# Лекция по введению в группу Пуанкаре и в ее следствия

Yury Holubeu, December 31, 2023

## Contents

# 1 Main Theory

Предполагается, что у читателя есть знакомство с темами, которые будут излагаться ниже, иначе этот объем - дело трех лекций, а не одной.

## 1.1 Вращения и бусты математически

### 1.1.1 Вращения

**Вращения**

$$\boldsymbol{r}' \overset{\text{def}}{=} \hat{R}_{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\phi}) \circ \boldsymbol{r}, \quad \hat{R}_{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\phi}) \overset{\text{def}}{=} \not{1} - \mathrm{i}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\phi},$$

причем компоненты трех $3 \times 3$-матриц $s$ согласно (17.3) задаются явно как

$$\left(\boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right)^{\alpha\gamma}_{\mathbb{E}} = -\mathrm{i}\epsilon^{\beta\alpha\gamma}_{\mathbb{E}},$$

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \mathrm{i}\frac{\partial \hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi \to 0}$$

В случае поворотов $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{s}$, а значит, матрицы $\boldsymbol{s}$ - это генераторы группы поворотов, которые действуют в векторном пространстве декартовых координат. Коммутационные соотношения для генераторов поворотов

$$\left[\boldsymbol{s}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{s}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \mathrm{i}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbb{E}}\boldsymbol{s}^{\gamma}_{\mathbb{E}}$$

$$s^{x}_{\mathbb{E}} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s^{y}_{\mathbb{E}} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s^{z}_{\mathbb{E}} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Например, вращение скалярного поля**

Функция $\Phi(\boldsymbol{r})$, которая сопоставляет векторам координат число, не зависящее от выбора базиса в векторном пространстве координат, называется скалярным полем. В координатном подходе по определению скалярного поля его значение инвариантно относительно обратимых замен координатного базиса $\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r}'$,

$$\Phi'\left(\boldsymbol{r}'\right) = \Phi(\boldsymbol{r}),$$

и в частном случае поворота, когда $\boldsymbol{r}' = \hat{R}_{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\phi}) \circ \boldsymbol{r}$,

$$\Phi'\left(\hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi) \circ \boldsymbol{r}\right) = \Phi(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \Phi'(\boldsymbol{r}) = \Phi\left(\hat{R}^{-1}_{\mathbb{E}}(\phi) \circ \boldsymbol{r}\right),$$

а значит, для бесконечно малых поворотов новое поле в старых координатах выражается через исходное поле как

$$\begin{aligned}\Phi'(\boldsymbol{r}) \approx \Phi(\boldsymbol{r} - \delta\boldsymbol{r}) \approx & \Phi(\boldsymbol{r}) - \delta r^{\alpha}_{\mathrm{E}}\partial_{\alpha}\Phi(\boldsymbol{r}) = \\ & = \Phi(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r})^{\alpha}_{\mathbb{E}}\partial_{\alpha}\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{r}) - \epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathrm{E}}\phi^{\beta}_{\mathrm{E}}r^{\gamma}_{\mathrm{E}}\partial_{\alpha}\Phi(\boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

Последнее равенство можно трактовать как действие оператора на скалярное поле при бесконечно малых поворотах

$$\Phi'(\boldsymbol{r}) = (\not{1} - \mathrm{i}(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\phi}))\Phi(\boldsymbol{r}) = \left(\not{1} - \mathrm{i}\boldsymbol{l}^{\beta}_{\mathbb{E}}\boldsymbol{\phi}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right)\Phi(\boldsymbol{r}),$$

откуда сразу находим выражение для генератора преобразования координат в аргументе поля

$$\boldsymbol{l}^{\beta}_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathrm{E}} r^{\gamma}_{\mathbb{E}} \partial_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{l} = -\mathrm{i}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla},$$

а это - безразмерный оператор момента импульса $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L}/\hbar$. Из квантовой механики нам известны коммутаторы [1]

$$\left[\boldsymbol{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{l}^{\beta}_{\mathbb{E}}\right] = \mathrm{i}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mathrm{E}} \boldsymbol{l}^{\gamma}_{\mathbb{E}}, \quad \left[\boldsymbol{l}^{2}_{\mathbb{E}}, \boldsymbol{l}^{\alpha}_{\mathbb{E}}\right] = 0.$$

### 1.1.2 Бусты

**Бусты**

Специальные преобразования Лоренца от одной инерциальной декартовой системы 4-координат к другой, движущейся инерциальной системе штрихованных 4-координат - лоренцевы бусты - имеют вид

$$\begin{cases} x'^{0} = x^{0} \operatorname{ch} \vartheta - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}) \operatorname{sh} \vartheta, \\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{e} \left\{ (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e})(\operatorname{ch} \vartheta - 1) - x^{0} \operatorname{sh} \vartheta \right\}, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{e}$ - единичный вектор в направлении скорости движения штрихованной системы отсчета относительно начальной,

$$v = ev,$$

а модуль скорости связан с углом гиперповорота $\vartheta$

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \vartheta.$$

Для бесконечно малых бустов, очевидно, разложение по $\vartheta$ дает

$$\begin{cases} x'^{0} = x^{0} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\vartheta}), \\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - x^{0} \boldsymbol{\vartheta}, \end{cases}$$

где мы ввели 3 -мерный евклидов вектор гиперповорота $\boldsymbol{\vartheta} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}\vartheta$.

Это преобразование в индексных обозначениях имеет вид

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \left\{ \delta^{\mu}_{0} \delta^{\nu}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{0} \delta^{\mu}_{\alpha} \right\} \vartheta^{\alpha} x_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\mu} - \mathrm{i} \left\{ (\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}})^{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbb{E}} \right\} x_{\nu}, \quad \alpha = \overline{\{1, 3\}},$$

где введены антисимметричные по перестановке индексов $\mu$ и $\nu 4 \times 4$-матрицы $(\tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{E}})^{\mu\nu}$ (обратите внимание на знак тильды!) - 3-мерные генераторы бустов в 4-векторном пространстве, которые выражаются через символы Кронекера при действии на ковариантные компоненты координат пространства-времени Минковского (в формуле индексы $\mu$ и $\nu$ сверху),

$$(\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathrm{E}})^{\mu\nu} = -(\tilde{s}_{\alpha})^{\mu\nu} = \mathrm{i} \left\{ \delta^{\mu}_{0} \delta^{\nu}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{0} \delta^{\mu}_{\alpha} \right\},$$

или в записи с использованием метрики при действии на контрвариантные компоненты координат пространства-времени Минковского (в формуле индекс $\mu$ сверху, а индекс $\nu$ снизу),

$$(\tilde{\boldsymbol{s}}^{\alpha}_{\mathbb{E}})^{\mu}_{\nu} = -(\tilde{s}_{\alpha})^{\mu}_{\nu} = \mathrm{i} \left\{ \delta^{\mu}_{0} g_{\alpha\nu} - g_{0\nu} \delta^{\mu}_{\alpha} \right\},$$

где $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ - метрика пространства-времени Минковского в декартовых координатах, а $g^{\nu\lambda} = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ - обратная метрика: $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^{\lambda}_{\mu}$, причем пространственные компоненты вектора и ковектора имеют, как обычно, противоположные знаки.

Если ввести антисимметричный тензор инфинитезимальных бустов, у которого отличны от нуля только элементы

$$\omega^{0\alpha} = -\omega^{\alpha 0} \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta_{\mathrm{E}}^{\alpha},$$

то

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu},$$

или

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left\{ (\tilde{\boldsymbol{s}}_{\alpha})^{\mu\nu} \omega^{0\alpha} + (\tilde{\boldsymbol{s}}_{\alpha})^{\nu\mu} \omega^{\alpha 0} \right\} x_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\mu} - \frac{\mathrm{i}}{2} (\mathfrak{s}_{\rho\lambda})^{\mu\nu} \omega^{\rho\lambda} x_{\nu},$$

где тензор генераторов бустов определяется матричным равенством

$$\mathfrak{s}_{0\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{\boldsymbol{s}}_{\alpha} = \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} S_{0\alpha},$$

или с матричными индексами

$$(S_{\rho\lambda})^{\mu\nu} = \mathrm{i}\hbar \left\{ \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \delta_{\lambda}^{\mu} \right\},$$

что по своей индексной структуре обобщает выражение для спиновой матрицы (1.34) - генератора 4-вектора при поворотах: единственная разница - область значений индексов расширяется с 3-значных координатных до 4значных пространственно-временных. Итак, 4-векторное поле преобразуется при бустах согласно закону

$$A'^{\mu}(x') = \left\{ \mathbb{1} - \mathrm{i} \left( \tilde{\boldsymbol{s}}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbb{E}} \right) \right\}^{\mu\nu} A_{\nu}(x) = \left\{ \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{2} \omega^{\rho\lambda} \mathfrak{s}_{\rho\lambda} \right\}^{\mu\nu} A_{\nu}(x).$$

Здесь действие единичного оператора на 4 -ковектор доопределено как $\mathbb{1}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$. Разлагая аргумент функции $x' = x + \delta x$ в левой стороне формулы (1.47) и так же, как и в случае пространственных поворотов, подставляя

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu\nu} x_{\nu} = -\frac{\mathrm{i}}{2} (\mathfrak{s}_{\rho\lambda})^{\mu\nu} \omega^{\rho\lambda} x_{\nu},$$

и опуская штрих у поля $A^{\mu}$ в слагаемых первого порядка малости по $\omega^{\rho\lambda}$, получим

$$\begin{aligned} A'^{\mu}(x') &= A'^{\mu}(x) + \delta x^{\nu} \partial_{\nu} A^{\mu}(x) = A'^{\mu}(x) - \frac{\mathrm{i}}{2} (\mathfrak{s}_{\rho\lambda})^{\nu\nu'} \omega^{\rho\lambda} x_{\nu'} \partial_{\nu} A^{\mu}(x) = \\ &= A'^{\mu}(x) - \frac{\mathrm{i}}{2} \omega^{\rho\lambda} \mathrm{i} \left\{ \delta_{\rho}^{\nu} \delta_{\lambda}^{\nu'} - \delta_{\rho}^{\nu'} \delta_{\lambda}^{\nu} \right\} x_{\nu'} \partial_{\nu} A^{\mu}(x) = \\ &= A'^{\mu}(x) + \frac{\mathrm{i}}{2} \omega^{\rho\lambda} \mathrm{i} \left\{ x_{\rho} \partial_{\lambda} - x_{\lambda} \partial_{\rho} \right\} A^{\mu}(x). \end{aligned}$$

В полной аналогии с (1.25) определим для всех значений индексов в пространстввремени Минковского

$$L_{\rho\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x_{\rho} p_{\lambda} - x_{\lambda} p_{\rho} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \ell_{\rho\lambda}, \quad p_{\lambda} \equiv \mathrm{i}\hbar \partial_{\lambda}, \quad \left( \hat{\ell}_{\rho\lambda} \right)^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{\rho\lambda} \otimes g^{\mu\nu}.$$

В итоге, перенося приращение векторного поля, выраженное через производные по координатам, с левой стороны равенства (1.48) в правую и складывая со спиновой частью, для которой

$$(\hat{\mathfrak{s}}_{\rho\lambda})^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1} \otimes (\mathfrak{s}_{\rho\lambda})^{\mu\nu},$$

находим действие генераторов лорениевых бустов на 4 -векторное поле,

$$A'^{\mu}(x) = \left\{ \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{2} \omega^{\rho\lambda} \left( \hat{\ell}_{\rho\lambda} + \hat{\mathfrak{s}}_{\rho\lambda} \right) \right\}^{\mu\nu} A_{\nu}(x),$$

и полный тензор момента для бустов равен сумме коммутирующих друг с другом пространственно-временного дифференциального оператора и спинового вкладов

$$\mathfrak{j}_{\rho\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\ell}_{\rho\lambda} + \hat{\mathfrak{s}}_{\rho\lambda}$$

**Например, бусты скалярного (векторного) поля**

(выделю это сюда)

## 1.2 Что такое группа Пуанкаре?

### 1.2.1 Еще раз, что нам известно?

(короткое напоминание)

### 1.2.2 О схеме Вигнера

Локальные релятивистские поля — основной объект исследования квантовой теории поля. Изучение полей начинается с изучения вопроса о том, какие поля составляют исходный базис для построения всевозможных комбинаций полей. И базис, и составные поля, прежде всего, характеризуются тем, что они находятся в пространстве-времени Минковского, а, стало быть, необходимо точно знать, как эти поля преобразуются при смене инерциальной системы отсчета, т.е. при изометриях пространства-времени Минковского, как дискретных, так и непрерывных.

Для начала ищутся генераторы преобразований и их коммутаторы, далее ищутся операторы Казимира и составляющие вектора подалгебры Картана, то есть изучается алгебра Ли для группы преобразований.

Далее строятся представления алгебры Ли для генераторов группы Лоренца и группы Пуанкаре. Представление с математической точки зрения — это новое векторное пространство, в котором действуют генераторы из алгебры Ли, которую мы установили при исследовании изометрий пространствавремени Минковского. Эти изометрии называют также действием группы в определяющем представлении, т.е. в пространстве-времени. С физической точки зрения представление — это описание пространства новых наблюдаемых величин, которые либо эмпирически нам указаны Природой, либо предсказаны теоретической моделью как следствие заложенных в модель физических и математических принципов, присущих симметриям наблюдаемых явлений. Из определения представления понятно, что действие генераторов из алгебры Ли группы сводится к линейным преобразованиям в векторном пространстве представления, причем отображение генераторов в матрицы линейного преобразования сохраняет коммутационные соотношения алгебры Ли.

Неприводимое представление алгебры Ли характеризуется набором квантовых чисел старшего вектора представления. Для определения понятия старшего вектора в алгебре Ли сначала выделяют в полном наборе наблюдаемых взаимно коммутирующие генераторы, которые образуют, как говорят математики, подалгебру Картана. Все остальные генераторы — линейные комбинации пар повышающих и понижающих операторов. Повышающий и понижающий операторы переводят базисный вектор представления в другой базисный вектор этого представления с точностью до нормировочного множителя, и, соответственно, изменяют набор квантовых чисел, а стало быть, и номер базисного вектора в полном наборе собственных векторов для генераторов из подалгебры Картана.

Релятивистским полем называется элемент векторного пространства представления группы Пуанкаре. Релятивистское поле называется локальным, если оно зависит от координат пространства-времени Минковского. Отсюда следует, что неприводимые представления алгебры Ли генераторов непрерывных изометрий пространства-времени Минковского составляют базис релятивистских локальных полей. Из этих базисных полей можно строить составные поля, т.е. произведения полей, которые также будут обладать вполне определенными свойствами относительно бесконечно малых преобразований координат пространства-времени Минковского. Локальное релятивистское поле $v(x)$ можно записать как прямое произведение

$v(x) = x \times v$, где $v$ - это элемент представления алгебры изометрий пространства-времени Минковского с 4координатами $x$, что на математическом языке соответствует термину fibre bundle или, что то же, локально тривиальное векторное (или главное) расслоение над базовым пространством. В качестве базового пространства в нашем случае выступает пространство-время Минковского, а понятие «локально тривиальное расслоение» указывает на то, что fibre bundle - это прямое произведение элементов пространства представления алгебры Ли на элементы базового пространства.

По построению, уравнения движения для свободных классических релятивистских полей — это уравнения на собственные значения операторов из полного набора наблюдаемых величин. Сами уравнения могут быть получены из принципа экстремального действия.

### 1.2.3 Алгебраические свойства и основные формулы

(тут про алгебраические свойства, что там представление приводимое!)

## 1.3 Пример, как пользоваться группой Пуанкаре

(тут слова, что имеется в виду, что безмассовое поле, и что это именно в некотором смысле “получаются”)

#### Квадрат псевдовектора Паули-Любанского для безмассовых полей

Для безмассовых частиц по определению $p^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = 0$, так что можно написать в компонентах

$$\frac{1}{\hbar^2} W^2 = -p_0^2 \left(\boldsymbol{s}^2 + \tilde{\boldsymbol{s}}^2\right) + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s})^2 + (\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{s}})^2 + p_0 \boldsymbol{p}\cdot\{(\boldsymbol{s}\times\tilde{\boldsymbol{s}}) - (\tilde{\boldsymbol{s}}\times\boldsymbol{s})\}.$$

Или через эрмитовы векторы $\mathbf{s}^{\uparrow}$ и $\mathbf{s}^{\downarrow}$, получаем

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2 \left\{\mathbf{s}^{\uparrow}\cdot\mathbf{s}^{\downarrow} - \frac{1}{p_0^2}\left(\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{s}^{\uparrow}\right)\left(\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{s}^{\downarrow}\right) - \frac{\mathrm{i}}{p_0}\boldsymbol{p}\cdot\left(\mathbf{s}^{\uparrow}\times\mathbf{s}^{\downarrow}\right)\right\}.$$

Выберем ось проецирования спина вдоль пространственной компоненты импульса : $\boldsymbol{p} = (0,0,p_0)^{\mathrm{T}}$. То есть для безмассовых состояний мы выбрали стандартный 4-импульс в виде $p^\mu = (p_0,0,0,p_0)^{\mathrm{T}}$, а малая группа Вигнера - это группа непрерывных преобразований на световом конусе с инвариантным 4-вектором, которую обозначают как ISO(2). В эту группу входят вращения и трансляции в евклидовой плоскости, которые изоморфны указанным преобразованиям на световом конусе. В этом случае $\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{s}^{\uparrow\downarrow} = p_0\mathbf{s}_3^{\uparrow\downarrow}$, тогда

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2\left\{\, \mathrm{s}_1^{\uparrow}\mathrm{s}_1^{\downarrow} + \mathrm{s}_2^{\uparrow}\mathrm{s}_2^{\downarrow} - \mathrm{i}\left(\mathrm{s}_1^{\uparrow}\mathrm{s}_2^{\downarrow} - \mathrm{s}_2^{\uparrow}\mathrm{s}_1^{\downarrow}\right)\right\},$$

или

$$W^2 = -4p_0^2\hbar^2\left\{\, \mathrm{s}_1^{\uparrow} + \mathrm{i}\mathrm{s}_2^{\uparrow}\right\}\left\{\mathrm{s}_1^{\downarrow} - \mathrm{i}\mathrm{s}_2^{\downarrow}\right\} = -4p_0^2\hbar^2\ \mathrm{s}_+^{\uparrow}\mathrm{s}_-^{\downarrow}.$$

#### Левые и правые безмассовые поля

Поскольку мы включаем инвариантный оператор $W^2$ в полный набор наблюдаемых для построения базиса полей из решений уравнений на собственные значения операторов из этого полного набора, в искомом базисе поля удовлетворяют уравнению на собственные значения оператора $W^2$. Но у повышающего оператора в группе SU(2) существуют только два собственных вектора: во-первых, это “вакуум” $|0\rangle$ с нулевыми значениями $\mathrm{s}_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{u}} = 0$

$$\mathbf{s}^{\uparrow}|0\rangle = 0,$$

а во-вторых, это старший вектор с нулевым собственным значением (при $m_{\rm u} = {\rm s_u}$)

$$\mathrm{s}^{\uparrow}_{+}\left|\mathrm{s_u}, \mathrm{s_u}\right\rangle = 0.$$

Точно так же для понижающего оператора есть два собственных вектора: вакуум $|0\rangle$ с нулевыми значениями ${\rm s_d} = m_{\rm d} = 0$

$$\mathbf{s}^{\downarrow}|0\rangle = 0,$$

и младший вектор с нулевым собственным значением (при $m_{\rm d} = -{\rm s_d}$ )

$$\mathrm{s}^{\downarrow}_{-}\left|\mathrm{s_d}, -\mathrm{s_d}\right\rangle = 0.$$

Отсюда следует, что во-первых, на физических полях $W^2 = 0$, а во-вторых, на этих полях (т. е. при действии операторов на поля) проекция спина на ось импульса или, как говорят, спиральность проекция спина на импульс

$$\frac{\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{s}}{p_0} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}}{p_0} = \mathrm{s}_3^{\uparrow\downarrow},$$

имеет строго фиксированные значения

$$\mathrm{s}_3^{\uparrow} = \mathrm{s_u}, \quad \mathrm{s}_3^{\downarrow} = -\mathrm{s_d}.$$

Таким образом, среди безмассовых полей со спином базис составляют так называемые правые и левые поля: киральные поля полуцелого спина и поляризованные поля целого спина, такие что правые поля по определению имеют положительную киральность и спиральность $\mathfrak{s} = \mathrm{s_u}$ :

$$\mathbf{s}^{\downarrow} \equiv 0 \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{s}} = -\mathrm{i}\boldsymbol{s}, \quad \mathbf{s}^{\uparrow} = \boldsymbol{s},$$

левые поля по определению имеют отрицательную киральность и спиральность $\mathfrak{s} = -\mathrm{s_d}$ :

$$\mathbf{s}^{\uparrow} \equiv 0 \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{s}} = \mathrm{i}\boldsymbol{s}, \quad \mathbf{s}^{\downarrow} = \boldsymbol{s},$$

а также их произведения и вакуум. При этом произведения полей, т.е. составные или композитные поля, конечно, могут реализовывать приводимые представления группы Пуанкаре.

### Вывод основного уравнения для определения свойств полей

Рассмотрим компоненты псевдовектора Паули-Любанского для киральных и поляризованных полей в представлениях, отвечающим полям группы Лоренца $(\mathrm{s_u}, 0)$ и $(0,\ \mathrm{s_d})$, в которых генераторы $\mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}$, отличные от нуля, совпадают со спином $s$.

Вспомним свойства алгебры группы Лоренца, $S_{\beta\gamma} = \hbar\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\rho}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\rho}$ нулевая компонента

$$W_0 = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma}p_\alpha S_{\beta\gamma} = \hbar\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s} = \pm p_0\hbar\mathrm{s_{u,d}},$$

где верхний знак относится к операторам «s-up», а нижний - к «s-down». При вычислении пространственной компоненты необходимо использовать то, что

$$\frac{1}{\hbar}S_{0\gamma} = \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \mp\mathrm{i}\boldsymbol{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma},$$

откуда

$$W^\alpha = -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\alpha 0\beta\gamma}p_0 S_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}2\hat{\epsilon}^{\alpha\beta 0\gamma}p_\beta S_{0\gamma} = \hbar\left\{p_0\boldsymbol{s}^\alpha \mp \mathrm{i}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s})^\alpha\right\}$$

И также можем записать основное уравнение, определяющее базис безмассовых полей

$$\frac{1}{\hbar}W^\mu = \mathfrak{s}p^\mu, \quad \mathfrak{s} = \pm\mathrm{s_{u,d}}.$$

Именно это основное уравнение, которое позволит нам найти в явном виде уравнения для безмассового векторного поля.

# 2 Additional Theory

## 2.1 Что такое векторное поле и откуда получаются уравнения Максвелла?

### Запись основного уравнения для безмассового представления группы Пуанкаре

Выше была сделана большая подготовка, чтобы прийти к следующему.

Запишем общее операторное уравнение

$$\frac{1}{\hbar} W^{\nu} = \mathfrak{s} p^{\nu}.$$

Тут оператор $(s^{\alpha})^{\beta}_{\gamma} = -\mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Он не имеет временны́х компонент, т. е. не приводит к смешиванию 3-мерного поля $\mathcal{A}^{\beta}$ с $\mathcal{A}_0$. $\frac{1}{\hbar} W_0 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}$, $\quad \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{W} = p_0 \boldsymbol{s} - \operatorname{sign}(\mathfrak{s})\mathrm{i}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s})$. Также $\mathfrak{s} = \lambda = \pm 1$, поэтому получаем уравнения

$$\begin{aligned} p_0 \mathcal{A}^{\beta} &= \lambda (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s})^{\beta}_{\gamma} \mathcal{A}^{\gamma}, \\ \lambda p^{\alpha} \mathcal{A}^{\beta} &= p_0 \left(s^{\alpha}\right)^{\beta}_{\gamma} \mathcal{A}^{\gamma} - \lambda \mathrm{i} \epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} p^{\beta'} \left(s^{\gamma'}\right)^{\beta}_{\gamma} \mathcal{A}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Подставляя операторы 4 -импульса $(p_0, \boldsymbol{p}) = \mathrm{i}\hbar \left(\partial_0, -\boldsymbol{\nabla}\right)$ и выражение для оператора спина, находим из первого уравнения

$$\mathrm{i}\ \partial_0 \mathcal{A} = \lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}.$$

Второе уравнение имеет вид

$$-\mathrm{i}\lambda \partial_{\alpha} \mathcal{A}^{\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_0 \mathcal{A}^{\gamma} + \mathrm{i}\lambda \left(\delta^{\beta}_{\alpha} \partial_{\gamma} \mathcal{A}^{\gamma} - \partial_{\beta} \mathcal{A}^{\alpha}\right).$$

Оно содержит симметричную и антисимметричную относительно перестановок индексов части тензора, которые соответственно дают

$$\partial_{\gamma} \mathcal{A}^{\gamma} = \operatorname{div} \mathcal{A} = 0, \quad -\mathrm{i}\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A} = \partial_0 \mathcal{A}$$

Последнее соотношение повторяет полученное выше $\mathrm{i}\ \partial_0 \mathcal{A} = \lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}$, так что, суммируя все связи для безмассового векторного поля, получаем систему

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \mathrm{i}\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}, \quad \operatorname{div} \mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A}_0 \equiv 0.$$

Тут первое уравнение динамическое, так как оно содержит производную по времени, а два последних - условия, исключающие компоненты 4 -векторного поля, не имеющие отношения к безмассовому векторному полю.

Важно заметить, что динамическое уравнение $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \mathrm{i}\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}$ устанавливает операторное равенство для линейных уравнений поля

$$\operatorname{rot} \cong \mathrm{i}\lambda \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}.$$

### Приведение к привычному виду

Запишем полученные уравнения в ковариантном виде. Пока что они имеют нековариантный вид, то есть они не могут выполняться в произвольной системе отсчета.

Из полученных уравнений следует уравнение массовой поверхности, ведь $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{A}$, откуда

$$\Box \mathcal{A} = 0.$$

Запишем иначе уравнения связей, обеспечивающие калибровку. Перейдем в импульсное представление, так что $\operatorname{div}\mathcal{A}=0 \mapsto \boldsymbol{k}\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{k})=0$, т. е. это условие говорит, что поле является поперечным. С учетом $\mathcal{A}_0\equiv 0$ находим ковариантную форму поперечности

$$k_\nu\mathcal{A}^\nu=0 \Leftrightarrow \partial_\nu\mathcal{A}^\nu=0,$$

и это уравнение уже справедливо в произвольной системе отсчета.

Уравнение массовой поверхности примет вид

$$\left(k_0^2-\boldsymbol{k}^2\right)\mathcal{A}(\boldsymbol{k})=k^2\mathcal{A}(\boldsymbol{k})=0.$$

Динамическое уравнение также можно записать ковариантно, если ввести антисимметричный тензор напряженности поля

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu,$$

откуда

$$F_{0\alpha}=-\partial_0\mathcal{A}^\alpha-\partial_\alpha\mathcal{A}_0\mapsto-\partial_0\mathcal{A}^\alpha,$$

если учесть условие $\mathcal{A}_0\equiv 0$. Стандартным образом определяют электрическое поле

$$\mathcal{E}^\alpha=F_{0\alpha}$$

и магнитное поле

$$\mathcal{H}^\gamma=-\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta},\quad F_{\alpha\beta}=-\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}^\gamma.$$

Подставляя определение тензора напряженности поля, находим

$$\mathcal{H}=\operatorname{rot}\mathcal{A}$$

Поэтому обязательно должно быть

$$\operatorname{div}\mathcal{H}=0.$$

Тогда динамическое уравнение примет вид

$$\mathcal{E}=\mathrm{i}\lambda\mathcal{H}.$$

Беря дивергенцию, получаем

$$\operatorname{div}\mathcal{E}=0.$$

Уравнение $\mathcal{E}=\mathrm{i}\lambda\mathcal{H}$ после применения оператора $\operatorname{rot}\cong\mathrm{i}\lambda\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ дает

$$\operatorname{rot}\mathcal{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathcal{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}.$$

В итоге мы получили уравнения Максвелла для свободного электромагнитного векторного поля.

Полученные уравнения могут быть записаны ковариантно

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0,\quad \partial_\rho F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\rho}+\partial_\nu F_{\rho\mu}=0$$

при условии

$$\partial_\mu\mathcal{A}^\mu=0,\quad \mathcal{A}_0\equiv 0.$$

Это мы обсудим на семинаре про основы электродинамики. Эти уравнения, как известно, как раз и описывают две поперечных поляризации безмассового векторного поля.

### Вопрос со звездочкой

Также основное уравнение можно записать. введя $\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\hat{\epsilon}_{\mu\nu\mu'\nu'}F^{\mu'\nu'}$. Докажите, что оно будет иметь вид

$$F_{\mu\nu}=\mathrm{i}\lambda\tilde{F}_{\mu\nu}$$