}{c^2} + \frac{tv^2}{2c^2}, x - vt + \frac{xv^2}{2c^2}\right) + O\left(v^3(|t| + |x|)\right).$$

Лоренцев буст через метрику

Для того чтобы сделать рассмотрение более простым, изучим $1 + 1$-мерный случай изометрий пространстввремени Минковского. По общему определению изометрия с матрицей преобразования $\Lambda : \mathrm{d}x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\bullet}$, - сохраняет метрику:

$$\hat{g} = \Lambda^{\mathrm{T}} \circ \hat{g} \circ \Lambda,$$

откуда, взяв детерминант с учетом равенства детерминанта транспонированной матрицы детерминанту самой матрицы, находим

$$(\det \Lambda)^2 = 1.$$

В простейшем случае отрицательный детерминант $\det \Lambda = -1$ отвечает дискретным операциям обращения стрелы времени $t \mapsto -t$ или зеркального отражения пространства $x \mapsto -x$. Закон преобразования метрики

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu'}_{\bullet\mu} \Lambda^{\nu'}_{\bullet\nu} g'_{\mu'\nu'}$$

при $\mu = \nu = 0$ и в случае изметрии: $g'_{\mu'\nu'} = g_{\mu'\nu'}$, — в декартовых координатах дает

$$g_{00} = \left(\Lambda^{0}_{\bullet 0}\right)^2 g_{00} + \left(\Lambda^{\alpha}_{\bullet 0}\right)\left(\Lambda^{\beta}_{\bullet 0}\right) g_{\alpha\beta} \Rightarrow 1 = \left(\Lambda^{0}_{\bullet 0}\right)^2 - \left(\Lambda^{\alpha}_{\bullet 0}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\Lambda^0_0\right)^2 \geqslant 1.$$

В итоге, различают случаи ортохронных преобразований (без инверсии стрелы времени): $\Lambda^0_0 \geqslant 1$, — и антиортохронных преобразований: $\Lambda^0_0 \leqslant -1$, - а также собственные преобразования: $\det \Lambda = 1$, - и несобственные: $\det \Lambda = -1$.

Нас же интересуют непрерывные изометрии, включающие в себя и тождественное преобразование, и трансляции в пространстве-времени, для которых матрица преобразований равна единичной, $\Lambda = \not\Vdash$, и, следовательно, детерминант положительный, а $\Lambda^0_0 \geqslant 1$. Кроме того однородность пространства и времени в инерциальных системах отсчета означает, что матрица преобразований не зависит ни от времени, ни от координат [9]. В итоге, необходимо рассмотреть постоянную матрицу с детерминантом, равным единице, $\det \Lambda = 1$, и $\Lambda^0_0 \geqslant 1$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \geqslant 1 \quad ad - bc = 1 \quad \Rightarrow \quad abc = a^2 d - a$$

Тогда условие (1.76) дает

$$\begin{pmatrix} a^2-c^2 & ab-cd \\ ab-cd & b^2-d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} abc = c^2 d = a^2 d - a \\ a^2-c^2 = 1 \\ b^2-d^2 = -1 \end{cases}$$

Отсюда $d = a, b = c$. Значит,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Это однопараметрическое решение можно записать, например, в виде: $a = \cosh\vartheta, b = -\sinh\vartheta$, так что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ -\sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix}.$$

В координатах это преобразование изометрии запишется как

$$\begin{aligned} x_0' &= \cosh\vartheta\left(x_0 - \tanh\vartheta x\right), \\ x' &= \cosh\vartheta\left(x - \tanh\vartheta x_0\right). \end{aligned}$$

Найдем траекторию центра системы K' при переходе (2.32): $x' = 0$,

$$x(t) = \tanh\vartheta ct.$$

Значит, параметр ϑ можно переписать в терминах скорости движения инерциальной системы отсчета K' относительно исходной системы K согласно замене

$$\tanh\vartheta = \frac{\mathfrak{u}}{c} \overset{\text{def}}{=} \beta,$$

где $\mathfrak{u}$ - скорость K' относительно K по оси x. Тогда

$$\cosh\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{u}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma.$$

В 3+1-мерном пространстве-времени это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x_0' &= \gamma\left(x_0 - \beta x\right), \\ x' &= \gamma\left(x - \beta x_0\right), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

и носит название лоренцева буста. Полезно знать матричное представление лоренцева буста, $x'^\mu = \Lambda(\beta)^\mu_\nu x^\nu$, где 4×4-матрица $\Lambda(\beta)$ имеет вид

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Относительность длин и времен

Сокращение длины

Длиной $\mathrm{d}\ell$ называется расстояние между одновременными событиями. Пусть некоторый объект покоится в системе K', тогда назовем его продольную длину собственной длиной $\mathrm{d}\ell_0$ (по направлению движения системы K'). В покоящейся системе K события на концах объекта будут разделены интервалом времени согласно обратному преобразованию лоренцева буста для времени:

$$c\ \mathrm{d}t = \gamma\left(c\ \mathrm{d}t' + \beta \mathrm{d}\ell_0\right)$$

Значит, одновременное положение концов объекта $\mathrm{d}t = 0$ отвечает неодновременным событиям на концах в системе K' :

$$c\ \mathrm{d}t' = -\beta \mathrm{d}\ell_0$$

Эти одновременные события в системе K задают продольную длину объекта в системе K по тому же обратному преобразованию лоренцева буста для продольных координат:

$$\mathrm{d}\ell = \gamma\left(\mathrm{d}\ell_0 + \beta c\ \mathrm{d}t'\right) = \gamma \mathrm{d}\ell_0\left(1-\beta^2\right),$$

и, в итоге, находим уравнение лоренцева сокращения продольных размеров движущегося объекта:

$$\mathrm{d}\ell = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}\ell_0$$

Замедление времени

В пространстве-времени Минковского физическое событие соответствует точке: время и место. Относительное же положение событий во времени и в пространстве теперь связаны с тем, в какой системе отсчета они рассматриваются.

Собственным временем системы τ называется отсчет часов, покоящихся в этой системе. Для малых интервалов отсчета собственного времени можно вычислить интервал этих событий для некоторой движущейся системы K' :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\ \mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}'^2\big|_{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=0} = c^2\ \mathrm{d}t'^2.$$

Значит, собственное время в системе K' пропорционально инварианту

$$\mathrm{d}\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c}\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t'.$$

Тот же интервал событий отсчета собственного времени системы K' в покоящейся системе K будет отвечать событиям в разных точках пространства, которые будут происходить в разные времена по часам системы K :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\ \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 = c^2\ \mathrm{d}t^2\left(1-\frac{\mathfrak{u}^2}{c^2}\right) = \frac{c^2}{\gamma^2}\ \mathrm{d}t^2,$$

где $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \mathfrak{u}$ - скорость движения системы K' относительно K. Так как интервал событий - инвариант, получаем связь отсчета собственного времени в системе K' с интервалом времени пространственно разделенных событий этого отсчета в системе K :

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$$

Как видим, имеет место релятивистское растяжение времени.

Подчеркнем, что часы, дающие отсчет собственного времени как в покоящейся системе, так и в движущейся, идут совершенно одинаково: принцип относительности, - ибо никакими средствами невозможно установить по собственному времени покоятся часы или движутся прямолинейно и поступательно. Отличается не ход времени в системах, а интервалы времени для событий в одной точке движущейся системы и для этих же событий в разных точках в покоящейся системе отсчета.

Что же такое время и расстояния?

(возможно, можно что-то сказать общее про это тут)

1.4 Что такое группа Лоренца и группа Пуанкаре?

(начало Бухбиндера)

Повторение алгебраических определений

(очевидные определения)

Простейшие свойства группы Лоренца

(очевидные определения)

Простейшие свойства группы Пуанкаре

(очевидные определения)

1.5 Законы релятивистской механики

Сложение скоростей

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - \vartheta.$$

Поскольку при $z < 1$ $\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, вводят понятие быстроты

$$\vartheta(v) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{v_{\parallel}}{c}}{1 - \frac{v_{\parallel}}{c}},$$

1.6 Какие вообще эффекты есть в СТО?

(просто обзор)

О эффекте Доплера

(тут про вывод)

$$\omega' = \omega\gamma \left(1 - \beta \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}\right) = \frac{\omega}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta\cos\theta'}.$$

В частности, выделяют - продольный эффект Доплера ($\cos\theta' = \pm 1$)

$$\omega' = \omega\gamma(1 \mp \beta) = \omega\sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}},$$

- поперечный эффект Доплера $\left(k'_{\|}=0, \cos\theta'=0\right)$

$$\omega'=\omega\frac{1}{\gamma}$$

- нерелятивистский эффект ($\beta \ll 1$, поправка первого порядка малости)

$$\omega' \approx \omega(1-\beta\cos\theta).$$

(тут про физ смысл)

О эффекте Томаса

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Th}}=-(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}}}{v^2}.$$

(тут про физ смысл)
(тут про вывод)

О эффекте Саньяка

(просто коротко скажу, что такое может быть, потом напишу)

2 Additional Theory

2.1 А в более общем случае, что такое относительность?

О нахождении в космическом корабле

Допустим, мы сидим в корабле в космосе и он ускоряется. Допустим мы уронили яблоко. Мы понимаем, что на самом деле это корабль ускоряется, а яблоко на самом деле покоится.

А теперь представим, что у нас есть плоская сетка, созданная из малых из частиц. Эта сетка тоже будет падать на пол корабля. Эта сетка - по сути это иллюстрация самого пространства.

Поэтому если свет у нас распространяется в пространстве, а само пространство смещается, то нам покажется, что он тоже изгибается. Вот, мы предсказали, что возможно отклонение света. (Гениальное предсказание за несколько строчек рассуждений) Опять же, тут речь только про ускорение, потому что иначе мы не заметим, что пространство ускоряется вниз.

(тут можно задать вопрос, будет ли отклоняться свет, если мы будем двигаться с постоянной скоростью?)

(!!! таким образом, хотя мы перемещаемся относительно покоящегося пространства, отклонение света, пущенного перпендикулярно направлению ускорения из нашей системы отсчета, все равно не будет. Потому что свет пущен из нашей СО.)

И мы заключаем, что вся физика в нашей системе такая, что будто мы находимся в присутствии гравитационного поля. Это принцип эквивалентности.

О, таким образом, можно провести аналогию, что любая система отсчета, где есть гравитация, на самом деле движется с ускорением. То есть наша Земля, где мы находимся прямо сейчас, она сейчас ускоряется с ускорением 9.8 м/с^2 относительно неподвижного пространства.

Или можно сказать, что это пространство ускоряется, а Земля неподвижна относительно самой себя. И оно идет прямо в центр массивного объекта, который и источник поля.

Ладно, это ведь просто умная аналогия, пространство ведь на самом деле не падает в Землю, да?

(пауза)

Оказывается, нет, Земля на самом деле ускоряется. Во-первых, мы отпустим объект, он упадет на Землю также, как и упал бы на пол космического корабля. Во-вторых если мы соступим с выского дома, то гравитационное поле в нашей системе отсчета исчезнет мгновенно, гораздо быстрее, чем скорость света достигнет любую точку пространства. И это нарушение принципа причинности, потому что для любого настоящего поля любое распространение поля происходит со скоростью света или меньшей. Поэтому на самом деле поле было фиктивное.

И на этом этапе возникают вопросы.

Как одна часть Земли может ускоряться вверх в одно направление, а другая - в другое? Противоположная часть Земли - в другое направление. А Земля почему-то не раздувается, хотя нет никаких сил, которые сдерживают ее.

И чтобы ответить на эти вопросы, можно рассмотреть мысленный эксперимент о реке. И понимать гравитацию, как динамику самого пространства-время, а не как силу, действующую на материю. И поэтому пространство-время начинает двигаться к массе и энергии.

Относительность движения подобна движению в реке

Представим, что мы на лодке и мы находимся вблизи водопада, наши моторы включены, поэтому нас вода не сносит. Чем ближе мы к обрыву, тем сильнее нужно включить моторы и иметь большее ускорение, чтобы нас не снесла вода.

В то же время, если мы находимся в лодке и нас сносит вода к водопаду, то мы не узнаем, что мы ускоряемся, если мы не посмотрим вокруг, потому что никаких признаков тому не будет.

(????? или будет??? что там с ускорением? дз, подумать, будет ли?)

На самом деле есть способ понять это, потому что лодка протяженная, и разные ее части будут ускоряться с чуть разными ускорениями, так что будет сила, которая будет растягивать лодку.

Допустим, что есть два наблюдателя, один ближе к водопаду, другой дальше. У них одинаково включены двигатели, так что дальний наблюдатель покоится. Тогда ближний будет сдвигаться к водопаду, потому что для него скорость течения воды больше, чем для второго. Им будет казаться, что они отдаляются друг от друга, но на самом деле это вода их отдаляет, а они сами по себе неподвижные.

Допустим, теперь есть круговое отверстие в озере и вода сливается туда. Тогда лодки должны ускоряться в разных направлениях, чтобы оставаться в покое.

И кстати, тогда вода будет сжимать лодку еще в перпендикулярном направлении, не только растягивать в продольном.

И также им будет казаться, что они будут сближаться, если они изначально находились на разных угловых направлениях.

И вот, тогда если мы находимся в лодке, то мы увидем, что объекты в реке почему-то двигаются к центру и мы можем предположить, что есть какая-то сила, которая их и сдвигает.

Теперь представим большое гравитирующее тело, в поле которого мы находимся. Из принципа эквивалентности следует, что это то же самое, что если бы каждая неподвижная относительно него точка двигалась бы с ускорением относительно движущегося пространства.

И тут такие же явления, какие и были в реке. Радиально находящиеся наблюдатели ускоряются друг относительно друга сами по себе.

Наблюдатели, под разными углами, будут считать что они почему-то сближаются.

Продольные и поперечные деформации будут такими же, как и в случае движения в метрике центрального поля.

И особенно важно в этой аналогии, что что угодно в реке будет также подвержено ее движению. Например, свет или материя. Таким образом, мы объяснили отклонение света в гравитационном поле.

Вопрос, допустим, сетка пространства изначально покоилась и все-таки падает на поверхность Земли, с какой скоростью она упадет? Со второй космической скоростью, примерно 11 км/с.

Но в модели реки это скорость, с которой мы путешествуем сквозь реку.

Так что ускоряясь постоянно со скоростью 9.8 м/с2 мы всегда остаемся движущимися относительно нашего места в нашей реке со скоростью 11 км/с.

Получается, Земля в каждой ее точке постоянно ускоряется против движения пространства. Ускорение это обеспечено взаимодействием между частицами, потому что Земля не может уже больше сужаться, как пространство стремиться сделать.

Кстати, про скорость у водопада, которую нельзя преодолеть. Это же когда мы приближаемся в горизонту событий в черной дыре. Там метрика начинает двигаться со скоростью света, так что вылететь из нее невозможно.

В общем, черная дыра для пространства это то же самое, что водопад для реки.

О разных философских взглядах на СТО

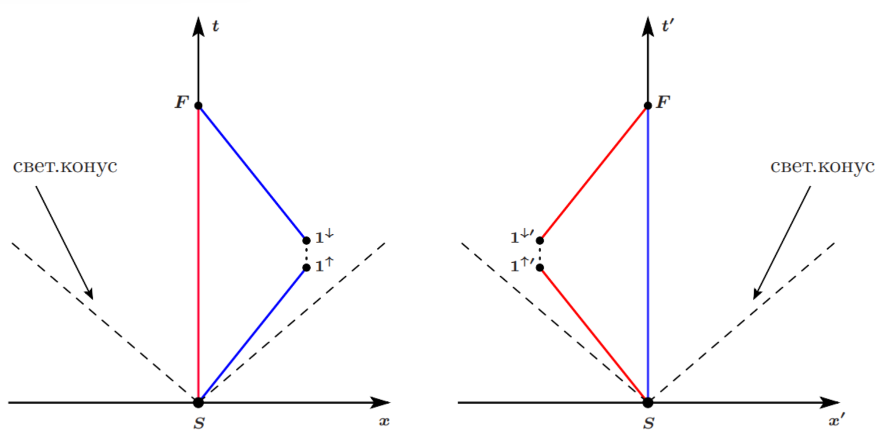
(немного обзора тем из Гуца)

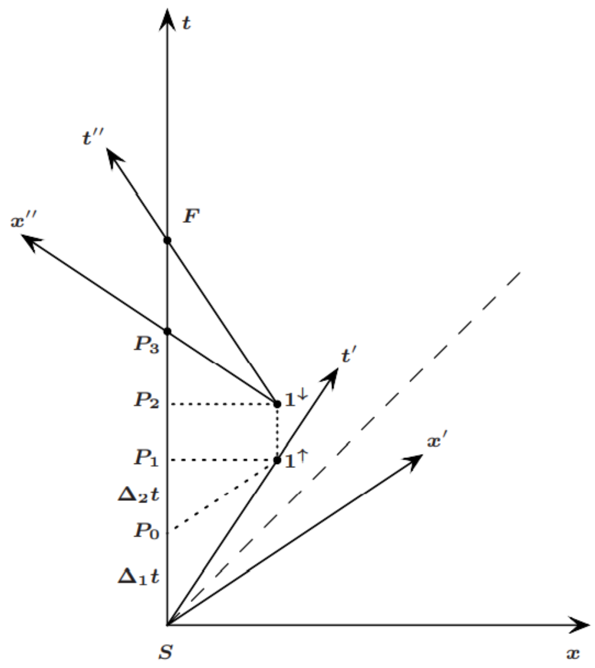
Об эфире

(совсем немного напишу, это большая тема, пока последуем абзацу в лекциях Киселева, в прочем, можно и не знать это.)

2.2 Введение в парадокс близнецов

(коротко напишу упрощенно, что происходит)




t
t''
F
x''
P_3
t'
P_2
$1^{\downarrow}$
x'
P_1
$1^{\uparrow}$
$\Delta_2 t$
P_0
$\Delta_1 t$
S
x