Лекция по основным свойствам скалярного поля

Yury Holubeu, December 31, 2023

Contents

1 Main Theory

1.1 Основные свойства скалярного поля

Типичный пример поля - скалярное поле. Этот пример используется во многих моделях, но нам сейчас он понадобится только для иллюстрации формализма.

1.1.1 Вывод свойств скалярного поля

По Пескину Шредеру

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij};$$
$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Обобщение для непрерывной системы вполне естественно: так как $\pi(\mathbf{x})$ является плотностью импульса, то вместо символа Кронекера мы берем дельта-функцию Дирака:

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y});$$
$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0.$$

(До сих пор мы используем представление Шредингера, в котором ϕ и π не зависят от времени. В следующем разделе мы перейдем к представлению Гейзенберга и эти «одновременные» коммутационные соотношения будут по-прежнему верны при условии, что оба оператора рассматриваются в один и тот же момент времени.)

Так как гамильтониан является функцией ϕ и π, то он также становится оператором. Следующая задача состоит в том, чтобы, зная гамильтониан, найти его спектр. Так как нет очевидного способа сделать это, попробуем записать уравнение КлейнаГордона в фурье-пространстве. Если разложить классическое поле Клейна-Гордона

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t)$$

(где $\phi^*(\mathbf{p}) = \phi(-\mathbf{p})$, так что $\phi(\mathbf{x})$ вещественно), то уравнение (2.7) принимает вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(|\mathbf{p}|^2 + m^2\right)\right] \phi(\mathbf{p}, t) = 0.$$

Это - уравнение движения для простого гармонического осциллятора с частотой

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}.$$

Мы знаем, как найти спектр простого гармонического осциллятора (ПГО). Коротко напомним, как это делается. Запишем гамильтониан в виде:

$$H_{\text{Пго}} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2.$$

Чтобы найти собственные значения $H_{\text{Пго}}$, запишем ϕ и p через лестничные операторы:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a + a^\dagger\right); \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right).$$

Каноническое коммутационное соотношение $[\phi, p] = i$ эквивалентно соотношению

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1.$$

Гамильтониан можно теперь переписать в виде:

$$H_{\text{Пго}} = \omega\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right).$$

Состояние $|0\rangle$, такое, что $a|0\rangle=0$, является собственным состоянием H с собственным значением $\frac{1}{2}\omega$, равным энергии нулевых колебаний. Далее, с помощью коммутаторов

$$\left[H_{\text{Пго}}, a^{\dagger}\right]=\omega a^{\dagger}, \quad \left[H_{\text{Пго}}, a\right]=-\omega a$$

легко проверить, что состояния

$$|n\rangle \equiv \left(a^{\dagger}\right)^{n}|0\rangle$$

являются собственными состояниями $H_{\text{Пго}}$ с собственными значениями $\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega$. Этими состояниями исчерпывается спектр.

Спектр гамильтониана Клейна-Гордона можем найти, используя тот же прием, но теперь каждая мода Фурье поля рассматривается как независимый осциллятор со своими собственными a и $a^{\dagger}$. По аналогии с (2.23) мы пишем:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^{3}p}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right); \\
\pi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^{3}p}{(2\pi)^{3}}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}}\left(a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}-a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right).
\end{aligned}$$

Обратные выражения для $a_{\mathbf{p}}$ и $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ через ϕ и π легко выводятся, но они редко используются. Для дальнейших вычислений полезно переписать (2.25) и (2.26) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^{3}p}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}+a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}; \\
\pi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^{3}p}{(2\pi)^{3}}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}}\left(a_{\mathbf{p}}-a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Коммутационное соотношение (2.24) принимает вид:

$$\left[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}\right]=(2\pi)^{3}\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right),$$

при помощи которого вычисляется коммутатор ϕ и π :

$$\begin{aligned}
\left[\phi(\mathbf{x}), \pi\left(\mathbf{x}'\right)\right] &= \int \frac{d^{3}p\, d^{3}p'}{(2\pi)^{6}} \frac{-i}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}}\left(\left[a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, a_{\mathbf{p}'}\right]-\left[a_{\mathbf{p}}, a_{-\mathbf{p}'}^{\dagger}\right]\right) e^{i\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'\right)}= \\
&= i\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right).
\end{aligned}$$

Этот коммутатор имеет правильный вид. (Если вычисления такого типа незнакомы читателю, то мы рекомендуем тщательно их проделать; после небольшой практики они становятся совершенно простыми, но имеют фундаментальное значение для формализма, рассматриваемого в следующих двух главах.)

Теперь можно выразить гамильтониан через повышающие и понижающие операторы. Начиная с выражения (2.8) через ϕ и π, получаем:

$$\begin{aligned}
H = \int d^{3}x \int \frac{d^{3}p\, d^{3}p'}{(2\pi)^{6}} e^{i\left(\mathbf{p}+\mathbf{p}'\right)\cdot\mathbf{x}}\Big\{ &-\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}{4}\left(a_{\mathbf{p}}-a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}\right)\left(a_{\mathbf{p}'}-a_{-\mathbf{p}'}^{\dagger}\right)+ \\
&+\frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'+m^{2}}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}\left(a_{\mathbf{p}}+a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}\right)\left(a_{\mathbf{p}'}+a_{-\mathbf{p}'}^{\dagger}\right)\Big\}= \\
&= \int \frac{d^{3}p}{(2\pi)^{3}}\omega_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}\left[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\right]\right).
\end{aligned}$$

Второе слагаемое пропорционально бесконечному c-числу $\delta(0)$. Это есть просто сумма по всем модам энергий нулевых колебаний $\omega_{\mathbf{p}}/2$. Наличие этого слагаемого следовало ожидать, но оно вызывает беспокойство. К счастью, этот бесконечный сдвиг энергии не может быть обнаружен экспериментально, так как эксперименты измеряют только разность между данной энергией и энергией основного состояния H. Поэтому мы игнорируем это бесконечное постоянное слагаемое во всех вычислениях. Возможно, что этот сдвиг энергии основного состояния может создавать проблему на более глубоком уровне теории.

1.1.2 О локальной калибровочной инвариантности и векторном поле

(возможно, про векторное поле больше в следующую лекцию перенесу)

Действие поля (I.2.2) при локальных U(1)-преобразованиях

$$\Phi^u(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}eu(x)}\Phi(x)$$

изменится, так как частное дифференцирование приводит к

$$\mathrm{i}\partial_\mu \Phi^u(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}eu(x)}\left(\mathrm{i}\partial_\mu + e\partial_\mu u(x)\right)\Phi(x).$$

При этом групповой множитель

$$g(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}eu(x)},$$

как и при глобальных калибровочных преобразованиях сокращается с множителем, который возникает у комплексно сопряженного поля, и вся разница сводится к возникновению векторного поля $\partial_\mu u(x)$, где мы полагаем, что групповой параметр $u(x)$ - это скаляр. Отсюда следует, что локальная калибровочная инвариантность действия может иметь место, если ввести калибровочное векторное поле $\mathcal{A}_\mu$, определив ковариантную производную на комплекснозначных полях ∇_μ как [5]

$$\mathrm{i}\nabla_\mu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{i}\partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu,$$

и потребовать, чтобы действие ковариантной производной на комплекснозначное поле подчинялось закону групповой композиции:

$$\mathrm{i}\nabla^u_\mu \Phi^u = g(u)\cdot \mathrm{i}\nabla_\mu \Phi \quad \Rightarrow \quad \left(\mathrm{i}\partial_\mu - e\mathcal{A}^u_\mu\right) g(u)\Phi = g(u)\left(\mathrm{i}\partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right)\Phi.$$

Отсюда в самом общем виде [6] преобразование калибровочного поля [4, 5] -

$$\mathcal{A}^u_\mu = g\cdot\mathcal{A}_\mu\cdot g^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{e} g\cdot\partial_\mu g^{-1},$$

а в случае группы U(1) находим стандартный закон градиентного преобразования электромагнитного поля:

$$\mathcal{A}^u_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu u.$$

Калибровочное векторное поле может быть чистой калибровкой, т.е. $\mathcal{A}_\mu \mapsto \partial_\mu u$, и в этом случае величина коммутатора

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \mathrm{i}e\mathcal{F}_{\mu\nu}$$

тождественно равна нулю во всем пространстве-времени. В общем случае тензор напряженности поля

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\frac{\mathrm{i}}{e}\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu - \mathrm{i}e\left[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu\right]$$

включает в себя коммутатор матриц калибровочного поля, и тогда говорят о неабелевой теории, когда этот коммутатор отличен от нуля, но для абелевой группы U(1) тензор напряженности поля принимает стандартный вид, известный из теории электромагнитного поля

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu.$$

Если этот тензор отличен от нуля, то поле нетривиально, оно отличается от чистой калибровки и может обладать собственной инерцией и динамикой, которая задается действием для калибровочного поля (gauge field)

$$S_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4 x \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu},$$

где множитель 1/4 определяет единицы измерения поля, которые называются системой Хевисайда. В неабелевом случае действие строится для компактных простых групп Ли, в которых задана положительно определенная метрика Киллинга g_{ab} для эрмитово самосопряженных генераторов группы t_a, так что элемент группы в представлении для полей материи вблизи групповой единицы

$$g(u) = \mathbb{1} - \mathrm{i} e t_a u^a, \quad u^a \to 0,$$

а калибровочное векторное поле принадлежит присоединенному представлению

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a t_a.$$

Для генераторов группы полагают, что

$$\mathrm{tr}\,(t_a t_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab},$$

а действие калибровочного поля в единицах Хевисайда равно

$$S_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x \,\mathrm{tr}\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right),$$

что согласуется с выражением для кинетической энергии при $e \to 0$. Генераторы группы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[t_a, t_b] = \mathrm{i} f_{ab}^c t_c,$$

где f_{ab}^c - это структурные константы группы Ли, а тензор напряженности поля принимает вид

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + e f_{ab}^c t_c \mathcal{A}_\mu^a \mathcal{A}_\nu^b.$$

Последний неабелев вклад в тензор напряженностей показывает, что у калибровочного поля возникает самодействие, так как неабелево поле обладает зарядом и поэтому взаимодействует само с собой, так как калибровочное поле взаимодействует с любым полем, обладающим групповым зарядом. Неабелевы калибровочные теории с динамическим векторным полем называются теориями Янга-Миллса.

1.1.3 Минимальное калибровочное взаимодействие

Ковариантная производная, входящая в действие поля, задает калибровочно инвариантное действие

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \left\{(\mathrm{i}\nabla_\mu \Phi)^* \,\mathrm{i}\nabla^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi\right\}.$$

Выделяя в этом действии вклад свободного поля S_{mf} найдем, что

$$S=S_{\mathrm{mf}}-\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{i} e\left(\Phi^* \partial_\mu \Phi-\left(\partial_\mu \Phi\right)^* \Phi\right) \mathcal{A}^\mu+e^2 \int \mathrm{d}^4 x \Phi^* \Phi \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu .$$

Здесь линейный по калибровочному полю вклад - это взаимодействие типа «ток-поле»

$$S_{\text {int }}=-\int \mathrm{d}^4 x \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}^\mu,$$

а квадратичный по калибровочному полю, контактный член возникает вследствие калибровочной инвариантности, и именно он обеспечивает эффект Хиггса: если поле имеет потенциал, в котором минимум достигается при постоянном значении

$$\left.\Phi^* \Phi\right|_{\mathrm{vac}}=\frac{1}{2} v^2,$$

т.е. выбор вакуумного поля $\left.\Phi\right|_{\mathrm{vac}}=v / \sqrt{2}$ фиксирует калибровку, и, стало быть, само вакуумное поле не является калибровочно инвариантной величиной, так как оно изменяется при калибровочных преобразованиях, то говорят что вакуум спонтанно [7] нарушает локальную калибровочную симметрию и приводит к возникновению массы калибровочного векторного поля (см. действие для массивного векторного поля [4, 5] (III.1.5) и уравнение Прока́ (III.1.6) в Главе 3), т.е. к короткодействующему стационарному потенциалу статических зарядов.

1.1.4 Нерелятивистский предел

Для положительночастотных и отрицательночастотных мод предел нерелятивистского движения необходимо рассматривать отдельно. Поэтому сделаем замену полевых переменных

$$\Phi=\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} m t} \Psi_{ \pm}(t, \boldsymbol{r}),$$

где множитель с экспонентой описывает зависимость мод от времени так, как это было бы при $\omega \rightarrow \pm m$, и рассмотрим действие в форме

$$S=\int \mathrm{d}^4 x \Phi^*\left(\mathrm{i} \nabla_\mu \mathrm{i} \nabla^\mu-m^2\right) \Phi$$

В терминах полей $\Psi_{\pm}$это действие после дифференцирования по времени и сокращения экспоненциальных множителей запишется как

$$S=\int \mathrm{d}^4 x \Psi_{ \pm}^*\left(\left(\pm m+\mathrm{i} \partial_t-e \mathcal{A}_0\right)^2-(-\mathrm{i} \nabla-e \mathcal{A})^2-m^2\right) \Psi_{ \pm},$$

где мы учли сигнатуру метрики Минковкого и записали квадрат 4-вектора через контравариантны компоненты: $\nabla_\mu \nabla^\mu=\nabla_0^2-\nabla^\alpha \nabla^\alpha$ с учетом, что $\nabla^\alpha=-\nabla_\alpha$. В нерелятивистском пределе полагают, что статический потенциал существенно меньше массы, а дифференцирование полей по времени дает вклады, подавленные по сравнению с умножением на массу:

$$\left|e \mathcal{A}_0\right| \ll m, \quad\left|\mathrm{i} \partial_t \Psi_{ \pm}\right| \ll m\left|\Psi_{ \pm}\right| .$$

Поэтому в ведущем приближении по этой малости

$$S \approx \int \mathrm{d}^4 x \Psi_{ \pm}^*\left(m^2 \pm 2 m\left(\mathrm{i} \partial_t-e \mathcal{A}_0\right)-(-\mathrm{i} \boldsymbol{\nabla}-e \mathcal{A})^2-m^2\right) \Psi_{ \pm}$$

Как видим, вклады, квадратичные по массе сокращаются, и после подстановки

$$\Psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\psi_{\pm}$$

мы получаем выражение для нерелятивистского действия

$$S_{\rm NR} = \int \mathrm{d}^4 x \psi^*_{\pm} \left(\pm \left(\mathrm{i}\partial_t - e\mathcal{A}_0\right) - \frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla - e\mathcal{A})^2 \right) \psi_{\pm}.$$

Экстремум этого действия при вариации по ψ^*_+ приводит к уравнению Шрёдингера для частицы с зарядом e в электромагнитном поле:

$$\mathrm{i}\partial_t\psi_+ = \left(\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla - e\mathcal{A})^2 + e\mathcal{A}_0 \right) \psi_+,$$

т.е. можно ввести оператор кинетического импульса

$$\hat{\mathcal{P}} = -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla} - e\mathcal{A}$$

и оператор гамильтониана для частицы с зарядом e

$$\hat{H}_e = \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{2m} + e\mathcal{A}_0,$$

так что волновая функция этой нерелятивистской частицы задается выражением

$$\psi_e^{\rm NR} = \psi_+ \approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\sqrt{2m}\Phi(x)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{i}\partial_t\psi_e^{\rm NR} = \hat{H}_e\psi_e^{\rm NR}.$$

Вариация нерелятивистского действия (I.4.1) по ψ^*_- приводит к уравнению

$$-\mathrm{i}\partial_t\psi_- = \left(\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla - e\mathcal{A})^2 - e\mathcal{A}_0 \right) \psi_-,$$

которое не совпадает с уравнением Шрёдингера для волновой функции, так как имеет неверный знак в левой части! Однако комплексное сопряжение этого уравнения дает

$$\mathrm{i}\partial_t\psi^*_- = \left(\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla + e\mathcal{A})^2 - e\mathcal{A}_0 \right) \psi^*_-,$$

что следует интерпретировать как уравнение Шрёдингера для волновой функции

$$\psi_{-e}^{\rm NR} = \psi^*_- \approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\sqrt{2m}\Phi^*(x)$$

которая описывает нерелятивтстскую частицу с зарядом -е в электромагнитном поле. 14 Глава 1. СКалярное ПолЕ Если выразить согласно (I.4.2) и (I.4.3) величину Φ через волновые функции частицы и античастицы в нерелятивистском приближении

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\psi_e^{\rm NR}(t,\boldsymbol{r}), \quad \Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\psi_{-e}^{\rm NR}(t,\boldsymbol{r})\right)^*,$$

то становится ясно, что, во-первых, величина Φ не может интерпретироваться как волновая функция, поскольку она при разных условиях нерелятивистсого предела переходит либо в волновую функцию частицы, либо в комплексно сопряженную волновую функцию античастицы. Во-вторых, временная компонента операторы $\hat{p}_\mu$ при действии на Φ не является энергией, так как для частицы эта компонента совпадает с энергией, а для античастицы $\hat{p}_0$ не совпадает с энергией, а равна энергии античастицы с противоположным знаком. Поэтому отрицательные собственные значения оператора $\hat{p}_0$ соответствуют не отрицательным значениям энергии, а положительным. Наконец, в-четвертых, в нерелятивистском пределе (I.4.4) легко найти и ведущие вклады в ток Нётер (I.2.8): для положительночастотной моды

$$\mathfrak{J}_0 = e\left|\psi_e^{\mathrm{NR}}\right|^2, \quad \boldsymbol{J} = -e\frac{\mathrm{i}}{2m}\left(\left(\psi_e^{\mathrm{NR}}\right)^* \nabla\psi_e^{\mathrm{NR}} - \left(\boldsymbol{\nabla}\psi_e^{\mathrm{NR}}\right)^* \psi_e^{\mathrm{NR}}\right),$$

так что закон сохранения тока Нётер сводится к закону сохранения вероятности с 4-током плотности вероятности частицы

$$j^\mu = \frac{1}{e}\mathfrak{g}^\mu,$$

а для отрицательночастотной моды

$$\mathcal{J}_0 = -e\left|\psi_{-e}^{\mathrm{NR}}\right|^2, \quad \boldsymbol{J} = e\frac{\mathrm{i}}{2m}\left(\left(\psi_{-e}^{\mathrm{NR}}\right)^* \boldsymbol{\nabla}\psi_{-e}^{\mathrm{NR}} - \left(\boldsymbol{\nabla}\psi_{-e}^{\mathrm{NR}}\right)^* \psi_{-e}^{\mathrm{NR}}\right),$$

так что закон сохранения тока Нётер сводится к закону сохранения вероятности с 4-током плотности вероятности античастицы

$$j^\mu = -\frac{1}{e}\mathfrak{f}^\mu.$$

Эти факты показывают, что величина Φ - это особая конструкция для релятивистского описания физической системы, взаимодействующей с электромагнитным полем, конструкция, отличная от волновой функции. Эта конструкция - релятивистское скалярное поле.

Наблюдаемые характеристики физической системы описываются операторами, которые действуют в пространстве квантовых состояний. Построение этих операторов и пространства состояний для поля называют вторичным квантованием, имея ввиду связь поля с волновыми функциями частиц и античастиц в нерелятивистском пределе: нерелятивистские частица обладают волновыми функциями, но сами эти волновые функции при релятивистском рассмотрении становятся операторами в пространстве квантовых состояний.

2 Additional Theory

2.1 О настоящем (квантовом) скалярном поле

2.1.1 Идея вторичного квантования

(уже на лекции может быть это и было отвечено? потом напишу)

2.1.2 Вторичное квантование скалярного поля

(это у ПШ уже скорее всего я переписывал в лекции, посмотрю.)

2.1.3 Идея квантования через интеграл по траекториям

Типичный интеграл по траекториям

(говорим о частицах, потом это же к полям будет применено.)
(тут важные слова об общем квантмехе для частицы, с которого начинаем)

Разделим время T на N промежутков, каждый продолжительностью $\delta t = T/N$. Тогда запишем

$$\left\langle q_F \left| e^{-iHT} \right| q_I \right\rangle = \left\langle q_F \left| e^{-iH\delta t} e^{-iH\delta t} \ldots e^{-iH\delta t} \right| q_I \right\rangle .$$

Теперь воспользуемся тем фактом, что $|q\rangle$ образует полный набор состояний, так что $\int dq |q\rangle\langle q| = 1$. Вставим 1 между всеми этими множителями $e^{-iH\delta T}$ и запишем

$$\begin{aligned} &\left\langle q_F \left| e^{-iHT} \right| q_I \right\rangle = \\ &= \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j \right) \left\langle q_F \left| e^{-iH\delta t} \right| q_{N-1} \right\rangle \left\langle q_{N-1} \left| e^{-iH\delta t} \right| q_{N-2} \right\rangle \ldots \\ &\ldots \left\langle q_2 \left| e^{-iH\delta t} \right| q_I \right\rangle . \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельный множитель $\left\langle q_{j+1} \left| e^{-iH\delta t} \right| q_j \right\rangle$. Сделаем небольшой шаг вперед, вычислив множитель для случая свободных частиц, когда $H = \widehat{p}^2/2m$. Знак крышечки над $\hat{p}$ говорит о том, что это оператор. Обозначим как $|p\rangle$ собственное состояние $\widehat{p}$, а именно $\widehat{p}|p\rangle = p|p\rangle$. Помните ли вы из курса квантовой механики, что $\langle q \mid p\rangle = e^{ipq}$? Конечно, помните. Эта запись означает, что собственное состояние импульса есть плоская волна в координатном представлении. (Нормировка такова, что $\int (dp/2\pi)|p\rangle\langle p| = =1$.) Снова подставляя полный набор состояний, получаем

$$\begin{aligned} \left\langle q_{j+1} \left| e^{-i\delta t\left(\hat{p}^2/2m\right)} \right| q_j \right\rangle &= \int \frac{dp}{2\pi} \left\langle q_{j+1} \left| e^{-i\delta t\left(\widehat{p}^2/2m\right)} \right| p \right\rangle \langle p \mid q_j\rangle = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\delta t\left(p^2/2m\right)} \langle q_{j+1} \mid p\rangle \langle p \mid q_j\rangle = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\delta t\left(p^2/2m\right)} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} . \end{aligned}$$

Обратите внимание, что мы убрали знак крышечки с оператора импульса в показателе экспоненты: поскольку оператор импульса действует на собственное состояние, его можно заменить своим собственным значением.

Интеграл по p известен как гауссов интеграл, с которым вы уже, наверное, знакомы. Если нет, обратитесь к приложению 1 к этой главе. Вычисляя интеграл по p, получаем

$$\begin{aligned} \left\langle q_{j+1} \left| e^{-i\delta t\left(\hat{p}^2/2m\right)} \right| q_j \right\rangle &= \left(\frac{-i2\pi m}{\delta t} \right)^{1/2} e^{\left[im(q_{j+1}-q_j)^2\right]/2\delta t} = \\ &= \left(\frac{-i2\pi m}{\delta t} \right)^{1/2} e^{i\delta t(m/2)\left[(q_{j+1}-q_j)^2/\delta t\right]^2} . \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3), приходим к

с $q_0 \equiv q_I$ и $q_N \equiv q_F$. Теперь можно перейти к непрерывному пределу $\delta t \to 0$. Ньютон и Лейбниц показали, что можно заменить $\left[\left(q_{j+1} - q_j \right) / \delta t \right]^2$ на $\dot{q}^2$, а $\delta t \sum_{j=0}^{N-1}$ на $\int_0^T dt$. В конечном итоге определяем следующий интеграл по траекториям:

$$\int Dq(t) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-i2\pi m}{\delta t} \right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j$$

Таким образом, мы получили представление в виде интеграла по траекториям

$$\left\langle q_F \left| e^{-iHT} \right| q_I \right\rangle = \int Dq(t) e^{i\int_0^T dt \frac{1}{2} m\dot{q}^2} .$$

Этот фундаментальный результат говорит о том, что для получения $\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right| q_I\right\rangle$ необходимо просто интегрировать по всем возможным траекториям $q(t)$, таким что $q(0)=q_I$ и $q(T)=q_F$.

В качестве упражнения проверьте, что если начать с гамильтониана для частицы в потенциале $H=\widehat{p}^2/2m+V(\widehat{q}\ )$ (и снова знак крышечки над p обозначает оператор), то окончательный результат был бы следующим:

$$\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right| q_I\right\rangle=\int Dq(t)e^{i\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)\right]}$$

В величине $\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)$ мы узнаем лагранжиан $L(\dot{q},q)$. Лагранжиан появляется естественным образом из гамильтониана. В общем случае имеем

$$\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right| q_I\right\rangle=\int Dq(t)e^{i\int_0^T dtL(\dot{q},q)}.$$

Во избежание возможной путаницы, позвольте мне уточнить, что t является переменной интегрирования в показателе экспоненты в правой части последней формулы. Тот факт, что t появляется в мере интеграла по траекториям $Dq(t)$, просто свидетельствует о том, что q есть функция от t (как если бы нам стоило это напомнить). И действительно, данную меру мы будем часто для краткости обозначать как Dq. Вы, должно быть, помните, что в классической механике $\int_0^T dtL(\dot{q},q)$ называется действием $S(q)$. Действие S является функционалом от функции $q(t)$.

Зачастую, вместо того чтобы уточнять, что частица стартует из начальной точки q_I и завершает движение в конечной точке q_F, мы будем говорить, что частица стартует из некоторого начального состояния I и завершает движение в некотором конечном состоянии F. В этом случае мы должны вычислить выражение $\left\langle F\left|e^{-iHT}\right| I\right\rangle$, которое после подстановки полного набора состояний можно переписать в виде

$$\int dq_F\int dq_I\left\langle F\mid q_F\right\rangle\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right| q_I\right\rangle\left\langle q_I\mid I\right\rangle$$

или, если смешать обозначения Шредингера и Дирака, в виде

$$\int dq_F\int dq_I\Psi_F\left(q_F\right)^*\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right| q_I\right\rangle\Psi\left(q_I\right)$$

В большинстве случаев в качестве $|I\rangle$ и $|F\rangle$ мы будем брать основное состояние, обозначаемое как $|0\rangle$. Общепринято обозначать амплитуду $\left\langle 0\left|e^{-iHT}\right| 0\right\rangle$ символом Z.

На том уровне математической строгости, с которым мы имеем дело, интеграл по траекториям $\int Dq(t)e^{i\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)\right]}$ считается сходящимся, поскольку осциллирующие фазовые множители от различных траекторий взаимно сокращаются. Для большей строгости можно было совершить так называемый поворот Вика к евклидовому времени. Он сводится к замене $t\to -it$ и повороту контура интегрирования в комплексной плоскости t, так что интеграл преобразуется к виду

$$Z=\int Dq(t)e^{-\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2+V(q)\right]}$$

известному как евклидов интеграл по траекториям.

От матраца к полю

(на этот раздел раньше много указаний должно быть!!!)

Представление в терминах интеграла по траекториям

$$Z \equiv \left\langle 0 \left| e^{-iHT} \right| 0 \right\rangle = \int Dq(t) e^{i \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right]},$$

которое мы получили для квантовой механики одной частицы, можно обобщить практически немедленно до случая N частиц с гамильтонианом

$$H = \sum_a \frac{1}{2m_a} \widehat{p}_a^2 + V\left(\widehat{q}_1, \widehat{q}_2, \ldots, \widehat{q}_N\right).$$

Мы просто мысленно следим за положением частиц q_a с $a = 1, 2, \ldots, N$. Применяя те же шаги, что и прежде, получаем

$$Z \equiv \left\langle 0 \left| e^{-iHT} \right| 0 \right\rangle = \int Dq(t) e^{iS(q)}$$

с действием

$$S(q) = \int_0^T dt \left(\sum_a \frac{1}{2} m \dot{q}_a^2 - V\left[q_1, q_2, \ldots, q_N\right] \right).$$

Потенциальная энергия $V\left(q_1, q_2, \ldots, q_N\right)$ теперь включает энергию взаимодействия между частицами, а именно члены вида $v\left(q_a - q_b\right)$, а также энергию, обусловленную внешним потенциалом, то есть члены вида $w\left(q_a\right)$. В частности, запишем интеграл по траекториям, описывающий квантовую динамику матраца, речь о котором шла в главе I.1, с потенциалом

$$V\left(q_1, q_2, \ldots, q_N\right) = \sum_{ab} \frac{1}{2} k_{ab} q_a q_b + \ldots$$

Нам остается всего чуть-чуть до квантовой теории поля! Предположим, нас интересуют лишь явления, происходящие на масштабах много больших размера решетки l (рис. I.1.1). Говоря математически, мы берем непрерывный предел $l \to 0$. В этом пределе можно заменить индекс a у частиц на двумерный вектор положения $\vec{x}$ и поэтому писать $q(t, \vec{x})$ вместо $q_a(t)$. Согласно традиции заменим латинскую букву q на греческую φ. Функция $\varphi(t, \vec{x})$ называется полем.

Кинетическая энергия $\sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{q}_a^2$ теперь становится $\int d^2 x \frac{1}{2} \sigma (\partial \varphi / \partial t)^2$. Мы заменяем $\sum_a$ на $1/l^2 \int d^2 x$ и обозначаем массу m_a / l^2, приходящуюся на единицу площади, через σ. Мы считаем все m_a равными, в противном случае σ будет функцией от $\vec{x}$, система станет неоднородной, и нам будет трудно записать лоренц-инвариантное действие (см. ниже).

Сконцентрируемся на первом члене в $V = \sum_{ab} \frac{1}{2} k_{ab} q_a q_b + \ldots$ Запишем $2 q_a q_b = q_a^2 + q_b^2 - \left(q_a - q_b\right)^2$. Для простоты допустим, что k_{ab} связывает только ближайших соседей по решетке. Для пар ближайших соседей $\left(q_a - \; - q_b \right)^2 \simeq l^2 (\partial \varphi / \partial x)^2 + \ldots$ в непрерывном пределе производная очевидно берется в направлении, соединяющем узлы решетки a и b. Собирая все вместе, получим

$$\begin{aligned} S(q) \to S(\varphi) \equiv & \int_0^T dt \int d^2 x \mathcal{L}(\varphi) = \\ = & \int_0^T dt \int d^2 x \frac{1}{2} \left\{ \sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \rho \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\ & \left. - \tau \varphi^2 - \varsigma \varphi^4 + \ldots \right\}, \end{aligned}$$

где параметры ρ и τ зависят от k_{ab} и l. Точные соотношения нам не важны. В дальнейшем мы будем брать предел $T \to \infty$, так что сможем интегрировать все по пространству-времени в формуле (4).

Мы можем немного «причесать» это выражение, записав $\rho = \sigma c^2$ и промасштабировав $\varphi \to \varphi/\sqrt{\sigma}$ так, чтобы в лагранжиане появилась комбинация $(\partial\varphi/\partial t)^2 - c^2\left[(\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2\right]$. Параметр c очевидно имеет размерность скорости и определяет фазовую скорость волн на нашем матраце. Интересно то, что мы естественным образом получаем лоренцинвариантность, в которой играет роль скорости света.

Мы начали с рассмотрения матраца по педагогическим соображениям. Разумеется, никто и не полагает, что наблюдаемые в природе поля, скажем, мезонное поле или поле фотона, в действительности состоят из точечных масс, соединенных пружинами. Современная точка зрения, которой я дам имя Гинзбурга-Ландау, заключается в том, что надо начинать с требуемой симметрии, например, лоренц-инвариантности, если нас интересует физика элементарных частиц, затем выбрать нужные нам поля, определив, как они преобразуются под действием симметрии (в рассмотренном случае мы выбрали скалярное поле φ), и затем записать действие, включающее не более двух временных производных (потому что мы не знаем, как квантовать действие, содержащее более двух производных по времени). Приходим к лоренц-инвариантному действию (положив $c = 1$)

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{g}{3!}\varphi^3 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \ldots\right],$$

где различные численные коэффициенты введены для дальнейшего удобства. Релятивистская запись $(\partial\varphi)^2 \equiv \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi = (\partial\varphi/\partial t)^2 - (\partial\varphi/\partial x)^2 -$ - $(\partial\varphi/\partial y)^2$ объясняется в разделе, посвященном условным обозначениям. Размерность пространства-времени d может, очевидно, выражаться любым целым числом, хотя в нашей модели матраца она равна 3 . Мы часто пишем $d = D + 1$ и говорим при этом о $(D+1)$-мерном пространстве-времени.

Подводя итог, приходим к таблице

$q \to \varphi$
$a \to \vec{x}$
$q_a(t) \to \varphi(t, \vec{x}) = \varphi(x)$
$\sum_a \to \int d^D x q(t)$

Таким образом, мы наконец получили интеграл по траекториям, определяющий теорию скалярного поля в $d = (D+1)$-мерном пространстве-времени:

$$Z = \int D\varphi e^{i\int d^d x\left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi)\right)}.$$

Заметьте, что $(0+1)$-мерная квантовая теория поля - это просто квантовая механика.

Подпрыгивая на матраце вверх и вниз, мы может создать тут и там расходящиеся волновые пакеты (рис. I.3.1). Они в точности соответствуют источникам (и стокам) для частиц. Таким образом, нам в самом деле придется вычислить интеграл по траекториям

$$Z = \int D\varphi e^{i\int d^4 x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi) + J(x)\varphi(x)\right]}$$