

# Partial Differential Equations

Yury Holubeu \*

September 9, 2024

This note is not intended for distribution.

The methods and problems of equations of mathematical physics, the basics of functional analysis are given, and applications are indicated. Links below show contents of solved [problems](#), summary of [other topics](#). I used the following [literature](#).

Цели: 1) Тренируюсь по конспектам Карлова, а также по методичке Колесниковой, смотрю курс Лебедева, на 2 недели работа.

## Contents

<b>1</b>	<b>Preface and main motivation</b>	<b>9</b>
<b>I</b>	<b>—— Typical PDE in a Nutshell ——</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Main methods of PDE-s</b>	<b>10</b>
2.1	Instructions for typical methods of PDE-s . . . . .	10
2.1.1	Метод Фурье на отрезке, на круге, на (?) . . . . .	10
2.1.2	О методе функции Грина (!!!) . . . . .	10
2.1.3	Классификация, приведение к каноническому виду . . . . .	11
2.1.4	О вариационных методах . . . . .	14
2.1.5	Метод решения обобщенных задач . . . . .	14
2.1.6	О простейших струнах . . . . .	14
2.1.7	Проверка решений в компьютере (?) . . . . .	16
2.2	Main linear PDE-s . . . . .	16
2.2.1	Об уравнении Шредингера . . . . .	16
2.2.2	Об волновом уравнении . . . . .	18
2.2.3	Об уравнении диффузии (теплопроводности) . . . . .	19
2.2.4	Об интегральных уравнениях . . . . .	21
2.2.5	Уравнения Лапласа и Пуассона . . . . .	22
2.2.6	Задачи Коши . . . . .	22
2.2.7	О смешанных задачах . . . . .	24
2.2.8	О задаче Штурма-Лиувилля . . . . .	25
2.2.9	Суммирование рядов, мацубаровские частоты . . . . .	29
2.3	Other famous PDE-s . . . . .	29
2.3.1	Об уравнении Стокса . . . . .	29
2.4	Простейшие нелинейные уравнения . . . . .	29
2.4.1	Об уравнении Хопфа . . . . .	29
2.4.2	Об уравнении Бюргерса . . . . .	31
2.4.3	О нелинейном уравнении Шрёдингера . . . . .	32
2.4.4	Об уравнении Гросса-Питаевского . . . . .	34
2.4.5	Об уравнениях Эйлера и Навье-Стокса . . . . .	35
2.4.6	Об уравнении Кортевега-де-Фриза . . . . .	35
2.4.7	Об уравнении синус-Гордон . . . . .	35
2.4.8	Об одномерном нелинейном уравнении . . . . .	35
2.4.9	О неётеровских интегралах движения . . . . .	35
2.5	Functional and mathematical analysis main methods . . . . .	35
2.5.1	Fourier, Laplace, Mellin transforms . . . . .	35
2.5.2	О задачах про операторы . . . . .	37
2.5.3	Основные свойства линейных дифф. операторов (!!!) . . . . .	38
2.5.4	О свойствах операторов . . . . .	40
2.5.5	О конструкциях гармонического анализа . . . . .	41

---

\*yuri.holubev@gmail.com

2.5.6	Основное о функциональных пространствах для PDE	41
2.5.7	Дельта-функция, ее производные, функция Хевисайда	47
2.6	Main special functions for PDE-s	47
2.6.1	О сферических функциях	47
2.6.2	О функциях Бесселя	47
2.6.3	О других функциях	47

## II Basic Classical and General PDE Methods 48

### 3 PDE by Lebedev, Kolokolov 48

3.1	Линейные эволюционные уравнения	48
3.1.1	1.1 Эволюционные уравнения с постоянными коэффициентами	48
3.1.2	1.1.1 Уравнение первого порядка	48
3.1.3	1.1.2 Уравнения порядка выше первого	50
3.1.4	1.1.3 Матричное уравнение	52
3.1.5	1.2 Преобразование Лапласа эволюционных задачах	55
3.1.6	1.3 Уравнения Вольтерры	58
3.1.7	1.4 Неоднородная по времени релаксация	59
3.1.8	1.5 Справочные материалы к главе	60
3.1.9	1.5.1 Временное преобразование Фурье	60
3.1.10	1.5.2 Дельта-функция Дирака	62
3.1.11	1.5.3 Преобразование Лапласа	65
3.2	Статические линейные поля	66
3.2.1	2.1 Одномерный случай	66
3.2.2	2.1.1 Поведение решения вблизи особых точек	69
3.2.3	2.1.2 Задачи на собственные значения	71
3.2.4	2.2 Электростатические задачи.	73
3.2.5	2.2.1 Двумерные гармонические функции	77
3.2.6	2.3 Собственные функции уравнения Шрёдингера	79
3.2.7	2.3.1 Уравнение Шрёдингера в Кулоновском потенциале	80
3.2.8	2.4 Справочные материалы к главе	82
3.2.9	2.4.1 Собственные функции оператора Штурма-Лиувилля	82
3.2.10	2.4.2 Преобразование Фурье	85
3.3	Специальные функции	88
3.3.1	3.1 Гамма-функция Эйлера	88
3.3.2	3.2 Функция Эйри	91
3.3.3	3.3 Функции Бесселя	95
3.3.4	3.4 Полиномы Лежандра	100
3.3.5	3.5 Полиномы Эрмита	106
3.3.6	3.6 Вырожденная гипергеометрическая функция	110
3.3.7	3.7 Справочные материалы к главе	113
3.3.8	3.7.1 Метод Лапласа	113
3.3.9	3.7.2 Метод перевала и стационарной фазы	114
3.3.10	3.7.3 Метод WKB	116
3.4	Динамические линейные поля	117
3.4.1	4.1 Волновое движение в однородной среде	117
3.4.2	4.1.1 Закон дисперсии	117
3.4.3	4.1.2 Излучение	119
3.4.4	4.1.3 Уравнение на огибающую	120
3.4.5	4.1.4 Уравнение Гельмгольца	122
3.4.6	4.2 Динамические полевые задачи	123
3.4.7	4.2.1 Уравнение диффузии	124
3.4.8	4.2.2 Уравнение Стокса	126

3.4.9	4.3 Уравнение Шрёдингера	128
3.4.10	4.3.1 Уравнение Шрёдингера для свободной частицы	129
3.4.11	4.4 Справочные материалы к главе	129
3.4.12	4.4.1 Метод характеристик	130
3.5	Автономные системы	130
3.5.1	5.1 Фиксированные точки и предельные циклы	130
3.5.2	5.1.1 Уравнение Ван дер Поля	136
3.5.3	5.2 Бифуркации	138
3.5.4	5.2.1 Модель Лоренца	140
3.5.5	5.3 Лагранжевы уравнения	141
3.5.6	5.4 Релаксационные уравнения	142
3.5.7	5.4.1 Полевые релаксационные уравнения	145
3.5.8	5.5 Теория возмущений	148
3.5.9	5.5.1 Решение вблизи особой точки основного уравнения	149
3.5.10	5.5.2 Пограничный слой	151
3.6	Приближенные и специальные решения	153
3.6.1	6.1 Параметрическая неустойчивость	153
3.6.2	6.2 Метод усреднения и медленная Эволюция	156
3.6.3	6.2.1 Усредненные уравнения для волнового движения	160
3.6.4	6.3 Специальные решения	161
3.6.5	6.3.1 Автономные решения	161
3.6.6	6.3.2 Движение фронта	164
3.7	Нелинейные полевые уравнения	167
3.7.1	7.1 Уравнения Хопфа и Бюргера	167
3.7.2	7.1.1 Уравнение Хопфа	167
3.7.3	7.1.2 Уравнение Бюргера	169
3.7.4	7.2 Нелинейное уравнение Шрёдингера	171
3.7.5	7.2.1 Уравнение Гросса-Питаевского	173
3.7.6	7.3 Уравнения Эйлера и Навье-Стокса	176
3.7.7	7.4 Интегрируемые уравнения	179
3.7.8	7.4.1 Уравнение Кортевега-де-Фриза	179
3.7.9	7.4.2 Уравнение синус-Гордона	181
3.7.10	7.4.3 Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера	184
3.7.11	7.5 Справочные материалы к главе	185
3.7.12	7.5.1 Неётеровские интегралы движения	186
3.8	Интегральные уравнения	188
3.8.1	8.1 Уравнения Фредгольма	188
3.8.2	8.1.1 Уравнения с симметричными ядрами	192
3.8.3	8.2 Некоторые нелинейные интегральные уравнения	194
3.8.4	8.3 Сингулярные уравнения	197
3.8.5	8.4 Справочные материалы к главе	200
3.8.6	8.4.1 Формула Сохоцкого-Племеля	200
3.8.7	8.4.2 Преобразование Гильберта	201
3.9	Основы теории групп	202
3.9.1	9.1 Конечные группы	202
3.9.2	9.1.1 Представления группы	207
3.9.3	9.2 Группы и алгебры Ли	211
3.9.4	9.2.1 Алгебра Ли группы Ли	213
3.9.5	9.3 Представления групп Ли	217
3.9.6	9.4 Справочные материалы к главе	222
3.9.7	9.4.1 Матрицы Паули	222
3.9.8	9.4.2 Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа	223

<b>4</b>	<b>Методы для задач по Колесниковой</b>	<b>225</b>
4.1	Методы для задач по Колесниковой . . . . .	225
4.1.1	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью . . . . .	226
4.1.2	Полубесконечная струна с закреплённым или свободным концом . . . . .	231
4.1.3	Закон отражения от закреплённого (свободного) конца . . . . .	232
4.1.4	Несколько способов нахождения частного решения неоднородного уравнения	233
4.1.5	Некоторые способы решения задач Коши для однородного уравнения . . .	234
4.2	Метод Фурье на отрезке . . . . .	240
4.2.1	Метод Фурье на отрезке, когда оператор $-L_1^*$ - оператор Штурма-Лиувилля	240
4.2.2	Случай неоднородного уравнения и неоднородных краевых условий (??) . .	243
4.2.3	Рассмотрим теперь задачи 8 и 9. . . . .	243
4.2.4	Что делать, если оператор $-L_1^*$ не является оператором Штурма-Лиувилля?	249
4.3	Метод Фурье на круге. Функции Бесселя . . . . .	251
4.4	Эллиптические уравнения . . . . .	258
4.5	Метод Фурье с применением сферических функций . . . . .	262
4.5.1	7.1. Схема решения . . . . .	262
4.5.2	7.2. Как у конкретной сферической функции определить её порядок? . . .	266
<b>5</b>	<b>Функция Грина</b>	<b>267</b>
5.1	для линейного оператора . . . . .	268
5.1.1	Функция Грина по Константинову (??) . . . . .	268
5.2	Вычисление функции Грина линейного оператора с помощью преобразования Фурье	268
5.3	Методы функции Грина для приложений . . . . .	272
5.3.1	Функция Грина в теории поля . . . . .	272
5.3.2	Функция Грина в КТП . . . . .	272
<b>6</b>	<b>классические линейные уравнения</b>	<b>272</b>
6.1	Уравнение Шредингера . . . . .	272
6.1.1	корректность постановки задачи и существование решения . . . . .	272
6.1.2	решение УШ . . . . .	272
6.1.3	Типичные частные случаи уравнения Шредингера . . . . .	273
6.1.4	Другое про уравнение Шредингера . . . . .	276
6.2	эллиптические уравнения . . . . .	280
6.3	гиперболические уравнения . . . . .	280
6.4	линейное уравнение первого порядка . . . . .	280
6.4.1	строгая теория . . . . .	281
6.5	линейное уравнение порядка выше первого . . . . .	281
6.6	Матричное уравнение . . . . .	283
6.7	Классическая задача Коши . . . . .	284
6.7.1	двумерная . . . . .	285
6.7.2	трехмерная . . . . .	285
<b>7</b>	<b>линейный дифференциальный оператор</b>	<b>285</b>
7.1	функция Грина линейного дифференциального оператора . . . . .	285
7.1.1	Функция Грина для уравнения Шредингера . . . . .	285
<b>8</b>	<b>Краевые задачи</b>	<b>286</b>
8.1	уравнения с оператором Лапласа . . . . .	286
8.1.1	основные свойства оператора Лапласа . . . . .	286
8.1.2	уравнение Пуассона . . . . .	286
8.1.3	теорема о среднем . . . . .	288
8.2	примеры краевых задач . . . . .	290
8.2.1	Колебание струн . . . . .	290

8.2.2	Колебание мембран . . . . .	301
8.3	краевая задача в гильбертовом пространстве . . . . .	303
8.4	метод фурье! . . . . .	303
<b>9</b>	<b>Задачи в пространстве <math>S'(\mathbb{R})</math></b>	<b>303</b>
9.0.1	примеры простейших задач . . . . .	303
<b>10</b>	<b>Интегральные уравнения</b>	<b>304</b>
10.1	Теория Фредгольма . . . . .	304
10.1.1	Уравнения с вырожденными ядрами . . . . .	304
10.1.2	Общий случай . . . . .	304
10.1.3	Применение бесконечных систем алгебраических уравнений . . . . .	304
10.1.4	Применение численного интегрирования . . . . .	304
10.1.5	Уравнения с малыми ядрами . . . . .	304
10.1.6	возмущения ядра . . . . .	304
10.1.7	Характер решений . . . . .	304
10.1.8	Уравнения Вольтерра 2го рода . . . . .	304
10.1.9	Уравнения со слабой особенностью . . . . .	304
10.1.10	Другие темы . . . . .	304
<b>11</b>	<b>Другие методы</b>	<b>307</b>
11.1	метод характеристик . . . . .	307
11.2	потенциалы . . . . .	307
11.3	вариационная задача . . . . .	307
<b>12</b>	<b>Операторы</b>	<b>307</b>
12.1	линейный оператор . . . . .	307
12.2	Сопряжённый оператор линейного оператора в гильбертовом пространстве . . . . .	308
12.3	самосопряженные операторы . . . . .	308
12.3.1	примеры . . . . .	308
12.3.2	пример не симметричного оператора . . . . .	309
12.4	задачи на эволюцию операторов . . . . .	309
12.5	спектральное разложение операторов? . . . . .	310
12.5.1	пример поиска спектров . . . . .	310
12.5.2	оператор Лапласа . . . . .	310
12.5.3	Обобщенное преобразование фурье . . . . .	310
<b>13</b>	<b>Типичные обобщенные задачи</b>	<b>325</b>
13.0.1	Примеры задач про обобщенную задачу Коши для трехмерного волнового уравнения (!?!) . . . . .	325
<b>III</b>	<b>Problems in PDE</b>	<b>331</b>
<b>14</b>	<b>Типичные задачи и вопросы</b>	<b>331</b>
14.1	Общие вопросы . . . . .	331
14.1.1	Вопросы на понимание сути предмета . . . . .	331
14.1.2	Типичные задачи на проверку знаний . . . . .	331
14.1.3	Вопросы на понимание типичных деталей . . . . .	331
14.2	Задача Коши . . . . .	331
14.2.1	Задачи контрольной Лебедева МФТИ . . . . .	331
14.2.2	Задача Коши для уравнения второго порядка гиперболического типа . . . . .	336
14.2.3	Задача Коши для уравнения теплопроводности (?????) . . . . .	351
14.2.4	Задачи Коши для других уравнений и задача Гурса . . . . .	356
14.2.5	Задача Коши для уравнения первого порядка . . . . .	360

14.2.6	Задача Коши для квазилинейных уравнений	363
14.3	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	366
14.3.1	Задачи про задачу Штурма-Лиувилля	366
14.3.2	Задачи на разделение переменных для ур. Пуассона на плоскости	369
14.3.3	Задачи на Краевые задачи в пространстве	374
14.3.4	Задачи на Функция Грина оператора Лапласа	381
14.3.5	Задачи на Метод потенциалов	387
14.3.6	Задачи на Вариационные методы	393
14.4	Задачи на обобщенные функции	400
14.4.1	Задачи на Основные и обобщенные функции	400
14.4.2	Задачи на Дифференцирование обобщенных функций	404
14.4.3	Задачи на Прямое произведение и свертка обобщенных функций	409
14.4.4	Задачи на преобр. Фурье обобщенных функций медленного роста	414
14.4.5	Задачи на преобразование Лапласа обобщенных функций	418
14.4.6	Задачи на фундаментальные решения линейных дифф. операторов	421
14.5	Функциональные пространства и интегральные уравнения	425
14.5.1	Задачи на измеримость функций, интеграл Лебега	425
14.5.2	Задачи на Функциональные пространства	430
14.5.3	Задачи на интегральные уравнения	443
14.6	Задачи на смешанные задачи	458
14.6.1	Задачи на Метод разделения переменных	464
14.6.2	Задачи на Другие методы	476
14.7	Постановки краевых задач математической физики	479
14.7.1	Вывод уравнений и постановки краевых задач	479
14.7.2	Классификация уравнений второго порядка	486
15	Другие задачи	488
15.0.1	Другие задачи курса Лебедева	488
15.0.2	Задачи про мадубаровские суммы	488
15.0.3	Простейшие задачи о нелинейных уравнениях	488
IV	— Special PDE in a Nutshell —	490
16	Properties of PDE-s in a nutshell	490
16.0.1	Свойства типичных методов в двух словах	490
17	Особые методы в двух словах	493
17.1	Особые методы и применения функции Грина	493
17.1.1	Функция Грина для случайного блуждания, корреляторов, диаграммы (???)	493
17.2	О других типичных задачах	494
17.2.1	О простейших матричных уравнениях	494
17.2.2	О методе потенциалов (??)	494
17.2.3	Об автомодельных решениях (??)	495
17.2.4	О методе потенциалов (??)	495
17.2.5	Другие свойства обобщенных функций	495
17.2.6	Свойства обобщенных функций для интегральных уравнений	495
17.3	Special methods for curved spaces and gravity	495
V	Other PDE Topics and Methods	496

<b>18 Special methods of functional analysis (???)</b>	<b>496</b>
18.1 Mellin transform . . . . .	496
18.1.1 Main methods . . . . .	496
18.1.2 Examples . . . . .	496
18.1.3 Details about Mellin transform . . . . .	496
<b>19 Другие методы решения уравнений математической физики (???)</b>	<b>496</b>
19.0.1 Метод Гамильтона-Якоби (??) . . . . .	496
<b>20 Нелинейные уравнения</b>	<b>496</b>
<b>21 Интегрируемые системы в математической физике</b>	<b>496</b>
<b>22 Геометрические методы в математической физике</b>	<b>496</b>
<b>23 Численные решения и моделирование</b>	<b>496</b>
23.0.1 Основные методы численного решения . . . . .	496
23.0.2 Типичные примеры . . . . .	496
<b>24 Физические приложения</b>	<b>498</b>
24.1 квантовая теория поля . . . . .	498
24.2 оптика !!! . . . . .	499
24.2.1 волновое уравнение . . . . .	499
24.2.2 формула Кирхгофа в оптике . . . . .	499
24.3 уравнение теплопроводности!! . . . . .	499
24.4 плазма . . . . .	499
<b>VI Appendix</b>	<b>500</b>
<b>A Введение</b>	<b>500</b>
A.1 Мотивация . . . . .	500
A.2 Мышление для математической физики . . . . .	500
A.2.1 Подход к уравнениям математической физики . . . . .	500
A.2.2 Способы догадаться до всех главных идей . . . . .	501
A.2.3 Необходимые темы для математической физики . . . . .	501
A.2.4 Дополнительные темы для математической физики . . . . .	501
A.2.5 способы изучения математической физики . . . . .	501
A.3 Короткий исторический обзор . . . . .	501
A.4 Литература . . . . .	503
A.4.1 Основная литература . . . . .	503
A.4.2 Дополнительная и профессиональная литература . . . . .	504
A.5 Обзор математической физики . . . . .	505
A.5.1 математической физики в двух словах . . . . .	505
A.5.2 наиболее прикладные темы математической физики . . . . .	506
A.5.3 итоговые формулы и закономерности . . . . .	506
A.5.4 обзор теоретических подходов . . . . .	506
A.5.5 Удивительные факты . . . . .	506
A.5.6 Результаты математической физики . . . . .	506
A.5.7 Применения математической физики в других разделах физики . . . . .	506
A.5.8 Обзор дальнейших развитий математической физики . . . . .	506
A.6 связь математической физики с разными другими разделами . . . . .	506
A.6.1 связь с дифференциально геометрией . . . . .	506
A.7 Описание записи . . . . .	506
A.7.1 описание глав и разделов . . . . .	506

A.7.2	обозначения и константы . . . . .	506
A.8	обзор математической физики . . . . .	506
A.8.1	обзор теоретических подходов . . . . .	507
A.8.2	математическая физика в задачах дифференциальной геометрии . . . . .	507
A.8.3	обзор приложений . . . . .	507
A.9	Головоломки математической физики . . . . .	507
<b>В</b>	<b>Методы математического анализа для УМФ</b>	<b>507</b>
В.1	примеры различных преобразований . . . . .	507
В.1.1	вычисление свертки . . . . .	507
В.2	оценки . . . . .	507
В.3	интегралы . . . . .	507
В.3.1	теоремы Лебега . . . . .	507
<b>С</b>	<b>Пространства функций</b>	<b>507</b>
С.1	Гильбертово пространство . . . . .	507
С.1.1	свойства и дополнительные характеристики . . . . .	508
С.2	пространство Шварца . . . . .	508
С.2.1	свертка . . . . .	508
С.2.2	пределы . . . . .	508
С.3	О некоторых обобщенных функциях . . . . .	508
С.3.1	Дельта-функция, ее производные, функция Хевисайда . . . . .	508
С.3.2	бесселя . . . . .	519
С.3.3	полиномы эрмита . . . . .	519



# 1 Preface and main motivation

Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

**Часто физические задачи начинаются с/сводятся к уравнению в частных производных, и тогда все упирается в то, выучены эти методы или нет**

(это основная мотивация. пока других основных не знаю. Другие мотивации в конце. Распишу потом.)

**Стыдно не понимать основные уравнения математической физики, при этом заниматься теоретической физикой**

Всегда тогда будет неуверенность, а вдруг математики давно уже решили этот вопрос? Будет непонятно как математики решают те же задачи, которые ставятся в физике? (раскрою мысль, так и есть.)

**Задачи УМФ алгоритмичны и уже исследованы, так что не сложно их изучать**

Тоже это важно понимать, потому что если бы так не было - было бы на самом деле очень проблемно решать задачи. А так - предмет состоит в том, что просто говорят, как задачи решаются, ты берешь и решаешь. Вот так все просто, если не впадать в состояния, когда не усваивается информация.

---

## Part I

# —— Typical PDE in a Nutshell ——

## 2 Main methods of PDE-s

### 2.1 Instructions for typical methods of PDE-s

(суть методичек по умф!)

#### 2.1.1 Метод Фурье на отрезке, на круге, на (?)

(2 часа тренировок - и додумаю!)

##### Суть

Рассматривается метод разделения переменных Фурье на отрезке для уравнений гиперболического (например, волновое уравнение) и параболического (например, уравнение теплопроводности) типов. Для отыскания собственных функций и собственных значений задачи возникает оператор  $L_1^* = a^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)$ . Рассматриваются два случая: оператор  $-L_1^*$  является оператором Штурма-Лиувилля и оператор  $-L_1^*$  не является оператором Штурма-Лиувилля.

##### О методе Фурье на круге (?)

#### 2.1.2 О методе функции Грина (!!!)

##### Суть

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds G(t-s)\phi(s)$$

$$G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp[-\gamma(t-s)]\phi(s)$$

For

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t) \quad L := z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

и  $G = 0$  при  $t < 0$ .

Общее решение однородного уравнения  $L(d/dt)x = 0$  имеет вид

$$x = \sum_i b_i \exp(z_i t)$$

где  $b_i$  - произвольные константы. В этом же виде записывается функция Грина  $G(t)$  при  $t > 0$ . Коэффициенты же  $b_i$  находятся из условий, что при  $t \rightarrow +0$  производная  $d^{n-1}G/dt^{n-1} = 1$ , а для  $m < n-1$  производные  $d^m G/dt^m = 0$ , включая  $m = 0$ . Именно при этих условиях при применении оператора  $L(d/dt)$  возникает  $\delta$  функция и не возникают ее производные в правой части уравнения  $L(d/dt)G(t) = \delta(t)$ .

(!! одна из первых тем, которые пропишу!)

**Typical Green's functions**

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi \qquad G(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin(\nu t)$$

**Other important properties and other typical cases of Green's functions**

**Changing types of g.f.** (ret  $\rightarrow$  adv  $\rightarrow$  others)

**Matrix Green's function**

$$\left( \frac{d}{dt} + \hat{\Gamma} \right) \hat{G}(t) = \delta(t) \hat{1},$$

$$\hat{G} = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t)$$

Помимо собственных столбцов  $\mathbf{a}_i$  матрицы  $\Gamma$  надо ввести собственные строки  $\mathbf{b}_i^T$ , которые удовлетворяют уравнениям  $\mathbf{b}_i^T \hat{\Gamma} = \lambda_i \mathbf{b}_i^T$ . Собственные столбцы и строки можно выбрать ортонормированными  $\mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$ ,

$$\hat{G} = \theta(t) \sum_i e^{-\lambda_i t} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^T$$

(про Жорданову цепь и диагонализации допишу, см. задачи. просто находим с.в. типичным методом Ланала для такого случая, дальше находим матрицу перехода)

**2.1.3 Классификация, приведение к каноническому виду****1. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка в окрестности точки в случае двух переменных.**

[2] – 17-23 или [1] – 47-52.

**Суть (???)** (скоро выпишу)

**Минимальная теория** Канонический вид:

а)  $u_{xx} - u_{yy}$  для волнового уравнения ( $a_0$ );

б)  $u_{xx}$  для уравнения теплопроводности;

в)  $u_{xx} + u_{yy}$  для уравнения Пуассона.

Для случая двух переменных это приведение почти всегда можно сделать.

**Уравнение характеристик**

$$\frac{a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0}{a(x, y)dy^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)dx^2 = 0.} \quad \Rightarrow \quad (\text{ур характеристик})$$

### О технике дифференцирования.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \bullet &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \bullet + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \bullet; \\ \frac{\partial}{\partial y} \bullet &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} \bullet + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \bullet.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bullet &= \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bullet + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \bullet + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \bullet + (\dots) \frac{\partial}{\partial \xi} \bullet + (\dots) \frac{\partial}{\partial \eta} \bullet; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bullet &= \xi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bullet + 2\xi_y \eta_y \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \bullet + \eta_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \bullet + (\dots) \frac{\partial}{\partial \xi} \bullet + (\dots) \frac{\partial}{\partial \eta} \bullet; \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bullet &= \xi_x \xi_y \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bullet + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \bullet + \eta_x \eta_y \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \bullet + (\dots) \frac{\partial}{\partial \xi} \bullet + (\dots) \frac{\partial}{\partial \eta} \bullet.\end{aligned}$$

$$a(\xi, \eta)v_\xi + 2b(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + c(\xi, \eta)v_{\eta\eta} + \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_{11}) = 0$$

$$a := A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,$$

$$b := A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C_y\eta_y,$$

$$c := A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2;$$

$$\Phi(\xi, \eta, v, v_z, v_\eta) := F(x, y, u_1u_x, u_y) + (\dots)v_z + (\dots)v_\eta$$

Потребуем, чтобы  $a = 0$  и  $c = 0$  в  $U$ :

$$A(x, y)\xi_x^2(x, y) + 2B(x, y)\xi_x(x, y)\xi_y(x, y) + C(x, y)\xi_y^2(x, y) = 0,$$

$$A(x, y)\eta_x^2(x, y) + 2B(x, y)\eta_x(x, y)\eta_y(x, y) + C(x, y)\eta_y^2(x, y) = 0.$$

Таким образом, надо найти в классе  $C^2(U)$  два решения  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  уравнения

$$A(x, y)f_x^2(x, y) + 2B(x, y)f_x(x, y)f_y(x, y) + C(x, y)f_y^2(x, y) = 0,$$

для которых якобиан  $\begin{vmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{vmatrix} \neq 0$  в  $U$ . Тогда, сделав замену  $\xi = f_1(x, y), \eta = f_2(x, y)$ , мы получим уравнение

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

$$\tilde{\Phi} = -\Phi/2b.$$

$$df = f_x dx + f_y dy = 0, \quad (\text{вдоль хара-ки})$$

$$A(x, y)(dy)^2 - 2B(x, y)dx dy + C(x, y)(dx)^2 = 0.$$

Мнемоническое правило записи этого уравнения: взять главную часть исходного уравнения, заменить в ней производные по одной переменной на дифференциалы другой переменной, изменить знак на противоположный при смешанной производной и приравнять нулю.

Если  $f_x \neq 0$  в окрестности  $U$  (или в некоторой меньшей окрестности), то уравнение (2.6) можно переписать в следующем виде:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно  $\frac{dy}{dx}$  с дискриминантом  $D = 4B^2 - 4AC$ .

Возможны следующие варианты:

1) существует окрестность  $V$  точки  $(x_0, y_0)$  ( $VU$ ), в которой а)  $D > 0$ , б)  $D = 0$ , в)  $D < 0$ ;

2)  $D(x_0, y_0) = 0$  и в любой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  дискриминант  $D$  отличен от тождественного нуля.

Рассмотрим каждый случай в отдельности

1.а)  $D > 0$ . Тогда существуют два корня квадратного уравнения (2.7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y) - \sqrt{\frac{1}{4}D(x, y)}}{A(x, y)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y) + \sqrt{\frac{1}{4}D(x, y)}}{A(x, y)}.$$

В правых частях стоят функции из класса  $C^2(V)$ . Из курса дифференциальных уравнений известно, что для таких уравнений существуют первые интегралы  $f_1(x, y) = \text{const}$  и  $f_2(x, y) = \text{const}$  из того же класса, и, следовательно, существует замена переменных  $\xi = f_1(x, y), \eta = f_2(x, y)$ , причем

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} \neq 0 \text{ в } V.$$

Это и есть искомая замена, переводящая уравнение (2.1) в уравнение (2.5) в окрестности  $V$ . Для приведения уравнения (2.5) к каноническому виду

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta)$$

достаточно положить  $w(\alpha, \beta) = \langle (\alpha + \beta, \alpha - \beta) \rangle$ , то есть перейти к новым переменным  $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$  и  $\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$ .

Замечание 4. Вид уравнения (2.5) иногда называют первым каноническим, а уравнения (2.8) - вторым каноническим.

1.б)  $D = 0$ . Аналогично случаю 1.а мы можем найти функции  $f_1$  и  $f_2$ , но только в этом случае они будут линейно зависимы, поскольку  $D = 0$ . Сделаем замену переменных  $\xi = f_1(x, y), \eta = f_2(x, y)$ , где функция  $(x, y)$  выбирается произвольным образом из соображений невырожденности замены. Тогда уравнение (2.1) перейдет в уравнение

$$2b(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)v_{\eta\eta} + \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0$$

Заметим, что функции  $A$  и  $C$  одного (для определенности неотрицательного) знака, так как  $AC = B^2 \geq 0$ . Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} b &= A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right) \left(\sqrt{A}\eta_x \pm \sqrt{C}\eta_y\right). \end{aligned}$$

Здесь знаки "+" или "-" выбираются в зависимости от знака коэффициента  $B$  ( $B = \pm\sqrt{AC}$ ). В силу уравнения характеристик (2.4) первый сомножитель в последнем выражении для  $b$  равно нулю:

$$\left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

Итак,  $b = 0$ , и мы получили уравнение канонического вида:

$$v_{\eta\eta} = -\Phi/c$$

1.в)  $D < 0$ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B(x, y) - i\sqrt{\frac{1}{4}|D(x, y)|}}{A(x, y)} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{B(x, y) + i\sqrt{\frac{1}{4}|D(x, y)|}}{A(x, y)}.$$

Тогда функции  $\xi = f_1(x, y)$  и  $\eta = f_2(x, y)$  можно выбрать так, что они будут комплексносопряженными, и в новых, уже действительных, координатах

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \beta = \frac{\xi - \eta}{2i}$$

уравнение (2.1) примет канонический вид

$$w_{\alpha\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta).$$

2) Если  $D(x_0, y_0) = 0$  и в любой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  есть точка, в которой  $D = 0$ , то уравнение (2.1) можно привести к каноническому виду только в точке  $(x_0, y_0)$  (см. §3).

Пример 1. Уравнение Трикоми:  $u_{xx} + xu_y = 0$ .

Для  $x > 0$  в соответствии с 1.в оно приводится к  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0$ ,  $\eta < 0$  для  $x < 0$   $u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0$ ,  $\xi > \eta$ . При  $x = 0$  уравнение Трикоми уже имеет канонический вид, но ни в какой окрестности точки с нулевой абсциссой оно не может быть приведено к каноническому виду.

## 2.1.4 О вариационных методах

(см. пока задачи, не занимался ими много пока)

**Суть**

**О случаях применимости (???)**

### 2.1.5 Метод решения обобщенных задач

**Алгоритм решения от Константинова (???)**

(то, чему нас учили, тут чисто суть этого)

**О том, когда нужно использовать строгие методы (????)**

(самый актуальный вопрос, который пока я не ответил)

### 2.1.6 О простейших струнах

(Колесникову прочту - пропишу, дело максимум 3 часов)

**О способах решения**

Типичная задача о колебании полубесконечной струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), x \geq 0 \\ (\alpha u + \beta u_x)|_{x=0} = \varphi(t), t \geq 0 \end{cases}$$

• Сначала находится частное решение заданного уравнения и выписывается его общее решение:

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at) + u_{\text{частн}}.$$

2 • Теперь решается задача Коши.

Так как начальные условия заданы на струне, т.е. при  $x \geq 0$ , то и функции  $f(x), g(x)$  находятся для  $x \geq 0$ . А так как затем решение выписывается для  $f(x + at) + g(x - at)$ , то найденное решение имеет место в области, где  $x + at \geq 0, x - at \geq 0, x \geq 0, t > 0$ . Эту область обозначим  $D_1$ . При этом оказывается, что  $x + at \geq 0$  для всей первой четверти, где надо найти решение задачи, а потому  $f(x + at)$  определилось во всей заданной области. Осталось определить  $g(x - at)$  для  $x - at \leq 0, t > 0, x > 0$ .

3 • Решаем краевую задачу. Это решение имеет место в области  $D_2 : x + at \geq 0, x - at \leq 0, x \geq 0, t \geq 0$ .

4 • Решения в областях и записываются разными формулами - осталось «сшить» их. На самом деле, «сшивать» надо только  $g(x - at)$ , т. к.  $f(x + at)$  - одно.

(??? что-то с четвертями я еще не додумал, додумаю! почему там в одной и другой четверти решения получаются???)

(тут указание на метод Даламбера, им тоже можно решать.)

**Как найти частное решение?** (?!?!?!)

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$$

• Если в уравнении  $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t)$  выполнено условие

$$\square f(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta f(x, t) = bf(x, t), \quad b \neq 0,$$

т. е. свободный член является собственным вектором волнового оператора, то частное решение можно искать в виде

$$u_{\text{частн}} = cf(x, t).$$

2 • Если в уравнении  $u_{tt} = a^2 \Delta u + g(x, t)$  свободный член имеет вид

$$g(x, t) = \varphi_0(t)\psi_0(x)$$

$\Delta \psi_0(x) = \lambda \psi_0(x)$ , т. е.  $\psi_0(x)$  - собственная функция оператора Лапласа (в данном случае одномерного), то частное решение можно искать в виде  $u_{\text{частн}} = f(t)\psi_0(x)$ ,  $f(t)$  - искомая функция.

• Действительно, после подстановки в уравнение и сокращения на  $\psi_0(x)$  получим

$$f''(t) = a^2 \lambda f(t) + \varphi_0(t).$$

Характеристики - это линии так называемого слабого разрыва, т.е. при переходе через них могут «рваться» производные. Поэтому решение не всегда достаточно гладкое во всей первой четверти - можем получить в том или ином смысле обобщённое решение.

## Полубесконечная струна с закреплённым или свободным концом

Задача о своб. колебаниях  $\infty$  струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

решается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi.$$

Если начальные условия нечётные, т. е.  $u_0(x) = -u_0(-x)$ ,  $u_1(x) = -u_1(-x)$ , то решение  $u(x, t)$  - тоже нечётная функция, и

$$u(x, t)|_{x=0} = \frac{u_0(at) + u_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} u_1(\xi) d\xi = 0.$$

Если же  $u_0(x) = u_0(-x)$ ,  $u_1(x) = u_1(-x)$  - чётные, то  $u(x, t)$  - чётная функция и

$$u_x(x, t)|_{x=0} = \frac{u'_0(at) + u'_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a} (u_1(at) - u_1(-at)) = 0.$$

(???)

### Закон отражения от закреплённого (свободного) конца

(тут пара абзацев про особенности, не вникал пока)

### Минимальная теория

**2. Задача Коши для уравнения колебания струны. Представление решения. Принцип Дюамеля. Формула Даламбера. Теорема существования и единственности классического решения.**

[2] -39-42, 60-62 или [1] - 43-45.

### 2.1.7 Проверка решений в компьютере (?)

Код Wolfram для проверки (!!!!!)

(могу максимально часто его использовать!!! соберу, чтобы прямо так сразу и использовать!!!)

## 2.2 Main linear PDE-s

### 2.2.1 Об уравнении Шредингера

О типичных способах решения

(пропишу хороший обзор потом, пока не понял особо)

Собственные функции уравнения Шредингера

$$\nabla^2 \psi - U\psi + \epsilon\psi = 0$$



**Уравнение Шрёдингера в Кулоновском потенциале**

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + \epsilon \right) R = 0,$$

$$\Phi = r^{1+l} R,$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2l}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \epsilon \right) \Phi = 0.$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} + \epsilon \right) \Phi = 0,$$

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2 + \epsilon) \tilde{\Phi} \right] = 2\tilde{\Phi}$$

$$\epsilon \equiv -\alpha^2, \alpha > 0,$$

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha} \cdot \propto \frac{(p - 1/n)^{n-1}}{(p + 1/n)^{n+1}}.$$

If  $l \neq 0$ : (??????)

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2 + \epsilon) \tilde{\Phi} \right] = 2\tilde{\Phi} - 2pl\tilde{\Phi}$$

$$\epsilon \equiv -\alpha^2 \quad \alpha = 1/n$$

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{(p^2 - \alpha^2)^{l+1}} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha},$$

$$\alpha = 1/n,$$

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-l-1}}{(p + 1/n)^{n+l+1}},$$

Поскольку полюс в точке  $p = -1/n$ , который определяет значение  $\Phi$ , является кратным, то, как и для случая  $l = 0$ , функция  $\Phi \sim \exp(-r/n)$  с полиномиальным множителем.

(!!! удостоверюсь, что в квантмехе почти это же написано в разделе про водород!)

**Уравнение Шрёдингера в общем случае по Лебедеву (???)**

$$i\partial_t \psi = -\nabla^2 \psi + U\psi$$

$$E = \int d\mathbf{r} (\nabla \psi^* \nabla \psi + U \psi^* \psi).$$

Пусть  $\chi(\mathbf{r})$  - собственная функция оператора  $-\nabla^2 + U$  с собственным значением  $\epsilon$ . Если в начальный момент времени  $\psi = \chi$ , то

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \exp(-i\epsilon t) \chi(\mathbf{r}),$$

$$\psi(0, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} + \sum_j b_j \psi_j.$$

$$\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} e^{-ik^2 t} + \sum_j b_j \psi_j e^{-i\epsilon_j t}$$

$$a(\mathbf{k}) = \int d^3r \psi_{-\mathbf{k}} \psi(0, \mathbf{r}),$$

$$b_j = \int d^3r \psi_j \psi(0, \mathbf{r})$$

### Уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi$$

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[ i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \psi(0, \mathbf{y}),$$

Это выражение допускает обращение по времени:

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(-4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[ -i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \psi(t, \mathbf{y}).$$

(???)

### О других известных случаях уравнения Шрёдингера

(тут коротко про атом водорода)

### 2.2.2 Об волновом уравнении

вкратце теория волнового уравнения

метод Фурье для волнового уравнения

О формуле Кирхгофа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f,$$

$u = u(\mathbf{x}, t)$  и  $f = f(\mathbf{x}, t)$  определены на  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ , а  $\Delta$  -оператор Лапласа.

$$u|_{t=0} = \varphi_0(\bar{x}), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\bar{x})$$

Обобщённая формула Кирхгофа (3D):

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_S \varphi_0(\mathbf{y}) d^2 S_n \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_S \varphi_1(\mathbf{y}) d^2 S_n + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq at} \frac{f(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{a})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 \mathbf{y}$$

$S : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = at.$

Простой вывод её использует преобразование Фурье.(????)

### О методе отражений

(см. Уровева лекции, мб во 2ю 1ю перенесу, не уверен, что важный метод, но скорее всего он важный)

Для полуограниченной струны с однородными граничными условиями есть метод сведения смешанной задачи к задаче Коши.

Рассмотрим смешанную задачу с однородными граничными условиями первого рода:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 u_{tx}(x, t), x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \\ u(0, t) &= 0, \end{aligned}$$

$u_0 \in C^2[0; \infty)$ ,  $u_1 \in C^1[0; \infty)$ . Потребуем выполнение следующих условий согласования:

$$u_0(0) = 0, u_1(0) = 0 \text{ и } u_1'(0) = 0.$$

Лемма 1. Пусть  $m(x, t)$  - решение классической задачи Коши

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, t) &= a^2 w_{xx}(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(x, 0) &= \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad w_t(x, 0) = \begin{cases} u_1(x), & x \geq 0 \\ -u_1(-x), & x < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

тогда сужение  $u = W_{x \geq 0}$  является решением смешанной задачи выше.

Лемма 2. Если  $w(x, t)$  - решение классической задачи Коши для  $w_{tt}(x, t) = a^2 w_{xx}(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ , с начальными условиями

$$w(x, 0) = u_0(|x|), w_t(x, 0) = u_1(|x|),$$

то сужение  $u = W_{x > 0}$  является решением смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t), x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \\ u_x(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

### Обзор применений волнового уравнения

#### 2.2.3 Об уравнении диффузии (теплопроводности)

##### Типичные случаи уравнения диффузии

##### Простейшее уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \quad (\text{Diffusion eq.})$$

$$\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \int dy_1 \dots dy_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{y}) u(t, \mathbf{y})$$

$$\partial \tilde{u} / \partial t = -q^2 \tilde{u}$$

$$\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \exp(-q^2 t) \tilde{u}(0, \mathbf{q}).$$

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{u}(t, \mathbf{q}),$$

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] u(0, \mathbf{y})$$

(все?)

Если  $u(0, \mathbf{x})$  достаточно быстро спадает при росте  $|\mathbf{x}|$ , то  $u(t, \mathbf{x})$  обладает универсальной асимптотикой на больших временах  $t \gg l^2$ ,  $l$  - длина локализации  $u(0, \mathbf{x})$ . Учтем, что интеграл набирается в  $|\mathbf{y}| \lesssim l$ , пренебрежем  $\mathbf{y}$  в экспоненте:

$$u(t, \mathbf{x})_{t \gg l^2} \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\mathbf{x}^2/(4t) \right]$$

$$A = \int dy_1 \dots dy_d u(0, \mathbf{y}).$$

Это приближение соответствует  $u(0, \mathbf{y}) \rightarrow A\delta(\mathbf{y})$ . Если же  $A = 0$ , то асимптотика  $u(t, \mathbf{x})_{t \gg l^2}$  будет определяться разложением экспоненты по  $\mathbf{y}$ :

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B}\mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp \left[ -\mathbf{x}^2/(4t) \right]$$

$$\mathbf{B} = 2\pi \int dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u(0, \mathbf{y})$$

Выражения являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

### Уравнение диффузии с правой частью

$$(\partial_t - \nabla^2) u = \phi$$

$$u(\tau, \mathbf{x}) = \int dt d^d y G(\tau - t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(t, \mathbf{y})$$

$$(\partial_t - \nabla_x^2) G(t, \mathbf{x}) = \delta(t) \delta(\mathbf{x}), \quad G(+0, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}),$$

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left( -\frac{\mathbf{x}^2}{4t} \right)$$

$$u(t + \tau, \mathbf{z}) = \int d^d x G(\tau, \mathbf{z} - \mathbf{x}) u(t, \mathbf{x})$$

$$G(t + \tau, \mathbf{z} - \mathbf{y}) = \int d^d x G(t, \mathbf{z} - \mathbf{x}) G(\tau, \mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Это соотношение справедливо для любых функций Грина уравнений с первой производной по времени.

### Диффузия с затуханием

$$(\partial_t + \gamma - \nabla^2) u = \phi,$$

$$\gamma \equiv \gamma(x)$$

Пусть  $u$  обращается в ноль на границе некоторой области, соответствует сильному поглощению в этой области. Отметим, что для однородного в пространстве затухания  $\gamma$  переход к функции  $v$ ,  $u = \exp(-\gamma t)v$ , приводит к чисто диффузионному уравнению  $(\partial_t - \nabla^2) v = 0$  на эту функцию, что сводит эту задачу к предыдущей. Источник  $\phi$  для функции  $v$  превращается в  $\phi \exp(\gamma t)$ .

$$u(t, \mathbf{r}) = \int d\tau d^d x G(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{x}) e^{-\gamma(t-\tau)} \phi(\tau, \mathbf{x}), \quad G(t, \mathbf{r}) = \frac{\exp \left( -\frac{\mathbf{r}^2}{4t} \right)}{(4\pi t)^{d/2}}$$

**Диффузия в полупространстве** В  $x_1 > 0$  если  $u(x_1 = 0) = 0$ , то задача решается при помощи

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t} \right] - \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(x_1 + z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t} \right]$$

(?!?! потренируюсь ещё)

**О моделировании и численном решении диффузии**

(????!!)

**Обзор применений уравнения диффузии**

Ур диффузии описывает, например, эволюцию плотности числа частиц, вариаций температуры или статистические свойства случайных блужданий.

Например, диффузия с затуханием описывает эволюцию плотности диффундирующих частиц, часть которых поглощается или выбывает за счет химических реакций.

## 2.2.4 Об интегральных уравнениях

**Интегральные уравнения по Владимирову**

$$g(t) = \int_a^b K(t, s) f(s) ds \quad (\text{Fredholm eq. of 1 kind})$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (\text{Fredholm eq. of 2 kind})$$

$\varphi(x)$  - неизвестная функция,  $G \subset \mathbb{R}^n$  - область,  $\mathcal{K}(x, y)$  - т.н. ядро и  $f(x)$  т.н. свободный индекс известны,  $\lambda$  - комплексный параметр.

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \quad (\text{однородное и } y)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x, y) \psi(y) dy \quad (\text{союзное и } y)$$

здесь  $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$  - эрмитово сопряженное ядро к ядру  $\mathcal{K}(x, y)$ .

Линейное, однородное, союзное интегральные уравнения иногда записывают в операторной форме

$$\varphi = \lambda K \varphi + f, \quad \varphi = \lambda K \varphi, \quad \psi = \bar{\lambda} K^* \psi,$$

где интегральные операторы  $K$  и  $K^*$  определяются ядрами  $\mathcal{K}(x, y)$  и  $\mathcal{K}^*(x, y)$  соответственно, т. е.

$$Kg = \int_G \mathcal{K}(x, y) g(y) dy, \quad K^*g = \int_G \mathcal{K}^*(x, y) g(y) dy.$$

Если при некотором значении параметра  $\lambda = \lambda_0$  однородное интегральное уравнение (2) имеет ненулевые решения из  $L_2(G)$ , то число  $\lambda_0$  называется характеристическим числом ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ , а соответствующие решения уравнения (2) - собственными функциями ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ .

Рангом (кратностью) характеристического числа  $\lambda_0$  называется максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих этому числу  $\lambda_0$ .

(выше - сокращу. тут - как решать, это самое важное!!!)

**On Volterra integral equations (воздействие по динамике системы после него)**

$$\text{Volterra eq 1 k} \quad \int_0^t ds K(t-s)f(s) = \phi(t) \quad K, \phi(t) - \text{known}$$

$$\begin{aligned} \text{Laplace} \quad & \tilde{K}(p)\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p) \\ & \tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p)/\tilde{K}(p) \end{aligned}$$

$$\text{Volterra eq 2 k} \quad f(t) + \int_0^t ds K(t-s)f(s) = \phi(t). \quad K \sim \# + \#\delta(t-s)$$

$$\begin{aligned} \text{Laplace} \quad & [1 + \tilde{K}(p)]\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p) \\ & \tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\phi}(p)}{1 + \tilde{K}(p)} \end{aligned}$$

**Сингулярные интегральные уравнения**

$$\lambda\varphi(x) + f_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy\varphi(y)}{y-x} = f(x) \quad (8.45)$$

$$(\lambda + i\pi)\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy\varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = f(x) \quad (8.46)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(y-x+i\epsilon)(x-x_0+i\epsilon)} = -\frac{2\pi i}{y-x_0+i\epsilon} \quad (8.47)$$

$$(\lambda - i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy\varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dyf(y)}{y-x+i\epsilon}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} f_{-\infty}^{+\infty} \frac{dyf(y)}{y-x} + \frac{\lambda f(x)}{\lambda^2 + \pi^2} \quad (8.48)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dyf(y)}{y-x+i\epsilon} + \frac{f(x)}{\lambda + i\pi} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dyf(y)}{y-x-i\epsilon} + \frac{f(x)}{\lambda - i\pi} \end{aligned} \quad (8.49)$$

(см. пока теорию, раздел 8.3 Лебедева)

**2.2.5 Уравнения Лапласа и Пуассона**

(4 часа - и прописал бы! страницы 3 на эти указания, мб меньше)

**Краевая задача для уравнений Лапласа и Пуассона на  $\mathbb{R}^2$** 

Краевая задача для уравнений Лапласа и Пуассона на плоскости одна из самых легких и должна решаться минут за 10-15.

В круге

В кольце

В шаре

**Частное решение ур Пуассона, если**  $f(r, \varphi) = ar^n \cos m\varphi$  **или**  $f(r, \varphi) = ar^n \sin m\varphi$ ,  
 $(n+2)^2 \neq m^2$ ?

(суть от Колесниковой впишу)

**Частное решение ур Пуассона, если**  $f(r, \varphi) = ar^n \cos m\varphi$  **или**  
 $f(r, \varphi) = ar^n \sin m\varphi$ ,  $(n+2)^2 = m^2$ ?

(суть от Колесниковой впишу)

## 2.2.6 Задачи Коши

### Решение задача Коши в общем случае (??)

Классическая задача Коши для волнового уравнения - это задача о нахождении функции  $u(x, t)$  класса  $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ , удовлетворяющей при  $t > 0$  уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

$f \in C^1(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in C^2(R^1)$ ,  $u_1 \in C^1(R^1)$ ,  $n = 1$ ;  
 $f \in C^2(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = 2, 3$ , то решение задачи Коши (3), (4) существует, единственно и выражается:

1) при  $n = 1$  формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + at) + u_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

2) при  $n = 2$  Формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{0 \leq |\xi-x| < a(t-\tau)} \int_{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}}^t + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_{|\xi-x| < at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi-x| < at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}}$$

3) при  $n = 3$  формулой Кирхгофа

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\xi-x| < at} \frac{1}{|\xi-x|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi-x|}{a}\right) d\xi + \\ + \frac{1}{4\pi^2 a^2 t} \int_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{t} \int_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS \right].$$

### Решение задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности в $R^3$

(выпишу из Карлова, мб 1 страница на это будет указаний)

### Решение задачи Коши в $\mathbb{R}^2$ через метод характеристик

Сделаем замену переменных с целью сведения уравнения к каноническому виду. Формулы, которые надо помнить:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0,$$

где подчеркнута квадратичная часть. Для такого уравнения уравнение характеристик выглядит следующим образом:

$$a(x, y)dy^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)dx^2 = 0.$$

Это - дифференциальное уравнение. С помощью первых интегралов этого уравнения можно сделать замену переменных в (3) такую, которая приведёт квадратичную часть к каноническому виду. В этом и заключается суть метода характеристик. В задаче на контрольной встречается исключительно гиперболический тип, а потому после замены должны занулиться коэффициенты перед чистыми производными, а остаться только перед смешанной.

Далее находим первые интегралы.

Далее делаем замену, переходим к ним.

(тут формулы переходов в производных)

Подставляем,

(?? что должно обнулиться тут?)

(а дальше вообще не дошел.)

### О применениях формулы Пуассона (??)

(?? им на самом деле можно решать задачи или это просто большая формула и не больше?)

### О применениях формулы Кирхгофа (??)

(?? им на самом деле можно решать задачи или это просто большая формула и не больше?)

### Задача Коши по Колесниковой (!?!!!!!)

(еще тут пара методов есть, добавлю скоро!)

• Если в задаче  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$  или задаче (7) начальные условия таковы, что существует  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0$$

то решение задачи можно искать в виде  $u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \dots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-2}(x)$ .

• Если  $u_0$  или  $u_1$  являются произведением некоторой гармонической функции на некоторую функцию от других независимых переменных, т. е.

$$u_0(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_n), \quad \Delta f = 0$$

(например,  $u_0(x, y, z) = (x^2 - y^2)e^{-z^2}$ ), то решение можно искать в виде

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_k) h(t, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ h|_{t=0} = g(x_{k+1}, \dots, x_n),$$



если это, например, уравнение теплопроводности. Если это задача 5, то

$$h|_{t=0} = g(x_{k+1}, \dots, x_n), \quad h_t|_{t=0} = 0$$

- Если  $u_0 = x \sin(ax + by + cz)$ ,  
 $\Delta u_0 = 2a \cos(ax + by + cz) - (a^2 + b^2 + c^2) x \sin(ax + by + cz)$ ,

$$u \equiv g(t) \cos(ax + by + cz) + f(t)x \sin(ax + by + cz),$$

удовлетворяющем начальным условиям  $f(0) = 0, g(0) = 1$ , если это, например, задача 7.

## 2.2.7 О смешанных задачах

(?? через бесселя решается??)

### Решение смешанной задачи в круге через функции Бесселя

(выпишу из Карлова, мб 1 страница на это будет указаний)

### Смешанная задача на отрезке. Метод Фурье

(выпишу из Карлова, мб 1 страница на это будет указаний)

### О смешанных задач в круге

### О смешанных задач в секторе

## 2.2.8 О задаче Штурма-Лиувилля

### Задача Штурма-Лиувилля в общем случае по Лебеву

$$\hat{L}f(x) \equiv \left[ \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} - U(x) \right] f(x) = \phi$$

Вводим два решения однородного уравнения  $u$  и  $v$  (то есть  $\hat{L}u = 0 = \hat{L}v$ ), которые удовлетворяют 'левому' (при  $x = a$ ) и 'правому' (при  $x = b$ ) граничным условиям, соответственно,

$$G(x, y) = \begin{cases} Au(x), & x < y \\ Bv(x), & x > y \end{cases}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases}$$

$$W(x) := u(x)v'(x) - u'(x)v(x).$$

$$\hat{L}u = \hat{L}v = 0 \Rightarrow \partial_x W(x) = -Q(x)W(x),$$

$$W(x) = W(a) \exp \left[ - \int_a^x dy Q(y) \right].$$

$$Q = 0 \Rightarrow W = \text{const}, G(x, y) = G(y, x).$$

Если у  $\hat{L}$  имеется нулевая мода (удовлетворяющая граничным условиям функция  $f : \hat{L}f = 0$ ), то задача ШЛ является корректной только при наложении на 'источник'  $\phi$

определенного условия. При этом решение задачи ШЛ не является однозначным: в нем фигурирует нулевая мода с произвольным коэффициентом. В качестве примера можно привести тот же оператор  $\hat{L} = \partial_x^2$  при периодических граничных условиях, наложенных на функцию  $f$ . В этом случае у оператора  $\hat{L}$  имеется нулевая мода - константа (не зависящая от  $x$  функция). Интегрируя уравнение  $\partial_x^2 f = \phi$  по  $x$  и используя периодические граничные условия, мы находим условие  $\int dx \phi = 0$ , которое должно быть наложено на правую часть уравнения для того, чтобы существовало решение задачи.

### Поведение решения задачи ШЛ вблизи особых точек

$$\hat{L}f(x) \equiv \left[ \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} - U(x) \right] f(x) = \phi$$

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n.$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

$$2f_2 + Q_0 f_1 - U_0 f_0 = 0$$

$$6f_3 + 2Q_0 f_2 - U_0 f_1 + Q_1 f_1 - U_1 f_0 = 0$$

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + xQ \frac{df}{dx} - xUf = 0,$$

$$x \partial_x^2 f + a \partial_x f = 0, \quad a : [xQ](0) = a$$

$$f = \text{const}, \quad f \propto x^{1-a}.$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad f = x^{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

$$xQ = a + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n+1}, \quad xU = b + \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^{n+1}.$$

$$af_1 - bf_0 = 0$$

$$2f_2 + 2af_2 + Q_0 f_1 - bf_1 - U_0 f_0 = 0$$

$$2(1-a)g_1 + Q_0(1-a)g_0 - bg_0 = 0$$

Рассмотрим поведение решения уравнения  $\hat{L}f = 0$  вблизи нуля, если в этой точке  $Q$  имеет полюс 1-го порядка, а  $U$  имеет полюс 2-го порядка. Сохраним в  $Q, U$  главные полюсные члены:

$$x^2 \partial_x^2 f + ax \partial_x f - \beta f = 0,$$

$$f \propto x^\alpha,$$

$$\alpha : \quad \alpha(\alpha - 1) + a\alpha - \beta = 0.$$

$$\alpha = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{(1-a)^2/4 + \beta}.$$

$$\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \alpha = 1 - a$$

## Задачи на собственные значения

$$\hat{L}u = \lambda u$$

$$\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} - U(x)$$

$$Q = 0 \quad (\partial_x^2 - U) \psi = -\epsilon \psi,$$

Для нулевых или периодических граничных условий  $(\partial_x^2 - U)$  самосопряженный, ибо

$$\int dx \psi_1 (\partial_x^2 - U) \psi_2 = \int dx \psi_2 (\partial_x^2 - U) \psi_1,$$

Рассмотрим теперь собственные функции  $f_n$  оператора  $\hat{L}$ , которые удовлетворяют уравнению  $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$ . Условие (2.60) приводит к соотношению

$$\int dx f_n \hat{L} f_m = \lambda_m \int dx f_n f_m = \lambda_n \int dx f_n f_m$$

$$\lambda_n \neq \lambda_m \quad \int_a^b dx f_n(x) f_m(x) = 0. \quad ()$$

## Обзор частных случаев и применений задачи Штурма-Лиувилля

Например, у цилиндра радиуса  $b$  с плотностью заряда  $\rho = \text{const}$  на оси, потенциал  $f(r)$ :

$$\frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) = -4\pi\rho.$$

Пусть  $f(b) = 0$  и отсутствие особенности в  $f$  при  $r = 0$ . Регулярным при  $r = 0$  'левым' решением  $u$  является некоторая константа,  $u(r) \equiv 1$ . 'Правое' же решение  $v$  имеет вид  $v(r) = \ln(r/b)$ , а вронскиан равен  $W(r) = 1/r$ . Поэтому

$$G(r, R) = \begin{cases} R \ln(R/b), & r < R \\ R \ln(r/b), & r > R. \end{cases}$$

## Обзор задачи ШЛ в электростатике (см. Лебедев 2.2)

$$f(x, y, z) = \int \frac{d\xi d\eta z f(\xi, \eta, 0)}{2\pi [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r},$$

$$f(\mathbf{r}) = - \int dV' \frac{\phi(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

$$G(\mathbf{r}) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^2}$$

$$\int dq_{\parallel} \exp(iq_{\parallel} r) \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2} = \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r),$$

$$G(r) = - \int \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r)$$

Вывод функции Грина через Фурье не работает в 2D, ибо в этом случае обратное преобразование Фурье формально расходится при малых волновых векторах  $\mathbf{q}$ . Поэтому в двумерном случае решение уравнения  $\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$  ищется другим способом. Ясно, что функция Грина  $G$  зависит только от абсолютной величины радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Вне начала координат, где сосредоточена  $\delta$ -функция, в уравнении  $\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$  правая часть равна нулю, что приводит к уравнению  $(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r)G(r) = 0$ . Помимо тривиального решения - константы, это уравнение имеет своим решением  $\ln r$ . Таким образом,  $G \propto \ln r$ . Чтобы найти коэффициент пропорциональности, проинтегрируем  $\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$  по диску радиуса  $R$ . В правой части мы получим единицу, а в левой части поток  $\nabla G$  через окружность - поверхность диска, который равен  $2\pi R \partial G / \partial R$ . Приравняв эту величину единице, находим

$$d = 2 \quad G(r) = \frac{\ln r}{2\pi}.$$

### Другое о задаче ШЛ

**Двумерные гармонические функции.** Задача Дирихле для двумерного уравнения Лапласа имеет регулярное решение для нескольких простых форм областей. Проанализируем случай, когда интересующая нас область является полуплоскостью  $y > 0$ . В этом случае задача Дирихле означает поиск гармонической функции  $f$  в полуплоскости  $y > 0$ , если задано ее значение при  $y = 0$ . Решение этой задачи может быть записано в виде интеграла

$$f(x, y) = \int d\xi \frac{y}{\pi [(x - \xi)^2 + y^2]} f(\xi, 0).$$

подынтегральное выражение, само по себе является гармонической функцией, поскольку  $y / (x^2 + y^2) = \partial_y \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , а логарифм является решением уравнения Лапласа  $\nabla^2 \ln r = 0$ .

Для доказательства (2.48) переходим к Фурье-преобразованию  $f$  по  $x$ , который мы обозначим  $\tilde{f}(q, y)$ . Уравнение Лапласа для этой величины имеет вид  $(\partial_y^2 - q^2)\tilde{f} = 0$ . Отсюда  $\tilde{f}(q, y) = \exp(-|q|y)\tilde{f}(q, 0)$ , то есть

$$f(x, y) = \int \frac{dq}{2\pi} \exp(iqx) \exp(-|q|y) \tilde{f}(q, 0).$$

Приведем альтернативный вывод соотношения (2.48). Можно заметить, что  $y / [(x - \xi)^2 + y^2] = -\text{Im}(x - \xi + iy)^{-1}$ . Таким образом, функция  $f$  (2.48) является мнимой частью аналитической функции и, следовательно, гармонической функцией.

При  $y \rightarrow 0$  функция  $(y/\pi) [(x - \xi)^2 + y^2]^{-1}$  стремится к  $\delta(x - \xi)$ . Поэтому при  $y \rightarrow 0$  функция (2.48) стремится к  $f(x, 0)$ , что и заканчивает доказательство (2.48).

В круге  $R = 1$ , если действительная гармоническая функция  $u$  задана на границе, а начало координат в центре, то

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{(1 - r^2) u(\cos t, \sin t)}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2}. \quad \text{Poisson eq.}$$

$r$  - расстояние до начала координат,  $\varphi$  - полярный угол,  $\int dt$  - интегрирование по единичной окружности. Proof is as follows:

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \equiv \text{Re} f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} u(\cos t, \sin t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

(??? finish proof!)

$$\forall R \quad u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{(\mathbb{R}^2 - r^2) u(R \cos t, R \sin t)}{\mathbb{R}^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2}.$$

Специальная фундаментальная система решений.

Задачи с периодическими граничными условиями. Функция Грина. Разбор на примере.

Самосопряженные операторы и их спектральное разложение.

Самосопряженность оператора Штурма-Лиувилля для задачи Штурма-Лиувилля и задачи с периодическими граничными условиями. (см пока видео семниров)

Метод Фурье решения задач.

Пример на периодические граничные условия, решенный методом Фурье.

Асимптотики решения дифференциального уравнения вблизи особых точек. Разложения решения в ряды вблизи регулярных точек. Пример: гипергеометрическая функция (2,1).

## 2.2.9 Суммирование рядов, мацубаровские частоты

Методы суммирования рядов. Суммирование “по мацубаровским частотам” по Осину

## 2.3 Other famous PDE-s

### 2.3.1 Об уравнении Стокса

Типичные случаи уравнения Стокса

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{f}$$

$$v_i(t, \mathbf{r}) = \int dt_1 d^3 r_1 G_{ik}(t - t_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f_k(t_1, \mathbf{r}_1)$$

$$(\partial_t - \nu \nabla^2) G_{ik}(t, \mathbf{r}) = \delta(t) (\delta_{ik} - \partial_i \partial_k \nabla^{-2}) \delta(\mathbf{r}),$$

$$(\partial_t + \nu q^2) \tilde{G}_{ik} = \delta(t) (\delta_{ik} - q_i q_k / q^2).$$

$$\tilde{G}_{ik} = \theta(t) (\delta_{ik} - q_i q_k / q^2) \exp(-t\nu q^2).$$

$$G_{ik} = \frac{\theta(t) \delta_{ik}}{8(\pi \nu t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + \theta(t) \partial_i \partial_k \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi^2 q r} \exp(-t\nu q^2) \sin(qr).$$

$$G_{ik} = \frac{\theta(t)}{4\pi} \left( \frac{3r_i r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{4\nu t}}\right) + \frac{\theta(t)}{2\pi^{3/2} \sqrt{4\nu t}} \left( \frac{\delta_{ik}}{r^2} - \frac{3r_i r_k}{r^4} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + \frac{\theta(t)}{(4\nu \pi t)^{3/2}} \left( \delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right).$$

$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \exp(-t^2).$

(?? порешать нужно еще упражнения на него. В МСС допишу тоже про него, узнаю приложения)

## Обзор применений уравнения Стокса

## 2.4 Простейшие нелинейные уравнения

(это же в интегрируемых системах, но там полно всего, а тут самая минимальная суть.)

### 2.4.1 Об уравнении Хопфа

#### Суть уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{Hopf eq.})$$

Оно линейно по первым производным от  $u$ , поэтому может быть решено методом характеристик:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

$$x = y + ut, \quad u = u(0, y),$$

Если  $u(0, x)$  является монотонно растущей функцией  $x$ , то эволюция, которая описывается (7.3), заключается в неограниченном 'растягивании' поля  $u$  вдоль оси  $X$ , без изменения значений этого поля. Таким образом, локально поле  $u$  становится все более похожим на линейный профиль, а наклон этого профиля уменьшается со временем.

$$s = \partial u / \partial x,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = -s^2$$

Таким образом, мы должны решать вдоль характеристики уравнение  $ds/dt = -s^2$ , решение которого имеет вид  $s = (1/s_0 + t)^{-1}$ ,  $s_0$  — значение производной  $s$  при  $t = 0$ . Если  $s_0 > 0$  (что соответствует монотонно растущей функции  $u$ ), то на больших временах  $s \approx t^{-1}$ , то есть наклон на всех характеристиках становится одинаковым. Это и означает формирование линейного профиля.

For

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Однако динамика, которая описывается уравнением Хопфа, обычно приводит к возникновению особенностей в поле  $u$ . Они связаны с теми участками в начальном профиле, где наклон  $u(0, x)$  отрицателен. Эволюцию этого наклона можно найти при помощи того же уравнения (7.4), которое приводит к  $s = (1/s_0 + t)^{-1}$ . Если  $s_0 < 0$ , то значение  $s$  обращается в бесконечность при  $t = -1/s_0$ . Таким образом, если в начальном профиле  $s(0, x)$  имеются участки с отрицательными значениями  $s$ , то за конечное время производная  $s = \partial_x u$  обращается в бесконечность. Быстрее всего это происходит для

наибольшего по абсолютной величине значения  $s$ , которое определяется условием  $\partial s / \partial x = \partial^2 u / \partial x^2 = 0$ . Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим  $y_0$ , впервые обращается в бесконечность  $s$ .

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки  $y_0$ . Раскладывая функцию  $u(0, y)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $y_0$ , мы находим

$$u(0, y) \approx u_0 - c_1 (y - y_0) + c_2 (y - y_0)^3,$$

$c_1$  и  $c_2$  - положительные константы. Положительность  $c_1$  означает отрицательность  $s$  вблизи точки  $y_0$ , а положительность  $c_2$  означает, что значение  $s$  максимально по абсолютной величине в точке  $y_0$ . Далее, решая уравнения (7.3), мы находим

$$u = u_0 - c_1 (x - ut - x_0 + u_0/c_1) + c_2 (x - ut - x_0 + u_0/c_1)^3,$$

где мы ввели обозначение  $x_0 = y_0 + u_0/c_1$ . В этом случае в момент времени  $t = 1/c_1$ , который и является моментом, когда  $s$  обращается в бесконечность в точке  $x_0$ , приведенное соотношение сводится к

$$c_2 (u - u_0)^3 = -c_1^4 (x - x_0)$$

где мы опустили линейное по  $x - x_0$  слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при малых  $x - x_0$ . Таким образом, мы приходим к профилю  $u - u_0$ , который пропорционален  $(x - x_0)^{1/3}$ , то есть является сингулярным в точке  $x = x_0$ . Эта сингулярность и является формальной причиной, по которой  $s$  обращается в бесконечность.

Даже если нелинейность слаба, она за конечное время приводит к образованию особенности в поле  $u$ . При приближении к особенности уравнение Хопфа становится неприменимым, так как растет вторая производная от  $u$ , и потому для анализа дальнейшей эволюции уравнение Хопфа следует модифицировать, например, рассмотрев уравнение Бюргерса.

## О приложениях

### 2.4.2 Об уравнении Бюргерса

#### Суть уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{Burgers eq., dim-less})$$

2-я производная описывает вязкость.

На самых больших временах любое решение уравнения (7.7), стремящееся к нулю на  $\pm\infty$  по  $x$ , стремится к нулю,  $u \rightarrow 0$ . Действительно, в силу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \frac{u^2}{2} = - \int dx \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Таким образом, положительно определенная величина  $\int dx u^2$  убывает со временем и, при достаточно большом  $t$ , становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргерса  $u$ , которое стремится к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Тогда при больших  $t$  значение  $u$  становится

малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (7.7). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению. Локализованные решения этого уравнения имеют вид

$$u \propto \frac{1}{t^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right]$$

$$u \propto \frac{x-x_0}{t^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right]$$

вторая асимптотика реализуется при условии  $\int dx u = 0$ .

В случае сильной нелинейности, который реализуется, если для начальных условий  $UL \gg 1$ ,  $L$  – характерный масштаб (корреляционная длина) начального состояния  $u(0, x)$ , а  $U$  – характерное значение поля  $u(0, x)$ . В этом случае начальная эволюция поля  $u$  может быть описана в пренебрежение второй производной в уравнении (7.7), когда оно сводится к уравнению Хопфа (7.1), которое, однако, ведет к сингулярности.

Уравнение Бюргерса позволяет проанализировать структуру, которая возникает после возникновения сингулярности в уравнении Хопфа. После некоторого переходного процесса формируется специальное решение, которое движется со скоростью  $u_0$ , то есть  $\partial u / \partial t = -u_0 \partial u / \partial x$ . Подставляя это соотношение в уравнение Бюргерса (7.7), мы находим затем его первый интеграл  $(u - u_0)^2 - 2\partial u / \partial x = \text{const}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_0 - 2a \tanh[a(x - x_0)]$$

которое называют шоком. Это решение соответствует тому, что в области ширины  $a^{-1}$  поле  $u$  испытывает скачок  $4a$ . Решение (7.9) дает универсальную форму шок, которые формируются при условии  $UL \gg 1$ , тогда  $a \sim U$ . Заметим, что стационарность этого решения не противоречит сделанному выше утверждению о стремлении  $u$  к нулю на больших временах, поскольку последнее справедливо только для решений, стремящихся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , в то время как выражение (7.9) этому условию не удовлетворяет.

Поясним общую структуру поля  $u$ , которая возникает при эволюции некоторого характеризующегося сильной нелинейностью начального условия. За конечное время из участков  $u$  с отрицательным наклоном формируются шоки, а из участков с положительным наклоном формируются промежутки между шоками. В дальнейшем поле в этих промежутках стремится к линейному профилю, поскольку его эволюция управляется уравнением Хопфа. Шок движется со скоростью  $u_0$ , равную полусумме значений поля  $u$  на краях шока. Это означает, что время от времени большой шок (со значительной амплитудой  $a$ ) догоняет меньший шок и поглощает его. Поэтому количество шок в системе постепенно убывает.

Преобразование Коула-Хопфа (Cole-Hopf)

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h / \partial x.$$

приводит уравнение Бюргерса к

$$\partial \Psi / \partial t = \partial^2 \Psi / \partial x^2,$$

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \exp \left[ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right] \Psi(0, y),$$

Выражение (7.12) может быть использовано для получения ряда точных решений уравнения Бюргерса. Рассмотрим в качестве примера начальное условие  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$ , которое соответствует шоку с  $u_0 = x_0 = 0$ . В этом можно убедиться, производя обратное по отношению к (7.10) преобразование

$$u = -2\partial(\ln \Psi) / \partial x$$



Подставляя выражение  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$  в уравнение (7.12) и вычисляя интеграл по  $y$ , мы находим  $\Psi(t, x) = \cosh(ax) \exp(a^2 t)$ . Подставляя это выражение в соотношение (7.13), мы находим то же выражение  $u = -2a \tanh(ax)$ , поскольку дополнительный временной множитель выпадает из ответа. Таким образом, мы другим способом убедились в том, что выражение (7.9) дает стационарное решение уравнения Бюргерса. Обратим внимание на то, что мы получили растущее со временем решение уравнения диффузии. Это связано с тем, - ноле  $\Psi$  неограниченно растет при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

## О приложениях

### 2.4.3 О нелинейном уравнении Шрёдингера

#### Main methods for NSE equation

Нелинейность должна быть добавлена в уравнение Шрёдингера (4.60), она пропорциональна третьей степени  $\psi$ . Если система однородна по времени, то имеется дополнительное правило отбора нелинейного члена. Как следует из (4.20), сдвиг по времени эквивалентен добавлению фазы к  $\psi$ . Поэтому уравнение на  $\psi$  должно быть инвариантно относительно сдвига фазы  $\psi$ , что однозначно определяет вид нелинейного члена, который должен быть пропорционален  $|\psi|^2 \psi$ . Еще одним дополнительным правилом отбора является отсутствие диссипации, что фиксирует действительный коэффициент при  $|\psi|^2 \psi$  в уравнении.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно привести НУШ к двум каноническим типам:

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi + 2|\psi|^2 \psi = 0, \quad \text{attr}$$

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi - 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad \text{repuls}$$

$$\mathcal{S}_{\text{NSE}} = \int dt d\mathbf{r} L \quad L = i\psi^* \partial_t \psi - \nabla \psi^* \nabla \psi + |\psi|^4$$

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi|^2$$

$$E = \int d\mathbf{r} (|\nabla \psi|^2 - |\psi|^4)$$

$$\mathbf{P} = -i \int d\mathbf{r} \psi^* \nabla \psi$$

Есть теорема Таланова (????). Для вывода теоремы Таланова рассмотрим функционал

$$I = \int d\mathbf{r} r^2 |\psi|^2$$

Для волнового пакета, центрированного вокруг начала координат, этот функционал можно оценить, как  $I \sim N R^2$ ,  $R$  - размер пакета. Для интеграла (7.20) справедливо соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8 \int d\mathbf{r} \left( |\nabla \psi|^2 - \frac{d}{2} |\psi|^4 \right)$$

которое является следствием уравнения (7.14). Здесь  $d$  - размерность пространства.

В двумерном случае в правой части (7.21) возникает выражение:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = 8E, \quad d = 2.$$

Поскольку  $E$  не зависит от времени, то общее решение уравнения (7.22) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct + 4Et^2, \quad d = 2,$$

где константы  $C$  и  $E$  определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что  $E < 0$ . Тогда при любых конечных  $I(0)$  и  $C$  наступит такой момент времени  $t_*$ , что  $I(t_*) = 0$ . Из оценки  $I \sim N\mathbb{R}^2$  следует, что  $R$  в момент  $t = t_*$  обратится в ноль. Сохранение же числа частиц  $N$  влечет за собой сингулярность  $\psi$  в этот момент.

Таким образом, в двух измерениях при  $E < 0$  происходит коллапс - явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при  $E > 0$ , однако при  $E < 0$  он неизбежен. Коллапс означает, что в функции  $\psi$  за конечное время возникает сингулярность в некоторой точке. Это может произойти в точке, отличной от  $\mathbf{r} = 0$ , в момент времени более ранний, чем  $t = t_*$ . То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале  $t \leq t_*$  коллапс при  $E < 0$  в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве

$$\frac{d^2}{dt^2}I = 8E - 4 \int d\mathbf{r} |\psi|^4 < 8E.$$

$$I(t) < I(0) + Ct + 4Et^2, \quad d = 3.$$

Имеем тоже неизбежность коллапса при  $E < 0$ .

### О приложениях НУШ (???)

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию огибающих электромагнитных волн, плазменных колебаний,

Для ряда случаев эта нелинейность по физическим соображениям может быть только третьего порядка. Например, при распространении электромагнитных волн в материальных средах основным источником нелинейности является эффект Керра, то есть зависимость диэлектрической проницаемости среды от напряженности электрического поля. Диэлектрическая проницаемость раскладывается по четным степеням напряженности поля. Главным членом разложения является квадратичный, отсюда и кубическая нелинейность в уравнении на огибающую.

## 2.4.4 Об уравнении Гросса-Питаевского

### Main methods for GP equation

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi - 2|\psi|^2\psi + \kappa^2\psi = 0, \quad (\text{Gross-Pitaevski eq.})$$

Мы рассматриваем простейший однородный случай. Обычно же холодные атомы находятся в оптических ловушках. Для описания этого случая в уравнение (7.26) следует ввести внешний потенциал, который создается оптической ловушкой.

(???)

уравнения Шрёдингера (7.15) сдвигом фазы  $\psi$  на  $\kappa^2 t$ . Несмотря на это, решения уравнений (7.15) и (7.26) существенно отличаются. Это связано с тем, что при решении нелинейного уравнения Шрёдингера (7.15) обычно считается, что функция  $\psi$  стремится к нулю на бесконечности, в то время как при решении уравнения Гросса-Питаевского (7.26) обычно считается, что на уравнения Гросса-Питаевского (7.26), которое записывается в виде  $\psi = \psi_0 e^{i\varphi_0}$ ,  $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$  и фаза  $\varphi_0$  произвольна.

$$\mathcal{S}_{\text{Gr P eq}} = \int dt d\mathbf{r} L_{\text{Gr P eq}}$$

$$L_{\text{Gr P eq}} = i\psi^* \partial_t \psi - \nabla \psi^* \nabla \psi - |\psi|^4 + \kappa^2 |\psi|^2$$

$$N = \int dV |\psi|^2$$

(далее еще много теории, вскоре доделаю!)

## О приложениях уравнения Гросса-Питаевского

Уравнение ГП которое описывает, например, динамику сверхтекучей системы холодных атомов.

(???? встречу - напишу)

## 2.4.5 Об уравнениях Эйлера и Навье-Стокса

(пока не актуально)

## 2.4.6 Об уравнении Кортевега-де-Фриза

(пока не актуально)

## 2.4.7 Об уравнении синус-Гордон

(пока не актуально)

## 2.4.8 Об одномерном нелинейном уравнении

(пока не актуально)

## 2.4.9 О нётеровских интегралах движения

(уже в теорполе мб и написал это? скоррелирую!!!)

## 2.5 Functional and mathematical analysis main methods

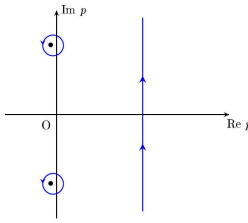
### 2.5.1 Fourier, Laplace, Mellin transforms

Fourier transforms Main formulas

Laplace transforms Main formulas

Typical Laplas transform

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt) G(t)$$

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p)$$


$$\int dt \exp(-pt) (d/dt)^n G(t)$$

Этот внеинтегральный член равен -1, так как равна единице производная  $d^{n-1}G/dt^{n-1}$  при  $t \rightarrow 0$ . Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\tilde{G}(p) = 1/L(p)$$

Мы заключаем, что  $\tilde{G}(p)$  имеет полюса, которые определяются нулями полинома  $L(p)$ .

### Преобразование Лапласа обобщенных функций (???)

Обозначим через  $\mathcal{D}'_+(a)$  совокупность обобщенных функций  $f(t)$  из  $\mathcal{D}'(R^1)$ , обращающихся в нуль при  $t < 0$  и таких, что  $f(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}' \forall \sigma > a$ .

Преобразование Лапласа  $\mathcal{F}(p)$  обобщенной функции  $f$  из  $\mathcal{D}'_+(a)$  определяется равенством

$$\mathcal{F}(p) = F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \quad \sigma > a.$$

При этом  $f$  называют оригиналом,  $\mathcal{F}$  — изображением и этот факт записывают так:  $f(t) \longleftrightarrow \mathcal{F}(p)$ ,  $\sigma > a$ ; здесь  $p = \sigma + i\omega$ . Функция  $\mathcal{F}(p)$  аналитична в полуплоскости  $\sigma > a$  и удовлетворяет следующему условию роста: для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\sigma_0 > a$  существуют такие числа  $c_\varepsilon(\sigma_0) \geq 0$  и  $m = m(\sigma_0) \geq 0$ , что

$$|\mathcal{F}(p)| \leq c_\varepsilon(\sigma_0) e^{\varepsilon\sigma} (1 + |p|)^m, \quad \sigma > \sigma_0.$$

$$\begin{aligned} (-t)^m f(t) &\longleftrightarrow \mathcal{F}^{(m)}(p), & \sigma > a, m = 0, 1, \dots \\ f^{(m)}(t) &\longleftrightarrow p^m \mathcal{F}(p), & \sigma > a, m = 0, 1, \dots \\ f(t)e^{\lambda t} &\longleftrightarrow \mathcal{F}(p - \lambda), & \sigma > a + \operatorname{Re}(\lambda) \\ f(kt) &\longleftrightarrow \frac{1}{k} \mathcal{F}\left(\frac{p}{k}\right), & \sigma > ka, k > 0 \\ f(t - \tau) &\longleftrightarrow e^{-\tau p} \mathcal{F}(p), & \sigma > a; \\ f_{(m)}(t) &\longleftrightarrow \frac{\mathcal{F}(p)}{p^m}, & \sigma > a, m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$f_{(m)}$  —  $m$ -я первообразная  $f$  из  $\mathcal{D}'_+(a)$ ;

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &\longleftrightarrow \mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p), & \sigma > a, \\ g(t) &\longleftrightarrow \mathcal{G}(p), & \sigma > a; \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{d}{dt} - a \right)^{m+2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\mathcal{F}(p)e^{pt}}{(p-a)^{m+2}} dp \end{aligned}$$

(обращение преобразования Лапласа), интеграл не зависит от  $\sigma > \sigma_0 > a, m = m(\sigma_0)$ .

(?? пока не понял, как-то там разве не всё проще??)

**Mellin transforms Main formulas**

Сводка формул прямого и обратного преобразований Меллина.

Применение преобразования Меллина для вычисления интеграла.

Преобразование Меллина произведения функций.

Сверточное свойство преобразования Меллина.

**Преобразования Меллина подинтегральных функций. Полосы голоморфности.** The Mellin transform of a complex-valued function  $f$  defined on  $\mathbf{R}_+^\times = (0, \infty)$  is the function  $\mathcal{M}f$  of complex variable  $s$  given by

$$\{\mathcal{M}f\}(s) = \varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}_+^\times} f(x) x^s \frac{dx}{x}$$

$$\{\mathcal{M}^{-1}\varphi\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \varphi(s) ds$$

**Обратная меллинова свертка. Вычисление интеграла вычетами. Получение ответа с точностью до  $z$  и  $z \ln(z)$ .**

**Свойства преобразования Меллина. Сравнение со свойствами преобразований Фурье и Лапласа.**

**Примеры вычислений прямого преобразования Меллина.**

**Примеры вычислений обратного преобразования Меллина. Асимптотические свойства гамма-функции, помогающие замыкать контур при вычислении обратных преобразований Меллина.**

**Примеры вычислений обратного преобразования Меллина. Неаккуратный выход за полосу голоморфности.**

**Представление гипергеометрической функции 2-1 интегралом Меллина-Барнса.**

**Вычисление асимптотики интеграла из начала занятия для больших значений параметров. Асимптотический ряд, как результат замыкания контура в другую сторону в комплексной плоскости.**

**Преобразование Меллина как диагонализующее инвариантные относительно растяжений системы. Пример двумерного уравнения Лапласа в угловом секторе.**

## 2.5.2 О задачах про операторы

Линейный дифференциальный оператор в  $S'(\mathbb{R})$ 

(в другое место перенесу потом!)

Рассмотрим  $L = P\left(\frac{d}{dx}\right)$ ,

$$P(z) := a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N, \quad z, a_0 \neq \dots, a_N \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$$

 $u(x) = ?$ 

$$Lu(x) = \delta(x), \quad u(x) \in S'(\mathbb{R})$$

(Four-r)

$$P(-iy)F[u(x)](y) = 1 \quad \text{in} \quad S'(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk}}{(z - \lambda_n)^k}, \quad z \neq \lambda_1, \dots, \lambda_m$$

$$\lambda_0 := \{n \in \overline{1, N} : \operatorname{Re} \lambda_n = 0\}$$

$$\lambda_+ := \{n \in \overline{1, N} : \operatorname{Re} \lambda_n > 0\}$$

$$\lambda_- := \{n \in \overline{1, N} : \operatorname{Re} \lambda_n < 0\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(-iy)} &= \sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk}}{(-iy - \lambda_n)^k} + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk}}{(-iy - i\mu_n)^k} = \\ &= \sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{i^k b_{nk}}{(y - i\lambda_n)^k} + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{i^k b_{nk}}{(y + \mu_n)^k} \end{aligned}$$

$$v(y) = \sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{i^k b_{nk}}{(y - i\lambda_n)^k} + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} i^k b_{nk} P \frac{1}{(y + \mu_n)^k}$$

$$u_0(x) = \sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} i^k b_{nk} F^{-1} \left[ \frac{1}{(y - i\lambda_n)^k} \right] (x) + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} i^k b_{nk} F^{-1} \left[ P \frac{1}{(y + \mu_n)^k} \right] (x)$$

В итоге задача

$$Lu(x) = \delta(x), \quad u(x) \in S'(\mathbb{R})$$

решается по формуле

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n \in \lambda_+} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{x\lambda_n} (-\theta(-x)) + \\ &+ \sum_{n \in \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{x\lambda_n} \theta(x) + \\ &+ \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{x\lambda_n} \underbrace{\frac{\operatorname{sign}(x)}{2}}_{=\theta(x) - \frac{1}{2}} + \\ &+ \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} c_{nk} x^{k-1} e^{x\lambda_n} \end{aligned}$$

(???)

**2.5.3 Основные свойства линейных дифф. операторов (!!!)**

(!!! вот на это нужно порешать задачи! ч. 11 Владимиров)

**Фундаментальные решения по Владимирову**

Обобщенным решением в области  $G \subset \mathbb{R}^n$  линейного дифференциального уравнения

$$L(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

$a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in \mathcal{D}'$ , называется всякая обобщенная функция  $u$ , удовлетворяющая этому уравнению в  $G$  в обобщенном смысле, т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$ , носитель которой содержится в  $G$ , имеет место равенство

$$(u, L^*(x, D)\varphi) = (f, \varphi),$$

$L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$ . Обобщенная функция  $u \in C^P(G)$ , если в  $G$  она совпадает с  $u_0(x) \in C^P(G)$ , т. е. для  $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{supp } \varphi \in G$ ,

$$(u, \varphi) = \int u_0(x) \varphi(x) dx.$$

Пусть  $f \in C(G) \cap \mathcal{D}'$ . Для того чтобы обобщенная функция  $u$  удовлетворяла уравнению (\*) в области  $G$  в классическом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу  $C^m(G)$  и удовлетворяла этому уравнению в обобщенном смысле в области  $G$ . дифференциального оператора

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами  $a_\alpha(x) = a_\alpha$  называется обобщенная функция  $\mathcal{E}$ , удовлетворяющая в  $\mathbb{R}^n$  уравнению

$$L(D)\mathcal{E} = \delta(x).$$

У всякого линейного дифференциального оператора  $L(D)$  существует фундаментальное решение медленного роста и это решение удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$L(-i\xi)F|\mathcal{E}| = 1.$$

Пусть  $f \in \mathcal{D}'$  такова, что свертка  $\mathcal{E} * f$  существует в  $\mathcal{D}'$ . Тогда

$$u = \mathcal{E}_* * f$$

есть решение уравнения  $L(D)u = f$ . Это решение единственно в классе тех обобщенных функций  $u$ , для которых существует свертка с  $\mathcal{E}$ .

**О получении других операторов (???)**

**О поиске обратного оператора (?!?!?!?!?!?!?!?)**

**О применениях обратного оператора** (укажу потом, нпр в Ш-Л он нужен)

### О спектре оператора

(есть вообще еще задачи на поиск спектра)

**Определение спектра интегрального самосопряженного оператора** (хз, от конста таких много задач)

### О симметричных и самосопряженных операторах (??)

(самое начало конста)

**Суть самосопряженности и сопряженности (???)** (тут основная мысль, которую я так и не уловил.)

**Определение самосопряженного оператора**

**Определение симметрического оператора**

### Отличие самосопряженного и симметрического оператора

(отдельно пишу)

### О поиске сопряженного

**О доказательстве самосопряженности** (таких много задач)

О

О

О

О

## 2.5.4 О свойствах операторов

### Обзор определений

(тут вроде бы место, где я все выводы даю со ссылками)

опр: симметричный:  $D(A) \in D(A^+)$

самосопряженность:  $D(A) = D(A^+)$

короче, для с/с оператора нужно проверять непрерывность по  $f$  (для области определения)

суть в том, что должны быть области определения везде, а не только свойства.

как перейти к сопряженному оператору?

и короче работаем мы с  $\bar{A}$ , я хз, почему.

В задачах 5.31, 5.33 – 5.35 ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  интегрального уравнения (1) является эрмитовым, т. е. совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром:

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}.$$



В частности, если эрмитово ядро является вещественным, то оно симметрично, т. е.  $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$ .

Эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$  обладает следующими свойствами:

- 1) множество характеристических чисел этого ядра не пусто, расположено на действительной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;
- 2) система собственных функций  $\{\varphi_k\}$  может быть выбрана ортонормальной:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}.$$

**15. Симметричный оператор в гильбертовом пространстве, свойства его собственных чисел и собственных функций. Формулы Грина и симметричность оператора Лапласа в  $L_2(G)$  с граничными условиями трех видов. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Лапласа с граничными условиями**

(без доказательства). [1] – 244-249, 251.

### Основные свойства интеграла Лебега (??)

а) Если функция  $f(x)$  измерима в  $Q$  и  $|f(x)| \leq g(x)$ ,  $g(x) \in L_1(Q)$ , то  $f \in L_1(Q)$ . В частности, измеримая ограниченная функция в ограниченной области  $Q$  принадлежит  $L_1(Q)$ .

**Теорема Лебега.** Если последовательность измеримых в  $Q$  функций  $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$  сходится к функции  $f(x)$  п.в. в  $Q$  и  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , для  $g \in L_1(Q)$ , то  $f \in L_1(Q)$  и  $\int_Q f_n(x) dx \rightarrow \int_Q f(x) dx$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема Фубини.** Если  $f(x, y) \in L_1(Q \times P)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m) \in P$ ,  $Q$  и  $P$  - некоторые области из  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  соответственно, то

$$\int_Q f(x, y) dx \in L_1(P), \quad \int_P f(x, y) dy \in L_1(Q)$$

$$\int_{Q \times P} f(x, y) dx dy = \int_Q dx \int_P f(x, y) dy = \int_P dy \int_Q f(x, y) dx.$$

Если  $f(x, y)$  измерима в  $Q \times P$ , для п.в.  $x \in Q$  функция  $|f(x, y)| \in L_1(P)$  и  $\int_P |f(x, y)| dy \in L_1(Q)$ , то  $f(x, y) \in L_1(Q \times P)$ .

(!?! это же в 1й части матана, но подробнее!!)

### 2.5.5 О конструкциях гармонического анализа

**10. Дельта - образная последовательность. Формула Пуассона для решения уравнения теплопроводности с непрерывной начальной функцией.**

[1] – 114-115, [2] – 193, 103-110, 113-114.

**12. Преобразование Фурье и его свойства. Фундаментальное решение оператора с постоянными коэффициентами помогает найти частное решение уравнения.**

[2] – 200-201, 204-205, 207-208, 222-224.

## 2.5.6 Основное о функциональных пространствах для PDE

### Определения и свойства основных функциональных пространств

**Пространства Шварца  $S$  и  $S'$ . Свертка функций, ее свойства.** [2] – 201-203, 205-207.

**Гильбертовы пространства дифференцируемых функций по Владимирову**  
Пусть  $Q$  - некоторая ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ . Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - мультииндекс (см. обозначения).

Обобщенная производная (о.п.) порядка  $\alpha$  функции  $f$  из  $L_{1, \text{loc}}(Q)$  - это функция  $f^{(\alpha)} \in L_{1, \text{loc}}(Q)$ , у которой для любой финитной в  $Q$  функции  $g \in C^{|\alpha|}(\bar{Q})$  имеет место равенство

$$\int_Q f D^\alpha g dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f^{(\alpha)} g dx.$$

Если функция  $f \in C^{|\alpha|}(Q)$ , то о.п.  $f^{(\alpha)}(x)$  существует и  $f^{(\alpha)}(x) = D^\alpha f(x)$  п.в. Поэтому в дальнейшем о.п. порядка  $\alpha$  функции  $f(x)$  будет обозначаться через  $D^\alpha f$ .

Множество функций (будем считать их вещественными)  $f \in L_2(Q)$ , имеющих все о. п. до порядка  $k$  включительно, принадлежащие  $L_2(Q)$ , называется пространством Соболева  $H^k(Q)$ .  $H^k(Q)$  - гильбертово пространство. Скалярное произведение в нем можно задать формулой

$$(f, g) = \int_Q \left( \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f D^\alpha g \right) dx$$

а соответствующую согласованную с ним норму -

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \left[ \int_Q \left( \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f|^2 \right) dx \right]^{1/2}.$$

При  $k = 0$  пространство  $H^k(Q)$  совпадает с  $L_2(Q)$  ( $H^0(Q) = L_2(Q)$ ). Если граница  $\Gamma$  достаточно гладкая, то пространство  $H^k(Q)$  есть пополнение множества  $C^k(\bar{Q})$  по норме  $(2')$ .

Пусть  $f \in H^1(Q)$ ,  $f_k, k = 1, 2, \dots$  - последовательность функций из  $C^1(\bar{Q})$ , сходящаяся в норме  $H^1(Q)$  к  $f(x)$ . Для любой гладкой  $(n-1)$ -мерной поверхности  $S$  (состоящей из конечного числа кусков, каждый из которых однозначно проектируется на какую-нибудь координатную плоскость), лежащей в  $\bar{Q}$ , существует такая постоянная  $c > 0$ , не зависящая от  $f(x)$  и  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , что

$$\int_S |f_k - f_m|^2 ds \leq c \|f_k - f_m\|_{H^1(Q)}^2.$$

Из этого неравенства и полноты пространства  $L_2(S)$  вытекает, что последовательность следов функций  $f_k(x)$  на  $S$  сходится в норме  $L_2(S)$  к некоторой функции  $g \in L_2(S)$ . Функция  $g(x)$  не зависит от выбора последовательности, приближающей функцию  $f(x)$ , и называется следом  $f|_S$  функции  $f(x)$  на поверхности  $S \in \bar{Q}$ .

Множество функций на  $H^1(Q)$ , след которых на границе  $\Gamma$  равен нулю п. в. на  $\Gamma$ , обозначим через  $\overset{\circ}{H}^1(Q)$ . Его можно получить пополнением по норме  $(2')$  при  $k = 1$

множества функций, имеющих непрерывные частные производные в  $Q$  первого порядка и обращающихся в нуль на  $\Gamma$ .

Для функции  $f \in L_1(Q)$  свертка  $f_h(x) = \int_Q \omega_h(|x - y|)f(y)dy$ ,  $\omega_h(|x - y|)$  - ядро усреднения (см. обозначения), называется средней функцией для  $f$ .

Пусть  $x_i = \varphi_i(y)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  -  $k$  раз непрерывно дифференцируемое в  $\bar{Q}$  взаимно однозначное отображение области  $Q$  на область  $Q'$  с якобианом, отличным от нуля в  $\bar{Q}$ . Тогда, если  $f \in H^k(Q)$ , то

$$F(y) = f(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) \in H^k(Q').$$

Два скалярных произведения  $(u, v)_I$  и  $(u, v)_II$  в гильбертовом пространстве и соответствующие им нормы  $\|u\|_I$  и  $\|u\|_{II}$  называются эквивалентными, если существуют постоянные  $c_1 > 0$  и  $c_2 > 0$  такие, что для любого  $u \in H$  справедливы неравенства  $c_1\|u\|_I \leq \|u\|_{II} \leq c_2\|u\|_I$ .

**О свойствах обобщенных функций По Владимирову**  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  - совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций  $\mathcal{D}$ . Всякий функционал  $f \in \mathcal{D}'$  назовем обобщенной функцией (из пространства  $\mathcal{D}'$ ).

$\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  - совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций  $\mathcal{S}$ . Всякий функционал  $f \in \mathcal{S}'$  назовем обобщенной функцией медленного роста (из пространства  $\mathcal{S}'$ ).

Значение функционала  $f$  на основной функции  $\varphi$  обозначим через  $(f, \varphi)$ . Чтобы указать аргумент основных функций, иногда вместо  $f$  и  $(f, \varphi)$  будем писать  $f(x)$  и  $(f(x), \varphi(x))$ .

Последовательность  $\{f_k\}$  обобщенных функций из  $\mathcal{D}'$  называется **сходящейся** к обобщенной функции  $f$  (из  $\mathcal{D}'$ ), если  $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$ ,  $k \rightarrow \infty$  для любой  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$ . В частности, ряд из обобщенных функций  $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$  называется сходящимся в  $\mathcal{D}'$  к обобщенной функции  $f$ , если для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k, \varphi)$  сходится к  $(f, \varphi)$ . Сходимость последовательности и ряда в  $\mathcal{S}$  определяется аналогично. Говорят, что обобщенная функция  $f$  равна нулю в области  $G$ , если  $(f, \varphi) = 0$  для всех  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$  с носителем в  $G$ . Обобщенные функции  $f_1$  и  $f_2$  называются равными в области  $G$ , если их разность  $f_1 - f_2$  равна нулю в  $G$ ;  $f_1$  и  $f_2$  называются равными, если  $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Носителем обобщенной функции  $f$  ( $\text{supp } f$ ) - множество всех таких точек, ни в какой окрестности которых  $f$  не обращается в нуль. Если  $\text{supp } f$  - ограниченное множество, то  $f$  называется **финитной** обобщенной функцией.

Регулярной обобщенной функцией из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  называется всякий функционал вида

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

$f$  - локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция. Если  $f(x)$  - функция медленного роста в  $\mathbb{R}^n$ , т. е.

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m}dx < \infty$$

при некотором  $m \geq 0$ , то она определяет регулярную обобщенную функцию из  $\mathcal{S}'$  (медленного роста).

Всякая обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется сингулярной.

Примером сингулярной обобщенной функции является  $\delta$ -функция Дирака, определяемая правилом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Обобщением  $\delta$ -функции является поверхностная  $\delta$ -функция. Пусть  $S$  - кусочно гладкая поверхность и  $\mu(x)$  - непрерывная функция на ней. Обобщенную функцию  $\mu\delta_S$ , действующую по формуле

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(x)dS_x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

назовем простым слоем. В частности, если  $S$  есть плоскость  $t = 0$  в  $\mathbb{R}^{n+1}(x, t)$ , то  $\mu\delta_{(t=0)}(x, t)$  обозначим  $\mu(x)\delta(t)$ , так что

$$(\mu(x)\delta(t), \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x)\varphi(x, 0)dx.$$

При  $n = 1$  простой слой  $\delta_{S_R}(x)$  на сфере  $S_R$  обозначим через  $\delta(R - |x|)$ , так что  $(\delta(R - |x|), \varphi) = \varphi(R) + \varphi(-R)$ .

Произведением  $f$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и функции  $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  называется обобщенная функция  $\alpha f$ , действующая по формуле  $(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $A$  - неособое линейное преобразование и  $b$  - вектор в  $\mathbb{R}^n$ . Обобщенную функцию  $f(Ay + b)$  определим формулой

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left( f, \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

При  $A = I$  имеем сдвиг обобщенной функции  $f$  на вектор  $-b$ : Например,

$$\begin{aligned} (f(y + b), \varphi) &= (f, \varphi(x - b)). \\ (-x_0), \varphi) &= (\delta, \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0) \end{aligned}$$

- сдвиг  $\delta(x)$  на вектор  $x_0$ . При  $A = -I, b = 0$  имеем отражение

$$(f(-x), \varphi) = (f, \varphi(-x)).$$

**О дифференцировании обобщенных функций (?)** (на это задачи есть, так что проработайте!)

Производной обобщенной функции  $f$  из  $\mathcal{D}'(R^1)$  называется функционал  $f'$ , определяемый формулой  $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)$ . Каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка и  $f^{(m)}, m \geq 1$ , есть функционал, действующий по формуле

$$(f^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}).$$

В случае  $n > 1$  формула (\*), определяющая производную  $D^\alpha f$ , принимает вид

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть  $S$  - кусочно гладкая двусторонняя поверхность,  $\mathbf{n}$  - нормаль к  $S$  и  $\nu(x)$  - непрерывная функция на  $S$ . Обобщенную функцию  $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ , действующую по формуле

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \varphi\right) = \int_S \nu(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

плоскость  $t = 0$  в пространстве  $R^{n+1}$  переменных  $(x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , то  $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_{(t=0)}(x, t))$  обозначим через  $-\nu(x)\delta'(t)$ , так что

$$(-\nu(x)\delta'(t), \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(x) \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} dx.$$

Пусть локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция  $f(x)$  такова, что ее классическая производная порядка  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - кусочно непрерывная функция в  $\mathbb{R}^n$ . Регулярную обобщенную функцию, определяемую этой производной, обозначим через  $\{D^\alpha f(x)\}$  (в отличие от обобщенной производной  $D^\alpha f(x)$ ).

**Прямое произведение обобщенных функций** Прямое произведением обобщенных функций  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$  называется обобщенная функция  $f(x) \cdot g(y)$  из  $\mathcal{D}'(R^{n+m})$ , определяемая формулой

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m}).$$

Прямое произведение коммутативно, т. е.  $f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x)$  и ассоциативно, т. е.

$$[f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z) = f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)].$$

Если  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g \in \mathcal{S}'(R^m)$ , то  $f(x) \cdot g(y)$  определяется по формуле (1),  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{m+n})$ , и принадлежит  $\mathcal{S}'(R^{m+n})$ . Производная прямого произведения обладает свойством

$$D_x^\alpha (f(x) \cdot g(y)) = D^\alpha f(x) \cdot g(y); \quad D_y^\alpha (f(x) \cdot g(y)) = f(x) \cdot D^\alpha g(y). \quad (2)$$

Если  $\mu(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $\nu(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , то обобщенные функции  $\mu(x) \cdot \delta(t)$  и  $-\nu(x) \cdot \delta'(t)$  называются простым и двойным слоем на поверхности  $t = 0$  плотностями  $\mu(x)$  и  $\nu(x)$  соответственно. В случае непрерывных плотностей эти определения слоев совпадают с определениями, приведенными в §6 и §7, т. е.  $\mu(x) \cdot \delta(t) = \mu(x)\delta(t)$  и  $-\nu(x) \cdot \delta'(t) = -\nu(x)\delta'(t)$

Обобщенную функцию  $\delta(at - |x|)$ ,  $a > 0$ , из  $\mathcal{D}'(R^2)$  определим равенством

$$\delta(at - |x|) = \theta(t)\delta(at + x) + \theta(t)\delta(at - x),$$

где обобщенные функции  $\theta(t)\delta(at + x)$  и  $\theta(t)\delta(at - x)$  есть результаты линейных замен переменных  $t' = t$ ,  $\xi = at \pm x$  в  $\theta(t') \cdot \delta(\xi)$ , т. е.

$$\begin{aligned} (\theta(t)\delta(at + x), \varphi) &= \int_0^\infty \varphi(-at', t') dt' \\ (\theta(t)\delta(at - x), \varphi) &= \int_0^\infty \varphi(at', t') dt' \end{aligned}$$

**Свертка обобщенных функций** Сверткой локально интегрируемых в  $\mathbb{R}^n$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$  таких, что функция

$$h(x) = \int |f(y)g(x-y)|dy$$

также локально интегрируема в  $\mathbb{R}^n$ , называется функция

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy = (g * f)(x).$$

Последовательность  $\{\eta_k(x)\}$  функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  называется сходящейся к 1 в  $\mathbb{R}^n$ , если она обладает свойствами: а) для любого шара  $U_R$  найдется такой номер  $N$ , что  $\eta_k(x) = 1$  при всех  $x \in U_R$  и  $k \geq N$ ; б) функции  $\{\eta_k\}$  равномерно ограничены в  $\mathbb{R}^n$  вместе со всеми производными, т. е.

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leq C_\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

- любое.

Пусть  $\{\eta_k(x; y)\}$  - любая последовательность функций из  $\mathcal{D}(R^{2n})$ ,

сходящаяся к 1 в  $R^{2n}$ . Пусть обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  таковы, что для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  числовая последовательность  $(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y)\varphi(x+y))$  имеет предел при  $k \rightarrow \infty$  и этот предел не зависит от выбора последовательности  $\{\eta_k\}$ . Этот предел обозначим через

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)).$$

Сверткой  $f * g$  называется функционал

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x; y)\varphi(x+y)),$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Свертка коммутативна, т. е.  $f * g = g * f$ .

Дифференцирование свертки.

Если свертка  $f * g$  существует, то существуют и свертки  $D^\alpha f * g$  и  $f * D^\alpha g$ , причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g.$$

Свертка инвариантна относительно сдвига, т. е.

$$f(x+h) * g(x) = (f * g)(x+h), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

**Достаточные условия существования свертки.** I. Если  $f$  - произвольная, а  $g$  - финитная обобщенные функции в  $\mathcal{D}'$ , то  $f * g$  существует в  $\mathcal{D}'$  и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

$\eta$  - любая основная функция, равная 1 в окрестности  $\text{supp } g$ .

II. Обозначим через  $\mathcal{D}'_+$  множество обобщенных функций из  $\mathcal{D}'(R^1)$ , обращающихся в нуль при  $x < 0$ .

Если  $f, g \in \mathcal{D}'_+$ , то их свертка принадлежит  $\mathcal{D}'_+$  и выражается формулой

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)),$$

где

$$\eta_k(t) = \begin{cases} 1, & t \geq -\varepsilon_k, \\ 0, & t < -2\varepsilon_k, \end{cases} \quad \eta_k \in C^\infty(R^1), \quad k = 1, 2.$$

таким образом, множество  $\mathcal{D}'_+$  образует сверточную алгебру.

## Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

$$F[\varphi](\xi) := \int e^{i(\xi, x)} \varphi(x) dx. \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]). \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \mathcal{S}'$$

$$\forall f, g \in \mathcal{S}' \hookrightarrow$$

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]$$

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]$$

$$F[f(x - x_0)] = e^{i(x_0, \xi)} F[f]$$

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[f(x)e^{i(x, \xi_0)}](\xi)$$

$$F[f(cx)] = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad c \neq 0$$

$$F[f(x) \cdot g(y)] = F[f](\xi) \cdot F[g](\eta),$$

$$F[f * g] = F[f]F[g] \quad (f \text{ или } g \text{ финитна}).$$

Преобразование Фурье  $F_x$  по переменной  $x$  обобщенной функции  $f(x, y) \in \mathcal{S}'(R^{n+m})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n, y \in R^m$ , определим формулой  
(потом допишу)

## 2.5.7 Дельта-функция, ее производные, функция Хевисайда

(look note on special functions about it)

## 2.6 Main special functions for PDE-s

(see for now note on special functions)

### 2.6.1 О сферических функциях

(see for now note on special functions)

### 2.6.2 О функциях Бесселя

(see for now note on special functions)

### 2.6.3 О других функциях

(see for now note on special functions)

---

## Part II

# Basic Classical and General PDE Methods

## 3 PDE by Lebedev, Kolokolov

### 3.1 Линейные эволюционные уравнения

В равновесии параметры физической системы не меняются со временем. Если систему отклонить от равновесия, то она будет релаксировать к равновесию. Возможны и колебания системы около положения равновесия. При наличии внешнего воздействия состояние системы отклонится от равновесия. Все эти процессы описываются линейными уравнениями (дифференциальными или интегральными) на параметры системы при условии, что ее отклонение от равновесия невелико и внешнее воздействие достаточно слабо. При тех же условиях уравнения являются однородными по времени.

#### 3.1.1 1.1 Эволюционные уравнения с постоянными коэффициентами

Во многих физических приложениях возникает задача о реакции физической системы на внешнее воздействие, выводящее ее из равновесия. Чтобы найти состояние системы в данный момент времени, надо решить эволюционную задачу, поскольку это состояние будет определяться предысторией системы. Если отклонение системы от равновесия невелико, то ее реакцию на внешнее воздействие можно изучать в рамках линейных уравнений. Мы считаем, что основное состояние системы (отклонение от которого мы изучаем) не меняется со временем. Тогда обычно приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями с постоянными (не зависящими от времени) коэффициентами.

#### 3.1.2 1.1.1 Уравнение первого порядка

Рассмотрим простейший пример уравнения, которое описывает релаксацию системы к равновесию:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = \phi \quad (1.1)$$

где  $x(t)$  - переменная, описывающая отклонение системы от равновесия,  $\gamma$  - кинетический коэффициент (некоторый положительный параметр), а величина  $\phi(t)$  представляет внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия. Уравнение типа (1.1) возникает в том случае, когда инерционными свойствами системы можно пренебречь. Например, уравнение (1.1) возникает при описании движения коллоидных частиц.

Решение уравнения (1.1) можно записать в виде следующего интеграла

$$x(t) = \int ds G(t-s) \phi(s) \quad (1.2)$$

Здесь  $G$  - так называемая функция Грина уравнения (1.1). Функция Грина  $G(t-s)$  определяет реакцию системы в момент времени  $t$  на 'ударное' воздействие на систему, приложенное в момент времени  $s$ . Выражение (1.2) обусловлено линейностью уравнения



(1.1), вследствие которого искомая величина  $x$  представляется в виде суммы (интеграла) вкладов, производимых внешним воздействием  $\phi$  в разные моменты времени.

Обратим внимание на то, что функция Грина  $G$ , которая фигурирует в выражении (1.2), зависит только от разности  $t - s$ , но не от этих переменных по отдельности. Это свойство связано с тем, что кинетический коэффициент  $\gamma$  в уравнении (1.1) не зависит от времени. Другими словами, это свойство связано с однородностью уравнения (1.1) по времени: при сдвиге  $t \rightarrow t + t_0$  вид этого уравнения не меняется. В дальнейшем мы часто будем сталкиваться с подобной однородностью или ее нарушениями.

Уравнение (1.1) можно решать на различных временных интервалах. От величины этих интервалов будет зависеть область интегрирования в выражении (1.2). Выражение (1.2) дает вынужденное решение, связанное с внешним воздействием. К нему следует добавить решение однородного уравнения (1.1) (то есть уравнения без правой части), связанное с начальными условиями на границе рассматриваемого интервала. Мы рассмотрим сначала случай бесконечного интервала,  $-\infty < t < +\infty$ . В этом случае начальные условия, заданные при  $t \rightarrow -\infty$ , можно игнорировать, поскольку они забываются на конечных временах. Позже мы обобщим наш подход на случай конечного интервала по времени.

Функция Грина уравнения (1.1)  $G$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{dG}{dt} + \gamma G = \delta(t - s) \quad (1.3)$$

то есть исходному уравнению (1.1) с правой частью  $\phi = \delta(t - s)$ . Здесь  $\delta(t - s)$  - дельта-функция Дирака, ее основные свойства приведены в разделе 1.5.2. Пользуясь этими свойствами, легко проверить, что функция  $x(t)$ , определяемая выражением (1.2), действительно является решением уравнения (1.1). Для этого следует применить к уравнению (1.2) оператор  $d/dt + \gamma$  и воспользоваться затем соотношением (1.3).

Однако функция Грина  $G(t)$  определена уравнением (1.3) неоднозначно, поскольку его решение определено

с точностью до решения однородного (то есть с нулевой правой частью) уравнения (1.1). Для того, чтобы однозначно определить функцию Грина  $G(t)$ , необходимо использовать принцип причинности. Из соотношения (1.2) следует, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , поскольку система может реагировать только на воздействие, имевшее место в прошлом, но не в будущем. Принцип причинности уже однозначно фиксирует функцию Грина. В силу того, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , выражение (1.2) можно переписать в следующем виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds G(t - s) \phi(s) \quad (1.4)$$

Здесь подразумевается, что внешнее воздействие  $\phi$  действует на систему на полном временном интервале, от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Найдем явное выражение для функции Грина  $G(t)$ , которая определяется уравнением (1.3). Поскольку  $\delta(t)$  равна нулю при  $t > 0$ , то в этой области  $G(t)$  является решением однородного уравнения (1.1), то есть  $G(t) = A \exp(-\gamma t)$ , где  $A$  - некоторая константа. Учитывая, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , мы заключаем, что при  $t = 0$  функция  $G(t)$  испытывает скачок  $A$ . В силу уравнения (1.3) и соотношения (1.58) этот скачок должен быть равен единице. Таким образом,  $A = 1$ , и мы находим окончательно

$$G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t) \quad (1.5)$$

где  $\theta(t)$  - функция Хэвисайда, равная нулю при  $t < 0$ , и равная единице при  $t > 0$ . Подставляя это выражение в соотношение (1.4), мы находим

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp[-\gamma(t-s)]\phi(s) \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что система постепенно (за время  $\gamma^{-1}$ ) забывает о воздействии на нее, которое имело место в прошлом.

Перейдем к случаю, когда состояние системы задано в начальный момент времени, а далее она эволюционирует под внешним воздействием. Будем отсчитывать время от момента, когда задано начальное состояние. Тогда начальные условия заданы при  $t = 0$ . Уравнение (1.1) является уравнением первого порядка, то есть начальное состояние системы характеризуется только значением переменной  $x$  при  $t = 0$ , которое мы обозначаем  $x(0)$ . Тогда вместо (1.4) решение уравнения (1.1) при  $t > 0$  перепишется в следующем виде

$$x(t) = x(0)G(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s) \quad (1.7)$$

Действительно, выражение (1.7) удовлетворяет исходному уравнению и начальному условию, поскольку  $G(+0) = 1$ .

Задача 1.1.1. Найти решение задачи Коши для уравнения (1.1) при нулевых начальных условиях  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ . Как выглядит решение при  $\alpha \rightarrow \gamma$ ?

### 3.1.3 1.1.2 Уравнения порядка выше первого

В настоящем разделе мы рассмотрим более сложные эволюционные уравнения. В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствующую функцию Грина. Однако этот способ решения уравнения эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Мы продемонстрируем, как ее можно найти для дифференциального уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами.

Начнем с уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi \quad (1.8)$$

которое описывает осциллятор, к которому приложена внешняя сила  $\phi$ . Здесь  $\nu$  имеет смысл собственной частоты колебаний осциллятора. Произвольное решение однородного уравнения (1.8) является линейной комбинацией  $\cos(\nu t)$  и  $\sin(\nu t)$  с произвольными коэффициентами.

Решение уравнения (1.8) с правой частью можно записать через функцию Грина  $G(t)$ , в виде (1.2) или (1.4). Функция  $G(t)$  удовлетворяет уравнению (1.8) с  $\delta$  функцией в правой части:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right) G(t) = \delta(t) \quad (1.9)$$

аналогичному соотношению (1.3). Как и раньше, легко проверить, что выражение (1.9) дает решение уравнения (1.8). Для этого надо применить к соотношению (1.9) оператор  $d^2/dt^2 + \nu^2$  и воспользоваться свойствами дельта-функции.

Найдем решение уравнения (1.9). Как мы уже установили, в силу причинности  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ . В отличие от функции Грина (1.5), решение уравнения (1.9) остается непрерывным при  $t = 0$  в силу того, что в его левой части стоит вторая производная по  $t$ . В этом случае  $\delta$ -функция производится при дифференцировании, если скачок испытывает первая производная от функции, смотри раздел 1.5.2. Используя соотношение (1.58),

легко найти, что скачок первой производной в  $G(t)$  должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем, что при  $t = +0$   $G = 0, G' = 1$ . Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего  $G(t)$  при  $t > 0$ , поскольку правая часть уравнения (1.9) в этом случае равна нулю. Задача легко решается, и мы находим

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin(\nu t) \quad (1.10)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер функции Грина, связанный с осцилляторной природой уравнения (1.8).

Выражение (1.4) дает решение уравнения (1.8) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть этими условиями являются значения функции и ее производной,  $x$  и  $\dot{x}$ , в начальный момент времени, в качестве которого мы выберем  $t = 0$ . Решение задачи Коши для уравнения (1.8) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s) \quad (1.11)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.8), а также начальным условиям, что легко проверить с использованием соотношений  $G(+0) = 0, \dot{G}(+0) = 1, \ddot{G}(+0) = 0$ , следующих из выражения (1.10).

Задача 1.1.2. Найти решение задачи Коши для уравнения (1.8) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t), \alpha > 0$ . Найти предел  $\nu \rightarrow 0$ .

Перейдем теперь к общему случаю дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$L(d/dt)x = \phi \quad (1.12)$$

где  $L(z)$  - полином от  $z$ :

$$L = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (1.13)$$

Здесь  $a_i$  - некоторые константы. Именно к типу (1.12) относятся рассмотренные нами выше уравнения (1.1, 1.8). Решение уравнения (1.12) записывается в виде (1.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t) \quad (1.14)$$

и условию  $G = 0$  при  $t < 0$ .

Решение уравнения (1.14) можно явно выразить через корни полинома (1.13)  $z_i$  (которые могут быть как действительными, так и комплексными). Общее решение однородного уравнения  $L(d/dt)x = 0$  имеет вид

$$x = \sum_i b_i \exp(z_i t) \quad (1.15)$$

где  $b_i$  - произвольные константы. В виде (1.15) записывается функция Грина  $G(t)$  при  $t > 0$ . Коэффициенты же  $b_i$  находятся из условий, что при  $t \rightarrow +0$  производная  $d^{n-1}G/dt^{n-1} = 1$ , а для  $m < n-1$  производные  $d^m G/dt^m = 0$ , включая  $m = 0$ . Именно при этих условиях при применении оператора  $L(d/dt)$  возникает  $\delta$  функция и не возникают ее производные в правой части уравнения (1.14).

Отметим, что для устойчивой системы все корни  $z_i$  уравнения  $L(z) = 0$  имеют отрицательную действительную часть, что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. Тогда  $G(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . В то же время для неустойчивой системы имеются корни с положительной действительной частью. В этом случае имеется вклад в функцию Грина  $G(t)$ , расходящийся на больших  $t$ .

Задача 1.1.3. Найти функцию Грина уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi$$

Задача 1.1.4. Найти функцию Грина уравнения

$$\left( \frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4 \right) x = \phi$$

Необходимо проявить аккуратность в случае, когда уравнение  $L(z) = 0$  имеет кратные корни. В этом случае помимо чистых экспонент, как в выражении (1.15), среди решений однородного уравнения  $L(d/dt)x = 0$  имеются секулярные члены (со степенями  $t$  при экспонентах). Все эти решения следует вовлекать в составление необходимой нам комбинации, определяющей  $G(t)$ .

Задача 1.1.5. Найти функцию Грина уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right)^2 x = \phi$$

### 3.1.4 1.1.3 Матричное уравнение

Прямым обобщением скалярного релаксационного уравнения (1.1) является линейное уравнение для векторной величины  $\mathbf{y}$ :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\mathbf{y} = \chi \quad (1.16)$$

Здесь  $\hat{\Gamma}$  - матрица, которая определяет динамику системы, а вектор  $\chi$  представляет внешнее воздействие на систему.

Отметим, что к виду (1.16) приводится рассмотренное выше дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка для скалярной переменной  $x$ . Для этого достаточно ввести  $y_1 = x, y_2 = dx/dt, \dots, y_n = d^{n-1}x/dt^{n-1}$ . После этого  $d\mathbf{y}/dt$  выражаются через компоненты  $\mathbf{y}$ , исходя из введенных определений и исходного уравнения  $n$ -го порядка, приводя к уравнению (1.16) с матрицей  $\hat{\Gamma}$  размера  $n \times n$ .

Задача 1.1.6. Свести к виду (1.16) уравнение, введенное в задаче 1.2.3.

Как известно, можно ввести собственные векторы  $\mathbf{a}_i$  матрицы  $\hat{\Gamma}$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\hat{\Gamma}\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i \quad (1.17)$$

где  $\lambda_i$  - собственные числа матрицы  $\hat{\Gamma}$ . Если собственные числа не вырождены, то любой вектор можно разложить по собственным векторам  $\mathbf{a}_i$ , в частности  $\mathbf{y} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i, \chi = \sum_i \phi_i \mathbf{a}_i$ . Подставляя это представление в уравнение (1.16), находим

$$\frac{dx_i}{dt} + \lambda_i x_i = \phi_i \quad (1.18)$$

Таким образом, задача сводится к набору уже рассмотренных нами скалярных уравнений (1.1).

Собственные числа  $\lambda_i$  могут быть как действительными, так и комплексными. Для действительной матрицы  $\hat{\Gamma}$  собственные числа  $\lambda_i$  либо действительны, либо распадаются на пары комплексно сопряженных величин. Для устойчивой системы все собственные числа  $\lambda_i$  имеют положительные действительные части. Для чисто осцилляторной системы комплексно сопряженные  $\lambda_i$  являются чисто мнимыми. Если матрица  $\hat{\Gamma}$  происходит из скалярного уравнения  $n$ -го порядка (1.14), то собственные числа  $\lambda_i$  определяются корнями уравнения  $L(z_i) = 0$ ,  $\lambda_i = -z_i$ .

Введем функцию Грина для уравнения (1.16), которая является матрицей  $\hat{G}(t)$ , через которую выражается решение этого уравнения

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t ds \hat{G}(t-s) \mathbf{x}(s) \quad (1.19)$$

Функция Грина  $\hat{G}(t)$  равна нулю при  $t < 0$  и удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{d}{dt} + \hat{\Gamma} \right) \hat{G}(t) = \delta(t) \hat{1} \quad (1.20)$$

где  $\hat{1}$  - единичная матрица. Решение этого уравнения записывается в виде

$$\hat{G} = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t) \quad (1.21)$$

Можно выписать явное выражение для функции Грина в терминах собственных векторов матрицы  $\Gamma$ . Для этого помимо собственных столбцов  $\mathbf{a}_i$  матрицы  $\Gamma$  надо ввести собственные строки  $\mathbf{b}_i^T$ , которые удовлетворяют уравнениям  $\mathbf{b}_i^T \hat{\Gamma} = \lambda_i \mathbf{b}_i^T$ . Как известно, собственные столбцы и строки можно выбрать ортонормированными  $\mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, равный единице, если  $i = j$ , и нулю, если  $i \neq j$ . Тогда

$$\hat{G} = \theta(t) \sum_i e^{-\lambda_i t} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^T \quad (1.22)$$

Это выражение представляет собой сумму функций Грина (1.5) с множителями, которые обеспечивают проекции на собственные векторы матрицы  $\hat{\Gamma}$ .

Задача 1.1.7. Выписать выражение (1.22) для матрицы

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Полученные соотношения можно переписать в матричном виде. А именно, введем обозначения  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  для матриц, составленных из собственных столбцов матрицы  $\hat{\Gamma}$  и из собственных строк матрицы  $\hat{\Gamma}$ , соответственно. Тогда условие ортонормированности строк и столбцов записывается в виде  $\hat{B}\hat{A} = \hat{1}$ . Матрица же  $\hat{\Gamma}$  записывается в виде

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Lambda}\hat{B} \quad (1.23)$$

где  $\hat{\Lambda}$  - диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Отметим, что в силу  $\hat{B}\hat{A} = \hat{1}$

$$\hat{\Gamma}^n = \hat{A}\hat{\Lambda}^n\hat{B}$$

Поэтому из соотношения (1.21) получаем

$$\hat{G} = \theta(t) \hat{A} \exp(-t\hat{\Lambda}) \hat{B} \quad (1.24)$$

Это другая форма записи выражения (1.22).

Переходим к случаю, когда имеются вырожденные собственные значения  $\lambda_i$ . Никаких проблем не возникает, например, если матрица  $\hat{\Gamma}$  является симметричной. Тогда имеется  $n$  собственных векторов  $\mathbf{a}_i$  матрицы  $\hat{\Gamma}$ , по которым можно разложить любой вектор. Поэтому мы возвращаемся к описанной выше ситуации, когда задача распадается на  $n$  независимых скалярных уравнений, каждое из которых имеет вид (1.1). Рассмотрим случай матриц, имеющих вырожденные собственные значения  $\lambda_i$ , когда задачу нельзя свести к  $n$  независимым скалярным уравнениям, каждое из которых имеет вид (1.1). Матрицу  $\hat{\Gamma}$  и в этом случае можно представить в виде (1.23). Однако  $\hat{\Lambda}$  уже не является диагональной, а распадается на совокупность клеток Жордана. Отметим, что по-прежнему имеет место представление (1.24). Поэтому задача сводится к вычислению  $\exp(-t\hat{\Lambda})$ .

Чтобы проиллюстрировать особенности рассматриваемого случая, рассмотрим матрицу  $2 \times 2$

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \hat{1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

которая является канонической формой матрицы Жордана  $2 \times 2$ . В компонентах

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} + \lambda y_1 + y_2 &= \chi_1 \\ \frac{dy_2}{dt} + \lambda y_2 &= \chi_2 \end{aligned}$$

Таким образом,  $y_2$  удовлетворяет стандартному уравнению (1.1). Введя  $y_1 = y - ty_2$ , мы находим стандартное уравнение для  $y$ :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = \chi_1 + t\chi_2$$

Тем не менее, в  $y_1$  содержится секулярный член  $-ty_2$ .

Данная ситуация является типичной. Наличие в каноническом представлении (1.23) матрицы  $\hat{\Gamma}$  клеток Жордана в матрице  $\hat{\Lambda}$  приводит к появлению секулярных членов в решении уравнения (1.16). Они могут быть первого порядка по  $t$  (то есть содержать первую степень  $t$ , как множитель при экспоненте), как в рассмотренном нами выше простейшем случае, или более высокого порядка по  $t$  (в случае более сложной клетки Жордана) в качестве множителя при экспоненте. Все это не меняет качественно экспоненциальный характер решения однородного уравнения (1.16), однако производит степенные множители при экспонентах.

Канонический вид клетки Жордана имеет вид  $\lambda \hat{1} + \hat{N}$ , где  $\hat{N}$  - нильпотентная матрица, все степени которой, начиная с некоторой, равны нулю. В рассмотренном нами простейшем примере матрицей  $\hat{N}$  является последняя матрица в выражении (1.25), уже ее квадрат равен нулю. Следующей по сложности является клетка Жордана  $3 \times 3$

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Матрица  $\hat{N}$  и ее квадрат имеют вид

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Все более высокие степени матрицы  $\hat{N}$  равны нулю.

Свойство нильпотентности матрицы  $\hat{N}$  позволяет эффективно получать выражение для функции Грина (1.24). Подставляя  $\hat{\Lambda} = \lambda \hat{1} + \hat{N}$  и раскладывая экспоненту по  $\hat{N}$ , находим

$$\exp(-t\hat{\Lambda}) = e^{-\lambda t} \left( \hat{1} - t\hat{N} + \frac{t^2}{2}\hat{N}^2 + \dots \right) \quad (1.27)$$

Благодаря нильпотентности матрицы  $\hat{N}$  в разложении (1.27) по степеням  $\hat{N}$  имеется лишь конечное число членов. Для рассмотренного нами простейшего случая в выражении (1.27) лишь первая степень отлична от нуля. Для матрицы (1.26) отличны от нуля два члена разложения, что дает

$$\exp(-t\hat{\Lambda}) = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & -t & t^2/2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1.1.8. Найти функцию Грина уравнения (1.16) для матрицы

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

которая относится к типу Жордана.

### 3.1.5 1.2 Преобразование Лапласа эволюционных задач

Преобразование Лапласа (смотри раздел 1.5.3) является естественным методом решения эволюционных задач, для которых выполняется принцип причинности. Например, в силу принципа причинности функция Грина отлична от нуля только при положительных временах и потому ее естественно характеризовать при помощи преобразования Лапласа

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt) G(t)$$

При этом выявляются некоторые особенности функции Грина, связанные с аналитической структурой ее преобразования Лапласа  $\tilde{G}(p)$ .

Изложим основанный на преобразовании Лапласа метод, применимый для вычисления функции Грина уравнения (1.12), которая подчиняется уравнению (1.14). Произведем преобразование Лапласа этого уравнения, интегрируя по времени  $t$  от малого положительного значения до бесконечности. В этом случае в правой части получится ноль, а в левой части мы будем интегрировать по частям все члены, 'перекидывая' производные на  $\exp(-pt)$ . В результате получим комбинацию  $L(p)\tilde{G}(p)$ . В силу равенства нулю почти всех производных  $G(t)$  при  $t \rightarrow 0$  можно убедиться, что единственный отличный от нуля внеинтегральный член происходит из

$$\int dt \exp(-pt) (d/dt)^n G(t)$$

Этот внеинтегральный член равен -1, так как равна единице производная  $d^{n-1}G/dt^{n-1}$  при  $t \rightarrow 0$ . Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\tilde{G}(p) = 1/L(p) \quad (1.28)$$

Мы заключаем, что  $\tilde{G}(p)$  имеет полюса, которые определяются нулями полинома  $L(p)$ . Обратное преобразование Лапласа имеет вид (1.61), то есть

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p) \quad (1.29)$$

Контур интегрирования в этом выражении показан на рисунке 1.1. При  $t < 0$  мы можем смещать контур интегрирования вправо, поскольку  $e^{pt}$  при этом стремится к нулю. В результате мы заключаем, что при  $t < 0$  функция Грина равна нулю, как и должно быть. При  $t > 0$  мы можем смещать контур интегрирования влево, поскольку  $e^{pt}$  при этом стремится к нулю. При таком смещении мы будем "натывать" на полюсы  $\tilde{G}(p)$ . Далее контур можно "протащить" через полюса, породив контуры, идущие вокруг полюсов. При дальнейшем сдвиге влево мы получаем нулевой вклад в интеграл по прямой, поскольку  $e^{pt}$  стремится к нулю. Таким образом,

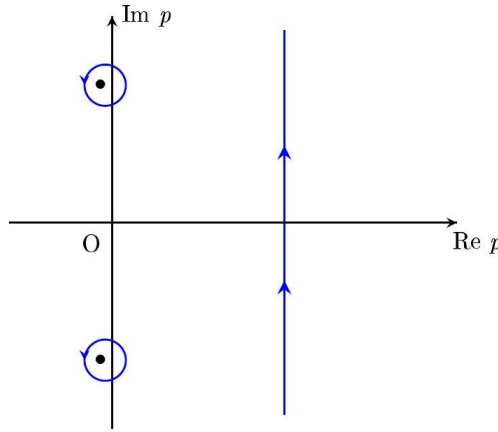


Рис. 1.1: Преобразование контура, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

интеграл сводится к сумме контурных интегралов, идущих вокруг полюсов  $G(p)$ , смотри рисунок 1.1. Каждый такой интеграл сводится к вычету в полюсе, и мы находим

$$G(t) = \sum_i \text{res}_i \exp(pt)/L(p) \quad (1.30)$$

где суммирование идет по полюсам  $\tilde{G}(p)$ , то есть нулям  $L(p)$ .

Задача 1.2.1. Найти выражения для функций Грина (1.5, 1.10), исходя из соотношения (1.30).

Для устойчивой системы все полюса выражения (1.28) лежат в левой полуплоскости по  $p$ , что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. Тогда  $G(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (1.28) в правой полуплоскости. Вычеты в этих полюсах породят вклад в функцию Грина  $G(t)$ , расходящийся на больших  $t$ , в соответствии с (1.30).

Задача 1.2.2. Исходя из соотношения (1.30), найти функцию Грина уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi$$

Убедиться, что ответ совпадает с решением задачи 1.1.3.

Задача 1.2.3. Исходя из соотношения (1.30), найти функцию Грина уравнения



$$\left(\frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4\right)x = \phi$$

Убедиться, что ответ совпадает с решением задачи 1.1.4.

Задача 1.2.4. Исходя из соотношения (1.30), найти функцию Грина уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2\right)^2 x = \phi$$

Убедиться, что ответ совпадает с решением задачи 1.1.5.

При решении задачи  $L(d/dt)x = \phi$  с нулевыми начальными условиями при  $t = 0$  мы находим

$$x(t) = \int_0^t ds G(t-s)\phi(s) \quad (1.31)$$

Производя преобразование Лапласа обеих частей соотношения (1.31), получаем

$$\tilde{x}(p) = \tilde{G}(p)\tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(p)/L(p) \quad (1.32)$$

Таким образом, если известны  $\tilde{G}(p)$  и  $\tilde{\phi}(p)$ , то  $x(t)$  можно представить в виде интеграла (1.61):

$$x(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\tilde{\phi}(p)}{L(p)} \quad (1.33)$$

Задача 1.2.5. Найти  $x(t)$ , как решение уравнения  $(d^2/dt^2 + \nu^2)^2 x = \phi$  с нулевыми начальными условиями для  $\phi = \exp(-\alpha t)$ .

Задача 1.2.6. Найти  $x(t)$ , как решение уравнения  $(d^2/dt^2 + \nu^2)x = \phi$  с нулевыми начальными условиями для  $\phi = 1/\sqrt{t}$ . Определить асимптотику этого решения при больших  $t$ .

В таком же виде (1.33) можно записать и решение задачи Коши однородного уравнения (1.12) (с нулевой правой частью). Для этого надо использовать в качестве функции  $\phi(t)$  линейную комбинацию  $\delta(t)$  и ее производных, которая обеспечивает генерацию начальных условий из нулевой при отрицательных  $t$  функции  $\Phi(t)$ . Количество производных от  $\delta$ -функции зависит от порядка полинома  $L$ : если этот порядок равен  $n$ , то надо брать производные до  $n-1$  порядка включительно. В представлении Лапласа такая функция  $\tilde{f}(p)$  представляет собой полином порядка  $n-1$  по  $p$ . Отсюда следует, например, что при больших  $t$  поведение однородного решения уравнения (1.12) будет экспоненциальным, причем ведущая экспонента определяется корнем уравнения  $L(p) = 0$  с наибольшей действительной частью. При решении смешанной задачи, когда помимо правой части задано начальное условие, надо брать линейную комбинацию вынужденного решения (1.33) и решения задачи Коши однородного уравнения.

Задача 1.2.7. Найти решение уравнения  $\partial_t^2 x + x = \exp(-\lambda t)$  с начальными условиями  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ .

Приведенные выше соображения применимы также и к матричному уравнению (1.16). В этом случае мы имеем дело с матричной функцией Грина  $\hat{G}$  и, соответственно, с матричным преобразованием Лапласа  $\hat{\tilde{G}}(p)$ . Обобщение приведенных выше соотношений на этот случай не представляет труда. Например, вместо (1.28) получается

$$\hat{\tilde{G}}(p) = (p\hat{1} + \hat{\Gamma})^{-1}$$

Вычисляя матрицу, обратную к  $p\hat{I} + \hat{G}$ , мы получаем в знаменателе детерминант, который обращается в ноль при  $p = -\lambda_i$ , где  $\lambda_i$  - собственные значения матрицы  $\hat{G}$ , определяющие поведение собственных мод системы со временем, смотри (1.22).

### 3.1.6 1.3 Уравнения Вольтерры

До сих пор мы рассматривали задачу о нахождении параметров системы при данном внешнем воздействии на нее. Для случая одного параметра решение этой задачи дается соотношением (1.4), в котором фигурирует функция Грина. Можно поставить и обратную задачу - восстановление внешнего воздействия по известной зависимости от времени параметров системы. Конечно, если известно дифференциальное уравнение, которое описывает систему, то задача сводится к простому дифференцированию. Однако зачастую это уравнение неизвестно или не является дифференциальным. В то же время функция Грина является непосредственно измеримой величиной, которую можно извлечь из отклика системы на внешнее воздействие. Поэтому имеет смысл поставить задачу о восстановлении внешнего воздействия по известной зависимости от времени параметров системы в общем виде.

Рассмотрим систему, которая описывается параметром  $\phi$ , ненулевое значение которого вызывается внешним воздействием  $f$ , которое включается в момент времени  $t = 0$ . В этом случае

$$\int_0^t ds K(t-s)f(s) = \phi(t) \quad (1.34)$$

где  $K$  - (известная) функция Грина. Будем считать, что  $\phi(t)$  задана, а функцию  $f(t)$  следует восстановить из уравнения (1.34). В этом случае (1.34) называют интегральным уравнением Вольтерры (Volterra) первого рода с однородным ядром.

Решение уравнения (1.34) основано на преобразовании Лапласа (смотри раздел 1.5.3). Производя преобразование Лапласа обеих частей уравнения (1.34), находим  $\tilde{K}(p)\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p)$ . Таким образом, если известны преобразования Лапласа функций  $\phi(t), K(t)$ , то преобразование Лапласа функции  $f(t)$  находится, как их отношение

$$\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p)/\tilde{K}(p) \quad (1.35)$$

Чтобы найти  $f(t)$ , необходимо произвести обратное преобразование Лапласа функции  $\tilde{f}(p)$ .

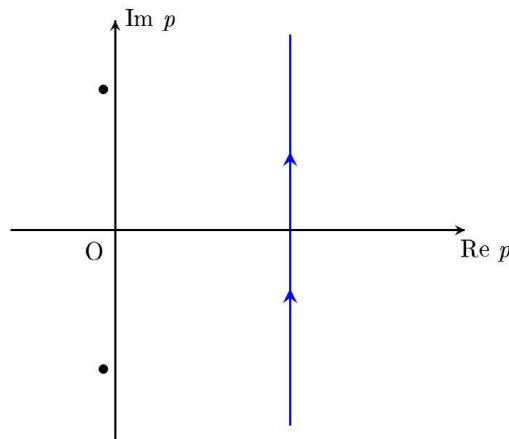


Рис. 1.2: Контур, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

Напомним, что обратное преобразование Лапласа дается интегралом

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p) \quad (1.36)$$

где интегрирование идет вдоль прямой, параллельной мнимой оси, в области аналитичности функции  $\tilde{f}(p)$ , смотри рисунок 1.2. На этом рисунке контур интегрирования обозначен синим цветом, а положения возможных особенностей функции  $\tilde{f}(p)$  (полюсы, точки ветвления) обозначены жирными точками (их расположение условно). Вычисление интеграла (1.36) с  $\tilde{f}(p)$ , которое определяется (1.35) и позволяет найти искомую функцию.

Задача 1.3.1. Найти решение уравнения (1.34) для  $K(t) = \exp(-\lambda t)$ ,  $\phi(t) = t^n$ .

Задача 1.3.2. Найти решение уравнения (1.34) для  $K(t) = t^n$ ,  $\phi(t) = \cos(\nu t)$ .

Аналогичным образом вводится интегральное уравнение Вольтерры второго рода с однородным ядром:

$$f(t) + \int_0^t ds K(t-s) f(s) = \phi(t) \quad (1.37)$$

Подобное уравнение возникает, если в функции Грина имеется вклад, пропорциональный  $\delta(t-s)$ . Тогда  $K$  в уравнении (1.37) представляет собой гладкий вклад в функцию Грина.

Уравнение (1.37) решается, как и (1.34), при помощи преобразования Лапласа. После перехода к представлению Лапласа мы находим из уравнения (1.37) алгебраическое уравнение  $[1 + \tilde{K}(p)]\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p)$ . Отсюда мы находим выражение для преобразования Лапласа  $\tilde{f}(p)$  искомой функции  $f(t)$ :

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\phi}(p)}{1 + \tilde{K}(p)} \quad (1.38)$$

Чтобы найти  $f(t)$ , необходимо произвести обратное преобразование Лапласа функции  $\tilde{f}(p)$ .

Даже если явное выражение для решения  $f(t)$  найти не удастся, представление (1.35) или (1.38) позволяет исследовать поведение  $f(t)$  при больших временах  $t$ . Для этого контур интегрирования в (1.36) следует деформировать, сдвигая его влево настолько, насколько это возможно. В результате контур упрется в особенность  $p_*$  функции  $\tilde{f}(p)$  с наибольшей действительной частью. При больших временах  $t$  именно окрестность этой особенности определяет поведение решения, которое ведет себя, как  $\exp(p_* t)$ , то есть экспоненциально затухает, если  $\text{Re } p_* < 0$ . Возможен случай, когда в силу какой-то симметрии сразу несколько особенностей функции  $\tilde{f}(p)$  имеет одинаковые действительные части. Тогда все они вносят сравнимые вклады в асимптотическое поведение  $f(t)$ . Если же  $\tilde{f}(p)$  имеет особенность при  $p = 0$ , то именно ее окрестность дает в основном вклад в асимптотическое поведение  $f(t)$ . Этот случай требует конкретного анализа. Как правило, асимптотическое поведение  $f(t)$  в этом случае является степенным.

Задача 1.3.3. Найти поведение решения уравнения (1.37) при больших временах для  $K(t) = 1/\sqrt{t}$  начального короткого воздействия,  $\phi(t) = \delta(t - \epsilon)$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\phi}(p) = 1$ .

Задача 1.3.4. Найти поведение решения уравнения (1.37) при больших временах для  $K(t) = 1/(1+t^2)$ ,  $\phi(t) = e^{-t}$ .

### 3.1.7 1.4 Неоднородная по времени релаксация

До сих пор мы рассматривали релаксацию физической системы к равновесному состоянию, которое не зависит от времени. Именно в этом случае возникают

эволюционные уравнения с постоянными коэффициентами. В то же время можно рассмотреть эволюцию подсистемы неравновесной системы, состояние которой меняется со временем. В этом случае коэффициенты в эволюционных уравнениях подсистемы будут зависеть от времени.

Мы рассмотрим здесь простейший случай, когда подсистема описывается одним параметром  $x$ , а динамическое уравнение имеет тот же вид (1.1), в котором теперь темп релаксации  $\gamma$  зависит от времени:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma(t)x = \phi \quad (1.39)$$

Как и для случая постоянного  $\gamma$ , решение уравнения (1.39) записывается в виде свертки с функцией Грина  $G$

$$x(t) = \int ds G(t, s) \phi(s) \quad (1.40)$$

Однако теперь функция Грина  $G(t, s)$  зависит не только от разности  $t - s$ , но от обеих переменных. Уравнение, которому подчиняется функция Грина, имеет тот же вид (1.3)

$$\frac{dG}{dt} + \gamma(t)G = \delta(t - s) \quad (1.41)$$

В силу причинности функция Грина равна нулю при  $t < s$ .

Решение уравнения (1.41) может быть найдено в явном виде. Поскольку при  $t < s$  функция Грина равна нулю и в точке  $t = s$  она испытывает единичный скачок, то при  $t > s$  уравнение (1.41) сводится к однородному уравнению  $\partial_t G = -\gamma G$  с начальным условием  $G = 1$  при  $t = s$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$G(t, s) = \theta(t - s) \exp \left[ - \int_s^t dt' \gamma(t') \right] \quad (1.42)$$

Разумеется, при постоянном  $\gamma$  выражение (1.42) сводится к выражению (1.5).

Задача 1.4.1. Найти функцию Грина (1.42) для случая  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \cos t$ , где  $\gamma_0, \gamma_1$  — константы.

Задача 1.4.2. Найти функцию Грина (1.42) для случая  $\gamma = a/t$ , где  $a$  — некоторая константа.

### 3.1.8 1.5 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

#### 3.1.9 1.5.1 Временное преобразование Фурье

Для любой функции  $f(t)$ , заданной на интервале  $-\infty < t < +\infty$  и стремящейся к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ , можно определить преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\omega) = \int dt \exp(i\omega t) f(t) \quad (1.43)$$

Выражение функции  $f(t)$  через  $\tilde{f}(\omega)$ , которое называется обратным преобразованием Фурье, имеет вид

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \tilde{f}(\omega) \quad (1.44)$$

Обратим внимание на противоположные знаки в экспонентах в прямом и обратном преобразованиях (1.43, 1.44). Из выражения (1.43) следует, что прямое преобразование Фурье действительной функции  $f(t)$  удовлетворяет соотношению  $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$ , где звездочка означает комплексное сопряжение.

Помимо разложения в интеграл Фурье (1.44), в математической физике широко используется разложение в ряд Фурье, которое справедливо для периодических функций или функций, заданных на конечном интервале. Отметим, что представление функций в виде ряда

Фурье является ведущим способом, который используется при организации сложного численного моделирования.

Мы будем иметь дело с периодической функцией, период которой мы обозначим  $T$  или с функцией, заданной на конечном интервале  $0 < t < T$ . (Этого всегда можно добиться сдвигом начала отсчета времени.) Тогда функция  $f(t)$  раскладывается в следующий ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(-2\pi i n t / T) \quad (1.45)$$

где  $n$  - целые числа, пробегающие от минус до плюс бесконечности. Ряд (1.45) задает некоторую периодическую с периодом  $T$  функцию, которая определена при произвольных  $t$ . Таким образом, если исследуется функция, заданная на интервале  $0 < t < T$ , то ряд Фурье (1.45) задает, как говорят, ее периодическое продолжение на всю действительную ось. Обратим внимание на то, что это периодическое продолжение имеет, вообще говоря, разрывы при  $t_n = nL$ .

Обратное к (1.45) преобразование имеет вид

$$f_n = \int_0^T \frac{dt}{T} \exp(2\pi i n t / T) f(t) \quad (1.46)$$

Отсюда следует, что для действительной функции  $f(t)$  коэффициенты ее разложения в ряд Фурье (1.45) удовлетворяют соотношению  $f_{-n} = f_n^*$ . В этом случае ряд Фурье (1.45) иногда записывают через тригонометрические функции

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_1^{+\infty} [\operatorname{Re} f_n \cos(2\pi n t / T) + \operatorname{Im} f_n \sin(2\pi n t / T)] \quad (1.47)$$

Для функций, которые меняются на масштабах, гораздо меньших  $T$ , в ряде Фурье (1.45) существенны большие  $n$ . Тогда этот ряд может быть приблизительно заменен на интеграл Фурье, который идет по частотам  $\omega = 2\pi n / T$ . Отсюда следует правило подстановки

$$\sum_n \rightarrow T \int \frac{d\omega}{2\pi}$$

которое позволяет преобразовывать сумму в интеграл. Таким образом, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье с множителем  $T$  - периодом или длиной интервала.

Если периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале, содержит разрывы, то это приводит к весьма медленному убыванию коэффициентов ряда Фурье при росте  $n$ . Чтобы найти закон этого убывания, рассмотрим разложение в ряд Фурье  $\delta$  функции. Точнее говоря, речь идет о бесконечной сумме  $\delta$ -функций, которая является периодической функцией  $t$ . Используя соотношения (1.45, 1.46), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(int/T)$$

В этом случае коэффициенты разложения  $f_n$  вообще не зависят от  $n$ . Для разрывной функции  $\delta$ -функции возникают в ее производной по  $x$ , то есть коэффициенты разложения этой производной не зависят от  $n$  при больших  $n$ . Для самой разрывной функции  $f$  это означает, что ее коэффициенты разложения в ряд Фурье ведут себя пропорционально  $1/n$  при больших  $n$ .

### 3.1.10 1.5.2 Дельта-функция Дирака

В настоящем разделе мы рассматриваем основные свойства дельта-функции Дирака  $\delta(t)$ . 'Физическое' определение дельта-функции  $\delta(t)$  состоит в том, что она равна нулю для всех  $t \neq 0$ , равна бесконечности при  $t = 0$ , а интеграл от нее равен единице:  $\int dt \delta(t) = 1$ . Эту функцию можно представить себе, как предел некоторой последовательности функций, которая приводит к указанным свойствам. Например,  $\delta$ -функцию можно записать в виде предела последовательности

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \quad (1.48)$$

Действительно, при любом положительном  $\epsilon$  интеграл от функции в правой части выражения (1.48) равен единице, при  $t \neq 0$  правая часть (1.48) стремится к нулю, а при  $t = 0$  - к бесконечности при стремлении  $\epsilon$  к нулю.

#### Задача 1.5.1. Доказать соотношения

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2t^2\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2} \\ \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\epsilon}\right) \\ \delta(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{\pi n t^2} \end{aligned}$$

Поскольку значение функции  $\delta(t)$  отлично от нуля только при  $t = 0$ , то для любой непрерывной функции  $f(t)$  справедливо соотношение  $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$ . Или, обобщая это соотношение,  $\delta(t - s)f(t) = \delta(t - s)f(s)$ . Интегрируя, находим важное свойство  $\delta$ -функции:

$$\int dt \delta(t - s) f(t) = f(s) \quad (1.49)$$

Именно соотношение (1.49) наиболее часто используется в приложениях, где возникает  $\delta$ -функция.

Частным случаем соотношения (1.49) является

$$\int dt \delta(t) \exp(i\omega t) = 1 \quad (1.50)$$

Это равенство можно рассматривать, как прямое преобразование Фурье от  $\delta$ -функции (1.43). Тогда обратное преобразование Фурье (1.44) дает следующее интегральное представление для  $\delta$ -функции

$$\delta(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \quad (1.51)$$

Беря действительную и мнимую части этого соотношения, находим

$$\begin{aligned}\int \frac{d\omega}{2\pi} \cos(\omega t) &= \delta(t) \\ \int \frac{d\omega}{2\pi} \sin(\omega t) &= 0\end{aligned}\quad (1.52)$$

Второй интеграл в формуле (1.52) равен нулю в силу антисимметричности подынтегрального выражения по  $\omega$ .

Задача 1.5.2. Получить соотношение (1.50) предельным переходом  $\epsilon \rightarrow 0$  с использованием представления (1.48).

Разложение в интеграл Фурье действует на бесконечном интервале  $-\infty < t < +\infty$ . Если же мы рассматриваем задачу на конечном интервале, то функции следует раскладывать в ряд Фурье. Соотношение (1.50) справедливо и на конечном интервале, если он включает ноль. Поэтому его можно использовать для вычисления коэффициентов разложения  $\delta$ -функции в ряд Фурье в соответствии с (2.79). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp(imt) \quad (1.53)$$

где для определенности выбран интервал изменения параметра  $-\pi < t < \pi$ .

Задача 1.5.3. Доказать, что на интервале  $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1 - r^2}{2\pi(1 - 2r \cos t + r^2)} = \delta(t)$$

где  $\lim_{r \rightarrow 1-0}$  означает предел при стремлении  $r$  к единице снизу. Что получится, если устремить  $r$  к единице сверху?

Из основных свойств  $\delta$ -функции следует, что  $\int dt \delta(t) = 1$  при интегрировании по любому интервалу, который включает точку  $t = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^s dt \delta(t) &= \theta(s) \\ \theta(s) &= 0 \text{ if } s < 0, \quad \theta(s) = 1 \text{ if } s > 0\end{aligned}\quad (1.54)$$

Функция  $\theta(t)$  называется ступенчатой функцией или функцией Хэвисайда. Таким образом, мы нашли первообразную  $\delta$ -функции. Дифференцируя по  $s$  соотношение (1.54), мы находим  $\partial_t \theta(t) = \delta(t)$ .

Можно ввести не только первообразную, но и производную от  $\delta$ -функции, которую мы обозначим  $\delta'(t)$ . Правила обращения с этим объектом следуют из соотношения (1.49). А именно, интегрируя по частям, находим для произвольной гладкой функции  $f$

$$\int dt \delta'(t - s) f(t) = -f'(s) \quad (1.55)$$

Подставляя в соотношение (1.55)  $f(t) = (t - s)g(t)$  и сравнивая результат с соотношением (1.49), мы заключаем, что  $t\delta'(t) = -\delta(t)$ . Раскладывая теперь  $f(t)$  в ряд Тейлора (до первого порядка) вблизи точки  $t = s$  и используя указанное соотношение, мы находим

$$f(t)\delta'(t - s) = f(s)\delta'(t - s) - f'(s)\delta(t - s) \quad (1.56)$$

Обратим внимание на то, что из соотношения (1.56) следует, что  $f(t)\delta'(t-s) \neq f(s)\delta'(t-s)$ .

Задача 1.5.4. Доказать соотношение

$$\delta'(t) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2t\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2}$$

Можно ввести и более высокие производные от дельта-функции, правила обращения с которыми следуют из основных свойств дельта-функции, приведенных выше. Эти производные возникают, как правило, в интегральных соотношениях.

### Задача 1.5.5.

Доказать, что

$$t\delta''(t) = -2\delta'(t) \quad (1.57)$$

До сих пор мы неявно подразумевали, что имеем дело с функциями, которые являются непрерывными и имеют непрерывную производную. Если же функция испытывает в некоторой точке скачок или излом, то надо быть аккуратным при обращении с ее производными (возникающими, в частности, при интегрировании по частям). Примером такой функции, рассмотренной выше, является разрывная функция Хэвисайда, производная которой сводится к  $\delta$ -функции. Обобщая это наблюдение, мы заключаем, что если функция  $f(t)$  испытывает скачок в точке  $s$ , то

$$f'(t) = [f(s+0) - f(s-0)]\delta(t-s) + g(t) \quad (1.58)$$

где функция  $g(t)$  ограничена вблизи точки  $t = s$ . Здесь  $f(s-0)$  и  $f(s+0)$  - значения функции  $f(t)$  слева и справа от точки разрыва, то есть  $f(s+0) - f(s-0)$  - скачок функции на разрыве. Подобным же образом анализируется функция  $f(t)$ , испытывающая в некоторой точке излом, который соответствует скачку первой производной. Тогда  $\delta$ -функциональный вклад возникает во второй производной от функции  $f(t)$ .

Задача 1.5.6. Доказать соотношение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \gamma^2\right) \exp(-\gamma|t|) = -2\gamma\delta(t)$$

Справедливо соотношение

$$\delta[f(t)] = \sum_n \frac{1}{|f'(s_n)|} \delta(t - s_n) \quad (1.59)$$

где суммирование идет по всем точкам  $s_n$ , в которых функция  $f(t)$  обращается в ноль. Для доказательства (1.59) заметим прежде всего, что  $\delta$ -функция равна нулю везде, кроме тех точек, где ее аргумент обращается в ноль. Поэтому  $\delta[f(t)]$  представляет собой сумму  $\delta$  функций (с некоторыми коэффициентами) по всем точкам  $s_n$ , в которых функция  $f(t)$  обращается в ноль. Рассмотрим окрестность одной такой точки  $s$ . Найдем интеграл по этой окрестности  $\int dt \delta(f)$ . Перейдем здесь к интегрированию по  $df$ :

$$\int dt \delta(f) = \int \frac{df}{f'} \delta(f)$$

Поскольку  $\delta(f)$  отлична от нуля только в точке  $t = s$ , в этой формуле  $f'$  можно заменить на  $f'(s)$ , после чего  $(f')^{-1}$  выносится за знак интеграла. Что же касается интеграла  $\int df \delta(f)$ , то его величина зависит от знака производной  $f'(s)$ : если  $f'(s) > 0$ , то интеграл равен единице, а если  $f'(s) < 0$ , то интеграл равен минус единице. Другими



словами,  $\int df \delta(f) = \text{sign}[f'(s)]$ . Таким образом мы приходим к искомой формуле (1.59), где стоят абсолютные значения производных функции  $f$ .

### 3.1.11 1.5.3 Преобразование Лапласа

В задачах, в которых исследуется решение линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями, часто бывает полезным преобразование Лапласа, которое определяется для функций, заданных на положительных временах  $t$ . Преобразование Лапласа функции  $\Phi(t)$  определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} dt \exp(-pt) \Phi(t) \quad (1.60)$$

Мы предполагаем, что функция  $\Phi(t)$  растет со временем  $t$  не быстрее, чем некоторая экспонента от  $t$ . Тогда интеграл (1.60) сходится при достаточно больших  $p$ . Более того, в этом случае  $\tilde{\Phi}(p)$  стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ . Если же выйти в комплексную плоскость по  $p$ , то можно утверждать, что интеграл сходится при достаточно больших значениях  $\text{Re } p$ . Другими словами, функция  $\tilde{\Phi}(p)$  заведомо является аналитической в области  $\text{Re } p > C$ , где  $C$  - некоторая константа.

Задача 1.5.7. Найти преобразования Лапласа следующих функций:  $\Phi = \exp(-\lambda t)$ ,  $\Phi = t^n$ ,  $\Phi = \cos(\nu t)$ ,  $\Phi = \cosh(\lambda t)$ ,  $\Phi = t^{-1/2}$ ,  $\Phi = \cos[2\sqrt{\alpha t}]/\sqrt{\pi t}$ .

Преобразование, обратное к преобразованию Лапласа, имеет следующий вид

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p) \quad (1.61)$$

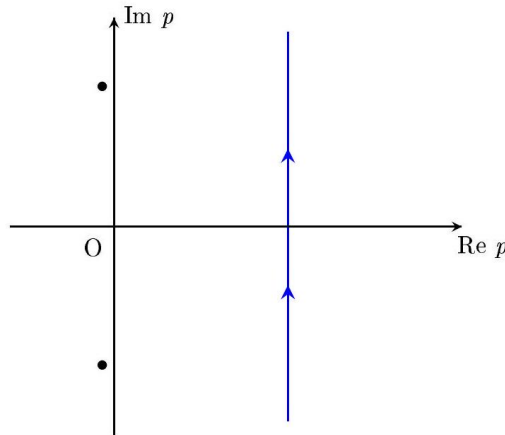


Рис. 1.3: Контур, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

где интегрирование идет вдоль прямой, параллельной мнимой оси, в области аналитичности функции  $\tilde{\Phi}(p)$ , смотри рисунок 1.3. На этом рисунке контур интегрирования обозначен синим цветом, а положения возможных особенностей функции  $\tilde{\Phi}(p)$  (полюсы, точки ветвления) обозначены жирными точками (их расположение условно).

Возможны деформации контура интегрирования в области аналитичности. Обратим внимание на то, что при отрицательных  $t$  интеграл (1.61) равен нулю, так как в этом случае оба сомножителя,  $\exp(pt)$  и  $\tilde{\Phi}(p)$ , стремятся к нулю при увеличении  $\text{Re } p$ . Поэтому, сдвигая контур интегрирования в большие  $\text{Re } p$  (и оставаясь при этом в области аналитичности), мы получим ноль. Это соответствует физическому смыслу рассматриваемой задачи, когда мы исследуем функцию, определенную только при

положительных  $t$ . При положительных  $t$  контур интегрирования можно сдвигать только влево до тех пор, пока он не "наткнется" на особенность.

Задача 1.5.8. Найти обратные преобразования Лапласа следующих функций:  $\nu(p^2 + \nu^2)^{-1}$ ,  $p(p^2 + \nu^2)^{-1}$ ,  $\nu(p^2 - \nu^2)^{-1}$ ,  $p(p^2 - \nu^2)^{-1}$ ,  $(p + \alpha)^{-1/2}$ .

## 3.2 Статические линейные поля

Во многих задачах стационарное состояние физической системы характеризуется нетривиальным распределением ее характеристик в пространстве. Мы рассматриваем ряд таких задач, которые описываются в терминах статических полей, имеющих нетривиальную пространственную зависимость. В частности, стационарным является уравнение Шрёдингера для собственных состояний квантовой частицы во внешнем статическом потенциале.

### 3.2.1 2.1 Одномерный случай

В данном разделе мы будем изучать одномерный случай, когда область, в которой мы будем искать решение дифференциального уравнения, является интервалом  $(a, b)$ . Тогда условия на интересующие нас функции накладываются на границах интервала, при  $x = a$  и/или  $x = b$ . Такого сорта задачи возникают как при анализе полей, зависящих только от одной декартовой координаты, так и в случаях, когда в силу симметрии поля зависят, скажем, только от расстояния до начала координат, но не от углов.

Рассмотрим в качестве примера потенциал  $f$  распределения заряда, (одномерная) плотность которого  $\rho$  зависит только от одной декартовой координаты  $x$ . В этом случае потенциал также зависит только от координаты  $x$  и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \phi \quad (2.1)$$

где правая часть определяется плотностью заряда  $\rho$ :  $\phi = -4\pi\rho$ . Поскольку уравнение (2.1) является дифференциальным уравнением второго порядка, его надо дополнить граничными условиями. Если, например, речь идет об области пространства между заземленными параллельными металлическими поверхностями, расположенными при  $x = a$  и  $x = b$ , то граничные условия для потенциала имеют вид  $f(a) = f(b) = 0$ . Мы будем говорить о таких граничных условиях, как нулевых.

Введем теперь соответствующую уравнению (2.1) функцию Грина  $G(x, y)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, y) = \delta(x - y), \quad a < x, y < b \quad (2.2)$$

а также граничным условиям  $G(a, y) = G(b, y) = 0$ . Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь от обеих переменных, а не просто от их разности, как это было в предыдущих разделах. Это связано с нарушением однородности пространства из-за границ.

Решение уравнения (2.1) с нулевыми граничными условиями запишется в виде

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y) \phi(y) \quad (2.3)$$

Очевидно, интеграл (2.3) удовлетворяет уравнению (2.1) в силу (2.2) и нулевым граничным условиям, поскольку им удовлетворяет функция Грина.

Найдем явное выражение для функции Грина  $G(x, y)$ . Для этого заметим, что при  $x < y$  уравнение (2.2) сводится к однородному уравнению  $\partial_x^2 G = 0$ , что дает  $G(x, y) =$

$A(x-a)$ , где  $A$  - некоторая константа. Это общее решение уравнения с нулевым граничным условием при  $x = a$ . Аналогично, при  $x > y$  мы находим  $G(x, y) = B(x - b)$ , где  $B$  - другая константа. Это выражение удовлетворяет тому же уравнению  $\partial_x^2 G = 0$  и нулевому граничному условию при  $x = b$ . Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению второго порядка по  $x$ , она должна быть непрерывной в точке  $x = y$ , что дает соотношение  $A(y - a) = B(y - b)$ . Далее, скачок производной функции Грина  $G(x, y)$  в точке  $x = y$  равен  $B - A$ , что в силу уравнения (2.2) должно быть равно единице. Решая полученные уравнения для  $A$  и  $B$ , и подставляя результат в выражение для функции Грина, мы находим

$$G(x, y) = \begin{cases} (y - b)(x - a)(b - a)^{-1}, & x < y \\ (y - a)(x - b)(b - a)^{-1}, & x > y \end{cases} \quad (2.4)$$

Обратим внимание на то, что функция Грина (2.4) симметрична:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Рассмотрим теперь более общую задачу, которая ставится для функции  $f(x)$  на интервале  $a < x < b$  и формулируется в виде следующего дифференциального уравнения

$$\hat{L}f(x) = \phi \quad (2.5)$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q(x)\frac{d}{dx} - U(x) \quad (2.6)$$

Дифференциальный оператор  $\hat{L}$  (2.6) называется оператором Штурма-Лиувилля. Здесь источник  $\phi$  и факторы  $Q, U$  считаются известными функциями  $x$ . Решение уравнения (2.5) подразумевает наложение некоторых граничных условий на функцию  $f(x)$  на границах интервала, то есть при  $x = a$  и  $x = b$ . Они не обязательно должны быть нулевыми, возможны и другие варианты. Например, встречаются нулевые условия на производную  $f'$  в точках  $x = a$  и  $x = b$  или смешанные граничные условия, связывающие значения производной  $f'$  и функции  $f$  в точках  $x = a$  и  $x = b$ .

Решение уравнения (2.5) можно по аналогии с (2.3) написать в виде свертки правой части уравнения (2.5) с функцией Грина  $G(x, y)$ :

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y) \phi(y) \quad (2.7)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y) \quad (2.8)$$

и соответствующим граничным условиям при  $x = a$  и  $x = b$ . Действительно, интеграл в формуле (2.7) удовлетворяет уравнению (2.5) в силу (2.8) и граничным условиям по построению.

Приведенная выше конструкция, работающая при  $Q = U = 0$ , подсказывает нам, как найти функцию Грина  $G(x, y)$  в случае произвольного оператора Штурма-Лиувилля (2.6). Введем сначала два решения однородного уравнения (2.8)  $u$  и  $v$  (то есть  $\hat{L}u = 0 = \hat{L}v$ ), которые удовлетворяют 'левому' (при  $x = a$ ) и правому' (при  $x = b$ ) граничным условиям, соответственно. Например, для нулевых граничных условий  $u(a) = 0$  и  $v(b) = 0$ . Функцию Грина надо искать в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} Au(x), & x < y \\ Bv(x), & x > y \end{cases} \quad (2.9)$$

где  $A, B$  - некоторые параметры, не зависящие от  $x$  (но зависящие от  $y$ ). Тогда уравнение (2.8) будет выполняться при  $x < y$  и  $x > y$  вместе с граничными условиями при  $x = a$  и  $x = b$ . Константы же  $A$  и  $B$  определяются условиями непрерывности функции Грина при  $x = y$  и единичности скачка производной при  $x = y$ :

$$G'(y+0, y) - G'(y-0, y) = 1 \quad (2.10)$$

Решая получающуюся систему линейных уравнений для  $A$  и  $B$ , мы приходим к следующему явному выражению для функции Грина  $G(x, y)$ :

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y \\ v(x)u(y), & x > y \end{cases} \quad (2.11)$$

Здесь  $W(x)$  - так называемый Вронскиан решений  $u(x)$  и  $v(x)$ , который определяется следующим образом

$$W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x) \quad (2.12)$$

Дифференцируя это выражение и используя уравнения  $\hat{L}u = \hat{L}v = 0$ , легко получить соотношение  $\partial_x W(x) = -Q(x)W(x)$ , откуда следует

$$W(x) = W(a) \exp \left[ - \int_a^x dy Q(y) \right] \quad (2.13)$$

Отметим, что при  $Q = 0$  Вронскиан (2.13) не зависит от  $x$ , и тогда функция Грина становится симметричной:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Рассмотрим в качестве примера потенциал  $f(r)$  заряженного цилиндра радиуса  $b$  при условии, что плотность заряда зависит только от расстояния  $r$  от точки наблюдения до оси цилиндра. Уравнение для  $f(r)$  получается из уравнения Пуассона переходом к цилиндрическим координатам:

$$\frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) = -4\pi\rho \quad (2.14)$$

Выберем значение потенциала на поверхности цилиндра за ноль. Тогда граничными условиями для этой задачи являются  $f(b) = 0$  и отсутствие особенности в  $f$  при  $r = 0$ . Регулярным при  $r = 0$  'левым' решением  $u$  является некоторая константа, которую мы полагаем равной единице,  $u(r) = 1$ . 'Правое' же решение  $v$  имеет вид  $v(r) = \ln(r/b)$ , а вронскиан равен  $W(r) = 1/r$ . Поэтому формула (2.11) приводит к следующему выражению для функции Грина оператора в левой части уравнения (2.14):

$$G(r, R) = \begin{cases} R \ln(R/b), & r < R \\ R \ln(r/b), & r > R \end{cases} \quad (2.15)$$

Следует отметить, что с точки зрения исходной задачи граничное условие  $f(b) = 0$  было задано на границе  $r = b$  области, в которой мы ищем потенциал  $f$ , и этого условия достаточно для его определения. Дополнительное же условие отсутствия особенности при  $r = 0$  возникает из-за перехода к полярной системе координат, приводящему к сингулярности коэффициента при первой производной в уравнении (2.14) в точке  $r = 0$ .

Во многих физических задачах встречаются периодические граничные условия, которые означают, что  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$ . Для периодических граничных условий функцию Грина нельзя построить в соответствии с выражением (2.11), так как условия  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$  связывают значения функции  $f$  на разных концах интервала, и поэтому нельзя ввести 'левую' и 'правую' функции. Тем не менее, функцию

Грина  $G(x, y)$  можно найти практически тем же способом, каким было получено выражение (2.11). А именно, при  $x < y$  и  $x > y$  уравнение (2.8) имеет нулевую правую часть, то есть  $G(x, y)$  на этих интервалах определяется решениями однородного уравнения  $u$  и  $v$  ( $\hat{L}u = 0$  и  $\hat{L}v = 0$ ), каждое из которых содержит по два произвольных коэффициента. Эти коэффициенты должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить периодические граничные условия для  $G(x, y)$ , непрерывность  $G(x, y)$  в точке  $x = y$  и единичный скачок производной  $G(x, y)$  в точке  $x = y$ .

Если у оператора  $\hat{L}$  имеется нулевая мода, то есть удовлетворяющая граничным условиям функция  $f$ , для которой  $\hat{L}f = 0$ , то задача (2.5) является, вообще говоря, некорректной. Она является корректной только при наложении на 'источник'  $\phi$  определенного условия. При этом решение задачи (2.5) не является однозначным: в нем фигурирует нулевая мода с произвольным коэффициентом. В качестве примера можно привести тот же оператор  $\hat{L} = \partial_x^2$  при периодических граничных условиях, наложенных на функцию  $f$ . В этом случае у оператора  $\hat{L}$  имеется нулевая мода - константа (не зависящая от  $x$  функция). Интегрируя уравнение  $\partial_x^2 f = \phi$  по  $x$  и используя периодические граничные условия, мы находим условие  $\int dx \phi = 0$ , которое должно быть наложено на правую часть уравнения для того, чтобы существовало решение задачи.

До сих пор мы рассматривали задачи на конечном интервале  $(a, b)$ . Зачастую возникают задачи, которые следует рассматривать на бесконечном интервале  $(-\infty, +\infty)$  или  $(0, \infty)$ . Граничными условиями на бесконечности в этом случае заключаются либо в стремлении функции  $f$  к нулю при стремлении координаты к бесконечности, либо в том, что функция  $f$  при этом остается конечной.

### 3.2.2 2.1.1 Поведение решения вблизи особых точек

Рассмотрим решение уравнения  $\hat{L}f = 0$ , где  $\hat{L}$  - оператор Штурма-Лиувилля (2.6). Будем считать, что в интересующей нас области функции  $Q, U$  раскладываются в ряды Тейлора с конечным радиусом сходимости:

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n \quad (2.16)$$

Другими словами, рассмотрим уравнения  $\hat{L}f = 0$  в области, где  $Q, U$  являются регулярными функциями.

Решение уравнения  $\hat{L}f = 0$  также можно искать в виде ряда Тейлора

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (2.17)$$

Подставляя разложение (2.17) в уравнение  $\hat{L}f = 0$  и приравнивая коэффициенты при различных степенях  $x$ , находим

$$\begin{aligned} 2f_2 + Q_0 f_1 - U_0 f_0 &= 0 \\ 6f_3 + 2Q_0 f_2 - U_0 f_1 + Q_1 f_1 - U_1 f_0 &= 0 \end{aligned}$$

и так далее. Таким образом, мы получаем рекуррентные соотношения, которые позволяют последовательно находить коэффициенты разложения  $f_n$ , если заданы  $f_0, f_1$ . Две независимые константы  $f_0, f_1$  соответствуют наличию двух независимых решений уравнения  $\hat{L}f = 0$ . Мы заключаем, что функция  $f$  регулярна в области регулярности  $Q, U$ .

Очевидно, что приведенная процедура неприменима в особых точках, где функция  $Q$  (и/или функция  $U$ ) имеет сингулярность. Поведение решения уравнения  $\hat{L}f = 0$  вблизи

особой точки требует отдельного анализа. Мы рассмотрим частный, но практически наиболее важный случай, когда функция  $Q$  имеет простой полюс, который мы поместим в точку  $x = 0$ . Будем считать, что функция  $U$  также может иметь простой полюс в этой точке. Перепишем уравнение  $\hat{L}f = 0$  в виде

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + xQ \frac{df}{dx} - xUf = 0 \quad (2.18)$$

где все коэффициенты регулярны вблизи нуля. В этом случае, когда мы имеем дело с уравнением второго порядка с регулярными факторами, особая точка означает обращение в ноль коэффициента при второй (старшей) производной.

Первый шаг рекуррентной процедуры для уравнения (2.18) сводится к решению уравнения

$$x\partial_x^2 f + a\partial_x f = 0 \quad (2.19)$$

где  $a$  - значение  $xQ$  в нуле. Уравнение (2.19), очевидно, имеет два независимых решения

$$f = \text{const}, \quad f \propto x^{1-a} \quad (2.20)$$

Мы видим, что первое решение регулярно в нуле, в то время, как второе решение имеет, вообще говоря, при  $x = 0$  точку ветвления. Второе решение имеет (кратный) полюс при целых положительных  $a$  и является регулярным при целых отрицательных  $a$ .

Задача 2.1.5. Каковы решения уравнения (2.19) при  $a = 1$ ?

Выражения (2.20) определяют поведение решения исходного уравнения при малых  $x$ . Полное же решение определяется рядами по  $x$ , которые являются множителями при функциях (2.20):

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad f = x^{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \quad (2.21)$$

Здесь коэффициенты  $f_0, g_0$  произвольны, а остальные коэффициенты линейно выражаются через них. Как и следует, мы имеем дело с двумя независимыми решениями уравнения второго порядка.

Соотношения, которые определяют  $f_n, g_n$ , можно найти, если использовать разложения в ряд

$$xQ = a + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n+1}, \quad xU = b + \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^{n+1} \quad (2.22)$$

Подставляя ряды (2.22, 2.21) в уравнение (2.18) и приравнявая коэффициенты при всех степенях  $x$ , находим рекуррентные соотношения для коэффициентов  $f_n, g_n$ . Первые соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} af_1 - bf_0 &= 0 \\ 2f_2 + 2af_2 + Q_0 f_1 - bf_1 - U_0 f_0 &= 0 \\ 2(1-a)g_1 + Q_0(1-a)g_0 - bg_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Эти соотношения позволяют последовательно выражать коэффициенты  $f_n, g_n$  через  $f_0, g_0$ , что и определяет ряды (2.21).

Рассмотрим поведение решения уравнения  $\hat{L}f = 0$  вблизи нуля, если в этой точке  $Q$  имеет полюс первого порядка, а  $U$  имеет полюс второго порядка. Сохраняя в  $Q, U$  только главные полюсные члены, мы приходим к уравнению

$$x^2 \partial_x^2 f + ax \partial_x f - \beta f = 0$$

которое задает поведение  $f$  при малых  $x$ , вместо уравнения (2.19). Приведенное уравнение имеет степенные решения  $f \propto x^\alpha$ , где  $\alpha$  определяется уравнением

$$\alpha(\alpha - 1) + a\alpha - \beta = 0$$

Таким образом

$$\alpha = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{(1-a)^2/4 + \beta}$$

При  $\beta = 0$  мы находим  $\alpha = 0, \alpha = 1 - a$ , то есть возвращаемся к уже рассмотренной ситуации.

Задача 2.1.6. Каково поведение решения уравнения Бесселя  $x^2 \partial_x^2 u + x \partial_x u + x^2 u - \nu^2 u = 0$  вблизи нуля? Каковы решения этого уравнения вблизи нуля при  $\nu = 0$ ?

### 3.2.3 2.1.2 Задачи на собственные значения

Нормально уравнение  $\hat{L}u = 0$ , дополненное нулевыми граничными условиями, не имеет решений (точнее, имеет только тривиальное нулевое решение). Действительно, условие  $u = 0$  на левом конце интервала задает решение  $u = Cv$ , где  $v$  - некоторое решение уравнения  $\hat{L}v = 0$  с нулевым граничным условием на левом конце интервала, а  $C$  - произвольная константа. Если  $v$  не обращается в ноль на правом конце интервала, то ненулевых решений уравнения  $\hat{L}u = 0$  не существует. Те же соображения относятся к случаю смешанных граничных условий, когда равна нулю некоторая линейная комбинация функции  $u$  и ее производной, а также к случаю периодических граничных условий.

Расширим для рассмотренных граничных условий класс рассматриваемых задач, введя задачи на собственные значения. Задача на собственные значения для оператора  $\hat{L}$  формулируется, как задача поиска функции  $u$ , удовлетворяющей уравнению

$$\hat{L}u = \lambda u \quad (2.24)$$

и граничным условиям из числа упомянутых выше. Эта задача уже имеет ненулевые решения для некоторых значений параметра  $\lambda$ , которые называются собственными значениями оператора  $\hat{L}$ .

Рассмотрим в качестве примера оператор  $\hat{L} = \partial_x^2$  который действует на периодические функции, заданные на интервале  $(-\pi, \pi)$ . Уравнение (2.24) в этом случае имеет вид  $\partial_x^2 u = \lambda u$ . Оно имеет решения в виде гиперболических синусов и косинусов при  $\lambda > 0$  и решения в виде синусов и косинусов при  $\lambda < 0$ . Очевидно, что на интервале  $(-\pi, \pi)$  периодическими являются функции  $\cos(nx), \sin(nx)$ , где  $n$  - целое число (включая ноль). В результате мы находим набор собственных значений  $\lambda_n = -n^2$  оператора  $\hat{L} = \partial_x^2$ .

Таким образом, мы получили дискретный, но бесконечный (и неограниченный) набор собственных значений. Эта ситуация типична при решении задачи на конечном интервале: набор собственных значений дискретен и бесконечен. Более того, для оператора Штурма-Лиувилля (2.6) при больших номерах собственных значений справедливо то же асимптотическое поведение  $\lambda_n \approx -n^2$  собственных значений, поскольку большие значения  $\lambda$  формируются именно второй производной  $\partial_x^2$  в операторе

Штурма-Лиувилля. Таким образом, мы можем утверждать, что собственные значения оператора Штурма-Лиувилля неограничены сверху по абсолютной величине.

Важным случаем является оператор Штурма-Лиувилля (2.6) при  $Q = 0$ . В этом случае задача на собственные значения (2.24) является уравнением на собственные функции одномерного уравнения Шрёдингера для частицы, находящейся во внешнем потенциале  $U$ . Мы перепишем его в виде

$$(\partial_x^2 - U) \psi = -\epsilon \psi \quad (2.25)$$

где  $\epsilon$  имеет смысл энергии собственного состояния.

Для нулевых или периодических граничных условий оператор  $\partial_x^2 - U$  является самосопряженным, поскольку

$$\int dx \psi_1 (\partial_x^2 - U) \psi_2 = \int dx \psi_2 (\partial_x^2 - U) \psi_1 \quad (2.26)$$

для произвольных функций  $\psi_1, \psi_2$ , удовлетворяющих этим граничным условиям. Соотношение (2.26) можно доказать интегрированием по частям. При этом граничные члены не возникают в силу принятых граничных условий. Поэтому решения  $\psi_1, \psi_2$  уравнения (2.25), соответствующие разным значениям  $\epsilon$ , ортогональны:

$$\int dx \psi_1 \psi_2 = 0 \quad (2.27)$$

смотри раздел 2.4.1. Как правило, собственные функции нормируют на единицу:  $\int dx |\psi|^2 = 1$ .

Перейдем теперь к случаю, когда решения уравнения (2.25) рассматриваются на всей прямой  $-\infty < x < +\infty$ . Мы также будем считать, что потенциал  $U$  достаточно быстро стремится к нулю при больших  $x$ . В этом случае при больших  $x$  мы приходим к уравнению  $(\partial_x^2 + \epsilon) \psi = 0$ , которое имеет ограниченные решения при  $\epsilon > 0$ . Эти решения являются линейной комбинацией  $\cos(qx)$  и  $\sin(qx)$ , где  $q^2 = \epsilon$ . Функции с таким асимптотическим поведением называются функциями непрерывного спектра. Функции непрерывного спектра с различными  $\epsilon$  ортогональны друг другу, то есть равен нулю интеграл (2.27), где интегрирование идет по всей прямой.

Наряду с функциями непрерывного спектра уравнение (2.25) может иметь решения, которые стремятся к нулю при больших  $|x|$ . Они соответствуют  $\epsilon < 0$  и называются функциями дискретного спектра или связанных состояний. На больших  $x$ , где потенциалом  $U$  можно пренебречь, функции дискретного спектра убывают экспоненциально:  $\psi \propto \exp(-\sqrt{|\epsilon|}x)$ . Такое же экспоненциальное убывание имеет место при больших по абсолютной величине отрицательных  $x$ . Функции дискретного спектра ортогональны между собой и ортогональны функциям непрерывного спектра. Поскольку функции дискретного спектра стремятся к нулю при больших  $|x|$ , нормировочный интеграл  $\int dx |\psi|^2$  для них конечен. Обычно принимается нормировка, когда этот интеграл равен единице.

Собственные функции для данного потенциала в совокупности (то есть функции непрерывного и дискретного спектров) составляют полную систему функций, по которой можно разложить произвольную функцию, ограниченную на всей прямой. Это разложение имеет вид интеграла по волновым функциям непрерывного спектра, к которому следует прибавить сумму по волновым функциям дискретного спектра.

Проиллюстрируем сказанное на примере притягивающего потенциала  $U$ , сосредоточенного вблизи начала координат. В этом случае потенциал можно записать в виде  $U = -2\kappa\delta(x)$ , где  $\kappa > 0$  и уравнение (2.25) приобретает вид



$$\partial_x^2 \psi + 2\kappa \delta(x) \psi + \epsilon \psi = 0 \quad (2.28)$$

Это уравнение имеет решения как для непрерывного спектра при  $\epsilon > 0$ , так и для связанного состояния.

При  $x > 0$  и при  $x < 0$  мы имеем дело со свободным уравнением, решения которого известны: это косинусы и синусы при  $\epsilon > 0$  и убывающие экспоненты при  $\epsilon < 0$ . Выражения для функции  $\psi$  слева и справа следует сплечь при  $x = 0$ , в этой точке в соответствии с (2.28) функция  $\psi$  непрерывна, а ее производная испытывает скачок, равный  $-2\kappa\psi(0)$ . Сшивку приводит к следующему набору собственных функций

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \exp(-\kappa|x|), & \epsilon &= -\kappa^2 \\ \phi(q, x) &= \sin(qx), & \epsilon &= q^2, \quad q > 0 \\ \eta(q, x) &= \cos(q|x| + \varphi), & \epsilon &= q^2 \\ & q > 0, \quad \tan \varphi = \kappa/q \end{aligned} \quad (2.31)$$

Обратим внимание на то, что собственные функции распадаются на четные по  $x(\chi, \eta)$  и нечетные по  $x(\phi)$ . Это является следствием симметрии исходного уравнения (2.28) по отношению к изменению знака  $x$ .

Функция (2.29) относится к связанному состоянию, а функции (2.30, 2.31) - к непрерывному спектру. Функция (2.29) нормирована на единицу, то есть  $\int dx \chi^2 = 1$ . Нормировку функций непрерывного спектра можно найти из соотношений (1.52):

$$\int dx \phi(q, x) \phi(k, x) = \pi \delta(q - k) \quad (2.32)$$

$$\int dx \eta(q, x) \eta(k, x) = \pi \delta(q - k) \quad (2.33)$$

В соответствии с общими свойствами уравнения Шрёдингера, функции  $\chi, \phi, \eta$  ортогональны друг другу.

Задача 2.1.7. Непосредственно проверить ортогональность функций  $\chi$  и  $\eta$ .

Рассмотрим теперь разложение некоторой функции  $\psi(x)$  по собственным функциям  $\chi, \phi, \eta$ . Это разложение имеет вид

$$\psi(x) = a\chi + \int_0^\infty \frac{dq}{\pi} [\alpha(q)\phi + \beta(q)\eta] \quad (2.34)$$

Коэффициенты разложения (2.34) можно найти при помощи соотношений (2.32, 2.33):

$$\begin{aligned} a &= \int dx \psi(x) \chi(x) \\ \alpha(q) &= \int dx \psi(x) \phi(q, x) \\ \beta(q) &= \int dx \psi(x) \eta(q, x) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Задача 2.1.8. Найти коэффициенты  $\alpha, \beta$  разложения (2.34) для функции  $\psi(x) = \exp(-b|x|)$ .

### 3.2.4 2.2 Электростатические задачи.

Здесь мы рассмотрим электростатические уравнения для потенциала  $f$ , важные, прежде всего, в теории электромагнетизма. В свободном пространстве нахождение потенциала  $f$ , который порождается плотностью заряда  $\rho$ , означает решение уравнения Пуассона (Poisson)

$$\nabla^2 f = \phi \quad (2.36)$$

где  $\nabla^2$  - Лапласиан и  $\phi = -4\pi\rho$  (в системе СГС). Аналогично выглядит уравнение для потенциала в диэлектрике. Уравнение (2.36) без правой части обычно называется уравнением Лапласа. Мы также рассмотрим свойства решений уравнения Дебая (Debye)

$$(\nabla^2 - \kappa^2) f = \phi \quad (2.37)$$

где  $\kappa$  - некоторая константа. Уравнение (2.37) описывает пространственное распределение потенциала в электролитах и плазме, то есть в проводящей среде,  $\kappa^{-1}$  является длиной экранирования (длиной Дебая).

Уравнения (2.36, 2.37) могут быть определены в пространстве произвольной размерности  $d$ . В настоящем разделе мы сосредоточимся на практически наиболее важных случаях  $d = 3$  и  $d = 2$ . Большинство из приведенных ниже результатов легко обобщаются на случай произвольной размерности пространства  $d$ .

Функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа  $\nabla^2 f = 0$ , называются гармоническими. Заметим, что не существует гармонических функций, определенных во всем пространстве и стремящихся к нулю на бесконечности. Действительно, для таких функций хорошо определено преобразование Фурье  $\tilde{f}(\mathbf{q})$ . Произведя преобразование Фурье уравнения  $\nabla^2 f = 0$ , находим  $q^2 \tilde{f} = 0$ . У этого уравнения имеется только решение  $\tilde{f} \propto \delta(\mathbf{q})$ , что означает  $f = \text{const}$ . Если мы требуем стремления к нулю функции  $f$  на бесконечности, то константа здесь должна быть равна нулю, что и обосновывает сделанное утверждение. Подчеркнем, что изложенная аргументация относится к пространству произвольной размерности. То же относится и к однородному уравнению Дебая  $(\nabla^2 - \kappa^2) f = 0$ : не существует решений этого уравнения, определенных во всем пространстве и стремящихся к нулю на бесконечности.

Обычна задача об определении гармонической функции  $f$  в ограниченной области. В этом случае уравнение Лапласа (2.36) должно быть дополнено условиями на границе этой области. Например, можно задать значение потенциала  $f$  на границе. Возможны и иные граничные условия, например, нулевой производной от потенциала  $f$  в направлении, перпендикулярном границе. К сожалению, нет способов решения этой задачи для произвольной области. Однако для некоторых простых геометрий эта задача имеет решение.

Рассмотрим в качестве примера решение уравнения Лапласа в трехмерном случае в полупространстве  $z > 0$ , считая, что задано значение функции  $f$  на плоскости  $z = 0$ :  $f(x, y, 0)$ . Тогда в полупространстве  $z > 0$  потенциал  $f$  представляется в виде интеграла

$$f(x, y, z) = \int \frac{d\xi d\eta z f(\xi, \eta, 0)}{2\pi [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (2.38)$$

Действительно, определенная интегралом в правой части (2.38) функция является гармонической, поскольку в подынтегральном выражении стоит гармоническая функция, что легко проверяется непосредственно. Кроме того, легко проверить, что при  $z \rightarrow 0$  коэффициент при  $f(\xi, \eta, 0)$  в подынтегральном выражении в правой части (2.38) стремится к  $\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$ . Отсюда следует, что интеграл (2.38) при  $z \rightarrow 0$  стремится к  $f(x, y, 0)$ . На этом доказательство заканчивается.

Задача 2.2.1. Найти поведение функции (2.38) при больших  $z$ , считая, что  $f(x, y, 0)$  локализована вблизи начала координат.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении в неограниченном пространстве решения уравнения (2.36), где потенциал  $f$  стремится к нулю на бесконечности. Чтобы такое решение существовало, плотность заряда должна удовлетворять определенным условиям. Например, быть отличной от нуля в ограниченной области пространства.

Для решения уравнения (2.36) можно использовать функцию Грина  $G(\mathbf{r})$ . Она является решением уравнения

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (2.39)$$

к которому следует добавить условие убывания на бесконечности. Тогда решение уравнения (2.36) записывается в виде интеграла

$$f(\mathbf{r}) = \int dV' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \quad (2.40)$$

где интегрирование идет по всему пространству.

Решение уравнения (2.39) в трехмерном случае хорошо известно - это потенциал поля точечного заряда

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (2.41)$$

где  $r = |\mathbf{r}|$ . Подставляя в (2.40) в качестве функции Грина (2.41), находим соотношение

$$f(\mathbf{r}) = - \int dV' \frac{\phi(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.42)$$

которое является известным выражением для электростатического потенциала распределения зарядов в неограниченном пространстве.

Приведем здесь вывод выражения (2.41), основанный на преобразовании Фурье, смотри раздел (2.4.2). Произведем преобразование Фурье уравнения (2.39). В результате получим  $q^2 \tilde{G}(\mathbf{q}) = -1$ , где  $\tilde{G}(\mathbf{q})$  - преобразование Фурье от  $G(\mathbf{r})$ . Функцию Грина  $G(\mathbf{r})$  можно найти, как обратное Фурье-преобразование

$$G(\mathbf{r}) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^2}$$

Разобьем волновой вектор  $\mathbf{q}$  на компоненту  $q_{\parallel}$  вдоль  $\mathbf{r}$  и перпендикулярную  $\mathbf{r}$  компоненту  $\mathbf{q}_{\perp}$ . Интеграл по компоненте  $q_{\parallel}$  дает

$$\int dq_{\parallel} \exp(iq_{\parallel} r) \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2} = \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r)$$

где мы подставили  $q^2 = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2$ . Оставшийся интеграл по перпендикулярной компоненте

$$G(r) = - \int \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r)$$

приводит после перехода к полярным координатам к выражению (2.41).

Задача 2.2.2. Найти решение уравнения (2.39) в пространстве произвольной размерности  $d$ .

Задача 2.2.3. Найти выражение для потенциала  $f$  в случае, когда  $\phi$  зависит только от расстояния до начала координат.

Указанный выше способ вывода выражения для функции Грина, связанный с преобразованием Фурье, не работает в двумерном случае, поскольку в этом случае обратное преобразование Фурье формально расходится при малых волновых векторах  $\mathbf{q}$ . Поэтому в двумерном случае мы будем искать решение уравнения (2.39) другим способом. Ясно, что функция Грина  $G$  зависит только от абсолютной величины радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Вне начала координат, где сосредоточена  $\delta$ -функция, в уравнении (2.39) правая часть равна нулю, что приводит к уравнению  $(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r)G(r) = 0$ . Помимо тривиального решения - константы, это уравнение имеет своим решением  $\ln r$ .

Таким образом,  $G \propto \ln r$ . Чтобы найти коэффициент пропорциональности в этом соотношении, проинтегрируем уравнение (2.39) по диску радиуса  $R$ . В правой части мы получим единицу, а в левой части поток  $\nabla G$  через окружность - поверхность диска, который равен  $2\pi R \partial G / \partial R$ . Приравнявая эту величину единице, находим

$$d = 2 \quad G(r) = \frac{\ln r}{2\pi} \quad (2.43)$$

Разумеется, к этой величине можно добавить произвольную константу, которая определяется положением точки, в которой потенциал принят за ноль.

Задача 2.2.4. Вывести указанным способом выражение (2.41).

Приведем важное соотношение для гармонической функции  $f$ , удовлетворяющей уравнению  $\nabla^2 f = 0$ . Тогда, как следует из уравнения  $\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ , справедливо соотношение

$$\nabla [\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \nabla f(\mathbf{r})] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_1)$$

Интегрируя это соотношение по некоторой области пространства, содержащей точку  $\mathbf{r}_1$ , находим

$$f(\mathbf{r}_1) = \oint d\mathbf{S} [\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \nabla f(\mathbf{r})] \quad (2.44)$$

где  $d\mathbf{S}$  - элемент поверхности области интегрирования, направленный наружу от области. Отсюда следует, в частности, что значение гармонической функции в центре сферы равно ее среднему по поверхности сферы (это верно в пространстве произвольной размерности). Это означает, что гармоническая функция не может достигать минимума или максимума внутри области, где выполняется уравнение  $\nabla^2 f = 0$ .

Задача 2.2.5. Доказать, что значение гармонической функции в центре сферы равно ее среднему по поверхности сферы. Почему гармоническая функция не может достигать минимума или максимума внутри области, где выполняется уравнение  $\nabla^2 f = 0$ ?

Переходим теперь к уравнению Дебая (2.37). Найдем его функцию Грина  $G(\mathbf{r})$  в неограниченном пространстве. Функция Грина  $G$  удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 - \kappa^2) G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (2.45)$$

В трехмерном пространстве решение этого уравнения имеет вид

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(-\kappa r) \quad (2.46)$$

Как и следует, при  $\kappa \rightarrow 0$  выражение (2.46) переходит в (2.41). Обратим внимание на то, что, в отличие от (2.41), функция (2.46) экспоненциально затухает на больших расстояниях, которые превосходят длину Дебая  $\kappa^{-1}$ .

Задача 2.2.6. Доказать, что для решения однородного уравнения Дебая  $(\nabla^2 - \kappa^2) f = 0$  имеет место то же соотношение (2.44), но только с функцией Грина (2.46).

Для вывода выражения (2.46) действуем также, как и при выводе выражения (2.41). Произведем преобразование Фурье уравнения (2.45). В результате получим  $(q^2 + \kappa^2) \tilde{G}(q) = -1$ , где  $\tilde{G}$  - преобразование Фурье от  $G$ . Функцию  $G(r)$  можно найти, как обратное Фурье-преобразование

$$G(r) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^2 + \kappa^2}$$

Разобьем  $\mathbf{q}$  на компоненту  $q_{\parallel}$  вдоль  $\mathbf{r}$  и перпендикулярную  $\mathbf{r}$  компоненту  $\mathbf{q}_{\perp}$ . Интеграл по компоненте  $q_{\parallel}$  дает

$$\int dq_{\parallel} \exp(iq_{\parallel}r) \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 + \kappa^2} = \frac{\pi}{\beta} \exp(-\beta r)$$

где  $\beta^2 = q_{\perp}^2 + \kappa^2$ . Оставшийся интеграл по перпендикулярной компоненте легко находится после перехода от  $q_{\perp}$  к переменной  $\beta$  (которая меняется от  $\kappa$  до  $\infty$ ), что дает

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\kappa}^{\infty} d\beta \exp(-\beta r)$$

Вычисление этого интеграла приводит к (2.46).

Задача 2.2.7. Найти решение уравнения  $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi$  в случае, когда  $\phi$  зависит только от расстояния до начала координат.

Чаще всего уравнения Пуассона (2.36) и Дебая (2.37) приходится решать в области конечных размеров с определенными условиями на потенциал  $f$ , заданными на ее границах. Эта задача решается в два этапа. Сначала надо найти решение  $f_{\text{hom}}$  однородного уравнения  $\nabla^2 f = 0$  или  $(\nabla^2 - \kappa^2)f = 0$  с заданными граничными условиями на потенциал  $f$ . Затем надо найти  $f_{\text{force}}$ , которое является решением уравнения  $\nabla^2 f = \phi$  или  $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi$  с нулевыми граничными условиями. Решение уравнения Пуассона (2.36) или Дебая (2.37) дается суммой  $f = f_{\text{hom}} + f_{\text{force}}$ . Первый из этапов обсуждался выше. Переходим ко второму.

Решение уравнения Пуассона  $\nabla^2 f = \phi$  или Дебая  $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi$  с нулевыми граничными условиями может быть записано в виде

$$f_{\text{force}}(\mathbf{r}) = \int dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \quad (2.47)$$

где интегрирование идет по интересующей нас области. Функция Грина  $G$  в соотношении (2.47) должна удовлетворять уравнению  $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  для уравнения Пуассона или  $(\nabla^2 - \kappa^2)G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  для уравнения Дебая, а также нулевым граничным условиям. Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь не только от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , что связано с нарушением однородности пространства за счет граничных условий. Общих методов решения такой задачи не существует и ее надо каждый раз заново решать для области с данной геометрией. Иногда способ решения подсказывает симметрия области.

Задача 2.2.8. Найти функцию Грина уравнения Пуассона в области вне шара радиуса  $R$ , если на его поверхности задано нулевое граничное условие для  $G$ .

### 3.2.5 2.2.1 Двумерные гармонические функции

Двумерный случай выделен с точки зрения решения уравнения Лапласа  $(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = 0$ , которое задает гармонические функции. Дело в том, что решением этого уравнения является произвольная аналитическая функция  $g(z)$ , где  $z = x + iy$ , а также по отдельности ее действительная и мнимая части. Это сразу дает весьма обширный корпус решений двумерного уравнения Лапласа. Поскольку не существует аналитических на всей комплексной плоскости функций, стремящихся к нулю на бесконечности, мы возвращаемся к утверждению об отсутствии гармонических функций на всей плоскости, стремящихся к нулю на бесконечности.

Разумеется, не случайно, что в двумерном случае функция Грина Лапласиана пропорциональна  $\ln r$ , что является действительной частью аналитической функции  $\ln z$ , где  $z = x + iy$ . Тот факт, что Лапласиан  $\ln r$  не просто равен нулю, а пропорционален  $\delta$ -функции, связан с тем, что  $z = 0$  является сингулярной точкой  $\ln z$ . Обобщая это

наблюдение, следует сказать, что Лапласиан произвольной аналитической функции равен нулю в области ее аналитичности, вне ее сингулярных точек.

Рассмотрим задачу Дирихле, которая ставится для функции, удовлетворяющей некоторому дифференциальному уравнению второго порядка, и заключается в восстановлении функции в некоторой области по ее значениям на границе этой области. В данном случае нас интересуют гармонические функции, подчиняющиеся двумерному уравнению Лапласа. Эта задача явно решается, если находится аналитическая функция, действительная или мнимая часть которой принимает данные граничные значения.

Задача 2.2.9. Найти значение гармонической функции и внутри единичного круга, если на его границе  $u = \cos(n\varphi)$ , где  $\varphi$  — полярный угол.

В соответствии с интегральной формулой Коши задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет явное решение для голоморфной в данной области функции  $g(z)$ , если известно ее значение на границе области. А именно

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

где интеграл идет против часовой стрелки по границе области. К сожалению, для использования интегральной формулы Коши необходимо знать как действительную, так и мнимую части функции  $g$  на границе области. Обычно же задача Дирихле ставится для действительной функции. Поэтому интегральная формула Коши непосредственно к этому случаю не применима.

Задача Дирихле для двумерного уравнения Лапласа имеет регулярное решение для нескольких простых форм областей. Проанализируем случай, когда интересующая нас область является полуплоскостью  $y > 0$ . В этом случае задача Дирихле означает поиск гармонической функции  $f$  в полуплоскости  $y > 0$ , если задано ее значение при  $y = 0$ . Решение этой задачи может быть записано в виде интеграла

$$f(x, y) = \int d\xi \frac{y}{\pi [(x - \xi)^2 + y^2]} f(\xi, 0) \quad (2.48)$$

Обратим внимание на то, что подынтегральное выражение, как и следует, само по себе является гармонической функцией, поскольку  $y/(x^2 + y^2) = \partial_y \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , а логарифм является решением уравнения Лапласа  $\nabla^2 \ln r = 0$ .

Для доказательства (2.48) переходим к Фурьепреобразованию  $f$  по  $x$ , который мы обозначим  $\tilde{f}(q, y)$ . Уравнение Лапласа для этой величины имеет вид  $(\partial_y^2 - q^2) \tilde{f} = 0$ . Отсюда  $\tilde{f}(q, y) = \exp(-|q|y) \tilde{f}(q, 0)$ , то есть

$$f(x, y) = \int \frac{dq}{2\pi} \exp(iqx) \exp(-|q|y) \tilde{f}(q, 0)$$

Подставляя сюда  $\tilde{f}(q, 0) = \int d\xi \exp(-iq\xi) f(\xi, 0)$  и беря интеграл по  $q$ , мы и получаем соотношение (2.48).

Задача 2.2.10. Найти решение уравнения Лапласа  $f$  в полуплоскости  $y > 0$ , если  $f(x, 0) = \exp(ix)$ .

Приведем альтернативный вывод соотношения (2.48). Можно заметить, что  $y/[(x - \xi)^2 + y^2] = -\text{Im}(x - \xi + iy)^{-1}$ . Таким образом, функция  $f$  (2.48) является мнимой частью аналитической функции и, следовательно, гармонической функцией. Далее, при  $y \rightarrow 0$  функция  $(y/\pi)[(x - \xi)^2 + y^2]^{-1}$  стремится к  $\delta(x - \xi)$ , смотри раздел (1.5.2). Поэтому при  $y \rightarrow 0$  функция (2.48) стремится к  $f(x, 0)$ , что и заканчивает доказательство (2.48).

Рассмотрим теперь круг единичного радиуса и будем считать, что значения действительной гармонической функции заданы на его границе, то есть на окружности

единичного радиуса. Поместим начало координат в центр круга. Тогда значения функции  $u(x, y)$  внутри круга дается формулой Пуассона

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{(1 - r^2) u(\cos t, \sin t)}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2} \quad (2.49)$$

Здесь введены расстояние до начала координат  $r$  и полярный угол  $\varphi$ . Интегрирование по  $t$  как раз и означает интегрирование по единичной окружности.

Для доказательства соотношения Пуассона (2.49) заметим сначала, что его правая часть является действительной частью функции

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} u(\cos t, \sin t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

где  $z = x + iy$ . Поскольку функция  $f(z)$ , очевидно, аналитична внутри единичного круга, ее действительная часть является гармонической функцией. Таким образом, мы доказали гармоничность правой части (2.49). Теперь мы должны доказать, что при стремлении  $r$  к единице правая часть (2.49) дает  $u(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Для этого следует воспользоваться результатом задачи 1.5.3, где показано, что при стремлении  $r$  к единице снизу подынтегральное выражение в правой части (2.49) переходит в  $\delta$ -функцию, которая и обеспечивает необходимый предел. На этом доказательство заканчивается.

Формула Пуассона (2.49) очевидно обобщается на круг произвольного радиуса  $R$ :

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u(R \cos t, R \sin t)}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} \quad (2.50)$$

При  $r = 0$  формула (2.50) приводит к уже известному нам утверждению про среднее, которое в двумерном случае звучит следующим образом: значение гармонической функции в центре круга равно этой функции, усредненной по окружности, которая является границей круга.

**Задача 2.2.11.** Найти значение гармонической функции и внутри круга радиуса  $R$ , если на его границе  $u = 1$  при  $x > 0$  и  $u = 0$  при  $x < 0$ . Проверить, что значение гармонической функции в центре круга равно усредненному по охватывающей ее окружности значению этой функции.

К сожалению, прямое обобщение формулы Пуассона (2.50) на область произвольной геометрии невозможно. Это обобщение можно сформулировать в терминах функции, которая производит конформное отображение границы интересующей нас области на единичную окружность. Однако поиск такой функции представляет собой отдельную нетривиальную задачу. В то же время для областей, конформное отображение границы которых на единичную окружность известно, решение задачи Дирихле можно выписать в явном виде (в виде интеграла).

### 3.2.6 2.3 Собственные функции уравнения Шрёдингера

К задачам, рассмотренным нами выше, примыкают задачи на собственные функции уравнения Шрёдингера для квантового движения частицы, в котором наряду с Лапласианом фигурирует потенциал внешнего поля  $U$ . Мы рассматриваем случай, когда потенциал  $U$  является статическим и стремится к нулю на бесконечности. Особенно интересен случай притягивающего потенциала, когда возможно образование связанных состояний, которые характеризуются волновыми функциями, локализованными в ограниченной области пространства.

Мы уже обсуждали уравнение Шрёдингера для собственных функций в одномерном случае. В трехмерном случае уравнение Шрёдингера для собственных функций частицы во внешнем статическом потенциале  $U$  имеет вид

$$\nabla^2 \psi - U\psi + \epsilon\psi = 0 \quad (2.51)$$

аналогичный (2.25). Как и ранее,  $\epsilon$  имеет смысл энергии квантовой частицы, движущейся во внешнем поле с потенциалом  $U$ .

Мы рассматриваем случай потенциала  $U$ , стремящегося к нулю при увеличении расстояния  $r$  от начала координат. Тогда, как и в одномерном случае, положительные  $\epsilon$  соответствуют функциям непрерывного спектра, а отрицательные  $\epsilon$  - связанным состояниям, набор которых дискретен. Волновые функции связанных состояний (дискретного спектра) стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Волновые же функции непрерывного спектра ведут себя на больших расстояниях, как волновые функции свободных частиц. В частности, набор волновых функций непрерывного спектра можно выбрать так, чтобы на больших расстояниях они переходили в экспоненты:  $\psi_{\mathbf{k}} \rightarrow \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  при  $r \rightarrow \infty$ . Волновые же функции связанных состояний убывают на больших расстояниях, как  $\exp(-\sqrt{|\epsilon|}r)$ .

Выполняются условия ортогональности различных собственных функций оператора  $\nabla^2 - U$ , смотри раздел 2.4.1. Поэтому интеграл  $dV\psi_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{q}}$  пропорционален  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ . В силу того, что волновые функции  $\psi_{\mathbf{k}}$  не стремятся к нулю на бесконечности, этот интеграл набирается на больших расстояниях. Поэтому коэффициент при  $\delta$ -функции будет таким же, как и для плоских волн  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , то есть

$$\int dV\psi_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{q}} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad (2.52)$$

Волновые функции дискретного спектра могут быть нормированы на единицу.

### 3.2.7 2.3.1 Уравнение Шрёдингера в Кулоновском потенциале

Проиллюстрируем сказанное на примере движения квантовой частицы в притягивающем Кулоновском потенциале. Выберем единицы измерения, когда потенциал равен  $U = -2/r$ , где  $r$  - расстояние до притягивающего центра. Тогда уравнение (2.51) запишется в следующем виде

$$\left(\nabla^2 + \frac{2}{r} + \epsilon\right)\psi = 0 \quad (2.53)$$

Нас будут интересовать связанные состояния, для которых  $\psi$  убывает при росте  $r$ , для связанных состояний значения энергии  $\epsilon$  отрицательны. Анализируя связанные состояния,  $\psi$  можно считать действительной.

Как известно, в силу изотропии задача (2.53) допускает разделение переменных, то есть волновая функция  $\psi$  связанного состояния может быть записана в виде произведения радиальной функции  $R$ , зависящей от  $r$ , и угловой функции, зависящей от азимутального  $\theta$  и полярного  $\varphi$  углов. Уравнение на радиальную функцию имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + \epsilon\right)R = 0 \quad (2.54)$$

где  $l$  - орбитальное квантовое число (целое неотрицательное). Вводя функцию  $\Phi = r^{1+l}R$ , мы получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2l}{r}\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \epsilon\right)\Phi = 0 \quad (2.55)$$



Это уравнение определяет радиальное поведение волновой функции связанного состояния.

Рассмотрим сначала случай нулевого углового числа  $l$ . В случае  $l = 0$  уравнение (2.55) приобретает вид

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} + \epsilon \right) \Phi = 0 \quad (2.56)$$

Умножим уравнение (2.56) на  $r$  и перейдем к уравнению

для преобразования Лапласа  $\tilde{\Phi}(p)$  от  $\Psi(r)$ . В результате получим уравнение первого порядка

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2 + \epsilon) \tilde{\Phi} \right] = 2\tilde{\Phi}$$

Это уравнение может быть явно решено, поскольку в терминах функции  $(p^2 + \epsilon) \tilde{\Phi}$  в нем разделяются переменные.

Нас интересуют связанные состояния, соответствующие отрицательной энергии. Подставляя  $\epsilon = -\alpha^2$ , выбирая  $\alpha > 0$ , и решая полученное уравнение для  $\tilde{\Phi}$ , находим

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha} \quad (2.57)$$

Однако не при всех  $\alpha$  это выражение соответствует связанному состоянию. Чтобы найти связанные состояния, необходимо проанализировать обратное преобразование Лапласа функции (2.57) и установить, при каких  $\alpha$  функция  $\Phi(r)$  стремится к нулю при возрастании  $r$ .

Выражение (2.57) имеет сингулярность при  $p = \alpha$ , то есть контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа (1.61) должен идти справа от этой точки. Изза сингулярности при больших  $r$  функция  $\Phi(r)$  ведет себя пропорционально  $\exp(\alpha r)$ . Это поведение не соответствует связанным состояниям. Исключением является случай  $\alpha = 1/n$  ( $n$  - целое число), тогда особенность при  $p = \alpha$  исчезает. Именно эти значения соответствуют связанным состояниям частицы с энергией  $\epsilon = -1/n^2$ . Для этих связанных состояний

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-1}}{(p + 1/n)^{n+1}} \quad (2.58)$$

Коэффициент в этом законе пропорциональности определяется условием нормировки волновой функции.

Чтобы вычислить  $\Phi(r)$ , необходимо произвести обратное преобразование Лапласа  $\tilde{\Phi}(p)$ . Для функции (2.58) соответствующий интеграл сведется к вычету в точке  $p = -1/n$ . Таким образом,  $\Phi$  пропорциональна  $\exp(-r/n)$  с полиномиальным множителем, который возникает в силу того, что полюс (2.58) является кратным. Разумеется, это экспоненциальное поведение соответствует анонсированному нами поведению  $\exp(-\sqrt{|\epsilon|}r)$ .

Например, для основного состояния, то есть при  $n = 1$ , мы находим  $\tilde{\Phi} \propto (p + 1)^{-2}$ . В этом случае вычисление  $\Psi(r)$ , которое получается из  $\tilde{\Phi}$  обратным преобразованием Лапласа, сводится к взятию вычета  $\tilde{\Phi} \exp(pr)$  в точке  $p = -1$ . Вычисляя этот вычет с учетом того, что  $\tilde{\Phi}$  имеет полюс второго порядка, находим  $\Phi \propto r \exp(-r)$ , то есть радиальная часть волновой функции  $R \propto \exp(-r)$ .

Переходим теперь к случаю произвольного углового числа  $l$ . Умножим уравнение (2.55) на  $r$  и перейдем к преобразованию Лапласа функции  $\Psi$  по переменной  $r$ . В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2 + \epsilon) \tilde{\Phi} \right] = 2\tilde{\Phi} - 2pl\tilde{\Phi}$$

При выводе последнего члена мы при интегрировании по частям учли, что  $\Phi(0) = 0$  в силу определения  $\Phi = r^{1+l}R$ . Решая полученное уравнение, находим прямое обобщение уравнения (2.57)

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{(p^2 - \alpha^2)^{l+1}} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha}$$

где, как и выше,  $\epsilon = -\alpha^2$  и  $\alpha > 0$ . Связанным состояниям соответствуют, как и выше, значения  $\alpha = 1/n$ . В этом случае

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-l-1}}{(p + 1/n)^{n+l+1}} \quad (2.59)$$

что является прямым обобщением (2.58). Поскольку полюс в точке  $p = -1/n$ , который определяет значение  $\Phi$ , является кратным, то, как и для случая нулевого орбитального квантового числа  $l$ , функция  $\Phi$  будет пропорциональна  $\exp(-r/n)$  с полиномиальным множителем.

**Задача 2.3.1.** Найти радиальную функцию  $R$  связанного состояния атома водорода, соответствующего  $n = 2, l = 0$ .

**Задача 2.3.2.** Найти радиальную функцию  $R$  связанного состояния атома водорода, соответствующего  $n = 2, l = 1$ .

### 3.2.8 2.4 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

#### 3.2.9 2.4.1 Собственные функции оператора Штурма-Лиувилля

Рассмотрим функции одной переменной, заданные на интервале  $a < x < b$ . Проанализируем свойства дифференциального оператора Штурма-Лиувилля (2.6) на этом интервале.

Будем называть дифференциальный оператор  $\hat{L}$  самосопряженным, если для любых двух функций,  $f(x)$  и  $g(x)$ , из интересующего нас класса выполняется соотношение

$$\int_a^b dx f \hat{L} g = \int_a^b dx g \hat{L} f \quad (2.60)$$

Выполнение условия (2.60) может быть связано как со свойствами класса рассматриваемых функций, так и со свойствами оператора  $\hat{L}$ . Например, нулевые граничные условия или периодические граничные условия (когда на концах интервала одинаковы значения самой функции и одинаковы значения ее производной), наложенные на функции  $f$  и  $g$ , приводят к самосопряженности оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2 - U(x)$ , то есть дифференциального оператора Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = 0$ .

Рассмотрим теперь собственные функции  $f_n$  оператора  $\hat{L}$ , которые удовлетворяют уравнению  $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$ , где  $\lambda_n$  - собственное значение оператора  $\hat{L}$ . Условие (2.60) приводит к соотношению

$$\int dx f_n \hat{L} f_m = \lambda_m \int dx f_n f_m = \lambda_n \int dx f_n f_m$$

Таким образом, при  $\lambda_n \neq \lambda_m$  выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b dx f_n(x) f_m(x) = 0 \quad (2.61)$$

В качестве примера можно привести набор функций  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$ , которые являются собственными функциями оператора  $d^2/dx^2$  на интервале  $(0, 2\pi)$  в классе периодических функций. Для этих функций соотношения (2.61) легко проверяются непосредственно.

Дополнительного комментария требует наличие вырождения (то есть собственных функций с совпадающими собственными значениями оператора  $\hat{L}$ ). Мы будем считать, что набор собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению оператора  $\hat{L}$ , за счет линейного преобразования выбран таким образом, чтобы внутри этого набора также выполнялось условие ортогональности (2.61). Отметим, что для рассмотренного нами примера оператора  $d^2/dx^2$ , собственные функции которого дважды вырождены (собственному значению  $\lambda_n = -n^2$  соответствуют две собственные функции), условию взаимной ортогональности удовлетворяют как раз набор функций  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$ .

Если  $f_n$  является полным набором собственных функций оператора  $\hat{L}$  из интересующего нас класса, то любую функцию  $f$  того же класса можно разложить в ряд по этим собственным функциям:

$$f = \sum_n c_n f_n \quad (2.62)$$

Коэффициенты этого разложения в силу условий ортогональности (2.61) равны

$$c_n = A_n^{-1} \int dx f_n f, \quad A_n = \int dx f_n^2 \quad (2.63)$$

Примером разложения (2.62) является разложение по уже упомянутым нами функциям  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$ , которое является не чем иным, как разложением в ряд Фурье.

Подставляя выражение (2.63) для коэффициентов  $c_n$  в разложение (2.62), мы находим соотношение

$$f(x) = \int dy \sum_n \frac{f_n(x) f_n(y)}{A_n} f(y)$$

которое должно выполняться для любой функции  $f$  из выбранного нами класса. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_n A_n^{-1} f_n(x) f_n(y) = \delta(x - y) \quad (2.64)$$

которое является выражением полноты системы функций  $f_n$ . Соотношение (2.64) для набора  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$  имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(nx) \cos(ny) + \sin(nx) \sin(ny)] = \delta(x - y) \quad (2.65)$$

Это соотношение эквивалентно соотношению (1.53).

Несколько слов о неоднородной задаче  $\hat{L}f = \phi$ . Представляя обе функции,  $f$  и  $\phi$ , в виде ряда по собственным функциям оператора  $\hat{L}$ :  $f = \sum_n c_n f_n$  и  $\phi = \sum_n a_n f_n$ , мы находим  $c_n = a_n/\lambda_n$ . Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой, если у оператора  $\hat{L}$  имеется нулевое собственное значение. (В этом случае говорят, что у оператора  $\hat{L}$  есть нулевые моды.) Эта проблема является неустранимой в том смысле, что если в

разложении "силы"  $\phi$  имеется ненулевой вклад с собственной функцией, соответствующей нулевому собственному числу, то неоднородная задача  $\hat{L}f = \phi$  не может быть решена в базисе функций  $f_n$ . Поясним это утверждение на примере оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , который имеет собственную функцию, соответствующую нулевому собственному значению (нулевую моду), которая есть просто константа. Будем рассматривать задачу с периодическими граничными условиями. Наличие константы в разложении  $\phi$  означает, что интеграл от  $\phi$  по периоду не равен нулю. В то же время для периодической функции  $f$  интеграл по периоду от  $d^2f/dx^2$  равен нулю. Поэтому уравнение  $d^2f/dx^2 = \phi$  не имеет, вообще говоря, решения на классе периодических функций.

Рассмотрим обобщение соотношения (2.60)

$$\int_a^b dx \rho f \hat{L}g = \int_a^b dx \rho g \hat{L}f \quad (2.66)$$

где  $\rho(x)$  - положительная функция, которую обычно называют весовой функцией или мерой интегрирования. Удовлетворяющий условию (2.66) оператор  $\hat{L}$  уже не является самосопряженным. В частности, им может быть оператор Штурма-Лиувилля (2.6). Легко проверить, что при нулевых или периодических граничных условиях на функции  $f, g$  оператор (2.6) удовлетворяет условию (2.66), если

$$\frac{d}{dx}\rho = Q\rho \rightarrow \rho = \exp\left(\int dx Q\right) \quad (2.67)$$

Рассмотрим теперь собственные функции  $f_n$  оператора  $\hat{L}$ , которые удовлетворяют уравнению  $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$ , где  $\lambda_n$  - собственное значение оператора  $\hat{L}$ . Условие (2.66) приводит к соотношению

$$\int dx \rho f_n \hat{L}f_m = \lambda_m \int dx \rho f_n f_m = \lambda_n \int dx \rho f_n f_m$$

Таким образом, при  $\lambda_n \neq \lambda_m$  выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b dx \rho f_n f_m = 0 \quad (2.68)$$

которое обобщает условие ортогональности (2.61).

Если  $f_n$  является полным набором собственных функций оператора  $\hat{L}$  из интересующего нас класса, то любую функцию  $f$  того же класса можно разложить в ряд (2.62) по этим собственным функциям. Коэффициенты этого разложения в силу условий ортогональности (2.68) равны

$$c_n = A_n^{-1} \int dx \rho f_n f, \quad A_n = \int dx \rho f_n^2 \quad (2.69)$$

Подставляя выражение (2.69) для коэффициентов  $c_n$  в разложение (2.62), мы находим соотношение

$$f(x) = \int dy \rho \sum_n \frac{f_n(x)f_n(y)}{A_n} f(y)$$

которое должно выполняться для любой функции  $f$  из выбранного нами класса. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_n A_n^{-1} f_n(x)f_n(y) = \frac{1}{\rho(y)} \delta(x-y) \quad (2.70)$$

которое является выражением полноты системы функций  $f_n$  и обобщает соотношение (2.64).

### 3.2.10 2.4.2 Преобразование Фурье

Любую функцию  $f(\mathbf{x})$ , заданную в  $d$ -мерном пространстве, и стремящуюся к нулю на бесконечности, можно разложить в интеграл Фурье:

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 dq_2 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{q}) \quad (2.71)$$

где  $\tilde{f}(\mathbf{q})$  называется преобразованием Фурье функции  $f(\mathbf{x})$ . Эту величину можно вычислить в соответствии с правилом

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \quad (2.72)$$

Преобразования (2.71) и (2.72) являются обратными друг другу. Из выражения (2.72) следует, что преобразование Фурье действительной функции  $f(\mathbf{x})$  удовлетворяет соотношению  $\tilde{f}(-\mathbf{q}) = \tilde{f}^*(\mathbf{q})$ , где звездочка означает комплексное сопряжение.

Приведем соотношение, касающееся так называемой свертки двух функций

$$h(\mathbf{y}) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_d f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (2.73)$$

Подставляя выражение (2.73) в интеграл Фурье (2.72) и переходя к интегрированию по  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ , мы находим

$$\tilde{h}(\mathbf{q}) = \tilde{f}(\mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}) \quad (2.74)$$

Таким образом, свертке в обычном пространстве соответствует простое произведение в Фурье-представлении.

Верно и обратное: свертке в Фурье-представлении соответствует простое произведение в обычном пространстве.

Отметим, что для  $\delta$ -функции,  $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_d)$ , преобразованием Фурье является единица,  $\tilde{\delta} = 1$ . Это свойство является прямым обобщением соотношений (1.50, 1.51). Отметим также обобщение на  $d$ -мерный случай соотношения (1.49)

$$f(\mathbf{y}) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_d \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \quad (2.75)$$

Используя теперь соотношения (2.73, 2.74), мы возвращаемся к  $\tilde{\delta} = 1$ . Это свойство объясняет эффективность вычисления Гриновских функций за счет перехода к Фурье-представлению.

При учете зависимости функции  $f$  от времени  $t$  в преобразование Фурье можно включить также и время. Мы будем делать это следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega, \mathbf{q}) &= \int dt d\mathbf{x} \exp(i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \\ f(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d\omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\omega, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.77)$$

где  $d$  - размерность пространства,  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_d$ ,  $d\mathbf{q} = dq_1 dq_2 \dots dq_d$ . Обратим внимание на то, что время  $t$  входит в преобразования (2.76, 2.77) с обратным по сравнению с пространственными координатами знаком.

Задача 2.4.1. Найти Фурье-преобразование следующих функций:  $f(\mathbf{x}) = \exp(-x^2)$  в  $d$ -мерном пространстве;  $\exp(-|\mathbf{x}|)$  в трехмерном пространстве;  $(x^2 + a^2)^{-1}$ , где  $a$ -константа, в одномерном пространстве.

Помимо разложения в интеграл Фурье (2.71), в математической физике широко используется разложение в ряд Фурье, которое справедливо для периодических функций или функций, заданных на конечном интервале или в конечной области пространства. Для одномерного случая свойства разложения в ряд Фурье (с точностью до замены знака перед  $i$ ) совпадают с изложенными в разделе (1.5.1) свойствами разложения во временной ряд Фурье. Для удобства повторим здесь материал раздела (1.5.1), используя пространственный язык.

Мы рассматриваем функцию, заданную на конечном интервале. Сдвигом начала координат этот интервал всегда можно выбрать в виде  $0 < x < L$ . Тогда функция  $f(x)$  раскладывается в следующий ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(2\pi i n x / L) \quad (2.78)$$

где  $n$  - целые числа, пробегающие от минус до плюс бесконечности. Ряд (2.78) задает некоторую периодическую с периодом  $L$  функцию, которая определена при произвольных  $x$ . Таким образом, если исследуется функция, заданная на интервале  $0 < x < L$ , то ряд Фурье (2.78) задает, как говорят, ее периодическое продолжение на всю действительную ось. Обратим внимание на то, что даже если функция  $f(x)$  непрерывна на интервале  $0 < x < L$ , ее периодическое продолжение имеет, вообще говоря, разрывы в точках  $x_n = nL$ .

Обратное к (2.78) преобразование имеет вид

$$f_n = \int_0^L \frac{dx}{L} \exp(-2\pi i n x / L) f(x) \quad (2.79)$$

Отсюда следует, что для действительной функции  $f(x)$  коэффициенты ее разложения в ряд Фурье (2.78) удовлетворяют соотношению  $f_{-n} = f_n^*$ . В этом случае ряд Фурье (2.78) иногда записывают через тригонометрические функции

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_1^{+\infty} [\operatorname{Re} f_n \cos(2\pi n x / L) - \operatorname{Im} f_n \sin(2\pi n x / L)] \quad (2.80)$$

Для функций, которые меняются на масштабах, гораздо меньших  $L$ , в ряде Фурье (2.78) существенны большие  $n$ . Тогда этот ряд может быть приблизительно заменен на интеграл Фурье, который идет по волновым векторам  $q = 2\pi n / L$ . Отсюда следует правило подстановки

$$\sum_n \rightarrow L \int \frac{dq}{2\pi}$$

которое позволяет преобразовывать сумму в интеграл. Таким образом, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье с множителем  $L$  - периодом функции  $f$  или длиной интервала, на котором она задана.

Если периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале, содержит разрывы, то коэффициенты ряда Фурье медленно убывают при росте  $n$ . Чтобы найти закон этого убывания, рассмотрим разложение в ряд Фурье  $\delta$ -функции. Точнее говоря, речь идет о бесконечной сумме  $\delta$ -функций, которая является периодической функцией  $x$ . Используя соотношение (2.79), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(inx) \quad (2.81)$$

где мы для определенности положили  $L = 2\pi$ . В случае (2.81) коэффициенты разложения  $f_n$  вообще не зависят от  $n$ . Для разрывной функции  $\delta$ -функции возникают в

ее производной по  $x$ , то есть коэффициенты разложения этой производной не зависят от  $n$  при больших  $n$ . Для самой разрывной функции  $f$  это означает, что ее коэффициенты разложения в ряд Фурье ведут себя пропорционально  $1/n$  при больших  $n$ . В случае непрерывной функции, содержащей изломы, закон убывания сменяется на  $1/n^2$ .

Задача 2.4.2. Разложить в ряд Фурье функцию  $f = \exp(\alpha x)$ , которая задана на интервале  $0 < x < 2\pi$ ; и функцию  $f = x$ , которая задана на интервале  $-\pi < x < \pi$ .

Функцию  $f(x)$ , которая задана на отрезке  $(0, L)$ , можно разложить в несколько иной ряд по гармоническим функциям. Расширим этот интервал до  $(-L, L)$ , доопределив на отрицательных  $x$  функцию  $f$  как  $f(-x) = -f(x)$ . Тогда функция станет антисимметричной, и ее разложение в ряд Фурье на интервале  $(-L, L)$  содержит только синусы. Таким образом мы приходим к разложению

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin(\pi n x / L) \quad (2.82)$$

которое работает и на интервале  $(0, L)$ . Коэффициенты этого разложения можно вычислить, как

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin(\pi n x / L) f(x) \quad (2.83)$$

Обычно разложение (2.82) используется в случае, когда функция  $f$  равна нулю на границах интервала, что обеспечивает достаточно быстрое убывание коэффициентов  $f_n$  с ростом  $n$ .

Задача 2.4.3. Разложить в ряд (2.82) функцию  $f(x) = x(\pi - x)$ , заданную на интервале  $(0, \pi)$ .

Прямое обобщение на многомерный случай одномерного разложения (2.78) в ряд Фурье можно получить для случая, когда функция  $f$  задана в прямоугольном ящике размерами  $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_d$ . Тогда  $f(\mathbf{x})$  можно периодически продолжить во всех  $d$  направлениях. Направим оси координат вдоль ребер ящика, а начало координат поместим в вершину так, чтобы заключенный внутри этого ящика объем определялся неравенствами  $0 < x_1 < L_1, 0 < x_2 < L_2, \dots, 0 < x_d < L_d$ . В этом случае разложение функции  $f$  в ряд Фурье имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum f_{n_1, n_2, \dots, n_d} \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{n_1 x_1}{L_1} + \dots + \frac{n_d x_d}{L_d} \right) \right] \quad (2.84)$$

Суммирование в (2.84) идет по всем целым  $n_1, n_2, \dots, n_d$ . Коэффициенты ряда Фурье (2.84) вычисляются в соответствии с

$$f_{n_1, n_2, \dots, n_d} = \frac{1}{V} \int dx_1 \dots dx_d f(\mathbf{x}) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{n_1 x_1}{L_1} + \dots + \frac{n_d x_d}{L_d} \right) \right] \quad (2.85)$$

где  $V$  - объем ящика,  $V = L_1 \dots L_d$ . Если функция меняется на масштабах много меньше размеров ящика, то ряд (2.84) близок к интегралу, а правило пересчета имеет вид

$$\sum_{n_1 \dots n_d} \rightarrow V \int \frac{dq_1}{2\pi} \dots \frac{dq_d}{2\pi}$$

Задача 2.4.4. Разложить в ряд Фурье (2.84) функцию  $f = x_1 x_2 x_3$  в трехмерном ящике  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ .

### 3.3 Специальные функции

(это же в отдельной записи про них)

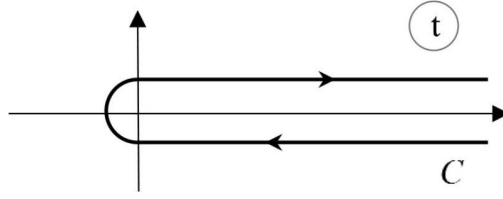


Рис. 3.1: Контур интегрирования в интегральном представлении гамма-функции

Специальные функции были введены для описания случаев, когда элементарных функций оказывается недостаточно для описания свойств системы. Мы приводим сведения только о самых распространенных специальных функциях. Как правило, эти функции являются решениями дифференциальных уравнений, которые в силу своей универсальности часто возникают в самых разных физических приложениях.

#### 3.3.1 3.1 Гамма-функция Эйлера

На практике довольно часто возникают случаи, когда требуется взять интеграл, содержащий комбинацию экспоненциальной и степенной функций. Такого сорта интегралы сводятся к так называемой Гамма-функции  $\Gamma(x)$ , которая была введена Эйлером еще в 18 веке. Гамма-функция определяется следующим интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \quad (3.1)$$

Интеграл (3.1) сходится при любом положительном  $z$ , или, если речь идет о функции комплексной переменной  $z$ , при любом  $z$  с положительной действительной частью. Интеграл (3.1) легко вычисляется путем многократного интегрирования по частям при целом положительном  $z = n$ . В этом случае получается  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Поэтому можно сказать, что Гамма-функция является обобщением факториала на случай произвольного комплексного  $n$ . Отметим также значение  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , которое может быть получено из (3.1), если перейти к интегрированию по  $\sqrt{t}$ . Однократное интегрирование по частям в выражении (3.1) дает соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (3.2)$$

которое также является обобщением соответствующего свойства факториала.

Задача 3.1.1. Найти площадь единичной сферы в  $d$  мерном пространстве.

При  $z \rightarrow 0$  значение интеграла (3.1) неограниченно возрастает. Это означает, что при  $z = 0$  функция  $\Gamma(z)$  имеет особенность. Чтобы установить характер этой особенности и, более общо, продолжить аналитически  $\Gamma(z)$  на  $z$  с отрицательной действительной частью, можно использовать модификацию интеграла (3.1)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C dt t^{z-1} e^{-t} \quad (3.3)$$

где контур  $C$  изображен на рисунке 3.1.

В выражении (3.3) предполагается, что  $t^{z-1}$  задано ветвью с разрезом вдоль действительной оси, причем на верхнем берегу разреза аргумент  $t^{z-1}$  равен нулю (то есть  $t^{z-1}$  действительно), а контур  $C$  обходит этот разрез, приходя из  $+\infty$  снизу разреза и уходя в  $+\infty$  сверху разреза. Если  $\operatorname{Re} z > 0$ , то контурный интеграл (3.3) может быть



сведен к сумме интегралов по верхнему и нижнему берегам разреза, причем интеграл по верхнему берегу разреза совпадает с интегралом (3.1), а интеграл по нижнему берегу разреза отличается от интеграла (3.1) множителем  $-\exp(2\pi iz)$ . Отсюда и получается выражение (3.3).

Правая часть соотношения (3.3) определена и для  $z$  с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение  $\Gamma(z)$  на эту область переменной  $z$ . Контурный интеграл в (3.3) не имеет особенностей в плоскости  $z$ . Следовательно, особенности функции  $\Gamma(z)$  определяются разностью  $1/\exp(2\pi iz)$ , которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательных)  $z$ . При положительных целых  $z$  в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталя. В любом случае,  $\Gamma(z)$  не имеет особенностей при целых положительных  $z$ , в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных  $z$  контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках  $\Gamma(z)$  имеет простые полюса.

Задача 3.1.2. Найти контурное представление  $\Gamma(z)$  в терминах  $(-t)^{z-1}e^{-t}$ .

Задача 3.1.3. Показать, что

$$\int_0^\infty du u^{z-1} \cos u = \cos(\pi z/2) \Gamma(z) \quad (3.4)$$

$$\int_0^\infty du u^{z-1} \sin u = \sin(\pi z/2) \Gamma(z) \quad (3.5)$$

Установить область применимости этих выражений.

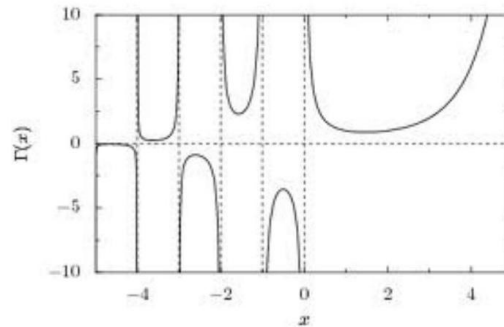


Рис. 3.2: Гамма-функция Эйлера.

Найдем вычеты функции  $\Gamma(z)$  в полюсах  $z = 0, -1, -2, \dots$ . При  $z = -n$  ( $n$  — целое неотрицательное) контурный интеграл в (3.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}$$

Таким образом

$$\text{res } \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1} \quad (3.6)$$

График зависимости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 3.2. В точках  $x = -n$  функция  $\Gamma$  стремится к бесконечности.

Можно найти асимптотическое выражение Гаммафункции  $\Gamma(z)$  при больших положительных значениях  $z$ , воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 3.7.2. Для этого в интеграле (3.1) произведем замену  $t \rightarrow tz$ , которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)]$$

то есть к виду (3.98). Стоящая в экспоненте функция  $\ln t - t$  достигает максимума в точке  $t = 1$ . Используя теперь приближение (3.99), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z) \quad (3.7)$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших  $n$ ) выражение для факториала  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ , которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что асимптотика (3.7) справедлива и для комплексных  $z$  при условии большого положительного значения действительной части  $z$ .

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (3.8)$$

где действительные части  $\alpha$  и  $\beta$  предполагаются положительными. Для доказательства соотношения (3.8) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}$$

Интегрируя обе части этого соотношения по  $s$  с весом  $e^{-s}$ , мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}$$

Замена переменных  $s = x + y$  сводит правую часть к произведению интегралов по  $x$  по  $y$ , которые дают произведение  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ . Таким образом, мы приходим к соотношению (3.8).

Задача 3.1.4. Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi$$

**Задача 3.1.5. Доказать соотношение**

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z)$$

Выведем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (3.9)$$

Для этого запишем левую часть (3.9), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}$$

Произведя здесь замену  $s = t\zeta$  и взяв интеграл по  $t$ , мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}$$

Чтобы взять стоящий здесь интеграл по  $\zeta$ , следует преобразовать его в контурный интеграл

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{1}{1-\exp(2\pi iz)} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}$$

где контур  $C$  изображен на рисунке 3.1. После этого контур можно деформировать, загибая его 'усы' в левую полуплоскость. После этого интеграл сведется к вычету в точке  $\zeta = -1$ , что и дает выражение, стоящее в правой части (3.9).

Строго говоря, приведенные рассуждения справедливы для  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные  $z$ . В частности, соотношение (3.9) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (3.6). Как следует из соотношения (3.9),  $\Gamma^{-1}(z)$  не имеет полюсов в плоскости  $z$ , то есть  $\Gamma(z)$  нигде не обращается в ноль.

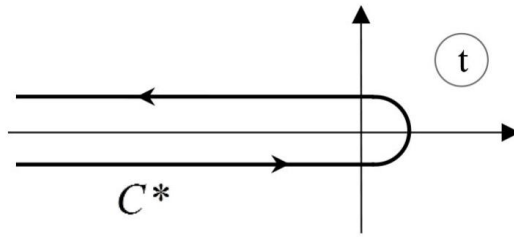


Рис. 3.3: Контур интегрирования вдоль отрицательной полуоси.

Задача 3.1.6. Получить интегральное представление

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t \quad (3.10)$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 3.3.

Задача 3.1.7. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z)$$

Задача 3.1.8. Найти  $|\Gamma(1/2 + ix)|$ , где  $x$  действительное число.

### 3.3.2 3.2 Функция Эйри

В данном разделе мы анализируем решения уравнения Эйри (Airy)

$$d^2 Y/dx^2 - xY = 0 \quad (3.11)$$

которое возникает в ряде физических приложений. Пожалуй, наиболее важным приложением уравнения Эйри является определение поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом. Решения уравнения (3.11) демонстрируют ряд универсальных особенностей этого поведения.

Уравнение Эйри (3.11) линейно по переменной  $x$ . Поэтому его можно эффективно решить методом Лапласа, смотри раздел 3.7.1, где обсуждается общее уравнение (3.93). Приведем здесь логику раздела 3.7.1 для частного случая уравнения (3.11). Запишем решение этого уравнения в виде контурного интеграла

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt) \quad (3.12)$$

где  $C$  - некоторый контур в комплексной плоскости  $t$ . Мы будем считать, что подынтегральное выражение достаточно быстро стремится к нулю на концах этого контура (которые могут быть и в бесконечности).

Подставим уравнение (3.11) в представление (3.12), используем соотношение  $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$  и производим интегрирование по частям по  $t$ , считая граничные члены равными нулю (что обеспечивается быстрым

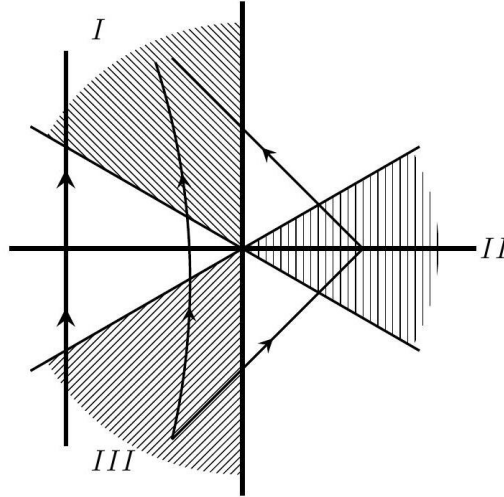


Рис. 3.4: Возможные контуры, по которым идет интегрирование в интегральном представлении функции Эйри.

стремлением подынтегрального выражения к нулю на концах контура интегрирования). В результате мы находим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -t^2 Z$$

решение которого имеет вид  $Z \propto \exp(-t^3/3)$ . Подставляя это выражение в (3.12), находим общее решение уравнения Эйри (3.11)

$$Y(x) \propto \int_C dt \exp(xt - t^3/3) \quad (3.13)$$

Контур  $C$  в представлении (3.13) должен начинаться и оканчиваться в областях, где подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур  $C$  должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение  $\exp(xt - t^3/3)$  в бесконечности определяется фактором  $-t^3$ , имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю:  $-\pi/6 < \text{Arg } t < \pi/6$ ,  $\pi/2 < \text{Arg } t < 5\pi/6$ ,  $7\pi/6 < \text{Arg } t < 3\pi/2$ , смотри рисунок 3.4, секторы I, II, III. Контур  $C$  должен начинаться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равна, очевидно, нулю. Таким образом, имеется два линейно независимых решения, что соответствует второму порядку уравнения Эйри.

Решению, которое остается конечным при  $x \rightarrow \pm\infty$  соответствует контур, идущий из сектора III в сектор

I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 3.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы  $\exp(xt - t^3/3)$  стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном

случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение  $t = iu$ , мы сводим этот интеграл к виду

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \cos(xu + u^3/3) \quad (3.14)$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (3.14) функция называется функцией Эйри первого рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях  $|x|$ . При больших отрицательных  $x$  в интеграле (3.14) имеется точка стационарной фазы  $u = \sqrt{|x|}$ , окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших  $|x|$ . Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 3.7.2), находим, используя выражение (3.102)

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.15)$$

При больших положительных  $x$  стационарная точка в интеграле (3.14) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp(tx - t^3/3)$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 3.7.2. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку  $t = -x^{1/2}$  (смотри вертикальную прямую на рисунке 3.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (3.105), находим

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \quad (3.16)$$

График зависимости функции Эйри от  $x$  приведен на рисунке 3.5. На этом же графике красным цветом приведены асимптотики (3.15, 3.16).

В качестве второго решения уравнения Эйри (3.11) выбирают обычно функцию

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du [\exp(xu - u^3/3) + \sin(xu + u^3/3)] \quad (3.17)$$

которая называется функцией Эйри второго рода. Выражение для  $\text{Bi}$  получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем

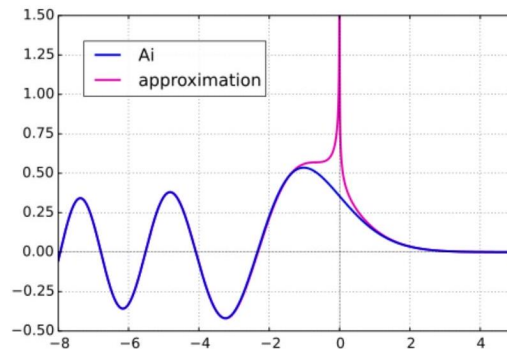


Рис. 3.5: Функция Эйри с асимптотиками.

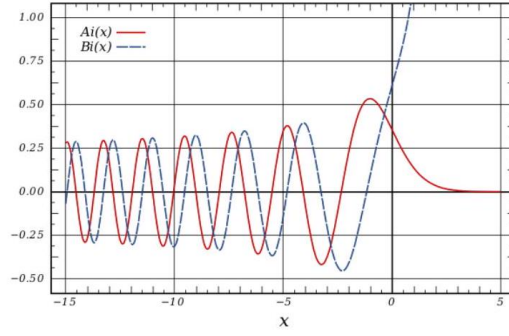


Рис. 3.6: Функции Эйри первого и второго рода.

вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (3.17). Коэффициент в (3.17) традиционен. Сравнение функций Эйри  $Ai$  и  $Bi$  проведено на рисунке 3.6.

Задача 3.2.1. Найти значения  $Ai(0)$ ,  $Ai'(0)$ ,  $Bi(0)$ ,  $Bi'(0)$ .

Асимптотическое поведение функции  $Bi$  при больших положительных значениях аргумента определяется выражением

$$Bi(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \quad (3.18)$$

Асимптотическое поведение функции  $Bi$  при больших отрицательных значениях аргумента определяется выражением

$$Bi(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} |x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.19)$$

Сравнение функции  $Bi(x)$  и ее асимптотик приведены на рисунке 3.7.

Задача 3.2.2. Получить асимптотическое поведение функции  $Bi(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

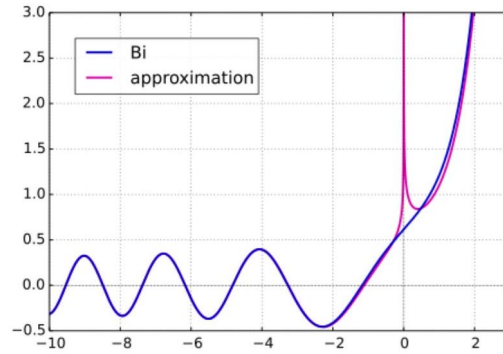


Рис. 3.7: Функция Эйри второго рода с асимптотиками.

Асимптотическое поведение функций Эйри  $Ai(x)$  и  $Bi(x)$  можно установить и методом WKБ, смотри раздел 3.7.3. Уравнение Эйри (3.11) является частным случаем уравнения (3.106), при этом  $U = x$ . Таким образом  $p = \sqrt{x}$  и  $S = (2/3)x^{3/2}$ . Таким образом, в соответствие с (3.107) при больших положительных  $x$  мы находим следующее поведение

$$x^{-1/4} \exp(\pm 2x^{3/2}/3)$$

Знак  $+$  относится к функции  $Bi(x)$ , смотри (3.18), а знак минус относится к функции  $Ai(x)$ , смотри (3.16). При больших отрицательных  $x$  мы находим следующее поведение

$$|x|^{-1/4} \exp(\pm 2i|x|^{3/2}/3)$$

Поскольку  $Ai(x)$  и  $Bi(x)$  являются действительными функциями, то в соответствие с (3.109) для них поведение при больших отрицательных  $x$  имеет вид

$$|x|^{-1/4} \cos(2|x|^{3/2}/3 + \varphi)$$

где  $\varphi$  - некоторая фаза. Это поведение соответствует асимптотикам (3.15) и (3.19).

Задача 3.2.3. Найти асимптотики решения уравнения  $d^2Y/dx^2 - x^3Y = 0$  при больших значениях  $|x|$ .

### 3.3.3 3.3 Функции Бесселя

Функции Бесселя удивительным образом возникают в самых различных задачах математической физики. Они естественным образом присутствуют в задачах теории поля, когда речь идет о зависящих от двух координат решениях волнового уравнения, описывающего, например, различные электромагнитные и акустические явления. Однако область применимости функций Бесселя отнюдь не ограничивается этими проблемами, они оказываются полезными в очень широком круге приложений, чем и определяется важность этих функций.

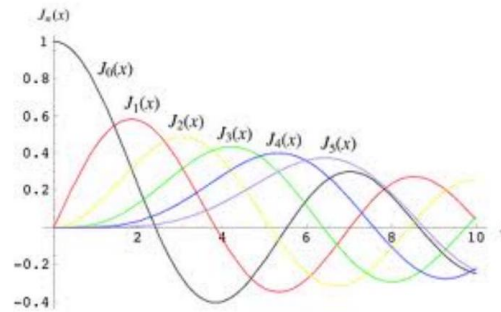


Рис. 3.8: Несколько первых функций Бесселя.

Решение волнового уравнения можно разложить по плоским волнам, зависимость поля от координат в плоской волне определяется фактором  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}$  - волновой вектор, а  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор. В двумерном случае  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Часто удобным бывает решать задачи в полярной системе координат  $r, \varphi$ , где  $r$  - расстояние от начала отсчета до точки наблюдения, а  $\varphi$  - полярный угол. При соответствующем выборе начала отсчета полярного угла  $\varphi$  скалярное произведение  $\mathbf{k}\mathbf{r} = rk \sin \varphi$ .

Функции Бесселя являются коэффициентами разложения  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  в ряд Фурье по угловым гармоникам:

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\varphi) \quad (3.20)$$

где  $z = kr$ . Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 3.8. Добавляя  $\pi$  к  $\varphi$ , находим

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(z) \exp(in\varphi)$$

Сравнивая это выражение с прямым разложением

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z) \exp(in\varphi)$$

мы заключаем, что  $J_{-n} = (-1)^n J_n$ .

Подставляя в выражение (3.20)  $t = e^{i\varphi}$ , находим ряд Лорана по  $t$

$$\exp \left[ \frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n \quad (3.21)$$

Здесь  $t$  может быть произвольным комплексным числом. Дифференцируем соотношение (3.21) по  $z$ , что дает

$$\frac{1}{2} (t - 1/t) \exp \left[ \frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z) t^n$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (3.22)$$

Дифференцируем соотношение (3.21) по  $t$ , что дает

$$\frac{z}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \exp \left[ \frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(z) t^{n-1}$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \quad (3.23)$$

Комбинируя (3.22) и (3.23), находим следующие рекуррентные соотношения

$$\frac{d}{dz} (z^n J_n) = z^n J_{n-1}, \quad J'_n + \frac{n}{z} J_n = J_{n-1} \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{J_n}{z^n} = -\frac{J_{n+1}}{z^n}, \quad J'_n - \frac{n}{z} J_n = -J_{n+1} \quad (3.25)$$

В частности,  $dJ_0/dz = -J_1$ .

Рекуррентное соотношение (3.24) можно переписать в следующем виде

$$z^{-2n+1} \frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^{-n+1} J_{n-1}(z)$$

Дифференцируя это соотношение по  $z$  и используя для преобразования правой части рекуррентное соотношение (3.25), находим замкнутое уравнение на  $J_n$

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2} J_n = 0 \quad (3.26)$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6).

Рассмотрим случай малых  $z$ ,  $z \ll 1$ . В этом случае третьим слагаемым в уравнении (3.26) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = 0 \quad (3.27)$$

которое имеет степенные решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ . Обратим внимание на причину, по которой уравнение (3.27) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании  $z \rightarrow Az$ , где  $A$  — произвольный фактор, все три слагаемых в



уравнении (3.27) преобразуются одинаковым образом, то есть уравнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (3.27), которые при преобразовании  $z \rightarrow Az$  переходят в себя с точностью до множителя, именно этим свойством обладают степенные решения.

Поскольку уравнение Бесселя (3.26) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (3.27), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$  определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (3.26) при малых  $z$ . Обратим внимание на то, что при  $n > 0$  решение  $g_2$  сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при  $z \rightarrow 0$ . Поэтому, если функция  $g$  регулярна в нуле, то ее поведение определяется  $g_1$ , то есть  $g \propto z^n$  при малых  $z$ . Это поведение с точностью до множителя определяет решение уравнения Бесселя (3.26). Такими решениями являются функции Бесселя  $J_n(z)$ , первый член разложения которой по  $z$  определяется (3.29).

Заметим, что при  $n = 0$  оба решения уравнения (3.27),  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ , совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (3.27), в котором надо положить  $n = 0$ . Это уравнение является уравнением первого порядка для  $dg/dz$ , решением которого, очевидно, является  $dg/dz = C_1/z$ , где  $C_1$  - произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение  $g = C_2 + C_1 \ln z$ , где  $C_2$  - вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при  $n = 0$  имеется два решения уравнения (3.27), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно. Решение уравнения (3.27) при  $n = 0$ , которое является регулярным в нуле, пропорционально  $J_0(z)$ .

Выписывая обратное преобразование Фурье к (3.20), находим следующее представление функций Бесселя

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz \sin \theta - in\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta) \end{aligned} \quad (3.28)$$

которое называется представлением Парсеваля. При получении второго равенства в (3.28) мы воспользовались тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю из-за того, что мнимая часть  $\exp(iz \sin \theta - in\theta)$  антисимметрична по  $\theta$ , и что косинус является четной функцией. Отметим, что представление (3.28) автоматически приводит к соотношению  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ .

Задача 3.3.1. Доказать правила дифференцирования (3.22), исходя из соотношения (3.28).

### Задача 3.3.2. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z)$$

### Задача 3.3.3. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z)$$

### Задача 3.3.4. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}$$

Раскладывая правую часть соотношения (3.28) по  $z$ , мы заключаем что при  $n > 0$  первый член разложения  $J_n(z)$  по  $z$  равен

$$\frac{z^n}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i \sin \theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!} \quad (3.29)$$

в соответствии с анализом, проведенным при малых  $z$ . Следующие члены разложения функции Бесселя по  $z$  можно найти из того же выражения (3.28). В результате мы получаем следующий ряд Тейлора для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \quad (3.30)$$

Отметим, что это ряд по целым степеням  $z$ , который содержит только четные или только нечетные степени  $z$ , в зависимости от четности  $n$ .

Задача 3.3.5. Построить разложение в ряд (3.30), исходя из соотношения (3.28).

Ряд (3.30) абсолютно сходится при всех действительных  $z$ , поскольку отношение коэффициентов при степенях  $(z/2)^{n+2m+2}$  и  $(z/2)^{n+2m}$  равно  $-[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]^{-1}$ , то есть стремится к нулю с ростом  $m$ . Таким образом, ряд (3.30) определяет функцию Бесселя при всех действительных  $z$ . Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением  $J_n(z)$  с действительных  $z$ . Поскольку ряд (3.30) является абсолютно сходящимся, то функция  $J_n(z)$  не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного  $z$ . В то же время бесконечность является существенной особой точкой функции Бесселя  $J_n(z)$ .

Соотношение (3.28) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях  $z$ . В этом случае работает приближение стационарной фазы, смотри раздел 3.7.2. Положение точки стационарной фазы получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по  $\theta$  в выражении (3.28), что дает  $z \cos \theta_0 = n$ . Таким образом, в силу большого значения  $z$  стационарная фаза близка к  $\pi/2$  (что предполагает неравенство  $z \gg n$ ). Используя выражение для приближения стационарной фазы (3.102), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.31)$$

Таким образом,  $J_n(z)$  осциллирует с амплитудой, которая стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ .

Задача 3.3.6. Найти асимптотическое выражение функции Бесселя при больших по абсолютной величине отрицательных  $z$ .

В силу уравнения (3.26) функция  $J_n(qx)$  удовлетворяет уравнению

$$\hat{L} J_n(qx) = -q^2 J_n(qx) \quad (3.32)$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2} \quad (3.33)$$

Таким образом, функция  $J_n(qx)$  является собственной функцией дифференциального оператора (3.33), который относится к типу операторов Штурма-Лиувилля (2.6), с собственным значением  $-q^2$ . Отсюда следует условие ортогональности (2.68) с весом  $\rho = x$  для разных  $q$ . В данном случае речь идет о непрерывном спектре ( $q$  может

принимать непрерывный ряд значений), поэтому функции должны быть нормированы на  $\delta$ -функцию. Соответствующее соотношение имеет вид

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) = k^{-1} \delta(k - q) \quad (3.34)$$

где  $k > 0, q > 0$ .

Приведем доказательство соотношения (3.34). Вклад в коэффициент при  $\delta$ -функции набирается на больших значениях аргумента, поэтому в интеграле (3.34) мы можем использовать асимптотическое выражение (3.31). В результате находим

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) \rightarrow \int dx \frac{2}{\pi \sqrt{kq}} \cos(kx) \cos(qx).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(kz) \cos(qz) = \pi \delta(k - q)$$

где  $q$  и  $k$  считаются положительными, и учитывая, что интеграл по  $x$  идет только по положительным значениям, мы и приходим к соотношению (3.34).

Задача 3.3.7. Доказать соотношение (3.34), исходя из представления (3.20).

Соотношение (3.34) позволяет сформулировать разложение функций, заданных при положительных значениях аргумента, в интеграл по функциям Бесселя, аналогичное разложению в интеграл Фурье. Прямое и обратное преобразования функции  $f(x)$  имеют вид

$$\check{f}(q) = \int_0^\infty dx x J_n(qx) f(x) \quad (3.35)$$

$$f(x) = \int_0^\infty dq q J_n(qx) \check{f}(q) \quad (3.36)$$

Выбор  $n$  в этом соотношении диктуется условиями решаемой задачи.

Задача 3.3.8. Разложить в интеграл (3.36) с  $n = 0$  функцию  $f(x) = \exp(-p^2 x^2)$

Изучим разложение по функциям Бесселя на конечном интервале. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных соотношений. Из (3.32, 3.33) следует

$$\begin{aligned} & J_n(qx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(kx) + J_n(qx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(kx) \\ & - J_n(kx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(qx) - J_n(kx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(qx) \\ & = (q^2 - k^2) J_n(qx) J_n(kx) \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение с весом  $x$  на интервале  $0 < x < z$ , находим

$$\begin{aligned} & J_n(qz) k z J_n'(kz) - J_n(kz) q z J_n'(qz) \\ & = (q^2 - k^2) \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx) \end{aligned}$$

Используя рекуррентное соотношение (3.25), находим

$$\begin{aligned} & \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx) \\ & = \frac{J_n(kz) q z J_{n+1}(qz) - J_n(qz) k z J_{n+1}(kz)}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Устремляя здесь  $k$  к  $q$  и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, находим

$$\int_0^z dx x [J_n(kx)]^2 = \frac{z^2}{2} (J_{n+1}^2 + J_n^2) - \frac{nz}{k} J_{n+1} J_n \quad (3.38)$$

где аргументы функций Бесселя равны  $kz$ , и мы использовали рекуррентные соотношения (3.24, 3.25)

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения (3.32) на интервале  $0 < x < 1$  на классе функций, обращающихся в ноль на конце интервала, при  $x = 1$ . Это условие приводит к дискретному набору собственных чисел  $q = \gamma_k$ , для которых  $J_n(\gamma_k) = 0$ . Набор  $\gamma_k$  зависит от индекса функции Бесселя  $n$ . Величины  $\gamma_k$  неограниченно растут с увеличением номера  $k$ .

Задача 3.3.9. Найти значения  $\gamma_k$  для больших значений этого параметра.

В силу общих свойств задач на собственные значения, смотри раздел 2.4.1, формула (2.68), находим свойство ортогональности

$$\int_0^1 dx x J_n(\gamma_k x) J_n(\gamma_j x) = 0 \quad (3.39)$$

если  $\gamma_k \neq \gamma_j$ . Действительно, левая часть соотношения (3.32) представляет собой оператор Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = 1/x$ , поэтому в силу (2.67) находим  $\rho = x$ . Подставляя в соотношении (3.38)  $z = 1$ , получаем

$$\int_0^1 dx x [J_n(\gamma_k x)]^2 = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k) \quad (3.40)$$

Задача 3.3.10. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.39).

Соотношения (3.39, 3.40) позволяют сформулировать правила разложения функции  $f(x)$ , заданной на интервале  $0 < x < 1$ , по набору функций  $J_n(\gamma_k x)$ :

$$f(x) = \sum_k f_k J_n(\gamma_k x) \quad (3.42)$$

$$f_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(\gamma_k)} \int_0^1 dx x f(x) J_n(\gamma_k x)$$

Это разложение является аналогом разложения в ряд Фурье.

Задача 3.3.11. Разложить функцию  $J_1(x) - xJ_1(1)$  на интервале  $(0, 1)$  в ряд (3.41) по  $J_1(\gamma_k x)$ .

### 3.3.4 3.4 Полиномы Лежандра

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого  $U$  зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда  $1/R$  равен нулю,  $\nabla^2(1/R) = 0$ . Здесь  $R$  - расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку  $(0, 0, 1)$  и перейдем к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . В этом случае  $R = \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ . Условие же  $\nabla^2 R^{-1} = 0$  записывается в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R^{-1} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Здесь отсутствует производные по  $\varphi$ , поскольку  $R$  от этой переменной не зависит. Переходя к переменной  $\mu = \cos \theta$ , которая меняется от  $-1$  до  $+1$ , мы находим

$$(r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r) R^{-1} + \partial_\mu [(1 - \mu^2) \partial_\mu R^{-1}] = 0 \quad (3.43)$$

Полиномы Лежандра  $P_n(\mu)$  вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора величины  $R^{-1}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n \quad (3.44)$$

Поскольку особенности левой части (3.44) по  $r$  (точки ветвления)  $\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$  лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в правой части (3.44) равен единице, то есть он сходится при  $r < 1$ . Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2} - 2r^{-1}\mu + 1}}$$

Это позволяет записать эквивалентное (3.44) разложение по отрицательным степеням  $r$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n} \quad (3.45)$$

Этот ряд сходится при  $r > 1$ .

Как следует из (3.44) или (3.45), функция  $P_n(\mu)$  является полиномом  $n$ -го порядка, симметричным по  $\mu$  при четных  $n$  и антисимметричным по  $\mu$  при нечетных  $n$ . Отметим также равенство  $P_n(1) = 1$ . Оно непосредственно следует из того, что при  $\mu = 1$   $R = 1 - r$ ,

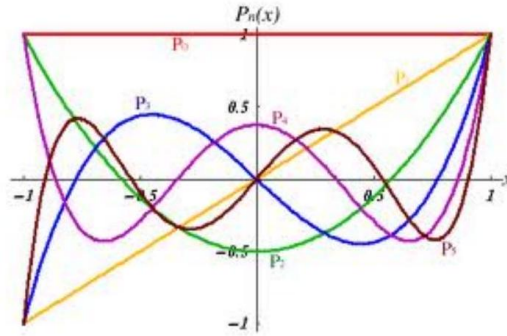


Рис. 3.9: Несколько первых полиномов Лежандра.

а  $(1 - r)^{-1} = \sum r^n$ . Аналогично получается равенство  $P_n(-1) = (-1)^n$ .

Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением  $R^{-1}$  в соответствии с (3.44) или (3.45). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) \quad (3.46)$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 3.9, где они изображены на интервале  $-1 < \mu < 1$ . В силу антисимметрии полинома для нечетного индекса  $P_{2n+1}(0) = 0$ .

Задача 3.4.1. Найти значение  $P_{2n}(0)$ .

Подставляя правую часть соотношения (3.44) вместо  $R^{-1}$  в уравнение (3.43), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n \right] + n(n+1)P_n = 0 \quad (3.47)$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням  $r$ . В терминах угла  $\theta$ ,  $\mu = \cos \theta$ , уравнение (3.47) переписывается в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n + \cot \theta \frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0 \quad (3.48)$$

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0 \quad (3.49)$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu(2r\partial_r + 1) + (r^2\partial_r + r) \quad (3.50)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_1$  к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим следующее рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0 \quad (3.51)$$

Это соотношение позволяет явно находить  $P_{n+1}(\mu)$ , если известны выражения для  $P_{n-1}(\mu)$  и  $P_n(\mu)$ . Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (3.51), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

**Задача 3.4.2.** Найти выражение для  $P_3(\mu)$ , воспользовавшись рекуррентным соотношением (3.51).

**Задача 3.4.3.** Доказать соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) \\ &= (n+1) \frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x} \end{aligned}$$

Указание: действовать по индукции с учетом рекуррентного соотношения (3.51).

Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0 \quad (3.52)$$

$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1 - \mu/r)\partial_\mu \quad (3.53)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_2$  к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим соотношение

$$nP_n - \mu \frac{d}{d\mu} P_n + \frac{d}{d\mu} P_{n-1} = 0$$

которое переписывается в виде

$$(n+1)P_n = \frac{d}{d\mu} (\mu P_n) - \frac{d}{d\mu} P_{n-1} \quad (3.54)$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \quad (3.55)$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (3.51): если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ , то в силу (3.51) оно справедливо и для  $P_{n+1}$ . Кроме того, выражение (3.55) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (3.46), что завершает доказательство.

Задача 3.4.4. Показать, что в силу (3.51) соотношение (3.55) справедливо для  $P_{n+1}$ , если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ .

Задача 3.4.5. Показать, что в силу (3.54) соотношение (3.55) справедливо для  $P_n$ , если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$ .

Задача 3.4.6. Найти значение  $P_{2n}(0)$ , исходя из (3.55).

Соотношение (3.54) означает, что член  $n(n+1)P_n$  в уравнении (3.47) записывается в виде полной производной. Беря первообразную от получившегося выражения, находим

$$(\mu^2 - 1) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = n [\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)] \quad (3.56)$$

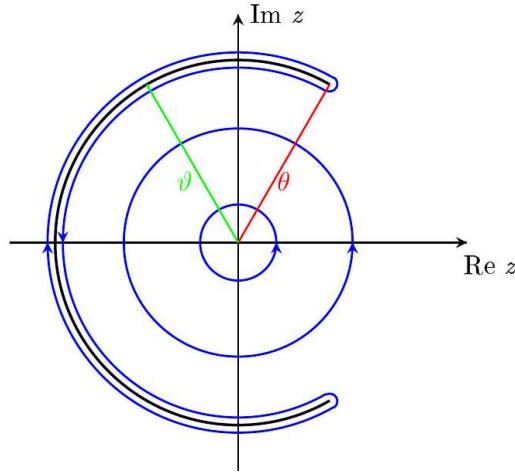


Рис. 3.10: Преобразование контура интегрирования в интегральном представлении полиномов Лежандра.

Константа интегрирования здесь равна нулю, поскольку при  $\mu = 1$  обе части соотношения (3.56) обращаются в ноль. Соотношения (3.56) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

Задача 3.4.7. Докажите, что если соотношение (3.56) справедливо для  $n - 1$ , то в силу соотношений (3.51, 3.54) оно справедливо и для  $n$ .

Задача 3.4.8. Вывести соотношения (3.56), исходя из соотношения (3.55).

Задача 3.4.9. Проверить выполнение уравнения (3.47) для полиномов Лежандра, исходя из формул дифференцирования (3.54, 3.56).

Соотношение (3.44) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (3.44)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\mu + z^2}}$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по  $z$  при  $z_{\pm} = \mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$ , которые лежат на единичной окружности, если  $\mu$  - действительное

число и  $|\mu| < 1$ . Эти точки ветвления расположены в точках  $z_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, разрез функции  $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$  можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости  $z$ , которая определяется условиями  $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$ , где  $\theta$  предполагается лежащим в интервале  $0 < \theta < \pi$ , а  $\vartheta$  - аргумент  $z$ . Это построение представлено на рисунке 3.10, где разрез показан черной дугой.

Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем "вывернем" через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции  $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ . Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 3.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции  $z^{-n-1}(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ , которая имеет противоположные знаки по берегам разреза. Мы можем подставить на разрезе  $z = e^{i\vartheta}$ , тогда  $1 - 2z\mu + z^2 = 2e^{i\vartheta}(\cos \theta - \cos \vartheta)$ . Преобразуем интегрирование по контуру к интегрированию по углу  $dz = ie^{i\vartheta}d\vartheta$ . В результате получаем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} d\vartheta \frac{\sin[(n + 1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \vartheta)}} \quad (3.57)$$

где синус возник в результате суммирования вкладов от верхней и от нижней полудуг.

Интегральное представление (3.57) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших  $n$ . В этом случае в силу быстрой осцилляции  $\sin[(n + 1/2)\vartheta]$  главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (3.57). Подставляя  $\vartheta = \theta + x$ , раскладывая по  $x$  подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(n + 1/2)(\theta + x)]}{\sqrt{2 \sin \theta x}} \quad (3.58)$$

Вычисляя здесь интеграл по  $x$ , мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2 \cos[(n + 1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n + 1)\pi \sin \theta}} \quad (3.59)$$

Задача 3.4.10. Получить выражение (3.59) из (3.58).

Выражение (3.59) можно получить также методом WKБ (смотри раздел 3.7.3), который работает как раз при больших  $n$ . Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (3.48) в терминах переменной  $t = \ln \tan(\theta)$ . Тогда оно принимает вид уравнения (3.106):

$$\frac{d^2 P_n}{dt^2} + \frac{n(n + 1)}{\cosh^2 t} P_n = 0 \quad (3.60)$$

Таким образом

$$p = i(n + 1/2)/\cosh t = i(n + 1/2) \sin \theta \\ S = \int dt p(t) = i(n + 1/2)\theta$$

где мы подставили  $\sqrt{n(n + 1)} \approx n + 1/2$ . При больших  $n$  выполняется неравенство  $dp/dt \ll p^2$ , что оправдывает применение метода WKБ. Суммируя теперь два члена (3.107), мы и получаем выражение (3.59). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (3.47), регулярное в точке  $\mu = 1$ , когда оно разлагается в ряд Тейлора по  $x = \mu - 1$ . Перепишем уравнение (3.47) в терминах переменной  $x$ :



$$(2x + x^2) P'' + 2(1 + x)P' - n(n + 1)P = 0$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ . Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора  $P$  по  $x$ ,  $P = \sum_k p_k x^k$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k + 1)^2 p_{k+1} = [n(n + 1) - k(k + 1)]p_k$$

Таким образом, при целом  $n$  цепочка соотношений обрывается на  $k = n$ , и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с  $P_n(\mu)$ . Если же  $n$  не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени  $x$ . В пределе больших  $k$  мы имеем  $p_{k+1} = -(1/2)p_k$ . Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при  $x = -2$ , то есть  $\mu = -1$ . Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (3.47), регулярные как в точке  $\mu = 1$ , так и в точке  $\mu = -1$ .

Как следует из уравнения (3.47), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \quad (3.61)$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале  $-1 < \mu < 1$  и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (3.61), то есть свойство (2.60), смотри раздел 2.4.1, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (2.61):

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu) P_l(\mu) = 0 \quad (3.62)$$

если  $n \neq l$ .

Задача 3.4.11. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.62). Указание: воспользоваться представлением (3.55).

Соотношение (3.62) можно получить и из уравнения (3.48), в соответствии с которым полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = \cot \theta$  и  $U = 0$ . В этом случае в соответствии с (2.67)  $\rho = \sin \theta$ . Интервал же интегрирования по углу  $\theta$  распространяется от 0 до  $\pi$ . Условие (2.61) переписывается в виде  $\int d\mu f_n f_m = 0$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, в терминах переменной  $\mu$  полиномы Лежандра ортогональны с весом единица на интервале  $-1 < \mu < 1$ , что и зафиксировано соотношением (3.62).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n + 1} \quad (3.63)$$

Общее соотношение (2.64) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (3.61), конечных на интервале  $(-1, +1)$ , удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1/2) P_k(x) P_k(y) = \delta(x - y) \quad (3.64)$$

Задача 3.4.12. Получить выражение для нормировочного множителя (3.63). Указание: воспользоваться соотношением (3.44).

Задача 3.4.13. Прямо получить соотношение (3.64). Указание: воспользоваться результатом задачи (3.4.3).

Задача 3.4.14. Найти  $\int_{-1}^1 dx x^2 P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$ .

Задача 3.4.15. Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  монома  $x^k$ .

### 3.3.5 3.5 Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку  $(-1, 1)$ . Кроме того, в ряде случаев разложение функции по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора.

Полиномы Эрмита определяются, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора производящей функции:

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad (3.65)$$

где  $n$  называется индексом полинома Эрмита. Легко понять, что  $H_n(x)$  является полиномом  $n$ -ой степени, поскольку наибольшая степень  $x$  при  $t^n$  в разложении производящей функции  $\exp(-t^2 + 2tx)$  в ряд Тейлора получается при разложении  $\exp(2tx)$ . Производящая функция  $\exp(-t^2 + 2tx)$  инвариантна относительно преобразования  $t, x \rightarrow -t, -x$ . При этом преобразовании в правой части изменяет знак аргумент  $H_n$ , а  $t^n$  заменяется на  $(-1)^n t^n$ . Поскольку разложение должно остаться прежним, мы находим  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ . Другими словами полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями  $x$ , а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями  $x$ .

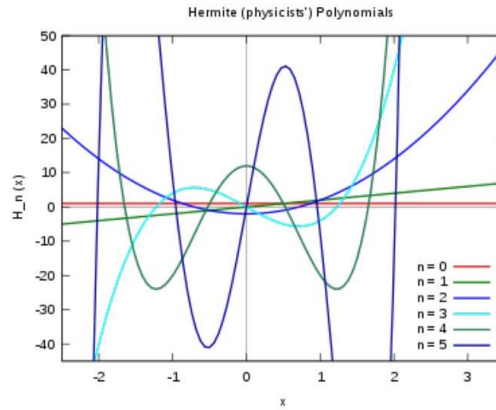


Рис. 3.11: Несколько первых полиномов Эрмита.

Раскладывая  $\exp(-t^2 + 2tx)$  до второго порядка по  $t$ , находим выражения для первых трех полиномов Эрмита

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (3.66)$$

Следующие полиномы Эрмита могут быть найдены, если разложить  $\exp(-t^2 + 2tx)$  до следующих порядков по  $t$ . Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке 3.11.

Полагая в выражении (3.65)  $x = 0$  и раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n - 1)!! \quad (3.67)$$

где  $(2n - 1)!! \equiv (2n - 1)(2n - 3) \dots$ . Далее, при малых  $x$  справедливо соотношение  $\exp(-t^2 + 2tx) \approx \exp(-t^2)(1 + 2tx)$ . Снова раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n + 1)!! \quad (3.68)$$

Дифференцируя соотношение (3.65) по  $x$  и приравнявая коэффициенты при степенях  $t$  в получившихся рядах, мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x) \quad (3.69)$$

Далее, беря производную по  $t$  от соотношения (3.65) и приравнявая коэффициенты при степенях  $t$  в получившихся рядах, мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (3.70)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита, стартуя с первых двух.

Соотношение (3.69) приводит нас к выводу, что функция  $H_n(x)$  имеет ровно  $n$  нулей при действительном  $x$ .

Другими словами, все корни уравнения  $H_n(x) = 0$  действительны. Проведем доказательство по индукции. Если  $H_n(x)$  имеет  $n$  нулей, то в соответствии с (3.69) функция  $H_{n+1}(x)$  имеет  $n$  экстремумов. Между ними лежит  $n - 1$  нулей функции  $H_{n+1}(x)$ . Еще два нуля  $H_{n+1}(x)$  лежат вне крайних экстремумов  $H_{n+1}(x)$ , поскольку на больших  $x$  в полиноме доминирует член с наивысшей степенью  $x$ , то есть на больших  $x$  функция  $H_{n+1}(x)$  монотонно стремится к  $\infty$  или  $-\infty$ .

Выражая в соотношении (3.69)  $H_{n-1}$  в соответствии с (3.70), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n = -H_{n+1} \quad (3.71)$$

Это соотношение легко позволяет доказать по индукции выражение

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \quad (3.72)$$

Соотношение (3.72) очевидно, выполняется при  $n = 0$ , и воспроизводится при применении оператора в левой части (3.71), поскольку  $(d/dx - 2x)[\exp(x^2) A] = \exp(x^2) dA/dx$  для произвольной функции  $A(x)$ . Соотношение (3.72) еще раз показывает, что  $H_n$  является полиномом степени  $n$ .

Задача 3.5.1. Доказать, что старший член разложения  $H_n(x)$  имеет вид  $2^n x^n$ .

Задача 3.5.2. Получить соотношение (3.65) из (3.72).

Легко проверить, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}\right) \exp(-t^2 + 2tx) = 0$$

Применяя приведенный дифференциальный оператор к правой части соотношения (3.65) и приравнявая результат к нулю, мы находим замкнутое дифференциальное уравнение на полином Эрмита  $n$ -го порядка

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0 \quad (3.73)$$

Отметим, что оператор в (3.73) относится к типу Штурма-Лиувилля (2.6). Уравнение (3.73) инвариантно относительно замены  $x \rightarrow -x$  и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанным выше о четности полиномов Эрмита. Уравнение (3.73) может быть получено и иначе. Подставляем в правую часть соотношения (3.69)  $H_{n-1}$ , выраженное в соответствии с (3.70) и дифференцируем получившееся соотношение по  $x$ . Выражая затем из (3.69)  $dH_{n+1}/dx$ , находим уравнение (3.73).

Четное решение уравнения (3.73) может быть разложено в ряд по четным степеням  $x$ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.73) и приравнявая коэффициенты при степенях  $x$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения  $u$  в ряд по  $x$ . При четных  $n$  ряд по  $x$  обрывается на  $k = n/2$ , и мы имеем дело с конечным полиномом, пропорциональным  $H_n$  с четным индексом. При нечетных  $n$  мы имеем дело с бесконечным рядом, который сходится при всех (комплексных)  $x$  поскольку  $a_{k+1} \approx a_k/k$  при больших  $k$ . Этот ряд представляет второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при нечетных  $n$ . Аналогичным образом исследуется нечетное решение уравнения (3.73), разложение которого в ряд по степеням  $x$  пропорционально  $H_n(x)$  для нечетных  $n$  и дает второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при четных  $n$ .

Чтобы получить интегральное представление для полиномов Эрмита, используем соотношение

$$\exp(-\xi^2 + 2\xi x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \exp[-t^2 + 2\xi(x + it)]$$

Раскладывая обе части этого соотношения в ряд по  $\xi$ , находим

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x + it)^n \exp(-t^2) \quad (3.74)$$

Представляем подынтегральное выражение в соотношении (3.74) в виде  $\exp[n \ln(x + it) - t^2]$ . Для больших  $n$  можно использовать метод перевала, мы находим две перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ . Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через эти перевальные точки и суммируя соответствующие перевальные вклады, находим

$$H_n(x) \approx \sqrt{2}(2n/e)^{n/2} \exp(x^2/2) \cos(\sqrt{2n}x - \pi n/2) \quad (3.75)$$

справедливое при  $n \gg x^2, 1$ .

Обращаем внимание на осциллирующий характер выражения (3.75). Осцилляции возникают, когда перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$  имеют противоположные действительные части, что и обеспечивает условие  $n \gg x^2, 1$ . В обратном предельном случае  $x^2 \gg n$  обе перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$  лежат на мнимой оси. В этом случае контур интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через ближайшую к действительной оси перевальную точку. (Отметим, что попытка провести контур через вторую перевальную точку некорректна, поскольку эта

перевальная точка соответствует минимуму, а не максимуму подынтегрального выражения.) Вычисление перевального значения интеграла приводит к поведению  $H_n \propto x^n$ , то есть на больших  $x \gg \sqrt{n}$  главный вклад в  $H_n$  определяется старшим членом полинома, как и следовало ожидать. Отметим, что на интервале  $-\sqrt{n} < x < \sqrt{n}$ , где работает приближение (3.75), осцилляции дают  $\sim n$  нулей функции  $H_n$ , в соответствии с общими свойствами  $H_n$ .

Уравнение (3.73) для  $H_n$  может быть рассмотрено, как уравнение на собственные значения с оператором Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = -2x, U = 0$ . Отсюда следует условие ортогональности (2.68)

$$\int dx \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = 0 \quad (3.76)$$

где в соответствие с (2.67)  $\rho = \exp(-x^2)$ , а интегрирование идет вдоль действительной оси. Найдем теперь константы  $A_n$ , фигурирующие в выражении (2.69):

$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (3.77)$$

**Задача 3.5.3.** Доказать соотношение (3.77). Указание: составить комбинацию  $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$ , выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (3.65) и проинтегрировать получившееся равенство по  $x$  с весом  $\exp(-x^2)$ . На этом пути получатся и соотношения ортогональности (3.76).

Таким образом, любую функцию  $f(x)$ , заданную на действительных  $x$  и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при  $x \rightarrow \pm\infty$ , можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \quad (3.79)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) f(x)$$

Это разложение представляет собой модификацию разложения в ряд Тейлора. Отметим, что условие полноты (2.70) имеет вид

$$\sum_n \frac{\exp(-x^2/2 - y^2/2)}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(y) = \delta(x - y) \quad (3.80)$$

**Задача 3.5.4.** Доказать непосредственно условие полноты (3.80).

**Задача 3.5.5.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_{2n}(xy)$$

**Задача 3.5.6.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-(x - y)^2] H_n(x)$$

**Задача 3.5.7.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp(-x^2) H_{2n-1}(xy)$$

**Задача 3.5.8.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-x^2) H_n(xy)$$

Примечание: Ответ выражается через полиномы Лежандра.

Задача 3.5.9. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x)$$

Задача 3.5.10. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \cosh(\beta x) H_{2n}(x)$$

Задача 3.5.11. Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}\right) (2x)^n$$

Указание: просуммировать по  $n$  правую часть этого соотношения с весом  $t^n/n!$  и показать, что эта сумма сводится к левой части соотношения (3.65).

### 3.3.6 3.6 Вырожденная гипергеометрическая функция

Вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0 \quad (3.81)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  - произвольные параметры. Уравнение (3.81) переписывается в виде  $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$ , то есть мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6). Функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  характеризуется тем, что она аналитична в точке  $z = 0$  и имеет единичное значение в нуле:  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ .

Уравнение (3.81) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = 0$ . Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (3.81) с учетом условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (3.82)$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых  $\alpha$  ряд (3.82) обрывается и  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. При больших  $n$  отношение коэффициентов при степенях  $z^n$  и  $z^{n-1}$  в разложении (3.82) стремится к  $1/n$ . Поэтому ряд (3.82) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ .

При неотрицательных целых  $\alpha$  ряд (3.82) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n, 1/2, x^2) \\ H_{2n+1}(x) &= 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x \Phi(-n, 3/2, x^2) \end{aligned} \quad (3.84)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная

гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Второе независимое решение можно найти, заметив, что если удовлетворяет уравнению (3.81), то  $z^{\gamma-1}u$  также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами  $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$ ,  $\gamma' = 2 - \gamma$ . Таким образом, общим решением уравнения (3.81) является

$$u = c_1 \Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \quad (3.85)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - произвольные константы. При  $\gamma = 1$  оба члена в сумме (3.85) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением, в котором переменная  $z$  входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 3.7.1. Составляем функции  $P$  и  $Q$  в соответствии с выражениями (3.96):  $P = \gamma t - \alpha$ ,  $Q = t(t - 1)$ , и далее находим  $Z = t^{\alpha-1}(t - 1)^{\gamma-\alpha-1}$ . Таким образом, решение уравнения (3.81) может быть записано в виде

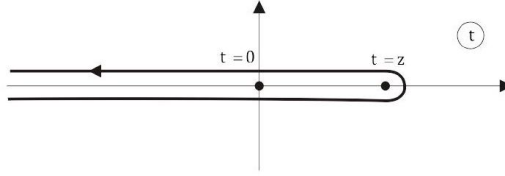


Рис. 3.12: Контур интегрирования в интегральном представлении вырожденной гипергеометрической функции.

контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1}$$

Применяя аналогичную процедуру к  $z^{\gamma-1}u$ , мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha}$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования  $tz \rightarrow t$ , мы получаем

$$u = \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t-z)^{-\alpha} \quad (3.86)$$

Контур  $C$  в интеграле (3.86) естественно выбрать так, чтобы он приходил из  $-\infty$  и возвращался в  $-\infty$  (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при  $t = 0$  и  $t = z$ ), тогда произведение  $ZQ \exp(t)$  на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (3.86) не имеет особенностей при  $z = 0$ , если контур интегрирования "охватывает" обе особенности. Выберем контур  $C$ , который приходит "снизу" из  $-\infty$  огибает особенности "справа" и возвращается в  $-\infty$  "сверху", смотри рисунок 3.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Мы считаем, что разрезы функций  $t^{\alpha-\gamma}$  и  $(t-z)^{-\alpha}$  идут в  $-\infty$ , а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. При  $z = 0$  контур интегрирования превращается в  $C^*$ , изображенный на рисунке 3.3, при этом возникает обратная Гамма-функция, смотри (3.10). Вспоминая теперь, что  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t-z)^{-\alpha} \quad (3.87)$$

При целых отрицательных значениях  $\gamma$  ряд (3.82) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у  $\Gamma(\gamma)$  в соотношении (3.87). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (3.87) остается конечным и при целых отрицательных значениях  $\gamma$ . Поэтому  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ , как функция  $\gamma$ , имеет простые полюса при  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

Производя в равенстве (3.87) замену  $t \rightarrow t + z$ , мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z) \quad (3.88)$$

Дифференцирование по  $z$  соотношения (3.87) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\frac{d}{dz} \Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = \\ \Phi(\alpha + 1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z) \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = \\ (\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma \Phi(\alpha, \gamma, z) \end{aligned} \quad (3.91)$$

При больших положительных  $z$  основной вклад в контурный интеграл в (3.87) определяется окрестностью особой точки  $t = z$ . Делая замену переменных  $t = z + \zeta$  и пренебрегая зависимостью от  $\zeta$  в  $t^{\alpha-\gamma}$ , мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int_{C^*} d\zeta e^{\zeta} \zeta^{-\alpha}$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 3.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \quad (3.92)$$

Асимптотическое выражение (3.92) справедливо и в комплексной области для  $z$  с большой положительной действительной частью.

Задача 3.6.1. Доказать, что  $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$ .

Задача 3.6.2. Доказать соотношения (3.89, 3.90, 3.91).

Задача 3.6.3. Найти поведение вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Выполняется ли при малых  $\gamma$  соотношение  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ ?

Задача 3.6.4. Найти значение  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при целых положительных  $\alpha$  и  $\gamma, \alpha \geq \gamma$ . Проверить выполнение условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ . Указание: в этом случае интеграл (3.87) сводится к вычету в точке  $t = z$ .

Задача 3.6.5. Найти второе независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения (3.81)  $n$  и  $\gamma = 1$ . Указание: в соответствии с (3.85) при произвольном  $\gamma$  второе независимое решение можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma} [z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)]$$

здесь надо перейти к пределу  $\gamma \rightarrow 1$ .



### 3.3.7 3.7 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

#### 3.3.8 3.7.1 Метод Лапласа

Метод Лапласа позволяет получать интегральные представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений для функции  $Y(x)$ , линейных по переменной  $x$ :

$$\sum_{m=0}^N (a_m + b_m x) \frac{d^m Y}{dx^m} = 0 \quad (3.93)$$

Это интегральное представление имеет вид

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt) \quad (3.94)$$

где  $C$  - некоторый контур в комплексной плоскости  $t$ . Подставляя уравнение (3.93) в представление (3.94), используя соотношение  $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$  и предполагая, что в интеграле (3.94) можно произвести интегрирование по частям по  $t$  без граничных членов, мы находим уравнение

$$\frac{d}{dt}(QZ) = PZ \quad (3.95)$$

$$P(t) = \sum_{m=0}^N a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^N b_m t^m \quad (3.96)$$

Решением уравнения (3.95) является

$$Z = \frac{1}{Q} \exp \left( \int dt P/Q \right) \quad (3.97)$$

где в показателе экспоненты стоит первообразная от  $P/Q$  (определенная с точностью до константы). Поскольку  $P$  и  $Q$  являются полиномами по  $t$ , эту первообразную можно выразить через элементарные функции.

Выясним теперь условия, при которых возможно упомянутое выше интегрирование по частям. Для этого произведение  $ZQ \exp(xt)$  должно иметь одно и то же значение на концах контура  $C$  (который может быть как замкнутым, так и незамкнутым). Наиболее естественным выбором контура  $C$  является контур, который идет вдоль одного из направлений из бесконечности, вдоль которого произведение  $ZQ \exp(xt)$  стремится к нулю, и возвращается в бесконечность вдоль другого направления так, чтобы вдоль этого направления произведение  $ZQ \exp(xt)$  также стремилось к нулю. Число таких направлений растет с увеличением порядка уравнения  $N$ , что и обеспечивает необходимое число независимых решений уравнения (3.93), которые получаются из выражения (3.97) при различных выборах контура интегрирования  $C$ .

Задача 3.7.1. Найти методом Лапласа решение уравнения  $(d/dx + x)Y = 0$ .

### 3.3.9 3.7.2 Метод перевала и стационарной фазы

Метод перевала применим к интегралам вида

$$g = \int_a^b dx \exp[f(x)] \quad (3.98)$$

где (действительная) функция  $f(x)$  достигает на интервале  $(a, b)$  абсолютного максимума в некоторой промежуточной точке  $c$ . Тогда при больших значениях функции  $f$  основной вклад в интеграл (3.98) определяется узкой окрестностью этого максимума. Раскладывая функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $x = c$ , мы находим  $f \approx f(c) + (1/2)f''(c)(x - c)^2$ . Так как точка  $x = c$  соответствует максимуму функции  $f$ , то  $f''(c) < 0$ . Подставляя это разложение в (3.98), мы приходим к Гауссовому интегралу. При больших значениях  $f''$  интегрирование по  $x$  в этом интеграле можно распространить от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Вычисляя получившийся Гауссов интеграл, находим асимптотическое выражение

$$g \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(c)}} \exp[f(c)] \quad (3.99)$$

которое справедливо при  $|f''(c)| \gg 1$ .

Отметим, что если функция  $f(x)$  достигает абсолютного максимума на одном из краев интервала ( $a$  или  $b$ ), то именно окрестность этой точки определяет основной вклад в интеграл (3.98) при больших положительных  $f$ . Этот случай может быть исследован аналогично, в рамках разложения функции  $f(x)$  вблизи  $a$  или  $b$ . Тогда можно ограничиться линейным членом разложения функции  $f(x)$  по  $x - a$  или  $x - b$  (если только этот член разложения не равен нулю), что упрощает анализ.

Метод стационарной фазы работает для интегралов вида  $\int dx \exp[ih(x)]$ , где  $h(x)$  - действительная функция, имеющая в области интегрирования стационарную точку  $x_0$ , то есть  $dh/dx(x_0) = 0$ , причем  $|d^2h/dx^2(x_0)| \gg 1$ . В этом случае основной вклад в интеграл определяется окрестностью стационарной точки, так как именно в этой окрестности функция  $\exp[ih(x)]$  осциллирует медленнее всего. В окрестности стационарной точки функцию  $h$  можно разложить в ряд по  $x - x_0$ . Удерживая члены до второго порядка, можно написать

$$h \approx \Theta \pm \frac{A}{2} (x - x_0)^2 \quad (3.100)$$

где линейный член отсутствует в силу стационарности фазы в точке  $x_0$ , и  $\pm A = d^2h/dx^2(x_0)$ . Знак  $\pm$  перед  $A$  связан с тем, что мы полагаем  $A > 0$ . Далее

$$\begin{aligned} \int dx \exp[ih(x)] &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[i\Theta \pm iA(x - x_0)^2/2] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \exp(i\Theta \pm i\pi/4) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Беря действительную и мнимую части соотношения (3.101), мы находим

$$\int dx \cos h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \cos(\Theta \pm \pi/4) \quad (3.102)$$

$$\int dx \sin h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sin(\Theta \pm \pi/4) \quad (3.103)$$

Методы перевала и стационарной фазы можно обобщить на случай контурных интегралов в комплексной плоскости. При этом перевальная точка (точка стационарной фазы) не обязана лежать на самом контуре. Сформулируем обобщение метода перевала на этот случай.

Обобщенный метод перевала применим к контурным интегралам типа

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \quad (3.104)$$

при выполнении определенных условий на функцию  $S(z)$ . Прежде всего мы будем предполагать, что функция  $S(z)$  аналитична вблизи пути интегрирования от  $a$  к  $b$  и, следовательно, контур интегрирования можно деформировать в области аналитичности  $S(z)$ . Далее, мы будем предполагать, что в области аналитичности имеется по крайней мере одна точка с нулевой производной  $S'(z_0) = 0$  и что контур интегрирования можно деформировать таким образом, чтобы он проходил через  $z_0$ , причем действительная часть  $S(z)$  должна достигать в точке  $z_0$  максимума при движении вдоль деформированного контура. Тогда точка  $z_0$  является седловой, поскольку для направления, перпендикулярного контуру, действительная часть  $S(z)$  достигает в точке  $z_0$  минимума.

Если в седловой точке действительная часть  $S(z)$  достигает абсолютного максимума вдоль контура интегрирования, то можно надеяться, что именно окрестность седловой точки даст главный вклад в интеграл (3.104). Разложим  $S$  в ряд Тейлора вблизи седловой точки:  $S \approx S_0 + S_0''(z - z_0)^2/2$ , где  $S_0$  и  $S_0''$  - значения функции  $S$  и ее второй производной в точке  $z = z_0$ . Если  $S$  достаточно быстро меняется вблизи седловой точки, то главный вклад в интеграл дает узкая окрестность седловой точки  $z = z_0$ , и мы можем ограничиться в интеграле (3.104) этим разложением, распространив интегрирование до бесконечности в обе стороны. Тогда мы приходим к Гауссовому интегралу, который дает

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-S_0''}} \exp(S_0) \quad (3.105)$$

Подчеркнем, что обе величины,  $S_0$  и  $S_0''$ , могут быть комплексными. Знак перед квадратным корнем в (3.105) определяется направлением, в котором контур интегрирования проходит через седловую точку. Условием применимости приближения (3.105) является значительное изменение функции  $S(z)$  в области применимости приведенного разложения, то есть  $|S_0''|$  должна быть достаточно велика.

В области аналитичности функции  $S(z)$  может оказаться несколько седловых точек, через которые может проходить деформированный контур. В этом случае надо выбрать ту из них, в которой  $\operatorname{Re} S_0$  максимальна, поскольку именно окрестность этой точки дает главный вклад в интеграл (3.104). Возможно также вырождение, когда действительные части  $S$  в нескольких седловых точках одинаковы (или мало отличаются). Тогда для оценки интеграла (3.104) надо брать сумму выражений (3.105) для этих седловых точек.

Рассмотренные выше метод стационарной фазы и метод перевала могут рассматриваться, как частные случаи обобщенного метода перевала.

**Задача 3.7.2.** Найти значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(\alpha x^2 - x^4/2)$  при больших положительных  $\alpha$ .

**Задача 3.7.3.** Найти значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(\alpha x^2/2 - x^3/3)$  при больших положительных  $\alpha$ .

**Задача 3.7.4.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^4/4) \cos(\alpha x)$$

при больших положительных  $\alpha$ .

### 3.3.10 3.7.3 Метод WKB

Рассмотрим уравнение (2.5), где в операторе Штурма-Лиувилля (2.6) мы положим  $Q = 0$ :

$$\frac{d^2}{dx^2}f - Uf = 0 \quad (3.106)$$

Предположим, что величина  $p = \sqrt{U}$  меняется достаточно медленно на масштабе  $p^{-1}$ , что означает выполнение неравенства  $dp/dx \ll p^2$ . Тогда для функции  $f$  можно построить следующее приближенное решение

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp(S) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp(-S) \quad (3.108)$$

$$S(x) = \int^x dy p(y)$$

где  $C_1, C_2$  - некоторые константы. Выражение (3.107) было получено Вентцелем (Wentzel), Крамерсом (Kramers) и Бриллюэном (Brillouin) и носит название приближения WKB, что является аббревиатурой имен этих авторов.

Подставляя выражение (3.107) в уравнение (3.106), можно убедиться, что оно является решением, если пренебречь в нем членами с  $(dp/dx)^2$  и  $d^2p/dx^2$ . Первое пренебрежение возможно в силу предполагаемого неравенства  $dp/dx \ll p^2$ , а второе в силу неравенства  $d^2p/dx^2 \ll p dp/dx$ , которое получается из предыдущего дифференцированием по  $x$ .

Фактор  $U$  в уравнении (3.106) может быть как положительным, так и отрицательным, к обоим этим случаям одинаково применим метод WKB. В первом случае величина  $p$  является действительной, и два слагаемых в выражении (3.107) являются растущей и убывающей по  $x$  экспонентами. Во втором случае величина  $p$  является чисто мнимой, и мы имеем дело с экспонентами от мнимых величин  $S$ . Другими словами, мы имеем дело с осциллирующими функциями, если речь идет о действительных решениях. Тогда мы можем записать

$$f = \frac{C}{|p|^{1/2}} \cos(A + \varphi) \quad (3.109)$$

где  $S = iA$ ,  $C$  - действительная константа и  $\varphi$  - некоторая фаза.

Приведенная схема легко обобщается на случай произвольного оператора Штурма-Лиувилля (2.6)

$$\frac{d^2}{dx^2}f + Q \frac{df}{dx} - Uf = 0$$

В этом случае вместо (3.107, 3.108) находим

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p_1}} \exp(S_1) + \frac{C_2}{\sqrt{p_2}} \exp(S_2) \quad (3.111)$$

$$S_{1,2}(x) = \int^x dy p_{1,2}(y)$$

где  $p_{1,2}$  являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 + Qp - U = 0$$

которые могут быть как действительными, так и комплексными.

### 3.4 Динамические линейные поля

При отклонении состояния сплошной среды от равновесия могут наблюдаться различные процессы. Среда может релаксировать к равновесию. Примером является диффузионное поведение, которое описывается диффузионным уравнением. В условиях слабой диссипации в сплошных средах наблюдаются волновые процессы. Они характеризуются сложным пространственновременным распределением полей. При малой амплитуде волн их можно описывать в рамках линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

#### 3.4.1 4.1 Волновое движение в однородной среде

Волновое движение весьма распространено в природе. Оно реализуется тогда, когда диссипация в системе относительно слаба, и потому отклонение ее состояния от равновесия приводит к колебательным движениям. Распространение колебаний в пространстве и представляет собой волновое движение.

#### 3.4.2 4.1.1 Закон дисперсии

В данном разделе мы рассмотрим волновое движение в однородной среде. Волны могут иметь различную физическую природу: это может быть электромагнитная волна, звуковая волна, спиновая волна, поверхностная волна и так далее. Способ описания волн различной природы единообразен: мы должны ввести физические параметры, которые изменяются во времени и пространстве при распространении волны, и сформулировать уравнения, которым они подчиняются. Мы предполагаем, что амплитуда волн достаточно мала для того, чтобы можно было пренебречь их взаимодействием. В этом случае уравнения, которые описывают распространение волн, будут линейными. Это, как правило, дифференциальные уравнения, которые содержат как производные по времени, так и пространственные производные.

Мы начнем с волнового уравнения для поля  $u(t, \mathbf{r})$ :

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u = 0 \quad (4.1)$$

где  $c$  - некоторая константа, имеющая смысл скорости распространения волны. Отметим, что волновое уравнение (4.1) содержит дифференциальный оператор второго порядка с разными знаками при вторых производных. Такого рода дифференциальный оператор называют гиперболическим. Гиперболические операторы встречаются обычно именно в контексте волновых процессов.

Уравнение (4.1) встречается в самых разных физических контекстах. В качестве примера можно привести распространение электромагнитных волн в вакууме, которые описываются уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= c \nabla \times \mathbf{B}, \\ \partial_t \mathbf{B} &= -c \nabla \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  - напряженности электрического и магнитного полей, а  $c$  - скорость света. Уравнения (4.2,4.3) должны быть дополнены условиями  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{B}$ . Продифференцировав уравнение (4.2) по времени, подставив производную по времени от  $\mathbf{B}$  из уравнения (4.3) и воспользовавшись условием  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , мы получаем уравнение  $(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) \mathbf{E}$ , то есть волновое уравнение.

Волновое уравнение (4.1) описывает также звуковые волны в жидкостях и кристаллах. В этом случае полем является смещение среды от равновесного положения, а  $c$  - скорость распространения звуковых волн. В жидкостях имеется один тип звуковых

волн, связанных с колебаниями плотности жидкости. В кристаллах же имеется три типа звуковых волн с различной поляризацией, которые имеют различные скорости. Например, в изотропных кристаллах существуют распространяющиеся с различной скоростью продольные и поперечные звуковые волны: в продольных волнах среда смещается в направлении распространения волны, а в поперечных - перпендикулярно направлению распространения волны.

Задача 4.1.1. Как записывается решение волнового уравнения (4.1) в одномерном случае?

Рассмотрим спиновые волны в ферромагнетиках, которые описываются уравнением Ландау-Лифшица

$$\partial_t \mathbf{M} = \gamma \mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M}, \quad (4.4)$$

где  $M$  - намагниченность материала,  $\gamma$  - константа, зависящая от магнитных свойств материала, а  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  эффективное магнитное поле, которое состоит из двух частей: внешнего магнитного поля и индуцированного вклада. Уравнение Ландау-Лифшица (4.4) является нелинейным. Оно сводится к линейному, если рассматриваются слабые отклонения намагниченности от равновесного. Будем считать, что в равновесии внешнее магнитное поле и намагниченность направлены вдоль оси  $Z$ . Тогда отклонения намагниченности от равновесия описываются компонентами  $M_\alpha = (M_x, M_y)$ . Линеаризуя уравнение Ландау-Лифшица (4.4) по  $M_\alpha$ , находим линейное уравнение

$$\partial_t M_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} (\Omega - b \nabla^2) M_\beta \quad (4.5)$$

Здесь  $\Omega$  - Ларморовская частота, а  $b$  - константа, зависящая от свойств ферромагнетика. Член с Лапласианом в (4.5) происходит из вклада в  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ , связанного с неоднородностью намагниченности и пропорционального  $\nabla^2 M$ . Вычисляя производную по времени от выражения для  $\partial_t M_x$  и подставляя в него выражение для  $\partial_t M_y$ , мы находим замкнутое уравнение

$$\partial_t^2 M_x = -(\Omega - b \nabla^2)^2 M_x \quad (4.6)$$

Здесь уже фигурирует пространственная производная четвертого порядка.

Раскладывая поле  $u$  в пространственный интеграл Фурье

$$u = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{u}(t, \mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

мы находим из волнового уравнения (4.1)

$$\partial_t^2 \tilde{u}(\mathbf{q}) = -c^2 q^2 \tilde{u}(\mathbf{q}) \quad (4.8)$$

Мы уже анализировали подобное уравнение, смотри раздел 1.1.2. Воспользовавшись приведенным там результатом, мы запишем решение задачи Коши для уравнения (4.8) в виде  $\tilde{u}(\mathbf{q}) = w_1(\mathbf{q}) \exp(-icqt) + w_2(\mathbf{q}) \exp(icqt)$ . Здесь функции  $w_1(\mathbf{q}), w_2(\mathbf{q})$  определяются начальными условиями по времени. Мы заключаем, что Фурье-компонента поля  $u$ , подчиняющегося волновому уравнению, имеет частоты  $\omega = \pm cq$ , которые определяются волновым вектором  $\mathbf{q}$ .

Приведенный пример демонстрирует общее свойство волнового движения в однородной среде: Фурьекомпонента волнового поля с волновым вектором  $\mathbf{q}$  имеет зависящие от волнового вектора частоты, которые мы будем записывать в виде  $\omega = \pm \varpi(q), \varpi > 0$ . Функция  $\varpi(q)$  называется законом дисперсии волны. Отношение  $\varpi(q)/q$  называется фазовой скоростью волны, производная же  $\partial \varpi / \partial q$  называется ее групповой скоростью.

Для уравнений (4.1) и (4.6) законы дисперсии имеют вид  $\varpi = cq, \varpi = \Omega + bq^2$ . Встречаются и более сложные случаи. Например, для волн, распространяющихся на поверхности жидкости, закон дисперсии имеет вид

$$\varpi = \sqrt{gq + (\sigma/\rho)q^3} \quad (4.9)$$

Здесь  $g$  - ускорение свободного падения,  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения, и  $\rho$  - плотность жидкости. Столь сложный закон дисперсии связан с тем, что при распространении поверхностной волны в игре участвуют как гравитация, так и капиллярные силы, а в волновое движение вовлекается приповерхностный слой жидкости, толщина которого зависит от  $q$ . В предельном случае гравитационных волн (малые  $q$ ) выражение (4.9) дает  $\varpi = \sqrt{gq}$ , а в предельном случае капиллярных волн (большие  $q$ ) выражение (4.9) дает  $\varpi = (\sigma/\rho)^{1/2}q^{3/2}$ .

Задача 4.1.2. Найти выражение для групповой скорости поверхностных волн с законом дисперсии (4.9).

Временная зависимость Фурье-компоненты поля и с законом дисперсии  $\varpi$  может быть записана в виде

$$\tilde{u}(\mathbf{q}) = w_1(\mathbf{q}) \exp(-i\varpi t) + w_2(\mathbf{q}) \exp(i\varpi t) \quad (4.10)$$

Здесь функции  $w_1(\mathbf{q}), w_2(\mathbf{q})$  определяются начальными условиями по времени, которые формулируются в терминах поля  $u$  и его первой производной по времени.

Задача 4.1.3. Найти решение волнового уравнения (4.1) в случае, когда при  $t = 0$  поле  $u = \exp(-r^2)$ , а его производная по времени равна нулю.

Задача 4.1.4. Найти решение уравнения (4.6) в случае, когда при  $t = 0$  поле  $M_x = \exp(-r^2)$ , а его производная по времени равна нулю.

Задача 4.1.5. Найти зависимость от времени смещения поверхности воды и, если в начальный момент времени (при  $t = 0$ )  $u = \text{Re}(1 + ix)^{-1/2}$ ,  $\partial_t u = 0$  и движение поверхности можно описывать в рамках гравитационных волн.

### 3.4.3 4.1.2 Излучение

До сих пор мы изучали свободное волновое движение. Добавим теперь источник, который производит волновое движение. В общем виде уравнение на волновое поле  $u$  может быть записано в виде

$$[\partial_t^2 + \varpi^2(-i\nabla)] u = \chi \quad (4.11)$$

Здесь мы учли, что  $-i\nabla \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) = \mathbf{q} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})$ . Введем функцию Грина уравнения (4.11), которая удовлетворяет уравнению

$$[\partial_t^2 + \varpi^2(-i\nabla)] G = \delta(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

Тогда вынужденное решение уравнения (4.11) записывается в виде

$$u(t, \mathbf{r}) = \int dt_1 d^3r_1 G(t - t_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \chi(t_1, \mathbf{r}_1) \quad (4.13)$$

Полное решение уравнения (4.11) состоит из вынужденного решения (4.13) и решения свободного уравнения  $[\partial_t^2 + \varpi^2(-i\nabla)] u = 0$ .

Чтобы найти функцию Грина  $G$ , произведем Фурьеобразование уравнения (4.12). В результате находим уравнение  $[\partial_t^2 + \varpi^2(\mathbf{q})] \tilde{G} = \delta(t)$ , с которым мы уже сталкивались, смотри раздел 1.1.2. Воспользовавшись выражением (1.10), находим

$$\tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{1}{\varpi} \sin(\varpi t) \quad (4.14)$$

Чтобы найти функцию Грина в реальном пространстве, необходимо сделать обратное Фурье-преобразование:

$$G(t, \mathbf{r}) = \theta(t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\varpi t)}{\varpi} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

Если  $\varpi$  зависит только от абсолютного значения волнового вектора, то в выражении (4.15) можно произвести интегрирование по углу между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$ , что ведет к

$$G(t, r) = \theta(t) \int_0^\infty \frac{dq q}{2\pi^2 r} \frac{\sin(\varpi t)}{\varpi} \sin(qr) \quad (4.16)$$

Конкретный вид функции  $G$  зависит от закона дисперсии.

Вычислим функцию Грина для волнового уравнения

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u = \chi \quad (4.17)$$

В этом случае  $\varpi = cq$ , и интегрирование в выражении (4.16) может быть произведено явно. В результате мы находим

$$G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr} \delta(r - ct) \quad (4.18)$$

Подставляя выражение (4.18) в соотношение (4.13), находим

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{R} \chi(t - R/c, \mathbf{r}_1) \quad (4.19)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ . Таким образом, воздействие источника на поле  $u$  осуществляется с запаздыванием на время  $R/c$ , которое равно времени распространения волны от источника до точки наблюдения.

Задача 4.1.6. Найти решение волнового уравнения (4.17) для точечного гармонического источника  $\chi = \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r})$ .

Задача 4.1.7. Найти значение функции Грина при  $r = 0$  для уравнения  $(\partial_t^2 + \nabla^4) u = \chi$ .

### 3.4.4 4.1.3 Уравнение на огибающую

Рассмотрим теперь случай волнового поля  $u$ , когда  $\tilde{u}(\mathbf{q})$  локализовано около волнового вектора  $\mathbf{q}_0$  (или около волновых векторов  $\pm \mathbf{q}_0$ , что неизбежно для действительного поля). В этом случае в  $t, \mathbf{r}$ -представлении

$$u = \Psi(t, \mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{q}_0 \mathbf{r}) \quad (4.20)$$

где  $\omega_0 = \varpi(q_0)$  и (комплексная) амплитуда  $\Psi$  меняется на временах много больше  $\omega_0^{-1}$  и на масштабах много больше  $q_0^{-1}$ . Другими словами, характерный волновой вектор  $\mathbf{k}$  огибающей много меньше  $q_0$ . Если поле  $u$  является действительным, то в качестве  $u$  следует брать действительную часть правой части (4.20). Функцию  $\Psi$  в (4.20) обычно называют огибающей (envelop).

В Фурье-представлении  $\partial_t \tilde{u} = -i\varpi \tilde{u}$ . Отсюда следует уравнение

$$\partial_t \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = -i [\varpi(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k}) - \omega_0] \tilde{\Psi}(\mathbf{k})$$

для Фурье-компоненты огибающей. Таким образом



$$\partial_t \Psi = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) [\varpi(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k}) - \omega_0] \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$$

В этом соотношении в  $\varpi(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k})$  волновой вектор  $\mathbf{k}$  можно заменить на  $-i\nabla$ , поскольку  $-i\nabla \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . В результате находим уравнение для огибающей

$$\partial_t \Psi = -i [\varpi(\mathbf{q}_0 - i\nabla) - \varpi(\mathbf{q}_0)] \Psi \quad (4.21)$$

где мы учли, что  $\omega_0 = \varpi(\mathbf{q}_0)$ . Отметим, что вид найденного уравнения не зависит от размерности пространства, в котором изучается волновое движение.

Поскольку характерный волновой вектор  $k$  огибающей много меньше  $q_0$ , разность  $\varpi(\mathbf{q}_0 - i\nabla) - \varpi(\mathbf{q}_0)$  в (4.21) можно разложить в ряд Тейлора по  $\nabla$ . В первом порядке находим

$$(\partial_t + \mathbf{V}\nabla) \Psi = 0, \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \quad (4.22)$$

Стоящая здесь величина  $\mathbf{V}$  является, очевидно, групповой скоростью волнового движения.

Уравнение (4.22) содержит производные не выше первого порядка и, следовательно, может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. В данном случае скорость  $\mathbf{V}$  является константой, и решение (4.22) легко выписывается явно

$$\Psi = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) \quad (4.23)$$

где  $\Phi$  - произвольная функция координат. Другими словами,  $\Psi$  не меняется в системе отсчета, которая движется относительно лабораторной с групповой скоростью.

Пусть в уравнении на исходную переменную  $u$  присутствует источник с частотами вблизи  $\omega_0$  и волновыми векторами вблизи  $\mathbf{q}_0$ , который можно записать в виде  $\phi \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{q}_0 \mathbf{r})$ , где  $\phi$  - медленная функция времени и координат. Тогда мы получаем вместо (4.22)

$$(\partial_t + \mathbf{V}\nabla) \Psi = \phi \quad (4.24)$$

Это уравнение легко решается методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. В результате находим

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = b(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + \int^t d\tau \phi(\tau, \mathbf{r} + \mathbf{V}\tau - \mathbf{V}t) \quad (4.25)$$

**Задача 4.1.8.** Найти решение уравнения (4.24) в одномерном случае для нулевых начальных условий  $u\phi = A \cosh^{-2}(x)$ .

Чтобы описать эволюцию волнового пакета в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью, уравнение (4.22) следует уточнить. Для этого разность в уравнении (4.21) следует разложить до второго порядка по  $\nabla$ , что дает

$$-i \frac{d}{dt} \Psi = \left[ \frac{V}{2q_0} \nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial q_0} \partial_x^2 \right] \Psi \quad (4.26)$$

где ось  $X$  направлена вдоль  $\mathbf{q}_0$ , а  $\nabla_{\perp}$  действует в перпендикулярной к оси  $X$  плоскости. В уравнении (4.26)

$d/dt = \partial_t + V\partial_x$ , это производная по времени в системе отсчета, которая движется с групповой скоростью  $\mathbf{V}$ . Если обе величины,  $V$  и  $\partial v / \partial q_0$ , положительны, то уравнение (4.26) перемасштабированием переменных может быть сведено к свободному уравнению

Шрёдингера  $-i\partial_t\Psi = \nabla^2\Psi$ . Если же  $V$  и  $\partial v/\partial q_0$  имеют разные знаки, то мы получаем в правой части (4.26) гиперболический дифференциальный оператор. Например, это имеет место для гравитационных волн с законом дисперсии  $\varpi = \sqrt{gq}$ .

### 3.4.5 4.1.4 Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим распространяющуюся в пространстве монохроматическую волну, которая имеет определенную частоту  $\omega$ . Разрешая закон дисперсии  $\omega = \pm\varpi(q)$  относительно  $q$ , мы находим выражение  $q^2$  через частоту. Например, для волнового уравнения (4.1)  $q^2 = \omega^2/c^2$ . В других случаях выражение для  $q^2$  может оказаться более сложным. Но в любом случае  $q^2$  в монохроматической волне является (зависящей от частоты) константой, которую мы обозначим  $\kappa^2$ . В Фурье-представлении уравнение для амплитуды волны имеет вид  $(-q^2 + \kappa^2)\tilde{f} = 0$ . Таким образом, в разложении Фурье монохроматической волны присутствуют только гармоники с волновыми векторами  $|\mathbf{q}| = \kappa$ .

В реальном пространстве амплитуда монохроматической волны подчиняется уравнению

$$(\nabla^2 + \kappa^2)f = 0, \quad \text{Helmholtz} \quad (4.27)$$

которое называется уравнением Гельмгольца. Поскольку в разложении Фурье монохроматической волны присутствуют только гармоники с волновыми векторами  $|\mathbf{q}| = \kappa$ , общее решение уравнения Гельмгольца (4.27) можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \delta(q^2 - \kappa^2) w(\mathbf{q}) \quad (4.28)$$

Если поле  $f$  является действительным, то  $w(\mathbf{q}) = w^*(-\mathbf{q})$ .

Задача 4.1.9. Найти изотропное решение уравнения Гельмгольца (4.27).

Как правило, уравнение Гельмгольца (4.27) приходится решать в ограниченной области с определенными граничными условиями. Рассмотрим в качестве примера электромагнитное поле в волноводе постоянного сечения. В этом случае можно ввести координату вдоль этого волновода и сделать Фурье-преобразование по этой координате. В силу однородности задачи уравнения для различных Фурье-гармоник оказываются независимыми. Таким образом удается эффективно понизить размерность пространства, в котором решается задача.

Задача 4.1.10. Найти набор распространяющихся вдоль волновода квадратного сечения  $l \times l$  мод, которые являются решениями уравнения Гельмгольца (4.27) с нулевыми граничными условиями на стенках волновода.

Рассмотрим задачу о возбуждении волн внешним источником. Для описания этого процесса в уравнение Гельмгольца (4.27) необходимо добавить правую часть:

$$(\nabla^2 + \kappa^2)f = \phi(\mathbf{r}) \quad (4.29)$$

которая представляет источник волн. Для разных случаев физический смысл источника  $\phi$  различен. Например, для электромагнитных волн источником является движение зарядов. Поскольку уравнение Гельмгольца (4.27) справедливо для монохроматической волны, источник  $\phi$  также должен быть монохроматическим, то есть представлять собой Фурье-компоненту по времени с частотой  $\omega$ .

Как и раньше, мы будем решать уравнение (4.29) при помощи функции Грина  $G$ , которая удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + \kappa^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (4.30)$$

Если функции Грина  $G$  известна, то решение уравнения (4.29) можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}) = f_0 + \int d^3r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \phi(\mathbf{r}_1) \quad (4.31)$$

где  $f_0$  - решение однородного уравнения Гельмгольца (4.27).

Вне начала координат  $(\nabla^2 + \kappa^2)G(\mathbf{r}) = 0$ . Введя  $G = \chi/r$ , находим в трехмерном случае  $(\partial_r^2 + \kappa^2)\chi = 0$ . Решение этого уравнения является произвольная комбинация  $\cos(\kappa r)$  и  $\sin(\kappa r)$ . При малых  $r$  членом с  $\kappa$  в уравнении Гельмгольца можно пренебречь. Поэтому при малых  $r$  мы должны получить (2.41). Этому удовлетворяет, например, функция  $G = -\cos(\kappa r)/(4\pi r)$ , которая является решением уравнения (4.30). Однако мы можем добавить к  $\chi$  и синус с произвольным множителем. Другими словами, функция Грина уравнения Гельмгольца определена с точностью до решения однородного уравнения, которым и является  $r^{-1}\sin(\kappa r)$  с произвольным коэффициентом. В этом отличие задачи от случаев уравнений Лапласа и Дебая, когда функция Грина определялась однозначно.

Чтобы разрешить эту неоднозначность, необходимо привлечь дополнительные соображения. Введем в уравнение для волнового поля малое затухание (которое всегда присутствует в реальных системах). Это означает, что модифицируется левая часть уравнения (4.11):

$$[(\partial_t + \gamma)^2 + \varpi^2(-i\nabla)]u = \chi$$

где  $\gamma$  - затухание. Для монохроматической волны  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ . Выражая теперь  $\nabla^2$ , находим вместо (4.29)

$$(\nabla^2 + \kappa^2 + 2i\epsilon\kappa \operatorname{sign} \omega) f = \phi(\mathbf{r})$$

где  $\epsilon > 0$  - малая величина. Требуя, чтобы функция Грина стремилась к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , получаем  $G \propto \exp[i(\kappa + i\epsilon)r]$  при  $\omega > 0$  и  $G \propto \exp[-i(\kappa - i\epsilon)r]$  при  $\omega < 0$ . Переходя к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ , находим окончательно

$$\begin{aligned} G &= -\frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r}, \omega > 0 \\ G &= -\frac{\exp(-i\kappa r)}{4\pi r}, \omega < 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Задача 4.1.11. Найти вынужденное решение уравнения (4.29) для излучателя-диполя  $\phi = \partial_z \delta(\mathbf{r})$ .

### 3.4.6 4.2 Динамические полевые задачи

Динамика поля даже в однородной среде не всегда носит волновой характер. Важным примером такого рода является диффузионное поведение, которое описывается уравнением диффузии. Как было показано выше, смотри раздел 4.1.3, огибающая волнового поля описывается уравнением Шрёдингера для свободной частицы. Оно может быть проанализировано в рамках той же схемы, что и уравнение диффузии. Оба уравнения можно анализировать для пространства произвольной размерности  $d$ , конкретный выбор размерности зависит от рассматриваемой физической задачи.

## 3.4.7 4.2.1 Уравнение диффузии

В различных физических приложениях встречается уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \quad (4.33)$$

Это уравнение описывает, например, эволюцию плотности числа частиц или пространственных вариаций температуры. Но оно же описывает статистические свойства случайных блужданий (Броуновского движения).

Изучим свойства решения уравнения (4.33). В дальнейшем под решением уравнения мы обычно имеем в виду решение задачи Коши, то есть восстановление функции, подчиняющейся заданному уравнению, по ее начальному значению. Если не оговорено обратное, за начальный момент времени принимается  $t = 0$ .

Произведём Фурье-преобразование:

$$\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \int dy_1 \dots dy_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{y}) u(t, \mathbf{y}) \quad (4.34)$$

Тогда уравнение (4.33) приводит к уравнению  $\partial \tilde{u} / \partial t = -q^2 \tilde{u}$  для Фурье-компоненты, которое имеет очевидное решение  $\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \exp(-q^2 t) \tilde{u}(0, \mathbf{q})$ . Подставляя это выражение в интеграл Фурье

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{u}(t, \mathbf{q}) \quad (4.35)$$

обратный к соотношению (4.34), и беря интегралы по  $\mathbf{q}$ , мы находим

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] u(0, \mathbf{y}) \quad (4.36)$$

Соотношение (4.36) в принципе решает задачу Коши, которая заключается в нахождении решения данного дифференциального уравнения по начальному значению функции.

Задача 4.2.1. Найти аналог представления (4.36) для одномерного поля  $u(t, x)$ , динамика которого в Фурье-представлении задается уравнением  $\partial \tilde{u} / \partial t = -|q| \tilde{u}$ .

Если начальное поле  $u(0, \mathbf{x})$  локализовано вблизи начала координат, то есть если  $u(0, \mathbf{x})$  достаточно быстро спадает при росте  $|\mathbf{x}|$ , то решение  $u(t, \mathbf{x})$  обладает универсальной асимптотикой на больших временах. Чтобы установить эту асимптотику, мы рассмотрим времена  $t \gg l^2$ , где  $l$  - длина, на которой локализовано поле  $u(0, \mathbf{x})$ . Это означает, что интеграл (4.36) набирается в области  $|\mathbf{y}| \lesssim l$ . При этом условии можно пренебречь  $\mathbf{y}$  в экспоненте в (4.36). В результате мы заключаем, что при  $t \gg l^2$

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.38)$$

$$A = \int dy_1 \dots dy_d u(0, \mathbf{y})$$

Отметим, что приближение (4.37) соответствует подстановке  $u(0, \mathbf{y}) \rightarrow A\delta(\mathbf{y})$ . Если для локализованного вблизи начала координат поля  $u(0, \mathbf{x})$  интеграл  $A(4.38)$  равен нулю, то асимптотика  $u(t, \mathbf{x})$  на больших временах будет уже иной. Раскладывая экспоненту в (4.36) по  $\mathbf{y}$ , мы находим следующий ведущий член разложения при  $A = 0$ :

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{B\mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.39)$$

$$B = 2\pi \int dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u(0, \mathbf{y}) \quad (4.40)$$

Выражения (4.37, 4.39) являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

Задача 4.2.2. Найти решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия:  $u(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ . Сравните ответ асимптотическим поведением (4.37).

Задача 4.2.3. Найти асимптотическое поведение решения одномерного диффузионного уравнения для следующих начальных условий: 1)  $u(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ ; 2)  $u(0, x) = \exp(-|x|/l)$ ; 3)  $u(0, x) = x \exp(-|x|/l)$ ; 4)  $u(0, x) = (x^2 + l^2)^{-1}$ ; 5)  $u(0, x) = x(x^2 + l^2)^{-2}$ .

Задача 4.2.4. Найти асимптотическое поведение на больших временах для одномерного поля  $u(t, x)$ ,  $\partial u$  наика которого в Фурье-представлении задается уравнением  $\partial \tilde{u}/\partial t = -|q|\tilde{u}$ .

Рассмотрим уравнение диффузии с правой частью,

$$(\partial_t - \nabla^2) u = \phi \quad (4.41)$$

где  $\phi$  имеет смысл источника частиц, плотность которых  $u$  в дальнейшем эволюционирует в соответствии с уравнением диффузии. Эта задача решается с помощью функции Грина  $G$ :

$$u(\tau, \mathbf{x}) = \int dt d^d y G(\tau - t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(t, \mathbf{y}) \quad (4.42)$$

Учитывая однородность задачи по времени и пространству, мы сразу подставили функцию Грина, которая зависит только от разностей времен и координат. Функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$(\partial_t - \nabla^2) G(t, \mathbf{r}) = \delta(t) \delta(\mathbf{r}) \quad (4.43)$$

Мы уже фактически нашли решение этого уравнения, так как при  $t > 0$  оно описывает свободную эволюцию, которое соответствует начальному условию  $G(+0, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ . Подставляя это начальное условие в (4.36), находим

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) \quad (4.44)$$

Задача 4.2.5. Найти решение уравнения (4.41) для  $\phi = \theta(t) \exp[-x^2/(2l^2)]$  в четырехмерном случае.

Заметим, что соотношение (4.36) может быть переписано в виде

$$u(t, \mathbf{x}) = \int d^d y G(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u(0, \mathbf{y}) \quad (4.45)$$

Справедливо также

$$u(t + \tau, \mathbf{z}) = \int d^d x G(\tau, \mathbf{z} - \mathbf{x}) u(t, \mathbf{x})$$

Сравнивая это с прямым применением (4.45) к  $u(t + \tau, \mathbf{z})$ , находим

$$G(t + \tau, \mathbf{z} - \mathbf{y}) = \int d^d x G(t, \mathbf{z} - \mathbf{x}) G(\tau, \mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Это соотношение построено только на (4.45) и справедливо для любых функций Грина уравнений с первой производной по времени.

До сих пор мы рассматривали решение уравнения диффузии в неограниченном пространстве. Вообще говоря, можно решать его в ограниченной области пространства.

В этом случае уравнение должно быть дополнено условиями на границе этой области. В качестве иллюстрации рассмотрим полупространство  $x_1 > 0$ . Если поле  $u = 0$  при  $x_1 = 0$ , то задача решается при помощи функции Грина

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t} \right] - \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(x_1 + z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t} \right] \quad (4.46)$$

Очевидно, что в полупространстве  $x_1 > 0$  выражение (4.46) удовлетворяет уравнению (4.43), а также обращается в ноль при  $x_1 = 0$ . Отметим, что при решении задачи с граничным условием, которое заключается в равенстве при  $x_1 = 0$  производной от  $u$  в направлении, перпендикулярном плоскости  $x_1 = 0$ , следует использовать функцию Грина, которая отличается от (4.46) знаком при втором члене.

Задача 4.2.6. Как будет вести себя изначально локализованное вблизи стенки  $x_1 = 0$  решение уравнения диффузии на больших временах, если на стенке  $u = 0$ ?

В уравнение диффузии можно ввести затухание  $\gamma$ :

$$(\partial_t + \gamma - \nabla^2) u = \phi \quad (4.47)$$

Например, такое уравнение описывает эволюцию плотности диффундирующих частиц, часть которых поглощается или выбывает за счет химических реакций. Вообще говоря,  $\gamma$  является функцией координат. Рассмотренный нами случай, когда  $u$  обращается в ноль на границе некоторой области, соответствует сильному поглощению в этой области. Отметим, что для однородного в пространстве затухания  $\gamma$  переход к функции  $v$ , где  $u = \exp(-\gamma t)v$ , приводит к чисто диффузионному уравнению  $(\partial_t - \nabla^2)v = 0$  на эту функцию, что сводит эту задачу к предыдущей. Следует только помнить, что источник  $\phi$  для функции  $v$  превращается в  $\phi \exp(\gamma t)$ . Поэтому решение уравнения (4.47) записывается в виде

$$u(t, \mathbf{r}) = \int d\tau d^d x G(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{x}) e^{-\gamma(t-\tau)} \phi(\tau, \mathbf{x}) \quad (4.48)$$

где  $G$  - функция Грина диффузионного уравнения (4.44).

Задача 4.2.7. Найти  $u(t, 0)$  для решения уравнения (4.47) при  $d = 3$  с однородным  $\gamma$  в случае, когда  $\phi = 1/r$ .

Задача 4.2.8. Найти решение одномерного уравнения  $\partial_t u = (\partial_x^2 - x^2)$  с начальным условием  $u = 1$ .

### 3.4.8 4.2.2 Уравнение Стокса

Здесь мы рассматриваем уравнения, которые описывают линейную динамику жидкости. Это возможно при малых значениях скорости течения  $\mathbf{v}$ , когда нелинейными эффектами можно пренебречь. Мы также считаем, что мало число Маха, то есть отношение характерной скорости жидкости к скорости звука. В этом случае жидкость можно считать несжимаемой, то есть плотность массы жидкости  $\rho$  можно считать однородной (не зависящей от координат), а скорость жидкости  $\mathbf{v}$  удовлетворяет условию  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

При этих условиях течение жидкости описывается уравнением Стокса (Stokes)

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (4.49)$$

которое является уже линейным. В уравнении (4.49)  $p$  – давление, а  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости. В уравнении (4.49) фигурирует также плотность силы (на единицу массы)  $\mathbf{f}$ , приложенная к жидкости. Уравнение Стокса близко к уравнению диффузии и имеет похожее поведение своих решений.

Давление  $p$  не является динамической переменной, оно призвано обеспечить решение с нужными граничными условиями, поскольку на поле скорости наложено условие бездивергентности  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . Беря дивергенцию от уравнения Стокса (4.49), находим, что давление удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 p = 0$ , то есть является гармонической функцией. Если дивергенция силы  $\mathbf{f}$  не равна нулю, то  $\nabla^2 p = \nabla \mathbf{f}$ .

Найдем функцию Грина уравнения Стокса. В данном случае функция Грина является матрицей, которая определяет течение, которое вызывается внешней силой  $\mathbf{f}$ :

$$v_i(t, \mathbf{r}) = \int dt_1 d^3 r_1 G_{ik}(t - t_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f_k(t_1, \mathbf{r}_1)$$

Функция Грина уравнения Стокса определяется уравнением

$$(\partial_t - \nu \nabla^2) G_{ik}(t, \mathbf{r}) = \delta(t) (\delta_{ik} - \partial_i \partial_k \nabla^{-2}) \delta(\mathbf{r}) \quad (4.50)$$

где второе слагаемое в правой части определяется давлением. Форма оператора в правой части гарантирует условие бездивергентности  $\partial_i G_{ik} = 0$ . В Фурьепредставлении (4.50) дает

$$(\partial_t + \nu q^2) \tilde{G}_{ik} = \delta(t) (\delta_{ik} - q_i q_k / q^2)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{G}_{ik} = \theta(t) (\delta_{ik} - q_i q_k / q^2) \exp(-t \nu q^2) \quad (4.51)$$

Делая обратное Фурье-преобразование, находим из уравнения (4.51)

$$G_{ik} = \frac{\theta(t) \delta_{ik}}{8(\pi \nu t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + \theta(t) \partial_i \partial_k \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi^2 q r} \exp(-t \nu q^2) \sin(qr) \quad (4.52)$$

В первом слагаемом мы произвели стандартное интегрирование по всем компонентам  $\mathbf{q}$ , а во втором мы перешли к сферическим координатам и выполнили интегрирование по углам (полярному и азимутальному). Дальнейшее интегрирование приводит к результату

$$G_{ik} = \frac{\theta(t)}{4\pi} \left( \frac{3r_i r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{4\nu t}}\right) + \frac{\theta(t)}{2\pi^{3/2} \sqrt{4\nu t}} \left( \frac{\delta_{ik}}{r^2} - \frac{3r_i r_k}{r^4} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + \frac{\theta(t)}{(4\nu \pi t)^{3/2}} \left( \delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (4.53)$$

Здесь  $\operatorname{erf}$  – функция ошибок (error function)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \exp(-t^2)$$

Задача 4.2.9. Получить выражение (4.53) из (4.52).

### 3.4.9 4.3 Уравнение Шрёдингера

В квантовой механике состояние частицы определяется ее волновой функцией  $\psi$ , которая является комплексным полем, зависящим от времени и координат. Уравнение, которому подчиняется волновая функция квантовой частицы во внешнем поле с внешним потенциалом  $U$ , имеет вид

$$i\partial_t\psi = -\nabla^2\psi + U\psi \quad (4.54)$$

Вообще говоря, потенциал  $U$  может быть произвольной функцией времени и координат. В дальнейшем мы считаем, что потенциал  $U$  не зависит от времени и стремится к нулю при стремлении координат к бесконечности.

Уравнение (4.54) ведет к закону сохранения величины  $\int d\mathbf{r}|\psi|^2$ , которая имеет смысл полной вероятности найти частицу в какой-либо точке пространства, и потому должна быть равна единице. Помимо этого, для статического потенциала  $U$  уравнение (4.54) гарантирует закон сохранения энергии, которая записывается в виде интеграла

$$\int d\mathbf{r} (\nabla\psi^*\nabla\psi + U\psi^*\psi) \quad (4.55)$$

Импульс же системы, вообще говоря, не сохраняется, поскольку наличие зависящего от координат потенциала нарушает пространственную однородность системы.

Пусть  $\chi(\mathbf{r})$  - собственная функция оператора  $-\nabla^2 + U$  с собственным значением  $\epsilon$ . Если в начальный момент времени  $\psi = \chi$ , то в соответствии с уравнением (4.54) ее эволюция со временем определяется фактором  $\exp(-i\epsilon t)$ . Другими словами,

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \exp(-i\epsilon t)\chi(\mathbf{r}) \quad (4.56)$$

является решением уравнения (4.54). Это замечание дает принципиальную возможность найти временную зависимость  $\psi(t, \mathbf{r})$  для произвольного начального значения  $\psi(0, \mathbf{r})$ .

Как мы уже выяснили в разделе 2.3, любая функция может быть разложена по собственным функциям оператора  $-\nabla^2 + U$ . Эти функции распадаются на функции непрерывного спектра  $\psi_k$ , которые на больших расстояниях равны  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , и функции дискретного спектра  $\psi_j$ . Разложим  $\psi(0, \mathbf{r})$  по этим функциям:

$$\psi(0, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k})\psi_k + \sum_j b_j\psi_j \quad (4.57)$$

Тогда в соответствии с (4.56) в произвольный момент времени

$$\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k})\psi_k e^{-ik^2 t} + \sum_j b_j\psi_j e^{-i\epsilon_j t} \quad (4.58)$$

Если вначале функция  $\psi$  была локализована в той же области, что и потенциал  $U$ , то ее часть, связанная со связанными состояниями  $\psi_j$ , останется локализованной в этой области, а ее часть, связанная с функциями непрерывного спектра  $\psi_k$ , будет постепенно расплываться со временем.

Коэффициенты  $a(\mathbf{k})$ ,  $b_j$  разложения (4.57) можно найти в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \int d^3r \psi_{-\mathbf{k}}^* \psi(0, \mathbf{r}) \\ b_j &= \int d^3r \psi_j^* \psi(0, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Здесь предполагается, что взяты действительные функции дискретного спектра, нормированные на единицу:  $\int d^3r \psi_j^2 = 1$ .



Задача 4.3.1. Начальное состояние квантовой частицы дается нормированной на единицу функцией  $\psi(0, \mathbf{r}) = [\kappa/(2\pi)]^{1/2} r^{-1} \exp(-\kappa r)$ . Найти коэффициент  $b$  в разложении (4.57) по собственным функциям оператора Шрёдингера с притягивающим Кулоновским потенциалом.

### 3.4.10 4.3.1 Уравнение Шрёдингера для свободной частицы

Если внешний потенциал  $U$  равен нулю, то мы получаем из (4.54) уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi \quad (4.60)$$

которое похоже на уравнение диффузии (4.33). Как мы показали в разделе 4.1.3, огибающая волнового поля описывается тем же уравнением (4.60) (с учетом перемасштабировки координат). Таким образом, уравнение (4.60) носит универсальный характер.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.60). Как и в случае с уравнением диффузии, для ее решения эффективно использовать преобразование Фурье, поскольку в Фурье-представлении эволюционная задача решается явно. Переходя затем обратно к пространственному представлению, находим выражение

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[ i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \psi(0, \mathbf{y}) \quad (4.61)$$

аналогичное (4.36).

Задача 4.3.2. Найти аналог представления (4.61) для уравнения  $-i \partial_t \psi = (\partial_x^2 - \partial_y^2) \psi$ .

Однако имеется и существенное различие между выражениями (4.36) и (4.61). В то время как не существует интегрального представления, позволяющего восстановить  $u(0, \mathbf{x})$  по  $u(t, \mathbf{x})$ , выражение (4.61) допускает обращение по времени:

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(-4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[ -i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \psi(t, \mathbf{y})$$

Это связано с различным характером процессов, описываемых уравнениями (4.33) и (4.60). Уравнение диффузии (4.33) описывает диссипативный процесс, ведущий к расплыванию со временем локализованных полей, смотри выражения (4.37, 4.39). Поэтому уравнение диффузии (4.33) не допускает обращения времени. Уравнение же Шрёдингера (4.60), как, впрочем, и уравнение (4.54), обращение времени допускает: оно инвариантно относительно замены  $t \rightarrow -t, \psi \rightarrow \psi^*$ . Поэтому наряду с прямым выражением (4.61) работает и обратное ему выражение.

Задача 4.3.3. Найти для свободного уравнения Шрёдингера асимптотические выражения, аналогичные (4.37, 4.39).

Задача 4.3.4. Найти решения одномерного свободного уравнения Шрёдингера для следующих начальных условий: 1)  $\psi(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ ; 2)  $\psi(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ .

### 3.4.11 4.4 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

### 3.4.12 4.4.1 Метод характеристик

Метод характеристик позволяет свести решение определенного класса уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, он применим к уравнениям, которые содержат только первые производные и линейным по этим производным. Такое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla g = f \quad (4.62)$$

где  $g$  - искомая функция, зависящая от времени  $t$  и координат  $\mathbf{x}$  пространства произвольной размерности. "Скорость"  $\mathbf{V}$  и "накачка"  $f$  являются некоторыми функциями времени и координат,  $t, \mathbf{x}$ , а также самой искомой функции  $g$ . Тогда решение уравнения (4.62) может быть построено следующим образом. Надо найти решения уравнений

$$\frac{dg}{dt} = f \quad (4.63)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V} \quad (4.64)$$

Траектории, описываемые уравнением (4.64), называются характеристиками системы. Чтобы найти значение функции  $g$  в момент времени  $t$  и в точке  $\mathbf{x}$ , необходимо взять характеристику, которая заканчивается в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{x}$ . После этого надо решить уравнение (4.63) вдоль этой характеристики, используя в качестве начального условия  $g(t_0, \mathbf{x}_0)$ , где  $t_0$  - начальное время, при котором задается начальное условие на функцию  $g$ , а  $\mathbf{x}_0$  - точка, в которой находится решение уравнения (4.64) в начальный момент времени  $t_0$ .

Задача 4.4.1. Найти решение уравнения (4.62) для сдвигового поля  $V_x = sy, V_y = 0$  с нулевыми начальными условиями и статического поля  $f(x, y) = \partial_x F(x, y)$ .

#### Глава 5

### АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

В отсутствие внешнего воздействия или в случае, когда оно стационарно, физическая система описывается уравнениями, которые не зависят явно от времени. Такие системы называются автономными. Мы будем интересоваться случаем, когда динамические уравнения автономной системы являются существенно нелинейными, что может приводить к достаточно сложному динамическому поведению, включая хаотический режим.

## 3.5 Автономные системы

### 3.5.1 5.1 Фиксированные точки и предельные циклы

В данном разделе мы рассмотрим решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, среди которых встречаются стационарные (не зависящие от времени) решения. Эти решения соответствуют некоторым точкам в фазовом пространстве, которые называются фиксированными точками. Мы исследуем поведение решения вблизи фиксированных точек и рассмотрим также так называемые предельные циклы.

В простейшем случае одной переменной  $x$  автономное дифференциальное уравнение имеет вид

$$dx/dt = v(x) \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) можно рассматривать, как уравнение движения точечной частицы, имеющей координату  $x$ , тогда  $v$  - скорость этой частицы. Стационарные решения уравнения (5.1) определяются корнями уравнения  $v(x) = 0$ . Если такой корень  $x_*$  существует, то  $x = x_*$  является стационарным решением уравнения (5.1). Точка  $x = x_*$  называется фиксированной точкой уравнения (5.1).

Рассмотрим поведение решения вблизи фиксированной точки. При  $x$ , близких к  $x_*$ , функция  $v(x)$  может быть разложена в ряд Тейлора. Главный член этого разложения имеет вид

$$v(x) \approx \alpha (x - x_*) \quad (5.2)$$

Решение линейного уравнения  $dx/dt = \alpha (x - x_*)$  имеет вид  $x - x_* \propto \exp(\alpha t)$ . Таким образом, при  $\alpha > 0$  точка  $x$  удаляется от фиксированной точки  $x_*$  с течением времени. В этом случае фиксированная точка называется неустойчивой. При  $\alpha < 0$  точка  $x$  приближается к фиксированной точке  $x_*$  с течением времени. В этом случае фиксированная точка называется устойчивой. Отметим, что возможна ситуация, когда  $x$  с течением времени уходит на бесконечность. В этом случае бесконечность ведет себя подобно устойчивой фиксированной точке.

Поведение решения уравнения (5.1) может быть качественно описано, если известны его фиксированные точки, то есть решения уравнения  $v(x) = 0$ . Точка  $x$  "отталкивается" от неустойчивых фиксированных точек и "притягивается" к устойчивым фиксированным точкам. Если нули функции  $v(x)$  не являются кратными, функция  $v(x)$  меняет знак в каждой фиксированной точке. Вследствие этого производная  $\alpha$  меняет свой знак от одной фиксированной точки к другой при увеличении  $x$ . Другими словами, устойчивые и неустойчивые фиксированные точки чередуются. Отсюда следует, что при увеличении  $t$  устойчивая фиксированная точка собирает в своей окрестности решения, для которых  $x$  в начальный момент времени попадает в один из прилегающих к этой точке интервалов, которые ограничиваются соседними неустойчивыми фиксированными точками.

Задача 5.1.1. Найти решение уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - x; \quad \frac{dx}{dt} = x - x^3$$

Убедиться, что поведение решения соответствует приведенной в тексте качественной картине.

Отдельного рассмотрения заслуживает случай кратного корня функции  $v(x)$ . Для двукратно вырожденного корня вблизи него  $v \approx \beta (x - x_*)^2$ . Проанализируем решение уравнения

$$dx/dt = \beta (x - x_*)^2 \quad (5.3)$$

которое описывает поведение  $x$  вблизи фиксированной точки. Его решение имеет вид

$$x - x_* = -\frac{1}{\beta (t - t_0)} \quad (5.4)$$

где  $t_0$  - некоторая константа, которая определяется начальным значением  $x = x_0$  при  $t = 0$ . Поведение решения зависит от знака  $\beta (x_0 - x_*)$ . Если  $\beta (x_0 - x_*) > 0$ , то  $t_0 > 0$ . В этом случае  $|x|$  стремится к бесконечности при  $t \rightarrow t_0$ . Если  $\beta (x_0 - x_*) < 0$ , то  $t_0 < 0$ .

В этом случае  $|x|$  стремится к  $x_*$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, эта фиксированная точка является "полуустойчивой".

Задача 5.1.2. Проанализировать поведение решения вблизи фиксированной точки, для которой корень  $v(x)$  является трехкратно вырожденным.

Перейдем теперь к автономной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

для двух скалярных переменных  $x, y$ . Эта система записывается в следующем виде

$$\frac{dx}{dt} = v(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = u(x, y) \quad (5.5)$$

где  $v$  и  $u$  - некоторые функции  $x, y$ . Систему (5.5) можно рассматривать, как уравнение, определяющее траекторию двумерного движения точечной частицы, положение которой определяется координатами  $(x, y)$ , тогда  $(v, u)$  - компоненты скорости этой частицы. Для однозначного определения траектории необходимо задать начальные условия, например, положение частицы  $(x_0, y_0)$  в начальный момент времени. Обратим внимание на то, что теперь необходимы два скалярных начальных условия, что соответствует числу переменных.

Для автономной системы, когда функции  $v$  и  $u$  в (5.5) не зависят от времени  $t$ , форма траектории, проходящей через некоторую точку  $(x_0, y_0)$ , не зависит от момента времени  $t$ , когда это происходит. Другими словами, на плоскости  $X - Y$  имеется совокупность не зависящих от времени траекторий, по которым движется материальная точка, попавшая на эту траекторию. Эта совокупность называется фазовым портретом системы уравнений (5.5). Заметим, что функции  $x(t), y(t)$  задают эти траектории параметрически, параметром же служит "время"  $t$ .

Важную роль в характеристике динамики автономной системы уравнений (5.5) играют фиксированные точки этой системы, которые определяются системой уравнений  $v = 0, u = 0$ . Прежде всего, очевидно, что любая фиксированная точка является не зависящим от времени решением автономной системы уравнений (5.5). Проанализируем поведение траекторий вблизи фиксированной точки. Особый интерес представляет устойчивые фиксированные точки. По определению, фиксированная точка является устойчивой, если при росте времени  $t$  к ней стремится любая траектория, начинающиеся в некоторой окрестности этой фиксированной точки.

Рассмотрим регулярную фиксированную точку  $x_f, y_f$  системы уравнений (5.5), вблизи которой главные члены разложения функций  $v$  и  $u$  в ряд Тейлора линейны по  $x - x_f, y - y_f$ . Вблизи таких фиксированных точек возможно различное поведение траекторий. Проанализируем это поведение. Поместим фиксированную точку в начало координат, что всегда можно сделать за счет сдвига переменных  $x, y$ . Тогда система уравнений (5.5) вблизи начала координат будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

где компоненты матрицы  $\hat{M}$  определяются первыми производными  $v, u$ , взятыми в фиксированной точке.

Решение системы (5.6) может быть выражено через собственные векторы и собственные значения матрицы  $\hat{M}$ . Представим решение в виде  $\phi_1(t)\mathbf{a}_1 + \phi_2(t)\mathbf{a}_2$ , где  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  - собственные векторы матрицы  $\hat{M}$ . Подстановка этого выражения в (5.6) приводит к уравнениям

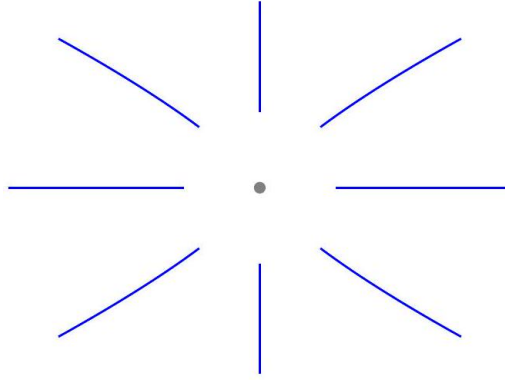


Рис. 5.1: Траектории в окрестности узловой фиксированной точки.

$d\phi_1/dt = \lambda_1\phi_1, d\phi_2/dt = \lambda_2\phi_2$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  - собственные значения матрицы  $\hat{M}$ . Эти уравнения немедленно решаются и мы находим общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{a}_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \mathbf{a}_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (5.7)$$

Здесь  $c_1, c_2$  - константы, которые определяются начальными условиями.

Рассмотрим случай действительной матрицы  $\hat{M}$ . Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  определяются из характеристического уравнения  $\det(\hat{M} - \lambda \hat{1}) = 0$ . В нашем случае это квадратное уравнение с действительными коэффициентами, то есть  $\lambda_1, \lambda_2$  могут быть найдены по формулам Виета. В зависимости от знака дискриминанта  $\lambda_1, \lambda_2$  могут быть действительными или комплексно сопряженными. Рассмотрим различные возможности.

Если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , то любая траектория уходит из фиксированной точки, которая в этом случае называется неустойчивым узлом. Траектории вблизи узловой фиксированной точки показаны на рисунке 5.1. Если  $\lambda_1 > \lambda_2$ , то горизонтальные линии соответствуют  $c_2 = 0$ , а вертикальные  $-c_1 = 0$ . В силу  $\lambda_1 > \lambda_2$  на больших временах главным в выражении (5.7) становится первое слагаемое (если  $c_1 \neq 0$ ), поэтому траектории стремятся стать горизонтальными. Рисунок 5.1 соответствует ортогональным векторам  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ . Если они не ортогональны, то система траекторий перекашивается.

Если  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , то любая траектория с ростом  $t$  стремится к фиксированной точке, то есть в этом случае она является устойчивой, такая фиксированная точка называется устойчивым узлом. Поведение траекторий вблизи устойчивого узла иллюстрируется тем же рисунком 5.1, но только движение по траекториям происходит в другую сторону. Опять же, рисунок 5.1 соответствует ортогональным векторам  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ . Если они не ортогональны, то система траекторий перекашивается.

Если знаки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  различны, то такая точка называется седловой. Поведение траекторий вблизи седловой фиксированной точки иллюстрирует рисунок 5.2. Пусть  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Тогда горизонтальная линия соответствует  $c_2 = 0$ , а вертикальная линия  $-c_1 = 0$ . На

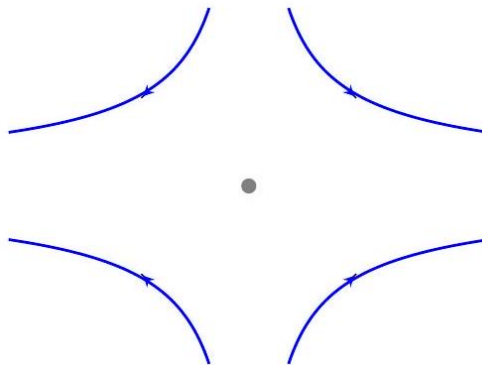


Рис. 5.2: Траектории в окрестности седловой фиксированной точки.

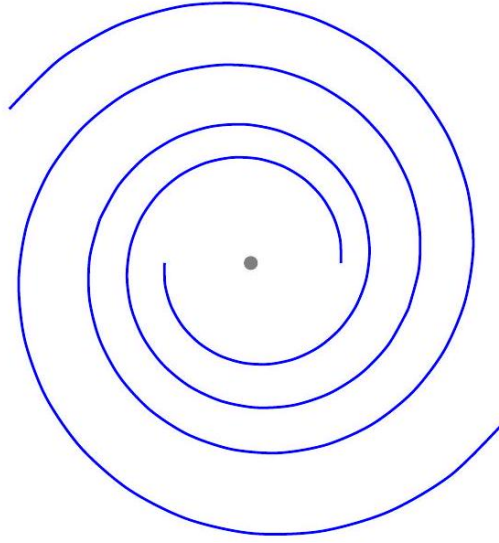


Рис. 5.3: Траектории в окрестности фокальной фиксированной точки.

больших временах главным в выражении (5.7) становится первое слагаемое (если  $c_1 \neq 0$ ), поэтому траектории стремятся стать горизонтальными. Рисунок 5.1 соответствует ортогональным векторам  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ . Если они не ортогональны, то система траекторий перекашивается.

Задача 5.1.3. Найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются комплексными (комплексно сопряженными) числами. В этом случае и  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  также являются комплексными (комплексно сопряженными) векторами. Если мы хотим иметь дело с действительным решением, то и константы  $c_1$  и  $c_2$  в выражении (5.7) следует выбрать комплексно сопряженными числами. В результате находим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(c' \mathbf{a}' - c'' \mathbf{a}'') \exp(\lambda' t) \cos(\lambda'' t) - 2(c'' \mathbf{a}' + c' \mathbf{a}'') \exp(\lambda' t) \sin(\lambda'' t) \quad (5.8)$$

где  $\lambda_1 = \lambda' + i\lambda''$ ,  $c_1 = c' + ic''$ ,  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}''$ .

Поведение траекторий вблизи фиксированной точки, которая характеризуется комплексно сопряженными  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , показано на рисунке 5.3, такая фиксированная точка называется фокусом. Мы видим, что траектории являются спиралями, раскручивающимися от фиксированной точки при  $\lambda' > 0$  и закручивающимися к фиксированной точке при  $\lambda' < 0$ . Таким образом, фокус является устойчивым, если  $\lambda' < 0$ .

Отдельно следует проанализировать случай, когда матрица  $\hat{M}$  сводится к клетке Жордана,

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае решение является линейной комбинацией двух членов, зависимость которых от времени определяется множителями  $\exp(\lambda t)$  и  $t \exp(\lambda t)$ . Траектории, которые

определяются этим решением, ведут себя, как в окрестности узла, причем он является устойчивым, если  $\lambda < 0$ .

Учет следующих за линейными членами разложения  $v$  и  $u$  в ряд Тейлора по  $x, y$  приводит к искажению траекторий, найденных в линейном приближении. Однако, пока поправки к линейному члену в  $v$  и  $u$  невелики, поведение траекторий вблизи узла, седла и фокуса качественно остается таким же, как и на рисунках 5.1-5.3.

В общем случае форма траекторий автономной системы уравнений определяется следующим уравнением первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f = \frac{u}{v} \quad (5.9)$$

которое вытекает из системы (5.5). Именно это уравнение определяет фазовый портрет системы. Обратим внимание на то, что динамика системы не определяется однозначно ее траекториями (фазовым портретом). Действительно, заменив  $u$  и  $v$  в системе (5.5) на  $hu$  и  $hv$  (где  $h$  - некоторая функция  $x, y$ ), мы придем к другому динамическому поведению. В то же время в силу (5.9) фазовый портрет системы при таком преобразовании не изменится. Преобразование  $v, u \rightarrow hv, hu$  означает, что происходит изменение параметра  $t$  в определяющих траекторию функциях  $x(t), y(t)$ .

Задача 5.1.4. Найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2y$$

В ряде случаев решение уравнения (5.9) позволяет найти полное решение исходной задачи (5.5). Действительно, если в результате решения (5.9) удастся найти форму траектории  $y(x)$ , то подстановка этого выражения в правую часть уравнения  $dx/dt = v(x, y)$  превращает его в уравнение первого порядка. Если и это уравнение удастся решить, то мы и получаем решение исходной задачи для  $x(t)$ . Функцию  $y(t)$  можно затем найти, поскольку мы знаем зависимость  $y(x)$ .

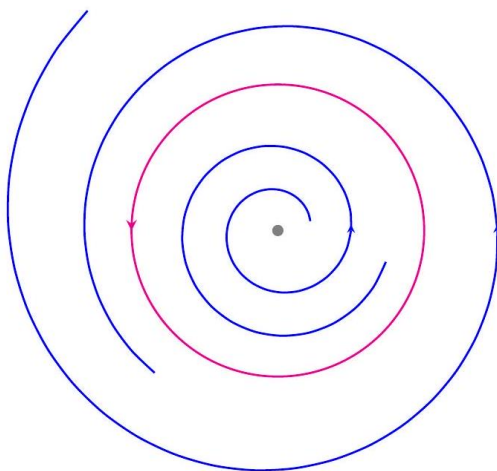


Рис. 5.4: Фазовый портрет системы вблизи устойчивого предельного цикла.

Задача 5.1.5. Найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2xy$$

Автономная система уравнений (5.5) допускает также так называемые предельные циклы. Предельным циклом называется замкнутая траектория. В общем случае траектории вблизи предельного цикла не являются замкнутыми, то есть предельный

цикл является изолированной замкнутой траекторией. Траектории в окрестности предельного цикла могут "притягиваться" к циклу или "отталкиваться" от него. В первом случае цикл называется устойчивым, а во втором случае - неустойчивым. Типичное устройство траекторий вблизи устойчивого предельного цикла показана на рисунке 5.4.

Задача 5.1.6. Найти предельный цикл системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - r^2), \quad \frac{dy}{dt} = x$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ . Установить его устойчивость. Найти период для этого цикла.

Приведенные соображения позволяют качественно построить фазовый портрет любой автономной системы. Прежде всего, надо найти все фиксированные точки и предельные циклы и установить поведение траекторий вблизи них. Поведение траекторий вдали от фиксированных точек и предельных циклов получаются путем экстраполяции. Траектории начинаются в неустойчивых фиксированных точках и заканчиваются в устойчивых. Они также могут приходить из бесконечности и уходить на бесконечность, поэтому поведение траекторий при больших значениях переменных требуют отдельного анализа. Предельные циклы делят плоскость  $x - y$  на отдельные области, любая траектория остается внутри такой области.

Задача 5.1.7. Нарисовать качественно фазовый портрет системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = (1 + y^2) \cos x$$

### 3.5.2 5.1.1 Уравнение Ван дер Поля

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля

$$\partial_t^2 x + x = \mu(1 - x^2) \partial_t x \quad (5.10)$$

которое было введено для описания работы генератора, основанного на  $L - C$  контуре с обратной связью. Очевидно, уравнение (5.10) может быть переписано в виде системы двух уравнений первого порядка

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x + \mu(1 - x^2)y \quad (5.11)$$

Система уравнений (5.11) имеет единственную фиксированную точку  $(0, 0)$ , которая неустойчива при  $\mu > 0$ . Ниже мы изучаем именно этот случай, когда система (5.11) обладает устойчивым предельным циклом.

Перепишем уравнение (5.14) в полярных координатах  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} dr/dt &= \mu(1 - r^2 \cos^2 \varphi) r \sin^2 \varphi \\ d\varphi/dt &= -1 + \mu(1 - r^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из уравнения (5.12) следует, что при больших  $r$  производная  $dr/dt$  отрицательна. Поэтому траектории не могут уходить на бесконечность. Поскольку при  $\mu > 0$  фиксированная точка  $0,0$  неустойчива, мы заключаем, что система уравнений (5.11) обладает устойчивым предельным циклом. Форма этого предельного цикла для различных значений параметра  $\mu$  показана на рисунке 5.5.

Задача 5.1.8. Найти форму траекторий системы при больших значениях  $r$ .

Как следует из системы уравнений (5.11), траектории системы даются уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \mu(1 - x^2) - \frac{x}{y} \quad (5.14)$$



Предельный цикл является замкнутой траекторией, которая дается уравнением (5.14). В общем случае форма предельного цикла может быть найдена только численно. Тем не менее, мы можем установить некоторые его общие геометрические свойства. Прежде всего, заметим, что в силу симметрии уравнения (5.14) предельный цикл симметричен относительно преобразования инверсии  $x, y \rightarrow -x, -y$ . Далее, на границах интервала по  $x$ ,

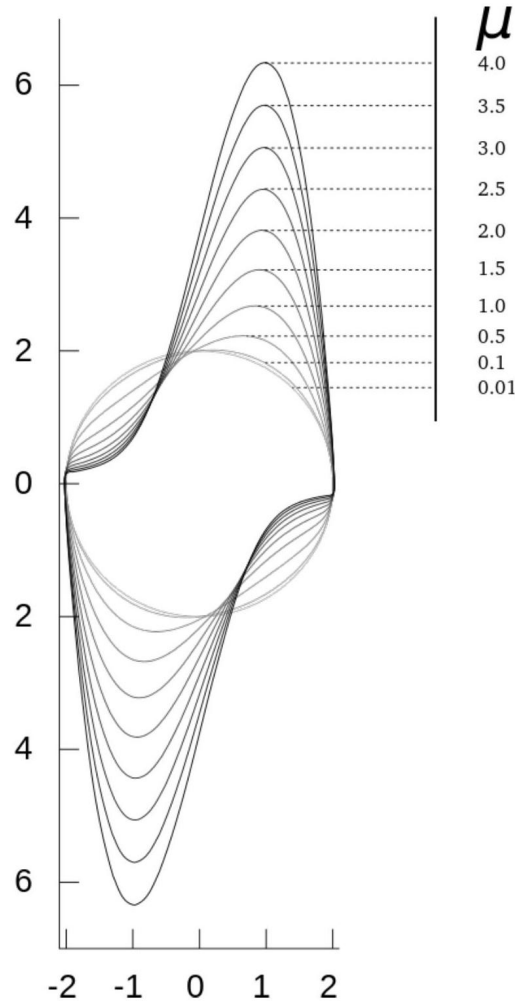


Рис. 5.5: Форма предельного цикла уравнения Ван дер Поля на плоскости  $X - Y$  при различных значениях параметра  $\mu$ . внутри которого располагается предельный цикл, производная  $dy/dx$  обращается в бесконечность. Поэтому эти точки предельного цикла должны иметь координату  $y = 0$ , так как только при этом условии обращается в бесконечность правая часть уравнения (5.14). Таким образом, предельный цикл разбивается на две симметричные ветви, для верхней из которых  $y > 0$ , а для нижней  $y < 0$ , смотри рисунок 5.5.

Рассмотрим случай малых  $\mu$ . При  $\mu = 0$  уравнение (5.12) вырождено, оно дает в качестве решения окружность произвольного радиуса  $r$ . Чтобы установить этот радиус, надо учесть поправку, связанную с членом с  $\mu$ . При малых  $\mu$  система уравнений (5.12, 5.13) дает

$$\frac{d \ln r}{d\varphi} = -\mu (1 - r^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi \quad (5.15)$$

В силу симметрии предельного цикла при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\pi$  радиус  $r$  должен вернуться к своему исходному значению. Интегрируя правую часть уравнения (5.15) (при  $r = \text{const}$ ) по углу  $\varphi$  от 0 до  $\pi$  и приравнявая результат к нулю, находим  $r = 2$ .

Задача 5.1.9. Найти первую по  $\mu$  поправку  $\kappa$   $r = 2$ .

Проанализируем форму предельного цикла уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра  $\mu$ . Рассматриваем верхнюю ветвь предельного цикла. При  $x < -1$  значение  $y$  мало. Пренебрегая в уравнении (5.14) левой частью, находим

$$y = \mu^{-1}x / (1 - x^2) \quad (5.16)$$

Это решение теряет свою применимость вблизи  $x = -1$ . При  $x > -1$  значение  $y$ , наоборот, велико. Поэтому в уравнении (5.14) можно пренебречь последним членом. Интегрируя оставшееся уравнение с граничным условием  $y = 0$  при  $x = -1$ , находим

$$y = \mu (x - x^3/3 + 2/3) \quad (5.17)$$

Это решение достигает максимума при  $x = 1$  и обращается в ноль при  $x = 2$ . Окрестности точки  $x = -1$ , где происходит переход с одного режима на другой, и точек  $x = \pm 2$ , где происходит переход с одной ветви на вторую, требует специального анализа. Полученную форму предельного цикла можно увидеть на рисунке 5.5 при больших  $\mu$ .

Задача 5.1.10. Найти период предельного цикла уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра  $\mu$ .

Задача 5.1.11. Проанализировать поведение решения уравнения (5.14) вблизи точки  $x = -1$  при больших значениях параметра  $\mu$ .

Задача 5.1.12. Проанализировать поведение решения уравнения (5.14) вблизи точки  $x = 2$  при больших значениях параметра  $\mu$ .

### 3.5.3 5.2 Бифуркации

Бифуркацией называется качественное изменение фазового портрета системы при изменении одного или нескольких параметров. Например, фиксированная точка может из устойчивой стать неустойчивой, что сопровождается перестройкой фазового портрета.

Простейший тип бифуркации дается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \quad (5.18)$$

Если параметр  $\mu$  отрицателен, то  $x$  за конечное время уходит в минус бесконечность. Если же параметр  $\mu$  положителен, то уравнение (5.18) имеет две фиксированные точки  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . Несложно убедиться, что фиксированная точка  $x = \sqrt{\mu}$  является устойчивой, а фиксированная точка  $x = -\sqrt{\mu}$  является неустойчивой. Таким образом, если начальное значение  $x_0$  лежит в интервале  $-\sqrt{\mu} < x_0$ , то с течением времени  $x$  приближается к фиксированной точке  $\sqrt{\mu}$ , а если начальное значение  $x_0$  лежит в интервале  $x_0 < -\sqrt{\mu}$ , то  $x$  за конечное время уходит в минус бесконечность.

Задача 5.2.1. Найти время, за которое решение уравнения (5.18) обращается в минус бесконечность при отрицательном  $\mu$ .

Таким образом, при прохождении параметра  $\mu$  через ноль поведение решений уравнения (5.18) качественно меняется. Такое изменение и называется бифуркацией, а значение параметра, при котором происходит бифуркация, называется критическим. Для уравнения (5.18) критическим значением параметра  $\mu$  является  $\mu = 0$ .

Следующим примером является уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \quad (5.19)$$

Если параметр  $\mu$  отрицателен, то уравнение (5.19) имеет единственную устойчивую фиксированную точку  $x = 0$ . При положительных  $\mu$  фиксированная точка  $x = 0$

становится неустойчивой, а возникают две устойчивые фиксированные точки  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . Таким образом, при критическом значении  $\mu = 0$  происходит бифуркация, которая заключается в перестройке системы фиксированных точек.

Переходим теперь к системам с двумя переменными. Как известно, в этом случае возможны различные типы поведения, смотри раздел 5.1. Рассмотрим систему уравнений (5.6), которая описывает поведение системы вблизи фиксированной точки. Это поведение зависит от собственных значений матрицы  $\hat{M}$ . Если оба собственных значения  $\lambda_1, \lambda_2$  отрицательны, то мы имеем дело с устойчивым узлом, если оба эти значения положительны, то мы имеем дело с неустойчивым узлом, а если одно из этих значений положительно, а другое отрицательно, то мы имеем дело с седлом. Таким образом, если при изменении параметров системы  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  меняет свой знак, то происходит бифуркация, связанная с изменением характера поведения системы вблизи фиксированной точки: узел меняется на седло или, наоборот, седло меняется на узел. Отметим также, что если при изменении параметров матрицы  $\hat{M}$  у собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2$  возникает мнимая часть (то есть они становятся комплексно сопряженными), то узел заменяется на фокус. Это еще один тип бифуркаций.

Возможны бифуркации, когда при изменении параметров системы вместо одной фиксированной точки возникает три или наоборот, остается одна вместо трех. Этот процесс описывается уравнением, аналогичным (5.19). Возможно также возникновение двух фиксированных точек или их исчезновение. Этот процесс описывается уравнением, аналогичным (5.18).

Более сложным случаем является бифуркация Хопфа, которая происходит в системе уравнений, которые описывают окрестность фиксированной точки  $x = 0, y = 0$ . Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dz}{dt} = [(\mu + i) + (\alpha + i\beta)|z|^2] z \quad (5.20)$$

где  $z = x + iy$ , а  $\mu, \alpha, \beta$  - действительные коэффициенты.

При отрицательном  $\mu$  фиксированная точка  $z = 0$  является устойчивой. Если  $\alpha < 0$  (этот случай называют суперкритическим), то фазовый портрет уравнения (5.20) не имеет больше никаких особенностей. Если же  $\alpha > 0$  (этот случай называют субкритическим), то фазовый портрет уравнения (5.20) имеет неустойчивый предельный цикл радиуса  $|z| = \sqrt{|\mu|/\alpha}$ . При положительном  $\mu$  фиксированная точка  $z = 0$  становится неустойчивой. В суперкритическом случае,  $\alpha < 0$ , при положительном  $\mu$  возникает устойчивый предельный цикл радиуса  $|z| = \sqrt{\mu/|\alpha|}$ . В субкритическом случае,  $\alpha > 0$ , при положительном  $\mu$  предельный цикл исчезает.

Таким образом, бифуркация Хопфа, которая происходит при изменении знака  $\mu$  (то есть критическим значением параметра  $\mu$  является  $\mu = 0$ ), заключается в замене устойчивой фиксированной точки на неустойчивую, что сопровождается либо исчезновением неустойчивого предельного цикла, либо возникновением устойчивого предельного цикла. Как и следует из общих правил, устойчивая фиксированная точка может сопровождаться только неустойчивым предельным циклом, а неустойчивая фиксированная точка может сопровождаться только устойчивым предельным циклом.

Задача 5.2.2. Найти закон движения по предельному циклу (если он существует), которому приводит решение уравнения (5.20).

Задача 5.2.3. Проанализировать устойчивость предельных циклов в суперкритическом и субкритическом случаях для уравнения (5.20).

### 3.5.4 5.2.1 Модель Лоренца

До сих пор мы ограничивались рассмотрением автономных систем, которые описываются одной переменной или двумя переменными. При переходе к системам, которые описываются большим числом переменных, возникает новая качественная особенность - при некоторых значениях параметров динамика системы может оказаться хаотической. Это означает, что траектория системы не притягивается к каким-либо устойчивым фиксированным точкам или предельным циклам, а "заметает" все фазовое пространство или его часть. Другими словами, для любой точки заметаемой области траектория окажется сколь угодно близко к этой точке, если наблюдать ее достаточно большое время.

Существуют различные сценарии перехода к хаотическому поведению системы. Их обсуждение выходит за рамки настоящего пособия, оно может быть найдено в специальной литературе. Здесь мы только кратко обсудим модель Лоренца, которая исторически явилась первой моделью, в которой при изменении ее параметров наблюдается переход к хаотическому поведению. В настоящее время известно огромное количество подобных моделей, которые показывают, что хаотическое поведение является скорее правилом, чем исключением для систем с числом переменных более двух.

Модель Лоренца формулируется в виде системы уравнений для трех переменных  $x, y, z$ , которые подчиняются следующим уравнениям

$$\begin{aligned}\partial_t x &= \sigma(y - x) \\ \partial_t y &= x(r - z) - y \\ \partial_t z &= xy - bz\end{aligned}\tag{5.21}$$

Здесь  $r, \sigma, b$  - параметры, которые считаются положительными. Переход к хаосу происходит при увеличении параметра  $r$ . Приведем небольшой анализ решения системы (5.21).

Система (5.21) имеет фиксированную точку  $(0, 0, 0)$ , которая устойчива при  $r < 1$  и становится неустойчивой при  $r > 1$ , то есть при  $r = 1$  происходит бифуркация. В результате бифуркации возникает две новые фиксированные точки  $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  и  $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ . Сначала эти фиксированные точки устойчивы, но при увеличении  $r$  происходит бифуркация, в результате которой эти фиксированные точки теряют устойчивость при некотором значении параметра  $r$ . При этой бифуркации не возникает новых фиксированных точек или устойчивого предельного цикла и система оказывается в состоянии хаоса.

Задача 5.2.4. Показать, что фиксированная точка  $(0, 0, 0)$  системы (5.21) устойчива при  $r < 1$  и становится неустойчивой при  $r > 1$ .

Задача 5.2.5. Показать, что фиксированная точка  $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  системы (5.21) устойчива при малом положительном  $r-1$  и становится неустойчивой при больших  $r$ .

При самых больших  $r$  возникает устойчивый предельный цикл, для которого справедливы следующие скейлинговые соотношения по  $r$

$$T \propto r^{-1/2}, \quad x \propto r^{1/2}, \quad y \propto r, \quad z \propto r$$

С учетом этих соотношений система уравнений (5.21) сводится к

$$\partial_t x = \sigma y, \quad \partial_t y = x(r - z), \quad \partial_t(r - z) = -xy\tag{5.22}$$

Отсюда следует  $y^2 + (r - z)^2 = R^2, x^2/(2\sigma) + r - z = C$ , где константы  $R \sim C \sim r$ . Подобно тому, как это было сделано для осциллятора Ван дер Поля, эти константы должны быть

найденны из условий, что первые поправки по  $1/r$  не разрушают замкнутости найденного предельного цикла.

Задача 5.2.6. Найти константы  $R$  и  $C$ , которые характеризуют предельный цикл модели Лоренца, который возникает при  $b = 1, \sigma \ll 1$  и больших значениях параметра  $r$ .

Таким образом, хаотическое поведение модели Лоренца реализуется в некотором интервале по основному параметру  $r$ , границы которого зависят от параметров модели  $b, \sigma$ .

### 3.5.5 5.3 Лагранжевы уравнения

В настоящем разделе мы рассмотрим динамику физических систем, уравнения для которых получаются, как условия экстремума некоторого функционала, который называется действием. Мы рассмотрим действие

$$\mathcal{S} = \int dt L(\partial_t \mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (5.23)$$

где  $\mathbf{x}$  - набор переменных, характеризующих систему, а  $L$  называется функцией Лагранжа. Автономность системы выражается в отсутствии явной зависимости функции Лагранжа от времени. Условие экстремума действия (5.23) имеет вид

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial (\partial_t \mathbf{x})} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.24)$$

Уравнение (5.24) являются уравнением второго порядка по времени.

Несложно переписать уравнение (5.24) в виде уравнений первого порядка по времени. Для этого следует ввести переменные  $\mathbf{p} = \partial L / \partial (\partial_t \mathbf{x})$ , а также функцию Гамильтона

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p} \partial_t \mathbf{x} - L \quad (5.25)$$

Как следует из определения,  $dH = d\mathbf{p} \partial_t \mathbf{x} - d\mathbf{x} \partial L / \partial \mathbf{x}$ . Таким образом, мы приходим к уравнениям первого порядка

$$\partial_t \mathbf{x} = \partial H / \partial \mathbf{p} \quad (5.26)$$

$$\partial_t \mathbf{p} = -\partial H / \partial \mathbf{x} \quad (5.27)$$

которые называют каноническими. Это система  $2n$  уравнений первого порядка, где  $n$  - число переменных  $\mathbf{x}$ . Эффективное действие, экстремумом которого являются канонические уравнения (5.26, 5.27), имеет вид

$$\mathcal{S} = \int dt [\mathbf{p} \partial_t \mathbf{x} - H(\mathbf{p}, \mathbf{x})] \quad (5.28)$$

Варьировать действие (5.28) надо как по переменным  $\mathbf{x}$ , так и по переменным  $\mathbf{p}$ .

Для системы взаимодействующих частиц функция Гамильтона имеет вид

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + U(\mathbf{x}_i) \quad (5.29)$$

где индекс  $i$  нумерует частицы,  $m_i$  - их массы, а потенциал  $U$  содержит как внешний потенциал, так и энергию взаимодействия между частицами. Например, для осциллятора, то есть для частицы в квадратичном внешнем потенциале

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{x}^2}{2} \quad (5.30)$$

где  $m$  - масса частицы, а  $\omega$  - частота колебаний.

Уравнения (5.26, 5.27) приводят к закону сохранения энергии  $H = \text{const.}$  Действительно, вследствие уравнений (5.26, 5.27) находим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \partial_t \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \partial_t \mathbf{p} = 0$$

Закон сохранения энергии является следствием лагранжевой формулировки уравнений динамики системы и автономности, то есть однородности системы по времени. Закон сохранения энергии позволяет понизить на единицу число  $2n$  уравнений (5.26, 5.27). В частности, для случая одной переменной  $x$  второй порядок уравнений понижается до первого.

Задача 5.3.1. Найти уравнение первого порядка для одномерного движения частицы массы  $m$  во внешнем потенциале  $U$ .

Наличие дополнительной симметрии функции Лагранжа или функции Гамильтона приводит к дополнительным законам сохранения, которые позволяют далее понизить порядок системы уравнений (5.26, 5.27).

Рассмотрим в качестве примера случай системы, которая описывается двумя переменными  $x, y$ . Будем считать, что функция Лагранжа инварианта относительно сдвига фазы  $z \rightarrow e^{i\alpha} z$ , где  $z = x + iy$ . Например, такой симметрией обладает функция Лагранжа

$$L = \frac{m (\partial_t x)^2}{2} + \frac{m (\partial_t y)^2}{2} - U \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad (5.31)$$

которая описывает двумерное движение частицы в потенциале, зависящем только от расстояния до начала координат. Произведем инфинитезимальное преобразование координат  $\delta z = i\alpha z$ , где  $\alpha$  - произвольная функция времени. Вариация действия (5.23) в силу инвариантности функции Лагранжа  $L$  имеет вид

$$\delta S = \int dt \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_t x)} (-\partial_t \alpha y) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_t y)} (\partial_t \alpha x) \right]$$

Для функций, удовлетворяющих уравнениям движения, вариация действия должна быть равна нулю для любых вариаций переменных. Отсюда следует, что коэффициент при  $\partial_t \alpha$  должен быть равен константе. Таким образом, мы приходим к закону сохранения

$$p_x y - p_y x = \text{const.} \quad (5.32)$$

Это есть не что иное, как закон сохранения углового момента количества движения, который должен выполняться в центральном поле.

### 3.5.6 5.4 Релаксационные уравнения

Релаксационные уравнения описывают приближение физической системы к положению равновесия. Для системы с несколькими степенями свободы, которые описываются набором переменных  $x_i$ , релаксационное уравнение имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (5.33)$$

где  $F$  - некоторая функция  $x_i$ . Если система характеризуется единственным параметром  $x$ , то к виду (5.33) сводится произвольное уравнение  $dx/dy = v(x)$ , тогда  $F$  является первообразной от  $-v$ . В этом случае никакой специфики в релаксационном уравнении нет.

Однако уже для двух  $x_i$  далеко не всякая система уравнений (5.5)

$$dx/dt = v, \quad dy/dt = u$$

сводится к релаксационному виду (5.33). Действительно, выражения  $v = -\partial F/\partial x, u = -\partial F/\partial y$  означают, что

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Другими словами, производные от  $u$  и  $v$  связаны между собой. Аналогичная связь справедлива и для случая большего числа переменных.

Фиксированные точки уравнения (5.33) определяются условиями  $\partial F/\partial x_i = 0$ . Вблизи фиксированной точки  $x_{*i}$  функция  $F$  представляется в виде

$$F \approx F_0 + \frac{1}{2} M_{ij} (x_i - x_{*i}) (x_j - x_{*j})$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Здесь  $F_0$  - значение функции в фиксированной точке, а  $M_{ij} = \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j$  - матрица вторых производных в фиксированной точке. Поэтому матрица  $M_{ij}$  является симметричной.

Уравнение (5.33) вблизи фиксированной точки  $x_{*j}$  имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -M_{ij} (x_j - x_{*j}) \quad (5.34)$$

В силу симметрии матрицы  $\hat{M}$  ее всегда можно привести к диагональному виду. Представление (5.34) показывает, что фиксированные точки релаксационного уравнения (5.33) могут быть устойчивыми или неустойчивыми узлами, а также седлами. В то же время они не могут быть фокусами, поскольку собственные значения (действительной) симметричной матрицы всегда действительны. Отметим, что устойчивые узлы соответствуют минимумам функции  $F$ , неустойчивые узлы соответствуют максимумам функции  $F$ , а седловая точка соответствует экстремуму функции  $F$ , которые не сводятся к минимуму или максимуму.

В случае, когда некоторые собственные числа матрицы  $\hat{M}$  равны нулю, следует принимать во внимание более высокие, чем второй, члены разложения функции  $F$  по  $x_i - x_{*i}$ . Тогда может реализоваться случай, когда часть траекторий уходит от фиксированной точки, а часть приближается к ней.

Задача 5.4.1. Как выглядит фазовый портрет системы, которая описывается уравнением (5.5) с двумя переменными и  $F = xy^2$ ?

В силу уравнения (5.33)

$$\frac{dF}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \quad (5.35)$$

Поскольку правая часть уравнения (5.35) неотрицательна, функция  $F$  монотонно убывает со временем. Отсюда следует в частности, что решениями системы (5.33) не могут быть предельные циклы.

Обычно (если нет никаких особенностей в функции  $F$ ) любая траектория уравнения (5.5) приближается к некоторому устойчивому узлу, в котором функция  $F$  достигает локального минимума. Таким образом, пространство параметров  $x_i$  делится на области притяжения, каждая из которых "принадлежит" некоторому устойчивому узлу: траектория, начинающаяся в такой области, со временем приближается к своему устойчивому узлу. Надо иметь в виду, что одним из таких устойчивых узлов может оказаться бесконечно удаленная точка. Границы между областями притяжения

содержат траектории уравнения (5.5). В частности, для системы с двумя параметрами, когда граница между областями является некоторой кривой, она является одной из траекторий.

Задача 5.4.2. Установить закон, по которому траектории уравнения (5.33) для функции двух переменных  $F = (x^4 + y^4)/4 - (x^2 + y^2)/2 - 3xy$  приближаются к устойчивым фиксированным точкам. Каковы области их притяжения? Проверить, что граница между ними является одной из траекторий.

Рассмотрим частный случай, когда функция  $F$  имеет вид

$$F = \frac{a}{2}x^2 + \frac{\lambda}{24}x^4 \quad (5.36)$$

$$x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Эта функция инвариантна относительно вращений в пространстве параметров  $x_i$  и относительно изменения знака  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . При прохождении параметра  $a$  через ноль происходит бифуркация. При  $a > 0$  имеется единственная устойчивая точка  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , где достигает минимума. А при  $a < 0$  функция  $F$  достигает минимума на сфере  $x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = -6a/\lambda$ .

Уравнение (5.33) для функции (5.36) имеет вид

$$\partial_t x_i = -ax_i - (\lambda/6)x^2 x_i \quad (5.37)$$

Легко проверить, что уравнение (5.37) с функцией (5.36) сохраняет единичный вектор  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ . Другими словами, уравнение (5.37) описывает изменение  $\mathbf{x}$  вдоль некоторой радиальной прямой:  $\mathbf{x} = x\mathbf{n}$ , где  $x = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Уравнение на  $x$  имеет вид

$$\partial_t x = -ax - (\lambda/6)x^3 \quad (5.38)$$

При  $a > 0$  величина  $x$  релаксирует к нулю, а при  $a < 0$  величина  $x$  релаксирует к значению  $\sqrt{6|a|/\lambda}$ .

Задача 5.4.3. Найти решение уравнения (5.38) при  $a < 0$  для произвольного начального условия  $x_0$ .

Пусть указанная симметрия слабо нарушена, то есть к выражению (5.36) добавлен малый член  $\delta F$ , нарушающий указанную симметрию. Тогда при  $a < 0$  эволюция  $\mathbf{x}$  проходит в два этапа: сначала происходит быстрая релаксация  $x$  к значению  $\sqrt{6|a|/\lambda}$ , а затем происходит медленная релаксация  $\mathbf{x}$  по сфере  $x = \sqrt{6|a|/\lambda}$  к минимуму функции  $F + \delta F$ . Чтобы установить закон релаксации по сфере, мы должны перейти к уравнению на единичный вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/x$ :

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\frac{1}{x} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta F - \mathbf{n} \left( \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta F \right) \right] \quad (5.39)$$

При изучении релаксации на втором этапе (релаксация по сфере) мы можем подставить здесь  $x = \sqrt{6|a|/\lambda}$ .

Рассмотрим  $\delta F = -\mathbf{h}\mathbf{x}$ . В этом случае минимум функции  $F + \delta F$  достигается при  $\mathbf{x}$ , параллельным  $\mathbf{h}$ , то есть при релаксации по сфере единичный вектор  $\mathbf{n}$  поворачивается к направлению  $\mathbf{h}$ . Вследствие уравнения (5.40) находим

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{1}{x} [\mathbf{h} - \mathbf{n}(\mathbf{h}\mathbf{n})] \quad (5.40)$$

Таким образом, темп релаксации по сфере оценивается, как  $h/x$ , где  $x = \sqrt{6|a|/\lambda}$ .



Задача 5.4.4. Найти зависимость от времени единичного вектора, который подчиняется уравнения (5.40), в двухкомпонентном случае.

Задача 5.4.5. Найти зависимость от времени единичного вектора, который подчиняется уравнения (5.40), в трехкомпонентном случае.

### 3.5.7 5.4.1 Полевые релаксационные уравнения

Переходим к случаю, когда рассматривается релаксация поля  $\varphi(\mathbf{r})$ . Динамическое уравнение, которое мы будем анализировать, аналогично (5.33):

$$\partial_t \varphi = -\delta \mathcal{F} / \delta \varphi \quad (5.41)$$

В правой части здесь стоит вариационная производная некоторого функционала  $\mathcal{F}$  от  $\varphi$ . Вычисляя производную от  $\mathcal{F}$ , находим

$$\partial_t \mathcal{F} = - \int dV (\delta \mathcal{F} / \delta \varphi)^2 = - \int dV (\partial_t \varphi)^2 \quad (5.42)$$

Таким образом, уравнение (5.41) приводит к монотонному убыванию функционала  $\mathcal{F}$  со временем. Поэтому конечным результатом эволюции будет состояние системы, которое соответствует (локальному) минимуму функционала  $\mathcal{F}$  в пространстве функций  $\varphi(\mathbf{r})$ .

Рассмотрим обобщение функции (5.36) на случай поля

$$\mathcal{F} = \int dV \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} a \varphi^2 + \frac{1}{24} \lambda \varphi^4 \right] \quad (5.43)$$

где  $\lambda > 0$ . Поскольку градиентная энергия, пропорциональная  $(\nabla \varphi)^2$ , неотрицательна, минимум функционала (5.43) достигается на однородном решении, когда градиентная энергия равна нулю. Поэтому анализ минимумов функционала  $\mathcal{F}$  аналогичен уже рассмотренному случаю. При  $a > 0$  минимум функционала  $\mathcal{F}$  достигается при  $\varphi = 0$ , а при  $a < 0$  минимум достигается при  $\varphi_0 = \sqrt{6|a|/\lambda}$

Уравнение (5.41) для функционала (5.43) имеет вид

$$\partial_t \varphi = \nabla^2 \varphi - a \varphi - \frac{\lambda}{6} \varphi^3 \quad (5.44)$$

В случае  $a > 0$  минимум функционала (5.43) соответствует  $\varphi = 0$ . Вблизи этого минимума уравнение (5.44) можно линеаризовать, что дает  $\partial_t \varphi = \nabla^2 \varphi - a \varphi$ . Делая подстановку  $\varphi = \exp(-at)\phi$ , находим

$$\varphi = \exp(-at)\phi, \quad \partial_t \phi = \nabla^2 \phi \quad (5.45)$$

Таким образом наряду с множителем  $\exp(-at)$ , который описывает затухание  $\varphi$  со временем, поле  $\varphi$  содержит фактор  $\phi$ , который подчиняется диффузионному уравнению. Аналогично происходит релаксация состояния системы к значению  $\varphi_0 = \sqrt{6|a|/\lambda}$  при  $a < 0$ .

Задача 5.4.6. Найти уравнение, которое описывает приближение  $\varphi$  к  $\varphi_0$  при  $a < 0$  и описать его решение.

Помимо минимума  $\varphi = \varphi_0$  функционал (5.43) имеет минимум  $\varphi = -\varphi_0$ . Может случиться, что в разных областях пространства  $\varphi$  релаксирует к разным значениям,  $\varphi = \varphi_0$  и  $\varphi = -\varphi_0$ . В этом случае конечным результатом эволюции является возникновение границы между областями, где  $\varphi$  меняется от  $-\varphi_0$  до  $+\varphi_0$ . Найдём структуру этой границы (доменной стенки), считая ее плоской. Последнее мотивируется тем, что именно для плоской границы достигается минимум функционала (5.43) при условии, что значения  $\varphi$  вдали от границы равны  $\pm\varphi_0$ .

В равновесии  $\partial_t \varphi = 0$ , то есть структуру доменной стенки определяет уравнение  $\delta \mathcal{F} / \delta \varphi = 0$ . Для плоской границы оно приобретает вид

$$a\varphi - \partial_x^2 \varphi + \frac{\lambda}{6} \varphi^3 = 0$$

где ось  $X$  перпендикулярна границе раздела. Это уравнение имеет первый интеграл, который записывается в виде

$$(\partial_x \varphi)^2 = \frac{\lambda}{12} (\varphi^2 - \varphi_0^2)^2$$

где мы учли, что при  $x \rightarrow \pm\infty$  поле  $\varphi$  выходит на однородное значение  $\pm\varphi_0$ . Мы считаем, что при  $x \rightarrow \infty$  поле  $\varphi \rightarrow \varphi_0$ . Тогда

$$\partial_x \varphi = \sqrt{\lambda/12} (\varphi_0^2 - \varphi^2)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \tanh \left[ \sqrt{|a|/2} (x - x_0) \right] \quad (5.46)$$

где  $x_0$  определяет положение границы раздела.

При добавлении к функционалу (5.43) дополнительных членов доменная стенка перестает быть статическим решением, а начинает двигаться с конечной скоростью. Рассмотрим следующий дополнительный член

$$\delta \mathcal{F} = - \int dV h \varphi \quad (5.47)$$

При  $h > 0$  минимум  $\mathcal{F}$  с  $\varphi = \varphi_+ > 0$  становится более глубоким, чем с  $\varphi = \varphi_- < 0$ . Это означает, что доменная стенка, разделяющая области с  $\varphi > 0$  и  $\varphi < 0$ , будет двигаться в сторону области с  $\varphi < 0$ , так как при этом величина  $\mathcal{F}$  уменьшается. Найдем соотношение, определяющее скорость этого движения. В силу однородности задачи решение уравнения (5.41) можно представить в виде  $\varphi = \phi(x + vt)$ , где  $\phi \rightarrow \varphi_+$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $\phi \rightarrow \varphi_-$  при  $x \rightarrow -\infty$ . В этом случае при  $h > 0$  доменная стенка движется влево, то есть  $v > 0$ . В этом режиме функционал (5.43) не меняется, то есть изменение  $\mathcal{F}$  связано с членом (5.47). Для этого вклада находим

$$-\partial_t \delta \mathcal{F} = \int dV h \partial_t \phi = \int dV h v \partial_x \phi = S h v (\varphi_+ - \varphi_-)$$

где  $S$  - площадь доменной стенки. С другой стороны, в силу (5.42)

$$-\partial_t \mathcal{F} = \int dV (\partial_t \phi)^2 = S v^2 \int dx (\partial_x \phi)^2$$

Приравнивая данные величины, находим соотношение

$$h (\varphi_+ - \varphi_-) = v \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\partial_x \phi)^2 \quad (5.48)$$

которое и определяет скорость движения доменной стенки.

**Задача 5.4.7.** Найти скорость движения доменной стенки при малых  $h$ , когда выражение (5.46) остается хорошим приближением для функции  $\phi$ .

Уравнение (5.44) при  $a < 0$  имеет решение, которое описывает распространение фронта, перед которым поле  $\varphi$  имеет неустойчивое решение  $\varphi = 0$ , а за фронтом поле  $\varphi$  выходит на равновесное решение  $\varphi = \varphi_0$ . Будем рассматривать плоский фронт, перпендикулярный оси  $X$ . В силу однородности задачи фронт распространяется с

постоянной скоростью  $v$ . Тогда поле  $\varphi$  представляется в виде  $\varphi = \varphi_0 u(x - vt)$ , причем  $u(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$  и  $u(\xi) \rightarrow 1$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Подставляя приведенное представление в уравнение (5.44), находим

$$v \partial_\xi u + \partial_\xi^2 u + |a| (u - u^3) = 0 \quad (5.49)$$

Уравнение (5.49) имеет решение

$$u(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(\kappa \xi)} \quad (5.50)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.49) и приравнявая коэффициенты при различных степенях  $\exp(\kappa \xi)$ , находим

$$\begin{aligned} -v\kappa + \kappa^2 + |a| &= 0 \\ -v\kappa - \kappa^2 + 2|a| &= 0 \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений дает  $\kappa = \sqrt{|a|/2}$ ,  $v = 3\sqrt{|a|/2}$ .

Задача 5.4.8. Найти темп убывания функционала (5.43) на единицу площади при движении фронта.

До сих пор мы рассматривали скалярное поле. Рассмотрим теперь векторное поле  $\varphi$ . Мы рассматриваем тот же функционал (5.43), который приводит к уравнению

$$\partial_t \varphi = \nabla^2 \varphi - a\varphi - \frac{\lambda}{6} \varphi^2 \varphi \quad (5.51)$$

которое является обобщением уравнения (5.44). Эволюция поля  $\varphi$ , которая описывается уравнением (5.44), при  $a < 0$  проходит в два этапа. Сначала за время порядка  $|a|^{-1}$  происходит релаксация абсолютной величины поля  $\varphi$  к равновесному значению  $\varphi_0$ , после чего поле  $\varphi$  приобретает вид  $\varphi = \varphi_0 \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор. На больших временах происходит релаксация единичного вектора  $\mathbf{n}$  к однородному значению.

Найдем уравнение, которое описывает эту вторую стадию. Для этого подставим  $\varphi = |\varphi| \mathbf{n}$  в уравнение (5.51), спроектируем результат на направление, перпендикулярное  $\mathbf{n}$ , и пренебрежем производными от  $|\varphi| \approx \varphi_0$ . В результате находим

$$\partial_t n_\alpha = \nabla^2 n_\alpha + n_\alpha (\nabla n_\beta)^2 \quad (5.52)$$

Это уравнение, как и положено, сохраняет условие  $\mathbf{n}^2 = 1$ , то есть производная по времени от  $\mathbf{n}^2$  в соответствии с этим уравнением равна нулю. Отметим, что из уравнения (5.52) выпали члены с  $a$  и  $\lambda$ , ответственные за релаксацию абсолютного значения параметра порядка. Обратим внимание на то, что уравнение (5.52) является нелинейным.

Задача 5.4.9. Найти решение уравнения (5.52) для двухкомпонентного параметра порядка, когда компоненты  $\mathbf{n}$  можно записать в виде  $n_1 = \cos \theta$ ,  $n_2 = \sin \theta$ .

Задача 5.4.10. Найти решение уравнения (5.52) для трехкомпонентного параметра порядка, когда при  $t = 0$  компоненты  $\mathbf{n}$  можно записать в виде  $n_1 = s_0 \cos(q_0 z)$ ,  $n_2 = s_0 \sin(q_0 z)$ ,  $n_3 = \sqrt{1 - s_0^2}$ .

Рассмотрим неустойчивость на конечном волновом векторе, которую можно описать функционалом

$$\mathcal{F} = \int dV \left[ \frac{1}{8q_0^2} [(\nabla^2 + q_0^2) \varphi]^2 + \frac{1}{2} a \varphi^2 + \frac{1}{24} \lambda \varphi^4 \right], \quad (5.53)$$

где  $\lambda > 0$ , а  $q_0$  - некоторый волновой вектор. Уравнение (5.41) для функционала (5.53) имеет вид

$$\partial_t \varphi = -\frac{1}{4q_0^2} (\nabla^2 + q_0^2)^2 \varphi - a\varphi - \frac{\lambda}{6} \varphi^3 \quad (5.54)$$

Обращаем внимание на дифференциальный оператор четвертого порядка в этом уравнении.

При  $a > 0$  минимум функционала (5.53) достигается при  $\varphi = 0$ , а при  $a < 0$  этот минимум соответствует ненулевому  $\varphi$ . В силу того, что градиентный член функционала (5.53) имеет минимум при конечном волновом векторе  $q = q_0$ , при  $a < 0$  поле  $\varphi$  в минимуме неоднородно, его можно записать в виде

$$\varphi = \phi \cos(q_0 x) \quad (5.55)$$

где  $\phi$  не зависит от координат, а направление оси  $X$  произвольно. Подставляя выражение (5.55) в функционал (5.53), находим

$$\mathcal{F} = V \left( +\frac{1}{4} a \phi^2 + \frac{1}{64} \lambda \phi^4 \right) \quad (5.56)$$

где  $V$  - объем системы. Выражение (5.56) достигает минимума при  $\phi = \phi_0$ , где  $\phi_0 = \sqrt{8|a|/\lambda}$ .

Вообще говоря, формула (5.56) дает приближенное выражение для минимума функционала (5.53), которое работает при условии  $q_0^2 \gg |a|$ . Поправки к (5.56) можно найти из условия экстремума  $\delta\mathcal{F}/\delta\varphi = 0$ . Выражение для  $-\delta\mathcal{F}/\delta\varphi$  выписано в правой части уравнения (5.54). Приравнявая это выражение к нулю, мы находим, что, во-первых, в поле  $\varphi$  появляются высшие гармоники вида  $\phi_n \cos[(2n+1)q_0 x]$ , во-вторых, возникают поправки к значению  $\phi_0 = \sqrt{8|a|/\lambda}$ .

Задача 5.4.11. Найти первую поправку  $\kappa$  выражению (5.55) с  $\phi_0 = \sqrt{8|a|/\lambda}$ .

Найдем закон релаксации системы к состоянию (5.55). Для этого линеаризуем уравнение (5.54) по  $\delta\varphi = \varphi \phi_0 \cos(q_0 x)$ :

$$\partial_t \delta\varphi = -\frac{1}{4q_0^2} (\nabla^2 + q_0^2)^2 \delta\varphi - a\delta\varphi - 2|a| [1 + \cos(2q_0 z)] \delta\varphi$$

Рассмотрим релаксацию  $\delta\varphi$  с волновыми векторами, близкими к  $q_0$ . В этом случае множитель  $\cos(2q_0 z)$  породит вклад в  $\delta\varphi$  с волновыми векторами, далекими от  $q_0$ , который будет мал из-за большого в этой области градиентного члена. Поэтому мы пренебрегаем множителем  $\cos(2q_0 z)$ . Переходя к Фурье-гармонике с волновым вектором  $q$  и раскладывая градиентный член по  $q - q_0$ , находим

$$\partial_t \tilde{\varphi} = -(q - q_0)^2 \tilde{\varphi} - |a| \tilde{\varphi} \quad (5.57)$$

Задача 5.4.12. Найти Гриновскую функцию уравнения (5.57).

### 3.5.8 5.5 Теория возмущений.

Как правило, решения дифференциальных уравнений не могут быть найдены в аналитическом виде. В этом случае для их исследования следует применять численные методы. В то же время существует ограниченный набор "базисных" задач, решения которых могут быть найдены аналитически. Рассмотрим случай, когда дифференциальное уравнение для величины  $u$  уравнение сводится к виду

$$F(x, u, \partial_x u, \dots) + \epsilon G(x, u, \partial_x u, \dots) = 0 \quad (5.58)$$

Мы полагаем, что решение уравнения  $F = 0$  известно аналитически, а  $\epsilon \ll 1$  - малый параметр. В этом случае решение уравнения (5.58) можно искать в виде ряда по  $\epsilon$  члены которого, начиная с первого, дают поправки к решению уравнения  $F = 0$ . Как правило, ряд по  $\epsilon$  является асимптотическим.

Будем считать, что функция  $F$  линейна по старшей производной  $\partial_x^n u$ , а также является регулярной функцией своих переменных, не имеющей по ним особенностей в интересующей нас области параметров. Этого всегда можно добиться преобразованием уравнения  $F = 0$ . Построение возмущенного решения уравнения (5.58) сводится к следующему. Мы берем некоторое решение  $u_0$  уравнения  $F = 0$  и подставляем его в правую часть уравнения (5.58). После этого следует найти поправку  $u_1$  к  $u_0$ , которую можно найти, как решение уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial u} u_1 + \frac{\partial F}{\partial (\partial_x u)} \partial_x u_1 + \dots = \epsilon G$$

которое получается линеаризацией левой части уравнения (5.58). В производные  $\partial F / \partial u, \partial F / \partial (\partial_x u)$  здесь надо подставлять  $u_0$ . Приведенное линеаризованное уравнение следует решать с учетом граничных условий. В результате решения получается поправка  $u_1 \propto \epsilon$ .

Задача 5.5.1. Найти нулевой и первый по членам решения уравнения  $\partial_x u + \gamma u + \epsilon x u = 0$  с граничным условием  $u(0) = 1$ . Сравнить его с точным решением этого уравнения.

Чтобы найти поправку второго порядка по  $\epsilon$ ,  $u_2$ , следует подставить сумму  $u = u_0 + u_1 + u_2$  в левую часть уравнения (5.58) и удержать в ней член, квадратичный по  $\epsilon$ . Для этого  $F$  следует разложить до первого порядка по  $u_2$  и до второго порядка по  $u_1$ . В правой части уравнения (5.58) также следует найти вклад, квадратичный по  $\epsilon$ . Для этого в  $G$  следует подставить  $u = u_0 + u_1$  и удержать член, линейный по  $u_1$ . В результате получится линейное уравнение на  $u_2$ , решение которого (с учетом граничных условий) и даст вклад второго по  $\epsilon$  порядка в  $u$ .

Обобщение этой процедуры на более высокие порядки очевидно. Мы должны каждый раз записывать  $u$  в виде  $u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$  и последовательно находить  $u_1, u_2, \dots$ , решая линейное уравнение на очередную поправку, которое получается в результате удерживания в левой и правой части уравнения (5.58) членов соответствующего порядка по  $\epsilon$ . Несмотря на некоторую громоздкость, эта процедура позволяет прямым вычислением найти разложение  $u$  по  $\epsilon$ .

Однако прямая теория возмущений по  $\epsilon$  оказывается неприменимой вблизи особых точек, где коэффициент при старшей производной в функции  $F$  обращается в ноль. Она также неприменима при анализе пограничных слоев, которые формируются в случае, когда член со старшей производной отсутствует в  $F$ , но присутствует в  $G$ , то есть имеет малость  $\epsilon$ . Далее мы разбираем эти специальные случаи.

### 3.5.9 5.5.1 Решение вблизи особой точки основного уравнения

Мы будем называть особыми те точки, где коэффициент при старшей производной в  $F$  обращается в ноль. Это является обобщением понятия особой точки, введенное в разделе 2.1.1. При наличии особой точки (которую мы без потери общности будем помещать в  $x = 0$ ) нулевое приближение уравнения (5.58) должно строиться следующим образом. Оно задается решением уравнения  $F = 0$  везде, за исключением узкой окрестности точки  $x = 0$ . Чтобы найти поведение функции  $u$  в этой области, в функциях  $F$  и  $G$  следует сохранить главные по  $x$  члены и решить получившееся уравнение. Его решение вне рассматриваемой области выходит на решение уравнения  $F = 0$ , а вблизи особой точки регулярно по  $x$ .

Продemonстрируем сказанное на примере следующего уравнения первого порядка (Лайтхилл)

$$(x + \epsilon u) \partial_x u + (2 + x)u = 0 \quad (5.59)$$

Пренебрегая здесь членом с  $\epsilon$ , находим уравнение  $x \partial_x u + (2 + x)u = 0$ , которое имеет особую точку  $x = 0$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$u = \frac{C}{x^2} \exp(-x) \quad (5.60)$$

где  $C$  - произвольная константа. Это решение обращается при  $x \rightarrow 0$  в бесконечность. Чтобы исследовать поведение исходного уравнения (5.59) при малых  $x$ , следует учесть член с  $\epsilon$  и сохранить в уравнении главные члены по малому  $x$ , что сводится к пренебрежению  $x$  в факторе  $2 + x$ . В результате получаем уравнение

$$(x + \epsilon u) \partial_x u + 2u = 0 \quad (5.61)$$

Сравнение факторов  $x$  и  $\epsilon u$  позволяет найти ширину области, где существенен член с  $\epsilon$ , эта ширина равна  $(C\epsilon)^{1/3}$ . Подстановка  $u = x\eta/\epsilon$  приводит уравнение (5.61) к уравнению на  $\eta$  с разделяющимися переменными. Его решение дает

$$u(x + \epsilon u/3)^2 = C \quad (5.62)$$

что при  $x \gg (C\epsilon)^{1/3}$  сводится к  $u = C/x^2$ . Таким образом, решения (5.60) и (5.62) совпадают в промежуточной области  $(C\epsilon)^{1/3} \ll x \ll 1$ . При  $x \ll (C\epsilon)^{1/3}$  решение  $u$  выходит на константу  $u_0 = (9C/\epsilon^2)^{1/3}$ . Обращаем внимание на неаналитическую зависимость  $u_0$  от  $\epsilon$ .

Задача 5.5.2. Построить нулевое приближение решения уравнения

$$(x + \epsilon u) \partial_x u + (3 + x)u = 0$$

Рассмотрим следующее линейное уравнение второго порядка ( $\epsilon > 0$ )

$$\left[ (x^2 + \epsilon)^2 \partial_x^2 + 2(x^2 + \epsilon) x \partial_x + 1 \right] u = 0 \quad (5.63)$$

при положительных  $x$ . Пренебрегая  $\epsilon$  в (5.63), получаем уравнение, решения которого  $\cos(1/x), \sin(1/x)$  ведут себя сингулярно при  $x \rightarrow 0$ . Члены с  $\epsilon$  в (5.63) становятся существенными при  $x \sim \sqrt{\epsilon}$ . При  $x \ll \sqrt{\epsilon}$  исходное уравнение (5.63) сводится к уравнению

$$(\epsilon^2 \partial_x^2 + 1) u = 0$$

решения которого  $\cos(x/\epsilon), \sin(x/\epsilon)$  ведут себя регулярно при  $x \rightarrow 0$ . Можно найти решения исходного уравнения (5.63)

$$\begin{aligned} & \cos \left[ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right] \\ & \sin \left[ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

которые покрывают обе асимптотические области. При  $x \ll \sqrt{\epsilon}$  мы получаем из (5.64)  $\cos(x/\epsilon), \sin(x/\epsilon)$ , так как  $\arctan(y) \approx y$  при малых  $y$ . При  $x \gg \sqrt{\epsilon}$  ситуация чуть сложнее.

Задача 5.5.3. Проследить, как решения (5.64) переходят в решения  $\cos(1/x), \sin(1/x)$  при  $x \gg \sqrt{\epsilon}$ .

В рассмотренных выше примерах удавалось аналитически найти выражения, которые были справедливы сразу в двух асимптотических областях. Как правило, этого сделать не удастся, и в лучшем случае решение можно найти численно. Однако для общего анализа решения достаточно исследовать его поведение в каждой асимптотической области и потребовать сшивки (то есть равенства по порядку величины) найденных решений на границе областей. Для уравнения порядка выше первого сшивать надо как сами функции, так и их производные (кроме старшей). Это дает представление об общем характере решения и позволяет определить его изменения при вариациях  $\epsilon$ .

Задача 5.5.4. Построить асимптотические решения уравнения ( $x > 0, \epsilon > 0$ )

$$(x + \epsilon)\partial_x^2 + 2\partial_x u + xu = 0$$

и проследить, как они переходят друг в друга.

### 3.5.10 5.5.2 Пограничный слой

Пограничный слой возникает в случае, когда дифференциальное уравнение, которому подчиняется функция или поле, имеет малый коэффициент при старшей производной. Пренебрежение членом со старшей производной упрощает уравнение, что в ряде случаев позволяет решить его аналитически. Но это аналитическое решение не может удовлетворить граничным условиям, поскольку порядок усеченного уравнения ниже, чем исходный. Поэтому задачу приходится решать отдельно для основной области, где работает усеченное уравнение, и для узкого слоя вблизи границы (пограничного слоя), где учет высшей производной обязателен. Общее решение находится сшивкой найденных выражений на границе этих областей.

Подобная ситуация возникает, например, при анализе гидродинамических уравнений при больших числах Рейнольдса. Тогда вязким членом в уравнении Навье-Стокса можно пренебречь при анализе течения в объеме (исключая течения с очень малыми масштабами), и мы приходим к уравнению Эйлера, которое имеет первый порядок по градиенту. Однако решения уравнения Эйлера не могут удовлетворить граничным условиям (нулевому значению скорости на границе). Поэтому вблизи границы имеется вязкий пограничный слой, течение в котором может быть проанализировано только в рамках уравнения Навье-Стокса, содержащего вторую степень градиента.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере уравнения

$$\epsilon\partial_x^2 u + \partial_x u + u = 0 \quad (5.65)$$

где  $\epsilon \ll 1$ . Будем искать решение с граничными условиями  $u = 0, \partial_x u = 1$  при  $x = 0$ . Пренебрегая членом с  $\epsilon$  в уравнении (5.65), находим уравнение  $\partial_x u + u = 0$ , общее решение которого имеет вид  $u = a \exp(-x)$ . Очевидно, это решение не может удовлетворить граничным условиям. Поэтому при малых  $x$  решение требует коррекции. Поскольку  $u = 0$  при  $x = 0$ , мы можем при малых  $x$  пренебречь членом с  $u$  в уравнении (5.65), что дает  $\epsilon\partial_x^2 u + \partial_x u = 0$ . Решение этого уравнения с данными граничными условиями имеет вид  $u = \epsilon[1 - \exp(-x/\epsilon)]$ . Условие применимости этого приближения имеет вид  $\partial_x u \gg u$ , что дает неравенство  $x \ll \epsilon \ln(1/\epsilon)$ , которое определяет толщину пограничного слоя. При  $\epsilon \ln(1/\epsilon) \gg x \gg \epsilon$  найденное решение выходит на константу, равную  $\epsilon$ . Сравнивая эту константу с  $u = a \exp(-x)$ , находим константу  $a = \epsilon$ . Таким образом, мы находим решение  $u = \epsilon \exp(-x)$ , которое работает при условии  $x \gg \epsilon$ .

Задача 5.5.5. Уравнение (5.65) решается точно. Найти его решение с граничными условиями  $u = 0, \partial_x u = 1$  при  $x = 0$  и сравнить его с найденным приближенным решением.

Переходим теперь к нелинейным уравнениям. В этом случае возможно существование нескольких решений уравнения и даже построение решения, которое задается различными выражениями на разных интервалах. На границах интервала должны быть выполнены условия "склейки": непрерывность функции и ее производных вплоть до производной, на единицу меньше порядка уравнения. Например, для уравнения первого порядка достаточно потребовать непрерывности самой функции, а для уравнения второго порядка должны быть непрерывны сама функция и ее первая производная. При этом возникает "контринтуитивная" ситуация, когда, скажем, для уравнения первого порядка в точке склейки производная функции может испытывать скачок. Понятие пограничного слоя позволяет прояснить эту ситуацию.

Рассмотрим в качестве примера уравнение первого порядка  $(\partial_x u)^2 = 1$ . Оно имеет решение  $u = |x|$ , которое удовлетворяет условию непрерывности, но имеет скачок производной в точке  $x = 0$ . Спрашивается, как возможно возникновение такого разрывного решения?

Для выяснения этого вопроса введем в указанное уравнение вторую производную с малым коэффициентом:  $\epsilon \partial_x^2 u + (\partial_x u)^2 = 1$ . Это уравнение легко решается аналитически, для чего следует ввести переменную  $w = \partial_x u$ , для которой приведенное уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Его решением (с точностью до сдвига по  $x$ ) является  $w = \tanh(x/\epsilon)$ . Интегрирование этого выражения дает

$$u = \epsilon \ln \cosh(x/\epsilon)$$

Это решение бесконечно дифференцируемо и не имеет никаких особенностей на действительной оси. В то же время мы сталкиваемся с пограничным слоем толщиной  $\epsilon$ , вне которого, то есть при  $|x| \gg \epsilon$ , функция  $u \approx |x|$ . Понятно, что в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  мы получаем  $u = |x|$ , с разрывом производной. Обобщая это наблюдение, можно сказать, что решения с разрывами в производных являются следствием наличия пограничных слоев, толщина которых устремляется к нулю.

Проанализируем нелинейное уравнение

$$\epsilon \partial_x^2 u + (1 + u^2) \partial_x u - 2 = 0 \quad (5.66)$$

где  $\epsilon \ll 1$ . Снова будем искать решение с граничными условиями  $u = 0, \partial_x u = 1$  при  $x = 0$ . Пренебрегая членом с  $\epsilon$  в уравнении (5.66), находим уравнение, решение которого определяется соотношением  $u + u^3/3 = 2(x - x_0)$ , которое, очевидно, не может удовлетворить обоим граничным условиям. В силу того, что  $u = 0$  для  $x = 0$ , при малых  $x$  членом с  $u^2$  в уравнении (5.66) можно пренебречь. В результате мы находим уравнение  $\epsilon \partial_x^2 u + \partial_x u - 2 = 0$ , решение которого с принятыми граничными условиями находится из соотношения  $\epsilon \partial_x u + u = 2x + \epsilon$ . Решение, удовлетворяющее данным граничным условиям, имеет вид

$$u = 2x - \epsilon + \epsilon \exp(-x/\epsilon) \quad (5.67)$$

Критерием применимости (5.67) является  $u \ll 1$ , то есть  $x \ll 1$ . В то же время уже при  $x \gg \epsilon$  решение (5.67) выходит на  $2x - \epsilon$ , откуда следует  $x_0 = \epsilon/2$ .

В рассмотренных примерах удавалось аналитически найти выражения, которые были справедливы сразу в двух асимптотических областях. Как правило, этого сделать не удастся, и в лучшем случае решение можно найти численно. Однако для общего анализа решения достаточно исследовать его поведение в каждой асимптотической области и потребовать сшивки (то есть равенства по порядку величины) найденных решений на



границе областей. Эта процедура дает представление об общем характере решения и позволяет найти его изменения при вариациях  $\epsilon$ .

Задача 5.5.6. Проанализировать решение уравнения  $\epsilon \partial_x^2 u + \partial_x u + xu = 0$  при малых  $\epsilon$ .

Пограничный слой может содержать несколько подслоев. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\epsilon^3 \partial_x^2 u + x^3 \partial_x u + (x^2 - \epsilon) u = 0 \quad (5.68)$$

где  $x > 0, \epsilon > 0, \epsilon \ll 1$ . Полагая в (5.68)  $\epsilon = 0$ , находим уравнение  $x \partial_x u + u = 0$ . Его решение  $\propto 1/x$ , оно реализуется в основной области  $x \gg \epsilon^{1/2}$ . При  $\epsilon^{2/3} \ll x \ll \epsilon^{1/2}$  можно пренебречь первым членом в (5.68) и  $x^2$  по сравнению с  $\epsilon$ , что приводит к уравнению  $x^3 \partial_x u - \epsilon u = 0$ , решение которого  $\propto \exp[-\epsilon/(2x^2)]$ . При  $x \ll \epsilon^{2/3}$  в (5.68) следует оставить только члены с  $\epsilon$ , что приводит к уравнению  $\epsilon^2 \partial_x^2 u - u = 0$ , решения которого  $\exp(\pm x/\epsilon)$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} u &= D \epsilon^{1/2}/x, \quad x \epsilon^{1/2} \\ u &= C \exp[-\epsilon/(2x^2)], \quad \epsilon^{2/3} \ll x \ll \epsilon^{1/2} \\ u &= A \exp(x/\epsilon) + B \exp(-x/\epsilon), \quad x \ll \epsilon^{2/3} \end{aligned} \quad (5.69)$$

Эти выражения должны по порядку величины совпадать на границах областей, что дает два условия на константы  $A, B, C, D$ . Еще два соотношения дают граничные условия. Если, скажем,  $u(0) \sim 1, u(1) \sim 1$ , то  $A \sim B \sim 1, \ln C \sim \epsilon^{-1/3}, D \sim C$ .

Задача 5.5.7. Проанализировать решение уравнения

$$\epsilon^3 \partial_x^2 u + \epsilon \sinh u \partial_x u + x \partial_x u + \tanh u = 0 \text{ при малых } \epsilon.$$

Рассмотреть случай граничного условия  $u = 0$  при  $x = 0$ .

## 3.6 Приближенные и специальные решения

В анализе различных физических явлений, которые описываются дифференциальными уравнениями, большую роль играет поведение решений этих уравнений вблизи особых точек. Такими точками являются точки, где коэффициент при старшей производной дифференциального уравнения обращается в ноль. Особенности обладают также решения дифференциальных уравнений, у которых коэффициент при старшей производной является аномально малым. Как правило, это ведет к возникновению так называемых пограничных слоев. Мы обсуждаем также "медленную" динамику физической системы, усредненную по быстрым осцилляциям.

### 3.6.1 6.1 Параметрическая неустойчивость

В простейшем случае параметрическая неустойчивость наблюдается в системе с одной степенью свободы. Рассмотрим осциллятор, частота которого за счет внешнего воздействия периодически меняется со временем. Тогда для описывающей колебания переменной  $x$  можно сформулировать следующее уравнение

$$\partial_t^2 x + x - 2f \cos(2\omega t)x = 0 \quad (6.1)$$

которое называется уравнением Матвеева. Мы полагаем  $f > 0$ . При  $f = 0$  уравнение (6.1) описывает осцилляции с частотой, равной единице. В дальнейшем мы считаем фактор  $f$  малой величиной, что означает слабость внешнего воздействия.

При некоторых частотах  $\omega$  вблизи единичной уравнение (6.1) приводит к неустойчивости. Установим критерий для ее возникновения. Неустойчивость возникает

на половинной частоте внешнего воздействия, то есть  $\omega$ . В этом случае  $x$  можно аппроксимировать выражением  $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ , к которому имеются поправки, малые по параметру  $f$  или, что то же самое, по близости частоты  $\omega$  к единице. Амплитуда  $a$  и фаза  $\varphi$  меняются со временем медленно, то есть на временах гораздо больше единицы. Подставляя  $x = a \cos(\omega t + \varphi)$  в уравнение (6.1) и сохраняя в нем только первые производные от  $a$  и  $\varphi$ , находим

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2) a \cos(\omega t + \varphi) - 2\omega \partial_t a \sin(\omega t + \varphi) \\ - 2a\omega \partial_t \varphi \cos(\omega t + \varphi) - fa \cos(\omega t - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Мы сохранили здесь только резонансный член произведения  $2f \cos(2\omega t)x$ . Член с тройной частотой  $3\omega$  произведет малый вклад в  $x$ , поскольку вместо малого множителя  $1 - \omega^2$  в (6.2) при амплитуде члена с тройной частотой  $3\omega$  будет стоять не малый множитель  $1 - 9\omega^2$ .

Уравнение (6.2) имеет нетривиальное решение при фиксированной (не зависящей от времени) фазе  $\varphi$ . Тогда, учитывая близость частоты  $\omega$  к единице, находим соотношение

$$2\delta\omega a \cos(\omega t + \varphi) + 2\partial_t a \sin(\omega t + \varphi) + fa \cos(\omega t - \varphi) = 0$$

где  $\delta\omega = \omega - 1$ . Приравнявая к нулю коэффициенты при  $\cos(\omega t)$  и  $\sin(\omega t)$ , находим систему уравнений

$$\begin{aligned} (2\delta\omega + f)a \cos \varphi + 2 \sin \varphi \partial_t a &= 0 \\ (-2\delta\omega + f)a \sin \varphi + 2 \cos \varphi \partial_t a &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Условие существования решения этой системы уравнений для  $a, \partial_t a$  получается при условии равенства нулю детерминанта, что дает

$$2\delta\omega + f \cos(2\varphi) = 0 \quad (6.4)$$

Решение этого уравнения для  $\varphi$  существует, если  $2|\delta\omega| < f$ , что и является условием неустойчивости. Таким образом, неустойчивость достигается в узкой окрестности единичной частоты. Далее, мы находим из (6.3) выражение

$$\partial_t \ln a = \alpha, \quad \alpha = \sqrt{f^2/4 - (\delta\omega)^2} \quad (6.5)$$

Таким образом, амплитуда  $a$  экспоненциально растет со временем,  $a \propto \exp(\alpha t)$ , то есть  $\alpha$  является инкрементом неустойчивости.

Инкремент неустойчивости  $\alpha$  (6.5) оказывается тем больше, чем меньше  $\delta\omega$  и достигает максимума в условиях точного резонанса  $\delta\omega = 0$ . В этом случае  $\alpha = f/2$ . Как следует из условия (6.4), в условиях точного резонанса  $\cos(2\varphi) = 0$ . Поскольку мы рассматриваем растущую со временем моду,  $\partial_t \ln a > 0$ , то из системы (6.3) следует, что в условиях точного резонанса  $\varphi = 3\pi/4$ .

**Задача 6.1.1.** Чему равен сдвиг фаз  $\varphi$  на границах интервала неустойчивости?

Уравнение Матьё (6.1) относится к чистым колебаниям без затухания. Учет затухания, которое мы будем считать слабым, несколько меняет сделанные выше выводы. Введем декремент затухания  $\gamma$ , который в соответствии со сделанным предположением много меньше единицы. Формально это означает введение в уравнение Матьё (6.1) дополнительного члена  $2\gamma \partial_t x$ . Прodelывая те же шаги, что и выше, мы находим вместо (6.5) уравнение  $\partial_t \ln a = \alpha - \gamma$ . Таким образом, при учете затухания

область неустойчивости, которая характеризуется наличием растущего со временем решения,  $\partial_t \ln a > 0$ , сужается. Неустойчивость наблюдается только при условии  $f/2 > \gamma$ , то есть внешнее воздействие должно преодолеть затухание. Она реализуется при отстройках  $\delta\omega$ , удовлетворяющих условию  $(\delta\omega)^2 < f^2/4 - \gamma^2$ .

В рамках линейного приближения неустойчивость приводит к неограниченному росту амплитуды  $a$  со временем. Однако при росте амплитуды неизбежно становятся существенными нелинейные эффекты, которые приводят к стабилизации амплитуды на некотором уровне. Рассмотрим случай кубической нелинейности, с учетом которой уравнение Матьё (6.1) преобразуется в

$$\partial_t^2 x + x + x^3 - 2f \cos(2\omega t)x = 0 \quad (6.6)$$

где мы выбрали единичным коэффициент при  $x^3$ , чего всегда можно добиться перемасштабировкой  $x$ .

Снова проделаем приведенный выше анализ, подставляя  $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ . В этом случае  $x^3$  будет содержать частоты  $\omega$  и  $3\omega$ . Мы сохраним только член с  $\omega$ , поскольку, как и выше, член с  $3\omega$  даст малые поправки. Тогда вместо уравнения (6.2) мы получим

$$\begin{aligned} (2\delta\omega - 3a^2/4) a \cos(\omega t + \varphi) + 2\partial_t a \sin(\omega t + \varphi) \\ + 2a\partial_t \varphi \cos(\omega t + \varphi) + fa \cos(\omega t - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

где мы учли близость  $\omega$  к единице. Мы видим, что единственным отличием уравнения (6.7) от линейного случая является замена  $\delta\omega \rightarrow \delta\omega - 3a^2/8$ . Это связано с нелинейным сдвигом квадрата собственной частоты  $1 \rightarrow 1 + 3a^2/4$ .

Таким образом, стационарные решения существуют, когда  $\delta\omega - 3a^2/8$  находится на границах интервала неустойчивости, то есть равна  $\pm f/2$ . Если  $\delta\omega$  лежит внутри интервала линейной неустойчивости,  $|\delta\omega| < f/2$ , то только одно значение совместимо с положительностью  $a^2$ , а именно сдвинутая частота должна лежать на нижней границе интервала неустойчивости линейной задачи. В результате мы находим стационарную амплитуду

$$3a_0^2/8 = f/2 + \delta\omega \quad (6.8)$$

Отметим, что стационарная амплитуда  $a_0$  (6.8) мала в силу предположенной малости  $f$ . Это оправдывает использование только первого неисчезающего нелинейного члена (кубического) в уравнении (6.6).

Задача 6.1.2. Нелинейность в уравнении (6.6) может быть и иного знака:

$$\partial_t^2 x + x - x^3 - 2f \cos(2\omega t)x = 0$$

Каково в этом случае будет выражение для стационарной амплитуды  $a$ ?

Задача 6.1.3. Проанализировать динамический режим вблизи стационарного решения (6.8).

Учтем теперь затухание, добавив в уравнение (6.6) член  $2\gamma\partial_t x$ . В этом случае уравнение (6.7) превращается в

$$\begin{aligned} (2\delta\omega - 3a^2/4 + 2\partial_t \varphi) a \cos(\omega t + \varphi) \\ + 2(\partial_t a + \gamma) \sin(\omega t + \varphi) + fa \cos(\omega t - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

где мы учли близость  $\omega$  к единице. Приравнявая коэффициенты при  $\cos(\omega t)$  и  $\sin(\omega t)$ , находим следующую стационарную систему уравнений

$$\begin{aligned}(2\delta\omega - 3a^2/4 + f) \cos \varphi + 2\gamma \sin \varphi &= 0 \\ (-2\delta\omega + 3a^2/4 + f) \sin \varphi + 2\gamma \cos \varphi &= 0\end{aligned}$$

Отсюда находим решение

$$3a_0^2/8 = \sqrt{f^2/4 - \gamma^2} + \delta\omega \quad (6.10)$$

вместо (6.8). Решение (6.10), как и раньше, соответствует нижней границе интервала неустойчивости линейной задачи для сдвинутой частоты. Как и следовало ожидать, затухание приводит к подавлению  $a_0$  по сравнению с беззатухательным случаем. Угол  $\varphi$  в данном случае меньше  $\pi$ , его значение определяется условием  $\sin(2\varphi_0) = -2\gamma/f$

Задача 6.1.4. Проанализировать динамический режим вблизи стационарного решения (6.10).

### 3.6.2 6.2 Метод усреднения и медленная ЭволюЦИЯ

Снова обратимся к дифференциальному уравнению (5.58), которое мы будем рассматривать в рамках временной эволюции. Поэтому независимой переменной теперь будет время  $t$ , а уравнение (5.58) переписывается в виде

$$F(t, x, \partial_t x, \dots) + \epsilon G(t, x, \partial_t x, \dots) = 0 \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) можно решать по теории возмущений, которая заключается в следующем. Сначала мы находим решение уравнения  $F = 0$ , затем подставляем это нулевое решение в  $G$  и находим из уравнения (6.11) первую по  $\epsilon$  поправку к нулевому решению, и так далее. Тем самым решение будет найдено в виде ряда по  $\epsilon$ . Эта процедура может быть осуществлена аналитически, если функции  $F, G$  достаточно просты. В противном случае ее можно осуществлять только численно.

Однако в ряде случаев разложение по  $\epsilon$  может разрушаться на больших временах  $t$ . Это происходит, если решение уравнения  $F = 0$  имеет осцилляторный характер, а функция  $G$  приводит к резонансу с этими осцилляциями. В этом случае в решении уравнения (6.11) возникают так называемые вековые (секулярные) члены, которые растут со временем быстрее, чем нулевое решение, то есть решение уравнения  $F = 0$ . Это приводит к тому, что со временем секулярные члены, несмотря на малость по  $\epsilon$ , могут стать сравнимыми с нулевым решением, что и приводит к его разрушению. Роль секулярных членов в дифференциальных уравнениях исследовалась еще в 18 веке в работах Лагранжа и Лапласа при расчете эволюции планетных орбит.

В качестве простейшей иллюстрации сказанного рассмотрим уравнение

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon x^3 \quad (6.12)$$

При  $\epsilon = 0$  решение уравнения (6.12) имеет вид  $x_0 = a \cos(t - \tau)$ , где  $\tau$  - произвольная константа. Подставляя это выражение в правую часть уравнения (6.12), мы находим уравнение для первой поправки  $x_1$  к  $x_0$ :

$$\partial_t^2 x_1 + x_1 = \frac{1}{4} \epsilon a^3 [\cos(3t - 3\tau) + 3 \cos(t - \tau)] \quad (6.13)$$

Второе слагаемое в правой части (6.13) имеет частоту основного решения, то есть находится в резонансе с левой частью этого уравнения. Оно порождает следующий секулярный вклад в  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{3}{8}\epsilon a^3(t - \tau) \sin(t - \tau)$$

Очевидно, что на достаточно больших временах, когда  $t \sim (\epsilon a^2)^{-1}$ , приведенная поправка становится порядка нулевого решения, что и означает нарушение применимости разложения по  $\epsilon$ .

Можно существенно усовершенствовать схему решения уравнения (6.12) по сравнению с прямой теорией возмущений, построив приближенное решение, которое работает на временах  $t$  много больших  $(\epsilon a^2)^{-1}$ . Будем искать решение уравнения в виде  $x = a \cos(t - \tau)$ , где  $a$  и  $\tau$  являются медленными функциями времени. Подставляя это выражение в уравнение (6.12) и сохраняя только первые производные по времени от  $a, \tau$ , находим следующее уравнение

$$-\partial_t a \sin(t - \tau) + \partial_t \tau a \cos(t - \tau) = \frac{3}{8}\epsilon a^3 \cos(t - \tau)$$

где мы оставили в правой части только резонансный член. Опущенный (не резонансный) член дает поправки, малые по  $\epsilon$ , на всех временах. Приравнявая к нулю коэффициенты при синусе и косинусе, находим систему уравнений

$$\partial_t a = 0, \quad \partial_t \tau = \frac{3}{8}\epsilon a^2 \quad (6.14)$$

Очевидным решением системы (6.14) является  $a = \text{const}$ ,  $\tau = \tau_0 + (3/8)\epsilon a^2 t$ , где  $\tau_0$  - произвольная константа. Таким образом, мы приходим к решению

$$x = a \cos [t - (3/8)\epsilon a^2 t - \tau_0] \quad (6.15)$$

которое представляет собой осцилляции с частотой  $\omega = 1 - (3/8)\epsilon a^2$ . Поправка к единице называется нелинейным сдвигом частоты.

Установим критерий применимости выражения (6.15). При выводе уравнения (6.14) мы отбросили члены с  $\partial_t^2 \tau$  и с  $\partial_t^2 a$ . Малым параметром, по которому это можно сделать, является  $\epsilon a^2$ . Именно с этой относительной точностью найдено выражение для  $\partial_t \tau$ , поэтому поправка к этому выражению может быть оценена, как  $\epsilon^2 a^4$ . Таким образом, поправка к аргументу косинуса в выражении  $x = a \cos(t - \tau)$  может быть оценена, как  $t\epsilon^2 a^4$ , то есть решение (6.15) работает при условии  $t \ll (\epsilon^2 a^4)^{-1}$ .

Задача 6.2.1. Сравнить решение (6.15) с точным решением уравнения (6.12) и проверить критерий применимости выражения (6.15).

Приведенную выше схему можно обобщить на случай произвольного малого возмущения уравнения гармонического осциллятора. А именно, рассмотрим уравнение осциллятора с частотой 1 и добавим в правую часть этого уравнения произвольный малый член, зависящий от  $x$  и  $\partial_t x$ :

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon G(x, \partial_t x) \quad (6.16)$$

Способ приближенного решения такого уравнения называется методом Боголюбова-Крылова. Введем вспомогательную переменную  $z = x + i\partial_t x$ . В терминах этой функции уравнение (6.16) приобретает следующую форму

$$\partial_t z = -iz + i\epsilon G(\text{Re } z, \text{Im } z) \quad (6.17)$$

Вводим абсолютное значение и фазу  $z$  :  $z = a \exp(i\varphi)$ . Тогда уравнение (6.17) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\partial_t a &= \epsilon \sin \varphi G(a \cos \varphi, a \sin \varphi) \\ \partial_t \tau &= \epsilon \frac{\cos \varphi}{a} G(a \cos \varphi, a \sin \varphi)\end{aligned}\quad (6.18)$$

где  $\varphi = -t + \tau$ .

До сих пор преобразования были точными. Чтобы продвинуться дальше, заметим, что приращения  $a$  и  $\tau$  за период малы в силу малости  $\epsilon$ . Поэтому при вычислении этих приращений в правой части (6.18)  $a$  и  $\tau$  можно считать константами, что дает

$$\begin{aligned}\Delta a &= \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi G(a \cos \varphi, a \sin \varphi) \\ \Delta \tau &= \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{a} G(a \cos \varphi, a \sin \varphi)\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что  $\tau$  выпадает из выражений для этих приращений (в силу того, что начало отсчета периода произвольно). Таким образом, для медленной эволюции (на больших временах) мы находим следующие эффективные уравнения

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi G(a \cos \varphi, a \sin \varphi) \quad (6.19)$$

$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{a} G(a \cos \varphi, a \sin \varphi) \quad (6.20)$$

Легко проверить, что для проанализированной нами задачи (6.12), когда  $G = x^3$ , уравнения (6.19, 6.20) сводятся к уравнениям (6.14).

Задача 6.2.2. Найти поведение на больших временах амплитуды колебаний осциллятора с нелинейным затуханием  $\partial_t^2 x + x = -\epsilon (\partial_t x)^3$  при малом  $\epsilon$ .

Задача 6.2.3. Проанализировать поведение решения уравнения  $\partial_t^2 x + x = -\epsilon \partial_t x |\partial_t x|$  при малом  $\epsilon$ .

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля с малым множителем в правой части,  $\epsilon \ll 1$ :

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon (1 - x^2) \partial_t x \quad (6.21)$$

Уравнения (6.19, 6.20) для этого случая сводятся к

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2} a (1 - a^2/4), \quad \partial_t \tau = 0 \quad (6.22)$$

Уравнение (6.22) описывает приближение амплитуды  $a$  к устойчивой фиксированной точке  $a = 2$ , которая соответствует асимптотическому режиму автоколебаний (предельному циклу).

Задача 6.2.4. Проанализировать поведение решения уравнения  $\partial_t^2 x + x = -\epsilon (1 - x^2)^2 \partial_t x$  при малом  $\epsilon$ .

Задача 6.2.5. Проанализировать поведение решения уравнения  $\partial_t^2 x + x = \epsilon (1 - x^2) \partial_t x + \epsilon x^3$  при малом  $\epsilon$ .

Метод Боголюбова-Крылова может быть обобщен на случай явной зависимости функции  $G$  в уравнении (6.16) от времени при условии, что функция  $G$  остается приблизительно периодической функцией времени с периодом  $2\pi$ . Для решения задачи в этом случае снова исходим из уравнений (6.18), где в правой части появляется явная зависимость от времени:

$$\begin{aligned}\partial_t a &= \epsilon \sin \varphi G(t, a \cos \varphi, a \sin \varphi) \\ \partial_t \tau &= \epsilon \frac{\cos \varphi}{a} G(t, a \cos \varphi, a \sin \varphi)\end{aligned}\quad (6.23)$$

где  $\varphi = -t + \tau$ . Снова интегрируя по периоду и находя приращения  $a$  и  $\tau$ , находим эффективные уравнения

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin \varphi G(t - \phi, a \cos \varphi, a \sin \varphi) \quad (6.24)$$

$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos \varphi}{a} G(t - \phi, a \cos \varphi, a \sin \varphi) \quad (6.25)$$

где  $\varphi = \tau - t + \phi$ . Обратим внимание на то, что теперь  $\tau$  явно входит в решение.

Задача 6.2.6. Найти решение уравнений (6.24,6.25) для резонансной накачки  $G = \cos t$ .

Задача 6.2.7. Найти решение уравнений (6.24,6.25) для резонансной параметрической накачки  $G = x \cos(2t)$ .

Задача 6.2.8. Найти решение уравнений (6.24,6.25) для осциллятора Ван дер Поля с накачкой  $G = (1 - x^2) \partial_t x + \kappa \cos t$ .

До сих пор мы приводили выражения для приближенных уравнений колебаний возмущенного осциллятора с единичной частотой. Все найденные выражения легко обобщаются на случай конечной частоты осциллятора  $\omega$ . Приведем соответствующие выражения. Вместо уравнения (6.16) следует рассмотреть уравнение

$$\partial_t^2 x + \omega^2 x = \epsilon G \quad (6.26)$$

где  $\omega$  - собственная частота осциллятора. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x = a \cos(-\omega t + \theta) \quad (6.27)$$

где  $a, \theta$  - медленные функции времени. Уравнения на эти функции являются прямым обобщением уравнений (6.19, 6.20)

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin(\varphi) G \quad (6.28)$$

$$\partial_t \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos(\varphi) G \quad (6.29)$$

При вычислении интегралов в правых частях (6.28,6.29) в функцию  $G$  следует подставить  $u \rightarrow a \cos \varphi, \partial_t u \rightarrow \omega \sin \varphi$ . Уравнения (6.28,6.29), очевидно, сводятся к (6.19, 6.20) при  $\omega = 1$ .

В качестве тривиального примера рассмотрим линейный осциллятор с затуханием. В этом случае  $G = -2\partial_t x$ , а  $\epsilon$  является декрементом затухания. Подставляя это выражение в соотношения (6.28, 6.29), находим  $\partial_t \theta = 0, \partial_t a = -\epsilon a$ . Как и следует, амплитуда  $a$  затухает со временем с декрементом  $\epsilon$ .

### 3.6.3 6.2.1 Усредненные уравнения для волнового движения

Метод усреднения, развитый выше для колебательного движения, непосредственно обобщается и для волнового движения. Как и для колебательного движения, мы будем считать, что в главном приближении волновое движение описывается линейными волновыми уравнениями, и будем изучать роль малых поправок, связанных с нелинейностью, внешним воздействием, неоднородностью и так далее.

Рассмотрим волновое движение, которое описывается полем  $u(t, \mathbf{r})$ , уравнение на которое имеет вид

$$\partial_t^2 u + \hat{\omega}^2 u = \epsilon G \quad (6.30)$$

Здесь оператор  $\hat{\omega} = \varpi(-i\nabla)$  определяется законом дисперсии  $\varpi(\mathbf{q})$  волнового движения, а  $G$  - некоторая функция поля  $u$ , его производных, а также, возможно, времени и координат. Параметр  $\epsilon$  в правой части уравнения (6.30) считается малым. В нулевом приближении, когда  $\epsilon = 0$ , уравнение (6.30) сводится к чисто волновому линейному уравнению, которое, в частности, имеет решение в виде бегущей плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{q}$ :  $u = a \cos(-\omega t + \mathbf{q}\mathbf{r} + \theta)$ , где  $\omega = \varpi(\mathbf{q})$ , а  $\theta$  произвольная константа. Будем искать решение уравнения (6.30) в том же виде  $u = a \cos(-\omega t + \mathbf{q}\mathbf{r} + \theta)$ , где теперь (с учетом дополнительного члена с  $G$ ) параметры  $a$  и  $\theta$  являются медленными функциями времени и координат.

Используем тот же прием, который позволил найти усредненные уравнения для возмущенного гармонического осциллятора. Для этого вводим функции  $u_1$  и  $w$ :  $\partial_t u_1 = \hat{\omega} u$ ,  $w = u + iu_1$ . Тогда уравнение (6.30) переписывается в виде уравнения первого порядка

$$\partial_t w = -i\hat{\omega} w + i\epsilon\hat{\omega}^{-1}G \quad (6.31)$$

Подставляя сюда  $w = a \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\theta)$ , находим

$$\partial_t a + ia\partial_t \theta + \mathbf{v}\nabla a + ia\mathbf{v}\nabla \theta = \frac{i\epsilon}{\omega} G \exp(-i\varphi)$$

где  $\mathbf{v} = \partial\varpi/\partial\mathbf{q}$  - групповая скорость волны. При выводе мы использовали соотношение ( $\psi = ae^{i\theta}$ )

$$\varpi(-i\nabla)[\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})\psi] = \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})\varpi(\mathbf{q} - i\nabla)\psi \quad (6.32)$$

и сохранили в  $\varpi(\mathbf{q} - i\nabla)$  нулевой и первый члены разложения по  $\nabla/q$ . Мы также заменили в правой части  $\hat{\omega} \rightarrow \omega^{-1}$ , что справедливо в главном порядке по  $\epsilon$ .

Выделяя в полученном уравнении действительную и мнимую части, находим

$$\partial_t a + \mathbf{v}\nabla a = \frac{\epsilon}{\omega} \sin(\varphi)G$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{v}\nabla \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \cos(\varphi)G$$

Усредняя эти уравнения по периоду, мы находим уравнения для медленных переменных

$$\partial_t a + \mathbf{v}\nabla a = \frac{\epsilon}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin(\varphi)G \quad (6.33)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{v}\nabla \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos(\varphi)G \quad (6.34)$$



В аргументе функции  $G$  в выражениях (6.33, 6.34) следует подставлять  $u \rightarrow a \cos \varphi$ ,  $\nabla u \rightarrow -\mathbf{q}a \sin \varphi$ ,  $\partial_t u \rightarrow \omega a \sin \varphi$ . Последние выражения получаются в главном приближении по  $\epsilon$ , что достаточно в силу того, что правая часть выражений (6.33, 6.34) уже содержит малость по  $\epsilon$ .

Уравнения (6.33, 6.34) являются прямым обобщением уравнений (6.28, 6.29). Единственная разница заключается в наличии переносного члена с градиентом. Можно сказать, что уравнения (6.33, 6.34) совпадают с уравнениями (6.28, 6.29) в системе отсчета, которая движется с групповой скоростью  $\mathbf{v}$ . Следует, однако, помнить о том, что мы имеем дело с полем, заданным в пространстве. И потому уравнения (6.33, 6.34) необходимо решать с учетом граничных условий.

В качестве тривиальной иллюстрации сказанного рассмотрим случай затухающей волны. В этом случае  $G = -2\partial_t u$ , а  $\epsilon$  является декрементом затухания волны. Подстановка этого выражения в соотношения (6.33, 6.34) приводит к уравнениям

$$\partial_t a + \mathbf{v} \nabla a = -\epsilon a, \quad \partial_t \theta + \mathbf{v} \nabla \theta = 0$$

Решение уравнения для амплитуды  $a$  неоднозначно. Например, решениями этого уравнения являются  $a \propto \exp(-\epsilon t)$  ( $a$  не зависит от координат), или  $a \propto \exp(-\epsilon \mathbf{v} \mathbf{r} / v^2)$  ( $a$  не зависит от времени). Найти истинное решение уравнения для амплитуды  $a$  можно только с учетом граничных условий.

Перейдем теперь к уравнению на огибающую  $\psi = a \exp(i\theta)$ . В этом случае уравнения (6.33, 6.34) переписываются в виде

$$\partial_t \psi + \mathbf{v} \nabla \psi = \frac{i\epsilon}{\omega} \exp(i\theta) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp(-i\varphi) G \quad (6.35)$$

Например, для  $G = u^3$  уравнение (6.35) сводится к

$$\partial_t \psi + \mathbf{v} \nabla \psi = \frac{3i\epsilon}{8\omega} |\psi|^2 \psi \quad (6.36)$$

Если перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью  $\mathbf{v}$  и учесть следующий член разложения  $\varpi(\mathbf{q} - i\nabla)$  по  $\nabla/q$  в (6.32), то мы получим нелинейное уравнение Шрёдингера.

Задача 6.2.9. Найти уравнение на огибающую  $\psi$  для  $G = u(\nabla u)^2$ .

Задача 6.2.10. Найти уравнение на огибающую  $\psi$  для нелинейного затухания  $G = -\partial_t u(\nabla u)^2$ .

### 3.6.4 6.3 Специальные решения

Здесь мы будем рассматривать специальные решения дифференциальных уравнений в частных производных, которые сводятся к функции одной переменной. Существование такого сорта решений обязано симметрии уравнения (однородность, изотропия, инвариантность относительно перемасштабирования времени, координат и искомого поля). Отдельный вопрос связан со статусом подобных решений: они могут представлять универсальную асимптотику на больших временах или, наоборот, являться сепаратрисой (абсолютно неустойчивым решением). Выяснение этого вопроса должно проводиться для каждого конкретного уравнения. Мы сосредоточимся здесь на нахождении собственно автомодельных решений.

#### 3.6.5 6.3.1 Автомодельные решения

Мы будем считать, что поле  $u(t, \mathbf{r})$  подчиняется некоторому дифференциальному уравнению в частных производных, которое однородно (по времени и пространству)

и изотропно. В этом случае возможно существование автономных решений, которые имеют вид

$$u = \frac{1}{t^a} f(r/t^b) \quad (6.37)$$

где  $a$  и  $b$  - некоторые числа. Аргумент функции  $f$ , то есть  $r/t^b$ , называется автономной переменной. Чтобы уравнение имело автономное решение (6.37), оно должно быть инвариантно относительно перемасштабировки

$$t \rightarrow \mathcal{Z}t, \quad r \rightarrow \mathcal{Z}^b r, \quad u \rightarrow \mathcal{Z}^{-a} u \quad (6.38)$$

где  $\mathcal{Z}$  - произвольный фактор. Очевидно, решение (6.37) инвариантно относительно преобразования (6.38).

Мы уже сталкивались с автономным поведением. Например, функция Грина уравнения диффузии  $\partial_t u = \nabla^2 u$ , которая удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t - \nabla^2) G = \delta(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (6.39)$$

имеет автономный вид (6.37)

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) \quad (6.40)$$

где  $d$  - размерность пространства. В данном случае автономной переменной является  $r/\sqrt{t}$ . Действительно, уравнение диффузии  $\partial_t u = \nabla^2 u$  инвариантно относительно  $t \rightarrow \mathcal{Z}t, r \rightarrow \mathcal{Z}^{1/2}r$ . Что же касается показателя  $a$  в выражении (6.40), то он связан с правой частью уравнения (6.39): обе части этого уравнения должны одинаково вести себя при преобразовании  $t \rightarrow \mathcal{Z}t, r \rightarrow \mathcal{Z}^{1/2}r$ .

При  $t > 0$  функция Грина (6.40) является решением уравнения диффузии с нулевой правой частью и может рассматриваться, как его автономное решение. Отметим, что в силу линейности уравнение диффузии само по себе не фиксирует показатель  $a$  в (6.37). Однако этот показатель фиксируется законом сохранения  $\int dV u = \text{const}$ , который следует из уравнения диффузии  $\partial_t u - \nabla^2 u = 0$  для локализованного в пространстве поля. Из закона сохранения следует соотношение  $db - a = 0$ , которое в совокупности с  $b = 1/2$  дает  $a = d/2$ , что и соответствует автономности решения (6.40). Разумеется, не всякое решение уравнения диффузии  $\partial_t u - \nabla^2 u = 0$  имеет автономный характер. Однако на больших временах решение уравнения диффузии с локализованным начальным условием становится близким к поведению функции Грина, то есть автономность решения возникает асимптотически.

Задача 6.3.1. Найти автономное локализованное решение уравнения

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$$

Рассмотрим одномерное нелинейное уравнение диффузии

$$\partial_t u = \partial_x (u \partial_x u) \quad (6.41)$$

Будем искать автономное решение этого уравнения вида (6.37). Уравнение (6.41) инвариантно относительно преобразования (6.38) при условии  $a + 2b = 1$ . Дополнительное условие на показатели  $a, b$  получается, если мы рассматриваем поле  $u$ , достаточно быстро стремящееся к нулю на бесконечности. В этом случае получаем из уравнения (6.41)

$$\partial_t \int dx u = 0 \rightarrow \int dx u = \text{const}.$$

Отсюда находим  $a = b$ . Таким образом,  $a = b = 1/3$ , и автономное решение (6.37) имеет вид

$$u = t^{-1/3} f(xt^{-1/3}) \quad (6.42)$$

Подставляя выражение (6.42) в уравнение (6.41), находим

$$\partial_\xi (f \partial_\xi f) + \frac{1}{3} \partial_\xi (\xi f) = 0$$

где  $\xi = xt^{-1/3}$  - автономная переменная. Интегрируя это уравнение, находим

$$f \partial_\xi f + \frac{1}{3} \xi f = 0 \quad (6.43)$$

поскольку константа интегрирования равна нулю в силу предполагаемого быстрого стремления  $f$  к нулю при стремлении  $\xi$  к бесконечности. Находим два решения:  $f = 0$  и  $f = C - \xi^2/6$ , где  $C$  - произвольная константа. Решение, стремящееся к нулю на бесконечности, склеивается из этих двух решений:

$$f(\xi) = \begin{cases} f = C - \xi^2/6, & \xi^2 < 6C \\ f = 0, & \xi^2 > 6C \end{cases} \quad (6.44)$$

Возможность склейки связана с первым порядком дифференциального уравнения (6.43), которое требует непрерывности функции  $f$ , но допускает скачок в ее производной.

Задача 6.3.2. Найти локализованное автономное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x (u^2 \partial_x u)$$

Рассмотрим уравнение

$$\partial_t u = -\partial_x [(\partial_x u)^2] \quad (6.45)$$

Будем искать его локализованное автономное решение вида (6.37). Инвариантность относительно преобразования (6.38) в совокупности с законом сохранения  $\int dx u = \text{const}$  дает  $a = b = 1/4$ . Подставляя выражение (6.37) с этими показателями в уравнение (6.45), находим

$$\partial_\xi (\xi f) = 4 \partial_\xi [(\partial_\xi f)^2]$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\xi f = 4 (\partial_\xi f)^2$$

поскольку константа интегрирования равна нулю в силу предполагаемого быстрого стремления  $f$  к нулю при стремлении  $\xi$  к бесконечности. Помимо тривиального решения  $f = 0$  найденное уравнение имеет решение, которое можно найти после разделения переменных  $f = (1/36) (\xi^{3/2} - C)^2$ , где  $C$  - произвольная постоянная. Учитывая, что  $f$  локализовано, находим

$$f(\xi) = \begin{cases} f = (1/36) (\xi^{3/2} - C)^2, & \xi < C^{2/3} \\ f = 0, & \xi > C^{2/3} \end{cases} \quad (6.46)$$

Задача 6.3.3. Найти локализованное автономное решение уравнения

$$\partial_t u = -\partial_x [(\partial_x u)^4]$$

Выше мы рассматривали двучленные уравнения, инвариантность которых относительно преобразования (6.38) давала одно соотношение между показателями  $a$  и  $b$ . Дополнительную связь между показателями  $a$  и  $b$  удавалось найти за счет закона сохранения. Это и фиксировало величины  $a$  и  $b$ . Встречаются и трехчленные уравнения, инвариантность которых относительно преобразования (6.38) дает сразу два условия, которые фиксируют  $a$  и  $b$ . Рассмотрим в качестве примера нелинейное уравнение диффузии с источником

$$\partial_t u = \partial_x (u^n \partial_x u) + u^k \quad (6.47)$$

Инвариантность уравнения (6.47) относительно преобразования (6.38) дает два условия, которые приводят к

$$a = \frac{1}{k-1}, \quad b = \frac{k-n-1}{2(k-1)} \quad (6.48)$$

Уравнение на функцию  $f$  в терминах автомодельной переменной  $\xi = x/t^b$  в данном случае может быть решено только численно.

Задача 6.3.4. Выписать уравнение на функцию  $f$  в терминах автомодельной переменной  $\xi = x/t^b$  для уравнения (6.47).

Задача 6.3.5. Найти локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x (u^{-1} \partial_x u) + \partial_x u$$

### 3.6.6 6.3.2 Движение фронта

Однородные по времени и пространству дифференциальные уравнения допускают решения вида  $u(t, \mathbf{r}) = w(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$ , которые описывают эволюцию поля  $u$ , которая сводится к движению некоторого профиля со скоростью  $\mathbf{V}$ . Мы будем говорить о такой эволюции, как о движении фронта, который определяется условием  $\mathbf{r} = \mathbf{V}t$ , если далеко впереди (перед фронтом) и далеко позади (за фронтом) поле  $u$  стремится к некоторым константам. Разумеется, эти константы сами по себе должны быть решениями исходного уравнения.

Проанализируем уравнение Фишера

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + u(1-u) \quad (6.49)$$

которое встречается в различных контекстах. Например, оно моделирует процесс горения, тогда  $u = 0$  соответствует исходной смеси горючего и окислителя, а  $u = 1$  - полностью сгоревшей смеси. Уравнение (6.49) имеет два стационарных однородных решения,  $u = 0$  и  $u = 1$ , первое из которых неустойчиво, а второе устойчиво. Предполагается, что во всем пространстве  $0 < u < 1$ . Это свойство поддерживается уравнением. Например, полагая

$$u = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)}$$

находим уравнение

$$\partial_t \eta = \partial_x^2 \eta - \tanh(\eta/2) (\partial_x \eta)^2 + 1$$

которое не имеет особенностей по  $\eta$  на всей действительной оси. Таким образом, эволюция  $\eta$  не приводит к выходу  $u$  за пределы интервала  $(0, 1)$ .

Уравнение (6.49) относится к типу релаксационных уравнений (5.41), оно может быть записано в виде  $\partial_t u = -\delta\mathcal{F}/\delta u$ , где

$$\mathcal{F} = \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 \right] \quad (6.50)$$

Вследствие уравнения (6.49) функционал (6.50) монотонно убывает со временем, поскольку его производная по времени

$$\partial_t \mathcal{F} = - \int dx (\delta\mathcal{F}/\delta u)^2 = - \int dx (\partial_t u)^2$$

отрицательна. Это свойство соответствует необратимости процесса горения.

Уравнение (6.49) допускает решение в виде распространяющегося фронта  $u(t, x) = w(x - Vt)$ , когда происходит переход от неустойчивого состояния  $u = 0$ , которое реализуется перед фронтом, к устойчивому состоянию  $u = 1$ , которое реализуется за фронтом. Как следует из уравнения (6.49), уравнение на функцию  $w$  имеет вид

$$V \partial_x w + \partial_x^2 w + (1 - w)w = 0 \quad (6.51)$$

Имеется ограничение снизу на скорость движения фронта  $V > 2$ , которое можно получить из анализа приближения уравнения (6.51) к нулевому значению при  $x \rightarrow \infty$ , когда  $w$  мало. В случае  $V < 2$  уравнение (6.51) приводит к осцилляторному характеру приближения  $w$  к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , что противоречит условию  $w > 0$ . При  $V > 2$  уравнение (6.51) имеет решение, удовлетворяющее условию  $0 < w < 1$ , которое описывает распространяющийся фронт. В общем случае это решение можно найти только численно.

Задача 6.3.6. Найти решение уравнения (6.51), которое имеет вид  $w = [1 + \exp(cx)]^{-2}$ . Какому значению скорости  $V$  оно соответствует?

Задача 6.3.7. Найти производную  $\partial_t \mathcal{F}$  при движении фронта, которое описывается уравнением  $u(t, x) = w(x - Vt)$ .

Спрашивается, какому значению скорости  $V$  соответствует решение реальной задачи Коши? Ответ зависит от начальных условий. Как показали Колмогоров, Петровский и Пискунов, начальные условия  $u = 0$  при  $x > 0$  и  $u = 1$  при  $x < 0$  приводят к возникновению фронта, который движется с минимально возможной скоростью  $V = 2$ . Это связано с нулевым значением  $u$  в той области, куда распространяется фронт. Можно обеспечить и большую скорость распространения фронта. Но для этого в области, куда распространяется фронт, необходимо обеспечить ненулевое значение  $u$ , которое будет поддерживать распространение фронта со скоростью  $V > 2$ . Например, в этой области можно создать  $u(x)$ , которое определяется решением уравнения (6.51).

Разобранное нами уравнение (6.49) имеет только два стационарных однородных решения, 0 и 1. Соответственно, распространение фронта заключается в переходе от неустойчивого решения 0 к устойчивому 1. В то же время имеется класс уравнений, которые допускают в качестве стационарного решения произвольную константу. В качестве иллюстрации приведем хорошо известное уравнение Бюргерса

$$\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u \quad (6.52)$$

которое, очевидно, имеет своим решением произвольную константу  $u = \text{const}$ . В подобном случае распространение фронта может заключаться в переходе от одной константы к другой.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения Бюргерса (6.52). Будем искать его решение, которое заключается в распространении фронта, перед которым значение

$u$  равно нулю, а за фронтом - некоторой константе. Подстановка  $u(t, x) = w(x - Vt)$  в уравнение Бюргерса (6.52) дает соотношение  $-V\partial_x w + w\partial_x w - \partial_x^2 w = 0$ , которое приводит к первому интегралу  $-Vw + w^2/2 - \partial_x w = C$ . Мы рассматриваем решение, которое стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , в этом случае  $C = 0$ . Разделяя переменные в оставшемся уравнении первого порядка, находим  $V(x - x_0) = \ln[(2V - w)/w]$ , где  $x_0$  - произвольная константа. Отсюда находим

$$w(x) = \frac{2V}{1 + \exp[V(x - x_0)]} \quad (6.53)$$

Обратим внимание на то, что при  $x \rightarrow -\infty w \rightarrow 2V$ . Таким образом, найденное решение описывает движение фронта, перед которым  $u$  равно нулю, а за которым  $u$  равно  $2V$ .

Задача 6.3.8. Найти форму фронта, перед которым  $u = 0$ , для уравнения  $\partial_t u + 3u^2 \partial_x u = \partial_x^2 u$ .

Задача 6.3.9. Найти форму антисимметричного фронта для уравнения  $\partial_t u + 3u^2 \partial_x u + \partial_x^3 u = 0$

Приведем пример, когда разность значений поля  $u$  перед фронтом и за ним не связана со скоростью его движения. Рассмотрим уравнение

$$2u\partial_t u = \partial_x [(\partial_x u)^2] \quad (6.54)$$

которое также допускает в качестве стационарного решения произвольную константу. Подстановка  $u = w(x - Vt)$  в уравнение (6.54) дает

$$2Vw\partial_x w + \partial_x [(\partial_x w)^2] = 0 \quad (6.55)$$

Это уравнение имеет, очевидно, первый интеграл

$$Vw^2 + (\partial_x w)^2 = C \quad (6.56)$$

который должен быть положительным при  $V > 0$ . Найденный первый интеграл (6.56) имеет смысл закона сохранения для осциллятора, который приводит к решениям в виде гармонических функций. Если мы хотим получить решение в виде фронта, то мы должны склеить его с константами, которые являются решениями уравнения (6.55). Поскольку (6.55) является уравнением второго порядка по производной, то в месте склейки должны быть непрерывны как сама функция, так и ее производная. Отсюда получаем решение

$$\begin{aligned} w(x) &= -\sqrt{C/V}, & x < -\frac{\pi}{2\sqrt{V}} \\ w(x) &= \sqrt{C/V} \sin(\sqrt{V}x), & -\frac{\pi}{2\sqrt{V}} < x < \frac{\pi}{2\sqrt{V}} \\ w(x) &= \sqrt{C/V}, & x > \frac{\pi}{2\sqrt{V}} \end{aligned}$$

Очевидно, что аргумент  $x$  в этих выражениях может быть сдвинут на произвольную константу. Более того, можно построить и более сложные решения, когда между асимптотическими константами происходит произвольное число полупериодов, а не один, как приведено выше. Отметим, что при  $V < 0$  решений уравнения (6.55), которые давали бы фронты, нет. Это связано с тем, что при  $V < 0$  решения уравнения (6.56) выражаются через гиперболические косинус и синус, которые не могут быть подклеены к асимптотическим константам.

Задача 6.3.10. Как связаны между собой асимптотические значения  $w$  для фронта, который описывается уравнением (6.55), если между ними вставлен один период?

### 3.7 Нелинейные полевые уравнения

Нелинейные явления играют весьма важную роль в современной физике. В настоящем разделе мы рассматриваем основные свойства нелинейных полевых уравнений. В частности, мы рассматриваем случаи, когда за счет нелинейной эволюции в поле за конечное время формируется особенность, или, как говорят, происходит коллапс. Мы изучаем также солитоны, которые соответствуют локализованным в пространстве решениям, движущимся с постоянной скоростью.

#### 3.7.1 7.1 Уравнения Хопфа и Бюргерса

Мы начинаем изучение нелинейных явлений с акустики. Сначала мы рассмотрим одномерный случай, когда все характеризующие акустическое поле величины зависят только от одной координаты  $x$ . Нас будут интересовать явления, связанные с волнами, распространяющимися в одном направлении. Как известно, в линейном приближении решение одномерного волнового акустического уравнения говорит, что в системе отсчета, движущейся с (линейной) скоростью звука, характеристики акустического поля не меняются. Учтем теперь нелинейные эффекты, которые мы будем анализировать в той же системе отсчета. Нелинейные эффекты будут считаться слабыми, то есть мы будем принимать во внимание только главные нелинейные члены в уравнениях.

##### 3.7.2 7.1.1 Уравнение Хопфа

Введем характеризующую акустическое поле величину  $u$ , которая, например, может описывать отклонение плотности вещества от его равновесного значения. В линейном приближении в выбранной системе отсчета мы имеем тривиальное уравнение  $\partial_t u = 0$ . Учтем теперь нелинейность. В главном порядке это квадратичная нелинейность. Однако мы не можем ввести в уравнение член, пропорциональный  $u^2$ . Дело в том, что однородное в пространстве поле  $u$  соответствует однородному же изменению давления среды, что не может вызвать эволюцию  $u$ . Поэтому мы должны ввести в уравнение член, содержащий пространственные производные. В главном порядке он пропорционален  $u \partial_x u$ .

Таким образом, после соответствующего перемасштабирования мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

которое называется уравнение Хопфа (Hopf). Можно сказать, что нелинейный член в уравнении Хопфа отражает зависимость скорости звука от плотности (или давления). Действительно, в лабораторной системе отсчета уравнение (7.1) имеет вид  $\partial_t u + (c_0 + u) \partial_x u = 0$ , где  $c_0$  - скорость звука в линейном уравнении. Отсюда видно, что  $u$  - поправка к этой скорости.

Уравнение Хопфа (7.1) содержит только первые производные от  $u$  и линейно по этим производным. Такое уравнение может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. А именно, можно найти уравнения для изменения поля  $u$  вдоль специальных траекторий (характеристик), которые определяются уравнениями:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u \quad (7.2)$$

Таким образом, начальные значения поля  $u$ , не меняясь, переносятся со скоростью  $u$ . Поле  $u$  вследствие уравнений (7.2) неявно определяется из соотношений

$$x = y + ut, \quad u = u(0, y) \quad (7.3)$$

где, как и выше,  $u(0, x)$  - начальное значение поля.

Если  $u(0, x)$  является монотонно растущей функцией  $x$ , то эволюция, которая описывается (7.3), заключается в неограниченном 'растягивании' поля  $u$  вдоль оси  $X$ , без изменения значений этого поля. Таким образом, локально поле  $u$  становится все более похожим на линейный профиль, а наклон этого профиля уменьшается со временем. Легко установить закон этого убывания. Для этого найдем уравнение на производную  $s = \partial u / \partial x$ , которое получается из уравнения Хопфа (7.1) после дифференцирования:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = -s^2 \quad (7.4)$$

Таким образом, мы должны решать вдоль характеристики уравнение  $ds/dt = -s^2$ , решение которого имеет вид  $s = (1/s_0 + t)^{-1}$ , где  $s_0$  - значение производной  $s$  при  $t = 0$ . Если  $s_0 > 0$  (что соответствует монотонно растущей функции  $u$ ), то на больших временах  $s \approx t^{-1}$ , то есть наклон на всех характеристиках становится одинаковым. Это и означает формирование линейного профиля.

Отметим, что методом характеристик можно решить и более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad (7.5)$$

которое отличается от уравнения Хопфа (7.1) дополнительным членом в правой части, "накачкой"  $f$ , которая может быть произвольной функцией времени  $t$  и пространственной координаты  $x$ . Тогда вместо системы (7.2) надо решать уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dx}{dt} = u \quad (7.6)$$

Однако динамика, которая описывается уравнением Хопфа, обычно приводит к возникновению особенностей в поле  $u$ . Они связаны с теми участками в начальном профиле, где наклон  $u(0, x)$  отрицателен. Эволюцию этого наклона можно найти при помощи того же уравнения (7.4), которое приводит к  $s = (1/s_0 + t)^{-1}$ . Если  $s_0 < 0$ , то значение  $s$  обращается в бесконечность при  $t = -1/s_0$ . Таким образом, если в начальном профиле  $s(0, x)$  имеются участки с отрицательными значениями  $s$ , то за конечное время производная  $s = \partial_x u$  обращается в бесконечность. Быстрее всего это происходит для наибольшего по абсолютной величине значения  $s$ , которое определяется условием  $\partial s / \partial x = \partial^2 u / \partial x^2 = 0$ . Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим  $y_0$ , впервые обращается в бесконечность  $s$ .

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки  $y_0$ . Раскладывая функцию  $u(0, y)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $y_0$ , мы находим

$$u(0, y) \approx u_0 - c_1 (y - y_0) + c_2 (y - y_0)^3$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - положительные константы. Положительность  $c_1$  означает отрицательность  $s$  вблизи точки  $y_0$ , а положительность  $c_2$  означает, что значение  $s$  максимально по абсолютной величине в точке  $y_0$ . Далее, решая уравнения (7.3), мы находим

$u = u_0 - c_1 (x - ut - x_0 + u_0/c_1) + c_2 (x - ut - x_0 + u_0/c_1)^3$ , где мы ввели обозначение  $x_0 = y_0 + u_0/c_1$ . В этом случае в момент времени  $t = 1/c_1$ , который и является моментом, когда  $s$  обращается в бесконечность в точке  $x_0$ , приведенное соотношение сводится к

$$c_2 (u - u_0)^3 = -c_1^4 (x - x_0)$$



где мы опустили линейное по  $x - x_0$  слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при малых  $x - x_0$ . Таким образом, мы приходим к профилю  $u - u_0$ , который пропорционален  $(x - x_0)^{1/3}$ , то есть является сингулярным в точке  $x = x_0$ . Эта сингулярность и является формальной причиной, по которой  $s$  обращается в бесконечность.

Таким образом, даже если нелинейность слаба, она за конечное время приводит к образованию особенности в поле  $u$ . При приближении к особенности уравнение Хопфа становится неприменимым, так как растет вторая производная от  $u$ , и потому для анализа дальнейшей эволюции уравнение Хопфа следует модифицировать. Именно на этом пути возникает уравнение Бюргерса.

Задача 7.1.1. Решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями  $u = -c_1x + c_2x^3$ , полученное с помощью метода характеристик, можно формально продолжить на времена  $t > c_1^{-1}$ , что приводит к неоднозначному решению и  $(x)$ . Найти область существования этой неоднозначности и значения функции и в этой области.

Задача 7.1.2. Найти решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями  $u = -c_1x + c_2x^2$ .

Задача 7.1.3. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая является константой  $f_0$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $f_0$ ?

Задача 7.1.4. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая равна  $h_0x$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $h_0$ ?

### 3.7.3 7.1.2 Уравнение Бюргерса

Уравнение Бюргерса (Burgers) отличается от уравнения Хопфа (7.1) введением дополнительного члена, который описывает диссипацию, связанную с вязкостью, и потому пропорционального второй производной. В безразмерных переменных мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.7)$$

которое и называется уравнением Бюргерса. Подчеркнем, что область применимости уравнения Бюргерса отнюдь не ограничивается акустикой, оно возникает во многих физических задачах.

На самых больших временах любое решение уравнения (7.7), стремящееся к нулю на  $\pm\infty$  по  $x$ , стремится к нулю,  $u \rightarrow 0$ . Действительно, в силу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \frac{u^2}{2} = - \int dx \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (7.8)$$

Таким образом, положительно определенная величина  $\int dx u^2$  убывает со временем и, при достаточно большом  $t$ , становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргерса  $u$ , которое стремится к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Тогда при больших  $t$  значение  $u$  становится малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (7.7). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению. Локализованные решения этого уравнения имеют вид

$$u \propto \frac{1}{t^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right]$$

$$u \propto \frac{x-x_0}{t^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right]$$

вторая асимптотика реализуется при условии  $\int dx u = 0$ .

В случае сильной нелинейности, который реализуется, если для начальных условий  $UL \gg 1$ , где  $L$  - характерный масштаб (корреляционная длина) начального состояния  $u(0, x)$ , а  $U$  - характерное значение поля  $u(0, x)$ . В этом случае начальная эволюция поля  $u$

может быть описана в пренебрежение второй производной в уравнении (7.7), когда оно сводится к уравнению Хопфа (7.1), которое, однако, ведет к сингулярности.

Уравнение Бюргерса позволяет проанализировать структуру, которая возникает после возникновения сингулярности в уравнении Хопфа. После некоторого переходного процесса формируется специальное решение, которое движется со скоростью  $u_0$ , то есть  $\partial u / \partial t = -u_0 \partial u / \partial x$ . Подставляя это соотношение в уравнение Бюргерса (7.7), мы находим затем его первый интеграл  $(u - u_0)^2 - 2\partial u / \partial x = \text{const}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_0 - 2a \tanh [a(x - x_0)] \quad (7.9)$$

которое называют шоком. Это решение соответствует тому, что в области ширины  $a^{-1}$  поле  $u$  испытывает скачок  $4a$ . Решение (7.9) дает универсальную форму шок, которые формируются при условии  $UL \gg 1$ , тогда  $a \sim U$ . Заметим, что стационарность этого решения не противоречит сделанному выше утверждению о стремлении  $u$  к нулю на больших временах, поскольку последнее справедливо только для решений, стремящихся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , в то время как выражение (7.9) этому условию не удовлетворяет.

Поясним общую структуру поля  $u$ , которая возникает при эволюции некоторого характеризующегося сильной нелинейностью начального условия. За конечное время из участков  $u$  с отрицательным наклоном формируются шоки, а из участков с положительным наклоном формируются промежутки между шоками. В дальнейшем поле в этих промежутках стремится к линейному профилю, поскольку его эволюция управляется уравнением Хопфа. Как следует из выражения (7.9), шок движется со скоростью  $u_0$ , которую можно определить, как полусумму значений поля  $u$  на краях шока. Это означает, что время от времени происходят события, когда большой шок (со значительной амплитудой  $a$ ) догоняет меньший шок. Это кончается поглощением малого шока большим. Поэтому количество шок в системе постепенно убывает.

Детали этих процессов можно проследить с помощью преобразования Коула-Хопфа (Cole-Hopf)

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h / \partial x \quad (7.10)$$

Оно приводит уравнение Бюргерса (7.7) к чисто диффузионному уравнению

$$\partial \Psi / \partial t = \partial^2 \Psi / \partial x^2 \quad (7.11)$$

которое изучалось в разделе (4.2.1). Решение уравнения (7.11) может быть выражено в виде интеграла от начального значения

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \exp \left[ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right] \Psi(0, y) \quad (7.12)$$

в соответствии с (4.36).

Выражение (7.12) может быть использовано для получения ряда точных решений

уравнения Бюргерса. Рассмотрим в качестве примера начальное условие  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$ , которое соответствует шоку (7.9) с  $u_0 = x_0 = 0$ . В этом можно убедиться, производя обратное по отношению к (7.10) преобразование

$$u = -2\partial(\ln \Psi)/\partial x \quad (7.13)$$

Подставляя выражение  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$  в уравнение (7.12) и вычисляя интеграл по  $y$ , мы находим  $\Psi(t, x) = \cosh(ax) \exp(a^2 t)$ . Подставляя это выражение в соотношение (7.13), мы находим то же выражение  $u = -2a \tanh(ax)$ , поскольку дополнительный временной множитель выпадает из ответа. Таким образом, мы другим способом убедились в том, что выражение (7.9) дает стационарное решение уравнения Бюргерса. Обратим внимание на то, что мы получили растущее со временем решение уравнения диффузии. Это связано с тем, что поле  $\Psi$  неограниченно растет при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Задача 7.1.5.** Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием  $\Psi(0, x) = \cosh(ax) + B \cosh(bx)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ . Проследить, как большой шок "поедает" маленький, считая  $b > a$  и  $B \ll 1$ .

**Задача 7.1.6.** Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием  $\Psi(0, x) = 1 - A \exp(-x^2)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ .

### 3.7.4 7.2 Нелинейное уравнение Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию огибающих электромагнитных волн, плазменных колебаний, и так далее. Другими словами, НУШ относится к универсальным волновым уравнениям, которые применимы в самых разных физических случаях.

Как мы уже установили в разделе (4.1.3), в линейном приближении уравнение на огибающую  $\psi$  можно свести к свободному уравнению Шрёдингера (4.60) (мы не рассматриваем возникающий иногда гиперболический случай). Теперь мы учтем нелинейность в уравнении для амплитуды  $\psi$ . Для ряда случаев эта нелинейность по физическим соображениям может быть только третьего порядка. Например, при распространении электромагнитных волн в материальных средах основным источником нелинейности является эффект Керра, то есть зависимость диэлектрической проницаемости среды от напряженности электрического поля. Диэлектрическая проницаемость раскладывается по четным степеням напряженности поля. Главным членом разложения является квадратичный, отсюда и кубическая нелинейность в уравнении на огибающую.

Нелинейность должна быть добавлена в уравнение Шрёдингера (4.60), она пропорциональна третьей степени  $\psi$ . Если система однородна по времени, то имеется дополнительное правило отбора нелинейного члена. Как следует из (4.20), сдвиг по времени эквивалентен добавлению фазы к  $\psi$ . Поэтому уравнение на  $\psi$  должно быть инвариантно относительно сдвига фазы  $\psi$ , что однозначно определяет вид нелинейного члена, который должен быть пропорционален  $|\psi|^2 \psi$ . Еще одним дополнительным правилом отбора является отсутствие диссипации, что фиксирует действительный коэффициент при  $|\psi|^2 \psi$  в уравнении.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно менять соотношения между коэффициентами при нелинейном и дисперсионном слагаемых НУШ, но не их относительный знак. Поэтому НУШ может быть приведено к двум каноническим типам:

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi + 2|\psi|^2 \psi = 0 \quad (7.14)$$

и

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi - 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (7.15)$$

Мы видим, что оба этих уравнения имеют вид квантовомеханического уравнения Шрёдингера (4.54) с потенциалом  $U$ , равным  $-2|\psi|^2$  в случае (7.14) и  $+2|\psi|^2$  для (7.15). Поскольку уравнение (7.14) соответствует притягивающему потенциалу, то этот случай называется 'НУШ с притяжением', и, соответственно, уравнение (7.15) - 'НУШ с отталкиванием'. Как мы знаем из квантовой механики, волновые функции в притягивающих и отталкивающих потенциалах имеют качественно разные свойства. Поэтому и решения уравнений (7.14) и (7.15) отличаются радикальным образом. Самые интересные эффекты возникают в притягивающем случае (7.14), который, к тому же, часто реализуется в оптических приложениях. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся именно на нем.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (7.14) является следствием вариационного принципа. А именно, оно получается, как экстремум 'действия

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int dt d\mathbf{r} L \\ L &= i\psi^*\partial_t\psi - \nabla\psi^*\nabla\psi + |\psi|^4 \end{aligned} \quad (7.16)$$

При вариации  $\mathcal{S}$  удобно рассматривать поля  $\psi$  и  $\psi^*$ , как независимые динамические переменные, что возможно в силу того, что  $\psi$  имеет две степени свободы.

Уравнение (7.14) ведет к законам сохранения ряда величин, которые связаны с общими симметриями этого уравнения: инвариантностью по отношению к сдвигу фазы  $\psi$ , а также по отношению к сдвигу начала отсчета времени и начала координат, смотри раздел 7.5.1. Соответствующими интегралами движения при произвольном числе измерений для локализованных в пространстве решений являются 'число частиц'  $N$ , 'энергия'  $E$  и 'импульс'  $\mathbf{P}$ , то есть  $dN/dt = 0, dE/dt = 0, d\mathbf{P}/dt = 0$ .

Выражения для этих (Нётеровских) интегралов движения

$$\begin{aligned} N &= \int d\mathbf{r} |\psi|^2 \\ E &= \int d\mathbf{r} (|\nabla\psi|^2 - |\psi|^4), \\ \mathbf{P} &= -i \int d\mathbf{r} \psi^* \nabla\psi \end{aligned} \quad (7.19)$$

могут быть получены в рамках общей процедуры из Лагранжиана (7.16), смотри выражения (7.82, 7.84, 7.87).

Для нелинейного уравнения Шрёдингера имеется замечательное соотношение - теорема Таланова, позволяющее сделать качественные выводы о поведении решений НУШ для широкого класса начальных условий. Для вывода теоремы Таланова рассмотрим функционал

$$I = \int d\mathbf{r} r^2 |\psi|^2 \quad (7.20)$$

Для волнового пакета, центрированного вокруг начала координат, этот функционал можно оценить, как  $I \sim NR^2$ , где  $R$  - размер пакета. Для интеграла (7.20) справедливо соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8 \int d\mathbf{r} \left( |\nabla\psi|^2 - \frac{d}{2} |\psi|^4 \right) \quad (7.21)$$

которое является следствием уравнения (7.14). Здесь  $d$  - размерность пространства.

В двумерном случае в правой части (7.21) возникает выражение:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8E, \quad d = 2 \quad (7.22)$$

Поскольку  $E$  не зависит от времени, то общее решение уравнения (7.22) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct + 4Et^2, \quad d = 2 \quad (7.23)$$

где константы  $C$  и  $E$  определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что  $E < 0$ . Тогда при любых конечных  $I(0)$  и  $C$  наступит такой момент времени  $t_*$ , что  $I(t_*) = 0$ . Из оценки  $I \sim NR^2$  следует, что  $R$  в момент  $t = t_*$  обратится в ноль. Сохранение же числа частиц  $N$  влечет за собой сингулярность  $\psi$  в этот момент.

Таким образом, в двух измерениях при  $E < 0$  происходит коллапс - явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при  $E > 0$ , однако при  $E < 0$  он неизбежен. Коллапс означает, что в функции  $\psi$  за конечное время возникает сингулярность в некоторой точке. Это может произойти в точке, отличной от  $\mathbf{r} = 0$ , в момент времени более ранний, чем  $t = t_*$ . То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале  $t \leq t_*$  коллапс при  $E < 0$  в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве уравнение (7.21) для  $I(t)$  приводит к неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8E - 4 \int d\mathbf{r} |\psi|^4 < 8E \quad (7.24)$$

Поэтому вместо равенства (7.23) мы приходим к неравенству

$$I(t) < I(0) + Ct + 4Et^2, \quad d = 3 \quad (7.25)$$

Это неравенство по-прежнему означает неизбежность коллапса при  $E < 0$ .

Задача 7.2.1. Проверить непосредственно законы сохранения интегралов (7.17, 7.18, 7.19), исходя из уравнения (7.14).

Задача 7.2.2. Вывести соотношение Таланова (7.21).

### 3.7.5 7.2.1 Уравнение Гросса-Питаевского

Уравнением Гросса-Питаевского называется уравнение

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi - 2|\psi|^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0 \quad (7.26)$$

которое описывает, например, динамику сверхтекучей системы холодных атомов. Мы рассматриваем простейший однородный случай. Обычно же холодные атомы находятся в оптических ловушках. Для описания этого случая в уравнение (7.26) следует ввести внешний потенциал, который создается оптической ловушкой.

Уравнение (7.26) может получено из нелинейного уравнения Шрёдингера (7.15) сдвигом фазы  $\psi$  на  $\kappa^2 t$ . Несмотря на это, решения уравнений (7.15) и (7.26) существенно отличаются. Это связано с тем, что при решении нелинейного уравнения Шрёдингера (7.15) обычно считается, что функция  $\psi$  стремится к нулю на бесконечности, в то время как при решении уравнения Гросса-Питаевского (7.26) обычно считается, что на бесконечности  $\psi$  стремится к стационарному решению уравнения Гросса-Питаевского (7.26), которое записывается в виде  $\psi = \psi_0 e^{i\varphi_0}$ , где  $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$  и фаза  $\varphi_0$  произвольна.

Как и нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Гросса-Питаевского (7.26) может быть получено, как условие экстремума действия

$$S = \int dt d\mathbf{r} L \quad (7.27)$$

$$L = i\psi^* \partial_t \psi - \nabla \psi^* \nabla \psi - |\psi|^4 + \kappa^2 |\psi|^2$$

По сравнению с выражением (7.16) в 'действии' (7.27) противоположен знак перед  $|\psi|^4$  и имеется дополнительный член с  $\kappa$ . Таким образом, мы приходим к законам сохранения волнового действия, энергии и импульса

$$\begin{aligned} N &= \int dV |\psi|^2 \\ E &= \int dV (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^4 - \kappa^2 |\psi|^2) \\ \mathbf{P} &= -i \int dV \psi^* \nabla \psi \end{aligned} \quad (7.30)$$

смотри раздел 7.5.1.

Линеаризуя уравнение (7.26) около стационарного решения  $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$ , мы находим

$$i\partial_t \delta\psi + \nabla^2 \delta\psi - \kappa^2 \delta\psi - \kappa^2 \delta\psi^* = 0 \quad (7.31)$$

где  $\delta\psi = \psi - \psi_0$ . Уравнение (7.31) описывает волны, которые возбуждаются в системе при отклонении  $\psi$  от равновесного решения  $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$ . Переходя к Фурьепредставлению, мы находим закон дисперсии этих волн

$$\varphi = \sqrt{2\kappa^2 + q^2} q \quad (7.32)$$

При малых  $q$ ,  $q \ll \kappa$ , закон дисперсии (7.32) является звуковым,  $\varphi \propto q$ . При больших  $q$ ,  $q \gg \kappa$ , закон дисперсии (7.32) переходит в  $\varphi = q^2$ .

Уравнение (7.26) допускает решения с вихрями Фейнмана. Вихревой линией является линия, на которой  $\psi$  обращается в ноль, а фаза  $\varphi$  поля  $\psi$  при обходе вокруг вихревой линии меняется на  $2\pi$  или  $-2\pi$ . Это возможно в силу того, что при изменении фазы  $\varphi$  на  $2\pi$  значение  $\psi$  не меняется. Заметим, что изменение фазы  $\psi$  при обходе вокруг вихря может быть отлично от нуля только в силу того, что на самой вихревой линии  $\psi = 0$ , и потому фаза  $\psi$  на этой линии не определена. В принципе изменение фазы  $\varphi$  может быть равно  $2\pi n$ , где  $n$  - произвольное целое число. Но вихрь с  $|n| > 1$  в процессе эволюции, как правило, разваливается на вихри с единичной циркуляцией. Поэтому мы сосредоточимся на рассмотрении вихрей с единичной циркуляцией.

Изменение фазы  $\varphi$  при обходе вокруг вихревой линии может быть записано в виде контурного интеграла

$$\oint d\mathbf{r} \nabla \varphi = \pm 2\pi \quad (7.33)$$

где интеграл идет по некоторому замкнутому контуру, идущему вокруг вихревой линии. Интеграл (7.33), значение которого в силу теоремы Стокса не меняется при непрерывных деформациях контура интегрирования, может быть отличен от нуля в силу того, что контур не может быть стянут в точку, поскольку внутри этого контура имеется особая линия, где фаза  $\varphi$  имеет сингулярность. Отсюда следует, в частности, что вихревая линия не может иметь точку окончания, поскольку при ее наличии контур, идущий вокруг вихревой линии, может быть непрерывно стянут в точку за пределами вихревой линии. Таким образом, вихревая линия либо является замкнутой, либо ее концы уходят в бесконечность.

Другим следствием сказанного является невозможность мгновенного исчезновения вихревой линии в процессе эволюции. Как говорят, вихревая линия топологически защищена. Однако в процессе эволюции форма вихревой линии изменяется. Поэтому возможен процесс, когда аннигилируют две вихревые линии с противоположными циркуляциями. Возможно также исчезновение (или возникновение) замкнутой вихревой линии, связанное с уменьшением ее размеров.

Проанализируем поле  $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$ , которое соответствует стационарному прямолинейному вихрю. Будем считать, что вихревая линия направлена вдоль оси  $Z$ . В

силу симметрии фаза  $\varpi$  совпадает с полярным углом в плоскости  $X - Y$  (или отличается от него знаком), а абсолютная величина  $|\psi|$  зависит только от  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . При  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  абсолютная величина  $|\psi|$  стремится к  $\psi_0$ . Найдем поведение  $|\psi|$  при малых  $x, y$ . В этом случае в уравнении (7.26) главным членом является Лапласиан, то есть мы должны найти решения уравнения  $\nabla^2 \psi = 0$ . Очевидно, что интересующие нас решения имеют вид  $\psi \propto x \pm iy$ . Таким образом, при малых  $x, y$   $|\psi| \propto \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Найдем скорость движения вихревой линии. На малых расстояниях ее можно считать прямолинейной. Направляя вдоль вихревой линии ось  $Z$ , находим, что вблизи вихревой линии поле  $\psi$  можно аппроксимировать, как  $\propto (x + iy - \zeta)e^{i\phi}$ , где  $\zeta(t)$  - комплексное число, которое определяет изменение положения вихревой линии со временем, "внешняя" фаза  $\psi$ , не связанная непосредственно с самим вихрем. Подставляя приведенное выражение в уравнение (7.26) и полагая затем  $x + iy = \zeta$ ,  $\partial_t \zeta' = 2\partial_x \phi$ ,  $\partial_t \zeta'' = 2\partial_y \phi$ , где  $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ . Обобщая это наблюдение, мы заключаем, что вихревая линия движется со скоростью  $2\nabla\phi$ . Понятно, что наблюдаемым является только движение в направлении, перпендикулярном вихревой линии.

Масштаб, на котором  $|\psi|$  вблизи вихревой линии выходит на асимптотическое значение  $\psi_0$ , может быть оценен, как  $\kappa^{-1}$ . На больших масштабах  $|\psi|$  мало отличается от  $\psi_0$ . В то же время на этих масштабах фаза параметра порядка  $\varphi$  остается "живой" переменной, которая обладает своей собственной динамикой. Разделяя в уравнении (7.26) действительную и мнимую части и считая  $|\psi|$  близким к  $\psi_0$ , находим

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= 0 \\ \partial_t \varphi + (\nabla \varphi)^2 + \mu &= 0\end{aligned}\tag{7.35}$$

где  $\mu = 2|\psi|^2 - \kappa$ . В контексте уравнения на фазу  $\mu$  не является динамической переменной, а является вспомогательным полем, присутствие которого должно обеспечить выполнение условия (7.34).

Уравнение (7.34) в совокупности с условием (7.33) позволяет найти "вихревую" часть фазы  $\varphi_{vor}$ , индуцированную вихрями. Для одиночного вихря

$$\nabla \varphi_{vor} = \frac{1}{2} \int ds [\mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta})] |\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}|^{-3}\tag{7.36}$$

Здесь интегрирование идет вдоль вихревой линии, причем  $ds$  - дифференциал ее длины,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор, касательный к вихревой линии, а  $\boldsymbol{\zeta}(s)$  задает положение вихревой линии в пространстве. Одно из двух возможных направлений  $\mathbf{n}$  определяется знаком циркуляции в выражении (7.33). Несложно проверить, что выражение (7.36) удовлетворяет обоим условиям

(7.33, 7.34). Выражение (7.36) является фактически разновидностью формулы Био-Савара-Лапласа. При наличии нескольких вихрей  $\nabla \varphi_{vor}$  является суммой интегралов (7.36), взятых для каждого вихря, что объясняется линейностью соотношений (7.33, 7.34).

**Задача 7.2.3.** Найти градиент фазы, индуируемый кольцевым вихрем радиуса  $R$  на его оси симметрии.

В рассматриваемом приближении, когда  $|\psi|$  является замерзшим, энергия (7.29) и импульс (7.30) приобретают вид

$$E = \int dV \frac{\kappa^2}{2} (\nabla \varphi)^2\tag{7.37}$$

$$\mathbf{P} = \frac{\kappa^2}{2} \int dV \nabla \varphi\tag{7.38}$$

В выражении (7.37) из энергии вычтена константа, связанная с наличием  $\psi_0$ . Отметим, что энергия (7.37) сохраняется вследствие условия гармоничности (7.34).

Найдем энергию прямолинейного вихря, направленного вдоль оси  $Z$ . В этом случае, как мы установили выше,  $|\nabla\varphi| = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ . Поэтому мы находим из (7.37) энергию на единицу длины

$$\frac{\kappa^2}{2} \int dx dy \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Этот интеграл является логарифмическим, то есть расходится как на малых, так и на больших расстояниях. Он должен быть ограничен снизу масштабом  $\kappa^{-1}$ , поскольку на меньших масштабах не работает наше приближение. Сверху же он должен быть ограничен масштабом  $l$ , который является размером системы или характерным расстоянием между вихрями. В результате находим в главном логарифмическом приближении

$$E = \pi\kappa^2 \int dz \ln(\kappa l) \quad (7.39)$$

где интеграл по  $z$  дает длину вихря, которой пропорциональна его энергия. С логарифмической точностью выражение (7.39) справедливо для вихря произвольной формы.

Задача 7.2.4. Найти энергию кольцевого вихря радиуса  $R$ .

Получим теперь выражение для импульса замкнутого вихря на основе (7.38). Поскольку  $\varphi$  изменяется на  $2\pi$  при обходе вокруг вихревой линии,  $\varphi$  не является однозначной функцией в пространстве. Ее можно сделать однозначной, если ввести некоторую поверхность, опирающуюся на вихревую линию, на которой  $\varphi$  испытывает скачок в  $2\pi$ . Используя теперь теорему Гаусса, мы сводим интеграл (7.38) к интегралу по двум сторонам этой поверхности, что дает

$$\mathbf{P} = \pi\kappa^2 \int d\mathbf{S} \quad (7.40)$$

где  $d\mathbf{S}$  - элемент поверхности. Выбор направления  $d\mathbf{S}$  зависит от знака изменения фазы при обходе вокруг вихревой линии.

Задача 7.2.5. Найти импульс кольцевого вихря радиуса  $R$ .

Задача 7.2.6. Найти скорость движения кольцевого вихря радиуса  $R$ . Убедиться, что скорость движения кольца равна  $\partial E / \partial \mathbf{P}$ .

### 3.7.6 7.3 Уравнения Эйлера и НавьеСтокса

Здесь мы рассматриваем уравнения, которые описывают динамику несжимаемой жидкости. Жидкость можно считать несжимаемой, если мало число Маха, которое равно отношению характерной скорости жидкости к скорости звука. В этом случае плотность массы жидкости  $\rho$  можно считать однородной (не зависящей от координат), а скорость жидкости  $\mathbf{v}$  удовлетворяет условию  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

В бездиссипативном пределе движение жидкости описывается уравнением Эйлера

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0 \quad (7.41)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  - скорость жидкости, а  $p$  - ее давление (на единицу массы). Давление  $p$  не является динамической переменной, оно 'подстраивается' под скорость так, чтобы выполнялось условие  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Беря дивергенцию уравнения (7.41), находим условие

$$\partial_i v_k \partial_k v_i + \nabla^2 p = 0 \quad (7.42)$$



которое связывает давление и градиент скорости. Однако связь эта нелокальна: чтобы найти  $p$ , надо решить уравнение Лапласа с правой частью.

Уравнение Эйлера (7.41) представляет собой закон сохранения импульса жидкости, который равен

$$\mathbf{P} = \rho \int dV \mathbf{v} \quad (7.43)$$

Вследствие уравнения Эйлера сохраняется энергия

$$E = \rho \int dV v^2/2 \quad (7.44)$$

которая является кинетической энергией жидкости. В пределе несжимаемой жидкости внутренняя энергия жидкости роли не играет.

Уравнение Эйлера (7.41) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} + \nabla p = 0 \quad (7.45)$$

Здесь  $d/dt = \partial_t + \mathbf{v} \nabla$  — производная Лагранжа, также известная как субстанциональная производная или материальная производная. Она определяет изменение со временем величин вдоль Лагранжевых траекторий (траекторий частиц жидкости). Из представления (7.45) следует теорема Кельвина, которая гласит, что сохраняется циркуляция скорости по замкнутому контуру, который переносится жидкостью (то есть каждая точка которого движется со скоростью  $\mathbf{v}$ ):

$$\frac{d}{dt} \Gamma = 0, \quad \Gamma = \oint d\mathbf{r} \mathbf{v} \quad (7.46)$$

Беря ротор от уравнения Эйлера (7.41), находим уравнение для завихренности  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ :

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (7.47)$$

Подчеркнем, что давление выпадает из этого уравнения. Из уравнения (7.47) следует, в частности, что являются стационарными решениями уравнения Эйлера (7.41) поля скорости  $\mathbf{v}$ , которые удовлетворяют условию  $\boldsymbol{\omega} \propto \mathbf{v}$ .

**Задача 7.3.1.** Найти периодические решения уравнения  $\boldsymbol{\omega} \propto \mathbf{v}$  (Arnold-Beltrami-Childes).

Одним из стационарных решений уравнения Эйлера (7.41) является твердотельное вращение с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$ , в этом случае скорость жидкости равна  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Заметим, что завихренность этого поля  $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega}$ . Как следует из уравнения Эйлера (7.41), при твердотельном вращении возникает давление  $p = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2/2$ , оно связано с центробежной силой. Уравнение Эйлера (7.41) допускает и более общее стационарное решение, которое является дифференциальным вращением вокруг некоторой оси. В этом случае поле скорости можно записать в виде  $\mathbf{v} = f \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ , где  $f$  — произвольная функция расстояния до оси вращения.

**Задача 7.3.2.** Найти градиент давления для стационарного поля скорости  $\mathbf{v} = f \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ .

Линеаризуем уравнение (7.47) на фоне твердотельного вращения. Обозначая  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \delta \mathbf{v}$ , находим

$$\partial_t \delta \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \delta \boldsymbol{\omega}) + 2(\boldsymbol{\Omega} \nabla) \delta \mathbf{v}$$

Первый член в правой части этого уравнения описывает перенос возмущений потока твердотельным вращением. Он исчезает после перехода во вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega$  систему отсчета. В этой системе отсчета находим

$$\partial_t \nabla \times \delta \mathbf{v} = 2\Omega \partial_z \delta \mathbf{v} \quad (7.48)$$

где мы направили ось  $Z$  вдоль  $\Omega$ . Ищем решение уравнения (7.48) в виде плоской волны  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . В силу несжимаемости  $\mathbf{k}\mathbf{A} = 0$ . Находим из уравнения (7.48)  $\partial_t(\mathbf{k} \times \mathbf{A}) = 2k_z \mathbf{A}$ . Имеются две поляризации, для которых  $\mathbf{k} \times \mathbf{A} = \pm i k \mathbf{A}$ , то есть  $k \partial_t \mathbf{A} = \mp i k_z \mathbf{A}$ . Таким образом, мы находим закон дисперсии волн, которые называются инерционными

$$\varpi = 2\Omega k_z / k \quad (7.49)$$

Задача 7.3.3. Показать, что уравнение  $\mathbf{k} \times \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A}$  при условии  $\mathbf{k}\mathbf{A} = 0$  имеет решения при  $\lambda = \pm i k$ .

Задача 7.3.4. Найти групповую скорость инерционных волн.

Теперь мы учтем вязкую диссипацию, которая приводит к постепенному переходу кинетической энергии жидкости во внутреннюю, что сопровождается ростом энтропии и нагревом жидкости. С учетом диссипации уравнение Эйлера (7.41) приобретает следующий вид

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (7.50)$$

где фактор  $\nu$  называется коэффициентом кинематической вязкости. Уравнение (7.50) называется уравнением Навье-Стокса. Наличие Лапласиана при скорости в вязком члене в уравнении Навье-Стокса (7.50) связано с тем, что оно по-прежнему имеет смысл закона сохранения импульса жидкости, и потому  $\partial_t \mathbf{v}$  должно быть дивергенцией потока жидкости.

Как и уравнение Эйлера (7.41), уравнение Навье-Стокса (7.50) предполагает малость числа Маха и потому должно быть дополнено условием бездивергентности скорости  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . Как и в уравнении Эйлера (7.41), в уравнении Навье-Стокса (7.50) давление  $p$  не является динамической переменной, а обеспечивает условие  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . Беря дивергенцию уравнения Навье-Стокса (7.50), находим то же условие (7.42), которое связывает давление с градиентом скорости. Отметим также, что граничным условием для уравнения Навье-Стокса (7.50) на твердой стенке является нулевое значение скорости. Это условие часто называют отсутствием проскальзывания.

Для характеристики гидродинамического движения используется число Рейнольдса (Reynolds), которое определяется, как  $Re = VL/\nu$ . Здесь  $V$  - характерная скорость гидродинамического движения, а  $L$  - его характерный масштаб. Уравнение Эйлера (7.41) соответствует пределу  $Re \rightarrow \infty$ . При малых числах Рейнольдса мы возвращаемся к линейному уравнению Стокса, смотри раздел 4.2.2.

При больших числах Рейнольдса движение жидкости приобретает обычно хаотический характер, это состояние называется турбулентностью. Анализ турбулентности лежит вне рамок настоящего пособия. Здесь же мы отметим, что в ряде важных случаев удается найти аналитическое решение уравнения Навье-Стокса (7.50) даже при больших числах Рейнольдса. Обычно это связано с наличием высокой симметрии решения.

Задача 7.3.5. Найти зависимость от времени течения, для которого в начальный момент времени имеется только полярная компонента скорости  $v_\varphi = \Omega r \exp(-ar^2)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$

Важным примером гидродинамического движения является течение Пуазейля, которое описывает течение жидкости по трубе цилиндрической формы. Направляя ось  $Z$  по оси цилиндра, находим следующее стационарное решение уравнения Навье-Стокса (7.50)

$$\begin{aligned} v_x = 0, v_y = 0, v_z = V \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) \\ \partial_z p = -4V/R \end{aligned} \quad (7.52)$$

для которого нелинейный член  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$  обращается в ноль. Здесь  $V$  - скорость жидкости на оси цилиндра, а  $R$  - его радиус. Поле скорости (7.51) удовлетворяет граничному условию на стенке цилиндра, где скорость течения обращается в ноль. Обратим внимание на то, что течение Пуазейля предполагает наличие градиента давления (7.52) вдоль трубы, который и вызывает течение.

Задача 7.3.6. Найти поток жидкости через трубу для течения Пуазейля.

### 3.7.7 7.4 Интегрируемые уравнения

В настоящем разделе мы анализируем так называемые интегрируемые уравнения, которые обладают бесконечным набором интегралов движения. Как правило, к ним относятся случаи, когда поля зависят от времени и одной координаты. В силу наличия бесконечного набора интегралов движения решения интегрируемых уравнений обладают весьма специфической динамикой. В частности, у них существует обширное семейство так называемых солитонных решений.

#### 3.7.8 7.4.1 Уравнение Кортевега-де-Фриза

Как мы уже отмечали, в общем случае решение уравнения Хопфа (7.1) приводит к формированию особенности в поле  $u$  за конечное время, и на больших временах эволюция поля  $u$  в рамках уравнения Хопфа исследована быть не может. В то же время уравнение Бюргерса (7.7) дает решение эволюционной задачи для поля  $u$  на всех временах. Это связано с присутствием в уравнении Бюргерса дополнительного (по сравнению с уравнением Хопфа) члена со второй производной, наличие которого приводит к устранению особенности в поле  $u$  (к которой приводит уравнение Хопфа). Для одномерной слабо нелинейной звуковой волны член со второй производной представляет диссипацию. В ряде задач более существенным оказывается другой эффект, связанный с дисперсией скорости звука, то есть с ее зависимостью от волнового вектора  $k$ . Этот эффект является бездиссипативным.

Будем считать, что диссипацией звука можно пренебречь, а дисперсия скорости звука существенна. В общем случае скорость звука является некоторой функцией  $k^2$ , при достаточно малых  $k$  первая зависящая от  $k$  поправка к скорости звука пропорциональна  $k^2$ . Это

означает, что к уравнению Хопфа (7.1) следует добавить член с третьей производной. В результате получается так называемое уравнение Кортевега де Фриза (Korteweg de Vries), каноническая форма которого записывается, как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (7.53)$$

Это уравнение сводится к уравнению Хопфа (7.1) в пренебрежение третьей производной и после перемасштабирования поля  $6u \rightarrow u$ .

В силу автономности уравнение Кортевега де Фриза (КдФ) допускает решение в виде волны, распространяющейся со скоростью  $V$ :  $u = w(x - Vt)$ . Подставляя это выражение в уравнение (7.53), находим

$$-V \frac{\partial w}{\partial x} + 6w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$$

Это уравнение, очевидно, имеет первый интеграл

$$-Vw + 3w^2 + \partial^2 w / \partial x^2 = C$$

Получившееся соотношение имеет вид уравнения Ньютона для "времени"  $x$  и "координаты"  $w$  с потенциальной силой. Поэтому оно имеет первый интеграл ("энергию"  $E$ ), то есть

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)^2 = 2E + 2Cw + Vw^2 - 2w^3 \quad (7.54)$$

где  $E$  и  $C$  - произвольные константы.

Можно рассматривать различные решения уравнения (7.54). Если мы интересуемся локализованными (солитонными) решениями уравнения (7.54), то  $E = C = 0$ , поскольку только при этих условиях существует решение, стремящееся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Тогда мы находим из уравнения (7.54)

$$dw/dx = \pm w \sqrt{V - 2w}$$

Это уравнение имеет решение

$$u(t, x) = \frac{V}{2 \cosh^2 \left[ \sqrt{V} (x - Vt - x_0) / 2 \right]} \quad (7.55)$$

где  $x_0$  - произвольный параметр. Таким образом, ширина солитона, который движется со скоростью  $V$ , равна  $1/\sqrt{V}$ .

Другим случаем являются периодические решения уравнения (7.54), которые называются кноидальными волнами. Чтобы такое решение существовало, необходимо наличие трех корней уравнения  $2E + 2Cw + Vw^2 - 2w^3 = 0$ . Область изменения  $w$  лежит между вторым и третьем решениями этого уравнения, где  $2E + 2Cw + Vw^2 - 2w^3 > 0$ . Тогда

$$\frac{x - Vt - x_0}{(2E + 2Cw + Vw^2 - 2w^3)^{-1/2}} = \pm \int^u dw \quad (7.56)$$

где  $x_0$  - произвольный параметр.

Уравнение Кортевега де Фриза имеет интегралы движения вида

$$I_n = \int dx P_n(u, \partial_x u, \partial_x^2 u, \dots) \quad (7.57)$$

где  $P_n$  - полиномы от функции  $u$  и её пространственных производных, в частности:

$$\begin{aligned} P_0 &= u, & P_1 &= u^2, & P_2 &= 2u^3 - (\partial u / \partial x)^2 \\ P_3 &= 5u^4 + 5u^2 \partial^2 u / \partial x^2 + (\partial^2 u / \partial x^2)^2 \end{aligned} \quad (7.58)$$

Поскольку число интегралов движения  $I_n$  бесконечно, говорят, что уравнение КдФ (7.53) является интегрируемым.

Уравнение КдФ (7.53) может быть записано, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] \quad (7.59)$$

где, как и для уравнения Бюргерса,  $u = \partial_x h$ . В силу однородности этого действия по времени и пространству оно приводит к законам сохранения энергии и импульса (смотри раздел 7.5.1), которые вычисляются в соответствии с выражениями (7.82, 7.84). Несложно увидеть, что плотность энергии и импульса совпадают (с точностью до множителя) с выражениями для  $P_2$  и  $P_1$ , соответственно, смотри (7.58). Таким образом, первый не Нётеровский интеграл движения уравнения КдФ определяется  $P_3$ , смотри (7.58).

Уравнение КдФ (7.53) инвариантно относительно "преобразования Галилея"  $u(t, x) \rightarrow v + u(t, x - 6vt)$ , где  $v$  - некоторая константа. Можно проверить, что действие (7.59) инвариантно относительно соответствующего преобразования для  $h : h(t, x) \rightarrow vx - 2v^2t + h(t, x - 6vt)$ . Инфинитезимальное преобразование для  $h$  имеет вид  $\delta h = vx - 6vt\partial_x h$ . Действуя далее, как и в разделе 7.5.1, то есть полагая  $v$  произвольной функцией  $t$  и  $x$ , вычисляя вариацию действия (7.59) и приравнивая ее к нулю, находим закон сохранения

$$\partial_t(xu - 3tu^2) + \partial_x[3xu^2 - \partial_x u + x\partial_x^2 u - 12tu^3 - 6tu\partial_x^2 u + 3t(\partial_x u)^2] = 0$$

Задача 7.4.1. Найти  $\partial_t P_3$ , где  $P_3$  определяется (7.58), в соответствии с уравнением КдФ (7.53) и убедиться, что результат сводится к полной производной по  $x$ .

### 3.7.9 7.4.2 Уравнение синус-Гордон

Уравнением синус-Гордон называют уравнение

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0 \quad (7.60)$$

Такого сорта уравнение возникает для динамики систем, которые описываются переменной  $\varphi$ , которая имеет смысл фазы некоторой величины и, соответственно, однозначно определена на интервале от 0 до  $2\pi$ . Удобно, однако, считать, что  $\varphi$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$  с тем, чтобы избежать скачков  $\varphi$ . При этом состояния системы, отличающиеся на  $2\pi n$  ( $n$  - целое число) физически эквивалентны.

Уравнение синус-Гордон (7.60), как и КдФ, приводит к бесконечному набору законов сохранения. Поэтому оно относится к интегрируемым уравнениям.

Примером физической системы, описываемой уравнением (7.60), являются проводящие одномерные цепочки, в которых при достаточно низких температурах возникает так называемая волна зарядовой плотности. Эта волна характеризуется фазой  $\varphi$ , с вариациями которой связана так называемая Фрёлиховская мода, которая описывается уравнением (7.60), при подходящем выборе единиц измерения времени  $t$  и координаты  $x$  вдоль цепочки.

При небольших вариациях фазы,  $|\varphi| \ll 1$ , мы можем заменить в уравнении (7.60)  $\sin \varphi$  на  $\varphi$ . В результате мы получаем линейное уравнение, которое описывает совокупность распространяющихся мод. Делая Фурье-преобразование по времени и пространству, мы приходим для данной Фурье-компоненты к соотношению  $\omega^2 = q^2 + 1$ , где  $\omega$  - частота, а  $q$  - волновой вектор. Таким образом, частота  $\omega$  не может быть меньше единицы. В то же время групповая скорость  $\partial\omega/\partial q = q/\sqrt{q^2 + 1}$  стремится к нулю при уменьшении волнового вектора  $q$ .

Рассмотренные выше колебания относятся к малым вариациям около стационарного состояния  $\varphi = 0$  (или  $\varphi = 2\pi n$ ). В то же время уравнение (7.60) имеет, очевидно, еще одно стационарное решение  $\varphi = \pi$ . Оно является, однако, абсолютно неустойчивым. Для доказательства этого утверждения рассмотрим малые отклонения от этого состояния, которые описываются малой фазой  $\phi : \varphi = \pi + \phi$ . В линейном по  $\phi$  приближении уравнение (7.60) дает

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi - \phi = 0 \quad (7.61)$$

Переходя теперь к Фурье-представлению, мы находим  $\omega = \pm \sqrt{q^2 - 1}$ . Таким образом, при  $q < 1$  частота является чисто мнимой, и множитель  $\exp(-i\omega t)$  экспоненциально растет со временем (для соответствующего знака квадратного корня). Это означает, что даже исходно малые возмущения стационарного состояния  $\varphi = \pi$  станут со временем большими и разрушат это состояние.

Помимо тривиальных однородных стационарных решений уравнение (7.60) допускает широкий набор неоднородных стационарных решений, существование которых формально связано с неоднозначностью фазы  $\varphi$ . Рассмотрим простейшее такое решение, которое характеризуется предельным поведением  $\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $\varphi \rightarrow 2\pi$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Стационарное условие  $-\partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0$  имеет вид уравнения Ньютона для (перевернутого) физического маятника и имеет, очевидно, первый интеграл  $(\partial_x \varphi)^2 / 2 + \cos \varphi$ , который в силу граничных условий надо приравнять к единице.

В результате мы приходим к уравнению  $\partial_x \varphi =$

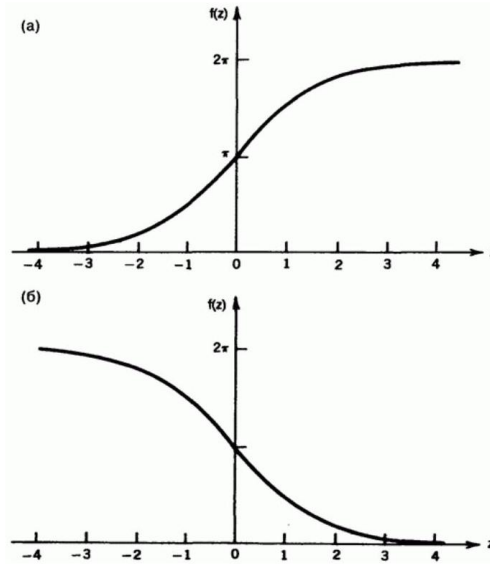


Рис. 7.1: Кинк и антикинк.

$2 \sin(\varphi/2)$ , которое имеет решение

$$\varphi = 4 \arctan [\exp (x - x_0)] \quad (7.62)$$

где  $x_0$  - произвольная константа. Решение (7.62) называют кинком, а  $x_0$  является положением кинка. Из выражения (7.62) следует, что фаза  $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$  в окрестности порядка единицы около  $x_0$ , а вне ее экспоненциально быстро стремится к своим предельным значениям, смотри рисунок 7.1. Легко найти решение (антикинк), которое соответствует убыванию фазы  $\varphi$  от  $2\pi$  до 0:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan [\exp (x - x_0)]$$

смотри рисунок 7.1.

Помимо простейшего решения (7.62), уравнение (7.60) допускает и более сложные стационарные решения. Например, бесконечный набор кинков. Для того, чтобы найти это решение, мы можем воспользоваться тем же первым интегралом  $(\partial_x \varphi)^2 / 2 + \cos \varphi$ , который теперь мы приравняем к  $1 + \epsilon$ . Тогда мы придем к уравнению

$$\partial_x \varphi = \sqrt{2\epsilon + 4 \sin^2(\varphi/2)} \quad (7.63)$$

которое описывает монотонно растущую при увеличении  $x$  фазу  $\varphi$ . Если  $\epsilon$  мало, то это решение соответствует бесконечной совокупности кинков, разделенных расстоянием  $\ln(1/\epsilon)$  (что справедливо, если этот логарифм является большой величиной). Если в выражении (7.63) взять отрицательный знак перед корнем, то мы получим решение с монотонно убывающей фазой.

До сих пор мы рассматривали неподвижный кинк. Но уравнение (7.60) допускает решения и в виде движущегося кинка. Чтобы найти его профиль для скорости движения  $v$ , можно подставить в уравнение (7.60) общее выражение для равномерно движущегося локализованного объекта  $\varphi = f(x - vt)$  и провести те же вычисления. Однако ответ можно выписать и безо всяких вычислений, воспользовавшись тем, что уравнение (7.60) является "релятивистски инвариантным", и потому решение для движущегося со скоростью  $v$  кинка может быть получено из выражения (7.62) преобразованием Лоренца. В результате получаем

$$\varphi = 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \quad (7.64)$$

Отсюда следует, в частности, что кинк не может двигаться со скоростью больше единицы. Аналогичным образом может быть найдено решение для движущегося антикинка:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

Уравнение синус-Гордон относится к классу уравнений, которые могут быть проанализированы в рамках метода обратной задачи рассеяния, который позволяет найти серию гораздо более сложных решений уравнения (7.60), чем приведенные выше решения для одиночных движущихся кинков и антикинков. Эти решения представляют собой системы движущихся с различными скоростями кинков и антикинков, которые в силу различных скоростей движения время от времени сталкиваются между собой. Замечательно, что после такого столкновения кинки расходятся и продолжают двигаться с теми же скоростями, что и до столкновения. При этом не происходит никакого излучения волн, обсуждавшихся выше.

Приведем решение, которое называют бризером (breather)

$$\varphi = 4 \arctan \left[ \tan \theta \frac{\sin(t \cos \theta)}{\cosh(x \sin \theta)} \right] \quad (7.65)$$

Проверка выполнения уравнения (7.60) для функции (7.65) осуществляется прямым вычислением производных от выражения (7.65). Решение (7.65) соответствует связанному состоянию кинка и антикинка, расстояние между которыми осциллирует со временем. Это решение описывает поле  $\varphi$ , центр тяжести которого покоится. Сделав преобразование Лоренца, легко получить поле  $\varphi$  для бризера, движущегося с произвольной скоростью  $v < 1$ .

Переходя в выражении (7.65) к пределу  $\theta \rightarrow \pi/2$ , находим следующее решение уравнения (7.60)

$$\varphi = 4 \arctan \frac{t}{\cosh x} \quad (7.66)$$

Решение (7.66) описывает сближение кинка и антикинка с их последующим расхождением. При  $t = 0$  мы имеем  $\varphi = 0$ , однако скорость изменения поля  $\partial_t \varphi$  нулю не

равна, она сосредоточена на расстояниях порядка единицы от начала координат. При  $t \gg 1$  размер решения

(7.66) оценивается, как  $\ln t$ . Эта величина имеет смысл расстояния между кинком и антикинком. Понятно, что начало координат и начало отсчета времени могут быть выбраны произвольно, то есть (7.66) остается решением при замене  $t \rightarrow t - t_0, x \rightarrow x - x_0$ .

Уравнение (7.60) может быть получено, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 + \cos \varphi \right] \quad (7.67)$$

Таким образом, в соответствии с разделом (7.5.1) мы находим следующие интегралы движения, имеющие смысл энергии и импульса системы

$$\begin{aligned} E &= \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \cos \varphi + 1 \right] \\ P &= \int dx \partial_t \varphi \partial_x \varphi \end{aligned} \quad (7.69)$$

смотри (7.82, 7.84).

Уравнение (7.60) может быть переписано в терминах переменных вдоль "светового конуса"  $\xi = (x + t)/2, \tau = (x - t)/2$ :

$$\partial_\tau \partial_\xi \varphi = \sin \varphi \quad (7.70)$$

поскольку  $\partial_\xi = \partial_x + \partial_t, \partial_\tau = \partial_x - \partial_t$ . Бесконечный набор законов сохранения удобно формулировать именно в терминах переменных  $\xi$  и  $\tau$ . Первый нетривиальный закон сохранения имеет вид

$$\partial_\tau \left[ (\partial_\xi \varphi)^4 - 4 (\partial_\xi^2 \varphi)^2 \right] + 4 \partial_\xi \left[ (\partial_\xi \varphi)^2 \cos \varphi \right] = 0$$

который легко проверяется, исходя из (7.70).

Задача 7.4.2. Линеаризуя уравнение (7.60) на фоне какого-либо его решения  $\varphi$ , мы находим для возмущения  $\phi$  уравнение  $\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \phi \cos \varphi = 0$ . Имеет ли это уравнение локализованные решения  $\phi$  на фоне кинка (7.62)?

Задача 7.4.3. Найти энергию и импульс кинка (7.62) и решения (7.66).

Задача 7.4.4. Найти закон сохранения, который соответствует Лорени-инвариантности уравнения синус-Гордон (7.60).

Задача 7.4.5. Записать закон сохранения энергии и импульса в терминах переменных  $\xi$  и  $\tau$ . Указание: воспользоваться выражением для действия в терминах  $\xi \tau$ .

### 3.7.10 7.4.3 О двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера

Качественно иная ситуация реализуется в одномерном случае. Тогда соотношение Таланова (7.21) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = -4E + 4 \int dx |\nabla \psi|^2 \quad (7.71)$$

что означает невозможность коллапса. Действительно, если размер волнового пакета  $R(t)$  уменьшается, то сохранение числа частиц  $N$  требует, чтобы квадрат модуля амплитуды пакета рос как  $|\psi|^2 \sim R^{-1}(t)$ . При этом положительная добавка в правой части в (7.71) также растет:

$$\int dx |\nabla \psi|^2 \sim N R^{-2}$$



При уменьшении  $R$  эта величина неизбежно становится по абсолютной величине больше отрицательного, но постоянного  $-E$ . Это приведет к стабилизации поля  $\psi$ . Таким образом, при достаточно большой амплитуде начального значения  $\psi$  со временем возникнут локализованные объекты, называемые солитонами.

Мы начнем с простейшего случая покоящегося солитона. Будем искать локализованное в пространстве решение уравнения (7.14) в виде

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} g(x) \quad (7.72)$$

Уравнение на функцию  $g(x)$  имеет вид  $g'' + 2g^3 - \eta^2 g = 0$ , что является уравнением Ньютона в стационарном потенциале и поэтому его порядок может быть понижен в силу сохранения энергии. Умножая уравнение для  $g$  на  $g'$  и интегрируя по  $x$ , мы получаем

$$g' = -g\sqrt{\eta^2 - g^2}, \quad \int_g^\eta \frac{dg}{g\sqrt{\eta^2 - g^2}} = x - x_0 \quad (7.73)$$

Здесь  $x_0$  - константа интегрирования, знак минус для корня выбран для убывания  $g$  с ростом  $|x|$ . Первообразная в уравнении (7.73) с помощью замены  $g = \eta/y$  приводится к табличной и мы приходим к трехпараметрическому семейству решений:

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} \frac{\eta}{\cosh[\eta(x-x_0)]} \quad (7.74)$$

Теперь заметим, что уравнение (7.14) инвариантно относительно 'преобразования Галилея'. А именно, если  $\psi(t, x)$  - решение (7.14), то и

$$\psi(t, x - 2\beta t) e^{i\beta x - i\beta^2 t} \quad (7.75)$$

будет решением НУШ. Применяя это преобразование к (7.74), мы получим семейство односолитонных решений, зависящее от четырех параметров  $t_0, x_0, \eta, \beta$ . При  $x_0 = t_0 = 0$  это решение имеет вид

$$\psi(t, x) = \frac{\eta}{\cosh[\eta(x - 2\beta t)]} \exp[i(\eta^2 - \beta^2)t + i\beta x] \quad (7.76)$$

В одномерном пространстве НУШ является "интегрируемым". Это означает, что помимо стандартных (Нётеровских) интегралов движения, НУШ ведет к дополнительному бесконечному набору интегралов движения. Первым представителем этого набора является

$$R = \int dx \left[ \partial_x \psi^* \partial_x^2 \psi - \frac{3}{2} (\psi^*)^2 \partial_x (\psi^2) \right] \quad (7.77)$$

Интеграл (7.77) уже не связан с пространственновременными или фазовой симметриями уравнения, его сохранение является следствием интегрируемости одномерного НУШ.

Задача 7.4.6. Вычислить значения Нётеровских интегралов движения  $N, E, \mathbf{P}$  в одном измерении для движущегося солитона (7.76).

Задача 7.4.7. Показать, что выражение (7.77) является интегралом движения НУШ.

### 3.7.11 7.5 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

### 3.7.12 7.5.1 Нётеровские интегралы движения

Многие эволюционные дифференциальные уравнения приводят к сохранению некоторых величин, которые называют интегралами движения. Наличие интегралов движения облегчает анализ решений соответствующего уравнения, и потому их нахождение является важной задачей. Здесь мы изложим способ нахождения интегралов движения, связанных с непрерывной симметрией уравнения, который был разработан Нётер. Поэтому соответствующие интегралы движения называются Нётеровскими.

Нётеровские интегралы возникают в том случае, если исследуемое уравнение является следствием вариационного принципа. А именно, рассмотрим дифференциальное уравнение для поля  $u$ , которое получается, как экстремум функционала

$$S = \int dt d\mathbf{r} L(u, \dot{u}, \nabla u) \quad (7.78)$$

Обычно этот функционал называют действием. Условие экстремума действия дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial(\dot{u})} + \nabla \frac{\partial L}{\partial(\nabla u)} = \frac{\partial L}{\partial u} \quad (7.79)$$

которому подчиняется поле  $u$ .

Уравнение (7.79) или действие (7.78) однородны в пространстве и времени, то есть инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени или сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала отсчета времени поле изменяется, это изменение равно  $\delta u = \tau \partial_t u$ , где  $\tau$  - величина сдвига. Легко проверить непосредственно, что действие (7.78) не меняется при таком преобразовании. Предположим теперь, что  $\tau$  - некоторая функция пространства и времени. Тогда вариация действия  $S$  при преобразовании  $\delta u = \tau \partial_t u$  уже

не будет равна нулю, ее можно записать в следующем виде

$$\delta S = \int dt d\mathbf{r} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) \dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \nabla \tau \right] \quad (7.80)$$

где мы использовали интегрирование по частям и соотношение

$$\partial_t L = \frac{\partial L}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{\nabla} u$$

С другой стороны, для поля  $u$ , которое подчиняется уравнению движения (7.79), вариация действия (7.79) при любой вариации поля  $u$ , в том числе и при вариации  $\delta u = \tau \partial_t u$ , должна быть равна нулю. Другими словами, для поля  $u$ , которое подчиняется уравнению движения (7.79), равно нулю выражение (7.80). Поскольку поле  $\tau$  в выражении (7.80) является произвольной функцией времени и пространства, мы приходим к соотношению

$$\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) + \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \right) = 0 \quad (7.81)$$

которое имеет вид локального закона сохранения. Обычно закон (7.81) называют законом сохранения энергии, а сохраняющийся вследствие этого уравнения интеграл

$$E = \int d\mathbf{r} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) \quad (7.82)$$

называют энергией. Закон сохранения энергии имеет вид  $\partial_t E = 0$ .

С формальной точки зрения, закон сохранения энергии (7.81) следует из того, что в выражении (7.80) для вариации действия присутствуют только производные (по времени и пространству) от поля  $\tau$ , но не само  $\tau$ . В свою очередь, это свойство следует из инвариантности действия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, которое соответствует  $\tau = \text{const}$ . Поэтому при не зависящем от времени и координат поле  $\tau$  вариация действия обязана обращаться в ноль, что и объясняет отсутствие членов с  $\tau$  (без производных) в вариации (7.80). Понятно, что таким же образом будут получаться законы сохранения в том случае, если действие инвариантно относительно преобразования поля  $u$ , которое характеризуется некоторым непрерывным параметром типа  $\tau$ . Поэтому иногда говорят, что Нётеровские интегралы движения являются следствием непрерывной симметрии действия. Дискретная же симметрия (типа инвариантности действия относительно изменения знака поля  $u$ ) законов сохранения не дает.

Рассмотрим закон сохранения, который получается из инвариантности действия относительно сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала координат поле  $u$  изменяется, это изменение равно  $\delta u = \xi \nabla u$ , где  $\xi$  - величина сдвига. Считая теперь, что  $\xi$  является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (7.78) при вариации  $\delta u = \xi \partial_x u$  и приравнявая результат к нулю (что справедливо для поля  $u$ , подчиняющемуся уравнению движения), находим

$$\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (7.83)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для остальных координат. Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$\mathbf{P} = - \int d\mathbf{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \nabla u \quad (7.84)$$

которую обычно называют импульсом (momentum). Закон сохранения импульса имеет вид  $\partial_t \mathbf{P} = 0$ .

Чтобы проиллюстрировать возникновение Нётеровских интегралов движения, не связанных с однородностью в пространстве и времени, рассмотрим случай, когда интересующее нас поле является комплексным. Обозначим его  $\psi$ . В этом случае действие  $S$  можно записать в виде

$$S = \int dt d\mathbf{r} L(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*, \nabla \psi, \nabla \psi^*) \quad (7.85)$$

Мы записали зависимость  $L$  от  $\psi$  и сопряженного ему поля  $\psi^*$  отдельно, поскольку в силу того, что поле  $\psi$  имеет две компоненты (действительную и мнимую части) уравнения движения на  $\psi$  или  $\psi^*$  можно получать независимым варьированием по  $\psi$  или  $\psi^*$ .

Теперь предположим, что действие (7.85) инвариантно относительно сдвига фазы (что справедливо, например, для НУШ). Для инфинитезимального сдвига это преобразование имеет вид  $\delta \psi = i\alpha \psi$ ,  $\delta \psi^* = -i\alpha \psi^*$ . Инвариантность действия относительно этого преобразования означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \nabla \psi - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi^* - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \dot{\psi}^* - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \nabla \psi^* = 0.$$

Считая теперь, что  $\alpha$  является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (7.85) при вариации  $\delta \psi = i\alpha \psi$ ,  $\delta \psi^* = -i\alpha \psi^*$  и приравнявая результат к нулю (с использованием приведенного выше выражения), находим закон сохранения

$$i\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \psi} \psi - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi^* \right) + i\nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \psi - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \psi^* \right) = 0 \quad (7.86)$$

Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$N = \int d\mathbf{r} i \left( \frac{\partial L}{\partial \psi} \psi - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi^* \right) \quad (7.87)$$

которую называют числом частиц или волновым действием. Закон сохранения имеет вид  $\partial_t N = 0$ .

Задача 7.5.1. Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения КдФ

$$\partial_t u + g \partial_x u + \partial_x \left[ (\partial f / \partial u) \partial_x^2 f \right] = 0$$

где  $f, g$  - произвольные функции и. Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

Задача 7.5.2. Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения синус-Гордон

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + f(\varphi) = 0$$

где  $f$  - периодическая функция с периодом  $2\pi$ , удовлетворяющая условию  $\int_0^{2\pi} d\varphi f(\varphi) = 0$ . Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

Задача 7.5.3. Найти момент импульса поля и, динамика которого дается действием

$$S = \int dt d^3r \left[ \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u)^2 - F(u) \right]$$

где  $F$  - произвольная функция и. Указание: действие инвариантно относительно инфинитезимального поворота на угол  $\theta$ , при котором поле и преобразуется следующим образом  $\delta u = -\theta_i \epsilon_{ikn} r_k \partial_n u$ , где  $\epsilon_{ikn}$  - абсолютно антисимметричный тензор, а  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор.

## 3.8 Интегральные уравнения

Помимо дифференциальных уравнений, в физике встречаются ситуации, когда функция задается интегральным уравнением, то есть уравнением, в котором искомая функция стоит под знаком интеграла. В настоящем разделе мы рассмотрим несколько типов интегральных уравнений, встречающихся в приложениях, решения которых могут быть найдены в явном виде.

### 3.8.1 8.1 Уравнения Фредгольма

Мы уже сталкивались с интегральными уравнениями, это уравнения Вольтерры, смотри раздел 1.3. Здесь мы рассмотрим интегральные уравнения Фредгольма, которые являются широким обобщением уравнений Вольтерры. Интегральные уравнения Фредгольма определены для функции  $f(t)$ , заданной на некотором интервале  $(a, b)$ ,  $a < t < b$ . Частными случаями является вся прямая  $-\infty < t < +\infty$  или полупрямая  $0 < t < +\infty$ .

Интегральным уравнением Фредгольма первого рода называют уравнение

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t) \quad (8.1)$$

где ядро  $K(t, s)$  и функция  $g(t)$  предполагаются известными, а найти требуется функцию  $f(t)$ . Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называют уравнение

$$f(t) - \lambda \int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t) \quad (8.2)$$

где  $\lambda$  - произвольный параметр. Как и для уравнения первого рода, ядро  $K(t, s)$  и функция  $g(t)$  предполагаются известными, а найти требуется функцию  $f(t)$ .

Уравнение (8.2) можно записать в виде  $f - \lambda \hat{K}f = g$ , где  $\hat{K}$  обозначает фигурирующий в этом уравнении интегральный оператор. Это уравнение можно решать последовательными приближениями по  $\lambda$ , что дает

$$f = g + \lambda \hat{K}g + \lambda^2 \hat{K}^2 g + \dots$$

Найденное решение можно переписать в виде

$$f = g + \lambda \hat{R}g \quad (8.3)$$

где  $\hat{R}$  называют резольвентой уравнения (8.2). Ее можно записать в виде ряда

$$\hat{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \hat{K}^n \quad (8.4)$$

Как и  $\hat{K}$ , оператор  $\hat{R}$  является интегральным оператором на интервале  $(a, b)$ , ядро которого представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} R(t, s) = & K(t, s) + \lambda \int_a^b dp K(t, p) K(p, s) \\ & + \lambda^2 \int_a^b dp \int_a^b dq K(t, p) K(p, q) K(q, s) + \dots \end{aligned} \quad (8.5)$$

Как правило, этот ряд по  $\lambda$  имеет конечный радиус сходимости. Распространить выражение для резольвенты на произвольные комплексные  $\lambda$  можно в результате аналитического продолжения.

Задача 8.1.1. Найти резольвенту для ядра  $K(t, s) = t/s$ , заданного на интервале  $(0, 1)$

Задача 8.1.2. Найти резольвенту для ядра  $K(t, s) = \exp(t-2s)$ , заданного на интервале  $(0, \infty)$

Задача 8.1.3. Найти резольвенту для ядра  $K(t, s) = ts$ , заданного на интервале  $(0, 1)$

Отметим некоторые свойства резольвенты. Из выражения (8.4) следует, что оператор  $\hat{R}$  коммутирует с оператором  $\hat{K}$ . Из этого же выражения следует уравнение  $\hat{R} = \hat{K} + \lambda \hat{K} \hat{R}$ , которое переписывается в виде

$$R(t, p) = K(t, p) + \lambda \int_a^b ds K(t, s) R(s, p) \quad (8.6)$$

Таким образом, резольвента является решением исходного уравнения (8.2) с функцией  $g(t) = K(t, p)$  в правой части. Пусть  $y(t)$  - собственная функция оператора  $\hat{K}$ :  $\hat{K}y = \kappa y$ , где  $\kappa$  - собственное число. В этом случае

$$\hat{R}y = \frac{\kappa}{1 - \lambda\kappa} y$$

Таким образом,  $y$  является также и собственной функцией резольвенты.

Рассмотрим случай так называемого вырожденного ядра  $K(t, s)$ , когда оно представляется в виде конечной суммы

$$K(t, s) = \sum_i y_i(t)x_i(s) \quad (8.7)$$

где  $x_i(t), y_i(t)$  - некоторые известные функции. В этом случае уравнение Фредгольма второго рода (8.2) сводится к виду

$$f(t) - \lambda \sum_i y_i(t) \int_a^b ds x_i(s) f(s) = g(t) \quad (8.8)$$

Таким образом, функция  $f$  представляется в виде

$$f = g + \lambda \sum_i C_i y_i \quad (8.9)$$

Подставляя выражение (8.9) в исходное уравнение (8.8), находим систему линейных уравнений для коэффициентов  $C_i$ :

$$\sum_j (\delta_{ij} - \lambda M_{ij}) C_j = \Phi_i \quad (8.11)$$

$$\Phi_i = \int_a^b dt x_i(t) g(t), \quad M_{ij} = \int_a^b dt x_i(t) y_j(t)$$

Решая алгебраическую систему уравнений (8.10) и подставляя результат в выражение (8.9), мы находим решение исходной задачи.

Задача 8.1.4. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (8.5) на интервале  $(-\infty, +\infty)$  для случая  $K = \exp(-t^2 - s^2)$ ,  $g(t) = t^2$ .

Задача 8.1.5. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (8.5) на интервале  $(-1, +1)$  для случая  $K = t^2 s^2$ ,  $g(t) = t^2$ .

Задача 8.1.6. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (8.5) на интервале  $(0, +1)$  для случая  $K = 1 + t^2 s^2$ ,  $g(t) = t^2$ .

Задача 8.1.7. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (8.5) на интервале  $(0, +\infty)$  для случая  $K = (1 + ts) \exp(-2t - s)$ ,  $g(t) = \exp(t/2)$ .

Рассмотрим случай, когда интервал интегрирования в соотношениях (8.1, 8.2) распространяется на всю прямую, от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а ядро  $K(t, s)$  зависит только от разности  $t - s$ . В этом случае в уравнениях (8.1, 8.2) возникает свертка:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds K(t - s) f(s) = g(t) \quad (8.12)$$

$$f(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds K(t - s) f(s) = g(t) \quad (8.13)$$

После преобразования Фурье эти уравнения сводятся к алгебраическим уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{K} \tilde{f} &= \tilde{g} \\ (1 - \lambda \tilde{K}) \tilde{f} &= \tilde{g} \end{aligned} \quad (8.15)$$

где  $\tilde{f}(\omega) = \int \exp(i\omega t) f(t)$  и так далее. Таким образом, для решения уравнений (8.12, 8.13) следует найти Фурье-преобразования  $\tilde{K}, \tilde{g}$ , найти  $\tilde{f}$  из уравнений (8.14, 8.15), а затем выполнить обратное Фурье-преобразование, чтобы найти  $f(t)$ .

В рассматриваемом случае резольвента также характеризуется ядром, которое зависит только от разности  $t - s$ :  $R(t - s)$ . Делая преобразование Фурье уравнения (8.6), находим

$$\tilde{R} = \tilde{K}(1 - \lambda \tilde{K}) \quad (8.16)$$

Ядро  $R(t)$  можно найти, если сделать обратное Фурьепреобразование от (8.16).

Задача 8.1.8. Найти решение уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \exp(-|t-s|) f(s) = g(t)$$

Задача 8.1.9. Найти резольвенту уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds \exp(-|t-s|) f(s) = g(t)$$

Прямое обобщение изложенной процедуры на конечный интервал возможно, если функция  $K(t-s)$  является периодической функцией с периодом, совпадающим с длиной интервала  $(a, b)$ . В этом случае разложение в интеграл Фурье заменяется на разложение в ряд Фурье. Для определенности будем считать, что  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ , чего всегда можно добиться сдвигом и перемасштабировкой переменной. Разложим функции  $f, g, K$  в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(-int)$$

Напомним, что для действительных функций  $f_{-n} = f_n^*$ . Тогда уравнения (8.1, 8.2) сведутся к

$$2\pi K_n f_n = g_n \quad (8.17)$$

$$(1 - 2\pi\lambda K_n) f_n = g_n \quad (8.18)$$

Резольвента уравнения Фредгольма второго рода также является периодической функцией, для коэффициентов разложения которой в ряд Фурье справедливо соотношение

$$R_n = K_n / (1 - 2\pi\lambda K_n) \quad (8.19)$$

При решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода можно столкнуться с проблемой, связанной с наличием нулей среди набора  $K_n$ . Как следует из соотношения (8.17), решение существует только в том случае, если в коэффициенты  $g_n$  разложения функции  $g$  равны нулю для тех  $n$ , для которых равны нулю  $K_n$ . Аналогичная проблема возникает для интегрального уравнения Фредгольма второго рода при значениях параметра  $\lambda$ , удовлетворяющего условию  $2\pi\lambda K_n = 1$ , смотри соотношение (8.17). Обратим внимание на то, что при этом значении соответствующий коэффициент разложения резольвенты в ряд Фурье (8.19) имеет полюс.

Задача 8.1.10. Найти решение уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds |\sin[(t-s)/2]| f(s) = g(t)$$

Задача 8.1.11. Найти решение уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds \ln |\sin[(t-s)/2]| f(s) = g(t)$$

Задача 8.1.12. Найти резольвенту уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} ds |\sin[(t-s)/2]| f(s) = g(t)$$

Задача 8.1.13. Найти резольвенту уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} ds \ln |\sin[(t-s)/2]| f(s) = g(t)$$

Произвольное (невырожденное) ядро на конечном интервале можно записать в виде, аналогичном (8.7), но с бесконечным числом переменных. В этом случае для уравнения Фредгольма второго рода мы приходим к системе уравнений (8.10) с бесконечной матрицей  $M_{ij}$ . Решить такую задачу в общем виде не представляется возможным.

### 3.8.2 8.1.1 Уравнения с симметричными ядрами

Рассмотрим случай, когда интегральный оператор  $\hat{K}$  имеет симметричное ядро:  $K(t, s) = K(s, t)$ . Исследуем собственные функции оператора  $f$ , которые удовлетворяют условию  $\hat{K}f = \kappa f$ , то есть

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = \kappa f(t) \quad (8.20)$$

Для невырожденных ядер число собственных функций бесконечно. Это может быть как дискретный набор, так и непрерывная последовательность (если интервал интегрирования бесконечен). Далее мы имеем в виду первый случай.

Собственные функции  $f_i, f_j$  с разными собственными значениями  $\kappa_i, \kappa_j$  удовлетворяют свойству ортогональности

$$\int_a^b ds f_i(s) f_j(s) = 0 \quad (8.21)$$

Для доказательства (8.21) используем определение (8.20) и симметрию ядра:

$$\begin{aligned} \kappa_i \int_a^b ds f_i(s) f_j(s) &= \int dt ds K(s, t) f_i(t) f_j(s) \\ &= \kappa_j \int_a^b dt f_i(t) f_j(t) \end{aligned}$$

Из найденного соотношения и следует ортогональность (8.21).

Собственная функция  $f$  определяется (8.20) с точностью до множителя. Мы выбираем множитель таким образом, чтобы собственные функции  $f_i$  были нормированы на единицу:

$$\int_a^b ds f_j^2 = 1 \quad (8.22)$$

В сочетании со свойством ортогональности (8.21) мы приходим к условию ортонормированности

$$\int_a^b ds f_j(s) f_k(s) = \delta_{jk} \quad (8.23)$$

Отсюда следует условие линейной независимости  $f_j$ . Докажем это свойство от обратного. Пусть  $f_j$  линейно зависимы, то есть существуют такие коэффициенты  $c_j$ , что  $\sum_j c_j f_j = 0$ . Умножая это соотношение на  $f_k$  и интегрируя по интервалу  $(a, b)$ , находим с



использованием (8.23)  $c_k = 0$ . Таким образом, соотношение  $\sum_j c_j f_j = 0$  выполняется только при нулевых  $c_j$ .

Для невырожденных ядер система функций  $f_j$  является полной, то есть по ней может быть разложена произвольная функция  $\varphi(t)$ , заданная на интервале  $(a, b)$ :

$$\varphi(t) = \sum_j q_j f_j(t), \quad q_j = \int_a^b dt f_j(t) \varphi(t) \quad (8.24)$$

Второе равенство в формуле (8.24) непосредственно вытекает из условия ортонормированности (8.23). Аналогичным образом можно представить и само ядро  $K(t, s)$ :

$$K(t, s) = \sum_j \kappa_j f_j(t) f_j(s) \quad (8.25)$$

Соотношение (8.25) получается, если вычислить коэффициенты разложения  $K(t, s)$  по  $f_j(t)$  с помощью формулы (8.24), имея в виду определение (8.20).

Соотношение (8.25) позволяет найти аналогичное представление для резольвенты оператора  $\hat{K}$ . Исходим из уравнения (8.6). Подставляя в него разложение (8.25) и аналогичное разложение для резольвенты, находим

$$R(t, s) = \sum_j \frac{\kappa_j}{1 - \lambda \kappa_j} f_j(t) f_j(s) \quad (8.26)$$

где мы использовали ортонормированность (8.23). Мы видим, что резольвента, как функция  $\lambda$ , имеет полюсы при значениях  $\lambda = \kappa_j^{-1}$ . Вычеты в этих полюсах определяются собственными функциями оператора  $\hat{K}$  с собственным значением  $\kappa_j$ .

Тривиальным примером полученных соотношений является случай, когда ядро  $K$  зависит только от разности переменных и является периодической функцией с периодом  $b - a$ . В этом случае собственными функциями ядра являются косинусы и синусы с тем же периодом, а аналогом представления (8.25) является разложение симметричного ядра  $K$  в ряд Фурье

$$K(t - s) = \sum_0^{+\infty} k_n [\cos(\omega_n t) \cos(\omega_n s) + \sin(\omega_n t) \sin(\omega_n s)]$$

$\omega_n = 2\pi n / |b - a|$ . Следует только иметь в виду, что собственные функции  $\exp[-2\pi n i t / (b - a)]$  не являются нормированными, поэтому  $\kappa_n = (b - a) k_n / 2$ ,  $\kappa_0 = (b - a) k_0$ .

Рассмотрим теперь заданное на интервале  $(-1, 1)$  симметричное ядро

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \frac{1}{4} \left( \ln \frac{1+t}{1-t} + \ln \frac{1-s}{1+s} \right), t > s \\ K(t, s) &= \frac{1}{4} \left( \ln \frac{1-t}{1+t} + \ln \frac{1+s}{1-s} \right), t < s \end{aligned} \quad (8.27)$$

которое является Гриновской функцией оператора  $\partial_t (1 - t^2) \partial_t$ :

$$\partial_t [(1 - t^2) \partial_t K(t, s)] = \delta(t - s) \quad (8.28)$$

Для определения собственных функций оператора  $\hat{K}$  применяем к уравнению (8.20) оператор  $\partial_t (1 - t^2) \partial_t$ , что дает

$$\kappa \partial_t [(1 - t^2) \partial_t f] = f \quad (8.29)$$

Решениями этого уравнения, которые остаются конечными на интервале  $(-1, 1)$  являются полиномы Лежандра, которые удовлетворяют уравнению

$$\partial_t [(1 - t^2) \partial_t P_n] = -n(n+1)P_n$$

где  $n$  - натуральные числа. Таким образом, набор собственных значений имеет вид  $\kappa_n = -[n(n+1)]^{-1}$ , собственными функциями являются полиномы Лежандра  $P_n(t)$ . Условия ортогональности (8.21) дают хорошо известные условия ортогональности для полиномов Лежандра. Отдельно надо рассмотреть случай однородной функции, которая является нулевой модой оператора  $\partial_t (1 - t^2) \partial_t$ . Несложно проверить, что

$$\int_{-1}^{+1} dt K(t, s) = \ln 2$$

Таким образом, однородная функция является собственной функцией оператора  $\hat{K}$  с собственным значением  $\ln 2$ . Таким образом, разложение (8.25) для функции (8.27) имеет вид

$$K(t, s) = \frac{\ln 2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n+1)} P_n(t) P_n(s) \quad (8.30)$$

Мы использовали здесь известное соотношение

$$\int_{-1}^{+1} dt [P_n(t)]^2 = \frac{2}{2n+1}$$

чтобы отнормировать собственные функции оператора  $\hat{K}$ .

Задача 8.1.14. Найти резольвенту интегрального оператора с ядром (8.27).

Изложенную схему легко обобщить для ядер вида  $K(t, s) = \mu(s)L(t, s)$ , где ядро  $L(t, s)$  является симметричным, а  $\mu(s)$  - некоторая положительная функция. Введем новые функции  $\varphi = \sqrt{\mu}f$ . Тогда задача (8.20) на собственные значения переписывается в виде

$$\int_a^b ds \sqrt{\mu(s)} \sqrt{\mu(t)} L(t, s) \varphi(s) = \kappa \varphi(t) \quad (8.31)$$

Таким образом, мы пришли к задаче (8.20) на собственные значения с симметричным ядром, к которой применимы все приведенные выше соображения. Чтобы найти собственные функции  $f(t)$ , можно исходить непосредственно из уравнения (8.20).

### 3.8.3 8.2 Некоторые нелинейные интегральные уравнения

Общих методов решения нелинейных интегральных уравнений не существует. Если решение такого уравнения удастся найти, то это всегда связано с конкретными особенностями уравнений. Здесь мы рассмотрим несколько типов нелинейных интегральных уравнений, которые допускают решения.

Одним из таких типов являются уравнения содержащие свертку. После преобразования Фурье или Лапласа свертка преобразуется в произведение. Это позволяет решить некоторый класс нелинейных интегральных уравнений. Ниже приведен ряд типов таких уравнений.

Рассмотрим уравнение типа свертки на всей прямой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s) f(t-s) = g(t) \quad (8.32)$$

Это уравнение можно решить, если произвести Фурье-преобразование обеих частей. В результате находим

$$[\tilde{f}(\omega)]^2 = \tilde{g}(\omega) \quad (8.33)$$

Извлекая корень квадратный, находим два решения для  $\tilde{f}(\omega)$ , отличающиеся знаком. Чтобы найти  $f(t)$ , следует найти обратное Фурье-преобразование.

Задача 8.2.1. Найти решение уравнения (8.32) с  $g(t) = \exp(-t^2)$

Иногда тем же способом удастся решить обобщение уравнения (8.32)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds L(s) f(s) f(t-s) = g(t) \quad (8.34)$$

где  $L(s)$  - полином. В этом случае после перехода к Фурье-представлению находим

$$\tilde{f}(\omega) L(-i\partial_\omega) \tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega) \quad (8.35)$$

Таким образом, задача сводится к дифференциальному уравнению, которое в ряде случаев удастся решить.

Задача 8.2.2. Найти решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds (1+s^2) f(s) f(t-s) = 1$$

Рассмотрим уравнение типа свертки на полупрямой

$$\int_0^t ds f(s) f(t-s) = g(t) \quad (8.36)$$

Производим преобразование Лапласа этого уравнения, что дает

$$[\tilde{f}(p)]^2 = \tilde{g}(p) \quad (8.37)$$

Извлекая корень квадратный, находим два решения для  $\tilde{f}(p)$ , отличающиеся знаком. Чтобы найти  $f(t)$ , следует найти обратное преобразование Лапласа.

Задача 8.2.3. Найти решение уравнения (8.36) с  $g(t) = \sin t$

Иногда тем же способом удастся решить обобщение уравнения (8.36)

$$\int_0^t ds L(s) f(s) f(t-s) = g(t) \quad (8.38)$$

где  $L(s)$  - полином. В этом случае после перехода к представлению Лапласа находим

$$\tilde{f}(p) L(-\partial_p) \tilde{f}(p) = \tilde{g}(p) \quad (8.39)$$

Таким образом, задача сводится к дифференциальному уравнению, которое в ряде случаев удастся решить.

**Задача 8.2.4. Найти решение уравнения**

$$\int_0^t ds f(s) f(t-s) = t$$

Для периодических функций уравнения типа свертки могут быть в ряде случаев решены переходом к ряду Фурье. Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds f(s) f(t-s) = g(t) \quad (8.40)$$

где  $g(t)$  - периодическая функция с периодом  $2\pi$ . Решение уравнения (8.40) также следует искать в классе периодических функций. Раскладывая функции  $f(t), g(t)$  в ряд Фурье, находим алгебраическое уравнение

$$2\pi [f_n]^2 = g_n \quad (8.41)$$

которое имеет два корня, отличающиеся знаком. Чтобы найти  $f(t)$ , следует просуммировать ряд Фурье с  $f_n$ .

**Задача 8.2.5.** Найти действительное решение уравнения (8.40) с периодической функцией  $g(t)$ , которая на интервале  $-\pi < t < \pi$  определена следующим образом  $g(t) = \pi/2 - |t|$ .

Следующим типом интегральных уравнений, которые допускают решения, являются уравнения с вырожденным ядром (8.7). Тогда функциональная зависимость решения может быть установлена непосредственно из вида уравнения.

В простейшем случае такое уравнение имеет вид

$$f(t) = \int_a^b ds \mu(s) \eta(s) f^n(s) + g(t) \quad (8.42)$$

Непосредственно из вида уравнения (8.42) следует, что  $f = C\mu(t) + g(t)$ , где  $C$  - константа, которая подлежит определению. Подставляя найденное представление в уравнение (8.42), находим уравнение на  $C$ :

$$C = \int_a^b ds \eta(s) [C\mu(s) + g(s)]^n \quad (8.43)$$

которое является уже алгебраическим.

**Задача 8.2.6.** Найти решение уравнения

$$f(t) = \int_0^1 ds s t f^2(s) + \frac{3}{4}t$$

где функция задана на интервале  $(0, 1)$ .

**Задача 8.2.7.** Найти решение уравнения

$$f(t) = -\frac{4}{3\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} ds \cos(t-s) f^3(s) + 2 \cos t$$

на классе периодических функций.

Отметим также уравнение

$$f(t) = \int_0^t ds \mu(s) \eta(s) f^n(s) + g(t) \quad (8.44)$$

которое является нелинейным обобщением уравнения Вольтерры. Преобразование Лапласа в этом случае не очень полезно, поскольку преобразование Лапласа от  $f^n(s)$  не

имеет простого представления. Тем не менее, уравнение (8.44) иногда может быть решено. Подстановкой  $f(t) = \mu(t)\varphi(t)$  оно приводится к виду

$$\varphi(t) = \int_0^t ds \eta(s) \varphi^n(s) \mu^n(s) + g(t) \mu^{-1}(t)$$

После дифференцирования по  $t$  это интегральное уравнение сводится к уравнению дифференциальному

$$\partial_t \varphi(t) = \eta(t) \varphi^n(t) \mu^n(t) + \partial_t [g(t) \mu^{-1}(t)]$$

которое в ряде случаев удается решить.

Задача 8.2.8. Найти решение уравнения

$$f(t) = \int_0^t ds f^2(s) \frac{\cos^2 s}{\cos t} + \frac{1}{\cos t}$$

### 3.8.4 8.3 Сингулярные уравнения

Сингулярными интегральными уравнениями называют уравнения, в которых фигурируют интегралы в смысле главного значения (смотри раздел 8.4.1). В настоящем разделе мы рассмотрим способы решения двух простейших типов сингулярных интегральных уравнений.

Первый тип уравнений, который мы проанализируем, имеет вид

$$\lambda \varphi(x) + f_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = f(x) \quad (8.45)$$

где перечеркнутый интеграл означает интеграл в смысле главного значения (смотри раздел 8.4.1), а  $\lambda$  - произвольный параметр. Требуется найти функцию  $\varphi(x)$ , если известна функция  $f(x)$ . Предполагается, что функции  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  заданы на всей оси и достаточно быстро стремятся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Чтобы найти решение уравнения (8.45), перепишем его, используя соотношение (8.57):

$$(\lambda + i\pi) \varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = f(x) \quad (8.46)$$

где подразумевается предел  $\epsilon \rightarrow +0$ . Умножим обе части соотношения (8.46) на  $(x-x_0+i\epsilon)^{-1}$  и проинтегрируем по  $x$  по вещественной оси. В двойном интеграле, который при этом возникнет, меняем порядок интегрирования по  $x$  и  $y$  и используем равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(y-x+i\epsilon)(x-x_0+i\epsilon)} = -\frac{2\pi i}{y-x_0+i\epsilon} \quad (8.47)$$

Соотношение (8.47) можно получить, например, замкнув контур в верхней полуплоскости и сведя его затем к вычету в точке  $x = y + i\epsilon$ . Отметим, что мы заменили в выражении (8.47)  $2i\epsilon$  на  $i\epsilon$ , что возможно в пределе  $\epsilon \rightarrow +0$ .

В результате интегрирования уравнения (8.46) мы с использованием (8.47) получим соотношение

$$(\lambda - i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x+i\epsilon}$$

Выражая с его помощью интеграл в соотношении (8.46), получим ответ:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} f_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x} + \frac{\lambda f(x)}{\lambda^2 + \pi^2} \quad (8.48)$$

Как и следовало ожидать, все факторы в этом выражении вещественны. Возвращаясь к представлению с  $\epsilon$ , мы можем переписать выражение (8.48) в двух эквивалентных видах

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x+i\epsilon} + \frac{f(x)}{\lambda+i\pi} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x-i\epsilon} + \frac{f(x)}{\lambda-i\pi} \end{aligned} \quad (8.49)$$

где подразумевается предел  $\epsilon \rightarrow +0$ . Именно соотношения (8.49) наиболее удобны для реальных вычислений, поскольку интегралы в них аналитичны в верхней и нижней полуплоскости по  $y$ , соответственно.

Задача 8.3.1. Найти функцию  $\varphi(x)$ , которая является решением уравнения

$$f_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = \frac{\cos x}{1+x^2}$$

Задача 8.3.2. Найти функцию  $\varphi(x)$ , которая является решением уравнения

$$\lambda \varphi(x) + f_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Второй тип сингулярных интегральных уравнений, который мы изучим, содержит интегрирование по конечному интервалу  $(a, b)$ , на котором и заданы все функции. Очевидно, что сдвигом и перемасштабированием аргумента произвольный интервал  $(a, b)$  может быть превращен в интервал  $(-1, 1)$ . Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем именно этот последний. Общая схема решения уравнения на конечном интервале та же, что и на бесконечном интервале, однако рассматриваемый случай требует более изощренных манипуляций.

Проанализируем интегральное уравнение

$$f_{-1}^{+1} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = f(x) \quad (8.50)$$

Здесь требуется найти функцию  $\varphi$ , если дана функция  $f$ . Перепишем уравнение (8.50), используя соотношение (8.57):

$$i\pi \varphi(x) + \int_{-1}^{+1} \frac{dy \varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = f(x) \quad (8.51)$$

где подразумевается предел  $\epsilon \rightarrow +0$ . Умножим уравнение (8.51) на  $[(x-x_0+i\epsilon)\sqrt{1-x^2}]^{-1}$  и проинтегрируем по  $x$  от  $-1$  до  $+1$ .

Далее мы воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(y-x+i\epsilon)(x-x_0+i\epsilon)\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{\pi i}{y-x_0+i\epsilon} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) \end{aligned} \quad (8.52)$$

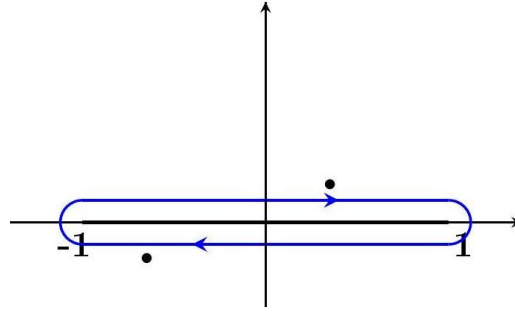


Рис. 8.1: Контур, к которому сводится интегрирование в задачах с конечным интервалом. Жирные точки показывают положения полюсов.

Чтобы получить это соотношение, следует переписать интеграл (8.52), как половину интеграла, идущего по берегам разреза  $(-1, 1)$  функции  $\sqrt{1-x^2}$ , то есть, по замкнутому контуру, смотри рисунок 8.1. Разворачивая этот контур, мы сводим интеграл к вычетам в полюсах  $x = y + i\epsilon$  и  $x = x_0 - i\epsilon$ . Полюс  $x = y + i\epsilon$  лежит сверху разреза, там корень положительный, полюс же  $x = x_0 - i\epsilon$  лежит снизу разреза и там корень отрицательный. Вычеты в полюсах и дают правую часть (8.52).

Меняя порядок интегрирования в уравнении (8.51), умноженном на  $[(x - x_0 + i\epsilon)\sqrt{1-x^2}]^{-1}$  и проинтегрированному по  $x$ , находим с помощью соотношения (8.52):

$$\frac{-i\pi}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dy\varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = \int_{-1}^{+1} \frac{dyf(y)}{(y-x+i\epsilon)\sqrt{1-y^2}}$$

Снова используем соотношение (8.57), а также исходное уравнение (8.50). В результате находим решение

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2} f_{-1}^{+1} \frac{dyf(y)}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} \quad (8.53)$$

Выражение (8.53) дает решение задачи (8.50). Для практических вычислений интеграл в (8.53) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} f_{-1}^{+1} \frac{dyf(y)}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} &= \frac{1}{4} \oint \frac{dyf(y)}{(y-x+i\epsilon)\sqrt{1-y^2}} \\ &+ \frac{1}{4} \oint \frac{dyf(y)}{(y-x-i\epsilon)\sqrt{1-y^2}} \end{aligned} \quad (8.54)$$

где замкнутый интеграл идет вдоль берегов разреза функции  $\sqrt{1-y^2}$ , смотри рисунок 8.1.

Приведенные выше преобразования предполагали существование решения уравнения (8.50). Однако это условие накладывает не вполне тривиальное ограничение на функцию  $f(x)$ . Действительно, умножим обе части (8.50) на  $(1-x^2)^{-1/2}$  и проинтегрируем по  $dx$  по интервалу  $(-1, 1)$ , предполагая, что  $\varphi(x)$  не имеет особенностей не только внутри, но и на краях интервала (в противном случае интегралы могут не существовать или быть непостоянными). Используя преобразование (8.54), находим

$$f_{-1}^{+1} \frac{dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (8.55)$$

Действительно, при  $f = 1$  интеграл в правой части (8.54) сводится к сумме вычетов в точках  $y = x \pm i\epsilon$ , которые в сумме дают ноль. Таким образом, решение задачи (8.50) существует только при выполнении условия 'ортогональности':

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy f(y)}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (8.56)$$

Задача 8.3.3. Найти функцию  $\varphi(x)$ , которая является решением уравнения

$$f_{-1}^1 \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Задача 8.3.4. Найти функцию  $\varphi(x)$ , которая является решением уравнения

$$f_{-1}^1 \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = \frac{x}{1+x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Приведенные выше аргументы относились к случаю, когда функция  $\varphi$  не имеет особенностей на интервале  $(-1, +1)$ . Если же допустить существование особенностей функции  $\varphi$ , то решение задачи (8.50) можно найти и в том случае, когда условие (8.56) не выполнено. Тогда решение имеет (корневую) особенность на одном из краев интервала. Такое решение можно найти, если воспользоваться модификацией излагаемого метода.

### 3.8.5 8.4 Справочные материалы к главе

#### 3.8.6 8.4.1 Формула Сохоцкого-Племеля

Формула Сохоцкого-Племеля имеет вид

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{dx f(x)}{x - x_0 + i\epsilon} = f_a^b \frac{dx f(x)}{x - x_0} - i\pi f(x_0) \quad (8.57)$$

где  $x_0 \in (a, b)$ , а функция  $f(x)$  предполагается аналитичной вблизи точки  $x = x_0$ . Здесь перечеркнутый интеграл означает интеграл в смысле главного значения, который является пределом при  $\delta \rightarrow +0$  суммы

$$\int_a^{x_0-\delta} \frac{dx f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0+\delta}^b \frac{dx f(x)}{x - x_0} \rightarrow f_a^b \frac{dx f(x)}{x - x_0} \quad (8.58)$$

Если функция  $f(x)$  аналитична вблизи точки  $x = x_0$ , то предел (8.58) существует.

Для доказательства соотношения (8.57) можно деформировать контур интегрирования по  $x$ , превратив интервал по малому интервалу  $(-\delta, +\delta)$  в полуокружность, идущую по верхней полуплоскости. После этого можно перейти к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ . При стремлении  $\delta$  к нулю интегралы по прямым участкам дадут интеграл в смысле главного значения (8.58), а интеграл по полуокружности даст дополнительный вклад в правой части соотношения (8.57). Это соотношение можно записать также в дифференциальном виде

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} - i\pi \delta(x - x_0) \quad (8.59)$$

где символ  $\mathcal{P}$  обозначает 'в смысле главного значения'. Отметим, что мнимая часть соотношения (8.59) может быть получена из формулы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \operatorname{Im} \frac{1}{x + i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} -\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = -\pi \delta(x)$$

которая обсуждается в разделе (1.5.2).



## 3.8.7 8.4.2 Преобразование Гильберта

Преобразование Гильберта определяется, как следующий интеграл

$$\hat{H}f(x) = \frac{1}{\pi} f_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y-x} f(y) \quad (8.60)$$

Преобразование (8.60) можно записать, как предел

$$\begin{aligned} \hat{H}f(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi} f(y) \frac{y-x}{(y-x)^2 + \epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi} f(y) \left( \frac{1}{y-x+i\epsilon} + \frac{1}{y-x-i\epsilon} \right) \end{aligned}$$

Второе выражение представляет преобразование Гильберта, как сумму интегралов по контурам, обходящим полюс  $y = x$  снизу и сверху. Это представление позволяет затем деформировать контуры интегрирования и использовать аналитические свойства функции  $f(x)$ .

Задача 8.4.1. Найти преобразование Гильберта функции  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ .

Представление (8.61) позволяет доказать важное свойство преобразования Гильберта:  $\hat{H}^2 = -1$ . Для этого надо записать  $\hat{H}^2$  в виде двойного интеграла,

$$\hat{H}^2 f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{dz}{2\pi} \int \frac{dy}{2\pi} \left( \frac{1}{z-x+i\epsilon} + \frac{1}{z-x-i\epsilon} \right) \left( \frac{1}{y-z+i\epsilon} + \frac{1}{y-z-i\epsilon} \right) f(y)$$

и воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z-x+i\epsilon)(y-z+i\epsilon)} &= -\frac{i}{y-x+2i\epsilon} \\ \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z-x+i\epsilon)(y-z-i\epsilon)} &= 0 \\ \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z-x-i\epsilon)(y-z+i\epsilon)} &= 0 \\ \int \frac{dz}{2\pi} \frac{i}{(z-x-i\epsilon)(y-z-i\epsilon)} &= \frac{i}{y-x-2i\epsilon} \end{aligned}$$

которые получаются сведением приведенных интегралов к вычетам. После этого использование формулы Сохоцкого-Племеля (8.59) и приводит к  $\hat{H}^2 = -1$ .

Задача 8.4.2. Убедиться, что преобразование Гильберта, примененное к результату, найденному в задаче 8.4.1, дает  $-f(x)$ .

С использованием предельного перехода (8.61) можно доказать, что для любых двух функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  справедливо соотношение

$$\hat{H} \left( \varphi_1 \hat{H} \varphi_2 + \varphi_2 \hat{H} \varphi_1 \right) = \hat{H} \varphi_1 \hat{H} \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2 \quad (8.62)$$

Справедливо также соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_1 \varphi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{H} \varphi_1 \hat{H} \varphi_2 \quad (8.63)$$

Соотношения (8.62, 8.63) весьма полезны при обращении с задачами, где фигурирует преобразование Гильберта.

Задача 8.4.3. Доказать соотношение (8.62).

Задача 8.4.4. Доказать соотношение (8.63).

### 3.9 Основы теории групп

Симметрия играет чрезвычайно важную роль в современной физике. Фактически, именно на симметричном языке формулируются основные физические явления. В настоящем разделе мы приводим основные положения теории групп, как дискретных, так и непрерывных (групп Ли), а также их приложения. Эти сведения позволяют осознать основные связи, которые накладывают на физическую систему требования симметрии, и научиться решать связанные с понятием симметрии задачи.

#### 3.9.1 9.1 Конечные группы

В настоящей главе мы будем говорить о группах симметрии  $\mathbb{G}$ , которые представляют собой совокупность преобразований, совмещающих объект с самим собой. Объекты могут быть разной природы: геометрические тела, молекулы, кристаллы, дифференциальные уравнения, функции, матрицы и т.п. В число этих преобразований следует включить и тождественное преобразование, поскольку оно, очевидно, совмещает объект с самим собой. Преобразования бывают дискретными или непрерывными, в последнем случае они зависят от параметра (параметров) из некоторого интервала или области. Если преобразования группы дискретны и их число конечно, то группа называется конечной. Количество элементов в конечной группе  $\mathbb{G}$  называется порядком группы и обозначается символом  $|\mathbb{G}|$ .

В качестве простого примера конечной группы рассмотрим группу симметрии правильного треугольника. Он инвариантен относительно вращений на углы  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$  относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости треугольника. О такой симметрии говорят, как об оси третьего порядка  $C_3$ . Дополнительными преобразованиями, переводящими треугольник в себя, являются отражения относительно трех плоскостей, проходящих через ось симметрии и одну из вершин треугольника. Таким образом, группа симметрии треугольника включает в себя шесть элементов: тождественное преобразование, повороты на угол  $2\pi/3$  и угол  $4\pi/3$  (или, что то же самое, угол  $-2\pi/3$ ) вокруг оси третьего порядка и отражения относительно трех плоскостей. Эту группу обозначают обычно  $D_3$ .

Обозначим элементы конечной группы  $g_i$ . Поскольку обратное к  $g_i$  преобразование, как и  $g_i$ , совмещает объект с самим собой, оно (обратное к  $g_i$  преобразование) также является элементом группы. Последовательное применение двух элементов группы, которое мы будем называть их произведением и обозначать  $g_i g_k$  (сначала действует  $g_k$ , а затем  $g_i$ ), также совмещает объект с самим собой, то есть является элементом группы. Поэтому справедлива таблица умножения  $g_i g_k = g_m$ , где  $g_m$  - также элемент группы. Таблицу умножения можно записать в виде

$$g_i g_k = T_{ik}^n g_n \quad (9.1)$$

где по индексу  $n$  подразумевается суммирование. Числа  $T_{ik}^n$  являются, очевидно, нулями и единицами, причем при данных  $i, k$  среди  $T_{ik}^n$  имеется всего одна единица, а остальные являются нулями.

**Задача 9.1.1.** Построить таблицу умножения для групп симметрии правильного треугольника. Какие из этих элементов являются обратными друг другу?

Рассмотрим теперь произведение трех элементов  $g_i g_k g_m$ , оно является элементом, который получается последовательным применением к объекту сначала преобразования  $g_m$ , затем  $g_k$ , а затем  $g_i$ . В силу того, что при каждом преобразовании симметрии объект совмещается с самим собой, мы можем по-разному группировать элементы в произведении  $g_i g_k g_m$ , заменяя либо  $g_i g_k$ , либо  $g_k g_m$  в соответствии с таблицей умножения

(9.1). Это свойство называется ассоциативностью группы. В силу этого свойства имеет место соотношение

$$T_{ik}^n T_{nm}^s = T_{km}^n T_{in}^s \quad (9.2)$$

которое получается, если в произведении  $g_i g_k g_m$  сначала расписать  $g_i g_k$  при помощи (9.1), и затем применить (9.1) к  $g_n g_m$ , и приравнять результат к тому, который получится, если расписать  $g_k g_m$  при помощи (9.1), и затем применить (9.1) к  $g_i g_n$ .

Можно рассматривать произвольные произведения элементов группы, каждое из которых само является элементом группы. В частности, можно ввести степени некоторого элемента  $g, g^n$ . Тожественное преобразование естественно обозначать 1. Поскольку число элементов группы конечно, то среди степеней  $g, g^2, g^3, \dots, g^n$  при  $n > |\mathbb{G}|$  найдутся одинаковые элементы. Пусть  $g^k = g^m$ , тогда  $g^{m-k} = 1$ . Таким образом, для любого элемента группы  $g$  найдется целая степень  $s$  такая, что  $g^s = 1$ . Наименьшая такая степень определяет число элементов группы, которые являются степенями данного элемента. Например, для отражения относительно плоскости  $s = 2$ , а для поворота на угол  $2\pi/n$  вокруг оси  $n$ -го порядка  $s = n$ . Если группа состоит только из степеней некоторого элемента, ее называют циклической. Циклическую группу, которая состоит из степеней  $r^m$ , где  $r$  - поворот на угол  $2\pi m/n$  относительно некоторой оси, обозначают обычно  $\mathbb{C}_n$ . Ее элементы (включая единичный) - повороты на углы  $2\pi m/n$ .

Конечную группу можно задать при помощи порождающих элементов. Элементы группы  $\mathbb{G}$  называются ее порождающими, если все элементы группы могут быть представлены в виде произведения степеней порождающих элементов. Их количество может быть различным, но в любом случае оно меньше числа элементов группы  $|\mathbb{G}|$ . Например, для группы  $\mathbb{C}_n$  порождающим элементом служит  $r$  - поворот на угол  $2\pi/n$ , поскольку группа состоит из степеней  $r^m$ . Для рассмотренной нами группы симметрии равностороннего треугольника  $\mathbb{D}_3$  порождающими являются два элемента: поворот вокруг оси третьего порядка и отражение относительно одной из плоскостей симметрии. Этот пример иллюстрирует неоднозначность выбора порождающих элементов. В то же время их число является фиксированным для данной группы  $\mathbb{G}$ .

Задача 9.1.2. Можно ли в качестве порождающего элемента группы  $\mathbb{C}_n$  выбрать поворот на угол, отличный от  $2\pi/n$ ?

Задача 9.1.3. Показать, что для группы симметрии равностороннего треугольника порождающими являются два элемента: поворот вокруг оси третьего порядка и отражение относительно одной из плоскостей симметрии.

Группа, произведение элементов которой перестановочно, то есть  $g_i g_k = g_k g_i$  для любых элементов, называется абелевой. Об элементах, удовлетворяющих условию  $g_i g_k = g_k g_i$ , говорят, что они коммутируют друг с другом. Очевидно, абелевой является любая циклическая группа. Более сложным примером абелевой группы является группа, имеющая несколько порождающих элементов, коммутирующих между собой. Действительно, если порождающие элементы коммутируют между собой, то коммутируют и их степени, откуда следует коммутативность всех элементов группы, поскольку все они представляются в виде произведений степеней порождающих элементов.

Рассмотрим группу симметрии правильного  $n$  угольника, которую обычно обозначают  $\mathbb{D}_n$ . Элементами симметрии правильного  $n$ -угольника являются повороты на угол  $2\pi m/n$  вокруг оси, проходящей через центр многоугольника перпендикулярно к нему. К ним надо добавить отражения относительно  $n$  плоскостей симметрии, проходящих через ось симметрии. Для нечетного  $n$  эти плоскости проходят через вершины  $n$ -угольника (и середину противоположного ребра). Для четного  $n$  половина

плоскостей проходит через пару вершин, а половина - через середины противоположных ребер. Таким образом, группа  $\mathbb{D}_n$  содержит  $2n$  элементов. Как и для группы симметрии треугольника  $\mathbb{D}_3$ , порождающими элементами группы  $\mathbb{D}_n$  при нечетном  $n$  являются  $r$ , поворот на угол  $2\pi/n$  вокруг оси, проходящей через центр многоугольника перпендикулярно к нему, и  $\sigma$ , отражение относительно одной из плоскостей. При четном  $n$  порождающими являются отражения относительно двух плоскостей, одна из которых проходит через пару вершин, а вторая - через середины противоположных ребер. Отметим, что в отличие от группы  $\mathbb{C}_n$  группа  $\mathbb{D}_n$  не является абелевой, поскольку повороты и отражения, вообще говоря, не коммутируют.

Рассмотрим еще один пример - группу поворотов куба, переводящих его в себя. Имеется три оси четвертого порядка, проходящих через центры противоположных граней, четыре оси третьего порядка, проходящие через противоположные вершины, и шесть осей второго порядка, проходящих через середины противоположных ребер. Ось четвертого порядка дает три элемента (повороты на углы  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ ), отличные от тождественного преобразования, ось третьего порядка дает два элемента (повороты на углы  $2\pi/3, 4\pi/3$ ), отличные от тождественного преобразования, и ось второго порядка дает один элемент (поворот на угол  $\pi$ ), отличный от тождественного преобразования. Итого получаем  $1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 = 24$  элемента группы (где единица относится к тождественному преобразованию). Порождающими же элементами группы являются три элемента, например, поворот на  $\pi/2$  вокруг одной из осей четвертого порядка, поворот на  $2\pi/3$  вокруг одной из осей третьего порядка и поворот на  $\pi$  вокруг одной из осей второго порядка.

Рассмотрим теперь группу симметрии тетраэдра. Имеется четыре оси третьего порядка, каждая из которых проходит через вершину и середину противоположной грани, шесть плоскостей отражения, каждая из которых проходит через ребро и середину противоположного ребра и три зеркальных оси четвертого порядка, проходящие через середины противоположных ребер. Ось третьего порядка дает два элемента (повороты на углы  $2\pi/3, 4\pi/3$ ), отличные от тождественного преобразования, отражение относительно плоскости симметрии является отдельным элементом симметрии. С зеркальной осью связан элемент симметрии, который является поворотом на угол  $\pi/2$  с одновременным отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси. Квадрат этого элемента является просто поворотом на угол  $\pi$  вокруг зеркальной оси, а куб - опять комбинацией вращения (на угол  $3\pi/2$ ) и отражения относительно плоскости, перпендикулярной оси. Таким образом, зеркальная ось четвертого порядка дает три элемента, отличные от тождественного преобразования. Итого получаем  $1 + 4 \cdot 2 + 6 + 3 \cdot 3 = 24$  элемента группы (где единица относится к тождественному преобразованию).

Приведенные выше примеры принадлежат к классу групп симметрии, каждая из которых состоит из конечного числа геометрических преобразований, под действием которых некоторая геометрическая фигура переходит сама в себя. Все такие преобразования (элементы симметрии) оставляют на месте по крайней мере одну точку (центр фигуры), поэтому такие группы называют точечными. Порождающими элементами точечной группы могут быть только три вида элементов:

- Поворот вокруг некоторой оси на угол  $2\pi/n$ , эту ось обычно называют  $C_n$ .
- Отражение относительно плоскости, проходящей через ось симметрии или отражение относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии.
- Зеркальный поворот вокруг некоторой оси на угол  $\pi/n$  (то есть поворот с отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси), эту ось обычно называют  $S_{2n}$ .

Последний элемент должен быть включен в порождающие элементы, если в группе симметрии отсутствует отражение относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии: в противном случае зеркальный поворот распадается на произведение поворота и отражения, то есть не является порождающим элементом. Это накладывает ограничения на угол зеркального поворота: он не может быть равен  $2\pi/p$ , где  $p$  - нечетное число. В последнем случае в группе присутствовал бы элемент, который является степенью  $p$  от зеркального поворота, который при нечетном  $p$  как раз и является отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии.

Приведем пример группы, не связанной с симметрией геометрических фигур. Рассмотрим группу перестановок  $n$  объектов (чисел, точек, аргументов функции и тому подобное). Эту группу обычно называют симметрической группой и обозначают  $S_n$ . Ее элемент  $g_i$  можно определить совокупностью чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , которые задают позиции, в которые при перестановке перемещается первый объект ( $i_1$ ), второй объект ( $i_2$ ), и так далее. Понятно, что совокупность  $i_1, i_2, \dots, i_n$  сама по себе является перестановкой чисел  $1, 2, \dots, n$ . Поскольку число перестановок равно  $n!$ , именно столько элементов содержит симметрическая группа. Правило умножения элементов  $g_j$  и  $g_i$  вполне прозрачно: сначала мы перемещаем  $1, 2, \dots, n$  на новые места в соответствии с  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , а затем перемещаем числа получившейся последовательности в соответствии с  $j_1, j_2, \dots, j_n$ . Групповой характер такой процедуры очевиден.

Можно рассматривать отображения одной группы симметрии на другую  $G \rightarrow H$ , при котором каждому элементу  $g_i$  группы  $G$  сопоставляется некоторый элемент  $h_i$  группы  $H$ . Если при этом произведение элементов группы  $g_i g_k$  отображается в произведение  $h_i h_k$ , то отображение  $G \rightarrow H$  называется гомоморфизмом. Если гомоморфизм к тому же является взаимно однозначным отображением, то такое отображение называется изоморфизмом. Изоморфные группы в математике обычно считаются одной и той же группой, то есть группы изучаются с точностью до изоморфизма. В физических же приложениях зачастую необходимо учитывать различный физический смысл изоморфных групп.

Приведем пару примеров. Рассмотренная выше группа симметрии правильного треугольника  $D_3$  изоморфна симметрической группе  $S_3$ , которая является группой перестановок трех чисел. В соответствии с изоморфизмом совпадает число элементов этих групп: оно равно  $6 = 3!$ . Для того, чтобы установить изоморфизм этих двух групп, можно расставить числа  $1, 2, 3$  в вершинах треугольника и следить за их перестановками, которые порождаются элементами симметрии треугольника. Точно также симметрическая группа  $S_4$  изоморфна группе симметрии тетраэдра. В соответствии с изоморфизмом совпадает число элементов этих групп: оно равно  $24 = 4!$ . Изоморфизм устанавливается также, как и для треугольника: можно расставить числа  $1, 2, 3, 4$  в вершинах тетраэдра и следить за их перестановками, которые порождаются элементами симметрии тетраэдра.

Задача 9.1.4. Симметрическая группа  $S_4$  изоморфна группе поворотов куба. Как это обосновать?

Заметим, что совокупность произведений  $h_i = g_i g$  (или  $h_i = g g_i$ ), где  $g$  - некоторый элемент группы  $G$ , а  $g_i$  - ее элементы, также представляет собой полную совокупность элементов группы  $G$ . Действительно, во-первых  $g_i g$  (или  $g g_i$ ) представляют собой элементы группы  $G$ . Во-вторых, если известна совокупность  $h_i = g_i g$  (или  $h_i = g g_i$ ), то по ней можно восстановить и исходные элементы группы:  $g_i = h_i g^{-1}$  (или  $g_i = g^{-1} h_i$ ). Преобразование  $g_i \rightarrow h_i = g_i g$  (или  $g_i \rightarrow h_i = g g_i$ ) называется сдвигом по группе.

Подмножество элементов группы, которое само является группой, называется ее подгруппой. Например, для введенной нами выше группы симметрии треугольника подгруппой является циклическая группа, включающая элементы  $1, r, r^2$ , где  $r$  - поворот

на угол  $2\pi/3$  вокруг оси третьего порядка. Очевидно, имеются подгруппы у группы перестановок  $n$  чисел. Например, ее подгруппой является группа перестановок первых  $m$  чисел,  $m < n$ . Другой ее подгруппой является группа циклических перестановок. Очевидно, повороты вокруг любой оси являются подгруппами группы поворотов куба. А сама рассмотренная выше группа поворотов куба является подгруппой полной группы симметрии куба, включающей также отражения и инверсию.

Пусть  $\mathbb{H}$  - подгруппа группы  $\mathbb{G}$ . Обозначим  $\mathbb{H}_i$  множество элементов группы  $\mathbb{G}$ , состоящее из произведений  $h_k g_i$  элементов  $h_k$  подгруппы  $\mathbb{H}$  на некоторый элемент  $g_i$  группы  $\mathbb{G}$ . Множество  $\mathbb{H}_i$  называется правым смежным классом подгруппы  $\mathbb{H}$ . Аналогично можно ввести левые смежные классы подгруппы  $\mathbb{H}$ , которые состоят из произведений  $g_i h_k$ . Отметим, что если правый (левый) смежный класс  $\mathbb{H}_i$  подгруппы  $\mathbb{H}$  не совпадает с этой подгруппой, то он подгруппой не является.

Задача 9.1.5. Доказать, что если правый (левый) смежный класс  $\mathbb{H}_i$  подгруппы  $\mathbb{H}$  не совпадает с этой подгруппой, то он группой не является.

Докажем теорему Лагранжа: правые (левые) смежные классы не пересекаются либо совпадают. Пусть  $g_1$  и  $g_2$  - элементы, которые определяют правые смежные классы  $\mathbb{H}_1$  и  $\mathbb{H}_2$ . Предположим, что в этих классах имеются совпадающие элементы, тогда  $h_i g_1 = h_k g_2$  где  $h_i, h_k$  принадлежат подгруппе  $\mathbb{H}$ . Умножая это равенство на  $h_j h_i^{-1}$  ( $h_j$  - произвольный элемент подгруппы  $\mathbb{H}$ ), находим  $h_j g_1 = h_j h_i^{-1} h_k g_2$ . Отсюда следует что все элементы  $h_j g_1$  класса  $\mathbb{H}_1$  принадлежат классу  $\mathbb{H}_2$ , поскольку элемент  $h_j h_i^{-1} h_k$  принадлежит подгруппе  $\mathbb{H}$ . На этом доказательство заканчивается. Из теоремы Лагранжа следует, что элементы группы  $\mathbb{G}$  распадаются на целое число правых (левых) классов. Отсюда, в част-

ности, следует, что порядок группы  $|\mathbb{G}|$  кратен порядку

своей подгруппы  $|\mathbb{H}|$ .

Задача 9.1.6. Убедиться в том, что порядок группы вращений куба кратен порядкам подгрупп этой группы.

Подгруппа  $\mathbb{H}$  группы  $\mathbb{G}$  называется инвариантной, если преобразования подобия ее элементов  $h_k \rightarrow g h_k g^{-1}$  не выводят их из подгруппы  $\mathbb{H}$ . Здесь  $g$  - произвольный элемент группы  $\mathbb{G}$ , а  $h_k$  - произвольный элемент подгруппы  $\mathbb{H}$ . Очевидно, для инвариантной подгруппы левые и правые смежные классы совпадают, каждому из них соответствует совокупность элементов  $h_k g_i = g_i h_k$ . Проинтерпретируем эти смежные классы  $\mathbb{G}_i$ , как элементы нового множества  $\mathbb{F}$ . Определим на нем произведение, как класс элементов  $h_k g_i g_j$ . В результате получится группа  $\mathbb{F}$ , потому что в ней, очевидно, есть ассоциативность, существует единичный элемент и для каждого элемента найдется обратный. Группа  $\mathbb{F}$  называется фактор-группой, ее порядок равен  $|\mathbb{G}|/|\mathbb{H}|$ . Группа, которая не содержит инвариантных подгрупп, называется простой.

Задача 9.1.7. Показать, что является инвариантной подгруппа  $\mathbb{C}_3$  группы преобразований правильного треугольника, состоящая из преобразований  $h_i = 1, r, r^2$ , где  $r$  - поворот на угол  $2\pi/3$  вокруг оси третьего порядка.

Прямым произведением  $\mathbb{G} \times \mathbb{F}$  групп  $\mathbb{G}$  и  $\mathbb{F}$  называется множество пар  $g_i \times f_k$ , где  $g_i$  - элементы  $\mathbb{G}$ , а  $f_k$  - элементы  $\mathbb{F}$ , операция умножения между которыми определена формулой

$$(g_i \times f_k) \cdot (g_m \times f_n) = (g_i \cdot g_m) \times (f_k \cdot f_n)$$

Из приведенного определения ясно, что прямое произведение  $\mathbb{G} \times \mathbb{F}$  также является группой. Порядок этой группы является произведением порядков групп  $\mathbb{G}$  и  $\mathbb{F}$ . Таким образом, прямое произведение групп позволяет легко генерировать группы все большего и большего порядка.

Элементы  $a$  и  $b$  группы  $\mathbb{G}$  называются сопряженными, если найдется элемент  $g$  группы  $\mathbb{G}$ , такой что  $a = g b g^{-1}$

Заметим, что если  $b$  сопряжен  $a$  и  $c$  сопряжен  $a$ , то  $c$  сопряжен  $b$ . Действительно, из соотношений  $a = g_1 b g_1^{-1}$  и  $a = g_2 c g_2^{-1}$  следует  $b = g_1^{-1} g_2 c (g_1^{-1} g_2)^{-1}$ . Поэтому отношение сопряженности разбивает элементы группы на классы - классы сопряженных друг другу элементов. Очевидно, что единичный элемент группы сопряжен сам себе, поскольку  $1 = g \cdot 1 \cdot g^{-1}$  для любого элемента группы  $g$ . Поэтому единичный элемент сам по себе составляет класс. Вследствие этого число классов сопряженных друг другу элементов группы больше единицы (если только группа не содержит единственный элемент 1).

Приведем ряд примеров. В циклической группе, состоящей из степеней некоторого элемента, нет сопряженных друг другу элементов. В то же время в группе симметрии правильного треугольника все отражения сопряжены друг другу и составляют один класс. Сопряжены друг другу и повороты на углы  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$ , которые составляют второй класс для этой группы. Третий класс образует единичное преобразование. Сопряжены друг другу отражения и для произвольной группы  $\mathbb{D}_{2n+1}$ . В то же время в группе  $\mathbb{D}_{2n}$  имеется два класса отражений.

Задача 9.1.8. Показать, что в группе симметрии правильного треугольника сопряжены друг другу все отражения, и сопряжены друг другу повороты на углы  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$ .

Из определения видно, что прямой способ поиска классов сопряженных элементов довольно сложен, поскольку связан с перебором всех элементов группы. Однако для точечной группы имеется более простой способ, основанный на наглядных геометрических представлениях. Преобразования подобны, когда это одно и то же преобразование, выполненное в двух разных системах координат, повернутых друг относительно друга. Преобразование  $g^{-1}$  переводит  $b$  в новую систему координат, а преобразование  $g$  возвращает в старую. Значит повороты на один и тот же угол вокруг двух разных осей сопряжены, если в группе есть преобразование  $g$ , переводящее одну ось в другую. То же относится и к плоскостям отражения.

Задача 9.1.9. Установить классы сопряженных элементов для группы поворотов куба.

### 3.9.2 9.1.1 Представления группы

Главную роль в физических приложениях играют матричные представления групп, которые обычно называют просто представлениями. Матричным представлением группы называется гомоморфизм группы  $\mathbb{G}$  в множество матриц  $n \times n$ , когда каждому элементу  $g_i$  группы  $\mathbb{G}$  сопоставляется матрица  $\hat{D}_i$ , совокупность которых воспроизводит правило умножения элементов группы. Другими словами, если матрица  $\hat{D}_i$  соответствует элементу  $g_i$ , а матрица  $\hat{D}_j$  соответствует элементу  $g_j$ , то

произведение матриц  $\hat{D}_i \hat{D}_j$  соответствует произведению элементов  $g_i g_j$ . Очевидно, что при этом тождественное преобразование соответствует единичной матрице, а обратное преобразование - обратной матрице. Число  $n$  называется размерностью представления.

Гомоморфизм группы  $\mathbb{G}$  в множество матриц  $n \times n$  может быть необратимым (не взаимно однозначным). Тривиальным примером такого рода является случай, когда все матрицы  $\hat{D}_i$  являются единичными. Очевидно, что все необходимые условия при этом оказываются выполненными, но такой гомоморфизм бессодержателен. Обычно мы будем иметь дело с изоморфизмом группы  $\mathbb{G}$  в множество матриц  $n \times n$ , когда по матрице  $\hat{D}_i$  однозначно восстанавливается элемент группы  $g_i$ . Такое представление называется точным.

Задача 9.1.10. Построить двумерное представление группы симметрии треугольника  $\mathbb{D}_3$ .

Как мы уже убедились, в силу конечности группы для каждого ее элемента  $g$  имеется степень  $s$  такая, что  $g^s = 1$ . Поэтому для соответствующей матрицы  $\hat{D}$  справедливо соотношение  $\hat{D}^s = \hat{1}$ , где  $\hat{1}$  - единичная матрица. Отсюда немедленно следует, что

$\det \hat{D} = \pm 1$ . Например, для матрицы, соответствующей повороту, ее детерминант равен единице, а для матрицы, соответствующей отражению, ее детерминант равен -1. Равен -1 и детерминант матрицы, соответствующей зеркальному повороту. Поскольку детерминант обратной матрицы равен обратному детерминанту прямой матрицы, мы заключаем, что детерминант  $\hat{D}^{-1}$  равен детерминанту  $\hat{D}$ .

Примером представления конечной группы  $\mathbb{G}$  может служить ее представление размерности  $|\mathbb{G}|$ , которое определяется набором  $|\mathbb{G}|$  матриц  $\hat{D}_i$  с компонентами  $T_{mi}^n$ , входящими в таблицу умножения (9.1), и с правилом умножения

$$\left( \hat{D}_k \hat{D}_m \right)_i^s = T_{ik}^n T_{nm}^s$$

где по индексу  $n$  подразумевается суммирование. Тогда соотношение ассоциативности (9.2) переписывается в виде

$$\hat{D}_k \hat{D}_m = T_{km}^n \hat{D}_n \quad (9.3)$$

Таким образом, правило произведения матриц  $\hat{D}_i$  воспроизводит правило (9.1) для произведения элементов группы и, следовательно, эти матрицы осуществляют представление группы  $\mathbb{G}$ .

Линейными преобразованиями матрицы любого представления конечной группы могут быть приведены к унитарным. Для доказательства этого свойства введем (комплексные) векторы  $\mathbf{x}$  с числом компонент  $n$ , равным размерности представления, и определим скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_g \left[ \hat{D}^*(g) \mathbf{x}^* \right] \cdot [\hat{D}(g) \mathbf{y}] \quad (9.4)$$

где  $\hat{D}(g)$  - матрица представления, соответствующая элементу группы  $g$ , звездочка означает комплексное сопряжение, а точка - суммирование по компонентам. Рассмотрим теперь  $(\mathbf{x}, \hat{D}(h) \mathbf{y})$ , где  $h$  - элемент группы. Для вычисления  $(\mathbf{x}, \hat{D}(h) \mathbf{y})$  подставляем  $\hat{D}(h) \mathbf{y}$  вместо  $\mathbf{y}$  в (9.4). В результате возникает произведение  $\hat{D}(g) \hat{D}(h) = \hat{D}(gh)$ . Далее переходим к суммированию по  $gh$ , что дает ту же сумму по элементам, так как сдвиг по группе  $gh$  переставляет элементы группы, но не меняет их совокупности. При этом  $D^*(g) \rightarrow D^*(gh^{-1}) = D^*(g) [D^*(h)]^{-1}$ . Другими словами, для каждого элемента группы

$$\left( \mathbf{x} [D^\dagger(h)]^{-1}, \mathbf{y} \right) = (\mathbf{x}, \hat{D}(h) \mathbf{y})$$

где  $D^\dagger$  означает эрмитово сопряжение. Осталось только перейти к ортонормированному базису по произведению  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , компоненты матриц представления в котором будут унитарными.

В дальнейшем подразумевается, что мы имеем дело с унитарными представлениями, когда матрицы представления являются унитарными:  $\hat{D}^\dagger(g) = \hat{D}^{-1}(g)$ . Вспоминая, что  $\hat{D}^{-1}(g) = \hat{D}(g^{-1})$ , мы находим  $\hat{D}(g^{-1}) = \hat{D}^\dagger(g)$ . В случае, когда представление оказывается действительным, все его матрицы являются ортогональными, а матрица  $\hat{D}(g^{-1})$  получается из  $\hat{D}(g)$  транспонированием.

**Задача 9.1.11.** Проверить, что для действительного двумерного представления группы вращений правильного треугольника матрицы  $\hat{D}(g^{-1})$  получается из  $\hat{D}(g)$  транспонированием.

Два представления группы  $\mathbb{G}$ , которые мы обозначаем индексами 1 и 2, называются эквивалентными, если они имеют одинаковую размерность  $n$  и существует такая матрица  $n \times n$  (обозначим ее  $\hat{V}$ ), что для любого элемента группы  $g$  справедливо соотношение



$$\hat{D}_i^{(1)} = \hat{V} \hat{D}_i^{(2)} \hat{V}^{-1} \quad (9.5)$$

Это преобразование называется преобразованием подобия. Можно сказать, что эквивалентные представления - это одно и то же представление, записанное в разных базисах. Поэтому следует изучать представления группы  $\mathbb{G}$  с точностью до их эквивалентности.

Поставим задачу: существует ли преобразование  $\hat{D}_i \rightarrow \hat{V} \hat{D}_i \hat{V}^{-1}$ , при котором все матрицы представления группы  $\mathbb{G}$  приводятся к блочно-диагональному виду. Если такой базис выбрать можно, то представление группы  $\mathbb{G}$  называется приводимым. Если же такого базиса не существует, представление называется неприводимым. Одной из основных задач теории представлений является нахождение всех неприводимых представлений данной группы  $\mathbb{G}$ , число которых оказывается конечным. Можно утверждать, что число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов

сопряженных элементов группы  $\mathbb{G}$ . Можно также утверждать, что сумма квадратов размерностей  $n_\alpha$  неприводимых представлений равна порядку группы  $|\mathbb{G}|$

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha}^2 = |\mathbb{G}| \quad (9.6)$$

Эти два свойства накладывают весьма существенные ограничения на набор  $n_\alpha$  и в ряде случаев фиксируют их однозначно. Например, однозначно фиксируется набор  $n_\alpha$  для неприводимых представлений группы симметрии треугольника. Поскольку число классов в данном случае равно трем, то должно существовать три неприводимых представления группы. Их размерности равны, очевидно, 1, 1, 2, поскольку только в этом случае сумма квадратов  $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$  равно порядку группы.

Задача 9.1.12. Как устроены неприводимые представления группы симметрии треугольника?

Заметим, что все неприводимые представления абелевой группы являются одномерными. Действительно, соотношение коммутации  $\hat{D}_i \hat{D}_k = \hat{D}_k \hat{D}_i$  означает, что если матрица  $\hat{D}_i$  приведена к диагональному виду, то и матрица  $\hat{D}_k$  является диагональной (или может быть приведена к диагональной без нарушения диагональности матрицы  $\hat{D}_i$  в случае, когда ее собственные значения являются вырожденными). Таким образом, возможна одновременная диагонализация матриц абелевой группы, что и означает сведение произвольного представления абелевой группы к одномерным. Особенно просто доказывается сделанное утверждение для циклической группы, все элементы которой являются степенями некоторого элемента  $g$ . Если ему соответствует матрица  $\hat{D}$  и мы привели ее к диагональному виду, то и все матрицы этого представления, которые являются степенями  $\hat{D}$ , являются диагональными.

Имеется два важных свойства неприводимых представлений, которые доказаны Шуром. Во-первых, если некоторая матрица  $n \times n$  коммутирует со всеми матрицами неприводимого представления размерности  $n$ , то эта матрица пропорциональна единичной. Во-вторых, неприводимые представления одинаковой размерности распадаются на классы, внутри каждого класса представления связаны соотношением (9.5), а для представлений из разных классов не существует ненулевой матрицы  $\hat{M}$ , для которой бы

$$\hat{D}_i^{(1)} \hat{M} = \hat{M} \hat{D}_i^{(2)}$$

Это относится как к представлениям одинаковой размерности, так и к представлениям разной размерности (в этом случае матрица  $\hat{M}$  была бы не квадратной).

Для компонент матрицы неприводимых представлений справедливо важное свойство "ортонормированности". Для его доказательства возьмем два представления группы размерностью  $n_1$  и  $n_2$ , матрицу  $\hat{B}$  размером  $n_1 \times n_2$  и введем матрицу  $n_1 \times n_2$

$$\hat{M} = \sum_g \hat{D}^{(1)}(g) \hat{B} \hat{D}^{(2)}(g^{-1}) \quad (9.7)$$

где суммирование идет по всем элементам группы. Рассмотрим произведение  $\hat{D}^{(1)}(h) \hat{M}$ , где  $g$  - некоторый элемент группы. Преобразуем  $\hat{D}^{(1)}(h) \hat{D}^{(1)}(g) = \hat{D}^{(1)}(hg)$  и переходим к суммированию по  $hg$ . Поскольку  $g^{-1} = (hg)^{-1}h$ , мы находим

$$\hat{D}^{(1)}(h) \hat{M} = \hat{M} \hat{D}^{(2)}(h)$$

В силу леммы Шура для разных представлений матрица  $\hat{M}$  должна быть равна нулю. При этом матрица  $\hat{B}$  в соотношении (9.7) произвольна. Поэтому мы находим условие "ортогональности" различных неприводимых представлений

$$\sum_g D_{\alpha\beta}^{(1)}(g) D_{\gamma\delta}^{(2)}(g^{-1}) = 0 \quad (9.8)$$

где греческие индексы нумеруют компоненты матриц  $\hat{D}$ . Напомним, что в силу унитарности  $\hat{D}(-g) = D^\dagger(g)$ . Поэтому (9.8) переписывается в виде

$$\sum_g D_{\alpha\beta}^{(1)}(g) D_{\gamma\delta}^{\dagger(2)}(g) = 0 \quad (9.9)$$

Рассмотрим теперь одно представление порядка  $n$ , когда  $\hat{D}^{(1)}$  и  $\hat{D}^{(2)}$  в (9.7) совпадают. Тогда определенная в соответствии с (9.7) матрица  $\hat{M}$  коммутирует со всеми матрицами неприводимого представления и поэтому в силу леммы Шура пропорциональна единичной матрице. Найдём её след:

$$\text{tr } \hat{M} = \sum_g \text{tr} \left\{ \hat{D}(g) \hat{B} [\hat{D}(g)]^{-1} \right\} = |\mathbb{G}| \text{tr } \hat{B}$$

Итак, для произвольной матрицы  $\hat{B}$

$$\sum_g \hat{D}(g) \hat{B} \hat{D}(g^{-1}) = \frac{|\mathbb{G}|}{n} (\text{tr } \hat{B}) \hat{1}$$

где  $\hat{1}$  - единичная матрица  $n \times n$ . Поэтому должно выполняться покомпонентное соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_g D_{\alpha\beta}(g) D_{\gamma\delta}(-g) \\ &= \sum_g D_{\alpha\beta}(g) D_{\gamma\delta}^\dagger(g) = \frac{|\mathbb{G}|}{n} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (9.10)$$

где, как и выше, греческие индексы нумеруют компоненты матриц  $\hat{D}(g)$ .

Задача 9.1.13. Проверить выполнение соотношений (9.9,9.10) для групп симметрии треугольника.

Чтобы классифицировать представления группы с точностью до эквивалентности, надо ввести инвариант преобразования подобия (9.5). Таким инвариантом является след матрицы представления, который называют его характером  $\chi$ :

$$\chi_i = \text{tr } \hat{D}_i \quad (9.11)$$

След одинаков для представлений, связанных преобразование подобия (9.5). Поэтому набор характеров  $\chi_i$  уже не зависит от конкретного выбора представления и характеризует класс эквивалентных представлений. Другими словами, набор характеров  $\chi_i$  характеризует группу, как таковую. Отметим, что совпадают характеры, которые соответствуют сопряженным элементам группы. Отметим также, что для обратного к  $g_i$  элемента, для которого матрица равна  $\hat{D}_i^\dagger$ , характер равен  $\chi_i^*$ .

Свернем соотношение (9.10) по индексам  $\alpha, \beta$  и по индексам  $\gamma, \delta$ . В результате слева получим сумму произведений характеров, а справа - след символа Кронекера, который равен размерности представления  $n$ . В результате получается

$$\sum_i |\chi_i|^2 = |\mathbb{G}| \quad (9.12)$$

Для разных же представлений таким же образом находим из соотношения (9.9) условие ортогональности

$$\sum_i \chi_i^{(1)} \chi_i^{\star(2)} = 0 \quad (9.13)$$

Соотношения (9.12, 9.13) уже не зависят от конкретного вида матриц представления.

Задача 9.1.14. Проверить выполнение соотношений (9.12, 9.13) для группы симметрии треугольника.

Задача 9.1.15. Построить систему характеров для группы  $\mathbb{D}_4$ .

### 3.9.3 9.2 Группы и алгебры Ли

Мы приступаем к рассмотрению групп Ли, которые характеризуются бесконечным набором элементов, которые можно характеризовать конечным числом действительных параметров  $x_i$ . Минимально необходимое число параметров  $x_i$ , необходимое для параметризации группы Ли  $\mathbb{G}$  называется ее размерностью и обозначается  $\dim \mathbb{G}$ . Иногда  $x_i$  называют координатами в пространстве параметров группы Ли. В качестве примера можно привести группу вращений трехмерного пространства. Число параметров, необходимых для задания элементов этой группы, равно трем: именно столько углов характеризует произвольное вращение. Например, можно последовательно осуществить повороты вокруг трех осей координат.

Задача 9.2.1. Сколькими параметрами характеризуется группа вращений  $n$ -мерного пространства?

Начало координат принято выбирать в единице группы, то есть  $x_i = 0$  соответствуют единичному элементу группы. Вместо таблицы умножения непрерывная группа задается функцией  $2 \dim \mathbb{G}$  переменных, которая определяет процедуру умножения. А именно, пусть при перемножении элементов с координатами  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  получился элемент с координатой  $\mathbf{z}$ :  $g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$ . Тогда  $\mathbf{z} = ?(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  называется функцией умножения.

Групповые свойства накладывают ряд ограничений на функцию  $\phi$ . Во-первых,  $\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ , что связано со свойством единичного элемента  $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$ . Во-вторых

$$\phi(\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z}) = \phi(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}))$$

что связано с ассоциативностью:  $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ . В-третьих, наличие у каждого элемента группы обратного означает, что для каждого  $\mathbf{x}$  найдется такое  $\mathbf{y}$ , что  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ .

Нас будут интересовать матричные группы Ли, элементами которых являются матрицы  $n \times n$  с действительными или комплексными компонентами. Именно такие

группы наиболее часто встречаются в приложениях. Очевидно, действительная матрица  $n \times n$  характеризуется  $n^2$  параметрами, а комплексная матрица  $n \times n$  характеризуется  $2n^2$  параметрами. Как правило, мы будем рассматривать матрицы, на которые накладываются некоторые ограничения, совместимые с групповыми свойствами. Приведем основные примеры.

Можно ограничиться рассмотрением унимодулярных матриц, то есть матриц с единичным детерминантом. Поскольку детерминант произведения матриц равен произведению их детерминантов, групповая процедура не выводит унимодулярные матрицы из их класса. Очевидно, действительная унимодулярная матрица  $n \times n$  характеризуется  $n^2 - 1$  параметрами, а комплексная унимодулярная матрица  $n \times n$  характеризуется  $2n^2 - 2$  параметрами. Группа действительных унимодулярных матриц  $n \times n$  обозначается  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ , а группа комплексных унимодулярных матриц  $n \times n$  обозначается  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ .

$\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$  или просто  $\mathrm{U}(n)$  означает группу унитарных матриц  $\hat{U}$ , т.е. таких, для которых эрмитовски сопряженная матрица  $\hat{U}^\dagger$  совпадает с обратной:  $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$  или  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ . Это соотношение дает  $n^2$  действительных условий, поскольку матрица  $\hat{U}\hat{U}^\dagger$  эрмитова. Таким образом, унитарная матрица характеризуется  $n^2$  параметрами. Другими словами, размерность группы  $\dim \mathrm{U}(n) = n^2$ .

$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$  или просто  $\mathrm{SO}(n)$  означает группу ортогональных унимодулярных матриц  $\hat{O}$ , то есть матриц с единичным детерминантом, для которых обратная матрица совпадает с транспонированной:  $\hat{O}^{-1} = \hat{O}^T$  или  $\hat{O}\hat{O}^T = 1$ . Это соотношение дает  $n(n+1)/2$  действительных условий, поскольку матрица  $\hat{O}\hat{O}^T$  симметрична. Соотношение  $\hat{O}\hat{O}^T = 1$  означает, что детерминант  $\hat{O}$  равен  $\pm 1$ . Поэтому условие унимодулярности отсекает матрицы с детерминантом  $-1$ , но не уменьшает число параметров, которые требуются для характеристики матрицы  $\hat{O}$ . Таким образом, ортогональная матрица характеризуется  $n(n-1)/2$  параметрами. Другими словами, размерность группы  $\dim \mathrm{SO}(n) = n(n-1)/2$ .

Задача 9.2.2. Группа  $\mathrm{SO}(n)$  изоморфна группе вращений  $n$ -мерного пространства. Почему?

$\mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$  или просто  $\mathrm{SU}(n)$  означает группу унитарных унимодулярных матриц, т.е. таких, для которых эрмитовски сопряженная матрица совпадает с обратной:  $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$  или  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ , а также детерминант равен единице. Соотношение  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$  означает, что детерминант матрицы  $\hat{U}$  по модулю равен единице. Поэтому условие унимодулярности накладывает одно дополнительное действительное ограничение на матрицу  $\hat{U}$ . Вычитая эту единицу из числа  $n^2$  параметров унитарной матрицы, находим, что унитарная унимодулярная матрица характеризуется  $n^2 - 1$  параметрами. Другими словами, размерность группы  $\dim \mathrm{SU}(n) = n^2 - 1$ .

Приведем параметризацию группы  $\mathrm{SO}(3)$ , которая изоморфна группе вращений трехмерного пространства. Всякую матрицу этой группы можно представить, как произведение трех матриц,  $\hat{O} = \hat{O}_3\hat{O}_2\hat{O}_1$ , которые соответствуют поворотам вокруг осей координат:

$$\begin{aligned}
\hat{O}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \\
\hat{O}_2 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \\
\hat{O}_3 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Все углы здесь определены на интервале в  $2\pi$ , например, можно считать  $-\pi < \alpha < \pi$ .

Можно ввести другую параметризацию матриц группы  $\mathbb{SO}(3)$ . Будем рассматривать поворот, как вращение вокруг некоторого вектора  $\mathbf{a}$ , направление которого задает направление оси вращения, а абсолютное значение задает угол поворота  $\psi$ . Полное перечисление поворотов в терминах векторов  $\mathbf{a}$  означает, что  $\psi$  меняется от 0 до  $\pi$ , поскольку повороты на углы от  $\pi$  до  $2\pi$  вокруг направления  $\mathbf{a}$  эквивалентны поворотам на углы от 0 до  $\pi$  вокруг направления  $-\mathbf{a}$ . Таким образом, в пространстве векторов  $\mathbf{a}$  область параметров группы  $\mathbb{SO}(3)$  является шаром радиуса  $\pi$ . Однако повороты на угол  $\pi$  вокруг направлений  $\mathbf{a}$  и  $-\mathbf{a}$  являются одним и тем же преобразованием, поэтому мы должны отождествить все пары диаметрально противоположных точек поверхности шара. Получившееся множество и есть многообразие параметров группы  $\mathbb{SO}(3)$ . Многообразие получилось связным, но не односвязным, потому что мы не можем стянуть в точку путь, проходящий через концы диаметра шара. Диаметрально противоположные точки останутся противоположными и нам не удастся свести их в одну. Такое множество можно отобразить на так называемую проективную сферу в четырехмерном пространстве.

Приведем теперь параметризацию матриц группы  $\mathbb{SU}(2)$ . Элемент этой группы можно задать четырьмя действительными числами  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , на которые наложено условие  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . Тогда матрица

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 - ix_4 \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

обладает обеими необходимыми свойствами: она является унитарной и унимодулярной. Можно сказать, что условие  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  задает единичную сферу в четырехмерном пространстве  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

### 3.9.4 9.2.1 Алгебра Ли группы Ли

Рассмотрим окрестность единичного элемента некоторой группы Ли  $\mathbb{G}$ , которая задается параметрами  $x_j$ . В этой окрестности матрицы группы  $\hat{G}$  характеризуется производными

$$\hat{Q}_j = \frac{\partial \hat{G}}{\partial x_j} \tag{9.15}$$

число которых совпадает с размерностью группы  $\mathbb{G}$ . Производные (9.15) называются генераторами группы  $\mathbb{G}$ , их число равно размерности группы  $\dim \mathbb{G}$ . Вблизи единицы справедливо разложение  $\hat{G}(\mathbf{x}) = 1 + x_j \hat{Q}_j$ , где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Рассмотрим однопараметрическое семейство матриц  $\hat{T}(t) = \exp(ty_j\hat{Q}_j)$ , где  $y_j$  — некоторые числа и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Очевидно, что это семейство удовлетворяет групповому свойству, причем  $\hat{T}(t_1)\hat{T}(t_2) = \hat{T}(t_1 + t_2)$ . Кроме того, при малых  $t$  матрицы  $\hat{T}$  имеют вид  $1 + x_jQ_j$ , то есть принадлежат группе  $\mathbb{G}$ . Отсюда следует, что и при произвольном  $t$  матрицы  $\hat{T}$  принадлежат группе  $\mathbb{G}$ . Таким образом, мы нашли однопараметрическую подгруппу группы  $\mathbb{G}$ . Более того, мы построили экспоненциальное представление этой подгруппы.

При различных значениях  $y_j$  однопараметрические подгруппы  $\hat{T}(t)$  исчерпывают все элементы группы  $\mathbb{G}$ , поскольку каждый ее элемент может быть аппроксимирован большой степенью элемента, близкого к единице. Таким образом, мы нашли представление для матриц группы  $\mathbb{G}$ , которое имеет вид

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{x}\hat{\mathbf{Q}}) \quad (9.16)$$

которое называется экспоненциальным. В дальнейшем мы будем использовать именно экспоненциальное представление.

Хотя мы обнаружили в группе  $\mathbb{G}$  бесконечное количество однопараметрических подгрупп, ее элементы, вообще говоря, не коммутируют между собой. Рассмотрим матрицу  $\hat{G}(\mathbf{y})\hat{G}(\mathbf{x})\hat{G}^{-1}(\mathbf{y})\hat{G}^{-1}(\mathbf{x})$ , которая также принадлежит группе  $\mathbb{G}$ . Используя экспоненциальное представление (9.16) и раскладываясь до второго порядка по  $x_j, y_j$ , находим

$$\hat{G}(\mathbf{y})\hat{G}(\mathbf{x})\hat{G}^{-1}(\mathbf{y})\hat{G}^{-1}(\mathbf{x}) \approx 1 + y_i x_j (\hat{Q}_i \hat{Q}_j - \hat{Q}_j \hat{Q}_i)$$

Поскольку вблизи единицы главный член разложения матрицы группы  $\mathbb{G}$  должен раскладываться по  $\hat{Q}_j$ , мы находим

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_l] = t_{jlk} \hat{Q}_k \quad (9.17)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Величины  $t_{jlk}$  называются структурными константами. Очевидно, величины  $t_{jlk}$  антисимметричны по первой паре индексов. Квадратные скобки в (9.17) означают коммутатор

$$[\hat{G}, \hat{H}] \equiv \hat{G}\hat{H} - \hat{H}\hat{G}$$

Таким образом, мы приходим к совокупности матриц  $\hat{X} = x\hat{Q}$ , где "скалярное произведение" означает суммирование по компонентам  $x_j$  и компонентам  $\hat{Q}_j$ . На этом линейном пространстве заданы операции сложения  $\hat{X} + \hat{Y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})\hat{\mathbf{Q}}$  и коммутации матриц, которые это пространство сохраняют. Коммутатор матриц  $\hat{X}$  линейно выражается через эти матрицы, явное выражение коммутатора определяется структурными константами, смотри (9.17). Такого сорта конструкция называется алгеброй Ли. Вообще говоря, алгебры Ли можно рассматривать сами по себе. Нас, однако, они будут интересовать именно в связи с группами Ли.

Легко проверить, что для любых трех операторов  $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  выполняется тождество Якоби

$$[[\hat{X}, \hat{Y}], \hat{Z}] + [[\hat{Y}, \hat{Z}], \hat{X}] + [[\hat{Z}, \hat{X}], \hat{Y}] = 0 \quad (9.18)$$

Подставляя в тождество Якоби (9.18)  $\hat{X} = \hat{Q}_i, \hat{Y} = \hat{Q}_j, \hat{Z} = \hat{Q}_k$  и преобразуя коммутаторы при помощи соотношений (9.17), находим условие

$$t_{ijn}t_{nkm} + t_{jkn}t_{nim} + t_{kin}t_{njm} = 0 \quad (9.19)$$

наложенное на структурные константы.

Рассмотрим группу  $\mathrm{SU}(2)$ , размерность которой равна трем. В качестве генераторов этой группы используют обычно матрицы Паули, смотри раздел 9.4.1. В соответствии с выражением (9.44) для коммутаторов матриц Паули

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (9.20)$$

структурные константы  $t_{ikl}$  группы  $\mathbb{S}(2)$  пропорциональны абсолютно антисимметричному тензору  $\epsilon_{ijk}$ . Для этих величин легко непосредственно проверить выполнение тождеств Якоби (9.19), используя соотношение

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad (9.21)$$

Экспоненциальное представление (9.16) для матриц группы  $\mathrm{SU}(2)$  имеет вид

$$\exp(ix_i\sigma_i) = \cos x + i\frac{x_i}{x}\sigma_i \sin x \quad (9.22)$$

где  $x$  - абсолютное значение вектора  $\mathbf{x}$ . Используя эрмитовость матриц Паули и правило (9.43), легко проверить унитарность и унимодулярность матриц (9.22). Как следует из выражения (9.22), векторы  $\mathbf{x}$  лежат внутри сферы радиуса  $\pi$ .

Задача 9.2.3. Доказать соотношение (9.22).

Вместо экспоненциального представления (9.22) часто используют другую параметризацию в терминах трех углов:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) & e^{i\psi} \sin(\theta/2) \\ -e^{-i\psi} \sin(\theta/2) & e^{-i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

Эту параметризацию обычно называют спинорной (в узком смысле этого слова).

Дифференцируя матрицы (9.14) по углам  $\alpha$ , мы находим следующие генераторы группы вращений

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{J}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{J}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.24)$$

которые за счет умножения на  $i$  сделаны эрмитовыми матрицами. Прямым вычислением находим правила коммутации

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\epsilon_{ikn}\hat{J}_n \quad (9.25)$$

которые эквивалентны правилам коммутации матриц Паули (9.20). Поэтому алгебры Ли для групп  $\mathbb{SO}(3)$  и  $\mathrm{SU}(2)$  изоморфны, то есть группы  $\mathbb{SO}(3)$  и  $\mathrm{SU}(2)$  вблизи единичного элемента ведут себя одинаково. В то же время эти группы не изоморфны.

Задача 9.2.4. Проверить, что оператор углового момента  $\hat{L}_i = -i\epsilon_{ikn}r_k\partial_n$  удовлетворяет тем же правилам коммутации (9.25):  $[\hat{L}_i, \hat{L}_k] = i\epsilon_{ikn}\hat{L}_n$ .

Исходя из правил коммутации (9.20, 9.25), можно было бы ожидать, что эквивалентны элементы  $\exp(ix_i \hat{J}_i)$  и  $\exp(ix_i \sigma_i/2)$ . Для группы  $\mathbb{SO}(3)$  элементы группы лежат внутри сферы радиуса  $\pi$ , причем противоположные точки на этой сфере эквивалентны. Однако, как следует из представления (9.22) для  $|x| = \pi$  элементы  $\exp(ix_i \sigma_i/2)$  и  $\exp(-ix_i \sigma_i/2)$  отличаются знаком. Таким образом, можно построить гомоморфизм  $\mathbb{SU}(2) \rightarrow \mathbb{SO}(3)$ . Но обратного гомоморфизма не существует, поскольку каждый элемент  $\hat{O}$  имеет два прообраза  $\hat{U}$  (отличающиеся знаком). Поэтому группы  $\mathbb{SU}(2)$  и  $\mathbb{SO}(3)$  не изоморфны. Иногда говорят, что группа  $\mathbb{SU}(2)$  является прямым произведением групп  $\mathbb{S}(2)$  и  $\mathbb{Z}_2$ , где  $\mathbb{Z}_2$  - циклическая группа, состоящая из двух элементов: 1 и -1.

В общем случае, когда у каждой точки образа имеется несколько прообразов, отображение называют накрытием. Таким образом, группа  $\mathbb{SU}(2)$  является накрытием группы  $\mathbb{SO}(3)$ , в данном случае двулистное. Пример двулистного накрытия известен из теории функций

комплексной переменной. Риманова поверхность функции  $\sqrt{z}$  представляет собой два экземпляра комплексной плоскости, разрезанных, например, вдоль отрицательной действительной полуоси. Верхний берег разреза каждого экземпляра склеивается с нижним берегом разреза другого экземпляра. Если полученную поверхность гладко отобразить на комплексную плоскость, получится двулистное накрытие. Каждый лист соответствует своей ветви квадратного корня. Примером бесконечнолистного накрытия является отображение числовой оси на окружность, при котором ось "наматывается" на окружность. Каждой точке окружности отвечает бесконечное число прообразов, поэтому данное отображение - бесконечнолистное накрытие. Двумерным примером бесконечнолистного накрытия служит отображение плоскости на тор. Плоскость делится на одинаковые прямоугольные клетки, противоположные стороны каждого прямоугольника склеиваются. Каждой точке тора соответствует счетное множество дискретных прообразов на плоскости

Оператором Казимира называется квадратичная по генераторам форма, которая коммутирует со всеми генераторами. Линейным преобразованием генераторов  $\hat{Q}_i$  эту форму всегда можно привести к виду  $\hat{Q}_j^2$ . В этом случае условие  $[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^2] = 0$  означает, что структурные константы  $t_{ikn}$  антисимметричны не только по первой паре индексов, но и по последней. Другими словами, в этом случае  $t_{ikn}$  является абсолютно антисимметричным тензором. Для алгебры размерности три абсолютно антисимметричный тензор обязан быть пропорциональным  $\epsilon_{ijk}$ . Для групп более высокой размерности структурные константы  $t_{ikn}$  не фиксированы столь жестко. Приведем в качестве примера генераторы группы  $\mathbb{SU}(3)$ :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$



где генераторы являются эрмитовыми матрицами. Они называются матрицами Гелл-Манна. Для этих генераторов структурные константы абсолютно антисимметричны.

Задача 9.2.5. Проверить, что для матриц (9.26) структурные константы абсолютно антисимметричны.

Задача 9.2.6. Чему равен оператор Казимира  $\hat{Q}_j^2$  для матриц (9.26)?

Экспоненциальное представление (9.16) показывает, что элементы группы Ли  $\mathbb{G}$  могут быть сведены к ее генераторам. Поэтому и правила перемножения элементов группы Ли  $\mathbb{G}$  могут быть выражены через свойства генераторов. Они восстанавливаются из коммутационных соотношений алгебры Ли этой группы (9.17). Таким образом, мы приходим к задаче построения матрицы  $\hat{Z}$ , удовлетворяющей соотношению

$$\exp(\hat{X}) \exp(\hat{Y}) = \exp(\hat{Z}) \quad (9.28)$$

Здесь матрицы  $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  записываются, как линейные комбинации  $\hat{X} = x_j \hat{Q}_j, \hat{Y} = y_j \hat{Q}_j, \hat{Z} = z_j \hat{Q}_j$  генераторов  $Q_j$  некоторой алгебры Ли с перестановочными соотношениями (9.17). Хотя решение этой задачи в принципе существует, смотри раздел 9.4.2, его применение к конкретным задачам может вызывать большие технические трудности.

Задача 9.2.7. Найти из соотношения (9.28)  $z_i$  во втором порядке по  $x_i, y_i$ .

Задача 9.2.8. Установить, к чему приводит соотношение (9.28) для группы  $\text{SU}(2)$ .

### 3.9.5 9.3 Представления групп Ли

В предыдущем разделе мы рассматривали матричные представления групп Ли, которые являются минимальными или, как еще говорят, фундаментальными. В то же время группы Ли (алгебры Ли) допускают гораздо более широкий класс представлений, которые могут иметь сколь угодно большой порядок. Более того, даже неприводимые представления групп Ли (алгебр Ли) могут иметь сколь угодно большой порядок. Продемонстрируем сказанное на примере группы вращений трехмерного пространства, алгебра генераторов которой задается правилом коммутации (9.25). Будем рассматривать матричные представления генераторов  $\hat{J}_i$  произвольного порядка.

Построим операторы  $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ . Как следствие соотношений (9.25), находим

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \hat{J}_+, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -\hat{J}_- \quad (9.29)$$

Оператор  $\hat{J}^2$  коммутирует с  $\hat{J}_3$ , поэтому можно выбрать базис представления из общих собственных векторов этих операторов с собственными числами  $\lambda$  и  $m$ . Обозначим эти собственные векторы символом  $|\lambda m\rangle$ , где  $\lambda$  и  $m$ :

$$\hat{J}^2 |\lambda m\rangle = \lambda |\lambda m\rangle, \quad \hat{J}_3 |\lambda m\rangle = m |\lambda m\rangle \quad (9.30)$$

Тогда мы находим с помощью соотношения (9.29), что

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 \hat{J}_+ |\lambda m\rangle &= (m+1) |\lambda m\rangle \\ \hat{J}_3 \hat{J}_- |\lambda m\rangle &= (m-1) |\lambda m\rangle \end{aligned}$$

Таким образом, действие операторов  $\hat{J}_+$  и  $\hat{J}_-$  на  $|\lambda m\rangle$  дает вектор, который имеет собственное значение  $\hat{J}_3$ , сдвинутый на единицу по сравнению с  $|\lambda m\rangle$ . Поэтому естественно называть оператор  $\hat{J}_+$  повышающим, а оператор  $\hat{J}_-$  понижающим. Дальнейшее применение повышающего или понижающего оператора позволяет сдвинуть  $m$  на произвольное целое число.

В нашем случае  $\hat{\mathbf{J}}^2$  - эрмитовский неотрицательно определенный оператор, поэтому  $\lambda$  - вещественное положительное число. Далее, произведения  $\hat{J}_+\hat{J}_-$  и  $\hat{J}_-\hat{J}_+$  также эрмитовы и неотрицательно определены, поскольку  $\hat{J}_+$  и  $\hat{J}_-$  эрмитово сопряжены друг другу. С другой стороны

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_3^2 - \hat{J}_3, \quad \hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3$$

откуда

$$\begin{aligned} \hat{J}_-\hat{J}_+|\lambda m\rangle &= (\lambda - m^2 - m)|\lambda m\rangle \\ \hat{J}_+\hat{J}_-|\lambda m\rangle &= (\lambda - m^2 + m)|\lambda m\rangle \end{aligned} \quad (9.31)$$

Поэтому числа  $\lambda - m^2 \pm m$  не могут стать отрицательными. Отсюда следует, что есть крайние векторы, один из которых  $|\lambda m_{\min}\rangle$  обращается в нуль повышающим оператором, а другой  $|\lambda m_{\max}\rangle$  - понижающим:

$$\hat{J}_+|\lambda m_{\max}\rangle = 0, \quad \hat{J}_-|\lambda m_{\min}\rangle = 0$$

Из соотношения 9.31) находим

$$\lambda - m_{\max}^2 - m_{\max} = 0 = \lambda - m_{\min}^2 + m_{\min}$$

Решение этой системы можно записать в виде  $m_{\max} = j$ ,  $m_{\min} = -j$ ,  $\lambda = j(j+1)$ . Поскольку разность  $m_{\max} - m_{\min} = 2j$  должна быть целым числом, само  $j$  является целым или полуцелым числом.

Таким образом, мы приходим к выводу, что имеются конечные представления алгебры Ли, которая задается коммутационным соотношением (9.25). Каждое из этих представлений характеризуется целым или полуцелым числом  $j$ ,  $\hat{\mathbf{J}}^2 = j(j+1)$ . Базисом представления являются  $2j+1$  векторов  $|\lambda m\rangle$ ,  $m = -j, \dots, j$ , то есть размерность представления равна  $2j+1$ . В этом базисе  $\hat{J}_3$  диагонален (его собственное число равно  $m$ ), а  $\hat{J}_{\pm}$  недиагональны. Найденное представление является неприводимым, поскольку приведенная процедура позволяет любое конечномерное представление привести к найденному виду.

Чтобы разобраться с вопросом, все ли значения  $j$  допустимы, мы восстановим с помощью экспоненциальной формулы элемент группы  $\mathbb{SO}(3)$ , который является вращением вокруг оси 3 на угол  $\theta$ :  $\exp(i\theta\hat{J}_3) = \exp(im\theta)$ . При целых  $m$  получается периодическая по  $\theta$  с периодом  $2\pi$  функция, как и должно быть. При полуцелых  $m$  период удваивается, поскольку в этом случае  $\exp(2\pi m) = -1$ . Отсюда следует, что набор матриц четного порядка, отвечающих полуцелым  $j$ , не является представлением группы  $\mathbb{SO}(3)$ . Другая формулировка того же факта: неприводимые унитарные представления группы  $\mathbb{SO}(3)$  всегда имеют нечетную размерность.

Что касается полуцелых  $j$ , они соответствуют неприводимым представлениям унитарной группы  $\mathbb{SU}(2)$ . В квантовой механике эти представления описывают частицу с полуцелым спином и называются спинорными. Вспомним про гомоморфизм  $\mathbb{SU}(2) \rightarrow \mathbb{S}(3)$ , который оказался двулистным накрытием. Другими словами, элементу группы  $\mathbb{S}(3)$  соответствуют два прообраза группы  $\mathbb{SU}(2)$  с различными знаками. Это и допускает изменение знака при вращении на угол  $2\pi$ . Отметим при этом, что любая физическая наблюдаемая величина не меняется при вращении на угол  $2\pi$ , поскольку все такие величины являются четными по спинорному представлению.

Представление с  $j = 0$  соответствует одномерному базису, который является скаляром (или псевдоскаляром, если он меняет знак при инверсии). Представление с  $j = 1/2$  дается матрицами Паули  $\sigma_i/2$ , причем повышающий и понижающий операторы равны

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представление с  $j = 1$  соответствует матрицам (9.24), преобразованному к базису, где

$$\hat{J}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.32)$$

Такое представление называют векторным, поскольку эквивалентно представлению, которое порождается вращениями вектора  $A_i : A_i \rightarrow O_{ik}A_k$ .

Задача 9.3.1. Найти векторы, которые являются собственными для оператора  $\hat{J}_3$ .

Задача 9.3.2. Найти в базисе, соответствующем (9.32), повышающий и понижающий операторы. Проверить выполнение соотношений (9.29).

В дальнейшем вместо обозначения  $|\lambda m\rangle$  мы будем использовать общепринятое обозначение  $|jm\rangle$ . Соотношения (9.31) с учетом  $\hat{J}_-^\dagger = \hat{J}_+$  позволяют найти с точностью до фазы матричные элементы  $\hat{J}_+$  и  $\hat{J}_-$ . Подставляя  $\lambda = j(j+1)$ , находим

$$\begin{aligned} \left| \langle j(m-1) | \hat{J}_- | jm \rangle \right| &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \\ \left| \langle j(m+1) | \hat{J}_+ | jm \rangle \right| &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \end{aligned}$$

Раскладывая на множители, получаем выражение

$$\begin{aligned} \left| \langle j(m-1) | \hat{J}_- | jm \rangle \right| &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \\ \left| \langle j(m+1) | \hat{J}_+ | jm \rangle \right| &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \end{aligned}$$

обычно приводимое в справочниках.

Поскольку угловой момент  $\hat{\mathbf{L}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$  подчиняется тому же правилу коммутации (9.25), представления  $\hat{\mathbf{L}}$  могут быть классифицированы, как и выше, в рамках числа  $l$ , которое определяет собственное значение  $\hat{L}^2 = l(l+1)$ . Разумеется, значения  $l$  являются целыми. Базисом представления с собственными числами  $l, m$  являются известные угловые функции  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ :

$$\hat{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}, \quad \hat{L}_z Y_{lm} = mY_{lm}$$

Отметим, что (в трех измерениях) Лапласиан некоторой функции  $f$  может быть записан в виде

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) - \frac{1}{r^2} \hat{L}^2 f$$

где  $r$  - радиус. Именно это представление позволяет свести уравнение Шрёдингера в центральном поле к задаче с одной переменной  $r$  и центробежным потенциалом  $\propto l(l+1)/r^2$ .

Базисами представлений  $l, m$  могут служить неприводимые тензоры, которые являются обобщением понятия вектор. Примерами тензора второго ранга является квадрупольный момент или тензор инерции. Тензор второго может быть представлен, как объект с двумя индексами:  $A_{ik}$ . При вращениях пространства он преобразуется, как

$$A_{ik} \rightarrow O_{ij} O_{km} A_{jm}$$

Можно сказать, что тензор порождает представление группы вращений, которое является прямым произведением векторных представлений. Но такое представление является приводимым. Чтобы порождаемое тензором представление было неприводимым, он должен обладать двумя свойствами: быть симметричным и бесследовым. В этом случае тензор имеет пять независимых компонент и порождаемое им представление эквивалентно представлению с  $l = 2$ .

Задача 9.3.3. Найти, какие комбинации компонент неприводимого тензора второго ранга являются собственными функциями генератора вращений  $\hat{J}_3$  с собственными числами  $m = -2, -1, 0, 1, 2$ .

Представленная конструкция допускает обобщение на тензор произвольного ранга  $l$ , такой тензор имеет  $l$  индексов  $A_{ikp\dots}$  и преобразуется по прямому произведению группы вращений:

$$A_{ikp\dots} \rightarrow O_{ij} O_{ks} O_{pn\dots} A_{jsn\dots}$$

Неприводимый тензор  $A_{ikp\dots}$  должен быть симметричным по всем парам индексов и быть бесследовым, то есть свертка по любой паре индексов должна быть равна нулю. Число независимых компонент неприводимого тензора ранга  $l$  равно  $2l + 1$ , что как раз равно размерности представления с орбитальным числом  $l$ . Поэтому такой тензор является базисом представления с орбитальным числом  $l$ .

Задача 9.3.4. Доказать, что число независимых компонент симметричного бесследового тензора ранга  $l$  равно  $2l + 1$ .

Мы установили на двух разных языках набор неприводимых представлений группы  $\mathbb{SO}(3)$ . Каждое из них характеризуется своим целым числом  $l$ . Любое приводимое представление группы  $\mathbb{SO}(3)$  можно разложить в прямую сумму неприводимых представлений. Это означает, что матрица  $\hat{D}$  неприводимого представления в результате унитарного преобразования  $\hat{D} \rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U}$  ( $\hat{U}$  - унитарная матрица) может быть сведена к блочнодиагональной форме, каждый из блоков которой преобразуется по своему неприводимому представлению. Очевидно, в данном приводимом представлении может содержаться целое число блоков, преобразующихся по неприводимому представлению с числом  $l$ .

Разложение приводимого представления группы в прямую сумму неприводимых представлений является стандартной задачей теории групп. Как и для конечных групп, разложение на неприводимые представления можно осуществить при помощи характеров. Продемонстрируем сказанное на примере группы  $\mathbb{SO}(3)$ .

Найдем характеры неприводимых представлений группы  $\mathbb{SO}(3)$ . Пусть  $\hat{D}^{(l)}$  - матрица представления группы  $\mathbb{SO}(3)$  ранга  $l$ . Рассмотрим вращение вокруг третьей оси на угол  $\alpha$  и вычислим его характер. Проще всего это сделать в базисе  $|lm\rangle$ , где матрица  $\hat{D}^{(l)}$  диагональна:

$$\hat{D}^{(l)}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{il\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i(l-1)\alpha} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-il\alpha} \end{pmatrix}$$

Вычисляем характер этого представления, который сводится к сумме экспонент (геометрической прогрессии)

$$\chi^{(l)}(\alpha) = \sum_{k=-l}^l e^{ik\alpha} = \frac{\sin[(l+1/2)\alpha]}{\sin(\alpha/2)} \quad (9.33)$$

Поскольку характер не зависит от выбора базиса, выражение (9.33) справедливо для произвольного неприводимого представления.

Задача 9.3.5. Убедиться, что выражение (9.33) дает характер представления, которое порождается вращением вектора.

Соотношение ортогональности характеров в непрерывной группе в качестве усреднения вместо суммирования по элементам группы содержит интегрирование:

$$\langle \chi^{(l)} \chi^{(k)} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^{(l)}(\alpha) \chi^{(k)}(\alpha) = \delta_{lk} \quad (9.34)$$

Задача 9.3.6. Проверить выполнение соотношения (9.34).

Из ортогональности характеров можно вывести разложение приводимого представления группы  $\mathbb{SO}(3)$ . А именно, если известен характер представления  $\chi(\alpha)$ , то количество содержащихся в нем неприводимых представлений ранга  $l$  равно

$$K_l = \langle \chi^* \chi^{(l)} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^*(\alpha) \chi^{(l)}(\alpha) \quad (9.35)$$

В силу действительности  $\chi^{(l)}(\alpha)$  и целого значения  $K_l$  знак комплексного сопряжения в (9.35) можно опустить.

Задача 9.3.7. Какие неприводимые представления содержатся в представлении, базисом которого является произвольный тензор второго ранга  $A_{ik}$ ?

Рассмотрим теперь прямое произведение двух неприводимых представлений группы  $\mathbb{SO}(3)$ . Оно не является неприводимым и может быть разложено в прямую сумму неприводимых представлений группы  $\mathbb{SO}(3)$ . Такое разложение называется разложением Клебша-Гордана. Найдем представления, которые содержатся в прямом произведении представлений  $\hat{D}^{(k)}$  и  $\hat{D}^{(n)}$ . Характер прямого произведения матриц равен произведению характеров этих матриц. Поэтому характер прямого произведения равен

$$\chi(\alpha) = \frac{\sin[(k + 1/2)\alpha] \sin[(n + 1/2)\alpha]}{\sin^2(\alpha/2)} \quad (9.36)$$

Подставляя это значение в (9.35), находим

$$K_l = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\pi} \sin[(k + 1/2)\alpha] \sin[(n + 1/2)\alpha] \chi^{(l)}(\alpha) \quad (9.37)$$

Анализируя эти интегралы, можно показать, что они отличны от нуля при  $|k - n| \leq l \leq k + n$ , при этом все  $K_l = 1$ . Таким образом, все неприводимые представления входят по одному разу.

Задача 9.3.8. Показать, что интегралы (9.37) равны единице при  $|k - n| \leq l \leq k + n$  и нулю вне этого интервала.

Приведенный анализ группы  $\mathbb{SO}(3)$  может быть в значительной мере обобщен и на другие группы Ли. Рассмотрим группу  $\mathbb{SU}(2)$ , фундаментальное представление которой (то есть представление с наименьшей размерностью) представляется матрицами  $2 \times 2$ . Возможна различная параметризация этого фундаментального представления, например экспоненциальное (9.22) или спинорное (9.23). Неприводимые представления группы  $\mathbb{SU}(2)$  классифицируются по числу  $j$ , которое дает собственное значение  $j(j + 1)$  оператора Казимира на данном представлении. При целых  $j$  представления группы изоморфны представлениям группы  $\mathbb{S}(3)$ , а при полуцелом  $j$  представления характерны для группы  $\mathbb{SU}(2)$ .

Для неприводимых представлений группы  $\mathbb{SU}(2)$  с числом  $j$  можно получить характеры представлений, получающиеся для элементов, которые получаются при вращении на угол  $\alpha$  вокруг третьей оси. Они имеют такой же вид (9.33),

$$\chi^{(j)}(\alpha) = \sum_{k=-j}^j e^{ik\alpha} = \frac{\sin[(j+1/2)\alpha]}{\sin(\alpha/2)} \quad (9.38)$$

но теперь угловое число  $j$  может быть полуцелым.

Задача 9.3.9. Проверить выполнение (9.38) для фундаментального представления, заданного экспоненциальной (9.22) или спинорной (9.23) параметризацией.

Имеет место свойство ортогональности, аналогичное (9.34), но только интегрирование теперь надо вести до  $4\pi$ :

$$\langle \chi^{(l)} \chi^{(k)} \rangle = \int_0^{4\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^{(l)}(\alpha) \chi^{(k)}(\alpha) = \delta_{lk} \quad (9.39)$$

Задача 9.3.10. Проверить выполнение соотношения (9.39).

Как и для группы  $\mathbb{SO}(3)$ , произвольное представление группы  $\mathbb{SU}(2)$  можно разложить на прямую сумму неприводимых представлений. Чтобы понять, какие неприводимые представления содержатся в данном, можно использовать условие ортогональности (9.39), которое дает для числа неприводимых представлений с угловым числом  $j$ :

$$K_j = \langle \chi^* \chi^{(j)} \rangle = \int_0^{4\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^*(\alpha) \chi^{(j)}(\alpha) \quad (9.40)$$

аналогичное (9.35). Оно приводит к тому же правилу для разложения Клебша-Гордана прямого произведения представлений с угловыми числами  $k$  и  $n$ . Это прямое произведение содержит по одному неприводимому представлению с числами  $|k-n| \leq j \leq k+n$ .

В частности, прямое произведение двух фундаментальных представлений группы  $\mathbb{SU}(2)$  содержит в себе одно представление с  $j=0$  (скалярное представление) и одно представление с  $j=1$  (векторное представление). Эта ситуация может быть выражена на языке кватернионов, смотри раздел 9.4.1.

Несколько слов о группе  $\mathbb{SU}(3)$ . Ее фундаментальное представление определяется матрицами  $3 \times 3$ , смотри (9.27). Таким образом, базис фундаментального представления трехмерен. В квантовой хромодинамике этот базис соответствует кваркам. В общем случае неприводимый базис задается двумя числами  $p, q$ , которым соответствует число ковариантных и контравариантных индексов базиса представления, пробегающих значения от 1 до 3. Базис должен быть симметричен по всем ковариантным индексам и всем контравариантным индексам, а также иметь нулевой след. В частности, для  $p, q = 1, 1$  мы находим  $3 \cdot 3 - 1$  (-1 из-за нулевого следа), то есть восемь, независимых компонент. В квантовой хромодинамике этот базис соответствует глюонам. В общем случае базис неприводимого представления с числами  $p, q$  имеет  $(p+1)(q+1)(p+q+2)/2$  независимых компонент.

### 3.9.6 9.4 Справочные материалы к гла-

Be

#### 3.9.7 9.4.1 Матрицы Паули

Матрицами Паули  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ , называют матрицы  $2 \times 2$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.41)$$

Матрицы Паули являются бесследовыми и эрмитовыми. Для них справедливы соотношения  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$  (квадраты матриц Паули равны единичной матрице) и

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 \quad (9.42)$$

Приведенные соотношения можно переписать в компактном виде

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (9.43)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Здесь  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, компоненты которого равны 1, если  $i = j$ , и ноль в остальных позициях, а  $\epsilon_{ijk}$  - абсолютно антисимметричный тензор, компоненты которого меняют свой знак при перестановке любой пары индексов. Из определения следует, что отличны от нуля только те компоненты, у которых все три индекса различны. Тензор  $\epsilon_{ijk}$  нормирован условием  $\epsilon_{123} = 1$ .

Из выражения (9.43) следует соотношение для коммутаторов

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (9.44)$$

Таким образом, матрицы Паули реализуют представление генераторов некоторой группы, в данном случае группы  $SU(2)$ . Именно поэтому они являются эрмитовыми и бесследовыми.

Матрицы Паули вместе с единичной матрицей составляют полный набор, по которому можно разложить произвольную матрицу  $2 \times 2$ :  $a = a_0 + a_i\sigma_i$ . Если матрица  $a$  является эрмитовой, то все коэффициенты  $a_0, a_i$  являются действительными. Однозначное соответствие матрицы  $a$  и четырех чисел  $a_0, a_i$  позволяет ввести на пространстве  $a_0, a_i$  произведение. А именно, рассмотрим произведение матриц  $a = a_0 + a_i\sigma_i$  и  $b = b_0 + b_i\sigma_i$ . В соответствии с (9.43) это произведение записывается в виде

$$ab = (a_0b_0 + a_ib_i) + (b_0a_k + a_0b_k + i\epsilon_{ijk}a_ib_j)\sigma_k \quad (9.45)$$

Коэффициенты при единичной матрице и матрицам Паули в (9.45) можно рассматривать, как компоненты произведения  $(a_0, a_i)$  и  $(b_0, b_i)$ . Такая алгебра называется кватернионной.

### 3.9.8 9.4.2 Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа

Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа дает принципиальный ответ на вопрос о том, как построить коэффициенты экспоненциального разложения элемента группы Ли, который является произведением двух других элементов группы Ли, по коэффициентам их экспоненциальных разложений. На матричном языке речь идет о соотношении

$$\exp(\hat{X})\exp(\hat{Y}) = \exp(\hat{Z}) \quad (9.46)$$

Здесь матрицы  $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  записываются, как линейные комбинации  $\hat{X} = x_j\hat{Q}_j, \hat{Y} = y_j\hat{Q}_j, \hat{Z} = z_j\hat{Q}_j$  генераторов  $Q_j$  некоторой алгебры Ли с перестановочными соотношениями

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_l] = t_{jlk}\hat{Q}_k \quad (9.47)$$

Задача состоит в выражении из соотношения (9.46) коэффициентов разложения  $z_i$  через  $x_i$  и  $y_i$ .

Введем матрицы размером  $\dim \mathbb{G} \times \dim \mathbb{G}$  с матричными элементами

$$\mathcal{X}_{ij} = t_{jni}x_n \quad (9.48)$$

построенные по коэффициентам разложения  $\mathbf{x}$  оператора  $\hat{X}$  по генераторам  $Q_j$ . Выражение (9.48) представляет собой разложение по образующим матрицам  $Q_n$  с компонентами  $t_{jni}$ , которые подчиняются тем же коммутационным правилам (9.47):

$$[Q_j, Q_l] = t_{jlk} Q_k \quad (9.49)$$

Это свойство легко проверить, используя тождество Якоби

$$t_{ijn}t_{nkm} + t_{jkn}t_{nim} + t_{kin}t_{njm} = 0 \quad (9.50)$$

Введем еще одну вспомогательную конструкцию. Определим для операторов (матриц)  $\hat{X}_0$  и  $\hat{S} = s_j \hat{Q}_j$  зависящий от 'времени'  $t$  оператор  $\hat{X}(t) = x_j(t) Q_j$ :

$$\hat{X}(t) = \exp(t\hat{S}) \hat{X}_0 \exp(-t\hat{S}) \quad (9.51)$$

который соответствует переходу к Гайзенберговскому представлению в квантовой теории поля. Очевидно,  $\hat{X}(t)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt} \hat{X} = [\hat{S}, \hat{X}] \quad (9.52)$$

Коммутатор в правой части (9.52) записывается в виде

$$[\hat{S}, \hat{X}] = x_l [\hat{S}, \hat{Q}_l] = s_j t_{ljm} x_l Q_m \quad (9.53)$$

где  $t_{jlk}$  - структурные константы, заданные соотношением (9.47). Таким образом, из уравнения (9.52) следует

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{S} \mathbf{x} \quad (9.54)$$

где мы ввели "матричное" обозначение, матрица  $\mathcal{S}$  определяется набором  $s_j$  и структурными константами  $t_{ljm}$  в соответствии с (9.48). Уравнение (9.54) имеет очевидное решение

$$\mathbf{x} = \exp(t\mathcal{S}) \mathbf{x}_0 \quad (9.55)$$

которое и определяет эволюцию  $\hat{X}$ .

Возвращаясь к исходной формуле (9.46), введем в нее 'время'  $t$ :

$$\exp(\hat{X}) \exp(t\hat{Y}) = \exp[\hat{Z}(t)] \quad (9.56)$$

Нас интересует значение оператора  $\hat{Z}$  при  $t = 1$ . Найдем дифференциальное уравнение, которому подчиняется  $\hat{Z}(t)$ . Для этого продифференцируем уравнение (9.56) по  $t$ , что дает

$$\frac{d \exp[\hat{Z}(t)]}{dt} = \exp(\hat{Z}) \hat{Y} \quad (9.57)$$

то есть дифференциальное уравнение на  $\exp(\hat{Z})$ .

Однако дифференцирование экспоненты  $\exp[\hat{Z}(t)]$  при некоммутативных  $\hat{Z}(t)$  и  $d\hat{Z}(t)/dt$  требует некоторых дополнительных построений. Прежде всего заметим, что экспонента  $\exp[\hat{Z}(t)]$  представима в виде произведения инфинитезимальных операторов:

$$\exp(\hat{Z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \hat{Z}/n]^n$$

Дифференцирование правой части этого выражения по правилу Лейбница приводит к интегральной сумме, превращающейся в пределе  $n \rightarrow \infty$  в интеграл:



$$\frac{d \exp(\hat{Z})}{dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} [1 + \hat{Z}/n]^{n-1-m} \frac{d\hat{Z}}{dt} (1 + \hat{Z}/n)^m = \int_0^1 d\tau \exp[(1-\tau)\hat{Z}] \frac{d\hat{Z}}{dt} \exp[\tau\hat{Z}]$$

где  $\tau = m/n$ . Теперь мы используем для возникшей здесь комбинации  $\exp(-\tau\hat{Z})(d\hat{Z}/dt)\exp(\tau\hat{Z})$  представление (9.55), что дает

$$\begin{aligned} \frac{d \exp(\hat{Z})}{dt} &= \exp(\hat{Z}) \int_0^1 d\tau \exp(\tau \mathcal{Z}) \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{Q}} \\ &= \exp(\hat{Z}) \frac{\exp(\mathcal{Z}) - 1}{\mathcal{Z}} \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (9.58)$$

где матрица  $\mathcal{Z}$  строится по числам  $\mathbf{z}$  также, как и матрица  $\mathcal{S}$  по  $\mathbf{s}$  в (9.54).

Подставляя выражение (9.58) в уравнение (9.57), находим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{g}[\exp(\mathcal{Z})]\mathbf{y} \\ \mathbf{g}(y) &= \frac{y \ln y}{y-1} \end{aligned} \quad (9.60)$$

Из равенства (9.56) и того факта, что матрицы  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  имеют те же коммутационные свойства, что и  $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ , следует

$$\exp(\mathcal{Z}) = \exp(\mathcal{X}) \exp(t\mathcal{Y}) \quad (9.61)$$

Уравнение (9.59) интегрируется с учетом начального условия  $\hat{Z} = \hat{X}$  при  $t = 0$  и мы приходим к окончательному выражению, которое получается при  $t = 1$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \int_0^1 dt \mathbf{g}(e^{\mathcal{X}} e^{t\mathcal{Y}}) \mathbf{y} \quad (9.62)$$

Это и есть формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа. Она эффективно работает, если удастся явно найти выражение для аргумента функции  $\mathbf{g}$  (9.60).

Заметим, что для того, чтобы использовать формулу Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа (9.62), достаточно, чтобы операторы  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  принадлежали некоторой замкнутой относительно операции коммутации алгебре, не обязательно являющейся алгеброй Ли. Именно в таком качестве формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа часто используется в задачах квантовой механики и статистической физики для распутывания различных операторных экспонент.

**Задача 9.4.1.** Выразить произведение  $\exp(a) \exp(a^\dagger)$  в виде экспоненты некоторого оператора, где  $a, a^\dagger$  - операторы уничтожения и рождения бозечастиц.

**Задача 9.4.2.** Найти  $\exp(\hat{Z})$  в выражении (9.46), если  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  образуют алгебру лестничного типа:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \lambda \hat{Y}$$

## 4 Методы для задач по Колесниковой

### 4.1 Методы для задач по Колесниковой

(вот это постепенно и буду прорабатывать.)

#### 4.1.1 Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью

Сформулированы условия, позволяющие по матрице коэффициентов при старших производных заданного уравнения определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду. Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{k=1, m=1}^{k=n, m=n} a_{km}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + f(x, u, \nabla u) = 0.$$

Уравнения делятся на три типа. Каждый тип имеет свой так называемый канонический вид и описывает свой класс физических процессов.

Тип уравнения вида  $\sum_{k=1, m=1}^{k=n, m=n} a_{km}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + f(x, u, \nabla u) = 0$ ,  $a_{km} = a_{mk}$ , при  $n > 2$  определяется в каждой точке отдельно.

Говорят, что уравнение имеет канонический вид в точке  $x_0$ , если все  $a_{mk} = 0$ ,  $k \neq m$ , т. е. уравнение имеет вид  $\sum_{k=1}^{k=n} a_k(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x_0, u, \nabla u) = 0$ .

Так как физические процессы, описываемые уравнениями разных типов, различны, то, как только описана модель процесса, желательно знать тип получившегося уравнения.

Если уравнение приведено к каноническому виду, то тип определяется следующим образом.

• Если все коэффициенты отличны от 0 и одного знака, то уравнение принадлежит к эллиптическому типу, например, уравнение Пуассона:

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x)$$

2 • Если все коэффициенты отличны от 0, но, по крайней мере, два разного знака, то уравнение принадлежит к гиперболическому типу, например, волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x, t).$$

3 • Если хотя бы один коэффициент равен 0, уравнение принадлежит к параболическому типу, например, уравнение теплопроводности (уравнение диффузии):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t).$$

Уравнение приводится к каноническому виду практически

$$k = n, m = n$$

так же, как квадратичная форма  $\sum_{k=1, m=1}^{k=n, m=n} a_{km}(x_0) x_k x_m$  - это не самая простая работа. Можно ли определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду?

Так как при невырожденных линейных преобразованиях сохраняется ранг матрицы и количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов, то можно определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду.

• Если определитель матрицы  $\|a_{km}\|$  отличен от 0 в точке, то

а) уравнение эллиптического типа, если матрица или положительно определена, или отрицательно определена;

б) уравнение гиперболического типа, если матрица не положительно определена и не отрицательно определена.

2 • Если определитель матрицы  $a_{km}$  равен 0 в точке, то уравнение является уравнением параболического типа.

### Задача о колебании полубесконечной струны

#### Пример 1.

Решите задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + 90 \cos(2x + 9t), x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = 8 \cos 3x - 5 \cos 2x, u_t|_{t=0} = 0, x \geq 0, \\ u_x|_{x=0} = 18t - 2 \sin 9t, t \geq 0. \end{cases}$$

**Частное решение**  $u_{\text{частн}} = c \cos(2x + 9t)$ , а также  $\square \cos(2x + 9t) = -45 \cos(2x + 9t)$  (в даламбере  $a = 9$  из условия), поэтому

$$\begin{aligned} -c \cdot 45 \cos(2x + 9t) &= 90 \cos(2x + 9t) & c &= -2 \\ \Rightarrow u(x, t) &= f(x + 3t) + g(x - 3t) - 2 \cos(2x + 9t). \end{aligned}$$

**Первый способ (без перехода к однородному уравнению и без применения формулы Даламбера)** I. Решим задачу Коши. Подставим в 1ю строчку начальных условий:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2 \cos 2x = 8 \cos 3x - 5 \cos 2x, x \geq 0, \\ f'(x) - g'(x) + 6 \sin 2x = 0, x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) + 3 \cos 2x = 8 \cos 3x, \\ f(x) - g(x) - 3 \cos 2x = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 4 \cos 3x + \frac{C}{2}, x \geq 0 \\ g(x) = 4 \cos 3x - 3 \cos 2x - \frac{C}{2}, x \geq 0 \end{cases}$$

Функции найдены только для неотрицательных значений аргумента, а отсюда непосредственно следует, что функции  $f(x + 3t), g(x - 3t)$  тоже найдены для неотрицательных значений аргумента (????), т. е.

$$\begin{aligned} f(x + 3t) &= 4 \cos 3(x + 3t) + \frac{C}{2}, \quad x + 3t \geq 0 \\ g(x - 3t) &= 4 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t) - \frac{C}{2}, \quad x - 3t \geq 0 \end{aligned}$$

Итак, найдены  $f(x + 3t), g(x - 3t)$  для  $x - 3t \geq 0, x + 3t \geq 0$  — это внутри угла  $AOB$ .

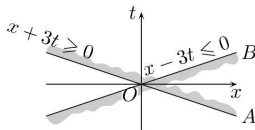


Рис. 1

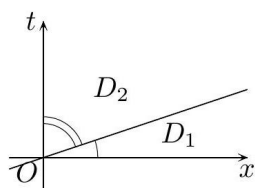


Рис. 2

Но мы ищем решения для  $t \geq 0, x \geq 0$ . Очевидно, что  $f(x + 3t)$  определилось во всей интересующей нас области, а  $g(x - 3t)$  только внутри угла  $D_1$ . Решение, естественно, определилось тоже только внутри угла  $D_1$  - оно определилось только начальными условиями Коши:

$$u(x, t)_{D_1} = 4 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t) + 4 \cos 3(x + 3t) - 2 \cos(2x + 9t), \\ x - 3t \geq 0, \quad x + 3t \geq 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

II. Теперь воспользуемся второй строчкой краевого условия:

$$u_x|_{x=0} = 18t - 2 \sin 9t, \quad t \geq 0.$$

Подставим условие в формулу решения  $u(x, t) = f(x + 3t) + g(x - 3t) - 2 \cos(2x + 9t)$ :

$$u_x|_{x=0} = 18t - 2 \sin 9t \\ 18t - 2 \sin 9t = f'(3t) + g'(-3t) + 4 \sin 9t$$

Видно, что аргумент у  $f$  неотрицателен, а функции  $f$  и  $g$  для неотрицательных значений аргумента определены из условий Коши. Аргумент у  $g$  неположителен - функция не известна, обозначим её  $g_1$ . Подставим известную функцию  $f$ :

$$18t - 2 \sin 9t = -12 \sin 9t + g'_1(-3t) + 4 \sin 9t \\ g'_1(-3t) = 18t + 6 \sin 9t \\ g'_1(\xi) = -6\xi - 6 \sin 3\xi, \quad -3t = \xi, \quad \xi \leq 0 \\ g_1(\xi) = -3\xi^2 + 2 \cos 3\xi + B, \quad \xi \leq 0.$$

Решение примет вид

$$u(x, t)_{D_2} = 4 \cos 3(x + 3t) - 3(x - 3t)^2 + 2 \cos 3(x - 3t) - 2 \cos(2x + 9t) + B + \frac{C}{2}, \\ x - 3t \leq 0, \quad x + 3t \geq 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

III. (??? потом додумаю сшивку!!!)

Теперь «сошьём» решения по характеристике  $x = 3t$  (т. к.  $f(x + 3t)$  одна и та же, то «сшить» надо только  $g(x - 3t)$  и  $g_1(x - 3t)$  при  $x = 3t$ , т. е.  $g(0)$  и  $g_1(0)$ ):

$$u(x, t)_{D_1}|_{x=3t} = u(x, t)_{D_2}|_{x=3t} \Leftrightarrow B + \frac{C}{2} + 2 = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{C}{2} - 1.$$

Ответ.

$$u(x, t) = -2 \cos(2x + 9t) + 4 \cos 3(x + 3t) + \begin{cases} 4 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t), & x - 3t \geq 0, \quad x \geq 0, t \geq 0; \\ 2 \cos 3(x - 3t) - 3(x - 3t)^2 - 1, & x - 3t < 0, \quad x \geq 0, t \geq 0. \end{cases}$$

**П р и м е ч а н и е.** Полученное решение задачи дважды непрерывно дифференцируемо внутри  $D_1$  и  $D_2$ , непрерывно по построению во всей первой четверти. Остался вопрос - является ли оно непрерывно дифференцируемым во всей четверти? Понятно, что надо проверить равенство первых и вторых производных  $g(\xi)$  и  $g_1(\xi)$  в 0:

$$\begin{cases} g'(\xi) = -12 \sin 3\xi + 6 \sin 2\xi, & g''(\xi) = -36 \cos 3\xi + 12 \cos 2\xi \\ g'_1(\xi) = -6\xi - 6 \sin 3\xi, & g''_1(\xi) = -6 - 18 \cos 3\xi \end{cases}$$

Видно, что первые и вторые производные одинаковы в 0 решение классическое.

На самом деле, характеристики - это линии так называемого слабого разрыва, т.е. при переходе через них могут «рваться» производные. Поэтому решение не всегда достаточно гладкое во всей первой четверти - можем получить в том или ином смысле обобщённое решение.

**Второй способ (с переходом к однородному уравнению и применением формулы Даламбера)** Конечно, можно применить формулу Даламбера сразу к исходной задаче, но никто этого не делает, потому что придётся вычислять двойной интеграл. Поэтому находим частное решение, делаем «сдвиг», а затем применяем формулу Даламбера уже к однородному уравнению:

$$v = u + 2 \cos(2x + 9t).$$

Новая задача примет вид

$$\begin{cases} v_{tt} = 9v_{xx}, x > 0, t > 0, \\ v|_{t=0} = 8 \cos 3x - 3 \cos 2x, \quad v_t|_{t=0} = -18 \sin 2x, x \geq 0, \\ v_x|_{x=0} = 18t - 6 \sin 9t, t \geq 0 \end{cases}$$

2 • Теперь, чтобы воспользоваться формулой Даламбера, надо знать, что решение задачи Коши в точке зависит от начальных условий на основании характеристического треугольника, т.е. на  $AB$  (см. рис. 3).

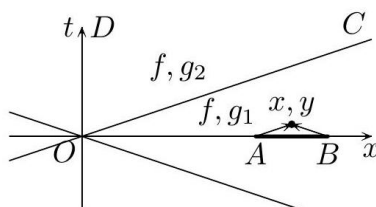


Рис. 3

Поэтому из рис. 3 видно, что формула Даламбера работает только внутри угла  $BOC$ , т.е. для  $x - 3t \geq 0, x \geq 0, t \geq 0$ .

Итак,

$$\begin{aligned} v(x, t)_{D_1} &= \frac{1}{2}(8 \cos 3(x + 3t) - 3 \cos 2(x + 3t) + 8 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t)) + \\ &+ \frac{3}{2}(\cos 2(x + 3t) - \cos 2(x - 3t)) = \\ &= 4 \cos 3(x + 3t) + 4 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t) \end{aligned}$$

Решение найдено лишь в части первой четверти. Теперь воспользуемся краевым условием.

3 • Внутри угла  $COD$  стоит другая задача - задача типа Гурса: известны значения  $v(x, t)$  на одной из характеристик и  $v_x$  на прямой, лежащей внутри угла характеристик. Решим эту задачу:

$$\begin{cases} v(x, t) = f(x + 3t) + g(x - 3t), t > 0, x > 0, \\ v(x, t)_{D_1}|_{x-3t=0} = 4 \cos 3(6t) + 1, \\ v_x|_{x=0} = 18t - 6 \sin 9t, t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

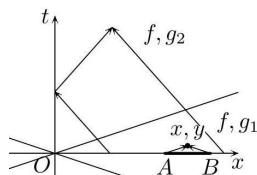
$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} f(6t) + g(0) = 4 \cos 3(6t) + 1, t \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0) + g(0) \equiv v(0, 0) = 5, \\ f'(3t) + g'(-3t) = 18t - 6 \sin 9t, t \geq 0 \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} f(\xi) = 1 + 4 \cos 3\xi - g(0), \xi \geq 0, \\ g'(-\xi) = 6\xi - 6 \sin 3\xi + 12 \sin 3\xi, \xi \geq 0 \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} f(\xi) = 1 + 4 \cos 3(\xi) - g(0), \xi \geq 0, \\ g(\xi) = -3\xi^2 + 2 \cos 3\xi + B, \xi \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow v(x, t)_{D_2} = \\
 &= 1 + 4 \cos 3(x + 3t) - g(0) - 3(x - 3t)^2 + 2 \cos 3(x - 3t) + B, \\
 &x + 3t \geq 0, \quad x - 3t \leq 0. \\
 &v(0, 0)_{D_2} = 1 + 4 - g(0) + 2 + B = 5 \iff -g(0) + B = -2.
 \end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned}
 u(x, t)_{D_2} &= \\
 &= -2 \cos(2x + 9t) + 4 \cos 3(x + 3t) + 2 \cos 3(x - 3t) - 3(x - 3t)^2 - 1, \\
 &x - 3t \geq 0, \quad x + 3t \geq 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

«Сшивать» решения по характеристике не надо!

В области  $D_1$  решением является сумма «прямой» и «обратной» волн, а в области  $D_2$  сумма «обратной» и отражённой от конца (см. рис. 4).



Ответ.

$$u(x, y) = -2 \cos(2x + 9t) + 4 \cos 3(x + 3t) + \begin{cases} 4 \cos 3(x - 3t) - 3 \cos 2(x - 3t), x - 3t \geq 0, x \geq 0, t \geq 0; \\ 2 \cos 3(x - 3t) - 3(x - 3t)^2 - 1, x - 3t \leq 0, x \geq 0, t \geq 0. \end{cases}$$

## Пример 2.

Найдите частное решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^{x-at}$$

**Решение** Заметим, что  $\square e^{x-at} = 0$ . Если будем искать решение в виде  $u_{\text{частн}} = cf(x, t)$ , то получим  $ca^2 e^{x-at} = ca^2 e^{x-at} + e^{x-at} \emptyset$ .

Поэтому воспользуемся вторым способом:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{частн}} &= f(t)e^x \Rightarrow f''(t)e^x = a^2 f(t)e^x + e^x e^{-at} \\
 f''(t) &= a^2 f(t) + e^{-at}.
 \end{aligned}$$

Как мы видим, для искомой функции  $f(t)$  имеет место резонанс:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{частн}} &= bte^{-at} \Rightarrow -2abe^{-at} + a^2 bte^{-at} = a^2 bte^{-at} + e^{-at} \\
 b &= -\frac{1}{2a} \Rightarrow u_{\text{частн}} = \left( C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} - \frac{1}{2a} te^{-at} \right) e^x.
 \end{aligned}$$

В качестве частного можно взять, например,  $u_{\text{частн}} = -\frac{1}{2a} te^{x-at}$ .

Ответ.  $u_{\text{частн}} = -\frac{1}{2a} te^{x-at}$ .

### Пример 3.

Найдите частное решение уравнения

$$9u_{tt} = u_{xx} + t \sin \frac{x}{3} + x \sin \frac{t}{3}.$$

**Решение** • Так как

$$\begin{aligned} \left(9 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) t \sin \frac{x}{3} &= \frac{1}{9} t \sin \frac{x}{3} \\ \left(9 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) x \sin \frac{t}{3} &= -x \sin \frac{t}{3} \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} u_{\text{частн}} &= at \sin \frac{x}{3} + bx \sin \frac{t}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{9} at \sin \frac{x}{3} - bx \sin \frac{t}{3} &= t \sin \frac{x}{3} + x \sin \frac{t}{3} a = 9, \quad b = -1 \end{aligned}$$

Ответ:  $u_{\text{частн}}(x, t) = 9t \sin \frac{x}{3} - x \sin \frac{t}{3}$ .

### 4.1.2 Полубесконечная струна с закреплённым или свободным концом

Решение задачи о свободных колебаниях бесконечной струны, т.е. решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

даётся формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi.$$

Заметим, что если функции, задающие начальные условия, являются нечётными, т. е.  $u_0(x) = -u_0(-x)$ ,  $u_1(x) = -u_1(-x)$ , то, во-первых,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi \\ u(-x, t) &= \frac{u_0(-x+at) + u_0(-x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} u_1(\xi) d\xi = \\ &= \frac{-u_0(x-at) - u_0(x+at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} u_1(-\xi) d\xi = \\ &= -\frac{u_0(x-at) + u_0(x+at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi = -u(x, t) \end{aligned}$$

т. е. решение  $u(x, t)$  - тоже нечётная функция, а во-вторых,

$$u(x, t)|_{x=0} = \frac{u_0(at) + u_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} u_1(\xi) d\xi = 0.$$

Если же  $u_0(x) = u_0(-x)$ ,  $u_1(x) = u_1(-x)$  - чётные, то аналогично показывается, что  $u(x, t)$  - чётная функция и

$$u_x(x, t)|_{x=0} = \frac{u'_0(at) + u'_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a} (u_1(at) - u_1(-at)) = 0.$$

Эти факты дают основание записать решение задачи о колебании полубесконечной струны с закреплённым или свободным концом формулой Даламбера.

Пусть задана смешанная задача на полуоси.

### Решение в общем виде (??? додумаю!)

Для типичной задачи вида

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Продолжим начальные условия нечётным образом на отрицательную полуось, т. е. положим

$$v_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0, \\ -u_0(-x), & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad v_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \geq 0, \\ -u_1(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Запишем решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = v_0(x), \quad u_t|_{t=0} = v_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{v_0(x + at) + v_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_1(\xi) d\xi.$$

Тогда, в силу приведённых выше рассуждений, это решение является решением смешанной задачи 2 (см. примеры 4,9).

### 4.1.3 Закон отражения от закреплённого (свободного) конца

Функции  $f(x + 3t), g(x - 3t)$  для  $x - 3t \geq 0, x + 3t \geq 0$  определяются из начальных условий Коши, а  $g(x - 3t)$  для  $x - 3t \leq 0$  из краевого условия и условий Коши.

В частности, если конец закреплён, т. е.

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad \text{то} \quad f(at) + g(-at) = 0,$$

мы получаем закон отражения от закреплённого конца

$$g(x - at) = -f(-x + at), \quad x - at \leq 0.$$

Если конец свободен, то закон отражения другой:  $f'(at) + g'(-at) = 0, f(at) - g(-at) = C$ , т. е.

$$g(x - at) = f(at - x) + C, \quad x - at \leq 0,$$

Пример 4.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x \sin x, & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

• Продолжим начальные условия нечётным образом, полагая  $v_0 = x|x|, v_1 = x|\sin x|$ . Тогда решение задачи даётся формулой (учитывая, что во всей первой четверти  $x + at \geq 0$ ):

$$u(x, t) = \frac{(x + at)^2 + (x - at)|x - at|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \xi |\sin \xi| d\xi.$$

**П р и м е ч а н и е.** К сожалению, далеко не всегда можно так просто записать нечётное продолжение. Поэтому, хоть в принципе такое возможно, часто проще решить задачу «в лоб» рассмотренными первым или вторым способами.



### Задача Коши в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Будем рассматривать следующие задачи Коши: для волнового уравнения

#### Задача 3.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t), t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad \text{где } m = 2 \text{ или } m = 3, \text{ и для уравнения теплопроводности } \in \mathbb{N}.$$

#### Задача 4.

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad \text{где } m \in \mathbb{N}$$

Сначала рассмотрим методы, которые подходят для обеих задач. Тогда останется лишь один метод решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности, который не годится для волнового уравнения.

#### 4.1.4 Несколько способов нахождения частного решения неоднородного уравнения

а) Если в уравнении  $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t)$  выполнено условие  $f(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta f(x, t) = b f(x, t)$ , т. е. свободный член является собственным вектором волнового оператора (или оператора теплопроводности  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} - a^2 f(x, t) = b f(x, t)$ ), то частное решение можно искать в виде

$$u_{\text{частн}} = c f(x, t), \quad c \neq 0.$$

Если же  $f(x, t)$  является решением однородного волнового уравнения, то надо смотреть отдельно (см. пример 2).

б) Если в уравнении  $u_{tt} = a^2 u + f(x, t)$  свободный член имеет вид

$$f(x, t) = \varphi_0(t) \psi(x), \quad \text{где } \Delta \psi(x) = \lambda \psi(x),$$

т. е.  $\psi(x)$  - собственная функция оператора Лапласа, то частное решение можно искать в виде  $u_{\text{частн}} = \varphi(t) \psi(x)$  (см. с. 9).

с) Если в задачах 1 или  $2 f(x, t) \equiv g(x)$ , т. е. не зависит от  $t$  и  $\exists n \in \mathbb{N}$ , такое, что

$$\Delta^n g = 0, \quad \Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0,$$

то решение задач удобно искать в виде многочлена, расположенного по неотрицательным степеням  $t$  с неизвестными коэффициентами, зависящим от  $x$ , и удовлетворяющего начальным условиям, т. е. в виде

$$u(x, t) = u_0(x) + t u_1(x) + \frac{t^2}{2!} \varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!} \varphi_2(x) + \dots + \frac{t^m}{m!} \varphi_{m-1}(x)$$

где  $m$  мы не конкретизируем, т. к. оно автоматически определится в процессе решения задачи. Осталось удовлетворить уравнению. Подставим формулу в уравнение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x) + t u_1(x) + \frac{t^2}{2!} \varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!} \varphi_2(x) + \dots + \frac{t^m}{m!} \varphi_{m-1}(x), \\ \varphi_1(x) &+ \frac{t}{1!} \varphi_2(x) + \frac{t^2}{2!} \varphi_3(x) + \frac{t^3}{3!} \varphi_4(x) + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \varphi_{m-1}(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \left( \Delta u_0(x) + t \Delta u_1(x) + \frac{t^2}{2!} \Delta \varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!} \Delta \varphi_2(x) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{t^m}{m!} \Delta \varphi_{m-1}(x) \right) + g(x) \varphi_1(x) = a^2 \Delta u_0(x) + g(x), \\
&\quad \varphi_2(x) = a^2 \Delta u_1(x), \\
&\quad \varphi_3(x) = a^2 \Delta \varphi_1(x) = a^2 \Delta (a^2 \Delta u_0(x) + g(x)) = \\
&\quad = a^4 \Delta^2 u_0(x) + a^2 \Delta g(x), \\
&\quad \varphi_4(x) = a^2 \Delta \varphi_2(x) = a^4 \Delta^2 u_1(x),
\end{aligned}$$

Видно, что начиная с некоторого  $k$  все  $\varphi_i$  будут равны 0.

Если в задачах 3,4 начальные условия  $u_0(x), u_1(x)$  не удовлетворяют условиям этого пункта, то частное решение удобно искать в виде  $u(x, t) = \frac{t^2}{2!} \varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!} \varphi_2(x) + \dots + \frac{t^m}{m!} \varphi_{m-1}(x)$ , т. е. удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Так как общего решения однородного волнового уравнения или однородного уравнения теплопроводности в случае  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $m > 1$ , не существует, то после нахождения частного решения необходимо сделать сдвиг:  $v(x, t) = u(x, t) - u_{\text{частн}}(x, t)$ , чтобы уравнение стало однородным.

#### 4.1.5 Некоторые способы решения задач Коши для однородного уравнения

Будем рассматривать задачи Коши для однородного волнового уравнения

**Задача 5.**

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = 0, x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

**Задача 6.**

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad \text{где } m = 2, 3, \text{ и однородного уравнения теплопроводности}$$

**Задача 7.**

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad \text{где } m \in \mathbb{N}.$$

1. Если

$$\Delta u_0 = \lambda u_0 \quad \text{или} \quad \Delta u_1 = \lambda u_1$$

то решения задач 5 – 7 ищется в виде произведения искомой функции  $f(t)$  на собственную функцию оператора Лапласа ( $u_0$  или  $u_1$  соответственно), удовлетворяющего начальным условиям, т.е.

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= f(t) u_0(x), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0; \\
u(x, t) &= f(t) u_1(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1; \\
u(x, t) &= f(t) u_0(x), \quad f(0) = 1
\end{aligned}$$

2 • Если

$$u_0 = \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z) \quad \text{или} \quad u_1 = \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

то решения задач (5) – (7) находим в виде

$$u = f(t, \alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Обозначим  $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z$ . Тогда задачи станут одномерными и примут вид

$$\begin{cases} f_{tt} = a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = u_0(\xi), \\ f_t|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f_{tt} = a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = 0, \\ f_t|_{t=0} = u_1(\xi); \end{cases} \quad \begin{cases} f_t = a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = u_0(\xi). \end{cases}$$

Решение задач (5\*) – (6\*) легко записать с помощью формулы Даламбера. Решение задачи (7\*) можно получить с помощью формулы Пуассона или как-то по-другому, если это возможно.

3. Если в задаче  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$  или задаче (7) начальные условия таковы, что существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что

$$\Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0$$

то решение задачи можно искать в виде  $u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!} \varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!} \varphi_2(x) + \dots + \frac{t^m}{m!} \varphi_{m-2}(x)$ .

4. • Если  $u_0$  или  $u_1$  являются произведением некоторой гармонической функции на некоторую функцию от других независимых переменных, т. е.

$$u_0(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_n), \quad \Delta f = 0$$

(например,  $u_0(x, y, z) = (x^2 - y^2) e^{-z^2}$ ), то решение можно искать в виде

$$\begin{aligned} u(t, x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_k) h(t, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ h|_{t=0} &= g(x_{k+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

если это, например, уравнение теплопроводности. Если это задача 5, то

$$h|_{t=0} = g(x_{k+1}, \dots, x_n), \quad h_t|_{t=0} = 0$$

Обоснование (?????). • Подставим

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_k) h(t, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

например, в уравнение задачи 7:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = f(x_1, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_n), & u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \\ &\quad a^2 \Delta (f(x_1, \dots, x_k) h(t, x_{k+1}, \dots, x_n)) = \\ &\quad = a^2 (h(t, x_{k+1}, \dots, x_n) \Delta f(x_1, \dots, x_n)) + \\ &\quad \quad + f(x_1, \dots, x_k) \Delta h(t, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\quad h_{tt}(t, x_{k+1}, \dots, x_n) = a^2 \Delta h(t, x_{k+1}, \dots, x_n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} h_{tt}(t, x_{k+1}, \dots, x_n) = a^2 \Delta h(t, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ h(t, x_{k+1}, \dots, x_n)|_{t=0} = g(x_{k+1}, \dots, x_n), \\ h_t(t, x_{k+1}, \dots, x_n)|_{t=0} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5. • Довольно часто встречается выражение вида

$$u_0 = x \sin(ax + by + cz).$$

Вычислим  $\Delta u_0$ :  $\Delta u_0 = 2a \cos(ax + by + cz) - (a^2 + b^2 + c^2) x \sin(ax + by + cz)$ .

Значит, решение можно искать в виде

$$u = g(t) \cos(ax + by + cz) + f(t)x \sin(ax + by + cz),$$

удовлетворяющем начальным условиям  $f(0) = 0, g(0) = 1$ , если это, например, задача 7.

Обоснование (?????): • Подставим выражение в уравнение и начальные условия:

$$\begin{aligned} u &= f(t)x \sin(ax + by + cz) + g(t) \cos(ax + by + cz) \\ f(0) &= 1, \quad g(0) = 0, \\ f'(t)x \sin(ax + by + cz) + g'(t) \cos(ax + by + cz) &= \\ &= -g(t) (a^2 + b^2 + c^2) \cos(ax + by + cz) + \\ &\Rightarrow \begin{cases} f'(t) + f(t) (a^2 + b^2 + c^2) = 0, f(0) = 1, \\ g'(t) + g(t) (a^2 + b^2 + c^2) = 2af(t), g(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили две задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Пример 5.**

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + (x^2 + y^2) \sin t, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = (2x - y + 2z) \sin(2x - y + 2z)^2 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

**Решение** (!?!!!!! это крутая типичная задача, отработаю ее!!!)

• Найдём частное решение уравнения  $u_{tt} = \Delta u + x^2 \sin t$ . Так как  $(\sin t)'' = -\sin t$ , то  $u_{\text{частн}} = f(x) \sin t \Rightarrow -f(x) = f''(x) + x^2$

$$f''(x) + f(x) = -x^2$$

$$f(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2 - x^2.$$

В качестве частного решения можно взять  $u_{\text{частн}} = (2 - x^2) \sin t$ . Аналогично получится частное решение  $u_{\text{частн}} = (2 - y^2) \sin t$  для уравнения  $u_{tt} = u + y^2 \sin t$ .

Тогда  $v = u - (4 - x^2 - y^2) \sin t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} = v, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ v|_{t=0} = (2x - y + 2z) \sin(2x - y + 2z)^2 \\ v_t|_{t=0} = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$$

Решение будем искать в виде суммы решений  $v = w(x, y, z, t) + f(x, y, t)$  двух задач:

$$1. \quad \begin{cases} w_{tt} = \Delta w, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ w|_{t=0} = (2x - y + 2z) \sin(2x - y + 2z)^2, \\ w_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow w(x, y, z, t) =$$

$= g(2x - y + 2z, t)$ . Обозначим  $2x - y + 2z = \xi$ . Тогда

$$\begin{cases} g_{tt} = 9g_{\xi\xi}, t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ g|_{t=0} = \xi \sin \xi^2, \\ g_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$g(\xi, t) = \frac{(\xi + 3t) \sin(\xi + 3t)^2 + (\xi - 3t) \sin(\xi - 3t)^2}{2}.$$

$$2. \quad \begin{cases} f_{tt} = \Delta f, t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ f|_{t=0} = 0, \\ f_t|_{t=0} = x^2 + y^2 - 4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x, y, t) =$$

$$\begin{aligned} &= 0 + t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{t^2}{2!} \varphi_1(x, y) + \frac{t^3}{3!} \varphi_2(x, y) + \frac{t^4}{4!} \varphi_3(x, y) + \dots + \\ &+ \varphi_1(x, y) + t \varphi_2(x, y) + \frac{t^2}{2!} \varphi_3(x, y) + \dots = \\ &= t(4) + \frac{t^2}{2!} \varphi_1(x, y) + \frac{t^3}{3!} \varphi_2(x, y) + \dots \end{aligned}$$

$$\varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_2(x, y) = 4,$$

$$\varphi_3(x, y) = \varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_4(x, y) = \varphi_2(x, y) = 0$$

$$f(x, y, t) = t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{4t^3}{3!} = t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{2t^3}{3}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= (4 - x^2 - y^2) \sin t + t(x^2 + y^2 - 4) + \frac{2t^3}{3} + \\ &+ \frac{1}{2} ((2x - y + 2z + 3t) \sin(2x - y + 2z + 3t)^2 + (2x - y + 2z - 3t) \sin(2x - y + 2z - 3t)^2). \end{aligned}$$

### Пример 6.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = xyz \cos x. \end{cases}$$

• В этом примере

$$(\Delta yzx \cos x) = -2yz \sin x - yzx \cos x.$$

Поэтому решение можно искать в виде

$$u = f(t)yz \sin x + g(t)yzx \cos x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

Тогда

$$f'(t)yz \sin x + g'(t)yzx \cos x =$$

$$= -f(t)yz \sin x - g(t)(2yz \sin x + yzx \cos x)$$

$$\begin{cases} g'(t) + g(t) = 0, g(0) = 1 \\ f'(t) + f(t) = -2g(t) = -2e^{-t}, f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = Ce^{-t} - 2te^{-t}, \quad f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = -2te^{-t}.$$

Отсюда следует

Ответ.  $u(x, y, z, t) = e^{-t} y z x \cos x - 2te^{-t} y z \sin x$ .

### Пример 7.

$$\begin{cases} 2u_t = 7u + \frac{\sin x \operatorname{ch} z}{\sqrt{t+4}}, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = (x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z. \end{cases}$$

• Произведение обычного синуса (или косинуса) на гиперболический синус (или косинус) является гармонической функцией

$$\Delta \sin x \operatorname{ch} z = 0.$$

Поэтому ищем частное решение в виде

$$u_{\text{частн.}} = f(t) \sin x \operatorname{ch} z, \quad f(0) = 0 :$$

$$2f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+4}} \Rightarrow f(t) = \sqrt{t+4} + C,$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{t+4} - 2 \Rightarrow u_{\text{частн.}} = (\sqrt{t+4} - 2) \sin x \operatorname{ch} z.$$

Теперь делаем сдвиг:

$$v = u - u_{\text{частн.}} \Rightarrow \begin{cases} 2v_t = 7\Delta v, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ v|_{t=0} = (x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z \end{cases}$$

Интересно, что  $\Delta^2(x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z \equiv 0$  (проверьте!). Поэтому решение ищем в виде

$$\begin{aligned} v &= (x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z + t\varphi_1(x, y, z) + \\ &+ \frac{t^2}{2!}\varphi_2(x, y, z) + \frac{t^3}{3!}\varphi_3(x, y, z) + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \left( \varphi_1(x, y, z) + t\varphi_2(x, y, z) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x, y, z) + \dots \right) = \\ &= 7(2 \cos x \operatorname{ch} z + 2 \sin x \operatorname{sh} z) + t\varphi_1(x, y, z) + \\ &+ \frac{t^2}{2!}\varphi_2(x, y, z) + \frac{t^3}{3!}\varphi_3(x, y, z) + \dots \end{aligned}$$

$$2\varphi_1(x, y, z) = 14(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z),$$

$$2\varphi_2(x, y, z) = 7\Delta\varphi_1(x, y, z) = 0$$

$$2\varphi_3(x, y, z) = \Delta\varphi_2(x, y, z) = 0$$

$$v = (x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z + 7t(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z) \Rightarrow$$

$$\text{Ответ. } u = (\sqrt{t+4} - 2) \sin x \operatorname{ch} z + (x - 2y + z) \sin x \operatorname{ch} z + 7t(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z).$$

### Пример 8.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) e^{-z^2}, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

• Так как  $\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) \equiv 0$ , то решение находим в виде

$$u = f(t, z) \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right), \quad f(t, z)|_{t=0} = e^{-z^2}, \quad f_t(t, z)|_{t=0} = 0.$$

Подставив в уравнение и начальные условия, получаем задачу:

$$\begin{cases} f_{tt}(t, z) = f_{zz}(t, z), \\ f(t, z)|_{t=0} = e^{-z^2}, f^t(t, z)|_{t=0} = 0, \\ f(t, z) = \frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) \frac{(e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2})}{2}. \end{cases}$$

Ответ.  $u = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) \frac{(e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2})}{2}. (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

### Пример 9.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, t > 0, \\ u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3, \\ u_t|_{t=0} = \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

• Это довольно важный и интересный пример. Решается он с помощью перехода к сферическим координатам и последующей заменой переменных, которая сведёт задачу Коши в  $R^3$  к одномерной смешанной задаче на полуоси  $r > 0$ . Перейдём к сферическим координатам, и, поскольку начальные условия зависят только от расстояния, то и решение будем искать в виде  $u(r, t)$ :

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r\right), t > 0, r \geq 0 \\ u|_{t=0} = r^2 \operatorname{sh}^3 r \\ u_t|_{t=0} = \cos r \end{cases}$$

Но уравнение мы решать не умеем. Поэтому сделаем замену переменных:  $\varphi(r, t) = ru(r, t)u(r, t) = \frac{\varphi(r, t)}{r}$ , из которой следует, что  $\varphi(r, t)|_{r=0} = 0$ . Подставляем в условия задачи:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = a^2 \varphi_{rr}, t > 0, r \geq 0 \\ \varphi|_{t=0} = r^3 (\operatorname{sh} r)^3, r \geq 0 \\ \varphi_t|_{t=0} = r \cos r, r \geq 0 \\ \varphi|_{r=0} = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

Получилась задача о колебании полубесконечной струны с закреплённым концом. Решение можно получить с помощью формулы Даламбера, если продолжим начальные условия на отрицательную полуось нечётным образом.

В нашем случае  $r \cos r$  - уже нечётная функция, а новое  $\varphi|_{t=0}$  можно записать в виде  $\varphi|_{t=0} = r^3 |\operatorname{sh}^3 r|$  - получим задачу Коши на всей оси:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = a^2 \varphi_{rr}, t > 0, r \in R \\ \varphi|_{t=0} = r^3 |\operatorname{sh}^3 r|, r \in R \\ \varphi_t|_{t=0} = r \cos r, r \in R \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$u(r, t) = \frac{(r + at)^3 |\operatorname{sh}^3(r + t)| + (r - at)^3 |\operatorname{sh}^3(r - at)|}{2r} + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \xi \cos \xi d\xi.$$

Так как во всей интересующей нас области  $r + at \geq 0$ , то можно записать  
 Ответ:

$$u(r, t) = \frac{(r + at)^3 \operatorname{sh}^3(r + at) + (r - at)^3 |\operatorname{sh}^3(r - at)|}{2r} + \frac{1}{2ar}((r + at) \sin(r + at) - (r - at) \sin(r - at) - 2 \sin r \sin at).$$

### Пример 10.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{t=0} = (y + z) \operatorname{arctg}(y - z), \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

• Этот пример отличается от предыдущих тем, что мы сделаем замену независимых переменных:  $\xi = y + z, \eta = y - z \Rightarrow \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$  и задача примет вид

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u, \\ u|_{t=0} = \xi \operatorname{arctg} \eta \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \Rightarrow (\text{т. к. } \Delta \xi = 0) u = \xi f(\eta, t) \Rightarrow \begin{cases} f_{tt}(\eta, t) = 2f_{\eta\eta}(\eta, t), \\ f|_{t=0} = \operatorname{arctg} \eta, \\ f_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$f(\eta, t) = \frac{\operatorname{arctg}(\eta - \sqrt{2}t) + \operatorname{arctg}(\eta + \sqrt{2}t)}{2}.$$

Ответ.  $u(y, z, t) = (y + z) \cdot \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(y - z - \sqrt{2}t) + \operatorname{arctg}(y - z + \sqrt{2}t)).$

## 4.2 Метод Фурье на отрезке

### 4.2.1 Метод Фурье на отрезке, когда оператор $-L_1^*$ - оператор Штурма-Лиувилля

Будем рассматривать следующие задачи на отрезке:

#### Задача 8.

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = L_1 u + f(x, t), t > 0, a < x < b, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad a \leq x \leq b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = \varphi_1(t), \quad (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = \varphi_2(t), t \geq 0, \end{cases}$$

или уравнения теплопроводности:

#### Задача 9.

$$\begin{cases} u_t + \alpha u = L_1 u + f(x, t), t > 0, a < x < b, \\ u|_{t=0} = u_0(x), a \leq x \leq b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = \varphi_1(t), (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = \varphi_2(t), t \geq 0, \end{cases}$$

где оператор  $L_1 \equiv a^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial}{\partial x} + c(x)$ ,  $\alpha, \beta, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ .

Но сначала рассмотрим задачи с соответствующими однородными уравнениями и однородными краевыми условиями:



**Задача 8\*.**

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = L_1 u, t > 0, a < x < b \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), a \leq x \leq b \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = 0, (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

или уравнения теплопроводности:

**Задача 9\*.**

$$\begin{cases} u_t + \alpha u = L_1 u, t > 0, a < x < b, \\ u|_{t=0} = u_0(x), a \leq x \leq b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)|_{x=a} = 0, (c_2 u + d_2 u_x)|_{x=b} = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

В обеих задачах, что важно, уравнения и краевые условия - однородные. Такие задачи принято решать методом разделения переменных Фурье.

I. Для этого проведём разделение переменных в однородном уравнении и однородных краевых условиях. Это является ключевым моментом при применении метода Фурье. В нашем случае после разделения переменных получатся обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. В других задачах, например, в том же уравнении теплопроводности или волновом, но в пространстве большей размерности, получаются более сложные уравнения.

Ищем решение уравнения, например, задачи 9\* в виде  $u(x, t) = T(t)X(x)$ .

Подставим  $u(x, t) = T(t)X(x)$  в уравнение:

$$\begin{aligned} T'(t)X(x) + \alpha T(t)X(x) &= T(t)L_1^*X(x) \\ \frac{T'(t)}{T(t)} + \alpha &= \frac{L_1^*X(x)}{X(x)} = \text{const} = \nu, \end{aligned}$$

где оператор  $L_1^* = a^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)$  - оператор уже с обыкновенными производными.

Теперь разделим переменные в однородных краевых условиях:

$$\begin{aligned} c_1 T(t)X(a) + d_1 T(t)X'(a) &= 0, c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0, \\ c_2 T(t)X(b) + d_2 T(t)X'(b) &= 0, c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0. \end{aligned}$$

Для  $X(x)$  возникла краевая задача

$$\begin{cases} L_1^*X(x) = \nu X(x), a < x < b \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Решение всей задачи 9\* теперь зависит от решения этой краевой задачи. А краевая задача, как известно, не всегда имеет нетривиальное решение - всё зависит от оператора  $L_1^*$ .

Оператор  $-\text{div}(p(x) \text{grad}) + q(x)$ ,  $p(x) > 0, q(x) \geq 0$ , называется оператором Штурма-Лиувилля.

В одномерном случае он принимает вид

$$L \equiv -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

Если  $L_1^* = -L$ , то условия задачи примут вид

$$\begin{cases} LX(x) = -\nu X(x), a < x < b \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Такая задача называется задачей Штурма-Лиувилля.

Любое нетривиальное решение этой задачи называется собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, а те  $(-\nu)$ , при которых таковые существуют, называются собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля.

В теории курса доказывается, что если  $p(x) \in C^1[a; b]$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \in C[a; b]$ ,  $q(x) \geq 0$ , то собственных значений счётное множество, они неотрицательны, т.е.  $-\nu = \lambda^2$ , каждому собственному значению соответствует одна собственная функция, а собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны, т.е.  $\int_a^b X_k(x)X_n(x)dx = 0, k \neq n$ , и представляют собой полную ортогональную в  $L_2[a, b]$  систему.

Очень часто в наших задачах  $p(x) \equiv 1, q(x) \equiv 0$ , и тогда  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ , а  $L_1^* \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ .

В этом случае задача примет вид

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x), a < x < b \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Особенность этих задач на метод Фурье состоит в том, что если в каждом из классических краевых условий отличен от 0 лишь один коэффициент, то свойства получающихся собственных функций известны из математического анализа 2-го курса.

Пример 11. Решите задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), x \in (0; \pi) \\ X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

• Так как теория не всем известна, а задача простая, то решим её при всех возможных значениях параметра  $\mu$ :

2 •  $\mu = 0 : X(x) = C_1 x + C_2$ .

$$X'(0) = 0C_1 = 0, X'(\pi) = 0C_1 = 0 \Rightarrow X_0(x) = 1$$

•  $\mu < 0 \Leftrightarrow \mu = -\lambda^2 < 0 : X(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \operatorname{sh} \lambda x$ .

$$X'(0) = 0C_2 = 0, X'(\pi) = -C_1 \lambda \operatorname{sh} \lambda \pi = 0$$

$$C_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

3 •  $\mu > 0 \mu = \lambda^2 > 0 : X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ .

$$X'(0) = 0C_2 = 0, X'(\pi) = -C_1 \lambda \sin \lambda \pi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \pi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow X_k(x) = \cos kx, k \in \mathbb{N}$$

Свойства полученной системы собственных функций хорошо известны из математического анализа 2-го курса: система  $\{\cos kx\}, k = 0, 1, 2, \dots$  ортогональна и полна в  $L_2[0; \pi]$ .

Ответ.  $\{\cos kx\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Итак, найдены собственные функции  $X_k(x)$  и собственные значения  $\lambda_k^2$ . Теперь находим  $T_k(t) : \frac{T_k'(t)}{T_k(t)} + \alpha = \mu_k = -\lambda_k^2 \frac{T_k'(t)}{T_k(t)} + (\alpha + \lambda_k^2) T_k(t) = 0$  и получаем множество

решений уравнения задачи  $u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x)$ , удовлетворяющих краевым условиям. Осталось удовлетворить начальным условиям.

II. Теперь уже ищем решение всей задачи в виде формального ряда

$$u(x, t) = \sum_k^\infty T_k(t)X_k(x)$$

Подставим начальные условия:

$$u(x, t)|_{t=0} = \sum_k^\infty T_k(0)X_k(x) = u_0(x)$$

Возникла необходимость разложить  $u_0(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи:  $u_0(x) = \sum_k^\infty a_k X_k(x)$ . Вот здесь-то и потребовались свойства  $u_0(x)$  и собственных функций. Так как наша система ортогональна и полна в  $L_2[a; b]$ , то всякую  $u_0(x) \in L_2[a; b]$  можно разложить в ряд Фурье, где  $a_n = \frac{\int_a^b u_0(x)X_n(x)dx}{\int_a^b X_n^2(x)dx}$ .

Тогда  $\sum_k^\infty T_k(0)X_k(x) = u_0(x) = \sum_k^\infty a_k X_k(x)T_k(0) = a_k$ . Получили для  $T_k(t)$  задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k'(t) + \alpha T_k(t) = -\lambda_k^2 T_k(t) \\ T_k(0) = a_k \end{cases}$$

которые, как известно, имеют единственное решение.

Формальное решение  $u(x, t) = \sum_k^\infty T_k(t)X_k(x)$  найдено, т. к. найдены все  $X_k(x), T_k(t)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Обратите внимание на то, что задача Штурма-Лиувилля соответствует оператору  $L_1$  и не зависит от того, что стоит слева в наших уравнениях задач 8\*, 9\*.

## 4.2.2 Случай неоднородного уравнения и неоднородных краевых условий (??)

### 4.2.3 Рассмотрим теперь задачи 8 и 9.

Теперь решение задач состоит из трех этапов.

I. Находим функцию  $w_0(x, t)$ , которая удовлетворяет заданным краевым условиям.

Общих правил для нахождения  $w_0(x, t)$  не существует. Поэтому рассмотрим несколько примеров. Например,

а)  $u|_{x=a} = \varphi_1(t), u|_{x=b} = \varphi_2(t)$ . Тогда в качестве  $w_0(x, t)$  можно взять функцию  $w_0(x, t) = \varphi_1(t) + (x - a)\varphi_2(t)$ , а можно и любую другую - лишь бы она удовлетворяла заданным краевым условиям.

б)  $u|_{x=a} = \varphi_1(t), u|_{x=b} = \varphi_2(t) \Rightarrow w_0(x, t) = \frac{(x-b)^2}{2(a-b)}\varphi_1(t) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\varphi_2(t)$ .

в)  $u|_{x=a} = \varphi_1(t), u|_{x=b} = \varphi_2(t)$ . Тогда в роли  $w_0(x, t)$  можно взять функцию

$$w_0(x, t) = \frac{(x-b)}{a-b}\varphi_1(t) + \frac{(x-a)}{b-a}\varphi_2(t)$$

и т. д.

Теперь необходимо сделать сдвиг, чтобы свести к задаче с однородными краевыми условиями:

$$v(x, t) = u(x, t) - w_0(x, t)u(x, t) = v(x, t) + w_0(x, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} + \alpha v_t + \beta v = L_1 v + g(x, t), t > 0, a < x < b, \\ v|_{t=0} = u_0(x) - w_0(x, t)|_{t=0}, \quad v_t|_{t=0} = u_1(x) - w_{0t}(x, t)|_{t=0}, \\ a \leq x \leq b; \\ (c_1 v + d_1 v_x)|_{x=a} = 0, (c_2 v + d_2 v_x)|_{x=b} = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Видно, что изменился, вообще говоря, свободный член  $g(x, t) \equiv -w_{0tt} - \alpha w_{0t} - \beta w_0 + L_1 w_0 + f(x, t)$  и начальные условия. Переобозначим их для удобства и получим задачу

$$\begin{cases} v_{tt} + \alpha v_t + \beta v = L_1 v(x, t) + g(x, t), t > 0, a < x < b, \\ v|_{t=0} = v_0(x), v_t|_{t=0} = v_1(x), a \leq x \leq b \\ (c_1 v + d_1 v_x)|_{x=a} = 0, (c_2 v + d_2 v_x)|_{x=b} = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

II. Теперь найдём собственные функции задачи.

Для этого разделим переменные в соответствующем однородном уравнении и однородных краевых условиях. Пусть  $v = T(t)X(x)$ . Подставляем в соответствующее однородное уравнение и однородные краевые условия:

$$\begin{aligned} T''(t)X(x) + \alpha T'(t)X(x) + \beta T(t)X(x) &= T(t)L_1^*X(x) \\ \frac{T''(t) + \alpha T'(t)}{T(t)} + \beta &= \frac{L_1^*X(x)}{X(x)} = \text{const} = \mu, \\ c_1 T(t)X(a) + d_1 T(t)X'(a) &= 0, c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0, \\ c_2 T(t)X(b) + d_2 T(t)X'(b) &= 0, c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0. \end{aligned}$$

Если  $-L_1^* \equiv L$  - оператор Штурма-Лиувилля, то получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} LX(x) = \lambda^2 X(x) \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

(Теперь, в отличие от задач 8\* и 9\*, уравнение для  $T$  решать не будем, т. к. делили переменные в «чужом» однородном уравнении.)

Общего аналитического решения такой задачи не существует. Поэтому в наших заданиях чаще всего встречается «решаемый» вариант, где  $L \equiv -\frac{d^2}{dx^2}$ , т. е. задача имеет вид

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x) \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Решаем задачу для  $\lambda = 0$  и  $\lambda^2 > 0$ , находим  $X_n(x)$ .

III. Теперь ищем решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от  $t$ :

$$v(x, t) = \sum_k^\infty T_k(t)X_k(x)$$

Подставляем в уравнение

$$\begin{aligned} \sum_k^\infty T_k''(t)X_k(x) + \alpha \sum_k^\infty T_k'(t)X_k(x) + \beta \sum_k^\infty T_k(t)X_k(x) &= \\ &= - \sum_k^\infty T_k(t)\lambda_k^2 X_k(x) + g(x, t) \end{aligned}$$

Придётся разложить  $g(x, t)$  в ряд Фурье по собственным функциям:  
 $g(x, t) = \sum_k^\infty a_k(t) X_k(x)$ ,  $a_n(t) = \frac{\int_a^b g(x, t) X_n(x) dx}{\int_a^b X_n^2(x) dx}$ .

Подставим ряд вместо  $g(x, t)$  и приравняем коэффициенты при линейно независимых  $X_k$ :

$$T_k''(t) + \alpha T_k'(t) + (\beta + \lambda_k^2) T_k(t) = a_k(t).$$

Выходим на начальные условия, которые тоже приходится разлагать в ряд Фурье по собственным функциям задачи:

$$\begin{aligned} \sum_k^\infty T_k(0) X_k(x) &= v_0(x) = \sum_k^\infty b_k X_k(x) T_k(0) = b_k, \\ \sum_k^\infty T_k'(0) X_k(x) &= v_1(x) = \sum_k^\infty c_k X_k(x) T_k'(0) = c_k. \end{aligned}$$

Решаем задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \alpha T_k'(t) + (\beta + \lambda_k^2) T_k(t) = a_k(t) \\ T_k(0) = b_k \\ T_k'(0) = c_k \end{cases}$$

и записываем ответ.

### Пример 12.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u - \frac{t(3x^2+2)}{\pi} + x \cos t, t > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u|_{t=0} = \cos 2x, u_t|_{t=0} = \frac{x^2}{\pi}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t, t \geq 0. \end{cases}$$

• I. В качестве функции  $w_0(x, t)$  возьмём, например, функцию  $w_0(x, t) = \frac{x^2 t}{\pi}$ , удовлетворяющую краевым условиям. Теперь делаем сдвиг

$$\begin{aligned} v &= u - \frac{x^2 t}{\pi} u = v + \frac{x^2 t}{\pi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} - 3v = v_{xx} + x \cos t, t > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ v|_{t=0} = \cos 2x, v_t|_{t=0} = 0, x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ v_x|_{x=0} = 0, v_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

и переходим ко второму пункту.

II. Делим переменные в соответствующем однородном уравнении и однородных краевых условиях:

$$\begin{aligned} v_{tt} - 3v &= v_{xx}, \quad v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=\pi} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow XT'' - 3XT = X''T \frac{T''}{T} - 3 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \\ X'(0)T(t) &= X'\left(\frac{\pi}{2}\right)T(t) = 0X'(0) = X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решаем возникшую классическую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned}
 \lambda = 0 : X(x) = Ax + B &\Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow A = 0 \Rightarrow X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow X_0 = 1, \\
 \lambda^2 > 0 : X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x &\Rightarrow \\
 \Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 &\Rightarrow \\
 \Rightarrow -\lambda A \sin \lambda \frac{\pi}{2} = 0 \lambda \frac{\pi}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \\
 X_k(x) = \cos 2kx, \quad k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Система найденных собственных функций  $\{\cos 2kx\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ортогональна и полна в  $L_2\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

III. Теперь ищем решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от  $t$ :

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos 2kx.$$

Помним, что свободный член и начальные условия (в данном случае  $u_0(x) = X_1(x)$ ) надо разложить в ряды Фурье по собственным функциям задачи:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx \Rightarrow \\
 \Rightarrow a_0 &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx} = \frac{\pi}{4}, \quad a_m = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2mxdx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2mxdx} = \frac{((-1)^m - 1)}{\pi m^2}, \\
 \sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) \cos 2kx - 3 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos 2kx &= \\
 = - \sum_{k=0}^{\infty} 4T_k(t)k^2 \cos 2kx + \cos t \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx & \\
 T_k''(t) + (4k^2 - 3) T_k(t) &= a_k \cos t, \\
 v|_{t=0} = \cos 2x \Rightarrow T_1(0) &= 1, \quad k = 0, 2, 3, \dots \\
 v_t|_{t=0} = 0 \Rightarrow T_k'(0) &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Получились задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 - 3) T_k(t) = a_k \cos t \\ T_1(0) = 1, T_k(0) = 0, k = 0, 2, 3, \dots \\ T_k'(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Что особенное ждёт нас при решении задач Коши?

• Надо обратить внимание на коэффициент при  $T_k$ . Может оказаться, что при некоторых значениях  $k$  он может быть положительным, при других отрицательным или нулевым, и решения при этом будут выражаться разными формулами.

- При некоторых значениях  $k$  может быть резонанс.
- Начальные условия могут быть разными для разных  $T_k$ .

В нашем случае

$$\begin{aligned}
 k = 0 : & \begin{cases} T_0''(t) - 3T_0(t) = a_0 \cos t, \\ T_0(0) = 0, \\ T_0'(0) = 0, \end{cases} \\
 & \begin{cases} T_0(t) = A_0 \operatorname{ch} \sqrt{3}t + B_0 \operatorname{sh} \sqrt{3}t - \frac{a_0}{4} \cos t, \\ T_0(0) = 0, \\ T_0'(0) = 0, \end{cases} \\
 & T_0(t) = \frac{a_0}{4} (\operatorname{ch} \sqrt{3}t - \cos t). \\
 k = 1 : & \begin{cases} T_1''(t) + T_1(t) = a_1 \cos t, \\ T_1(0) = 1, \\ T_1'(0) = 0, \end{cases} \\
 & \begin{cases} T_1(t) = A_1 \cos t + B_1 \sin t + \frac{a_1}{2} t \sin t, \\ T_1(0) = 1, \\ T_1'(0) = 0, \end{cases} \\
 & T_1(t) = \cos t + \frac{a_1}{2} t \sin t
 \end{aligned}$$

- здесь резонанс (частное решение ищется в виде  $t(a \cos t + b \sin t)$ ).

$$\begin{aligned}
 k \geq 2 : & \begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 - 3) T_k(t) = a_k \cos t, \\ T_k(t) = 0, \\ T_k'(t) = 0, \end{cases} \\
 & \begin{cases} T_k(t) = A_k \cos t \sqrt{4k^2 - 3} + B_k \sin t \sqrt{4k^2 - 3} + \\ T_k(t) = 0, \\ T_k'(t) = 0, \end{cases} \\
 & T_k(t) = \frac{a_k \cos t}{(4k^2 - 3) - 1}, \\
 & \cos t - \cos \sqrt{4k^2 - 3}.
 \end{aligned}$$

Записываем Ответ.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{x^2 t}{\pi} + \frac{\pi}{16} (\operatorname{ch} \sqrt{3}t - \cos t) + 3 \left( \cos t - \frac{t \sin t}{\pi} \right) \cos 2x + \\
 & + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi ((4k^2 - 3) - 1) k^2} \left( \cos t - \cos t \sqrt{4k^2 - 3} \right) \cos 2kx
 \end{aligned}$$

**П р и м е ч а н и е.** Решение искалось в виде формального ряда, вопрос о почленном дифференцировании которого оставался открытым. Теперь, когда получен конкретный ряд, можно выяснить, является ли он дважды почленно дифференцируемым, а значит, классическим решением, или не является, а значит, будет обобщённым решением. Как видно в нашем случае, решение является классическим, т. к. ряд можно почленно дифференцировать два раза.

**Пример 13.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, t > 0, 0 < x < l \\ u|_{t=0} = u_0(x), 0 \leq x \leq l \\ (u_x - hu)|_{x=0} = 0, (u_x + hu)|_{x=l} = 0, t \geq 0, h > 0. \end{cases}$$

Пример отличается от предыдущего тем, что в краевых условиях оба коэффициента отличны от 0, а потому собственные значения явно не определяются, а задаются трансцендентным уравнением, а ортогональность собственных функций не так очевидна - приходится обратиться к теории.

II. Так как в задаче уравнение и краевые условия - однородные, то можно приступить сразу ко второму пункту ищем решение уравнения в виде  $T(t)X(x) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \\ T(t)X'(0) - hT(t)X(0) &= 0X'(0) - hX(0) = 0, \\ T(t)X'(l) + hT(t)X(l) &= 0X'(l) + hX(l) = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases} &\text{ и } \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2. \end{aligned}$$

Решаем классическую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad X = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} A - hB = 0, \\ A + h(Al + B) = 0 \end{cases} & X(x) \equiv 0, \\ \lambda^2 > 0, \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} B\lambda - hA = 0, \\ -A\lambda \sin \lambda l + B\lambda \cos \lambda l + Ah \cos \lambda l + Bh \sin \lambda l = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B\lambda - hA = 0, \\ (B\lambda + Ah) \cos \lambda l + (Bh - A\lambda) \sin \lambda l = 0 \\ \operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим, для удобства,  $\lambda_n l = \mu_n$ , тогда  $\mu_n$  - положительные корни уравнения  $\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_n}{hl} - \frac{hl}{\mu_n} \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (т. к. левая и правая части уравнения нечётные функции), и  $X_n(x) = \mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + hl \sin \frac{\mu_n x}{l} \Rightarrow T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}$ .

В задаче собственные числа удовлетворяют довольно сложному уравнению. Поэтому воспользуемся следующими из теории свойствами собственных значений (их счётное множество) и собственных функций (система ортогональна и полна) задачи Штурма-Лиувилля. Поэтому

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_1^\infty a_n \left( \mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + hl \sin \frac{\mu_n x}{l} \right) \\ a_k &= \frac{\int_0^l u_0(x) \left( \mu_k \cos \frac{\mu_k x}{l} + hl \sin \frac{\mu_k x}{l} \right) dx}{\int_0^l \left( \mu_k \cos \frac{\mu_k x}{l} + hl \sin \frac{\mu_k x}{l} \right)^2 dx} = \frac{\frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \left( \mu_k \cos \frac{\mu_k x}{l} + hl \sin \frac{\mu_k x}{l} \right) dx}{((\mu_k)^2 + (hl)^2 + 2hl)}. \end{aligned}$$

Подставим ряд в начальные условия:

$$\sum_1^\infty C_n \left( \mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + hl \sin \frac{\mu_n x}{l} \right) = u_0(x) = \sum_1^\infty a_n \left( \mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + hl \sin \frac{\mu_n x}{l} \right) C_n = a_n.$$

Решаем задачи Коши:  $T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}$ ,  $T_n(0) = a_n \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t} \Rightarrow$

Ответ.  $\sum_1^\infty \frac{\frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \left( \mu_k \cos \frac{\mu_k x}{l} + hl \sin \frac{\mu_k x}{l} \right) dx}{((\mu_k)^2 + (hl)^2 + 2hl)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t} \left( \mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + hl \sin \frac{\mu_n x}{l} \right).$



#### 4.2.4 Что делать, если оператор $-L_1^*$ не является оператором Штурма-Лиувилля?

Если  $-L_1^*$  не является оператором Штурма-Лиувилля, то умножением обеих частей уравнения на некоторую функцию  $g(x), g(x) > 0$  всегда можно привести левую часть уравнения к виду

$$LX(x) : \begin{cases} g(x)L_1^*X(x) \equiv LX(x) = \lambda^2 g(x)X(x) \\ c_1X(a) + d_1X'(a) = 0 \\ c_2X(b) + d_2X'(b) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что при этом решение задачи останется прежним (потому что всё было однородным). Но! Изменилась правая часть уравнения. Что это даёт? Оказывается, изменились свойства собственных функций. Собственных значений по-прежнему счётное множество, система собственных функций остаётся полной, но теперь они не просто ортогональны, а ортогональны уже «с весом»  $g(x)$ , т. е.  $\int_a^b g(x)X_k(x)X_n(x)dx = 0, k \neq n$ .

#### Пример 14.

$$\begin{cases} u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x + f(x, t), t > 0, 0 < x < \pi; \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = x, 0 < x < \pi \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = \pi t, t > 0 \end{cases}$$

В этом примере оператор в уравнении на собственные функции не является оператором Штурма-Лиувилля!

Решаем задачу по пунктам.

• I. Подбираем функцию, удовлетворяющую краевым условиям:  $w_0 = xt$ . Делаем сдвиг:  $v = u - xtu = v + xt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} - 7v_t = v_{xx} + 2v_x + f(x, t), t > 0, 0 < x < \pi \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = 0, 0 < x < \pi \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=\pi} = 0, t > 0 \end{cases}$$

II. Найдём собственные функции задачи. Делим, как всегда, переменные в соответствующем однородном уравнении:

$$T''(t)X(x) - 7T'(t)X(x) = X''(x)T + 2T(t)X'(x)$$

$$\frac{T''(t) - 7T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \text{const},$$

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0X(0) = X(\pi) = 0.$$

Получилась задача Штурма-Лиувилля с незнакомым оператором, поэтому решаем задачу

$$\begin{cases} -X''(x) - 2X'(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

для всех  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}
 \lambda = 0 : X_0''(x) + 2X_0'(x) &= 0 \\
 X_0(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 e^{-2\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0(x) = 0, \\
 \lambda = -\mu^2 < 0 : X_\mu''(x) + 2X_\mu'(x) - \mu^2 X_\mu(x) &= 0 \\
 X_\mu(x) = e^{-x} (A_\mu e^{x\sqrt{1+\mu^2}} + B_\mu e^{-x\sqrt{1+\mu^2}}) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} A_\mu + B_\mu = 0, \\ A_\mu e^{\pi\sqrt{1+\mu^2}} + B_\mu e^{-\pi\sqrt{1+\mu^2}} = 0 \end{cases} &\Rightarrow X_\mu(x) = 0, \\
 \lambda = \mu^2 > 0 : X_\mu''(x) + 2X_\mu'(x) + \mu^2 X_\mu(x) = 0 &\Rightarrow X_\mu(x) = e^{\nu x} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \nu = -1 \pm \sqrt{1 - \mu^2} &\Rightarrow \\
 1) 1 - \mu^2 > 0 : X_\mu(x) = e^{-x} (A_\mu e^{x\sqrt{1-\mu^2}} + B_\mu e^{-x\sqrt{1-\mu^2}}) & \\
 X_\mu(x) = 0. & \\
 = e^{-x} (A_\mu \sin(x\sqrt{\mu^2 - 1}) + B_\mu \cos(x\sqrt{\mu^2 - 1})) &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} X_\mu(0) = 0 B_\mu = 0, \\ X_\mu(\pi) = 0 A_\mu \sin(\pi\sqrt{\mu^2 - 1}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi\sqrt{\mu^2 - 1} = \pi k \mu_k^2 = 1 + k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} &
 \end{aligned}$$

Итак,  $X_k(x) = e^{-x} \sin kx$ . Для нас это незнакомая система. Каковы её свойства?

Вот здесь уже придётся свести нашу задачу к классической задаче Штурма-Лиувилля, у которой свойства известны.

Умножим обе части уравнения на  $g(x) = e^{2x}$ :  $-e^{2x}X''(x) - 2e^{2x}X'(x) = \lambda e^{2x}X(x)$

$$-(e^{2x}X'(x))' = \lambda e^{2x}X(x).$$

Слева стоит оператор Штурма-Лиувилля, справа появился множитель  $g(x) = e^{2x}$ , а это означает, что система собственных функций этой задачи ортогональна «с весом»  $e^{2x}$ , т. е.  $\int_0^\pi e^{2x} X_m(x) X_n(x) dx = 0, n \neq m$ , или в нашем случае,  $\int_0^\pi e^{2x} (e^{-x} \sin kx) (e^{-x} \sin mx) dx = \int_0^\pi \sin kx \sin mxdx = \frac{\pi}{2} \delta_{km}$ , и полна в  $L_2[0; \pi]$ .

III. Дальше задачу решать можно по обычной схеме, разложив свободный член в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) e^{-x} \sin kx \Rightarrow \\
 \Rightarrow a_n(t) &= \frac{\int_0^\pi e^{2x} f(x, t) e^{-x} \sin nxdx}{\int_0^\pi e^{2x} (e^{-x} \sin nx)^2 dx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x, t) e^x \sin nxdx.
 \end{aligned}$$

### Пример 15.

Решить пример 14, если  $f(x, t) \equiv e^{-x} \sin 3x$ .

$$\begin{cases} v_{tt} - 7v_t = v_{xx} + 2v_x - e^{-x} \sin 3x, t > 0, 0 < x < \pi \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = 0, 0 < x < \pi \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=\pi} = 0, t > 0 \end{cases}$$

- Так как  $e^{-x} \sin 3x$  - собственная функция, то решение задачи можно искать в виде

$$v = f(t) e^{-x} \sin 3x, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

Краевые условия выполнены - осталось удовлетворить уравнению и начальным условиям.

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned}
 & f''(t)e^{-x} \sin 3x - 7f'(t)e^{-x} \sin 3x = \\
 & = f(t) (-6e^{-x} \cos 3x - 8e^{-x} \sin 3x) + \\
 & + 2(-e^{-x} \sin 3x + 3e^{-x} \cos 3x) f(t) - e^{-x} \sin 3x \\
 & f''(t) - 7f'(t) + 10f(t) = -1 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow f(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{10} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow v(t, x) = \left( \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{15} e^{5t} - \frac{1}{10} \right) e^{-x} \sin 3x
 \end{aligned}$$

Ответ.  $v(x, t) = \left( \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{15} e^{5t} - \frac{1}{10} \right) e^{-x} \sin 3x$ .

### 4.3 Метод Фурье на круге. Функции Бесселя

В этом параграфе собственные функции задач - это собственные функции оператора Лапласа в круге при условии, что  $u|_{r=r_0} = 0$ . Они имеют вид

$$\nu_{nk} = J_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

где в свою очередь  $A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$  - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \lambda \Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

$J_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right)$  - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -(rR_n(r))' + \frac{n^2}{r} R_n(r) = \lambda^2 r R_n(r), & \lambda_k^2 = \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} \right)^2, \\ R_n(r_0) = 0, & |R_n(0)| < \infty, \end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$  - положительные корни уравнения Бесселя порядка  $n$ :  $J_n(\mu_k) = 0, k \in \mathbb{N}$ .

Так как справа в уравнении Штурма-Лиувилля стоит не  $\lambda^2 R_n(r)$ , а  $\lambda^2 r R_n(r)$ , то собственные функции, соответствующие разным  $k$  (при фиксированном  $n$ ), не просто ортогональны, а ортогональны с весом  $r$ :  $\int_0^{r_0} r R_n^k R_n^m dr = 0, k \neq m$ .

Решение задач можно искать в виде

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi)$$

Собственные функции задач удовлетворяют уравнению  $\Delta v_{nk} = - \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} \right)^2 v_{nk}$ .

Сформулируем задачу о колебании круглой мембраны, закреплённой по краю. Задача 11\*.

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2 \Delta u + f(t, x, y), & \sqrt{x^2 + y^2} < r_0, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), u_t|_{t=0} = u_1(x, y), & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_0 \\ u|_{\sqrt{x^2 + y^2} = r_0} = 0 \end{cases}$$

Так как задача поставлена в круге, перейдём к полярным координатам:  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ . Так как точка  $(r, \varphi)$  и  $(r, \varphi + 2\pi k)$  — одна и та же точка нашей мембраны, то решение должно удовлетворять условию  $u(t, r, \varphi) = u(t, r, \varphi + 2\pi)$ . Как известно, такая замена переменных даже локально не всюду является взаимно однозначной — якобиан в точке  $r = 0$  равен 0.

Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

уравнение имеет особенность в точке  $r = 0$ . Поэтому можно ожидать некоторых особенностей решения задачи в этой точке.

В примере 9 мы уже столкнулись с тем, что переход от декартовых координат к криволинейным (сферическим) изменил задачу — перевел задачу Коши в  $\mathbb{R}^3$  в одномерную задачу о колебании полубесконечной струны.

Итак, сделаем замену переменных.

### Задача 11\*\*.

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2 \Delta u + f(t, r, \varphi) \\ r < r_0, t > 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ u(t, r, \varphi) = u(t, r, \varphi + 2\pi), \\ u|_{t=0} = u_0(r, \varphi), u_t|_{t=0} = u_1(r, \varphi), r \leq r_0 \\ u|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

• I. Первый пункт схемы решения по методу Фурье выполнен — краевые условия однородные. Приступаем сразу ко второму.

II. Делим переменные в соответствующем однородном уравнении и однородных краевых условиях.

Отделим пространственные переменные от времени:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) &= T(t)v(r, \varphi) \Rightarrow \\ \Rightarrow T''(t)v(r, \varphi) + bT'(t)v(r, \varphi) + cT(t)v(r, \varphi) &= a^2T(t)\Delta v(r, \varphi) \Leftrightarrow \\ \frac{T''(t)}{a^2T(t)} + b\frac{T'(t)}{a^2T(t)} + \frac{c}{a^2} &= \frac{\Delta v(r, \varphi)}{v(r, \varphi)} = \text{const} = \mu, \\ u|_{r=r_0} &= 0T(t)v(r_0, \varphi) = 0v(r_0, \varphi) = 0, \\ T(t)v(r, \varphi + 2\pi) &= T(t)v(r, \varphi)v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi). \end{aligned}$$

Для уравнения  $\Delta v(r, \varphi) = \mu v(r, \varphi)$  получилась краевая задача Штурма-Лиувилля. Здесь мы должны поверить, что задача

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v, x \in D \\ v|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

имеет положительные собственные значения  $\mu = \lambda^2 > 0$ .

Продолжим деление переменных

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

т. к. уравнение и краевые условия по-прежнему однородны.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \left( R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{1}{r^2} \Phi''(\varphi) &= -\lambda^2 \\ \frac{1}{R(r)} (r^2 R''(r) + r R'(r)) + \lambda^2 r^2 &= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu, \\ R(r_0) \Phi(\varphi) &= 0, R(r_0) = 0, \\ R(r) \Phi(\varphi) &= R(r) \Phi(\varphi + 2\pi) \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{aligned}$$

Получились две задачи Штурма-Лиувилля.

Первая задача,  $\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \nu \Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \end{cases}$  с незнакомым нам краевым условием периодичности решения, и вторая, для  $R(r)$ , более сложная и незнакомая:

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda^2 r^2 - \nu) R(r) = 0, & r < r_0, \\ R(r_0) = 0. \end{cases}$$

Первую систему легко решить:

$$\begin{aligned} \nu = 0 : \Phi(\varphi) &= C_1 \varphi + C_2 \Rightarrow \Phi_0(\varphi) = 1, \\ \nu > 0 : \nu = \mu^2 > 0 : \Phi(\varphi) &= \Phi(\varphi + 2\pi) \end{aligned}$$

$$A \cos \mu \varphi + B \sin \mu \varphi = A \cos \mu(\varphi + 2\pi) + B \sin \mu(\varphi + 2\pi)$$

$$\begin{aligned} (-A \sin \mu(\varphi + \pi) + B \cos \mu(\varphi + \pi)) \sin \mu \pi &= 0 \Rightarrow \mu = n, \\ n &= \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$\nu < 0 : \nu = -\mu^2 < 0 : \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

$$A \operatorname{ch} \mu \varphi + B \operatorname{sh} \mu \varphi = A \operatorname{ch} \mu(\varphi + 2\pi) + B \operatorname{sh} \mu(\varphi + 2\pi) \emptyset.$$

Отсюда следует, что собственные значения  $\nu = n^2$  неотрицательны, причём  $n = 0$  соответствует одна собственная функция  $\Phi_0(\varphi) = 1$ , а любому  $n \geq 1$  соответствуют две собственные функции:  $\cos n\varphi, \sin n\varphi, \mu = n, n \in \mathbb{N}$ . Иногда пишут так:

$$\begin{cases} \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \Phi_m(\varphi) = \sin |m|\varphi, & m = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\Phi''(\varphi) = n^2 \Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \Phi_0(\varphi) = 1, \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \mu = n, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь займёмся второй задачей. Перепишем её по-другому:

$$\begin{cases} -r^2 R''_n(r) - r R'_n(r) + n^2 R_n(r) = \lambda^2 r^2 R_n(r), & r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0. \end{cases}$$

Получились краевые задачи для  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и неизвестных  $\lambda$ .

Стоящий слева оператор не является оператором Штурма-Лиувилля. Сделаем его таковым, разделив обе части на  $r$ :

$$-r R''_n(r) - R'_n(r) + n^2 \frac{R_n(r)}{r} = \lambda^2 r R_n(r)$$

$$-(r R'_n(r))' + \frac{n^2}{r} R_n(r) = \lambda^2 r R_n(r)$$

Это новая для нас задача Штурма-Лиувилля (производные «свернулись» в одночлен) на собственные функции, но только с одним однородным краевым условием  $R_n(r_0) = 0$ :

$$\begin{cases} -(rR'_n(r))' + \frac{n^2}{r}R_n(r) = \lambda^2 r R_n(r), & r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0. \end{cases}$$

Однако заметим, что оператор Штурма-Лиувилля не является классическим - условие  $p(r) \geq p_0 > 0$  не выполнено, потому что  $p(r) = 0$  при  $r = 0$ .

Отступление\*. Рассмотрим однородное уравнение Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

• В классическом случае  $p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0, p(x) \in C^1[a; b], q(x) \in C[a; b]$ . Но не всегда это выполнено - бывает, что  $p(x) = 0$  в одном или обоих концах отрезка.

Как это влияет на решения?

Выпишем вронскиан фундаментальной системы решений:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = C e^{-\int \frac{p'(x)}{p(x)} dx} = C e^{-\ln |p(x)|} = \frac{C^*}{p(x)}.$$

Отсюда следует, что если  $p(x)$  в какой-нибудь точке обращается в 0, то не существует двух линейно-независимых решений  $y(x) \in C^1[a; b]$ .

Поэтому задача, если имеет, то только одно решение, ограниченное вместе с производной в окрестности точки, в которой  $p(x) = 0$ .

Нас интересует решение уравнения 2-го порядка на отрезке  $[0; r_0]$  - оно, по крайней мере, ограничено вместе с производной.

Для наших задач достаточно вынести условие ограниченности при  $r = 0$  в условие исходной задачи 11\*\*, и оно является второй частью однородного условия на границе при нахождении собственных функций задачи. Окончательно задача примет следующий вид.

### Задача 10.

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2 \Delta u + f(t, r, \varphi), & r < r_0, t > 0 \\ u(t, r, \varphi) = u(t, r, \varphi + 2\pi), \\ u|_{t=0} = u_0(r, \varphi), u_t|_{t=0} = u_1(r, \varphi), & r \leq r_0, \\ u|_{r=r_0} = 0, |u|_{r=0} < \infty \end{cases}$$

Наша задача Штурма-Лиувилля теперь имеет вид

$$\begin{cases} -(rR'_n(r))' + \frac{n^2}{r}R_n(r) = \lambda^2 r R_n(r), & r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0, |R_n(0)| < \infty. \end{cases}$$

Итак, свойства  $R_n(r)$  при фиксированном  $n$  и различных  $\lambda$  стали понятны:  $R_n^{\lambda_m}(r)$  и  $R_n^{\lambda_k}(r)$  ортогональны с «весом  $r$ »:  $\int_0^{r_0} r R_n^{\lambda_k} R_n^{\lambda_m} dr = 0, \lambda_k \neq \lambda_m$  и представляют полную в  $L_2[0; r_0]$  систему.

Осталось решить эту задачу.

Сделаем замену переменных (у нас  $\lambda^2 > 0$ ):  $\lambda r = x \Rightarrow \frac{d}{dr} = \lambda \frac{d}{dx}, R_n(r) = \tilde{R}_n(x)$  и перепишем уравнение по-другому. Тогда уравнение примет вид уравнения Бесселя порядка  $n$ :

$$x^2 \tilde{R}_n''(x) + x \tilde{R}_n'(x) + (x^2 - n^2) \tilde{R}_n(x) = 0.$$

Так как  $p(0) = 0$ , то, в силу отступления\*, может существовать только одно ограниченное вместе с производной в окрестности 0 решение. Такое решение существует, и оно называется функцией Бесселя порядка  $n$ :

$$R_n(r) = \tilde{R}_n(\lambda r) = J_n(\lambda r).$$

Подставим краевое условие:

$$\begin{aligned} R_n(r_0) = \tilde{R}_n(\lambda r_0) = 0 J_n(\lambda r_0) = 0 \\ \lambda r_0 = \mu_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots \\ \lambda_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}, \quad k = 1, 2, \dots \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_n^k(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $\mu_k^{(n)}$  - положительный корень функции Бесселя  $J_n(x) : J_n(\mu_k^{(n)}) = 0, \mu_k^{(n)} > 0, k \in \mathbb{N}$ .

При этом при любом фиксированном  $n$  система собственных функций  $J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)$  полна в  $L_2[0; r_0]$  и ортогональна с «весом»  $r : \int_0^{r_0} r J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right) J_n\left(\frac{\mu_l^{(n)}}{r_0}r\right) dr = 0, k \neq l$ .

Отсюда следует: для решения всей задачи необходимо запомнить, что

$$\begin{aligned} \Delta v_{nk} &= -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2 v_{nk} = \\ &= \Delta \left( I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \right) = \\ &= -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2 \left( I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \right), \\ n &\in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

III. Находим решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от  $t$ :

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi)$$

Если уравнение неоднородное, то при фиксированном  $t$  разлагаем  $f(t, r, \varphi)$  в ряд Фурье по системе собственных функций  $f(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi)$ . То же придётся сделать и с начальными условиями:

$$u_0(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{nk} v_{nk}(r, \varphi), \quad u_1(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{nk} v_{nk}(r, \varphi)$$

Это можно сделать последовательно.

Сначала можно разложить при фиксированных значениях  $t$  и  $r$  функцию  $f(t, r, \varphi)$  в знакомый ряд по тригонометрической системе:

$$f(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t, r) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t, r) \sin n\varphi$$

а затем каждый коэффициент по системе функций Бесселя.

Например,

$$a_n(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}(t) I_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right) c_{nk}(t) \frac{\int_0^{r_0} r a_n(t, r) I_n \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right) dr}{\int_0^{r_0} r I_n^2 \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right) dr}.$$

К сожалению, кроме написания формул, мы ничего вычислить не можем - так их и оставляем.

Подставляем полученные ряды в уравнение и начальные условия:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T''_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi) + b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T'_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi) + \\ & + c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi) = \\ & = -a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t) \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} \right)^2 v_{nk}(r, \varphi) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi), \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(0) v_{nk}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_{nk} v_{nk}(r, \varphi) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T'_{nk}(0) v_{nk}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{nk} v_{nk}(r, \varphi). \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} & T''_{nk}(t) + b T'_{nk}(t) + c T_{nk}(t) = -a^2 \left( \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} \right)^2 T_{nk}(t) + f_{nk}(t), \\ & T_{nk}(0) = g_{nk}, \quad T'_{nk}(0) = h_{nk}. \end{aligned} \right.$$

Получили задачи Коши для уравнений относительно  $T_{nk}(t)$ , которые имеют единственные решения.

Выкладки здесь громоздкие - поэтому в наших задачах чаще всего попадают такие свободные члены и начальные условия, где можно ограничиться одномерными рядами по функциям Бесселя.

### Пример 16.

$$\left\{ \begin{aligned} & u_t = 5\Delta u - 3u + J_3 \left( \frac{1}{4} \mu_2^{(3)} r \right) \cos 3\varphi + f(r) \sin 2\varphi \\ & u|_{t=0} = f(r) \cos 3\varphi, \quad r < 4, t > 0, u = u(r, \varphi, t), \\ & u(t, r, \varphi) = u(t, r, \varphi + 2\pi), \\ & u|_{r=4} = 0, |u(0)| < \infty, \end{aligned} \right.$$

где  $f(r)$  - гладкая на  $[0; 4]$  функция,  $\mu_2^{(3)}$  - положительный нуль функции Бесселя  $J_3$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .



• Так как в уравнение и начальные условия входят только  $\sin 2\varphi, \cos 3\varphi$ , то решение задачи можно сразу искать в виде суммы двух рядов  $u(t, r, \varphi) = \sum_1^\infty T_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right) \cos 3\varphi + \sum_1^\infty Q_k(t) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right) \sin 2\varphi$ , а можно отдельно решить две задачи.

Пример 16\*.

$$\begin{cases} u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}r\right) \cos 3\varphi, \\ r < 4, t > 0, u = u(t, r, \varphi), \\ u|_{t=0} = f(r) \cos 3\varphi \\ u(t, r, \varphi) = u(t, r, \varphi + 2\pi), \\ u|_{r=4} = 0, |u(0)| < \infty \end{cases}$$

Пример 16\*\*.

$$\begin{cases} u_t = 5\Delta u - 3u + f(r) \sin 2\varphi, r < 4, t > 0, u = u(t, r, \varphi), \\ u|_{t=0} = 0, \\ u(t, r, \varphi) = u(t, r, \varphi + 2\pi), \\ u|_{r=4} = 0, |u(0)| < \infty. \end{cases}$$

Решение первой задачи - Пример 16\*.

Ищем решение в виде  $u(t, r, \varphi) = \sum_1^\infty T_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right) \cos 3\varphi$ . Подставляем в уравнение и приравняем коэффициенты при линейно-независимых множителях:

$$\begin{cases} T'_k(t) = -T_k(t) \left( 5 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} \right)^2 + 3 \right), k \neq 2, \\ T'_2(t) = -T_2(t) \left( 5 \left( \frac{\mu_2^{(3)}}{4} \right)^2 + 3 \right) + 1. \end{cases}$$

Теперь подставляем  $t = 0 : T_k(0) = a_k$ , где

$$f(r) = \sum_{k=1}^\infty a_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right) \Rightarrow a_k = \frac{\int_0^4 r f(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right) dr}{\int_0^4 r J_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right) dr}$$

Решаем задачи Коши:

$$T_k(t) = a_k e^{-\left(5 \left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right)t}, k \neq 2$$

$$T_2(t) = \frac{1}{5 \left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2 + 3} \left( 1 - e^{-\left(5 \left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right)t} \right) + a_2 e^{-\left(5 \left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right)t}$$

Решение второй задачи - Пример 16\*\*.

Разложим свободный член в ряд Фурье:

$$f(r) = \sum_1^\infty b_k J_2\left(\frac{1}{4}\mu_k^{(2)}r\right), \text{ где } b_k = \frac{\int_0^4 r f(r) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right) dr}{\int_0^4 r J_2^2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right) dr}$$

Получим решение задачи в виде ряда

$$u(t, r, \varphi) = \sum_1^{\infty} Q_k(t) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} r \right) \sin 2\varphi$$

После подстановки в уравнение и начальное условие получим

$$Q'_k(t) = -Q_k(t) \left( 5 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} \right)^2 + 3 \right) + b_k, \quad Q_k(0) = 0$$

$$Q_k(t) = \frac{b_k}{\left( 5 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} \right)^2 + 3 \right)} \left( 1 - e^{-\left( 5 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} \right)^2 + 3 \right) t} \right).$$

Ответ.  $u(r, \varphi, t) = \sum_1^{\infty} T_k(t) J_3 \left( \frac{\mu_k^{(3)}}{4} r \right) \cos 3\varphi + \sum_1^{\infty} Q_k(t) J_2 \left( \frac{\mu_k^{(2)}}{4} r \right) \sin 2\varphi$ , где все входящие сюда выражения определены выше.

#### 4.4 Эллиптические уравнения

В отличие от смешанных задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, для эллиптических уравнений ставится только краевая задача:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), x \in D, \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})|_{x \in \partial D} = u_0(x), \end{cases}$$

где  $n$  - внешняя нормаль к границе области  $D$ .

При этом, если  $\beta = 0$ , задача называется задачей Дирихле, если  $\alpha = 0$ , задача называется задачей Неймана, если  $\alpha\beta \neq 0$ , задача называется смешанной задачей.

Задачи будут решаться в полярных или сферических координатах. Заданные краевые условия произвольные, неоднородные. Однородные краевые условия для нахождения собственных функций возникают из-за того, что области имеют специальный вид, а потому решение должно иметь период  $2\pi$ , а в случае  $\mathbb{R}^3$  прибавляются условия  $\theta = 0, \theta = \pi$  (уравнение Лапласа в новых координатах при этом имеет особенность).

#### Уравнение Лапласа в $\mathbb{R}^2$

Задачи будем решать внутри круга, вне круга или внутри кольца. В отличие от задач гиперболического и параболического типа, рассмотренных в предыдущем параграфе, краевые условия неоднородные.

Решение будем искать в полярных координатах.

А тогда, как и в предыдущих задачах на круглой мембране, опять необходимо, чтобы  $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$ .

Будем решать следующие задачи.

$$\begin{aligned} \text{Задача 11. } & \begin{cases} \Delta u = f(r, \varphi), r < R_0 \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi), \\ u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi). \end{cases} \\ \text{Задача 12. } & \begin{cases} \Delta u = f(r, \varphi), R_1 < r < R_2, \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_r)|_{r=R_1} = u_0(\varphi), \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_r)|_{r=R_2} = u_1(\varphi), \\ u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Задача 13. } \begin{cases} \Delta u = f(r, \varphi), r > R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi), \\ u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi). \end{cases}$$

I. При решении неоднородного уравнения Пуассона прежде всего находим частное решение  $w_0(r, \varphi)$ ,  $w_0(r, \varphi + 2\pi) = w_0(r, \varphi)$ , затем делаем сдвиг  $v = u - w_0(r, \varphi)$ , сводя уравнение Пуассона к уравнению Лапласа. При этом могут измениться неоднородные краевые условия. Например, в задаче 11:

$$\begin{aligned} v = u - w_0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, r < R_0; \\ (\alpha v + \beta v_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi) - (\alpha w_0 + \beta w_{0r})|_{r=R_0} = v_0(\varphi), \\ v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi). \end{cases} \end{aligned}$$

II. Теперь уравнение однородное, остальные условия, кроме краевого, тоже однородные - приступаем ко второму пункту метода Фурье - можем делить переменные.

Будем искать решение уравнения  $\Delta v \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0$  в виде  $u = R(r)\Phi(\varphi)$ . Подставим в уравнение и однородное условие

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) r (r R'(r))' + R(r) \Phi''(\varphi) &= 0 \\ \frac{r (r R'(r))'}{R(r)} &= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \text{const} = \mu^2, \\ R(r) \Phi(\varphi + 2\pi k) &= R(r) \Phi(\varphi) \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{aligned}$$

Мы сразу написали, что  $\text{const} = \mu^2$ , т. к.  $-\Phi''(\varphi)$  - одномерный оператор Штурма-Лиувилля. Получилась знакомая задача (см. с. 47):

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \\ \Phi_0(\varphi) = 1, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

С  $\Phi(\varphi)$  определились. Так как мы делили переменные в «родном» уравнении, а не в соответствующем, то решим уравнение и для  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{r (r R'(r))'}{R(r)} &= n^2 r^2 R''(r) + r R'(r) - n^2 R(r) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\text{т. к. это уравнение Эйлера}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad R_n(r) = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что мы получили решения уравнения Лапласа в виде

$$\begin{aligned} v_0(r, \varphi) &= R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad n = 0, \\ v_n(r, \varphi) &= R_n(r) \Phi_n(\varphi) = \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \\ &n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

III. Теперь, в зависимости от того, какую из трёх задач решаем, будем искать решение в виде формального ряда, удовлетворяющего соответствующим условиям при  $r = 0$  или  $r = \infty$ .

- Если задача внутри круга, то

$$u(r, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

- 2 • Если задача вне круга, то

$$u(r, \varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C_0$$

3 • Если задача в кольце, то

$$u(r, \varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_1^{\infty} \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \\ + \sum_1^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) \sin n\varphi$$

**Как найти частное решение, если свободный член  $f(r, \varphi) = ar^n \cos m\varphi$  или  $f(r, \varphi) = ar^n \sin m\varphi$ ,  $(n+2)^2 \neq m^2$ ?**

• В этом случае решение можно искать в виде  $u_{\text{частн}} = br^{n+2} \cos m\varphi$ , т. е. увеличив степень  $r$  на 2. Подставляем в уравнение  $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = ar^n \cos m\varphi$ :

$$b(n+2)(n+1)r^n \cos m\varphi + b(n+2)r^n \cos m\varphi - bm^2r^n \cos m\varphi = \\ = ar^n \cos m\varphi b = \frac{a}{(n+2)^2 - m^2}.$$

Видно, что так можно делать, если  $(n+2)^2 \neq m^2$ .

**Как найти частное решение, если свободный член  $f(r, \varphi) = ar^n \cos m\varphi$  или  $f(r, \varphi) = ar^n \sin m\varphi$ ,  $(n+2)^2 = m^2$ ?**

• В этом случае  $r^{n+2} \cos(n+2)\varphi$  является решением уравнения Лапласа. Решение ищется в виде  $u_{\text{частн}} = \varphi(r) \cos m\varphi$  (см. пример 18).

Пример 17. 
$$\begin{cases} \Delta u = y^2, r < 2, \\ u|_{r=2} = \sin \varphi + \frac{4}{3} \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos 2\varphi. \end{cases}$$

• Ищем частное решение в виде

$$u_{\text{частн}} = ar^4 + br^4 \cos 2\varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow 12ar^2 + 4ar^2 + 12br^2 \cos 2\varphi + 4br^2 \cos 2\varphi - 4br^4 \cos 2\varphi = \\ = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2 \cos 2\varphi}{2} \Rightarrow u_{\text{частн}} = \frac{r^4}{32} - \frac{r^4}{24} \cos 2\varphi$$

Делаем сдвиг:

$$v = u - \frac{r^4}{32} + \frac{r^4}{24} \cos 2\varphi \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, r < 2, \\ v|_{r=2} = -\frac{1}{2} + \sin \varphi + \frac{4}{3} \cos \varphi. \end{cases}$$

Так как это задача Дирихле на круге, то решение находится «устно»:

$$v = -\frac{1}{2} + \left(\frac{r}{2}\right) \sin \varphi + \frac{4}{3} \left(\frac{r}{2}\right) \cos \varphi$$

Ответ.  $u = \frac{r^4}{32} - \frac{r^4}{24} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{r}{2} \sin \varphi + \frac{2r}{3} \cos \varphi.$

Пример 18. 
$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\cos 3\varphi}{r^5}, r > 2, \\ u|_{r=2} = \sin 2\varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

• В этом примере, если увеличить степень на 2, то  $\frac{\cos 3\varphi}{r^3}$  является решением уравнения Лапласа. Поэтому частное решение надо искать в общем виде:

$$u_{\text{частн}} = f(r) \cos 3\varphi \Rightarrow r^2 f''(r) + r f'(r) - 9f(r) = r^{-3}, \\ f_{\text{однор}}(r) = Ar^3 + \frac{B}{r^3}.$$

Видно, что имеет место резонанс:

$$\begin{aligned} f_{\text{частн}} &= br^{-3} \ln r \Rightarrow \\ &\Rightarrow 12br^{-3} \ln r - 7br^{-3} - 3br^{-3} \ln r + br^{-3} - 9br^{-3} \ln r = r^{-3} \\ b &= -\frac{1}{6} \Rightarrow f_{\text{частн}} = -\frac{\ln r}{6r^3}. \end{aligned}$$

В качестве частного решения можно взять  $-\frac{\ln r}{6r^3} \cos 3\varphi$ .  
Делаем сдвиг:

$$\begin{aligned} v &= u + \frac{\ln r}{6r^3} \cos 3\varphi u = v - \frac{\ln r}{6r^3} \cos 3\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, r > 2, \\ v|_{r=2} = \sin 2\varphi + \cos \varphi + \frac{\ln 2}{48} \cos 3\varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

Полученная задача Дирихле решается устно:

$$v = \left(\frac{2}{r}\right) \cos \varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^2 \sin 2\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^3 \frac{\ln 2}{48} \cos 3\varphi$$

Ответ.  $u = \frac{2 \cos \varphi}{r} + \frac{4 \sin 2\varphi}{r^2} + \frac{(\ln 2 - \ln r) \cos 3\varphi}{6r^3}$ .

Пример 19. 
$$\begin{cases} \Delta u = 12(x^2 - y^2), 1 < r < 2, \\ u_r|_{r=1} = -6 \cos 2\varphi + 16 \sin 4\varphi, \\ u_r|_{r=2} = 28 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi. \end{cases}$$

• Заметим, что  $12(x^2 - y^2) = 12r^2 \cos 2\varphi$ . Поэтому ищем частное решение и делаем сдвиг:

$$\begin{aligned} u_{\text{частн}} &= r^4 \cos 2\varphi \Rightarrow v = u - r^4 \cos 2\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v_r|_{r=1} = -10 \cos 2\varphi + 16 \sin 4\varphi \\ v_r|_{r=2} = -4 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь ищем решение задачи:

$$v = \cos 2\varphi \left( ar^2 + \frac{b}{r^2} \right) + \sin 4\varphi \left( cr^4 + \frac{d}{r^4} \right) + C.$$

Подставляем в краевые условия:

$$\begin{cases} -10 \cos 2\varphi + 16 \sin 4\varphi = \\ \quad = \cos 2\varphi (2a - 2b) + \sin 4\varphi (4c - 4d) \\ -4 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi = \\ \quad = \cos 2\varphi \left( 4a - \frac{2b}{8} \right) + \sin 4\varphi \left( 32c - \frac{4d}{32} \right) \\ \begin{cases} a = -\frac{11}{15}, b = 4\frac{64}{15}, \\ c = 0, d = -4. \end{cases} \end{cases}$$

+C.

Ответ.  $u(r, \varphi) = r^4 \cos 2\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{15} (-11r^2 + \frac{64}{r^2}) - \frac{4}{r^4} \sin 4\varphi +$

Примечание. Обратите внимание на то, что при решении задачи Неймана мы не определили число  $C$ . Это правильно, потому что решение задачи Неймана для уравнения Лапласа определено с точностью до произвольной постоянной.

## 4.5 Метод Фурье с применением сферических функций

### 4.5.1 7.1. Схема решения

Теперь будем решать краевые задачи для внутренности шара, внешности шара и шарового слоя.

**Задача 14.**

$$\begin{cases} \Delta u = f(r, \varphi, \theta), r < R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi, \theta), \\ u(r, \varphi + 2\pi, \theta) = u(r, \varphi, \theta). \end{cases}$$

**Задача 15.**

$$\begin{cases} \Delta u = f(r, \varphi, \theta), r > R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi, \theta), \\ u(r, \varphi + 2\pi, \theta) = u(r, \varphi, \theta). \end{cases}$$

**Задача 16.**

$$\begin{cases} \Delta u = f(r, \varphi, \theta), R_1 < r < R_2, \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_r)|_{r=R_1} = u_0(\varphi, \theta), \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_r)|_{r=R_2} = u_1(\varphi, \theta), \\ u(r, \varphi + 2\pi, \theta) = u(r, \varphi, \theta). \end{cases}$$

I. Как всегда при решении уравнения Пуассона сначала находим частное решение и сводим с помощью сдвига к решению уравнения Лапласа.

II. Поэтому сразу начнём со второго пункта: будем решать уравнение Лапласа - ищем решение в виде  $u(r, \varphi, \theta) = R(r)V(\varphi, \theta)$ :

$$\begin{aligned} & V(\varphi, \theta) \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \\ & + \frac{R(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{R(r)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V(\varphi, \theta)}{\partial \varphi^2} = 0 \\ & \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \\ & = - \frac{1}{V(\varphi, \theta)} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V(\varphi, \theta)}{\partial \varphi^2} \right) = \lambda. \end{aligned}$$

Оператор  $-\left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$  называется оператором Бельтрами. Найдём собственные функции и собственные значения задачи

$$\begin{cases} - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V(\varphi, \theta)}{\partial \varphi^2} \right) = \lambda V(\varphi, \theta), \\ V(\varphi + 2\pi, \theta) = V(\varphi, \theta). \end{cases}$$

Опять разделим переменные:  $V(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi)\Theta(\theta) \Rightarrow \Rightarrow -\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} (\sin \theta \cdot \Theta'(\theta))' - \lambda \sin^2 \theta = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu^2$ .

Появилась знакомая задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 = k^2 \Rightarrow \Phi_0(\varphi) = 1, \Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi, k \in \mathbb{N},$$

и незнакомое уравнение

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + k^2 \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} = \lambda \Theta(\theta)$$

Сделаем замену переменных:  $\xi = \cos \theta, \xi \in [-1; 1]$ . Уравнение примет вид уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{k^2}{1 - \xi^2} \Theta(\xi) = \lambda \Theta(\xi)$$

у которого, на первый взгляд, нет никаких краевых условий. Заметим, что при решении наших задач  $\theta \in [0; \pi]$ , т. е. есть  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , или в новых переменных  $\xi = 1$  и  $\xi = -1$ . При этом в этих точках  $p(\xi) = 0$ . Это, в силу отступления на с. 48 означает, что может существовать не более одного решения, ограниченного вместе с производной на отрезке  $[-1; 1]$ .

Условие ограниченности на отрезке  $[-1; 1]$  играет роль однородных краевых условий для задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{k_0^2}{1 - \xi^2} \Theta(\xi) = \lambda \Theta(\xi), \xi \in [-1; 1] \\ |\Theta(\xi)| < \infty, \xi \in [-1; 1] \end{cases}$$

Рассмотрим сначала задачу при  $k = 0$ :

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta(\xi)}{d\xi} \right) = \lambda \Theta(\xi) \\ |\Theta(\xi)| < \infty, \xi \in [-1; 1] \end{cases}$$

Полученное уравнение называется уравнением Лежандра, который доказал, что ограниченное на отрезке  $\xi \in [-1; 1]$  решение существует, если  $\lambda = n(n + 1), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , и оно выражается формулой

$$\Theta_n(\xi) = P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

где  $P_n(\xi)$  называется полиномом Лежандра (другого, линейно независимого с этим и ограниченного вместе с первой производной решения на отрезке нет). Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке  $[-1; 1]$  :  $\int_{-1}^1 \Theta_n(\xi) \Theta_m(\xi) d\xi = 0, n \neq m$ , и представляют полную в  $L_2[-1; 1]$  систему.

Итак,

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta(\xi)}{d\xi} \right) = n(n + 1) \Theta(\xi), \\ |\Theta(\xi)| < \infty, \xi \in [-1; 1], \\ \Theta_n(\xi) = P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Тогда решением задачи

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{k_0^2}{1 - \xi^2} \Theta(\xi) = n(n + 1) \Theta(\xi), \\ |\Theta(\xi)| < \infty, \quad \xi \in [-1; 1] \end{cases}$$

при каждом фиксированном значении  $k_0$  являются так называемые присоединённые полиномы Лежандра:

$$\Theta_n^{k_0}(\theta) = P_n^{k_0}(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{k_0}{2}} \frac{d^{k_0}}{d\xi^{k_0}} P_n(\xi)$$

$$P_n^{k_0}(\xi) = \sin^{k_0} \theta \cdot P_n^{(k_0)}(\cos \theta), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k_0 \leq n.$$

Система  $\{P_n^{k_0}(\theta)\}$ ,  $n \geq k_0$ ,  $n = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$  ортогональна на отрезке  $[-1; 1]$ :  $\int_{-1}^1 P_n^{k_0}(\xi) P_m^{k_0}(\xi) d\xi = 0$ ,  $n \neq m$  (производные одного порядка у полиномов разных степеней) и является полной в  $L_2[-1; 1]$ .

Видно, что каждому фиксированному  $n$  соответствует  $2k_0 + 1$  собственных функций оператора Бельтрами:

$$Y_n^0(\varphi, \theta) = P_n^{(0)}(\cos \theta) \equiv P_n(\cos \theta)$$

$$Y_n^k(\varphi, \theta) = \begin{cases} \sin^k \theta P_n^{(k)}(\cos \theta) \cos k\varphi, & k = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sin^{|k|} \theta P_n^{(|k|)}(\cos \theta) \sin |k|\varphi, & k = -1, -2, \dots, -n, \end{cases}$$

каждая из которых называется сферической функцией. Их алгебраическая сумма  $\sum_{k=-n}^n a_{nk} Y_n^k(\varphi, \theta)$  тоже является сферической функцией. Она обозначается  $Y_n$ , называется сферической функцией порядка  $n$ , и, как собственная функция оператора Бельтрами, удовлетворяет уравнению

$$-\left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n(\varphi, \theta)}{\partial \varphi^2} \right) =$$

$$= n(n+1) Y_n(\varphi, \theta), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$Y_n(\varphi, \theta) = \sum_{k=-n}^n a_{nk} Y_n^k(\varphi, \theta)$$

Заметим, что порядок функции определяется степенью полинома Лежандра (независимо от порядка производной в присоединённом полиноме).

Система  $\{Y_n^k(\varphi, \theta)\}$  ортогональна на поверхности единичной сферы и полна на ней в  $L_2(S_1)$ .

Так как деление переменных происходило в однородном уравнении, то придётся найти и  $R(r)$ :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \lambda = n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow r^2 R''(r) + 2r R'(r) - n(n+1) R(r) = 0 \Rightarrow R_n(r) = C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}.$$

Функция

$$\left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) \sin^k \theta P_n^{(k)}(\cos \theta) (c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \leq n$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и называется шаровой функцией.

III. Теперь ищем решение задачи в виде формальных рядов, где каждое слагаемое является решением уравнения Лапласа: а) внутри шара в виде ряда

$$u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n Y_n(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=-n}^n a_{nk} Y_n^k(\varphi, \theta), \quad r < R$$

б) вне шара в виде

$$u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{r^{n+1}} Y_n(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=-n}^n a_{nk} Y_n^k(\varphi, \theta), \quad r > R$$

и

в) внутри шарового слоя в виде



$$\begin{aligned}
u(r, \varphi, \theta) &= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) \sum_{k=0}^n \sin^k \theta P_n^{(k)}(\cos \theta) (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi), \\
R_1 &< r < R_2.
\end{aligned}$$

Осталось удовлетворить краевым условиям. Для этого придётся разложить их в ряды Фурье по сферическим функциям.

### Пример 20.

Задача Дирихле в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < r_0, \\ u|_{r=r_0} = u_0(\varphi, \theta) \\ u(r, \varphi + 2\pi, \theta) = u(r, \varphi, \theta) \end{cases}$$

• Пусть краевое условие разложено в ряд по сферическим функциям:  $u_0(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n Y_n(\varphi, \theta)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r_0^n Y_n(\varphi, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n Y_n(\varphi, \theta) \\
\Leftrightarrow \alpha_n r_0^n &= \beta_n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{\beta_n}{r_0^n} \Rightarrow u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{r}{r_0} \right)^n Y_n(\varphi, \theta).
\end{aligned}$$

Ответ.  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{r}{r_0} \right)^n Y_n(\varphi, \theta)$ .

В явном виде мы ничего не получим, кроме формул (как и для функций Бесселя), так как при разложении по сферическим функциям приходится раскладывать по присоединённым полиномам.

В принципе это можно сделать так.

Сначала можно разложить, например,  $u_0(\varphi, \theta)$  в ряд по обычной тригонометрической системе:  $u_0(\varphi, \theta) = \frac{a_0(\theta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(\theta) \cos k\varphi + b_k(\theta) \sin k\varphi)$ , а затем коэффициенты по системе присоединённых полиномов:

$$a_k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} c_{kn} P_n^k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} c_{kn} \sin^k \theta P_n^{(k)}(\cos \theta)$$

где

$$c_{km} = \frac{\int_0^\pi a_k(\theta) \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) d\theta}{\int_0^\pi \left( \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \right)^2 d\theta}$$

Аналогично,

$$b_k(r, \theta) = \sum_{n=k}^{\infty} d_{kn} P_n^k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} d_{kn} \sin^k \theta P_n^{(k)}(\cos \theta)$$

Поэтому, чтобы избежать этой громоздкости, в наших задачах краевые условия являются конечными суммами сферических функций.

## 4.5.2 7.2. Как у конкретной сферической функции определить её порядок?

При решении задач часто по сферической функции, присутствующей в краевом условии, необходимо определить соответствующую шаровую. Как?

$$\text{Пример 21.} \quad \begin{cases} \Delta u = 0, r > R \\ u_0(\varphi, \theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \cos^2 \theta \sin \theta, \\ u(r, \varphi, \theta) = u(r, \varphi + 2\pi, \theta) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0 \end{cases}$$

• Т. к. в выражении  $u_0(\varphi, \theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \cos^2 \theta \sin \theta$  присутствует  $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ , то  $k = 1$ , и речь пойдёт о функции  $Y_1^1$ , для которой уже присутствует необходимый множитель  $\sin \theta$ . Осталось выяснить, первая производная какого полинома Лежандра равна  $\cos^2 \theta$ . Ясно, это связано с многочленом 3-й степени:

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \Rightarrow P_3'(\cos \theta) = \frac{15 \cos^2 \theta}{2} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2P_3'(\cos \theta)}{15} + \frac{P_1'(\cos \theta)}{10}.$$

Видно, что первая производная содержит не только  $\cos^2 \theta$ , но и константу. Поэтому пришлось поискать ещё полином Лежандра, первая производная которого равна константе, это полином первой степени. Поэтому

$$\begin{aligned} u_0(\varphi, \theta) &= \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{2P_3^{(1)}}{15} + \frac{1}{10}\right) \sin \theta = \\ &= \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{2P_3^{(1)}}{15}\right) \sin \theta + \frac{1}{10} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin \theta P_1^{(1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = \frac{2}{15} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin \theta P_3^{(1)}(\cos \theta) + \\ &+ \frac{1}{10} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin \theta P_1^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } u = \frac{2}{15} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin \theta P_3^{(1)}(\cos \theta) + \frac{1}{10} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin \theta P_1^{(1)}(\cos \theta).$$

$$\text{Пример 22.} \quad \begin{cases} \Delta u = 20, r < \sqrt{3}, \\ u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15 \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi, \\ u(r, \varphi, \theta) = u(r, \varphi + 2\pi, \theta). \end{cases}$$

• Найдём сначала частное решение уравнения и сделаем сдвиг:

$$u_{\text{частн.}} = ar^2 \Rightarrow 2a + 4a = 20$$

$$a = \frac{10}{3} \Rightarrow u_{\text{частн.}} = \frac{10r^2}{3} \Rightarrow v = u - \frac{10r^2}{3}.$$

Перепишем задачу в новых переменных:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, r < \sqrt{3} \\ v|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15 \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi - 10 \end{cases}$$

Теперь преобразуем краевое условие к сумме сферических функций:

$$\begin{aligned}
 & 15 + 15 \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi - 10 = \\
 & = 5 + 15 (2 \cos^2 \theta - 1) - \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi = \\
 & = -10 + 30 \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{3} P_1^1 \sin \varphi = \\
 & = 20 P_2 - \sqrt{3} P_1^1 \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Теперь запишем решение в шаровых функциях:

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi, \theta) &= \frac{10r^2}{3} + 20 P_2 \left( \frac{r}{\sqrt{3}} \right)^2 - \sqrt{3} \left( \frac{r}{\sqrt{3}} \right) P_1^1 \sin \varphi = \\
 &= r^2 \left( \frac{10}{3} + \frac{20}{3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right) - r \sin \theta \sin \varphi = \\
 &= 10r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Ответ.  $u = 10r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta \sin \varphi$ .

### Пример 23.

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^4}, r > 2, \\ (u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right), u(\infty) = 0 \end{cases}$$

• Найдём сначала частное решение уравнения:

$$\begin{aligned}
 & u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r^4}, \\
 & u_{\text{частн}} = \frac{a}{r^2} \Rightarrow a(6 - 4) = 1a = \frac{1}{2} \Rightarrow v = u - \frac{1}{2r^2} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, r > 2, \\ (v - v_r)|_{r=2} = \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) - \frac{1}{4}, v(\infty) = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Теперь преобразуем краевое условие к сумме сферических функций:

$$\begin{aligned}
 & \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) - \frac{1}{4} = \sin \theta \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) + \\
 & \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \cdot \frac{2}{3} P_2^{(1)}(\cos \theta) - \frac{1}{4} P_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow v(r, \varphi, \theta) = \frac{a}{r^2} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{b}{r^3} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \cdot P_2^{(1)}(\cos \theta) + \frac{d}{r} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \cdot \frac{1}{3} P_2^{(1)}(\cos \theta) - \frac{1}{4} P_0 = \\
 & \frac{a}{4} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{b}{8} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \cdot P_2^{(1)}(\cos \theta) + \frac{d}{2} - \\
 & - \left( -\frac{2a}{8} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) P_1^{(1)}(\cos \theta) - \frac{3b}{16} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \cdot P_2^{(1)}(\cos \theta) - \frac{d}{4} \right) \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{a}{2}, \\ \frac{1}{6} = \frac{5b}{16}, \\ \frac{3d}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{8}{15}, \\ d = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow u(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{8}{15r^3} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \cdot P_2^{(1)}(\cos \theta) - \frac{1}{3r} = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r} + \\
 & \frac{1}{r^2} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \sin \theta + \frac{8}{5r^3} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) \cdot \sin \theta \cos \theta. \\
 & \text{Ответ. } u = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right) + \frac{8}{5r^3} \sin \theta \cos \theta \sin \left( \frac{\pi}{6} - \varphi \right).
 \end{aligned}$$

## 5 Функция Грина

(из Левитова Шитова добавлю методы, пока их не шарю ещё.)

## 5.1 для линейного оператора

??

### 5.1.1 Функция Грина по Константинову (??)

(в планах было почитать его методичку, мб когда-то дойду [? ])

## 5.2 Вычисление функции Грина линейного оператора с помощью преобразования Фурье

### Теория

(не уверен, что это следует читать, ибо это от конста???)

Увидим, как преобразование Фурье обобщённых функций можно использовать для решения задачи поиска функции Грина дифференциального оператора  $L_x$  вида (2.3.4). Пусть  $g(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  функция Грина оператора  $L_x$ , т. е. имеет место равенство

$$L_x g(x) = \sum_{k=1}^n a_k D_x^{\alpha_k} g(x) = \delta(x)$$

Так как преобразование Фурье осуществляет взаимно однозначное преобразование пространства  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , то вычисление обобщённой функции  $g(x)$  равносильно вычислению её преобразования Фурье  $\mathcal{F}[g](y)$

Применяя равенству (3.5.1) преобразование Фурье, получаем равносильное соотношение

$$\sum_{k=1}^n a_k \mathcal{F}[D_x^{\alpha_k} g(x)](y) = \mathcal{F}[\delta(x)](y) = 1$$

В силу утверждения 3.4.2 имеем:

$$\mathcal{F}[D_x^{\alpha_k} g(x)](y) = (-i)^{|\alpha_k|} y^{\alpha_k} \mathcal{F}[g](y)$$

Следовательно, равенство (3.5.1) равносильно уравнению

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k (-i)^{|\alpha_k|} y^{\alpha_k} \right) \mathcal{F}[g](y) = 1$$

Полученный в уравнении (3.5.2) многочлен обозначим

$$P_L(y) = \sum_{k=1}^n a_k (-i)^{|\alpha_k|} y^{\alpha_k} = \sum_{k=1}^n a_k (-iy)^{\alpha_k}, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

Равенство (3.5.2) перепишем в виде:

$$P_L(y) \mathcal{F}[g](y) = 1$$

Таким образом, вычисление преобразования Фурье функции Грина оператора  $L_x$  сводится к решению на первый взгляд несложного уравнения  $P_L(y) \mathcal{F}[g](y) = 1$ .

Однако эта кажущаяся простота обманчива. Может не получится решить это уравнение простым делением на Многочлен  $P_L(y)$ , если функция  $\frac{1}{P_L(y)}$  не принадлежит пространству  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ . Заметим, что уравнение

$$P_L(y) h(y) = 1, \quad h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$$

может иметь не одно решение, а функция Грина оператора  $L_x$ , вообще говоря, неединственна (см. пример 2.5.13). Например, если многочлен  $P_L$  имеет нуль в точке  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ , то для функции  $\delta(y - y_0)$  получаем

$$P_L(y)\delta(y - y_0) = 0$$

так как для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  в этом случае имеем:

$$\langle P_L(y)\delta(y - y_0), \varphi(y) \rangle = \langle \delta(y - y_0), P_L(y)\varphi(y) \rangle = P_L(y_0)\varphi(y_0) = 0$$

Если при этом обобщённая функция  $h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  -решение уравнения (3.5.5), то для любого числа  $a \in \mathbb{C}$  обобщённая функция  $h(y) + a\delta(y - y_0)$  также является его решением:

$$\begin{aligned} P_L(y)(h(y) + a\delta(y - y_0)) &= \\ &= P_L(y)h(y) + aP_L(y)\delta(y - y_0) = P_L(y)h(y) = 1 \end{aligned}$$

Такая ситуация возникает в случае, когда соответствующее однородное уравнение

$$P_L(y)h(y) = 0, \quad h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$$

имеет нетривиальное решение. Покажем, что любое решение  $h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  уравнения (3.5.5) порождает функцию Грина оператора  $L_x$  по формуле

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}[h(y)](x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[h(-y)](x)$$

Действительно, имеем:

(???)

что и требовалось.

### Техническая Лемма

Рассмотрим несколько примеров вычисления функции Грина, но сначала докажем одну необходимую техническую Лемму.

3.5.1.

Пусть функция  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Для произвольных  $x_0 \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$  обозначим  $P_n(x)$  многочлен Тейлора  $(n-1)$ -ого порядка функции  $\varphi$  по степеням  $(x - x_0)$ . Тогда функция

$$\xi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}, & x = x_0 \end{cases}$$

является бесконечно дифференцируемой на  $\mathbb{R}$ .

*Proof.* (плевать на него.)

□

### Дифференциальный оператор $id/dx$

Рассмотрим одномерный случай  $m = 1$ . Пусть дифференциальный оператор

$$L_x = i \frac{d}{dx}$$

Соответствующий ему многочлен

$$P_L(y) = i(-iy) = y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Получаем уравнение:

$$P_L(y)h(y) = yh(y) = 1, \quad h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

**Функция**  $\frac{1}{y} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Покажем, что функция  $\frac{1}{y} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Рассмотрим произвольную неотрицательную финитную функцию  $\varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , такую, что  $\varphi(0) > 0$ . Тогда существует число  $a > 0$ , такое, что при  $|y| < a$  выполнено неравенство  $\varphi(y) > \frac{\varphi(0)}{2}$ .

Получаем неравенства:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy &\geq \int_0^a \frac{\varphi(y)}{y} dy \geq \int_0^a \frac{\varphi(0)}{2y} dy = +\infty \\ \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(y)}{y} dy &\leq \int_{-a}^0 \frac{\varphi(y)}{y} dy \leq \int_{-a}^0 \frac{\varphi(0)}{2y} dy = -\infty \end{aligned}$$

(????) находятся, и поэтому по определению расходится несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy$ .

Это и доказывает соотношение  $\frac{1}{y} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Итак, рассматриваемое уравнение (3.5.8) не решается простым делением на  $y$ .

Тем не менее, решения этого уравнения существуют, и их много!

Прежде всего вспомним, что  $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$  (см. пример 2.1.34). Следовательно,

$$L_x(-i\theta(x)) = \frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$$

т.е.  $-i\theta(x)$  -функция Грина рассматриваемого оператора  $L_x$ . Следовательно, справедливо равенство:

$$P_L(y)\mathcal{F}[-i\theta(x)](y) = y\mathcal{F}[-i\theta(x)](y) = 1$$

где обобщённая функция  $\mathcal{P}\frac{1}{y} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  введена в определении 2.1.23. Отсюда

$$\mathcal{F}[-i\theta(x)](y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} - \pi i\delta(y)$$

Следовательно, получаем:

$$y\mathcal{P}\frac{1}{y} - \pi i y\delta(y) = 1$$

Так как в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  имеет место равенство  $y\delta(y) = 0$ , То В частности находим

$$y\mathcal{P}\frac{1}{y} = 1$$

Таким образом, обобщённая функция  $\mathcal{P}\frac{1}{y}$  в этом примере является своеобразным аналогом деления на  $y$ , дающим частное решение уравнения (3.5.8).

Вспоминая, что  $y\delta(y) = 0$ , получаем, что для любого числа  $a \in \mathbb{C}$  обобщённая функция

$$h(y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} + a\delta(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

является решением уравнения  $P_L(y)h(y) = 1$ . Заметим, что функция Грина рассматриваемого оператора  $L_x$  неединственна, так как функция медленного роста - тождественная константа - оператором  $L_x$  обнуляется. Поэтому для любого числа  $b \in \mathbb{C}$  функция  $-i\theta(x) + b$  является функцией Грина оператора  $L_x$ . Так как  $\mathcal{F}[1](y) = 2\pi\delta(y)$  (см. пример 3.1.8), то получаем только что найденный в (3.5.9) набор функций - решений уравнения (3.5.8):

$$h(y) = \mathcal{F}[-i\theta(x) + b](y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} - \pi i\delta(y) + 2\pi b\delta(y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} + a\delta(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

Для числа  $a = 2\pi b - \pi i$  Покажем, что формула (3.5.9) определяет все решения уравнения (3.5.8). Пусть  $h_1(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  и  $h_2(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  - Два его решения. Тогда функция  $h_1(y) - h_2(y) = h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  удовлетворяет однородному уравнению

$$yh(y) = 0$$

т.е. Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  справедливо равенство

$$\langle yh(y), \varphi(y) \rangle = 0$$

Для любой функции  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , такой, что  $0 \notin \text{supp } \psi$ , имеет место вложение

$$\frac{\psi(y)}{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Тогда получаем:

$$\langle h(y), \psi(y) \rangle = \left\langle yh(y), \frac{\psi(y)}{y} \right\rangle = 0$$

Теперь рассмотрим произвольную функцию  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Зафиксируем скаляр  $\eta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Тогда функция  $\psi(y) = (1 - \eta_1(y)) \varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  и  $\psi(y) = 0$  при  $|y| < 1$ . Следовательно,  $0 \notin \text{supp } \psi$ . Тогда получаем, что

$$\langle h(y), \varphi(y) \rangle = \langle h(y), \eta_1(y) \varphi(y) \rangle + \langle h(y), \psi(y) \rangle = \langle h(y), \eta_1(y) \varphi(y) \rangle$$

Далее, определим функцию

$$\xi(y) = \begin{cases} \eta_1(y) \left( \frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{y} \right), & y \neq 0 \\ \varphi'(0), & y = 0 \end{cases}$$

В силу леммы 3.5.1 имеем вложение  $\xi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , причём  $\eta_1(y) \varphi(y) = y \xi(y) + \eta_1(y) \varphi(0)$ . Следовательно, находим:

$$\begin{aligned} \langle h(y), \varphi(y) \rangle &= \langle h(y), y \xi(y) + \eta_1(y) \varphi(0) \rangle = \\ &= \langle yh(y), \xi(y) \rangle + \langle h(y) \eta_1(y) \rangle \varphi(0) = \langle h(y) \eta_1(y) \rangle \varphi(0) \end{aligned}$$

Обозначив  $a = \langle h(y), \eta_1(y) \rangle \in \mathbb{C}$ , получаем:

$$\langle h(y), \varphi(y) \rangle = a \varphi(0) = \langle a \delta(y), \varphi(y) \rangle$$

Таким образом,  $h(y) = a \delta(y)$  для подходящего числа  $a \in \mathbb{C}$ .

Множество этих обобщённых функций даёт общее решение уравнения  $yh(y) = 0$  в пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Теперь, взяв  $h_2(y) = \mathcal{P} \frac{1}{y}$  - решение уравнения (3.5.8), получим, что любое другое его решение имеет вид

$$h_1(y) = h_2(y) + h(y) = \mathcal{P} \frac{1}{y} + a \delta(y)$$

т.е. все ок.

конец, ура

**далее теория конста**

мда

снова примеры и хз что еще

мда

## 5.3 Методы функции Грина для приложений

(отдельно разовью!)

### 5.3.1 Функция грина в теории поля

??? вроде что-то было

### 5.3.2 Функция грина в КТП

(вообще, для КТП отдельно выделю тоже методы, потому что это крайне важное требование для хорошей записи по УМФ)

## 6 классические линейные уравнения

### 6.1 Уравнение Шредингера

(?? чет не понимаю, чего пишу его тут, а не в диффурах?? ладно, потом перекину мб, пока тут. мб в диффурах одномерное напишу, тут - многомерное, потому что тут дифференцирование по многим переменным будет.)

#### 6.1.1 корректность постановки задачи и существование решения

грамотная постановка задачи Шредингера (????)

Известно, что решение существует, если волновая функция лежит в области определения гамильтониана.

хз

эволюция без выполнения УШ (????)

идея почти утеряна, мб потом досмотрю

а если она не будет лежать? что, не будет эволюционировать? то УШ не будет выполняться, в то же время эволюция будет существовать.

так как у нас первичный оператор эволюции,  $U_t$ , его

$$D(U_t) = \{f \in H \mid \sum_n |r_n|^2 |e^{-iE_n t/n}| \|e_n\|^2 < +\infty\} = H$$

так что эволюция будет идти, а УШ будет не выполнено.

#### 6.1.2 решение УШ

обзор подходов и решений

Есть несколько различных подходов, обсудим их.



**типичное решение**

Метод решения следующий.

Рассматриваем оператор Шредингера

$$L = -i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

Чтобы найти решение уравнения

$$L\psi(t, x) = f \cdot \psi(t, x), \quad \psi(t, x) \in S'(\mathbb{R}^2)$$

Необходимо найти функцию Грина. Позже конкретно посмотрим пример. Итак, функция Грина для этого оператора известна, и равна:

Ее же мы покажем, как найти в следующем разделе

**решение через континуальный интеграл****6.1.3 Типичные частные случаи уравнения Шредингера**

(по идее задачи на УШ аналогичны тому, что тут разберем)

**Уравнение Шредингера в кулоновском поле**

(коломинов??)

В общем случае задача не имеет аналитического решения. Однако для ряда важных случаев это оказывается возможным.

Изучим уравнение Шредингера частицы в притягивающем Кулоновском потенциале:

$$\left( \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{r} + E \right) \psi = 0$$

здесь  $E$  - энергия состояния, а  $r$  - расстояние до притягивающего центра.

Поищем связанные состояния, которым соответствуют отрицательные уровни энергии.

Волновая функция может быть записана в виде произведения радиальной функции  $R(r)$  и угловой функции, зависящей от азимутального и полярного углов, другими словами, переменные разделяются.

Уравнение на радиальную функцию имеет вид

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + 2E \right) R(r) = 0$$

где  $l$  - орбитальное квантовое число (целое неотрицательное). Вводя функцию  $\Phi = r^{1+l}R(r)$ , мы получаем уравнение

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + E \right) \Phi = 0$$

(далее укажу, что дальше. да, пока структура слабая, но тут развилка случаев, что поделать?)

**УШ в случае  $l = 0$**  Тогда:

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} + E \right) \Phi = 0$$

(???)

Применим преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2/2 + E) \tilde{\Phi} \right] = \tilde{\Phi}$$

Нас будут интересовать связанные состояния, соответствующие отрицательной энергии.

Подставляя  $E = -\alpha^2/2$ ,  $\alpha > 0$ , и решая полученное уравнение для  $\tilde{\Phi}$  находим

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha}$$

Выражение (1.66) имеет сингулярность при  $p = \alpha$ , то есть контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа (4.27) должен идти справа от этой точки. Это означает, что при больших  $r$  функция  $\Phi(r)$  ведет себя пропорционально  $\exp(\alpha r)$ . Это поведение не соответствует связанным состояниям. Исключением является случай  $\alpha = 1/n$  ( $n$  - целое число), тогда особенность при  $p = \alpha$  исчезает. Именно эти значения соответствуют связанным состояниям частицы с энергией  $E = -1/(2n^2)$ :

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-1}}{(p + 1/n)^{n+1}}$$

Чтобы вычислить  $\Phi(r)$ , необходимо произвести обратное преобразование Лапласа  $\tilde{\Phi}(p)$ .

Для функции (1.67) соответствующий интеграл сведется к вычету в точке  $p = -1/n$ . Таким образом,

$\Phi$  будет пропорциональна  $\exp(-r/n)$  с полиномиальным множителем, который возникает в силу того, что полюс (1.67) является кратным.

Например, для основного состояния, то есть при  $n = 1$ , мы находим  $\tilde{\Phi} \propto (p + 1)^{-2}$ . Таким образом интегрирование в обратном преобразовании Лапласа сводится к взятию вычета в точке  $p = -1$ . Вычисляя этот вычет, находим  $\Phi \propto r \exp(-r)$ , то есть  $R \propto \exp(-r)$  (напишу тут итоговую формулу, пока что её не вижу, нужно доучить это.)

**Случай произвольного  $l$**  Переходим теперь к случаю произвольного  $l$ . Умножим уравнение (1.64) на  $r$  и сделаем преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2/2 + E) \tilde{\Phi} \right] = \tilde{\Phi} - pl\tilde{\Phi}$$

При выводе последнего члена мы при интегрировании по частям учли, что  $\Phi(0) = 0$  в силу определения  $\Phi = r^{1+l}R$ .

Решая полученное уравнение, находим прямое обобщение (1.66)

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{(p^2 - \alpha^2)^{l+1}} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha}$$

где, как и выше,  $E = -\alpha^2/2$ . Связанным состояниям соответствуют  $\alpha = 1/n$ . Итак

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-l-1}}{(p + 1/n)^{n+l+1}}$$

что является прямым обобщением (1.67). Поскольку полюс в точке  $p = -1/n$ , который определяет значение  $\Phi$ , является кратным, то, как и для случая нулевого орбитального квантового числа  $l$ , функция  $\Phi$  будет пропорциональна  $\exp(-r/n)$  с полиномиальным множителем. Таким образом, воспользовавшись преобразованием Лапласа, мы воспроизвели основные результаты, касающиеся задачи об атоме водорода.

### Уравнение Шредингера с подвижным $\delta$ -потенциалом по Константинову (????)

(?? почему не в каталоге задача?? перекину туда потом.)

(пока так и не понял, стоит так делать или нет???? мб вставлю в следующую часть, ибо по факту это не классическая УМФ)

Рассмотрим уравнение

$$L\psi(t, x) = \delta(t - x)\theta(t)\psi(t, x), \quad \psi(t, x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$$

с краевым условием  $\psi(t, t) = w(t)$ ,  $t > 0$ , где функция  $w \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}_+)$ , и начальным условием  $\psi(0, x) = 0$ . Действие обобщённой функции  $\delta(t - x)\theta(t)\psi(t, x)$  на пробную  $\varphi(t, x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  имеет вид:

$$\langle \delta(t - x)\theta(t)\psi(t, x), \varphi(t, x) \rangle = \int_0^{+\infty} w(t)\varphi(t, t)dt$$

Решение этого уравнения даёт свёртка источника  $\delta(t - x)\theta(t)\psi(t, x) = \delta(t - x)\theta(t)w(t)$  с найденной выше функцией Грина  $g(t, x)$  оператора  $L$ , то есть

$$\psi(t, x) = (\delta(t - x)\theta(t)w(t)) * g(t, x)$$

Для любых  $\varphi(t, x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  и 1-срезки  $\eta(t, x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  имеем:

$$\begin{aligned} \langle (\delta(t - x)\theta(t)w(t)) * g(t, x), \varphi(t, x) \rangle &= \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle \delta(t - x)\theta(t)w(t), \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \langle g(\tau, y), \varphi(t + \tau, x + y) \rangle \right\rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dt w(t) \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} dy \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{y^2}{4\tau}} \varphi(t + \tau, t + y) = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dt w(t) \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta - t)^2}{4\tau}} \varphi(t + \tau, \zeta) \end{aligned}$$

В силу вложения  $\varphi(t, x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , существует  $C > 0$ , такое, что

$$|\varphi(\xi, \zeta)| \leq \frac{C}{(1 + \xi^2)^2 (1 + \zeta^2)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

Следовательно, для любого  $t > 0$  получаем

$$\begin{aligned} \left| w(t) \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta - t)^2}{4\tau}} \varphi(t + \tau, \zeta) \right| &\leq \\ &\leq \frac{MC}{\sqrt{4\pi}} |w(t)| \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} (1 + (t + \tau)^2)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} \leq \\ &\leq \frac{MC}{\sqrt{4\pi}} \frac{|w(t)|}{(1 + t^2)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} (1 + \tau)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2}}_{=C_1} = \\ &= \frac{MCC_1}{\sqrt{4\pi}} \frac{|w(t)|}{(1 + t^2)} \end{aligned}$$

Заметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|w(t)|}{(1+t^2)} dt \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} |w(t)|^2 dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}} < +\infty$$

то есть функция  $\frac{|w(t)|}{(1+t^2)}$  абсолютно интегрируема на  $\mathbb{R}_+$ . Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\begin{aligned} & \langle (\delta(t-x)\theta(t)w(t)) * g(t, x), \varphi(t, x) \rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dt w(t) \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau, \zeta) = \\ &= \int_0^{+\infty} dt w(t) \lim_{R \rightarrow +\infty} \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau, \zeta) = \\ &= \int_0^{+\infty} dt w(t) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau, \zeta) = \\ &= \int_0^{+\infty} dt w(t) \int_t^{+\infty} d\xi \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(\xi-t)}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4(\xi-t)}} \varphi(\xi, \zeta) = \\ &= \int_0^{+\infty} d\xi \int_{\mathbb{R}} d\zeta \varphi(\xi, \zeta) \int_0^\xi dt w(t) \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4(\xi-t)}}}{\sqrt{4\pi(\xi-t)}} = \end{aligned}$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$\psi(t, x) = ie^{i\frac{\pi}{4}} \theta(t) \int_0^t \frac{w(\tau) e^{-i\frac{(x-\tau)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} d\tau$$

(???? норм решение вообще или нет???)

#### 6.1.4 Другое про уравнение Шредингера

##### Качественное описание решения (!!?!?)

(пока что качественно плохо очень чувствую, какова динамика, которая описывается УШ???? потом мб помоделирую, посмотрю.)

##### Фундаментальное решение (функция Грина) уравнения шрёдингера по ККонстантинову

Рассматриваем оператор

$$L = -i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

функцией Грина оператора  $L$  называется  $g(t, x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\text{Lg}(t, x) = \delta(t, x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}[\text{Lg}(t, x)](\tau, y) = 1$$

Будем искать функцию Грина  $g(t, x)$  оператора  $L$ , носитель которой удовлетворяет вложению:

$$\text{supp } g \subset \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$$

Имеем:

$$\mathcal{F}[Lg(t, x)](\tau, y) = (-i(-i\tau) + (-iy)^2) \mathcal{F}[g(t, x)](\tau, y) = (-y^2 - \tau) \mathcal{F}[g(t, x)](\tau, y) = 1$$

Многочлен  $P_L(\tau, y) = -y^2 - \tau$  не отделён от нуля. Для произвольного  $\varepsilon > 0$  рассмотрим многочлен

$$P_L(\tau + i\varepsilon, y) = -y^2 - \tau - i\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Тогда

$$|P_L(\tau + i\varepsilon, y)| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Следовательно,

$$P_L(\tau + i\varepsilon, y)h_\varepsilon(\tau, y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad h_\varepsilon(\tau, y) = \frac{1}{P_L(\tau + i\varepsilon, y)}$$

Если при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  выполнено  $h_\varepsilon(\tau, y) \rightarrow h(\tau, y)$ , то обобщённая функция  $h(\tau, y)$  является решением уравнения

$$P_L(\tau, y)h(\tau, y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L\mathcal{F}^{-1}[h(\tau, y)](t, x) = \delta(t, x)$$

то есть  $g(t, x) = \mathcal{F}^{-1}[h(\tau, y)](t, x)$  является функцией Грина оператора  $L$ . Заметим, что в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  справедливо

$$h_\varepsilon(\tau, y) \rightarrow h(\tau, y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}[h_\varepsilon(\tau, y)](t, x) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[h(\tau, y)](t, x)$$

Таким образом, ищем предел при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  выражения  $\mathcal{F}^{-1}[h_\varepsilon(\tau, y)](t, x)$ .

Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}[h_\varepsilon(\tau, y)](t, x), \varphi(t, x) \rangle &= \langle h_\varepsilon(\tau, y), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(t, x)](\tau, y) \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{1}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-it\tau - ixy} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R d\tau \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \underbrace{\frac{\varphi(t, x) e^{-it\tau - ixy}}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)}}_{\substack{\text{абсолютно ин-} \\ \text{тегрируема по} \\ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \text{ и по} \\ \tau \in [-R, R]}} \quad \text{теорема Фубини} \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-ixy} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)}$$

Имеем:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} = \begin{cases} 2\pi i e^{ity^2 - \varepsilon t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = 2\pi i e^{ity^2 - \varepsilon t} \theta(t)$$

При  $t < 0$  и  $R > 2(y^2 + \varepsilon)$  находим:

$$\left| \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} \right| = \left| \int_{\substack{\operatorname{Im} z > 0 \\ |z|=R}} \frac{e^{-itz} dz}{(-y^2 - z - i\varepsilon)} \right| \leq \int_{\substack{\operatorname{Im} z > 0 \\ |z|=R}} \frac{e^{t \operatorname{Im} z} |dz|}{R - y^2 - \varepsilon} \leq \int_{\substack{\operatorname{Im} z > 0 \\ |z|=R}} \frac{|dz|}{R - \frac{R}{2}} = 2\pi.$$

При  $t > 0$  и  $R > 2(y^2 + \varepsilon)$  находим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} \right| &= \left| 2\pi i e^{ity^2 - \varepsilon t} - \int_{\substack{\operatorname{Im} z \leq 0 \\ |z| < R}} \frac{e^{-itz} dz}{(-y^2 - z - i\varepsilon)} \right| \leq \\ &\leq 2\pi e^{-\varepsilon t} + \int_{\substack{\operatorname{Im} z \leq 0 \\ |z| = R}} \frac{e^{t \operatorname{Im} z} |dz|}{R - y^2 - \varepsilon} \leq 2\pi + \int_{\substack{\operatorname{Im} \\ |z| < R}} \frac{|dz|}{R - \frac{R}{2}} = 4\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех  $t \neq 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  (то есть для почти всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ), при  $R > 2(y^2 + \varepsilon)$ , выполнено

$$\left| \varphi(t, x) e^{-ixy} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} \right| \leq 4\pi |\varphi(t, x)|$$

и, в силу вложения  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , функция  $4\pi |\varphi(t, x)|$  является абсолютно интегрируемой на  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-ixy} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} &= \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-ixy} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} = \\ &= 2\pi i \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-ixy} e^{ity^2 - \varepsilon t} \theta(t) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}[h_\varepsilon(\tau, y)](t, x), \varphi(t, x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dy \frac{i}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-ixy} e^{ity^2 - \varepsilon t} \theta(t) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R dy \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \underbrace{\varphi(t, x) \theta(t) e^{-\varepsilon t} e^{ity^2 - ixy}}_{\substack{\text{абсолютно ин-} \\ \text{тегрируема по} \\ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \text{ и по} \\ y \in [-R, R]}} \stackrel{\text{теорема Фубини}}{=} \\ &= \frac{i}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \theta(t) e^{-\varepsilon t} \int_{-R}^R e^{ity^2 - ixy} dy = \\ &= \frac{i}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \theta(t) e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} \int_{-R}^R e^{i\left(\sqrt{t}y - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy \end{aligned}$$

Как известно,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi^2} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Следовательно, для любого  $t > 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  существует

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{i\left(\sqrt{t}y - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}$$

Рассмотрим функцию

$$F(T) = \int_0^T e^{i\xi^2} d\xi, \quad T \in \mathbb{R}$$

Функция  $F(T)$  является непрерывной на  $\mathbb{R}$ , и существуют пределы

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} F(T) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \lim_{T \rightarrow -\infty} F(T) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Следовательно, функция  $F(T)$  является ограниченной на  $\mathbb{R}$ , то есть

$$\exists M > 0 \quad \forall T \in \mathbb{R} \quad |F(T)| \leq M$$

Так как для любого  $t > 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  выполнено

$$\int_{-R}^R e^{i\left(\sqrt{t}t - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy = \int_{-R\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}}^{R\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}} \frac{e^{i\xi^2}}{\sqrt{t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{t}} \left( F\left(R\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - F\left(-R\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right)$$

то для любого  $R > 0$  получаем неравенство

$$\left| \int_{-R}^R e^{i\left(\sqrt{t}t - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy \right| \leq \frac{2M}{\sqrt{t}}$$

Следовательно, для любых  $t \neq 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  (то есть для почти всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ), при любом  $R > 0$ , выполнено

$$\left| \varphi(t, x) \theta(t) e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} \int_{-R}^R e^{i\left(\sqrt{t}t - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy \right| \leq 2M |\varphi(t, x)| \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$$

и, в силу вложения  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , функция  $2M |\varphi(t, x)| \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$  является абсолютно интегрируемой на  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \theta(t) e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} \int_{-R}^R e^{i\left(\sqrt{t}t - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy = \\ & = \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \theta(t) e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{i\left(\sqrt{t}t - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy = \\ & = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[h_\varepsilon(\tau, y)](t, x), \varphi(t, x) \rangle = \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}}$$

Так как при всех  $t \neq 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  (то есть для почти всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ) существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(t, x) \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} = \varphi(t, x) \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} e^{-i\frac{x^2}{4t}}$$

и при любом  $\varepsilon > 0$  имеет место неравенство

$$\left| \varphi(t, x) \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} \right| \leq |\varphi(t, x)| \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$$

где, в силу вложения  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , функция  $|\varphi(t, x)| \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$  является абсолютно интегрируемой на  $\mathbb{R}^2$ , то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle \mathcal{F}^{-1} [h_\varepsilon(\tau, y)](t, x), \varphi(t, x) \rangle = \\
& = \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{-\varepsilon t} e^{-i\frac{x^2}{4t}} = \\
& = \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} e^{-i\frac{x^2}{4t}} = \left\langle \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-i\frac{x^2}{4t}}, \varphi(t, x) \right\rangle
\end{aligned}$$

Итак, искомой функцией Грина оператора  $L$  является

$$g(t, x) = \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-i\frac{x^2}{4t}}$$

причём носитель  $g(t, x)$  удовлетворяет вложению в множество  $\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$

## О численных методах решения УШ (??)

(наверное, указать на это - будет хорошей добавкой.)

## 6.2 эллиптические уравнения

## 6.3 гиперболические уравнения

## 6.4 линейное уравнение первого порядка

### линейное уравнение первого порядка по Колоколову

Рассмотрим простейший пример уравнения, которое описывает релаксацию системы к равновесию:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = \phi$$

где  $x(t)$  - переменная, описывающая отклонение системы от равновесия,  $\gamma = \text{const} > 0$  - кинетический коэффициент, а величина  $\phi(t)$  представляет внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия.

Уравнение типа возникает в том случае, когда инерционными свойствами системы можно пренебречь.

Например, такое уравнение возникает при описании движения частицы в сильно вязкой среде.

Решение линейного уравнения (1.1) можно записать, как интеграл

$$x(t) = \int ds G(t-s) \phi(s)$$

Здесь  $G(t)$  - так называемая функция Грина, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt} + \gamma G = \delta(t)$$

то есть уравнению (1.1) с правой частью  $\phi = \delta(t)$ .

Это утверждение проверяется непосредственно: при меняя к правой части (1.2) оператор  $d/dt + \gamma$  и пользуясь затем соотношением (1.3), мы находим, что  $x(t)$  является решением уравнения (1.1).

Однако функция Грина  $G(t)$  определена уравнением (1.3) неоднозначно, поскольку его решение определено с точностью до решения однородного (то есть с нулевой правой частью) уравнения (1.1). Для того, чтобы однозначно определить функцию Грина  $G(t)$ ,



необходимо привлечь принцип причинности. Из соотношения (1.2) следует, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , поскольку система может реагировать только на воздействие, и мевшее место в прошлом, но не в будущем.

Принцип причинности уже однозначно фиксирует функцию Грина. В силу того, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , выражение (1.2) можно переписать в следующем виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds G(t-s) \phi(s)$$

Здесь подразумевается, что  $\phi$  действует на систему на нн.

Найдем явное выражение для функции Грина  $G(t)$ , которая определяется уравнением (1.3). Поскольку  $\delta(t)$  лает ся решением однородного уравнения (1.1), то есть  $G(t) = A \exp(-\gamma t)$ , где  $A$  -некоторая кон станта. У читывая, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , мы заключаем, что при  $t = 0$  функция  $G(t)$  и сп ытывает скачок  $A$ . В силу урас -нения и соотнош ен ия (4.10) этот скачок Должен быть равен единице. Таки м образом,  $A = 1$ , и мы нахо- Ди м окон чательно

$$G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t)$$

где  $\theta(t)$  -функция Хэви сай да, равная нулю при  $t < 0$  и равная едини це при  $t > 0$ . Подставляя это выражение в соотношен ие (1.4), мы находи м

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp[-\gamma(t-s)] \phi(s)$$

От сюда следует, что система постепенно (за время  $\gamma^{-1}$ ) забывает о воздей стви и н а нее, которое было в прошлом. Выражен ие (1.4) или (1.6) подразу мевает, что мы рассмагруБае задачи, когда состояние системы задано в начальный мо мент времени, а далее она эволюциони рует под внешни м воздей ствием. Будем от считы вать время от момента, когда задано начальное состояние. В данном случае н ачальное со стояние характеризует ся начальны м значением переменной  $x$ , которое мы обознач аем  $x(0)$ . Тогда вместо (1.4) решение уравнения переписется в следую- щем виде

$$x(t) = x(0)G(t) + \int_0^t ds G(t-s) \phi(s)$$

Действительно, выражение (1.7) удовлетворяет исход- ному уравнению и начальному условию, поскольку  $G(+0) = 1$

### 6.4.1 строгая теория

тут все то же самое, только через конста, его все нюансы разные.

## 6.5 линейное уравнение порядка выше первого

Рассмотри м более сложный при мер, а и менно уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi$$

где  $\nu$  и меет смы сл собственной частоты колебаний системы. Решение уравнения (1.8) можно запи сать через функцию Грина  $G(t)$ , в виде (1.2) или (1.4). Функция  $G(t)$  удовлетворяет уравнению (1.8) с  $\delta$  -функцией в правой части:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right) G(t) = \delta(t)$$

Найдем решение этого уравнения. Как мы уже установили, в силу причинности  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ . В отличие от функции Грина (1.5), решение уравнения (1.9) остается непрерывным при  $t = 0$  силу того, что в его левой части стоит вторая производная по  $t$ . В этом случае  $\delta$ -функция производится, если скачок испытывает первая производная от функции, смотри раздел 4.1. Используя соотношение (4.10) легко найти, что скачок первой производной в  $G(t)$  должен быть равен 1.

Таким образом, мы получаем, что при  $t = +0$  имеем  $G = 0, G' = 1$ . Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего  $G(t)$  при  $t > 0$ , поскольку правая часть уравнения (1.9) в этом случае равна нулю. Задача легко решается, и мы находим

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin(\nu t)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер функции Грина.

Выражение (1.4) дает решение уравнения (1.8) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть эти начальные условия являются значениями функции и ее производной,  $x$  и  $\dot{x}$ , в начальный момент времени, в качестве которого мы выберем  $t = 0$ .

Решение задачи Коши для уравнения (1.8) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (1.8), а так же начальным условиям, что легко проверить с использованием соотношений  $G(+0) = 0, \dot{G}(+0) = 1, \ddot{G}(+0) = 0$ , следующих из выражения (1.10)

### Задача 1.1.2.

Найти решение задачи Коши для уравнения (1.8) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t), \alpha > 0$ . Найти предел  $\nu \rightarrow 0$ . В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствующую функцию Грина. Однако этот способ эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Его можно найти для уравнений вида

$$L(d/dt)x = \phi$$

(1.12) относятся рассмотренные нами выше уравнения (1.1, 1.8). Решение уравнения (1.12) записывается в виде (1.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t)$$

и условию  $G = 0$  при  $t < 0$ . Заметим, что если старшая производная в  $L(d/dt)$  равна  $(d/dt)^n$ , то  $(d/dt)^m G(0) = 0$  для всех имеющих в  $L(d/dt)$  производных  $m < n$ . Выше мы нашли явные выражения для функций Грина уравнений (1.1, 1.8). Изложим теперь метод, применимый для уравнения (1.12) общего вида.

Поскольку функция Грина отлична от нуля только при положительных временах, естественно рассмотреть ее преобразование Лапласа, смотри раздел 4.2.2:

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt)G(t)$$

Учитывая, что преобразование Лапласа от  $\delta$ -функции равно единице, находим из (1.13) соотношение

$$\int_0^\infty dt \exp(-pt) L(d/dt) G(t) = 1$$

Произведем теперь интегрирование по частям в производных  $(d^n/dt^n) G$ . Учитывая, что все содержащиеся в  $L(d/dt)$  производные от функции Грина  $G(t)$  в нуле равны нулю (за исключением старшей), мы приходим к выводу, что при интегрировании по частям внеинтегральные члены не возникают, и мы находим

$$\tilde{G}(p) = 1/L(p)$$

Таким образом,  $\tilde{G}(p)$  имеет полюса, которые определяются нулями полинома  $L(p)$ .

Обратное преобразование Лапласа имеет вид (4.27), то есть

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p)$$

Контур интегрирования в этом выражении показан на рисунке 4.1. При  $t < 0$  мы можем сместить контур интегрирования вправо, поскольку  $e^{pt}$  при этом стремится к нулю. В результате мы заключаем, что при  $t < 0$  функция Грина равна нулю, как и должно быть. При  $t > 0$  мы можем смещать контур интегрирования влево, поскольку  $e^{pt}$  при этом стремится к нулю. При таком смещении мы будем "наткаться" на полюсы  $\tilde{G}(p)$ . Далее контур можно "протащить" через полюса, добавив контура, идущие вокруг полюсов. При дальнейшем сдвиге влево мы получаем нулевой вклад в интеграл по прямой, поскольку  $e^{pt}$  стремится к нулю. Таким образом, интеграл сводится к сумме контурных интегралов, идущих вокруг полюсов  $G(p)$ , смотри рисунок 1.1.

Каждый такой интеграл сводится к вычету в полюсе:

$$G(t) = \sum_i \text{res}_i \exp(pt) / L(p)$$

где суммирование идет по полюсам  $\tilde{G}(p)$ , то есть нулям  $L(p)$

**Задача 1.1.3.** Найти выражения для функций Грина (1.5, 1.10), исходя из соотношения (1.16)

Для устойчивой системы все полюса выражения (1.14) лежат в левой полуплоскости по  $p$ , что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. Тогда  $G(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (1.14) в правой полуплоскости. Вычеты в этих полюсах породят вклад в функцию Грина  $G(t)$ , расходящийся на больших  $t$ , в соответствии с (1.16).

## 6.6 Матричное уравнение

(??? где вообще оно нужно???)

### Теория

Прямое обобщением скалярного релаксационного уравнения (1.1) является линейное уравнение для векторной величины  $\mathbf{y}$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma} \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

Здесь  $\hat{\Gamma}$  - матрица, которая определяет релаксацию системы, а вектор  $\chi$  представляет внешнее воздействие на систему.

Отметим, что к виду (1.20) приводится дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка для скалярной переменной  $x$ . Для этого достаточно ввести  $y_1 = x, y_2 = dx/dt, \dots, y_n = d^{n-1}x/dt^{n-1}$ . После этого  $d\mathbf{y}/dt$  выражаются через компоненты  $\mathbf{y}$ , и исходя из введенных определений и исходное уравнение, приводя к матрице  $\hat{\Gamma} n \times n$  весьма специфического вида.

Отметим, что обратное, вообще говоря, неверно: не всякое уравнение вида (1.20) с матрицей  $\hat{\Gamma}$  размера  $n \times n$  можно свести к уравнению  $n$ -го порядка для скалярной величины. В этом смысле уравнение (1.20) является более общим.

### Задача 1.1.8.

Свести к виду (1.20) уравнение, введенное в задаче 1. 1.5. Как известно, можно ввести собственные векторы  $\mathbf{a}_i$  матрицы  $\hat{\Gamma}$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\hat{\Gamma}\mathbf{a}_i = \lambda_i\mathbf{a}_i$$

где  $\lambda_i$  - собственные значения матрицы  $\hat{\Gamma}$ . Если собственные значения не вырождены, то любой вектор можно разложить по собственным векторам  $\mathbf{a}_i$ , в частности  $\mathbf{y} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i, \chi = \sum_i \phi_i \mathbf{a}_i$ . Подставляя это представление в уравнение (1.20), находим

$$\frac{dx_i}{dt} + \lambda_i x_i = \phi_i$$

Таким образом, задача сводится к набору уже рассмотренных нами скалярных уравнений (1.1).

Можно ввести функцию Грина для уравнения (1.20), которая является матрицей  $\hat{G}(t)$ , через которую выражается решение этого уравнения

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t ds \hat{G}(t-s) \chi(s)$$

Функция Грина  $\hat{G}(t)$  равна нулю при  $t < 0$  и удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} + \hat{\Gamma}\right) \hat{G}(t) = \delta(t) \hat{1}$$

где  $\hat{1}$  - единичная матрица. Можно выписать явное выражение для собственных столбцов  $\mathbf{a}_i$  матрицы  $\hat{\Gamma}$  надо ввести собственные строки  $\mathbf{b}_i^T$ , которые удовлетворяют уравнениям  $\mathbf{b}_i^T \hat{\Gamma} = \lambda_i \mathbf{b}_i^T$ . Как известно, собственные столбцы и строки можно выбрать ортонормированными  $\mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, равный единице, если  $i = j$ , и нулю, если  $i \neq j$ . Тогда

(???)

## 6.7 Классическая задача коши

начинает с простейшей задачи коши - простейшая задача.

## 6.7.1 двумерная

## 6.7.2 трехмерная

## 7 линейный дифференциальный оператор

## 7.1 функция Грина линейного дифференциального оператора

## 7.1.1 Функция Грина для уравнения Шредингера

Поиск функции  $g(t, x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ , которая удовлетворяла бы

$$Lg(t, x) = \delta(t, x)$$

(???? как выглядит тут  $L$ ???)

## готовые ответы

искомой функцией Грина оператора  $L$  является

$$g(t, x) = \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-i\frac{x^2}{4t}}$$

причём носитель  $g(t, x)$  удовлетворяет вложению в множество  $\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$

(? как связано с УШ в квантмехе, там такого использования не помню?)

## поиск функции Грина

Поиск функции  $g(t, x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ , которая удовлетворяла бы

$$Lg(t, x) = \delta(t, x)$$

Применим метод Фурье, получим:

$$\mathcal{F}[Lg(t, x)](\tau, y) = 1$$

$$\mathcal{F}[Lg(t, x)](\tau, y) = (-i(-i\tau) + (-iy)^2) \mathcal{F}[g(t, x)](\tau, y) = (-y^2 - \tau) \mathcal{F}[g(t, x)](\tau, y) = 1$$

Многочлен  $P_L(\tau, y) = -y^2 - \tau$  не отделен от нуля. Поэтому рассмотрим многочлен с малым  $\varepsilon > 0$

$$P_L(\tau + i\varepsilon, y) = -y^2 - \tau - i\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Он уже отделен от нуля  $|P_L(\tau + i\varepsilon, y)| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ , поэтому

$$P_L(\tau + i\varepsilon, y)h_\varepsilon(\tau, y) = 1 \quad \leftrightarrow \quad h_\varepsilon(\tau, y) = \frac{1}{P_L(\tau + i\varepsilon, y)}$$

(тут теория про предел, которую я пропускаю пока что)

Осталось взять обратное преобразование Фурье:

$\forall \varphi \in S'(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}[h_\varepsilon(\tau, y)](t, x), \varphi(t, x) \rangle &= \langle h_\varepsilon(\tau, y), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(t, x)](\tau, y) \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{1}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-it\tau - ixy} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dy \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R d\tau \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \underbrace{\varphi(t, x) e^{-it\tau - ixy}}_{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t, x) e^{-ixy} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2 - \tau - i\varepsilon)} \end{aligned}$$

## 8 Краевые задачи

Крайевые задачи часто встречаются, по сути являются самыми простейшими типичными задачами математической физики.

### обзор применений краевых задач

Они нужны в...(?)

в электростатике вот, чтобы считать распределения поля...

(?? потом отдельно поищу приложения)

мб в теории струн нужны задачи про колебания струны????

### обзор различных краевых задач

порешаю - создастся такое понимание, пока что еще не создалось.

## 8.1 уравнения с оператором Лапласа

### 8.1.1 основные свойства оператора Лапласа

### 8.1.2 уравнение Пуассона

Пусть  $f(x) \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ , тогда уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x)$$

решается следующим образом:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y) dy$$

где  $\mathcal{E}_N(x)$  - это фундаментальное решение оператора Лапласа.

Справедлива следующая теорема:

При условии, что  $f(x) \in C_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$  имеем  $u(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^N)$  и функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению (3.1)

### доказательство

Прежде всего сделаем замену координат и получим следующее равенство:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) f(x-y) dy$$

Поэтому

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \left[ \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right] dy$$

где  $h \neq 0$  и  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  в  $i$ -й позиции. Однако,

$$\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)$$

равномерно в  $\mathbb{R}^N$  при  $h \rightarrow +0$ . Таким образом,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) dy, \quad i = \overline{1, N}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy, \quad i, j = \overline{1, N}$$

причем выражение в правой части (3.4) непрерывно по  $x \in \mathbb{R}^N$ . Поэтому  $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$

Шаг 2.

Поскольку фундаментальное решение  $\mathcal{E}_N(x)$  имеет особенность в точке  $x = 0$ , то фиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем шар  $B(0, \varepsilon)$  с центром в точке  $x = 0$  и радиуса  $\varepsilon > 0$ . Тогда справедлива следующая цепочка равенств: Прежде всего имеем

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c_1 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\Delta_x f(x)| |\mathcal{E}_N(y)| dy \leq \\ &\leq c_2 \begin{cases} \varepsilon^2 |1 - 2 \ln \varepsilon|, & \text{если } N = 2 \\ \varepsilon^2, & \text{если } N \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

□ Действительно, рассмотрим два случая  $N = 2$  и  $N \geq 3$ . Без ограничения общности предположим, что  $\varepsilon \in (0, 1)$ . В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \varepsilon)} |\varepsilon_2(y)| dy &= \int_0^\varepsilon r |\ln r| dr = - \int_0^\varepsilon r \ln r dr = \\ &= \left( -\frac{r^2}{2} \ln r + \frac{r^2}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{4} (1 - 2 \ln \varepsilon) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай:  $N \geq 3$ .

$$\int_{B(0, \varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)| dy = \frac{1}{N-2} \int_0^\varepsilon \frac{T^{N-1}}{r^{N-2}} dr = \frac{\varepsilon^2}{2(N-2)}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \Delta_y f(x-y) dy = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \varepsilon)} (D_y \mathcal{E}_N(y), D_y f(x-y)) dy + \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \frac{\partial f}{\partial n_y}(x-y) dS_y^{\text{def}} \end{aligned}$$

где  $n_y$  - единичный вектор внутренней нормали к  $\partial B(0, \varepsilon)$ . Прежде всего ясно, что

$$\begin{aligned} |I_{22}| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D_x f(x)| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)| dS_y \leq \\ &\leq c_3 \begin{cases} \varepsilon |\ln \varepsilon|, & \text{если } N = 2 \\ \varepsilon, & \text{если } N \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Действительно, рассмотрим два случая  $N = 2$  и  $N \geq 3$ . В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int_{\partial B(0, \varepsilon)} |\varepsilon_2(y)| dS_y = \varepsilon |\ln \varepsilon| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0, 1)} dS_y = \varepsilon |\ln \varepsilon|$$

Во втором случае справедливо выражение

$$\int_{\partial B(0, \varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)| dS_y = \frac{\varepsilon^{N-1}}{\omega_N (N-2) \varepsilon^{N-2}} \int_{\partial B(0, 1)} dS_y = c_3 \varepsilon. \quad \mathbb{Q}$$

Шаг 3. Интегрируя по частям в выражении для  $I_{21}$ , получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} I_{21} &= - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \varepsilon)} (D_y \varepsilon_N(y), D_y f(x - y)) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \varepsilon)} \Delta_y \varepsilon_N(y) f(x - y) dy - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \varepsilon_N(y)}{\partial n_y} f(x - y) dS_y = \\ &= - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \varepsilon_N(y)}{\partial n_y} f(x - y) dS_y, \quad (3.9) \end{aligned}$$

так как фундаментальное решение  $\varepsilon_N(x)$  удовлетворяет уравнению Лапласа вне начала координат. Имеют место следующие равенства:

$$D_y \varepsilon_N(y) = \frac{1}{\omega_N} \frac{y}{|y|^N} \quad \text{и} \quad n_y = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial B(0, \varepsilon).1)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varepsilon_N(y)}{\partial n_y} = (n_y, D_y \varepsilon_N(y)) = -\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial B(0, \varepsilon)$$

Поскольку  $\omega_N \varepsilon^{N-1}$  - это площадь поверхности сферы  $\partial B(0, \varepsilon)$ , то при  $\varepsilon \rightarrow +0$  имеем

$$I_{21} = - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \varepsilon_N(y)}{\partial n_y} f(x - y) dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(x - y) dS_y \rightarrow f(x)$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .  $\square$  Действительно, имеем

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(x - y) dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} [f(x - y) - f(x)] dS_y + f(x)$$

а интеграл

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} [f(x - y) - f(x)] dS_y \rightarrow +0$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .  $\mathbb{Q}$

Шаг 4. Итак, переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в равенстве (3.5), получим равенство

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

### 8.1.3 теорема о среднем

Для многих результатов относительно решений уравнения Лапласа большую роль играет теорема о среднем.

(каких?)

суть

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^N$  - открытое множество.

Рассмотрим функцию  $u(x)$  гармоническую в области  $U$ ,

т. е. удовлетворяющую уравнению Лапласа в области  $U$

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U$$

Справедлива следующая теорема о среднем:



Те о р е м а 5.

Если функция  $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U)$  гармоническая в области  $U$ ,  
то для любого шара  $B(x, r) \subset U$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int_{B(x, r)} u(y) dy$$

где  $\omega_N$  -это площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^N$ , а  $\alpha_N$  -это объем единичного шара в  $\mathbb{R}^N$ ,  
причем  $\alpha_N = \omega_N / N$

### Доказательство

Шаг 1. Положим

$$\varphi(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y$$

Сделаем следующую замену переменных в этом интеграле:

$$y = x + rz, \quad |y - x| = r \rightarrow |z| = 1, \quad dS_y = r^{N-1} dS_z$$

В силу этой замены переменных из (4.3) получим следующее равенство:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS_z$$

Дифференцируя обе части этого равенства по  $r$  мы получим следующее равенство:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} (D_y u(x + rz), z) dS_z$$

поскольку

$$\frac{\partial u(x + rz)}{\partial r} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} z_i, \quad y = x + rz$$

Теперь мы снова сделаем замену переменных  $y = x + rz$  и получим

равенство

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} (D_y u(x + rz), z) dS_z = \\ &= \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \left( D_y u(y), \frac{y-x}{r} \right) dS_y \end{aligned}$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$n_y = \frac{y-x}{r}, \quad r = |y-x| \rightarrow \left( D_y u(y), \frac{y-x}{r} \right) = (D_y u(y), n_y) = \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}$$

где  $n_y$  -это внешняя нормаль в точке  $y \in \partial B(x, r)$ . Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \left( D_y u(y), \frac{y-x}{r} \right) dS_y = \\ &= \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x, r)} \Delta_y u(y) dy = 0 \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi(r)$  постоянна и справедливо следующее равенство:

$$\varphi(r) = \lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\omega_N t^{N-1}} \int_{\partial B(x, t)} u(y) dS_y = u(x)$$

Первое равенство в (4.2) мы доказали.

Шаг 3. Докажем второе равенство. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} u(y) dy &= \int_0^r \left( \int_{\partial B(x,t)} u(z) dS_z \right) dt = \\ &= u(x) \int_0^r \omega_N t^{N-1} dt = \frac{\omega_N}{N} r^N u(x) \rightarrow u(x) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int_{B(x,r)} u(y) dy \end{aligned}$$

Т е о р е м а д о к а з а н а Теперь мы можем доказать обратную теорему. Т е о р е м а 6. Если  $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U)$  удовлетворяет условию

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y$$

для каждого шара  $B(x,r) \subset U$ , то  $u(x)$  -это гармоническая функция. Д о к а з а т е л ь с т в о . Если  $\Delta u(x) \neq 0$ , то существует шар  $B(x,r) \subset U$  такой, что либо  $\Delta u(x) > 0$  либо  $\Delta u(x) < 0$  внутри  $B(x,r)$ . Для функции  $\varphi(r)$ , опре-

деленной равенством (4.3), из доказательства предыдущей теоремы имеем равенство (4.8). Поэтому

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} \Delta_y u(y) dy \geq 0$$

что приводит к противоречию. Т е о р е м а д о к а з а н а

## 8.2 примеры краевых задач

Обсудим различные краевые задачи и их решения.

### 8.2.1 Колебание струн

(господи, ну сяду когда-то прорешаю уже эти модели, дело 1 часа, нету просто только на это его.)

#### главные формулы задачи о струне

функция Лагранжа имеет вид

$$L = T - U = \int_0^a dx \left[ \frac{1}{2} \mathbf{m} \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \lambda (\partial_x z)^2 \right],$$

откуда функционал действия

$$S[z(t, x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{V_{[2]}} d_2 x \mathcal{L} = \int_{V_{[2]}} d_2 x \left[ \frac{1}{2} \mathbf{m} \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \lambda (\partial_x z)^2 \right]$$

### Свободные колебания закреплённой струны - обзор

Рассматриваем случай, когда существуют два направления колебаний: поперечное направление оси  $X$  и продольное вдоль оси  $Z$ . Работая в плоскости  $XZ$ , рассмотрим классическую нерелятивистскую струну, концы которой закреплены в точках  $(0,0)$  и  $(a,0)$ .

В статической конфигурации струна натянута вдоль оси  $x$  между этими двумя точками. В процессе поперечных колебаний координата  $x$  каждой точки струны не изменяется со временем, а поперечное смещение точки задаётся её координатой  $z$ .

Чтобы описать классическую механику однородной струны, необходимо, как мы увидим, знание двух параметров: её натяжения  $\lambda$  и массы, приходящейся на единицу длины,  $\mathbf{m} = \frac{dm}{dx}$ . Полная масса струны равна в этом случае  $m = \mathbf{m}a$ .

**вывод уравнений движения закрепленной струны**

Выведем уравнение движения такой струны в рамках лагранжева формализма.

Для этого, необходимо найти её функцию Лагранжа  $L = T - U$ .

Рассмотрим бесконечно малый отрезок струны от точки  $x$  до точки  $x + dx$ .

Пусть в некоторый момент времени  $t$  поперечное смещение струны в точке  $x$  равно  $z(t, x)$ , а в точке  $x + dx$ , - равно  $z(t, x + dx)$ .

Тогда кинетическая энергия этого бесконечно малого отрезка равна

$$dT = \frac{1}{2} \mathbf{m} (\partial_t z)^2 dx \equiv \frac{1}{2} \mathbf{m} \dot{z}^2 dx$$

Тогда полная кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a dx \mathbf{m} \dot{z}^2$$

Потенциальная энергия струны возникает из той работы, которая должна быть выполнена для того, чтобы растянуть отрезки.

Рассмотрим бесконечно малый кусочек струны, занимающий положение от  $(x, 0)$  до  $(x + dx, 0)$ , когда струна находится в равновесии.

Если кусочек струны мгновенно растягивается от  $(x, z)$  до  $(x + dx, z + dz)$ , то изменение длины  $ds$  бесконечно малого отрезка оказывается равным

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} - dx = dx \left[ \sqrt{1 + (\partial_x z)^2} - 1 \right]$$

Нужно как-то упростить это выражение, ведь колебания у нас возможны именно малые.

Предположим, что колебания малы, подразумевая под этим то, что в любой момент времени

$$|\partial_x z| \ll 1$$

в любой точке струны.

Это условие гарантирует, что поперечное смещение струны мало по сравнению с длиной струны; длина струны изменяется мало, так что можно говорить о постоянном натяжении  $\lambda$ .

Имея в виду условие малости поперечных колебаний, для изменения длины струны  $ds$  имеем

$$ds \approx dx \frac{1}{2} (\partial_x z)^2$$

(?????) Так как выполненная работа по растягиванию каждого бесконечно малого отрезка струны равна  $\lambda ds$ , то полная потенциальная энергия струны

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a dx \lambda (\partial_x z)^2$$

Значит, функция Лагранжа есть

$$L = T - U = \int_0^a dx \left[ \frac{1}{2} \mathbf{m} \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \lambda (\partial_x z)^2 \right],$$

откуда действие

$$S[z(t, x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{V_{[2]}} d_2 x \mathcal{L} = \int_{V_{[2]}} d_2 x \left[ \frac{1}{2} \mathbf{m} \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \lambda (\partial_x z)^2 \right]$$

где  $V_{[2]} = [t_0, t_1] \times [0, a]$ .

Как видно из действия (3.5), динамика поперечных колебаний нерелятивистской струны, по существу, являет собой динамику локального поля на  $V_{[2]}$ ;

в качестве поля выступает амплитуда  $z$  поперечных колебаний струны в момент времени  $t$ .

В связи с этим, уравнение движения для нерелятивистской струны, казалось бы, имеет вид полевых уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t z} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = m\ddot{z} - \lambda \partial_x^2 z = 0$$

Однако, следует быть осторожнее, ведь при выводе уравнений Эйлера-Лагранжа на поля накладывались определённые условия на границе  $\partial V_{[4]}$  четырёхмерного объёма  $V_{[4]} = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^3$ : помимо стандартной фиксации начальных и конечных полевых конфигураций предполагалось зануление вариации полей на пространственной бесконечности.

### влияние граничных условий на задачу

В нашем случае, когда мы имеем дело с ограниченной струной, необходимо уделить особое внимание граничным условиям.

Для того чтобы это аккуратно сделать, вернёмся к первопринципам и проварируем действие (3.5):

$$\begin{aligned} \delta S[z(t, x)] &= \int_{V_{[2]}} d_2 x [m \partial_t z \partial_t \delta z - \lambda \partial_x z \partial_x \delta z] = \\ &= \int_0^a dx m \partial_t z \delta z \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \lambda \partial_x z \delta z \Big|_0^a - \int_{V_{[2]}} d_2 x [m \partial_t^2 z - \lambda \partial_x^2 z] \delta z \end{aligned}$$

Первое слагаемое в полученном выражении определяется конфигурацией струны в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ .

Мы, как обычно, фиксируем эти конфигурации, то есть по существу полагаем

$$\delta z(t_0, x) = \delta z(t_1, x) = 0$$

Это влечёт за собой обращение в нуль первого слагаемого.

Особый интерес представляет собой второе слагаемое, относящееся к движению концов струны  $z(t, 0)$  и  $z(t, a)$ :

$$- \lambda \int_{t_0}^{t_1} dt \partial_x z \delta z \Big|_0^a = \int_{t_0}^{t_1} dt [-\lambda \partial_x z(t, a) \delta z(t, a) + \lambda \partial_x z(t, 0) \delta z(t, 0)]$$

Чтобы получить в качестве уравнения движения формулу (3.6), необходимо граничное условие для каждого из двух слагаемых в последнем выражении.

Пусть  $x_*$  обозначает координату  $x$  концевой точки:  $x_*$  может равняться либо нулю, либо  $a$ .

Выбор концевой точки означает фиксацию значения  $x_*$ .

Мы можем обратить каждое слагаемое в (3.7) в нуль, задав либо граничные условия Дирихле, либо граничные условия Неймана.

Для рассматриваемой струны граничные условия Дирихле задают положения концов струны.

Например, если мы прикрепим каждый конец струны к стенке, мы наложим граничные условия Дирихле

$$z(t, 0) = z(t, a) = 0$$

А если мы прикрепим невесомую петлю к каждому концу струны и позволим петлям скользить по двум стержням без трения, мы наложим граничные условия Неймана.

Для рассматриваемой струны граничные условия Неймана задают значения производной  $\partial_x z$  на концах струны.

Так как петли невесомы и скользят по стержням без трения, то производная  $\partial_x z$  должна обращаться в нуль в точках  $x = 0$  и  $x = a$ .

Если бы это было не так, то наклон струны к стержню был бы отличен от нуля, и компонента натяжения струны ускоряла бы петли в направлении оси  $Z$ .

Так как каждая петля невесома, их ускорение было бы бесконечно большим.

Это невозможно, поэтому мы накладываем граничные условия Неймана

$$\partial_x z(t, 0) = \partial_x z(t, a) = 0$$

Такие граничные условия (условия Неймана), как мы только что поняли, применяются для струн, концевые точки которых могут свободно двигаться в поперечном направлении, т.е. в направлении оси  $Z$ .

Рассмотрим концевую точку  $x_*$  и связанное с ней слагаемое в (3.7).

Если мы накладываем граничное условие Дирихле, положение выбранной конечной точки фиксируется во времени, и мы требуем, чтобы вариация  $\delta z(t, x_*)$  обращалась в нуль.

Из этого следует, что выбранное слагаемое обратится в нуль.

С другой стороны, если мы предполагаем, что концевая точка может свободно перемещаться, то вариация  $\delta z(t, x_*)$  ничем не ограничена.

Слагаемое исчезает, если наложить условие Неймана:  $\partial_x z(t, x_*) = 0$ . Граничные условия Дирихле можно переписать в такой форме, что станет явным их некоторое сходство с граничными условиями Неймана.

Если концевые точки струны фиксированы, производные по времени от координат концевых точек должны обращаться в нуль:

$$\partial_t z(t, x_*) = 0$$

Если записать граничные условия Дирихле в этой форме, мы ещё должны задать значения координат в фиксированных концевых точках. Чтобы лучше понять физическое содержание граничных условий, рассмотрим импульс струны  $p_z$ .

У импульса нет других компонент, так как мы предположили, что движение ограничено только направлением вдоль оси  $Z$ .

Этот импульс есть просто сумма импульсов каждого бесконечно малого отрезка вдоль струны:

$$p_z = \int_0^a dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t z} = \int_0^a dx \mathbf{m} \partial_t z$$

Посмотрим, сохраняется ли он:

$$\frac{dp_z}{dt} = \int_0^a dx \mathbf{m} \partial_t^2 z = \int_0^a dx \lambda \partial_x^2 z = \lambda \partial_x z|_0^a$$

где мы использовали уравнение движения (3.6).

Видно, что в случае граничных условий Неймана импульс сохраняется, но для граничных условий Дирихле импульс в общем случае не сохраняется! Действительно, когда концы струны прикреплены к стенке, эта стенка постоянно действует на струну с определённой силой.

Почему это важно для теории струн? Долгое время струнные теоретики не принимали всерьёз возможность граничных условий Дирихле.

Казалось нефизическим, что импульс струны может перестать сохраняться.

Кроме того, к чему же могли быть прикреплены концы открытой струны? Ответ таков: они прикреплены к  $D$ -бранам - новому типу динамических протяжённых объектов.

Если струна прикреплена к  $D$ -бране, то общий импульс может сохраняться: импульс, теряемый струной, поглощается  $D$ -браной.

Детальный анализ поведения члена, индуцированного варьированием на пространственных границах, является решающим для осознания возможности существования  $D$ -бран в теории струн.

### Уравнение Даламбера

Как видно из уравнения движения (3.6), свободные колебания струны описываются уравнением

$$\partial_t^2 z - v^2 \partial_x^2 z = (\partial_t - v \partial_x)(\partial_t + v \partial_x) z = 0, \quad v = \sqrt{\frac{\lambda}{m}},$$

которое называется уравнением Даламбера.

Найдём структуру общего решения уравнения Даламбера.

Для этого от переменных  $t$  и  $x$  перейдём к новым переменным  $x_{\pm}$  согласно формуле

$$x_{\pm} = x \pm vt.$$

Имеются соотношения:

$$x = \frac{1}{2}(x_+ + x_-), \quad vt = \frac{1}{2}(x_+ - x_-),$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_{\pm}} = \frac{\partial x}{\partial x_{\pm}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x_{\pm}} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

и уравнение для амплитуды колебаний  $z$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_- \partial x_+} = 0$$

что его решение имеет вид

$$z = z_+(x_-) + z_-(x_+)$$

где  $z_{\pm}$  -произвольные функции.

Таким образом,

$$z(t, x) = z_+(x - vt) + z_-(x + vt)$$

Пусть, например,  $z_- = 0$ , так что  $z(t, x) = z_+(x - vt)$ .

Выясним смысл этого решения.

В каждой точке плоскости  $x = \text{const}$  амплитуда меняется со временем; в каждый данный момент времени амплитуда различна при разных  $x$ .

что  $z(t, x)$  имеет одинаковое значение для координат  $x$  и моментов времени  $t$ , удовлетворяющих соотношениям  $t - x/v = \text{const}$ , то есть

$$x = \text{const} + vt$$

Это значит, что если в некоторый момент времени  $t = 0$  в некоторой точке  $x$  пространства амплитуда имела определённое значение, то через промежуток времени  $t$  то же самое значение амплитуда имеет на

расстоянии  $vt$  вдоль оси  $x$  от первоначального места.

Мы можем сказать, что все значения  $z(t, x)$  распространяются в пространстве вдоль оси  $x$  со скоростью, равной скорости  $v$ .

Таким образом,  $z_+(x_-)$  представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси  $x$ .

что  $z_-(x_+)$  представляет собой плоскую волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси  $x$ .

Перейдём к нахождению конкретных решений уравнения движения для струны.

Начнём с рассмотрения свободных колебаний закреплённой струны и получим решение уравнения (3.12) при граничных условиях Дирихле:  $z(t, 0) = z(t, a) = 0$  и начальных условиях

$$z(t, x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z(t, x)|_{t=0} = w(x)$$

Для этого воспользуемся методом Фурье: будем искать частные решения уравнения (3.12) в виде

$$z(t, x) = \chi(t)\psi(x)$$

Подставляя формулу (3.17) в (3.12), получаем

$$\psi(x)\partial_t^2 \chi(t) - v^2 \chi(t)\partial_x^2 \psi(x) = 0$$

или

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial_t^2 \chi(t)}{\chi(t)} = \frac{\partial_x^2 \psi(x)}{\psi(x)}$$

Левая часть равенства (3.18) зависит только от времени  $t$ , а правая только от координаты  $x$ ; понятно, что равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (3.18) будет постоянной.

Обозначим её через  $-\gamma$ .

Тогда из (3.18) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \chi(t) + v^2 \gamma \chi(t) &= 0 \\ \partial_x^2 \psi(x) + \gamma \psi(x) &= 0 \end{aligned}$$

Чтобы получить нетривиальные решения вида (3.17), удовлетворяющие граничным условиям Дирихле:  $z(t, 0) = z(t, a) = 0$ , необходимо найти нетривиальные решения уравнения (3.19b), удовлетворяющие граничным условиям

$$\psi(x)|_{x=0} = \psi(x)|_{x=a} = 0$$

При  $\gamma < 0$  общее решение (3.19 b) даётся формулой

$$\psi(x) = A_1 e^{\sqrt{-\gamma}x} + A_2 e^{-\sqrt{-\gamma}x}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.20), получаем

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A_1 e^{\sqrt{-\gamma}a} + A_2 e^{-\sqrt{-\gamma}a} = 0$$

откуда  $A_1 = 0, A_2 = 0$ .

Следовательно, решение уравнения (3.19b) тривиально при  $\gamma < 0$ .

При  $\gamma = 0$  общее решение (3.19b) имеет вид

$$\psi(x) = A_1 + A_2 x.$$

Граничные условия дают

$$A_1 = 0, \quad A_1 + A_2 a = 0.$$

Отсюда находим  $A_1 = 0, A_2 = 0$  и, следовательно, решение тривиально при  $\gamma = 0$ .

Наконец, при  $\gamma > 0$  общее решение имеет вид

$$\psi(x) = A_1 \cos \sqrt{\gamma}x + A_2 \sin \sqrt{\gamma}x$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.20), получим

$$A_1 = 0, \quad A_1 \cos \sqrt{\gamma}a + A_2 \sin \sqrt{\gamma}a = 0$$

Значит, нетривиальное решение возможно только при собственных значениях

$$\gamma_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Этим собственным значениям отвечают собственные функции

$$\psi_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{a}$$

При  $\gamma = \gamma_n$  общее решение уравнения (3.19a) имеет вид

$$\chi_n(t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin \frac{\pi n v t}{a},$$

где  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  -произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$z_n(t, x) = \left( \alpha_n \cos \frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin \frac{\pi n v t}{a} \right) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

удовлетворяют уравнению движения (3.12) и граничным условиям Дирихле при любых  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ .

В силу линейности и однородности уравнения Даламбера всякая конечная суперпозиция решений будет также решением.

То же, на самом деле, справедливо и для ряда

$$z(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \alpha_n \cos \frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin \frac{\pi n v t}{a} \right) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

если он сходится.

Остаётся определить коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ , чтобы удовлетворить начальным условиям (3.16).

Для этого продифференцируем ряд по времени  $t$ :

$$\partial_t z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\pi n v}{a} \left( -\alpha_n \sin \frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \cos \frac{\pi n v t}{a} \right) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

Полагая в уравнениях (3.23) и (3.24)  $t = 0$ , в силу начальных условий получаем

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad w(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\pi n v}{a} \beta_n \sin \frac{\pi n x}{a}$$

Формулы (3.25), представляют собой разложение функций  $u(x)$  и  $w(x)$  в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, a)$ .

Коэффициенты разложений (3.25) вычисляются по формулам

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \int_0^a u(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^a w(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx$$



последние, как известно, можно легко получить следующим образом: умножим левую и правую части первого уравнения (3.25) на  $\sin \frac{\pi n' x}{a}$  и проинтегрируем по  $x$  от  $x = 0$  до  $x = a$ :

$$\begin{aligned} \int_0^a dx u(x) \sin \frac{\pi n' x}{a} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \int_0^a dx \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi n' x}{a} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \int_0^a dx \left[ \cos \frac{\pi (n' - n) x}{a} - \cos \frac{\pi (n' + n) x}{a} \right] = \\ &= \frac{a}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \left[ \frac{\sin (n' - n) \xi}{n' - n} - \frac{\sin (n' + n) \xi}{n' + n} \right] \Big|_{\xi=0}^{\pi} = \frac{a}{2} \alpha_{n'} \end{aligned}$$

Отсюда следует первое слагаемое формулы (3.26).

Аналогичным образом получается второе равенство.

### Вынужденные колебания закреплённой струны

Перейдём теперь к изучению вынужденных колебаний закреплённой струны под действием внешней силы  $F(t, x)$ , рассчитаной на единицу длины.

Эта задача сводится к решению уравнения

$$\partial_t^2 z - v^2 \partial_x^2 z = f(t, x), \quad f(t, x) = F(t, x)/\mathfrak{m}$$

при граничных условиях Дирихле:  $z(t, 0) = z(t, a) = 0$  и начальных условиях

$$z(t, x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z(t, x)|_{t=0} = w(x).$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$z(t, x) = z_0(t, x) + \tilde{z}(t, x)$$

где функция  $\tilde{z}(t, x)$  - есть решение неоднородного уравнения

$$\partial_t^2 \tilde{z} - v^2 \partial_x^2 \tilde{z} = f(t, x)$$

удовлетворяющего граничным условиям Дирихле

$$\tilde{z}(t, x)|_{x=0} = 0, \quad \tilde{z}(t, x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$\tilde{z}(t, x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \tilde{z}(t, x)|_{t=0} = 0$$

а функция  $z_0(t, x)$  - есть решение однородного уравнения

$$\partial_t^2 z_0 - v^2 \partial_x^2 z_0 = 0$$

удовлетворяющего граничным условиям Дирихле

$$z_0(t, x)|_{x=0} = 0, \quad z_0(t, x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$z_0(t, x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z_0(t, x)|_{t=0} = w(x)$$

Решение  $\tilde{z}(t, x)$  представляет собой вынужденные колебания струны, то есть такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, когда начальные возмущения отсутствуют.

Решение же  $z_0(t, x)$  представляют собой свободные колебания, то есть такие колебания, которые происходят только вследствие начальных возмущений.

Методы нахождения свободных колебаний  $z_0(t, x)$  мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе.

Здесь остановимся на нахождении только вынужденных колебаний  $\tilde{z}(t, x)$ .

Как и в случае свободных колебаний, решение  $\tilde{z}(t, x)$  будем искать в виде ряда

$$\tilde{z}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_n(t) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

так что соответствующие граничные условия удовлетворяются сами собой.

Подставив ряд (3.31) в уравнение (3.29), получим

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} [\partial_t^2 \chi_n(t) + \omega_n^2 \chi_n(t)] \sin \frac{\pi n x}{a} = f(t, x)$$

где введено обозначение

$$\omega_n = \frac{\pi n v}{a}$$

Производя разложение функции  $f(t, x)$  в интервале  $(0, a)$  в ряд Фурье по синусам, находим, что

$$f(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(t, x) \sin \frac{\pi n x}{a}.$$

Сравнивая выражения (3.32) и (3.33), получаем дифференциальные уравнения

$$\partial_t^2 \chi_n(t) + \omega_n^2 \chi_n(t) = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

определяющие функции  $\chi_n(t)$ .

Чтобы решение  $\tilde{z}(t, x)$ , определяемое рядом (3.31), удовлетворяло начальным условиям

$$\tilde{z}(t, x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \tilde{z}(t, x)|_{t=0} = 0,$$

достаточно подчинить функции  $\chi_n(t)$  условиям

$$\chi_n(0) = 0, \quad \partial_t \chi_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Решение уравнения (3.35), как известно, определяется свёрткой функции Грина оператора  $\partial_t^2 + \omega_n^2$  с функцией  $f_n(t)$ ; причём, как мы покажем ниже, именно запаздывающая функция Грина обеспечивает выполнение соотношений (3.36). Функция Грина оператора  $\partial_t^2 + \omega_n^2$  определяется согласно

$$\mathcal{G}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

Действительно, функция (3.37), удовлетворяет условию

$$[\partial_t^2 + \omega_n^2] \mathcal{G}(t - t') = \delta(t - t')$$

которое и определяет функцию Грина оператора  $\partial_t^2 + \omega_n^2$ .

Чтобы взять интеграл (3.37), используем интегральную формулу Коши.

При  $t \rightarrow +\infty$  фактор  $e^{-i\omega t}$  экспоненциально стремится к нулю в нижней комплексной полуплоскости  $\omega$  и контур интегрирования можно замкнуть в нижней полуплоскости по часовой стрелке, а при  $t \rightarrow -\infty$  фактор  $e^{-i\omega t}$  экспоненциально стремится к нулю в верхней полуплоскости переменной  $\omega$  и контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости против часовой стрелки.

Если мы хотим получить решение, отличное от нуля только в будущем (при  $t > 0$ ), то граничные условия необходимо выбрать таким образом, чтобы оба полюса были расположены в точках  $\pm\omega_n - i0$ .

Действительно, при таком расположении полюсов при  $t < 0$  внутри контура интегрирования нет ни одного полюса и согласно интегральной формуле Коши получаем функцию Грина, тождественно равную нулю в прошлом: Свёртка запаздывающей функции Грина с функцией  $f_n(t)$  даёт решение уравнения (3.35) при начальных условиях (3.36):

$$\chi_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

Действительно, подставляя вместо функции  $f_n(\tau)$  её выражение (3.34), получаем

$$\chi_n(t) = \frac{2}{\omega_n a} \int_0^t d\tau \int_0^a dx f(t, x) \sin \omega_n(t - \tau) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

причём

$$\chi_n(0) = 0, \quad \partial_t \chi_n(0) = \dots = 0$$

то есть начальные условия (3.36) выполняются. Зная  $\chi_n(t)$ , решение задачи о вынужденных колебаниях в соответствии с формулами (3.27) и (3.19), можно записать в виде

$$z(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \alpha_n \cos \frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin \frac{\pi n v t}{a} \right) \sin \frac{\pi n x}{a} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_n(t) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

где

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \int_0^a u(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^a w(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx.$$

В качестве примера рассмотрим колебания струны под действием однородной периодической силы

$$f(t, x) = f_0 \sin \Omega t$$

причём, начальные смещения и начальные скорости отсутствуют.

В этом случае, как следует из формулы (3.35), решение выражается рядом

$$z(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_n(t) \sin \frac{\pi n x}{a}$$

где коэффициенты  $\chi_n(t)$  определяются по формуле (3.34) и оказываются равными

$$\begin{aligned} \chi_n(t) &= \frac{2f_0}{\omega_n a} \int_0^t d\tau \int_0^a dx \sin \Omega \tau \sin \omega_n(t - \tau) \sin \frac{\pi n x}{a} = \\ &= \frac{f_0}{\omega_n a} \int_0^t d\tau [\cos(\Omega \tau - \omega_n(t - \tau)) - \cos(\Omega \tau + \omega_n(t - \tau))] \frac{a}{\pi n} \int_0^{\pi n} d\xi \sin \xi = \\ &= \frac{f_0}{\omega_n a} \left[ \frac{\sin((\Omega + \omega_n)\tau - \omega_n t)}{\Omega + \omega_n} - \frac{\sin((\Omega - \omega_n)\tau + \omega_n t)}{\Omega - \omega_n} \right] \Big|_{\tau=0}^t \frac{a}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\ &= \frac{2f_0}{\omega_n \pi n} [1 - (-1)^n] \frac{\Omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \Omega t}{\Omega^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

В приведённых выкладках предполагалось, что ни одна резонансная частота  $\omega_n = \frac{\pi n v}{a}$  не совпадает с частотой внешней силы  $\Omega$ .

Подставляя выражение для  $\chi_n(t)$  в (3.37), получаем

$$z(t, x) = \frac{4f_0 v}{a} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\Omega \sin \omega_{2n-1} t - \omega_{2n-1} \sin \Omega t}{\omega_{2n-1}^2 (\Omega^2 - \omega_{2n-1}^2)} \sin \frac{\omega_{2n-1} x}{v}$$

В случае, когда частота внешней силы  $\Omega$  совпадает с одной из резонансных частот  $\omega_{2n'-1}$ , то функцию  $\chi_n(t)$  легко определяется из (3.38): раскрывая неопределённость  $\frac{0}{0}$  по правилу Лопиталя, получаем

$$\chi_{2n'-1}(t) = \frac{2f_0 v}{\omega_{2n'-1}^2 a} [\omega_{2n'-1}^{-1} \sin \omega_{2n'-1} t - t \cos \omega_{2n'-1} t]$$

Отсюда смещение  $z(t, x)$  в резонансном случае выражается формулой

$$\begin{aligned} z(t, x) = & \frac{2f_0 v}{\omega_{2n'-1}^2 a} [\omega_{2n'-1}^{-1} \sin \omega_{2n'-1} t - t \cos \omega_{2n'-1} t] + \\ & + \frac{4f_0 v}{a} \sum_{n \neq n'} \frac{\omega_{2n'-1} \sin \omega_{2n-1} t - \omega_{2n-1} \sin \omega_{2n'-1} t}{\omega_{2n-1}^2 (\omega_{2n'-1}^2 - \omega_{2n-1}^2)} \sin \frac{\omega_{2n-1} x}{v} \end{aligned}$$

Заметим, что в реальных физических системах решение вида (3.40), содержащее слагаемое с линейно нарастающей во времени амплитудой колебаний, существовать не может из-за наличия диссипации энергии.

### Колебания струны с подвижными концами

Рассмотрим вынужденные колебания струны под действием внешней силы

$$\partial_t^2 z - v^2 \partial_x^2 z = f(t, x)$$

когда концы её не закреплены, а двигаются по закону

$$z(t, x)|_{x=0} = x_1(t), \quad z(t, x)|_{x=a} = x_2(t)$$

при начальных условиях

$$z(t, x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z(t, x)|_{t=0} = w(x)$$

К решению этой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (3.42) неоднородны.

Но эта задача легко сводится к задаче с однородными граничными условиями. Введём вспомогательную функцию

$$\tilde{z}(t, x) = x_1(t) + [x_2(t) - x_1(t)] \frac{x}{a}$$

Ясно, что

$$\tilde{z}(t, x)|_{x=0} = x_1(t), \quad \tilde{z}(t, x)|_{x=a} = x_2(t)$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$z(t, x) = z_0(t, x) + \tilde{z}(t, x)$$

где  $z_0(t, x)$  - новая неизвестная функция. В силу граничных условий (3.42), (3.45) и начальных условий (3.43), функция  $z_2(t, x)$  должна удовлетворять граничным условиям

$$z_0(t, x)|_{x=0} = 0, \quad z_0(t, x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} z_0(t, x)|_{t=0} &= u(x) - x_1(0) - [x_2(0) - x_1(0)] \frac{x}{a} = u_1(x) \\ \partial_t z_0(t, x)|_{t=0} &= w(x) - \dot{x}_1(0) - [\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0)] \frac{x}{a} = w_1(x) \end{aligned}$$

Подставляя (3.46) в (3.41), получаем

$$\partial_t^2 z_0 - v^2 \partial_x^2 z_0 + \partial_t^2 \tilde{z} - v^2 \partial_x^2 \tilde{z} = f(t, x)$$

Учитывая определение (3.44) функции  $\tilde{z}(t, x)$ , получаем уравнение для искомой функции

$$\partial_t^2 z_0 - v^2 \partial_x^2 z_0 = f_1(t, x)$$

где введено обозначение

$$f_1(t, x) = f(t, x) - \ddot{x}_1(0) - [\ddot{x}_2(0) - \ddot{x}_1(0)] \frac{x}{a}$$

В результате мы пришли к задаче с однородными граничными условиями, метод решения которой нам уже известен.

### Связь с теорией струн (???)

(мб когда-то открою книгу по теории струн, укажу это, пока не до этого, умф ведь занимаемся.)

## 8.2.2 Колебание мембран

Простейшее усложнение - мембрана.

### Колебания прямоугольной мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую плёнку.

Задача о свободных колебаниях мембраны сводится к решению двумерного волнового уравнения

$$\partial_t^2 z - v^2 \Delta z = 0, \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

при граничных условиях

$$z(t, x, y)|_{x=0} = 0, \quad z(t, x, y)|_{x=a_x} = 0, \quad z(t, x, y)|_{y=0} = 0, \quad z(t, x, y)|_{y=a_y} = 0$$

и начальных условиях

$$z(t, x, y)|_{t=0} = u(x, y), \quad \partial_t z(t, x, y)|_{t=0} = w(x, y),$$

где  $z(t, x, y)$  - величина смещения мембраны от положения равновесия. Частные решения будем искать в виде

$$z(t, x, y) = \chi(t)\psi(x, y)$$

Они должны удовлетворять граничным условиям (3.52).

Подставляя (3.54) в формулу (3.51), получаем

$$\frac{\partial_t^2 \chi(t)}{v^2 \chi(t)} = \frac{\partial_x^2 \psi(x, y) + \partial_y^2 \psi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

что это равенство возможно только в случае, когда обе его части равны константе.

Обозначим её через  $-k^2$  и, принимая во внимание граничные условия (3.52), находим

$$\ddot{\chi}(t) + k^2 v^2 \chi(t) = 0, \quad \Delta \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0$$

причём

$$\psi(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \psi(x, y)|_{x=a_x} = 0, \quad \psi(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \psi(x, y)|_{y=a_y} = 0$$

Граничную задачу (3.55) и (3.56) будем решать методом Фурье, полагая

$$\psi(x, y) = \psi_1(x) \psi_2(y)$$

Подставляя (3.57) в (3.55), получаем

$$-\frac{\partial_x^2 \psi_1(x)}{\psi_1(x)} = k^2 + \frac{\partial_y^2 \psi_2(y)}{\psi_2(y)}$$

Отсюда получаем два уравнения

$$\partial_x^2 \psi_1(x) + k_x^2 \psi_1(x) = 0, \quad \partial_y^2 \psi_2(y) + k_y^2 \psi_2(y) = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Общее решение уравнений (3.58) имеет вид

$$\psi_1(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x, \quad \psi_2(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y$$

з (3.56) получаем граничные условия

$$\psi_1(x)|_{x=0} = 0, \quad \psi_1(x)|_{x=a_x} = 0, \quad \psi_2(y)|_{y=0} = 0, \quad \psi_2(y)|_{y=a_y} = 0$$

Откуда ясно, что  $A_1 = B_1 = 0$ .

Если мы положим  $A_2 = B_2 = 1$ , то окажется

$$\psi_1(x) = \sin k_x x, \quad \psi_2(y) = \sin k_y y$$

причём должно быть

$$\sin k_x a_x = 0, \quad \sin k_y a_y = 0$$

з последнего выражения следует, что  $k_x$  и  $k_y$  имеют счётное множество значений:

$$k_n = \frac{\pi n}{a_x}, \quad k_m = \frac{\pi m}{a_y}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Тогда из равенства  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  получаем значения постоянной  $k^2$ :

$$k_{nm}^2 = k_n^2 + k_m^2$$

Таким образом, собственным числам (3.62) и (3.63) соответствуют собственные функции

$$\psi_{nm}(x, y) = \sin k_n x \sin k_m y$$

граничной задачи (3.56). Обратимся теперь к уравнению (3.55).

Его общее решение имеет вид

$$\chi_{nm}(t) = \alpha_{nm} \cos vk_{nm}t + \beta_{nm} \sin vk_{nm}t$$

Таким образом, частные решения уравнения (3.51), удовлетворяющие граничным условиям (3.52), имеют вид

$$z_{nm}(t, x, y) = [\alpha_{nm} \cos vk_{nm}t + \beta_{nm} \sin vk_{nm}t] \sin k_n x \sin k_m y$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3.53), составим ряд

$$z(t, x, y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} [\alpha_{nm} \cos vk_{nm}t + \beta_{nm} \sin vk_{nm}t] \sin k_n x \sin k_m y$$

Для выполнения начальных условий необходимо

$$\begin{aligned} z(t, x, y)|_{t=0} &= u(x, y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \alpha_{nm} \sin k_n x \sin k_m y \\ \partial_t z(t, x, y)|_{t=0} &= w(x, y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} vk_{nm} \beta_{nm} \sin k_n x \sin k_m y \end{aligned}$$

Для определения  $\alpha_{nm}$  и  $\beta_{nm}$  умножим обе части уравнений (3.67) на  $\sin k_{n'} x \sin k_{m'} y$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $a_x$  и по  $y$  от 0 до  $a_y$ . Принимая во внимание, что

$$\int_0^{a_x} \int_0^{a_y} dx dy \sin k_n x \sin k_m y \sin k_{n'} x \sin k_{m'} y = \frac{a_x a_y}{4} \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{nm} &= \frac{4}{a_x a_y} \int_0^{a_x} \int_0^{a_y} dx dy u(x, y) \sin k_n x \sin k_m y \\ \beta_{nm} &= \frac{4}{v a_x a_y k_{nm}} \int_0^{a_x} \int_0^{a_y} dx dy w(x, y) \sin k_n x \sin k_m y \end{aligned}$$

Решение (3.66) можно записать также в виде

$$z(t, x, y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \sigma_{nm} \sin(vk_{nm}t + \varphi_{nm}) \sin k_n x \sin k_m y$$

Где

$$\sigma_{nm} = \sqrt{\alpha_{nm}^2 + \beta_{nm}^2}, \quad \varphi_{nm} = \arctan \frac{\alpha_{nm}}{\beta_{nm}}$$

Видно, что частота собственного колебания определяется формулой  $\omega_{nm} = vk_{nm}$

## 8.3 краевая задача в гильбертовом пространстве

(тут же и начало первого задания после разбора с операторами)

## 8.4 метод фурье!

# 9 Задачи в пространстве $S'(\mathbb{R})$

### 9.0.1 примеры простейших задач

Самая простая задача, которую хочется решать имеет вид:

$$Lu(x) = \delta(x), \quad u(x) \in S'(\mathbb{R}), L = P\left(\frac{d}{dx}\right) \quad (9.1)$$

**Пример 1.** Решим ее например для  $P(z) = (z - 1)(z - i)$ .  
имеем:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{i}{(1+i)} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-i} \right), \quad z \neq 1, i$$

$$u(x) = \frac{i}{(1+i)} (e^x(-\theta(-x)) - e^{ix}\theta(x)) + ae^{ix} \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

**Пример 2.** Второй пример, для  $P(z) = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$ ,  $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right), \quad z \neq 1, -1$$

$$u(x) = \frac{1}{2} (e^x(-\theta(-x)) - e^{-x}\theta(x))$$

## 10 Интегральные уравнения

(второе задание по УМФ)

и пока что здесь не следует мне в принципе находиться и структуру я вообще не понимаю и не думал о ней.

### 10.1 Теория Фредгольма

(по прикладной математике для инженеров Мышкис)

#### 10.1.1 Уравнения с вырожденными ядрами

#### 10.1.2 Общий случай

#### 10.1.3 Применение бесконечных систем алгебраических уравнений

#### 10.1.4 Применение численного интегрирования

#### 10.1.5 Уравнения с малыми ядрами

#### 10.1.6 возмущения ядра

#### 10.1.7 Характер решений

#### 10.1.8 Уравнения Вольтерра 2го рода

#### 10.1.9 Уравнения со слабой особенностью

#### 10.1.10 Другие темы

(??? тут проблема, что я не особо этим в принципе планирую заниматься, так что пока так будут висеть, нужно будет - увеличу разделы потом.)

### Уравнения с вполне непрерывными операторами

12.



### Уравнения с положительными ядрами

(456).  
3.

### Уравнения с симметричными ядрами

· ·  
1.

### Аналогия с конечномерными уравнениями

(457). 2.

### Разложение ядра по собственным функциям

(458). 3.

### Следствия

(460). 4.

### Переход от несимметричного ядра к симметричному

(464). 5.

### Экстремальное свойство характеристических чисел

(466).  
6.

### Уравнения с самосопряженными операторами

(469).  
4.

### Некоторые специальные классы уравнений

·  
1.

### Уравнения Вольтерра 1-го рода

(472). 2.

### Уравнения Фредгольма 1-го рода с симметричным ядром

(475). 3.

### Некорректные задачи (!!!!!)

интересно! не знаю пока.

**признаки**

примеры

Уравнения Фредгольма 1-го рода, общий случай

Применение производящих функций

(480).

6.

Уравнение Вольтерра с разностным ядром

(484). 7.

Уравнение Фредгольма с разностным ядром на оси

(486). 8.

Уравнение Фредгольма с разностным ядром на полуоси

(492).

.

Сингулярные интегральные уравнения

.

1.

Сингулярные интегралы

.

Формулы обращения

(499).

3.

Непосредственное применение формул обращения

Переход к краевой задаче, простой пример

Общий замкнутый контур

Незамкнутый контур

Приведение к бесконечной системе алгебраических уравнений

Нелинейные интегральные уравнения

Переход к конечным уравнениям

2.

Метод итераций

Метод малого параметра

4.

## Применение теории симметричных ядер

(520).  
5.

## Применение теории неподвижных точек

(521).  
6.

## Вариационные методы

(524).  
7.

## Уравнения с параметром

(525). 8.

## Разветвление решений

### Задача Штурма-Лиувилля

Обсудим подробно задачу Штурма-Лиувилля.

## 11 Другие методы

### 11.1 метод характеристик

просто знаю, что он есть

### 11.2 потенциалы

я хз, что этот раздел тут делает. но в [?] это большой раздел.

### 11.3 вариационная задача

в главе про механику и диффуры мы научились решать именно их задачи, а тут именно усложненный случай, где

## 12 Операторы

### 12.1 линейный оператор

по крайней мере известно, что можно на замыкание продолжить.

**Теорема 1.** Пусть  $L \in H$  - подпространство,  $\phi : L \rightarrow C$  линейный и непрерывный функционал. Тогда  $\exists \psi : \hat{L} \rightarrow C$  линеен и непрерывен и  $\psi|_L = \phi$ . (процедуру построения  $\psi$  называем продолжением функционала на замыкание по непрерывности).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>где она нужна?

## 12.2 Сопряжённый оператор линейного оператора в гильбертовом пространстве

Область определения сопряжённого оператора. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого.

Сопряжённый оператор  $A^*$  определяем так, чтобы он был:  $(fA, g) = (f, A^*g) \quad \forall f \in D(A) \quad \forall g \in D(A^*)$

## 12.3 самосопряженные операторы

как-то это можно доказывать.

$$(Af, g) = (f, A^+g)$$

что-то там с непрерывностью. то есть  $(Af, g)$  непрерывно по  $f$ .

### 12.3.1 примеры

рассмотрим  $p_1 = i \frac{d}{dx} : D(p) \rightarrow L^2[0, 1]$ ,  $D(p) = \{f - \text{абс непрер} \mid f(0) = f(1)\}$  докажем, что он самосопряженный.<sup>2</sup>

сперва доказываем симметричность.

делается это через раскрытие скалярного произведения как обычно. лень писать.

окей, получаем, что  $(pf, g) = (f, \frac{idg}{dx})$

$(pf, g)$  - непрерывна по  $f$ , т.о.  $g \in D(A^+)$

т.о. симметричность  $D(A) \in D(A^+)$ <sup>3</sup>

2) самосопряженность

обратное вложение нужно доказывать.

докажем, что  $g \notin D(A) \rightarrow g \notin D(A^+)$

пусть  $g(1) = g(0) + b, b \neq 0, b \in C$  откажемся от условия (почему?).

в члене за симметричность скрытый ключ к самосопряженности???

нужно доказать, что не будет непрерывности по  $f$ .

$$(pf, g) = if(1)\bar{b} + (f, \frac{idg}{dx})$$

(???) нужно найти  $f$  такую, что она уходит везде в 0, но не в 1.

при подстановке получаем какую-то разрывность по  $f$ .

вроде бы суть в том, что остается член  $i\bar{b}$ , т.о. приходим к  $g \notin D(A) \rightarrow g \notin D(A^+)$

(продолбал я док-во., не оч понятно.)

пример симметричного и не самосопряженного.

то есть  $D(A) \in$  но не совпадает с  $D(A^+)$

что делаем?

<sup>2</sup>потом пересмотрю нормально

<sup>3</sup>(не понял вообще рассуждения)

## 12.3.2 пример не симметричного оператора

$$p_3 = \frac{id}{dx} : D(p_3) \rightarrow H$$

да хз, что происходит.

короче, не занулитса часть из скалярного произведения. и он не симметричный.  
кстати говоря, спектр меньше 0 - дает нам вроде бы хорошие решения.

как доказать с/с не по определению? (звучит круто. что-то в этом есть...)

то есть через симметричный можно построить самосопряженный.

пусть  $A : D(A) \rightarrow H$  симметричный, пусть его собственные функции  $\{e_n\}$  образуют базис в  $H$ . тогда оператор  $\bar{A} : D(\bar{A}) \rightarrow H$   $D(\bar{A}) = \{f = \sum c_n e_n \mid \sum_n \lambda_n^2 |c_n|^2 \|e_n\|^2 < +\infty\}$

тогда  $\forall f \in D(A) \quad \bar{A}f = \sum_n \lambda_n c_n e_n$  самосопряженный!!!

Конструктивное док-во:

пусть  $g \in D(A^+) \rightarrow \forall f \in D(\bar{A})$

$f = \sum c_n e_n$ , возьмем частичную сумму  $f_N = \sum_{n=0}^N c_n e_n$  и  $F_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n c_n e_n$

возьмем  $g = F_N$ , запишем  $(\bar{A}f, F_N)$

короче какое-то тут доказательство есть.

мб нужно норму оценить.

$$|(\hat{A}f, g)| \leq C_g \|f\|$$

или что происходит?

берем как  $f$  частичные суммы после оператора.

$$|(\hat{A}f, g)| = \left( \sum_n \lambda_n^2 c_n e_n, \sum_n \lambda_n c_n e_n \right) = \sum_{n=0}^N \lambda_n^2 |c_n|^2 \|e_n\|^2$$

приходим к модулю, дальше появляется какой-то корень. и оценка. да я хз вообще.  
ряд  $\sum_{n=0}^N \lambda_n^2 |c_n|^2 \|e_n\|^2$  сходится.. и потом обратное включение - поэтому с/с.

## 12.4 задачи на эволюцию операторов

предположения делаем, что существует  $\dot{u}$ , предел справа.

дальше получаем кандидаты на решения.

дальше проверяем на решении, что оно само лежит где нужно:  $u \in D(A)$ ,  $\exists \dot{u}$ ,  $u(+0)$

- $u \in D(A)$  - делается оценкой ряда, типа элемент получаем из гильбертова пространства (???)
- производную пишем по определению, подставляем туда решение. дальше оцениваем сверху не зависящем от  $\Delta t$  (???)  
и тут такие оценки самые большие. нужно сверху оценивать. (????)
- непрерывность в 0:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|u(t) - v\|^2 =$  и раскладываем по базису, дальше приходим к равенству парсерваля (????)

после проверки утверждаем, что нашли ответ.

## 12.5 спектральное разложение операторов?

### 12.5.1 пример поиска спектров

(далее тоже нужно переписать у кого-то эти записи)  
внезапно найдем спектр оператора  $p_2$

$$(p_2 - \lambda I) \exists \text{ даже не на всюду плотном}$$

тем самым найдем, какие  $\lambda$  какому спектру принадлежат?  
исследуем непрерывный спектр. (при чем тут он?)

$$(p_2 - \lambda I)f = g \rightarrow f = (p_2 - \lambda I)^{-1}g$$

(что???)

$$if' - \lambda f = g \quad \text{лс } f = Ce^{-i\lambda x}$$

$$iC'e^{-i\lambda x} = g(x) \rightarrow C = -i \int_0^x e^{i\lambda \xi} g(\xi) d\xi \quad f(0) = D = 0$$

$$f = -ie^{-i\lambda x} \int_0^x e^{i\lambda \xi} g(\xi) d\xi = 0$$

условия

$$g(x) \perp e^{i\lambda \xi} g$$

вся компл пл - спектр???

$$(p_2 - \lambda I)^{-1} \exists \forall \lambda \in C$$

далее самые главные шаги

$M = \{g | g(x) \perp e^{i\lambda \xi} g\}$  не всюду плотно, так как нельзя к этому вектору подобраться!

так можно доказывать не всюду плотность! (как?)

спектр только остаточный.

короче, так вот спектр считать показали нам.

### 12.5.2 оператор Лапласа

### 12.5.3 Обобщенное преобразование Фурье

#### Теория

Определим преобразование Фурье обобщённых функций из пространства  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ . Применение преобразования Фурье оказывается довольно эффективным инструментом для вычисления фундаментального решения дифференциального оператора (2.3.4). Тогда, применяя теорему 2.5.11, мы получим способ вычисления обобщённого решения уравнения (2.5.1)

Напомним, что для абсолютно интегрируемой на  $\mathbb{R}^m$  комплексной функции  $f(x)$  её преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}[f](y) = \mathcal{F}[f(x)](y) = \int_{x \in \mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

где  $(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k y_k$  - скалярное произведение векторов  $x \in \mathbb{R}^m$  и  $y \in \mathbb{R}^m$ . Так как комплексная экспонента  $e^{i(x,y)}$  по абсолютной величине тождественно равна единице, а функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $\mathbb{R}^m$ , то несобственный интеграл в определении  $\mathcal{F}[f](y)$  является равномерно сходящимся по  $y \in \mathbb{R}^m$  в силу признака Вейерштрасса.

Тогда, в силу непрерывности  $e^{i(x,y)}$  по совокупности переменных  $x$  и  $y$  на  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , получаем, что, функция  $\mathcal{F}[f](y)$  является непрерывной на  $\mathbb{R}^m$  (подробное доказательство этого факта можно найти, например, в теореме 1 из [4, Гл. 17, §6, С. 168]). При этом, для любого  $y \in \mathbb{R}^m$  справедливо неравенство:

$$|\mathcal{F}[f](y)| \leq \int_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)| dx$$

Следовательно,  $\mathcal{F}[f](y)$  является ограниченной на  $\mathbb{R}^m$  функцией. Поэтому,  $\mathcal{F}[f](y)$  является функцией медленного роста, т.е. порождает регулярный функционал в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ . Рассматривая абсолютно интегрируемую функцию  $f(x)$  как обобщенную, также порождающую в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  регулярный функционал (см. пример 2.1.8)

Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  получаем:

Таким образом, имеет место равенство:

$$\langle \mathcal{F}[f](y), \varphi(y) \rangle = \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle$$

Теперь, чтобы превратить это равенство в определение преобразования Фурье произвольной обобщенной функции  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , нам требуется доказать, что преобразование Фурье является непрерывным отображением пространства  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  в себя. Докажем соответствующее

**У т в е р ж д е н и е 3.1.1.**

Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  имеет место вложение  $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ . При этом, для любой последовательности  $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  выполнено:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)} \varphi \rightarrow \mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)} \mathcal{F}[\varphi]$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вложение  $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  показано в лемме 2.1.29. Для доказательства непрерывности преобразования Фурье на пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ , рассмотрим последовательность  $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ , сходящуюся в пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  к функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ . Требуется показать, что

$$\mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)} \mathcal{F}[\varphi] \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

В силу леммы 2.1.4, это означает, что для любых мультииндексов  $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$  и  $\beta \in \mathbb{N}_0^m$  должно выполняться соотношение:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^m} (|y^\beta| |D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi_n](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Имеем равенство:

$$\begin{aligned} y^\beta (D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi_n](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)) &= y^\beta \mathcal{F}[(ix)^\alpha (\varphi_n(x) - \varphi(x))](y) = \\ &= i^{|\beta|} \mathcal{F}[D_x^\beta ((ix)^\alpha (\varphi_n(x) - \varphi(x)))](y) \end{aligned}$$

Так как по условию последовательность  $\varphi_n$  сходится в пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  к функции  $\varphi$ , то, в частности, для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N(\varepsilon)$ , такой, что для всех  $n \geq N$  и для всех  $x \in \mathbb{R}^m$  имеет место неравенство:

$$|D_x^\beta ((ix)^\alpha (\varphi_n(x) - \varphi(x)))| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |x|^{2m}}$$

Следовательно, для любых  $n \geq N(\varepsilon)$  и  $y \in \mathbb{R}^m$  получаем:  $|y^\beta| |D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi_n](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)| \leq$

$$\leq \int_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{\varepsilon dx}{1 + |x|^{2m}} = \varepsilon S_m \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-1} dr}{1 + r^{2m}} = \varepsilon \frac{S_m}{m} \frac{\pi}{2}$$

Где  $S_m = \int_{|x|=1} dS$  - площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^m$ .

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^m} (|y^\beta| |D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi_n](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)|) \leq \frac{\pi S_m}{2m} \varepsilon$$

Что и требовалось. В силу утверждения 3.1.1 получаем, что для любой обобщённой функции  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  отображение

$$\varphi \mapsto \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

является линейным и непрерывным функционалом на пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ . Следовательно, оно задаёт обобщённую функцию, обозначаемую нами  $\mathcal{F}[f](y)$ . Действие которой на любую функцию  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  определяется формулой:

$$\langle \mathcal{F}[f](y), \varphi(y) \rangle = \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle$$

Преобразованием Фурье обобщённой функции  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  будем называть обобщённую функцию определяется формулой (3.1.1).

### Преобразование Фурье от $\delta$ -функции

Вычислим преобразование Фурье  $\delta$ -функции Дирака в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ . Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  имеем:

$$\langle \mathcal{F}[\delta](y), \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) dy = \langle 1, \varphi(y) \rangle$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}[\delta](y) = 1$$

То есть преобразованием Фурье  $\delta$ -функции Дирака в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  является функция медленного роста, тождественно равная единице.

### Преобразование Фурье от $\delta(x - x_0)$

Пусть задан вектор  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ . Вычислим преобразование Фурье обобщённой функции  $\delta(x - x_0)$  в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ . Для Любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  имеем:

$$\langle \mathcal{F}[\delta(x - x_0)](y), \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x - x_0), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \mathcal{F}[\varphi](x_0) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x_0, y)} \varphi(y) dy = \langle e^{i(x_0, y)}, \varphi(y) \rangle$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)](y) = e^{i(x_0, y)}$$

### Преобразование Фурье от $f(x - x_0)$

Пусть заданы вектор  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  и обобщённая функция  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ . Выразим преобразование Фурье обобщённой функции  $f(x - x_0)$  в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  через  $\mathcal{F}[f(x)](y)$ .



Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  имеем:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f(x-x_0)](y), \varphi(y) \rangle &= \langle f(x-x_0), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \\ &= \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi](x+x_0) \rangle = \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi(y)e^{i(x_0,y)}](x) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}[f(x)](y), \varphi(y)e^{i(x_0,y)} \rangle \\ &= \langle e^{i(x_0,y)} \mathcal{F}[f(x)](y), \varphi(y) \rangle\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}[f(x-x_0)](y) = e^{i(x_0,y)} \mathcal{F}[f(x)](y)$$

### Преобразование Фурье $\theta$ -функции

Вычислим преобразование Фурье  $\theta$ -функции Хевисайда в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Напомним, что  $\theta$ -функция является функцией медленного роста вида

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, действие  $\theta$ -функции на любую функцию  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  имеет вид

$$\langle \theta(x), \varphi(x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[\theta](y), \varphi(y) \rangle &= \langle \theta(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \varphi(y) dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \varphi(y) dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left( \int_0^R e^{ixy} dx \right) dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left( \frac{e^{iRy} - 1}{iy} \right) dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left( \frac{\cos(Ry) - 1}{iy} \right) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left( \frac{\sin(Ry)}{y} \right) dy \right)\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left( \frac{\cos(Ry) - 1}{iy} \right) dy$ , он есть абсолютно сходящийся интеграл и представим интегралом в смысле главного значения:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left( \frac{\cos(Ry) - 1}{iy} \right) dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(y) \left( \frac{\cos(Ry) - 1}{iy} \right) dy + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(y) \left( \frac{\cos(Ry) - 1}{iy} \right) dy \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(y) \frac{\cos(Ry)}{iy} dy + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(y) \frac{\cos(Ry)}{iy} dy \right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(y)}{iy} dy + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{iy} dy \right) = \\ &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \frac{\cos(Ry)}{iy} dy - \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{iy} dy\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \frac{\cos(Ry)}{iy} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{iy} \cos(Ry) dy$$

Так как функция  $\varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , то существует предел

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{iy} = -2i\varphi'(0)$$

а при  $y \rightarrow \infty$  справедливо соотношение  $\varphi(y) = o\left(\frac{1}{y}\right)$ . Отсюда получаем

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{iy} = o\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad \text{при} \quad y \rightarrow +\infty$$

Следовательно, функция  $\frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{iy}$  является абсолютно интегрируемой на  $(0, +\infty)$ . Тогда по теореме Римана об осцилляции, получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{iy} \cos(Ry) dy \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty$$

Поскольку по определению 2.1.23 имеем равенство

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{iy} dy = -i \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{y}, \varphi(y) \right\rangle$$

то получаем:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left( \frac{\cos(Ry) - 1}{iy} \right) dy = \left\langle i \mathcal{P} \frac{1}{y}, \varphi(y) \right\rangle$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy = \int_{|y| > \varepsilon} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy + \int_{|y| \leq \varepsilon} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy$$

Так как функция  $\frac{\varphi(y)}{y}$  является абсолютно интегрируемой на промежутках  $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$ , то, по теореме Римана об осцилляции, при  $R \rightarrow +\infty$  справедливо предельное соотношение

$$\int_{|y| > \varepsilon} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy \rightarrow 0$$

Следовательно, существует число  $R_1(\varepsilon) > 0$ , такое, что для любого  $R \geq R_1(\varepsilon)$  выполнено неравенство:

$$\left| \int_{|y| > \varepsilon} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy \right| \leq \varepsilon$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{|y| \leq \varepsilon} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy &= \int_{|y| \leq R\varepsilon} \varphi\left(\frac{y}{R}\right) \frac{\sin(y)}{y} dy = \\ &= \int_{|y| \leq R\varepsilon} \left( \varphi\left(\frac{y}{R}\right) - \varphi(0) \right) \frac{\sin(y)}{y} dy + \int_{|y| \leq R\varepsilon} \varphi(0) \frac{\sin(y)}{y} dy \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа, для любого числа  $y$  существует число  $\xi(y, R)$  между нулём и числом  $\frac{y}{R}$ , такое, что справедливо равенство:

$$\varphi\left(\frac{y}{R}\right) - \varphi(0) = \varphi'(\xi(y, R)) \frac{y}{R}$$

Так как функция  $\varphi'(x)$  является непрерывной при  $x \in \mathbb{R}$  и бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$ ,

то она является ограниченной на  $\mathbb{R}$ . Определим ЧИСЛО

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|$$

Следовательно, справедливо неравенство:

$$\left| \varphi\left(\frac{y}{R}\right) - \varphi(0) \right| \leq M \frac{|y|}{R}$$

Получаем оценки:

$$\int_{|y| \leq R\varepsilon} \left( \varphi\left(\frac{y}{R}\right) - \varphi(0) \right) \frac{\sin(y)}{y} dy \leq \int_{|y| \leq R\varepsilon} M \frac{dy}{R} = 2M\varepsilon$$

этому при  $R \rightarrow +\infty$  имеем:

$$\int_{|y| \leq R\varepsilon} \varphi(0) \frac{\sin(y)}{y} dy \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0) \frac{\sin(y)}{y} dy = \pi \varphi(0) = \langle \pi \delta(y), \varphi(y) \rangle$$

Тогда существует число  $R_2(\varepsilon) > 0$ , такое, что для любого  $R \geq R_2(\varepsilon)$  справедливо неравенство:

$$\int_{|y| \leq R\varepsilon} \varphi(0) \frac{\sin(y)}{y} dy - \pi \varphi(0) \leq \varepsilon$$

Следовательно, при всех  $R \geq R_2(\varepsilon)$  справедливо неравенство:

$$\int_{|y| \leq \varepsilon} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy - \pi \varphi(0) \leq (2M + 1)\varepsilon$$

Окончательно, для любого  $R \geq \max\{R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon)\}$  находим:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy - \pi \varphi(0) \right| \leq (2M + 2)\varepsilon$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \frac{\sin(Ry)}{y} dy = \langle \pi \delta(y), \varphi(y) \rangle$$

Окончательно находим:

$$\langle \mathcal{F}[\theta](y), \varphi(y) \rangle = \left\langle i\mathcal{P} \frac{1}{y}, \varphi(y) \right\rangle + \langle \pi \delta(y), \varphi(y) \rangle$$

Ответ:

$$\mathcal{F}[\theta](y) = i\mathcal{P} \frac{1}{y} + \pi \delta(y)$$

### свойства преобразований Фурье

Напомним, что обратное преобразование Фурье абсолютно интегрируемой на  $\mathbb{R}^m$  функции  $f(x)$  определяется так:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](y) = \mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{x \in \mathbb{R}^m} e^{-i(x,y)} f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

Очевидны равенства:

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(x)](-y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y)$$

Поэтому, в силу утверждения 3.1.1, отображение

$$\varphi(x) \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)](y) = \mathcal{F}[\varphi(-x)](y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

является линейным и непрерывным в пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ .

Следовательно, мы можем определить обратное преобразование Фурье обобщённой функции  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  как линейный и непрерывный функционал вида

$$\varphi \mapsto \langle f(y), \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

Этот функционал будем обозначать  $\mathcal{F}^{-1}[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ .

Таким образом, Мы имеем равенство

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f](x), \varphi(x) \rangle = \langle f(y), \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

**Определение 12.1.** Обратным преобразованием Фурье обобщённой функции  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  будем называть обобщённую функцию  $\mathcal{F}^{-1}[f](y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ ,

действие которой на любую функцию  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  определяется формулой (3.1.2)

Заметим, что для любой обобщённой функции  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  имеют место равенства

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(x)](-y)$$

Действительно, для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](y), \varphi(y) \rangle &= \langle f(x), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(y)](x) \rangle = \\ &= \left\langle f(x), \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[\varphi(y)](-x) \right\rangle = \left\langle f(-x), \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[\varphi(y)](x) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y), \varphi(y) \right\rangle \end{aligned}$$

Следовательно, установлено равенство

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y)$$

Аналогично, имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](y), \varphi(y) \rangle &= \langle f(x), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(y)](x) \rangle = \\ &= \left\langle f(x), \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[\varphi(-y)](x) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(x)](y), \varphi(-y) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(x)](-y), \varphi(y) \right\rangle \end{aligned}$$

Следовательно, установлено равенство

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(x)](-y)$$

Как показано в замечании 2.1.31, Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  ВыПОЛНены равенства:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi](y)](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi](y)](x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

Следовательно, для любой обобщённой функции  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  и произвольной основной функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  получаем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](x)](y), \varphi(y) \rangle &= \langle \mathcal{F}[f](x), \mathcal{F}^{-1}[\varphi](x) \rangle = \\ &= \langle f(y), \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi](x)](y) \rangle = \langle f(y), \varphi(y) \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[f](x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f](x)](y), \varphi(y) \rangle = \langle f(y), \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi](x)](y) \rangle = \langle f(y), \varphi(y) \rangle \\ \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](x)](y) &= \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f](x)](y) = f(y) \quad \forall f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

**обобщенное Фурье от 1**

Вычислим преобразование Фурье обобщённой функции медленного роста, тождественно равной единице на  $\mathbb{R}^m$ .

Известно, что  $\mathcal{F}[\delta](x) = 1$  Следовательно, получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[1](y) &= \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta](x)](y) = (2\pi)^m \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\delta](x)](-y) = \\ &= (2\pi)^m \delta(-y) = (2\pi)^m \delta(y)\end{aligned}$$

Таким образом, установлено равенство

$$\mathcal{F}[1](y) = (2\pi)^m \delta(y)$$

В физической литературе часто записываемое в символической интегральной форме

$$\int_{x \in \mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} dx = (2\pi)^m \delta(y)$$

**Преобразование Фурье от  $\left(\frac{1}{x}\right)$** 

Теперь вычислим преобразование Фурье обобщённой функции  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . В силу результата примера 3.1.6, имеем равенство

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} = -i\mathcal{F}[\theta](x) + i\pi\delta(x)$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](y) &= -i\mathcal{F}[\mathcal{F}[\theta](x)](y) + i\pi\mathcal{F}[\delta](y) = \\ &= -2\pi i\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\theta](x)](-y) + \pi i = -2\pi i\theta(-y) + \pi i\end{aligned}$$

Таким образом, установлено равенство

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](y) = \pi i(1 - 2\theta(-y)) = \pi i \operatorname{sign}(y)$$

Но конечно, преобразование Фурье  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  можно вычислить и  $\ll$  В лобж. Для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  имеем: Заметим, что функция

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \varphi(y) \frac{\sin(xy)}{x}, \quad x \in (0, +\infty), \quad y \in \mathbb{R}$$

не является абсолютно интегрируемой на  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ , так как несобственный интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y)$$

является условно сходящимся (см. [4]) Следовательно,

Для повторного интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \frac{\sin(xy)}{x}$$

не применима теорема Фубини, и без специального обоснования поменять в нём порядок интегрирования нельзя. Попытаемся обосновать возможность поменять порядок интегрирования. Заметим, что для любого  $R > 0$  функция

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \varphi(y) \frac{\sin(xy)}{x}$$

является абсолютно интегрируемой на множестве  $(0, R) \times \mathbb{R}$ . Действительно, в силу вложения  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , существует число  $C > 0$ , такое, что

$$|y\varphi(y)| \leq \frac{C}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Поэтому находим, что Следовательно, теорему Фубини можно применить к повторному интегралу

$$\int_0^R dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \frac{\sin(xy)}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^R dx \varphi(y) \frac{\sin(xy)}{x}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \frac{\sin(xy)}{x} = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \int_0^R dx \frac{\sin(xy)}{x} \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

Тогда Для любого  $y \neq 0$  имеем

$$\int_0^R \frac{\sin(xy)}{x} dx = \int_0^{Ry} \frac{\sin x}{x} dx = \psi(Ry)$$

При этом

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \psi(Ry) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y) \quad \forall y \neq 0$$

Заметим, что функция  $\psi$  является непрерывной на  $\mathbb{R}$ , и имеет при  $t \rightarrow \pm\infty$  конечные пределы  $\pm\frac{\pi}{2}$ . Следовательно, она является ограниченной на  $\mathbb{R}$ , то есть существует число  $M > 0$ , такое, что

$$|\psi(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Таким образом, для Любого  $R > 0$  справедлива оценка

$$|\varphi(y)\psi(Ry)| \leq M|\varphi(y)| \quad \forall y \neq 0$$

а функция  $M|\varphi(y)|$  является абсолютно интегрируемой на  $\mathbb{R}$  в силу Вложения  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ . Поэтому, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \int_0^R dx \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \psi(Ry) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y) \end{aligned}$$

Окончательно находим, что

$$\left\langle \mathcal{F} \left[ \mathcal{P} \frac{1}{x} \right] (y), \varphi(y) \right\rangle = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi(y) \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y) = \langle \pi i \operatorname{sign}(y), \varphi(y) \rangle$$

что и доказывает равенство (3.1.3)

### Преобразование Фурье от $\left(\frac{1}{|x|}\right)$

Вычислим в пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  преобразование Фурье обобщённой функции  $\mathcal{P}\frac{1}{|x|}$ , определённой в (2.1.8).

Для Любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  имеем:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right](y), \varphi(y) \right\rangle &= \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \mathcal{F}[\varphi](x) \right\rangle = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{\mathcal{F}[\varphi](x) - \mathcal{F}[\varphi](0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\mathcal{F}[\varphi](x)}{|x|} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{\mathcal{F}[\varphi](x) + \mathcal{F}[\varphi](-x) - 2\mathcal{F}[\varphi](0)}{x} dx + \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \frac{\mathcal{F}[\varphi](x) + \mathcal{F}[\varphi](-x)}{x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{\mathbb{R}} dy \varphi(y) 2(\cos(xy) - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_{\mathbb{R}} dy \varphi(y) 2 \cos(xy) = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} dy (\varphi(y) + \varphi(-y)) 2(\cos(xy) - 1) + \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} dy (\varphi(y) + \varphi(-y)) 2 \cos(xy) = \end{aligned}$$

После следующих рассуждений мы продолжим выкладку, которая начнётся равенством в рамке.

Обозначим для краткости  $\psi(y) = \varphi(y) + \varphi(-y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$

Понятно, что функция  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Так как

$$\frac{\psi(y)(\cos(xy) - 1)}{x} \in \mathbb{L}_1(0 < x < 1, y > 0)$$

то, по теореме Фубини,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} dy \psi(y) (\cos(xy) - 1) = \int_0^{+\infty} dy \psi(y) \int_0^1 \frac{(\cos(xy) - 1)}{x} dx$$

Далее, так как для любого  $R > 1$  Выполнено

$$\frac{\psi(y) \cos(xy)}{x} \in \mathbb{L}_1(1 < x < R, y > 0)$$

то, по теореме Фубини, имеем равенства

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2 \cos(xy) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \int_x^x \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2 \cos(xy) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} dy \psi(y) \int_1^R \frac{\cos(xy)}{x} dx$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2 \left( \int_0^1 \frac{(\cos(xy) - 1)}{x} dx + \int_1^R \frac{\cos(xy)}{x} dx \right) \right] = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2 \left( \int_0^y \frac{(\cos(t) - 1)}{t} dt + \int_y^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \right] \end{aligned}$$

После следующих рассуждений мы продолжим выкладку, Которая начнётся равенством в рамке. Заметим, Что

$$\begin{aligned} &\int_0^y \frac{(\cos(t) - 1)}{t} dt + \int_y^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{(\cos(t) - 1)}{t} dt + \int_1^y \frac{(\cos(t) - 1)}{t} dt + \int_t^R \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_t^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{(\cos(t) - 1)}{t} dt - \ln(y) + \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt + \int_R^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt \end{aligned}$$

Поэтому находим:

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2 \left( \int_0^1 \frac{(\cos(t) - 1)}{t} dt - \ln(y) + \right. \\ \left. + \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt + \int_R^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) =$$

После следующих рассуждений мы продолжим выкладку, Которая начнётся равенством в рамке. Так как существует числовой

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

$$\left| \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq M \quad \forall R \geq 1$$

185

$$\left| \int_R^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt \right| \leq \left| \int_R^{Ry} \frac{dt}{t} \right| = |\ln(y)|$$

Гак как функции  $\psi(y)$  и  $\psi(y) \ln(y)$  абсолютно интегрируемы по  $y > 0$  го, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем:

$$= \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2 \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 \frac{(\cos(t) - 1)}{t} dt - \ln(y) + \right. \\ \left. + \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt + \int_R^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) = \\ = \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2 \left( \int_0^1 \frac{(\cos(t)-1)}{t} dt - \ln(y) + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right) = \\ = \int_0^{+\infty} dy \varphi(y) 2 \left( \int_0^1 \frac{(\cos(t)-1)}{t} dt - \ln |y| + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right)$$

Обозначив

$$c = \int_0^1 \frac{(1 - \cos(t))}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

ПОлучаем:

$$\left\langle \mathcal{F} \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|} \right] (y), \varphi(y) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} dy \varphi(y) (-2c - 2 \ln |y|)$$

то есть доказано равенство

$$\mathcal{F} \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|} \right] (y) = -2c - 2 \ln |y|$$

## Преобразование Фурье как действие на комплексную экспоненту

фантазия конста не угасает

да ну нахрен на это тратить время сейчас. а мб и вообще.

**тут про срезку кстати теория** тоже полезно знать.



### Суперпозиция обобщённой функции и Линейной вектор-функции

Интересным следствием равенства (3.2.2) преобразование Фурье обобщённой функции в терминах её действия на комплексную экспоненту является возможность естественным образом определить суперпозицию обобщённой функции  $\ell$  переменных и линейной функции  $m$  переменных, действующей в  $\ell$ -мерное пространство?

Начнём с простой ситуации, когда  $\ell = 1$

Для произвольной обобщённой функции  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  рассмотрим  $g(y) = \mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ . Тогда для любой  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  в силу равенства (3.2.2) получаем:

$$\begin{aligned} \langle f(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \mathcal{F}[g(y)](x), \varphi(x) \rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left\langle g(y), \eta_1 \left( \frac{y}{R} \right) e^{i(x,y)} \right\rangle dx \end{aligned}$$

Это равенство позволяет естественным образом определить суперпозицию обобщённой функции одной переменной  $f(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  и скалярной линейной функции многих переменных  $(a, x) + b$  для вектора

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}^m, a \neq 0, \text{ и числа } b \in \mathbb{R} : \\ \langle f((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \\ = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left\langle \mathcal{F}^{-1}[f(z)](y), \eta_1 \left( \frac{y}{R} \right) e^{i((a,x)+b)y} \right\rangle dx \end{aligned}$$

Покажем, что выражение в правой части равенства (3.3.1) действительно определяет обобщённую функцию из пространства  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , которую мы и будем обозначать  $f((a, x) + b)$ . Обозначив для краткости  $g(y) = \mathcal{F}^{-1}[f(z)](y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left\langle g(y), \eta_1 \left( \frac{y}{R} \right) e^{i((a,x)+b)y} \right\rangle dx = \\ = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle g(y), \eta_1 \left( \frac{y}{R} \right) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{i((a,x)+b)y} dx \right\rangle \end{aligned}$$

Так Как справедливо очевидное равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{i((a,x)+b)y} dx &= e^{iby} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{i(ay,x)} dx = \\ &= e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

и по лемме 3.2.1 имеет место предельное соотношение

$$\eta_1 \left( \frac{y}{R} \right) e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \quad \text{при } R \rightarrow +\infty$$

то получаем:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle g(y), \eta_1 \left( \frac{y}{R} \right) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{i((a,x)+b)y} dx \right\rangle = \langle g(y), e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \rangle$$

По утверждению 3.1.1, преобразование Фурье является непрерывным линейным преобразованием пространства  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ . Тогда, в силу неравенства  $a \neq 0$ , справедливо вложение  $\mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , и для любой последовательности  $\varphi_n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ , сходящейся к функции  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  в пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ , имеем:

$$\mathcal{F}[\varphi_n(x)](ay) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Поскольку все производные функции  $e^{iby}$  ограничены на  $\mathbb{R}$ , то отсюда следует очевидное соотношение

$$e^{iby} \mathcal{F}[\varphi_n(x)](ay) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Следовательно,

$$\langle g(y), e^{iby} \mathcal{F}[\varphi_n(x)](ay) \rangle \rightarrow \langle g(y), e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \rangle \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Таким образом, соотношение

$$\begin{aligned} & \langle f((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \\ & = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \langle \mathcal{F}^{-1}[f(z)](y), \eta_1\left(\frac{y}{R}\right) e^{i((a, x) + b)y} \rangle dx = \\ & = \langle \mathcal{F}^{-1}[f(z)](y), e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \rangle \end{aligned}$$

Определяет линейный и непрерывный функционал на пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ . Следовательно, доказано вложение  $f((a, x) + b) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$   $b \in \mathbb{R}$ . Тогда суперпозицией обобщённой функции  $f(z)$  с линейной функцией  $(a, x) + b$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , будем называть обобщённую функцию  $f((a, x) + b) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , действие которой на произвольную функцию  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  имеет вид:

$$\langle f((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[f(z)](y), e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \rangle$$

Проиллюстрируем это определение на примерах, но сначала ДОКАЖЕМ одну важную Лемму.

**Л е м м а 3.3.2.** Пусть функция  $F(\xi)$  абсолютно интегрируема на  $\mathbb{R}$ , а функция  $\frac{F(\xi) - F(0)}{\xi}$  ограничена при  $0 < |\xi| < r$ .

Тогда существует

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} F(\xi) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi = \pi F(0)$$

*Proof.* Для любого  $d \in (0, r)$  имеем:

$$\int_{\mathbb{R}} F(\xi) \frac{\sin \xi R}{\xi} d\xi = \int_{|\xi| < d} F(\xi) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi + \int_{|\xi| \geq d} \frac{F(\xi)}{\xi} \sin(\xi R) d\xi$$

Так как имеет место очевидное неравенство

$$\int_{|\xi| \geq d} \left| \frac{F(\xi)}{\xi} \right| d\xi \leq \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}} |F(\xi)| d\xi < +\infty$$

то функция  $\frac{F(\xi)}{\xi}$  абсолютно интегрируема на множестве  $|\xi| \geq d$ . Следовательно, по теореме Римана об осцилляции, получаем:

$$\int_{|\xi| \geq d} \frac{F(\xi)}{\xi} \sin(\xi R) d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty$$

Далее,

$$\int_{|\xi| < d} F(\xi) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi = \int_{|\xi| < d} \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \sin(\xi R) d\xi + \int_{|\xi| < d} F(0) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi$$

По условию, существует число  $C > 0$ , такое, что для всех  $0 < |\xi| < r$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \right| \leq C$$

Следовательно,

$$\int_{|\xi| < d} \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \sin(\xi R) d\xi \leq \int_{|\xi| < d} C d\xi = 2Cd$$

Наконец, при  $R \rightarrow +\infty$  справедливо соотношение

$$\int_{|\xi| < d} F(0) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi \stackrel{t=\xi R}{=} \int_{|t| < Rd} F(0) \frac{\sin(t)}{t} dt \rightarrow \int_{\mathbb{R}} F(0) \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi F(0)$$

Поэтому, для любого  $\varepsilon > 0$  и  $d \in (0, r)$  существует число  $R(\varepsilon, d) > 0$ , такое, что для любого  $R > R(\varepsilon, d)$  имеет место неравенство:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(\xi) \frac{\sin \xi R}{\xi} d\xi - \pi F(0) \right| \leq \varepsilon + 2Cd$$

Рассмотрим  $d(\varepsilon) = \frac{1}{2} \min \{r, \frac{\varepsilon}{C}\} \in (0, r)$ , получим

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(\xi) \frac{\sin \xi R}{\xi} d\xi - \pi F(0) \right| \leq 2\varepsilon \quad \forall R > R(\varepsilon, d(\varepsilon))$$

что и требовалось. □

**действие  $\delta$ -функцией на вектор-функцию** Рассмотрим суперпозицию дельта-функции Дирака одной переменной  $\delta(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  и скалярной линейной функции  $(a, x) + b$  векторной переменной  $x \in \mathbb{R}^m$ .

Здесь  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$  и  $a \neq 0$ . Тогда для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ , по определению 3.3.1, имеем:

$$\langle \delta((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[\delta(z)](y), e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \rangle$$

$$\langle \delta((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iby}}{2\pi} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) dy$$

Для любого  $t \in \mathbb{R}$  рассмотрим плоскость

$$S(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (a, x) = t\}$$

Тогда для любой абсолютно интегрируемой на  $\mathbb{R}^m$  функции  $h(x)$  имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^m} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{|a|} \int_{x \in S(t)} h(x) dS_x$$

Следовательно, преобразование Фурье функции  $\varphi(x)$  в точке  $ay$  можно переписать в виде:

$$\mathcal{F}[\varphi(x)](ay) = \int_{\mathbb{R}^m} dx \varphi(x) e^{i(a, x)y} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ity} dt}{|a|} \int_{x \in S(t)} \varphi(x) dS_x$$

197

Получаем:

$$\begin{aligned} \langle \delta((a, x) + b), \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iby} dy}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ity} dt}{|a|} \int_{x \in S(t)} \varphi(x) dS_x = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{2\pi|a|} \int_{x \in S(t)} \varphi(x) dS_x \int_{-R}^R dy e^{i(t+b)y} = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in S(t)} \frac{\varphi(x)}{\pi|a|} dS_x \right) \frac{\sin(t+b)R}{(t+b)} dt \stackrel{\xi=t+b}{=} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{x \in S(\xi-b)} \frac{\varphi(x)}{\pi|a|} dS_x \right) \frac{\sin \xi R}{\xi} dt \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$F(\xi) = \int_{x \in S(\xi-b)} \frac{\varphi(x)}{\pi|a|} dS_x, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Покажем, что  $F(\xi)$  абсолютно интегрируема на  $\mathbb{R}$ . Действительно, имеем:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\pi|a|} \int_{x \in S(\xi-b)} |\varphi(x)| dS_x = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\varphi(x)|}{\pi} dx < +\infty$$

Далее, для любого  $\xi \in \mathbb{R}$  имеет место равенство:

$$\int_{x \in S(\xi-b)} \varphi(x) dS_x^{x=y+\frac{a}{|a|^2}\xi} \int_{y \in S(-b)} \varphi\left(y + \frac{a}{|a|^2}\xi\right) dS_y$$

Тогда для любого  $\xi \neq 0$  получаем:

$$\left| \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \right| \leq \int_{x \in S(-b)} \left| \frac{\varphi\left(x + \frac{a}{|a|^2}\xi\right) - \varphi(x)}{\xi} \right| \frac{dS_x}{\pi|a|}$$

По теореме Лагранжа, существует число  $t(\xi)$  строго между нулём и  $\xi$ , такое, что

$$\frac{\varphi\left(x + \frac{a}{|a|^2}\xi\right) - \varphi(x)}{\xi} = \left( \nabla \varphi\left(x + \frac{a}{|a|^2}t(\xi)\right), \frac{a}{|a|^2} \right)$$

198

Так как функция  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ , то существует число  $C > 0$ , для которого имеет место неравенство

$$\left| \left( \nabla \varphi(x), \frac{a}{|a|^2} \right) \right| \leq \frac{C}{1 + |x|^{2m}} \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

Для любого  $0 < |\xi| \leq |a|$  и произвольного  $|x| \geq 2$  имеем:

$$\left| \frac{a}{|a|^2}t(\xi) \right| \leq 1 \leq \frac{|x|}{2} \rightarrow \left| x + \frac{a}{|a|^2}t(\xi) \right| \geq \frac{|x|}{2}$$

$$\left| \left( \nabla \varphi\left(x + \frac{a}{|a|^2}t(\xi)\right), \frac{a}{|a|^2} \right) \right| \leq \frac{C}{1 + \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2m}}$$

Следовательно, для всех  $0 < |\xi| \leq |a|$  получаем оценку:

$$\left| \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \right| \leq \int_{x \in S(-b)} \frac{C dS_x}{\pi|a|} + \int_{x \in S(-b)} \frac{C}{|x| \geq 2} \frac{dS_x}{\left(1 + \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2m}\right)} \frac{|a|}{|a|} = M$$

Значит, функция  $\frac{F(\xi) - F(0)}{\xi}$  ограничена при  $0 < |\xi| \leq |a|$ . Поэтому, по лемме 3.3.2, получаем:

$$\langle \delta((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \pi F(0) = \int_{x \in S(-b)} \frac{\varphi(x)}{|a|} dS_x$$

Таким образом, по определению 3.3.1 вычислено действие суперпозиции  $\delta$ -функции Дирака одной переменной и скалярной линейной функции многих переменных  $(a, x) + b$  на произвольную функцию  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\langle \delta((a, x) + b), \varphi(x) \rangle \int_{(a, x) + b = 0} \frac{\varphi(x)}{|a|} dS_x$$

**далее теория этой хрени всей** ??????

и тут дофига теории, которая неизвестно, нужна ли или нет

## 13 Типичные обобщенные задачи

(выпишу из Константинова просто эти методы, если буду заниматься этим)

**О том, почему нельзя делать проще, не вводя функциональные пространства (!???)**

(очень типичный вопрос, так что пропишу ответ, что без этого вот - такая-то и такая-то задача не решаются или решаются неверно)

### 13.0.1 Примеры задач про обобщенную задачу Коши для трехмерного волнового уравнения (!???)

(!!! много в 1ю добавлю!!!)

#### Теория

В этом пособии для дистанционного занятия мы найдём функцию Грина трехмерного волнового оператора и рассмотрим примеры решения обобщенных задач Коши для трехмерного волнового уравнения. Пусть  $a > 0, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Будем использовать обозначение

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Определение 1. Обобщённой задачей Коши для трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

называют задачу, в которой требуется найти решения  $u(t, x) \in S'(\mathbb{R}^4)$  уравнения (1), у которых носители содержатся в полупространстве

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

При этом считаем, что и у обобщенной функции  $f(t, x)$  носитель также содержится в полупространстве (2).

Оператор, стоящий в левой части уравнения (1), называют оператором

Даламбера. Замечание 1. В случае, когда функции  $u_0(x), u_1(x), f(x, t)$  являются функциями медленного роста, классическую задачу Коши для трехмерного волнового уравнения

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \Delta_x u &= f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} &= u_0(x) \\ u_t|_{t=0} &= u_1(x) \end{aligned}$$

можно свести к решению обобщенной задачи Коши для трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta_x u(t, x) + f(t, x) + \delta'(t)u_0(x) + \delta(t)u_1(x)$$

Доказательство этого утверждения практически дословно совпадает с доказательством, проведенным для одномерного волнового уравнения.

Перейдем теперь к вычислению функции Грина оператора Даламбера в трехмерном случае.

**Пример:** поиск функции Грина оператора  $\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x$

Найти в  $S'(\mathbb{R}^4)$  функцию Грина  $\mathcal{E}(t, x)$  оператора Даламбера

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x,$$

удовлетворяющую условию  $\text{supp } \mathcal{E}(t, x) \subset \{(t, x) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$ .

**Решение.** Функция  $\mathcal{E}(t, x)$  является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x \mathcal{E} = \delta(t, x)$$

Возьмем преобразование Фурье по  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_x[\mathcal{E}] - a^2 ((-i\xi_1)^2 + (-i\xi_2)^2 + (-i\xi_3)^2) F_x[\mathcal{E}] &= \delta(t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_x[\mathcal{E}] + a^2 |\xi|^2 F_x[\mathcal{E}] &= \delta(t) \end{aligned}$$

Обозначив  $g(t, \xi) = F_x[\mathcal{E}](t, \xi)$ , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 g = \delta(t)$$

При поиске функции Грина одномерного волнового оператора мы выяснили, что при каждом фиксированном  $\xi$  уравнение (3) имеет единственное решение

$$g(t, \xi) = \theta(t) \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$$

носитель которого входит в множество  $t \geq 0$ . Докажем, что обобщённая функция  $g(t, \xi)$  будет решением уравнения (3) И В  $S'(\mathbb{R}^4)$  Для любой основной функции  $\varphi(t, \xi) \in S(\mathbb{R}^4)$  справедливы равенства

$$\langle g_{tt}, \varphi \rangle = \langle g, \varphi_{tt} \rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \theta(t) \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \varphi_{tt} dt d\xi$$

В силу абсолютной интегрируемости подынтегральной функции получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} \theta(t) \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \varphi_{tt} dt d\xi &= \int_{\mathbb{R}^3} d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \varphi_{tt} dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\xi \left( \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \varphi_t \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos(a|\xi|t) \varphi_t dt \right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\xi \left( -\cos(a|\xi|t) \varphi \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} a|\xi| \sin(a|\xi|t) \varphi dt \right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\xi \left( \varphi(0, \xi) - a^2 |\xi|^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \varphi dt \right) = \langle \delta(t) - a^2 |\xi|^2 g, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Доказано. Теперь для того, чтобы найти функцию Грина, остается вычислить обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{E}(t, x) = F_\xi^{-1}[g](t, x) = F_\xi^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \right] (t, x)$$

Ранее при решении задания 1.23 б ) была получена формула

$$F_x \left[ \frac{\delta(at - |x|)}{|x|} \right] (t, \xi) = \frac{4\pi \theta(t) \sin(at|\xi|)}{|\xi|}$$

(см. пособие для дистанционного занятия «О замене переменной в аргументе дельта-функций»).

Также при решении задания 1.23 б) было установлено что для любой основной функции  $\varphi(t, x) \in S(\mathbb{R}^4)$  выполнено равенство

$$\left\langle \frac{\delta(at - |x|)}{|x|}, \varphi(t, x) \right\rangle = \int_0^{+\infty} dt \int_{|x|=at} \frac{1}{at} \varphi(t, x) dS_x$$

правую часть которого можно переписать в виде

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{|x|=at} \frac{1}{at} \varphi(t, x) dS_x = \left\langle \frac{\theta(t)}{at} \delta_{Sat}(x), \varphi(t, x) \right\rangle$$

Поэтому

$$\mathcal{E}(t, x) = F_\xi^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \right] (t, x) = \frac{\delta(at - |x|)}{4\pi a|x|} = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{Sat}(x)$$

Ответ.  $\mathcal{E}(t, x) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{Sat}(x)$ .

**Замечание 2.** Выведем еще одну полезную и удобную формулу, часто применяемую при решении задач. Для любой основной функции  $\varphi(t, x) \in S(\mathbb{R}^4)$  выполнено равенство

$$\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi(t, x) \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a}, x\right)}{|x|} dx$$

Действительно,

$$\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi(t, x) \rangle = \left\langle \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{Sat}(x), \varphi(t, x) \right\rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_{|x|=at} \varphi(t, x) dS_x$$

В результате замены переменной  $s = at$  во внешнем интеграле получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_{|x|=at} \varphi(t, x) dS_x &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \int_{|x|=s} \varphi\left(\frac{s}{a}, x\right) dS_x = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{+\infty} ds \int_{|x|=s} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a}, x\right)}{|x|} dS_x = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a}, x\right)}{|x|} dx \end{aligned}$$

В последнем равенстве была применена теорема Фубини, т.к. подынтегральная функция является абсолютно интегрируемой. Формула (4) получена. Замечание 3. На лекциях доказано, что для любой обобщенной функции  $f \in S'(\mathbb{R}^4)$ , носитель которой содержится в полупространстве

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$$

существует свертка  $f * \mathcal{E}$ . По свойствам сверток обобщенных функций эта свертка  $f * \mathcal{E}$  является обобщенным решением уравнения

$$\square_a u = f, \quad t \geq 0$$

**Замечание 4.** Свертка  $f * \mathcal{E}$  является единственным решением обобщенной задачи Коши для уравнения (5), поскольку, как мы выяснили при решении задачи 1, соответствующее однородное уравнение не имеет ненулевых решений с носителями в полупространстве  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^4, t \geq 0\}$ .

**Замечание 5.** При решении обобщенных задач Коши для трехмерного волнового уравнения вычислять функцию Грина оператора Даламбера не требуется, нужно использовать готовую формулу, полученную в задаче 1.

**Пример:** найти решение обобщенной задачи Коши  $u_{tt} - \Delta_x u = \theta(t)\delta(x) + \delta(t)|x| \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$

**Решение.** Искомое решение будет сверткой правой части уравнения с функцией Грина для оператора Даламбера

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (\theta(t)\delta(x) + \delta(t)|x|) * \left(\frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right) = \\ &= (\theta(t)\delta(x)) * \left(\frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right) + (\delta(t)|x|) * \left(\frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right) \end{aligned}$$

**1. Найдем сначала первую свертку.** По определению свертки обобщенных функций для любой основной функции  $\varphi(t, x) \in S(\mathbb{R}^4)$  и любой 1-срезки  $\eta_1(t, x)$  должно быть выполнено равенство

$$\begin{aligned} &\left\langle (\theta(t)\delta(x)) * \left(\frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right), \varphi(t, x) \right\rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle \theta(t)\delta(x), \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi \tau}\delta_{S_\tau}(y), \varphi(t + \tau, x + y) \right\rangle \right\rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle \theta(t), \eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \left\langle \frac{1}{4\pi \tau}\delta_{S_\tau}(y), \varphi(t + \tau, y) \right\rangle \right\rangle \end{aligned}$$

Применяя полезную формулу (4) из замечания 2, находим

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle \theta(t), \eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \left\langle \frac{1}{4\pi \tau}\delta_{S_\tau}(y), \varphi(t + \tau, y) \right\rangle \right\rangle =$$

Оценим подынтегральную функцию. Для этого, воспользовавшись ограниченностью 1-срезки и свойствами функции  $\varphi(s, z) \in S(\mathbb{R}^4)$ , получаем, что

$$\exists M > 0 \quad \exists A > 0 \text{ такие, что}$$

$$\begin{aligned} |\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right)| &\leq M \\ |\varphi(s, z)| &\leq \frac{A}{(1+s^2)(1+|z|^4)} \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что подынтегральная функция в формуле (6) может быть отлична от нуля лишь при  $t > 0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \left| \theta(t)\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \frac{\varphi(t+|y|, y)}{4\pi|y|} \right| &\leq \frac{M \cdot A}{4\pi|y|(1+(t+|y|)^2)(1+|y|^4)} \leq \\ &\leq \frac{M \cdot A}{4\pi|y|(1+t^2)(1+|y|^4)} \end{aligned}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от  $R$  и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (6) можно применять и теорему Фубини, и теорему Лебега об ограниченной сходимости. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} \theta(t)\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \frac{\varphi(t+|y|, y)}{4\pi|y|} dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^4} \theta(t)\eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right) \frac{\varphi(t+|y|, y)}{4\pi|y|} dt dy = \int_{\mathbb{R}^4} \theta(t) \frac{\varphi(t+|y|, y)}{4\pi|y|} dt dy \end{aligned}$$

Сделав во внутреннем интеграле замену переменных

$$\begin{cases} s = t + |y| \\ z = y \end{cases} \quad |J| = 1$$

Получим

$$\int_{\mathbb{R}^4} \theta(t) \frac{\varphi(t+|y|, y)}{4\pi|y|} dt dy = \int_{\mathbb{R}^4} \theta(s - |z|) \frac{\varphi(s, z)}{4\pi|z|} ds dz = \left\langle \frac{\theta(s - |z|)}{4\pi|z|}, \varphi(s, z) \right\rangle$$



**2. Теперь найдем вторую свертку.** По определению свертки для любой основной функции  $\varphi(t, x) \in S(\mathbb{R}^4)$  и любой 1-срезки  $\eta_1(t, x)$  выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \langle (\delta(t)|x|) * \left(\frac{1}{4\pi t} \delta_{S_t}(x)\right), \varphi(t, x) \rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle \delta(t)|x|, \eta_1\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi \tau} \delta_{S_\tau}(y), \varphi(t + \tau, x + y) \right\rangle \right\rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle |x|, \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi \tau} \delta_{S_\tau}(y), \varphi(\tau, x + y) \right\rangle \right\rangle = \end{aligned}$$

Применяя полезную формулу (4) из замечания 2, находим

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle |x|, \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) \left\langle \frac{1}{4\pi \tau} \delta_{S_\tau}(y), \varphi(\tau, x + y) \right\rangle \right\rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} dx |x| \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|y|, x+y)}{4\pi|y|} dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|y|, x+y)}{4\pi|y|} |x| \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) dy \end{aligned}$$

Сделаем оценки, необходимые для применения теоремы Лебега об ограниченной сходимости и теоремы Фубини.

Поскольку  $\varphi(s, z) \in S(\mathbb{R}^4)$ , то для любого многочлена  $P(s, |z|)$  существует такое число  $A > 0$ , что для всех  $(s, z) \in \mathbb{R}^4$  выполнено неравенство

$$|P(s, |z|)\varphi(s, z)| \leq A$$

Для выбора подходящего многочлена обозначим

$$z = x + y, \quad s = |y|$$

тогда

$$\begin{aligned} (1 + |x|^6)(1 + |y|^4) &= (1 + |z - y|^6)(1 + |y|^4) \leq (1 + (|z| + |y|)^6)(1 + |y|^4) = \\ &= (1 + (|z| + s)^6)(1 + s^4) \end{aligned}$$

Полагая  $P(s, |z|) = (1 + (|z| + s)^6)(1 + s^4)$

получаем оценку

$$|\varphi(s, z)| \leq \frac{A}{(1 + (|z| + s)^6)(1 + s^4)}$$

Следовательно,

$$|\varphi(|y|, x + y)| \leq \frac{A}{(1 + |x|^6)(1 + |y|^4)}$$

С учетом ограниченности 1-срезки

$$\left| \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) \right| \leq M$$

Получаем окончательную оценку

$$\left| \frac{\varphi(|y|, x + y)}{4\pi|y|} \right| |x| \left| \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) \right| \leq \frac{AM|x|}{4\pi|y|(1 + |x|^6)(1 + |y|^4)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от  $R$  и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (7) можно применять и теорему Фубини, и теорему об ограниченной сходимости.

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|y|, x+y)}{4\pi|y|} |x| \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|y|, x+y)}{4\pi|y|} |x| \eta_1\left(0, \frac{x}{R}\right) dx dy = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|y|, x+y)}{4\pi|y|} |x| dx dy \end{aligned}$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases} \quad |J| = 1$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|y|, x + y)}{4\pi|y|} |x| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|v|, u)}{4\pi|v|} |u - v| du dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} du \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|v|, u)}{4\pi|v|} |u - v| dv = \int_{\mathbb{R}^3} du \int_0^{+\infty} dt \int_{|v|=t} \frac{\varphi(t, u)}{4\pi t} |u - v| dS_v = \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} du dt \frac{\theta(t)}{4\pi t} \varphi(t, u) \int_{|v|=t} |u - v| dS_v \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл. С этой целью параметризуем сферу  $|v| = t$  так, чтобы угол  $\theta$  был углом между векторами  $u$  и  $v$  и запишем модуль вектора  $|u - v|$  по теореме косинусов

$$|u - v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{|v|=t} |u - v| dS_v &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sqrt{|u|^2 + t^2 - 2|u|t \cos \theta} t^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi t^2 \left. \frac{(|u|^2 + t^2 - 2|u|t \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{3|u|t} \right|_0^\pi = \frac{2\pi t}{3|u|} ((|u| + t)^3 - ||u| - t|^3) \end{aligned}$$

Подставляя полученный результат в формулу (8)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} du dt \frac{\theta(t)}{4\pi t} \varphi(t, u) \int_{|v|=t} |u - v| dS_v &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\theta(t)}{4\pi t} \cdot \frac{2\pi t}{3|u|} ((|u| + t)^3 - ||u| - t|^3) \varphi(t, u) du dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\theta(t)}{6|u|} ((|u| + t)^3 - ||u| - t|^3) \varphi(t, u) du dt = \\ &= \left\langle \frac{\theta(t)}{6|u|} ((|u| + t)^3 - ||u| - t|^3), \varphi(t, u) \right\rangle \end{aligned}$$

получаем окончательный ответ в задаче

$$u(t, x) = \frac{\theta(t - |x|)}{4\pi|x|} + \frac{\theta(t)}{6|x|} ((|x| + t)^3 - ||x| - t|^3)$$

Ответ.

$$u(t, x) = \frac{\theta(t - |x|)}{4\pi|x|} + \frac{\theta(t)}{6|x|} ((|x| + t)^3 - ||x| - t|^3)$$

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с обобщенной задачей Коши для трёхмерного волнового уравнения.

---

## Part III

# Problems in PDE

## 14 Типичные задачи и вопросы

### 14.1 Общие вопросы

#### 14.1.1 Вопросы на понимание сути предмета

#### 14.1.2 Типичные задачи на проверку знаний

#### 14.1.3 Вопросы на понимание типичных деталей

### 14.2 Задача Коши

#### 14.2.1 Задачи контрольной Лебедева МФТИ

##### МФТИ.Лебедев.КР.вар1.1 Волновое уравнение с гладким источником

Найти решение задачи с начальными условиями.

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) \varphi(t) = f_0 e^{-\gamma|t|}; \quad \varphi(t \rightarrow -\infty) = 0.$$

Исследовать пределы  $\gamma \rightarrow 0, \infty$ .

**Решение** Решаем через функцию Грина осциллятора, сложность в том, чтобы внимательно посчитать интеграл светки, разделив его на разные случаи и проинтегрировав по частям.

Поскольку функция  $\varphi(t)$  убывает на  $-\infty$ , решение определяется только интегралом с источником (решения однородного уравнения не стремятся к 0 на  $-\infty$ ):  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)f(s)ds$ , где для осциллятора  $G(t) = \theta(t)\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}$ , поэтому  $\theta$ -функция учтена в пределах интегрирования. Вычисления легче всего проводить при разных знаках времен  $t > 0$  и  $t < 0$  отдельно.

$$\begin{aligned} \varphi(t < 0) &= f_0 \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_0(t-s)}{\omega_0} e^{\gamma s} ds \stackrel{\text{by parts}}{=} \frac{f_0}{\gamma \omega_0} \sin \omega_0(t-s) e^{\gamma s} \Big|_{-\infty}^t + \frac{f_0}{\gamma} \int_{-\infty}^t e^{\gamma s} \cos \omega_0(t-s) ds = \\ &= \frac{f_0}{\gamma} \int_{-\infty}^t e^{\gamma s} \cos \omega_0(t-s) ds \stackrel{\text{by parts}}{=} \frac{f_0}{\gamma^2} e^{\gamma s} \cos \omega_0(t-s) \Big|_{-\infty}^t - \frac{f_0 \omega_0}{\gamma^2} \int_{-\infty}^t e^{\gamma s} \sin \omega_0(t-s) ds = \\ &= \frac{f_0}{\gamma^2} e^{\gamma t} - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \varphi(t). \\ \varphi(t < 0) &= \frac{f_0 e^{\gamma t}}{\gamma^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t > 0) &= f_0 \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_0(t-s)}{\omega_0} e^{\gamma|s|} ds = \\ &= f_0 \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \omega_0(t-s)}{\omega_0} e^{\gamma s} ds + f_0 \int_0^t \frac{\sin \omega_0(t-s)}{\omega_0} e^{-\gamma s} ds = \\ &= \frac{\gamma \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega_0 t}{\gamma^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t + \omega_0 e^{-\gamma t}}{\gamma^2 + \omega_0^2} = \\ &= f_0 \frac{2 \frac{\gamma}{\omega_0} \sin \omega_0 t + e^{-\gamma t}}{\gamma^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл был посчитан интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \sin \omega_0(t-s)e^{\gamma s} ds &= \frac{1}{\gamma} \sin \omega_0(t-s)e^{\gamma s} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{\omega_0}{\gamma} \int_{-\infty}^0 \cos \omega_0(t-s)e^{\gamma s} ds = \\ &= \frac{\sin \omega_0 t}{\gamma} + \frac{\omega_0}{\gamma^2} \cos \omega_0(t-s)e^{\gamma s} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \int_{-\infty}^0 \sin \omega_0(t-s)e^{\gamma s} ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^0 \sin \omega_0(t-s)e^{\gamma s} ds = \frac{\gamma \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega_0 t}{\gamma^2 + \omega_0^2}.\end{aligned}$$

Заметим, что использовать формулу  $\varphi(t < 0)|_{t=0} = \frac{f_0 e^{\gamma t}}{\gamma^2 + \omega_0^2}|_{t=0}$  нельзя, потому что у нас  $t$  считается везде фиксированным параметром, а нам нужно, чтобы в пределе интегрирования он был 0, а под интегралом не 0. И второй считаем аналогично:

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin \omega_0(t-s)e^{-\gamma s} ds &= e^{-\gamma t} \int_0^t \sin \omega_0 s e^{\gamma s} ds = \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} \sin \omega_0 s \cdot e^{\gamma s} \Big|_0^t - \frac{\omega_0}{\gamma} e^{-\gamma t} \int_0^t \cos \omega_0 s \cdot e^{\gamma s} ds = \\ &= \frac{1}{\gamma} \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\gamma^2} e^{-\gamma t} \cos \omega_0 s \cdot e^{\gamma s} \Big|_0^t - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} e^{-\gamma t} \int_0^t \sin \omega_0 s \cdot e^{\gamma s} ds = \\ &= \frac{1}{\gamma} \sin \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\gamma^2} e^{-\gamma t} (1 - \cos \omega_0 t \cdot e^{\gamma t}) - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} e^{-\gamma t} \int_0^t \sin \omega_0 s \cdot e^{\gamma s} ds.\end{aligned}$$

Последний интеграл тут равен интегралу левой части, что видно парой заменой переменных и пределов интегрирования (???). Следовательно:

$$\int_0^t \sin \omega_0(t-s)e^{-\gamma s} ds = \frac{\gamma \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t + \omega_0 e^{-\gamma t}}{\gamma^2 + \omega_0^2}.$$

Итого ответ:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f_0 e^{\gamma t}}{\gamma^2 + \omega_0^2}, & t < 0 \\ f_0 \frac{2\gamma \sin \omega_0 t + e^{-\gamma t}}{\gamma^2 + \omega_0^2}, & t > 0 \end{cases}.$$

В пределе  $\gamma \rightarrow \infty$  оба выражения стремятся к 0. Это логично, т.к. источник конечной силы действует конечное время порядка  $1/\gamma$ .

В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  источник, наоборот, очень широкий. На не слишком больших временах  $|t| \ll 1/\gamma$ :

$$\varphi(t) \approx \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

## МФТИ.Лебедев.КР.вар1.2 Причинная функция Грина

Найти причинную функцию Грина оператора:

$$L(\partial_t) = \partial_t^4 + 5\partial_t^2 + 4.$$

**Решение через преобразование Лапласа** Делаем преобразование Лапласа:

$$(p^4 + 5p^2 + 4) G(p) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{p^4 + 5p^2 + 4}.$$

$$G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{e^{pt}}{p^4 + 5p^2 + 4} \frac{dp}{2\pi i},$$

$p_0$  правее всех особенностей подынтегральной функции. Поскольку:

$$p^4 + 5p^2 + 4 = (p^4 + p^2) + (4p^2 + 4) = (p^2 + 1)(p^2 + 4),$$

то все особенности подынтегральной функции - полюса первого порядка в точках  $\pm i, \pm 2i$ , так что по  $\text{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{\varphi'(a)}$ , где исходная функция имеет вид  $f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}$ , быстро получаем ответ, замыкая контур влево и используя лемму Жордана:

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{e^{it}}{6i} - \frac{e^{-it}}{6i} - \frac{e^{2it}}{12i} + \frac{e^{-2it}}{12i}, & t > 0 \end{cases} = \theta(t) \left[ \frac{\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{6} \right].$$

**Решение через условие на непрерывность производных** (???? пока не понял, почему так можно делать, ну и не важно, потом нужно будет - пойму.)

Нулями характеристического многочлена являются значения  $\pm i, \pm 2i$ , а потому общее решение однородного уравнения при  $t > 0$  имеет вид:

$$G(t > 0) = A \sin t + B \cos t + C \sin 2t + D \cos 2t.$$

Запишем условия непрерывности 0, 1 и 2 производных и скачок третьей производной:

$$\begin{cases} G(+0) = 0 = B + D, \\ \dot{G}(+0) = 0 = A + 2C, \\ \ddot{G}(+0) = 0 = -B - 4D, \\ G^{(3)}(+0) = 1 = -A - 8C. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3, \\ B = 0, \\ C = -1/6, \\ D = 0. \end{cases}.$$

А потому ответ имеет вид:

$$G(t) = \theta(t) \left[ \frac{\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{6} \right].$$

### МФТИ.Лебедев.КР.вар1.3 Источник - ступенька

Найти решение уравнения, полагая  $\varphi(t < 0) = 0$ :

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) \varphi(t) = f_0 \sin \omega t \cdot \theta(t) \theta(T - t).$$

**Решение** Мы уже сразу знаем ответ, помня функцию Грина, нужно только повозиться с интегралами, просто нужно рассмотреть интегралы для разных времен отдельно.

Поскольку источник при  $t < 0$  не действует, то это означает, что при  $t < 0$  решение может удовлетворять только однородному уравнению. Следовательно это решение однородного уравнения должно быть нулевым по начальному условию. Итого для  $t \geq 0$ :

$$\varphi(t) = f_0 \int_0^t \frac{\sin \omega_0(t-s)}{\omega_0} \sin \omega s \cdot \theta(T-s) ds.$$

Сначала решим задачу для  $\omega = \omega_0$ :

Пусть  $0 < t < T$ . В этом случае тета-функция под интегралом никак не влияет на интеграл и мы получаем:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} \int_0^t [\cos \omega_0(t-2s) - \cos \omega_0 t] ds = -\frac{f_0}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2} \sin \omega_0 t.$$

Пусть  $t \geq T$ . В этом случае необходимо интеграл обрезать на  $T$ :

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} \int_0^T [\cos \omega_0(t-2s) - \cos \omega_0 t] ds = -\frac{f_0}{2\omega_0} T \cos \omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2} \sin \omega_0 T \cos \omega_0(t-T).$$

$$\text{Итого ответ: } \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\frac{f_0}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2} \sin \omega_0 t, & 0 \leq t < T \\ -\frac{f_0}{2\omega_0} T \cos \omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2} \sin \omega_0 T \cos \omega_0(t-T), & t \geq T \end{cases}$$

Теперь предположим, что  $\omega \neq \omega_0$ :

Пусть  $0 < t < T$ . В этом случае тета-функция под интегралом никак не влияет на интеграл и мы получаем:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} \int_0^t \{\cos [\omega_0 t - (\omega_0 + \omega) s] - \cos [\omega_0 t - (\omega_0 - \omega) s]\} ds = \frac{f_0}{2\omega_0} \left[ \frac{\sin \omega t + \sin \omega_0 t}{\omega_0 + \omega} - \frac{\sin \omega_0 t - \sin \omega t}{\omega_0 - \omega} \right].$$

Пусть  $t \geq T$ . В этом случае необходимо интеграл обрезать на  $T$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{f_0}{2\omega_0} \int_0^T \{\cos [\omega_0 t - (\omega_0 + \omega) s] - \cos [\omega_0 t - (\omega_0 - \omega) s]\} ds = \\ &= \frac{f_0}{2\omega_0} \left\{ \frac{\sin \omega_0 t + \sin [(\omega_0 + \omega) T - \omega_0 t]}{\omega_0 + \omega} - \frac{\sin \omega_0 t + \sin [(\omega_0 - \omega) T - \omega_0 t]}{\omega_0 - \omega} \right\}. \end{aligned}$$

Итого ответ:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{\sin \omega t + \sin \omega_0 t}{\omega_0 + \omega} - \frac{\sin \omega_0 t - \sin \omega t}{\omega_0 - \omega}, & 0 \leq t < T \\ \frac{\sin \omega_0 t + \sin [(\omega_0 + \omega) T - \omega_0 t]}{\omega_0 + \omega} - \frac{\sin \omega_0 t + \sin [(\omega_0 - \omega) T - \omega_0 t]}{\omega_0 - \omega}, & t \geq T \end{cases}$$

**МФТИ.Лебедев.КР.вар1.4 Функция Грина матрицы**

Найти запаздывающую функцию Грина уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

**Решение через Жорданову цепь** Дагонализуем матрицу матрицей перехода, которую находим через Жорданову цепь, а дальше экспоненцируем и вставляем в готовую формулу.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \equiv -\hat{\Gamma} \mathbf{x}.$$

Поскольку матрица нижнетреугольная, то собственные числа стоят уже на диагонали:  $\lambda_{1,3} = 2, \lambda_2 = 1$  (? почему?).

Ищем собственные векторы:

$$\begin{aligned} \lambda_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 &\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_{13} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 &\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Других собственных векторов у  $\lambda_{13}$  нет, а потому ищем Жорданову цепь соответствующую данному собственному числу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом матрица перехода:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \hat{S}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$-\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для функции Грина ответ имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) &= \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t) = \theta(t) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \theta(t) \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}/3 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \\ e^{2t} & te^{2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \theta(t) \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 3te^{2t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Решение через подстановку** Вид экспоненты от матрицы диктует вид матрицы функции Грина:

$$\hat{G}(t) = \theta(t) [\hat{A}e^{2t} + \hat{B}te^{2t} + \hat{C}e^t].$$

При положительных  $t$  функция Грина удовлетворяет уравнению (4.1) и граничному условию, получаемого из интегрирования уравнения в окрестности 0. Таким образом:

$$\begin{cases} \hat{G}(+0) = \hat{1}, \\ \frac{d\hat{G}(+0)}{dt} = -\hat{\Gamma}\hat{G}(+0) = -\hat{\Gamma}, \\ \frac{d^2\hat{G}(+0)}{dt^2} = -\hat{\Gamma}\frac{d\hat{G}(+0)}{dt} = \hat{\Gamma}^2. \end{cases}$$

Неизвестными для нас остаются три матрицы  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  и мы записали на них три уравнения. Из написанной системы мы быстро определим их вид:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = \hat{1}, \\ 2\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = -\hat{\Gamma}, \\ 4\hat{A} + 4\hat{B} + \hat{C} = \hat{\Gamma}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = -\hat{\Gamma}^2 - 4\hat{\Gamma} - \hat{3}, \\ \hat{B} = \hat{\Gamma}^2 + 3\hat{\Gamma} + \hat{2}, \\ \hat{C} = \hat{\Gamma}^2 + 4\hat{\Gamma} + \hat{4}. \end{cases}$$

Итого сразу мы получаем ответ:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

А потому ответ имеет вид:

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 3te^{2t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

### МФТИ.Лебедев.КР.вар1.5 Запаздывающая функция Грина

Найти запаздывающую функцию Грина оператора  $L(\partial_t)$

$$L(\partial_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n.$$

**Решение преобразованием Лапласа**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n G(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p^n}$$

При  $|p| < 1$  такая сумма имеет известное значение (сумма геометрической прогрессии):

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p^n} = 1 - p.$$

Ясно, что поскольку написанное уравнение однозначно определяет в комплексной плоскости аналитическую функцию  $G(p)$ , которая при малых  $p$  совпадает с той, которую ищем мы, то логично совершить аналитическое продолжение по  $p$  и положить:

$$G(p) = 1 - p.$$

Осталось найти обратное преобразование Лапласа ( $p_0 > 0$ ):

$$G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} (1 - p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Обратим внимание, что на бесконечности функция стоящая при экспоненте не обращается в 0, а потому лемму Жордана к этому интегралу применять нельзя. Тем не менее, можно свести ситуацию к корректной, где предэкспоненциальный фактор будет стремиться к 0 при больших  $p$ . Достаточно представить интеграл в виде дифференцирования по параметру:

$$G(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{1 - p}{p^2} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \left[ \text{res } \frac{1 - p}{p^2} e^{pt} \right] = \frac{d^2}{dt^2} \{\theta(t)[t - 1]\} = \delta(t) - \dot{\delta}(t).$$

**Решение элегантным преобразованием** Уравнение на функцию Грина:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n G(t) = \delta(t)$$

Из этого следует, что можно записать уравнение на производную  $\dot{G}(t)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \dot{G}(t) = \dot{\delta}(t) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^n G(t) = \dot{\delta}(t)$$

Вычитая из уравнения на функцию Грина уравнение на ее производную остается только сама функция Грина и получается ответ:

$$G(t) = \delta(t) - \dot{\delta}(t)$$

Ремарка: Написанное справедливо только при действии на функции спадающие очень медленно - они должны обладать убывающей последовательностью производных в 0. Тогда формально ряд можно будет обрезать на каком-то большом номере, но на том пространстве, на котором эта функция Грина действует вклад возникающей дельта-функции бесконечного порядка будет мал и потому им можно будет пренебречь.

## 14.2.2 Задача Коши для уравнения второго порядка гиперболического типа

## Карлов-1 Задача Коши из экзаменов

Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно.

$$u = u(x, y), \quad y^4 u_{yy} + y^2 u_{xy} - 2u_{xx} + 2y^3 \cdot u_y = 0,$$

Начальные условия:  $u|_{y=1} = x^2 + 5, \quad u_y|_{y=1} = 2x - 6, y > 0, 1 < x < 2.$

**Обзор решения (?)** (??? абзац про суть решения?)

**Поиск характеристик и поиск решения в общем виде**

$$\frac{a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0}{a(x, y)dy^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)dx^2 = 0.} \Rightarrow$$

$$y^4 dx^2 - y^2 dx dy - 2dy^2 = 0.$$

$$y^4 (x')^2 - y^2 x' - 2 = 0.$$

$$D = y^4 - 4y^4(-2) = 9y^4,$$

$$x' = \frac{y^2 \pm 3y^2}{2y^4}.$$

$$x' = \frac{2}{y^2}; \quad x' = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y^2}; \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2}.$$

$$x = -\frac{2}{y} + C_1; \quad x = \frac{1}{y} + C_2$$

$$C_1 = x + \frac{2}{y}; \quad C_2 = x - \frac{1}{y}$$

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{1}{y} \\ \eta = x + \frac{2}{y} \end{cases}.$$

$$v(\xi(x, y), \eta(x, y)) \equiv u(x, y),$$

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot 1 = v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{v_\xi}{y^2} - \frac{2v_\eta}{y^2}.$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_\xi \cdot \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx} = \\ &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + v_\xi \cdot 0 + v_\eta \cdot 0 = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{y^4} - v_{\xi\eta} \frac{4}{y^4} + v_{\eta\eta} \frac{4}{y^4} + v_\xi \cdot \left(-\frac{2}{y^3}\right) + v_\eta \cdot \left(\frac{4}{y^3}\right)$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} \frac{1}{y^2} + v_{\xi\eta} \left(-\frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) + v_{\eta\eta} \left(-\frac{2}{y^2}\right) + 0 + 0 = v_{\xi\xi} \frac{1}{y^2} + v_{\xi\eta} \left(-\frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) + v_{\eta\eta} \left(-\frac{2}{y^2}\right)$$

(Для  $u_{xy}$  надо перемножить по формальному правилу выражения  $u_x$  и  $u_y$ ). Теперь надо подставить эти выражения в исходное уравнение. Этот шаг можно упростить. При подстановке в уравнение собираются подобные слагаемые, поэтому можно посчитать коэффициенты отдельно для каждой производной:

$$v_\xi : \quad y^4 \left(-\frac{2}{y^3}\right) + 2y^3 \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

$$v_\eta : \quad y^4 \cdot \left(\frac{4}{y^3}\right) + 2y^3 \cdot \frac{-2}{y^2} = 0$$

$$v_{\xi\xi} : \quad y^4 \cdot \frac{1}{y^4} + y^2 \cdot \frac{1}{y^2} - 2 = 0$$

$$v_{\xi\eta} : \quad y^4 \cdot \left(-\frac{4}{y^4}\right) + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) - 2 \cdot 2 = -9$$

$$v_{\eta\eta} : \quad y^4 \cdot \frac{4}{y^4} + y^2 \cdot \left(-\frac{2}{y^2}\right) - 2 = 0$$



Выражения  $v_{\xi\xi}$  и  $v_{\eta\eta}$  обязаны зануляться, иначе это сигнал, что в предыдущей части решения была допущена ошибка. В то же время выражение  $v_{\xi\eta}$  обязано не зануляться, поскольку порядок уравнения является не должен меняться. Коэффициенты первого порядка  $v_\xi$  и  $v_\eta$  не обязаны зануляться. Получаем и решаем уравнение:

$$-9v_{\xi\eta} = 0$$

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

$$v_\xi = C(\xi).$$

$$v(\xi, \eta) = \int C(\xi) d\xi + J(\eta),$$

$$v(\xi, \eta) = I(\xi) + J(\eta), \quad I, J \in C^2(\mathbb{R})$$

$$u(x, y) = I\left(x - \frac{1}{y}\right) + J\left(x + \frac{2}{y}\right),$$

Ответов бесконечно много.

**Поиск решения, удовлетворяющего начальным условиям**

From  $u|_{y=1} = x^2 + 5, \quad u_y|_{y=1} = 2x - 6, y > 0, 1 < x < 2.$

$$x^2 + 5 = I(x - 1) + J(x + 2),$$

$$2x - 6 = I'(x - 1) \cdot 1 + J'(x + 2) \cdot (-2).$$

$$I' := I_\xi, J' := J_\eta.$$

$$I(x - 1) = x^2 + 5 - J(x + 2)$$

$$\frac{d}{dx} : \quad I'(x - 1) \cdot 1 = 2x - J'(x + 2) \cdot 1$$

then substitute

$$2x - 6 = 2x - J'(x + 2) - 2J'(x + 2)$$

$$J'(x + 2) = 2$$

$$\eta = x + 2,$$

$$J'(\eta) = 2, \Rightarrow J(\eta) = 2\eta + C$$

$$I(x + 1) = x^2 + 5 - J(x + 2) = x^2 + 5 - 2(x + 2) - C = x^2 - 2x + 1 - C$$

$$J(\eta) = 2\eta + C$$

$$I(x - 1) = x^2 - 2x + 1 - C = (x - 1)^2 - C, \Rightarrow I(\xi) = \xi^2 - C$$

Answer:

$$u(x, y) = I\left(x - \frac{1}{y}\right) + J\left(x + \frac{2}{y}\right) = \left(x - \frac{1}{y}\right)^2 + 2\left(x + \frac{2}{y}\right)$$

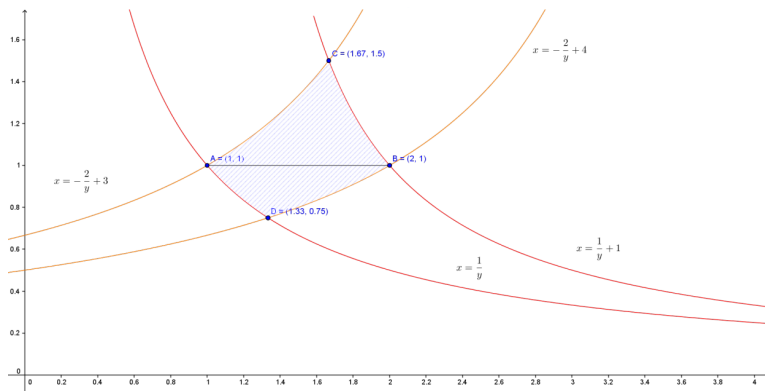
**Поиск области однозначности решения.**

(?????)

Уравнение решалось при  $y > 0, 1 < x < 2$ . На графике рисуются характеристики (линии, вдоль которых  $\xi$  или  $\eta = \text{const}$ ), проходящие через концы отрезка, т.е. точки с координатами  $(1, 1)$  и  $(2, 1)$ . Речь идёт о линиях:

$$\begin{cases} C_1 = x - \frac{1}{y} \\ C_2 = x + \frac{2}{y} \end{cases}$$

Если  $x = y = 1$ , то  $C_1 = 0$ . Если  $x = 2, y = 1$ , то  $C_1 = 1$ . Получаем две линии:  $x = \frac{1}{y}$  и  $x = \frac{1}{y} + 1$ . Если  $x = y = 1$ , то  $C_2 = 3$ , Если  $x = 2, y = 1$ , то  $C_2 = 4$ . Получаем линии:  $x = -\frac{2}{y} + 3$ ,  $x = -\frac{2}{y} + 4$ . Эти 4 линии ограничивают область ("криволинейный прямоугольник"). Необходимо найти точки пересечения линий. Очевидно, что  $A(1, 1), C(2, 1)$ . Подсчёты дают координаты оставшихся точек:  $B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right), D\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right)$ .



Данная область является искомой, поскольку для любой точки в этой области существуют по одной линии из каждого семейства, проходящих через неё. Обе эти линии пересекают отрезок, на котором поставлены начальные условия. Значит, значения функций  $I$  и  $J$  однозначно определяются из начальных условий. Для любой точки за рамками этой области хотя бы одна (а может, и обе) линия из соответствующих семейств не пересекает заданный отрезок. В этом случае решение не является единственным. Любая другая область, в которой решение определяется однозначно, является частью данной.

(??? в теории подумаю, как вообще происходит выход из этой области??? как однозначное решение становится неоднозначным???)

### Карлов-1.пр1. Решение канонического уравнения после замены

$$v_{\xi\eta} = \xi - \eta.$$

**Решение.** Интегрируем сначала по  $\eta$ :

$$v_{\xi} = \int (\xi - \eta) d\eta = \xi\eta - \frac{\eta^2}{2} + C(\eta),$$

поскольку  $\xi$  - параметр. Интегрируем по  $\xi$ :

$$v = \int \left( \xi\eta - \frac{\eta^2}{2} + C(\eta) \right) d\xi = \frac{\xi^2\eta}{2} - \frac{\xi\eta^2}{2} + \int C(\xi) d\xi + F(\eta),$$

(???? не помню, куда делось остальное решение, потом добавлю его)

### Карлов-1.пр2. Решение канонического уравнения после замены

$$v_{\xi\eta} - 3v_{\xi} = 0.$$

**Решение.** Обозначаем  $v_{\xi} = f$ . Тогда на первом шаге  $\eta$  - переменная,  $\xi$  - параметр:  $f'(\eta) - 3f(\eta) = 0$ .  $\frac{df}{d\eta} = 3f \Rightarrow \frac{df}{f} = 3d\eta$  или  $f = 0$  или  $\ln|f| = 3\eta + D \Rightarrow f(\eta) = e^{3\eta}C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$v_{\xi} = e^{3\eta}C(\xi).$$

Интегрируем по  $\xi$ :

$$v = \int e^{3\eta} \cdot C(\xi) d\xi = e^{3\eta} \int C(\xi) d\xi + F(\eta),$$

$$v(\xi, \eta) = e^{3\eta}I(\xi) + F(\eta).$$

### Уроев-10.пр1. Смешанная задача для волнового уравнения

Решить смешанную задачу для волнового уравнения на полуоси

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t) + 2, t > 0, x > 0$$

$$u(x, 0) = 2x - \cos x, \quad u_t(x, 0) = -2 - 2\sin x$$

$$u(0, t) - u_x(0, t) = t^2 - 3$$

**Решение.** Прежде всего перейдем к однородному волновому уравнению подстановкой  $u(x, t) = w(x, t) + t^2$ , где функция  $w$  – решение смешанной задачи

$$\begin{aligned}w_{tt}(x, t) &= 4w_{xx}, & t > 0, x > 0, \\w(x, 0) &= w_0(x) \equiv 2x - \cos x, \\w_t(x, 0) &= w_1(x) \equiv -2 - 2 \sin x, \\w(0, t) - w_x(0, t) &= v(t) \equiv -3.\end{aligned}$$

Для нахождения значений функции  $w$  в точках  $(x, t)$ , лежащих ниже характеристики  $x = 2t$  можно воспользоваться формулой Даламбера  $u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - at) + u_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\lambda) d\lambda$ :

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [2(x + 2t) - \cos(x + 2t) + 2(x - 2t) - \cos(x - 2t)] - \frac{1}{2} \int_{x-2t}^{x+2t} (1 + \sin \lambda) d\lambda = 2x - \cos(x - 2t) - 2t$$

Следовательно,

$$w(x, t) = 2(x - t) - \cos(x - 2t), x > 2t$$

В области  $G_2 = \{(x, t) : 0 < x < 2t\}$  общий вид решения следующий:

$$w(x, t) = I(x - 2t) + J(x + 2t).$$

Для нахождения функций  $I$  и  $J$  воспользуемся двумя условиями: непрерывность решения  $w$  на характеристике  $x = 2t$  и граничное условие при  $x = 0$ , то есть

$$\begin{cases} I(0) + J(4t) = 2t - 1 \\ I(-2t) + J(2t) - I'(-2t) - J'(2t) = -3 \end{cases}$$

В очередной раз отметим, что функции  $I$  и  $J$  определяются с точностью до постоянного слагаемого, поэтому без ограничения общности можно положить  $I(0) = -1$ , тогда  $J(\eta) = \eta/2$ ,  $J'(\eta) = 1/2$ , и после замены  $\xi = -2t$  второе уравнение системы приводится к виду

$$I'(\xi) - I(\xi) = \frac{5}{2} - \frac{\xi}{2}$$

Частным решением этого уравнения является многочлен первой степени, коэффициенты которого легко находятся:  $\tilde{I}(\xi) = \frac{\xi}{2} - 2$ , поэтому

$$I(\xi) = Ce^{\xi} + \frac{\xi}{2} - 2$$

$C$  - константа, которая будет найдена ниже. Итак, в рассматриваемой области

$$w(x, t) = I(x - 2t) + J(x + 2t) = \frac{x - 2t}{2} - 2 + Ce^{x-2t} + \frac{x + 2t}{2} = x - 2 + Ce^{x-2t}.$$

Значение функции  $w$  в точке  $x = 0, t = 0$  известно из начальных условий:  $w(0, 0) = -1$ , поэтому  $C = 1$ , то есть в области  $G_2$  решение имеет следующий вид:

$$w(x, t) = x - 2 + e^{x-2t}.$$

Объединяя полученные результаты, находим ответ

$$u(x, t) = t^2 + \begin{cases} 2(x - t) - \cos(x - 2t), & 0 \leq 2t < x \\ x - 2 + e^{x-2t}, & 0 \leq x \leq 2t \end{cases}$$

## Уровев-8.2.пр1. Волновое уравнение

Решить задачу Коши для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= \Delta_x u(x, t) + e^{-t} \cos(x^1 + 2x^2 + 2x^3) & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0\end{aligned}$$

**Решение.** Повернем пространственную систему координат так, чтобы направление оси абсцисс совпало с направлением вектора  $\| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^\top$ :

$$\xi^1 = \frac{1}{3} (x^1 + 2x^2 + 2x^3), \xi^2 = \dots, \xi^3 = \dots;$$

$$\tilde{u}(\xi, t) = u(x(\xi), t).$$

Тогда уравнение (8.6) и начальные условия (8.7) преобразуются следующим образом:

$$\tilde{u}_{tt}(\xi, t) = \Delta_\xi \tilde{u}(\xi, t) + e^{-t} \cos 3\xi^1,$$

$$\tilde{u}(\xi, 0) = \tilde{u}_t(\xi, 0) = 0.$$

Решение этой задачи будет зависеть только от переменных  $\xi^1$  и  $t$ , и для его нахождения можно воспользоваться формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-\alpha(t-\tau)}^{x+\alpha(t-\tau)} f(\lambda, \tau) d\lambda d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} u_1(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} [u_0(x + \alpha t) + u_0(x - \alpha t)],$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{\xi^1-(t-\tau)}^{\xi^1+(t-\tau)} e^{-\tau} \cos 3\lambda d\lambda = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^t e^{-\tau} \sin 3\lambda \Big|_{\xi^1-(t-\tau)}^{\xi^1+(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{\cos 3\xi^1}{3} \int_0^t e^{-\tau} \sin 3(t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{\cos 3\xi^1}{10} e^{-\tau} \left( \frac{1}{3} \sin 3(t-\tau) - \cos 3(t-\tau) \right) \Big|_0^t = \\ &= \left( \frac{1}{10} e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 3t + \frac{1}{30} \sin 3t \right) \cos 3\xi^1 \end{aligned}$$

Таким образом, ответ:

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{10} e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 3t + \frac{1}{30} \sin 3t \right) \cos (x^1 + 2x^2 + 2x^3).$$

## Уровев-8.2.пр2. Волновое уравнение

Решить задачу Коши для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$

$$u_{tt}(x, t) = \Delta_x u(x, t) + (x^1 + 2x^2 + 2x^3)^2, x \in \mathbb{R}^3, t > 0$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

**Решение.** Сделаем такую же замену переменных, как в предыдущем примере 1. тогда приходим к задаче Коши для уравнения

$$\tilde{u}_{tt}(\xi, t) = \Delta_\xi \tilde{u}(\xi, t) + 9 (\xi^1)^2$$

с однородными начальными условиями. По формуле Дюамеля

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-\alpha(t-\tau)}^{x+\alpha(t-\tau)} f(\lambda, \tau) d\lambda d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} u_1(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} [u_0(x + \alpha t) + u_0(x - \alpha t)].$$

получим:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{\xi^1-(t-\tau)}^{\xi^1+(t-\tau)} 9\lambda^2 d\lambda = \frac{3}{2} \int_0^t [(\xi^1 + (t-\tau))^3 - (\xi^1 - (t-\tau))^3] d\tau = \\ &= 3 \int_0^t [3 (\xi^1)^2 (t-\tau) + (t-\tau)^3] d\tau = 3 \left( \frac{3}{2} (\xi^1)^2 t^2 + \frac{t^4}{4} \right), \end{aligned}$$

то есть

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (x^1 + 2x^2 + 2x^3)^2 t^2 + \frac{3t^4}{4}$$

Кстати, решение  $u(x, t)$  можно также было искать в виде

$$u(x, t) = f(t) (x^1 + 2x^2 + 2x^3)^2 + g(t).$$

**Уров-8.3.пр2. Волновое уравнение**

Решить задачу Коши для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$

$$u_{tt}(x, t) = \Delta_x u(x, t) + 4x^1 x^2 x^3, x \in \mathbb{R}^3, t > 0$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

**Решение.** Воспользуемся формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|x-y| \leq at} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} dy + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|x-y|=at} u_1(y) ds_y + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi a^2 t} \iiint_{|x-y|=at} u_0(y) ds_y \right].$$

$$z := y - x,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{|x-y| \leq at} \frac{4y^1 y^2 y^3}{|x-y|} dy = \frac{1}{\pi} \iiint_{|z| \leq at} \frac{(x^1 + z^1)(x^2 + z^2)(x^3 + z^3)}{|z|} dz$$

Из симметрии следует, что  $\iint_{|x|=1} z ds_z = 0$  для  $i = 1, 2, 3$ ,  $\iint_{|x|=1} z z^j ds_z = 0$  для  $i \neq j$  и  $\iint_{|x|=1} z^1 z^2 z^3 ds_z = 0$ , следовательно,

$$u(x, t) = \frac{x^1 x^2 x^3}{\pi} \iiint_{|z| \leq at} \frac{1}{|z|} dz = \frac{x^1 x^2 x^3}{\pi} 4\pi \int_0^{at} r dr = 2x^1 x^2 x^3 (at)^2.$$

Кстати, решение  $u(x, t)$  можно было искать в виде  $f(t)x^1 x^2 x^3$ , так как функция  $x^1 x^2 x^3$  является собственной функцией оператора Лапласа, отвечающей нулевому собственному значению.

**В-12.1 Единственность**

Пусть на интервале  $(a, b)$  заданы функции  $\varphi \in C^2, \varphi' \neq 0, u_0 \in C^2, u_1 \in C^1$ . Доказать, что задача Коши

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0, & a < x < b, & \quad c < y < d; \\ u|_{y=\varphi(x)} &= u_0(x), & u_y|_{y=\varphi(x)} &= u_1(x) \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$u(x, y) = u_0(x) + \int_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi) \varphi'(\xi) d\xi,$$

$c = \inf \varphi(x), d = \sup \varphi(x), \varphi^{-1}(y)$  — функция, обратная к функции  $\varphi(x)$ .

**В-12.2 Единственность**

Пусть на интервале  $(-1, 1)$  заданы функции  $u_0 \in C^2, u_1 \in C^1$ . Доказать, что задача Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 0; \quad u|_{y=0} = u_0(x), \quad u_y|_{y=0} = u_1(x)$$

имеет единственное решение в квадрате  $\{|x-y| < 1, |x+y| < 1\}$ . Показать, что этот квадрат является наибольшей областью единственности решения поставленной задачи.

**В-12.3 Условия существования решения**

Доказать, что решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0, & -\infty < x, & \quad y < \infty; \\ u|_{y=0} &= u_0(x), & u_y|_{y=0} &= u_1(x) \end{aligned}$$

существует только тогда, когда  $u_0(x) \in C^2(R^1)$ , а  $u_1(x) \equiv \text{const}$ . Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + y[u_1(0) - f'(0)]$$

$f(y)$  — любая функция из класса  $C^2(R^1)$ .

**В-12.4 Существование решения**

Доказать, что решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0, \quad |x| < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u|_{y=x^2} &= 0, \quad u_y|_{y=x^2} = u_1(x) \end{aligned}$$

существует только тогда, когда  $u_1(x) \in C(-1, 1)$ ,  $xu_1(x) \in C^1(-1, 1)$ ,  $u_1(x)$  - четная функция.

Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и  $u(x, y) = 2 \int_x^{\sqrt{y}} \xi u_1(\xi) d\xi$ .

**В-12.5 Существование решения**

Доказать, что решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{xy} &= 0, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1; \\ u|_{y=x^3} &= |x|^\alpha, \quad u_x|_{y=x^3} = 0 \end{aligned}$$

существует только тогда, когда  $\alpha = 0$  или  $\alpha \geq 6$ . Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и  $u(x, y) = |y|^{\alpha/3}$ .

**В-12.6**

Доказать, что решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= 6(x + y), \quad -\infty < x, \quad y < \infty \\ u|_{y=x} &= 0, \quad u_x|_{y=x} = u_1(x) \end{aligned}$$

существует только тогда, когда  $u_1(x) - 3x^2 \equiv \text{const}$ . Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = x^3 - y^3 + f(x - y) - f(0) + (x - y)[u_1(0) - f'(0)]$$

$f(x)$  - любая функция из класса  $C^2(R^1)$ .

**В задачах 12.7-12.19 требуется найти наибольшую область, в которой поставленная задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.**

**В-12.7 Единственное решение**

Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$$u_{xy} = 0 \quad u|_{y=x^2} = 0, \quad u_y|_{y=x^2} = \sqrt{|x|}, \quad |x| < 1.$$

**В-12.8 Единственное решение**

Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$$u_{xy} + u_x = 0; \quad u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1, \quad |x| < \infty.$$

**В-12.9 Единственное решение**

Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0; \quad u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty.$$

**В-12.10 Единственное решение**

Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4; \quad u|_{x=0} = -y, \quad u_x|_{x=0} = y - 1, \quad |y| < \infty.$$

**В-12.11 Единственное решение**

Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x, \quad |x| < \infty.$$

**В-12.12** Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$$u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0;$$

$$u|_{y=3x} = 0, \quad u_y|_{y=3x} = e^{-5x^2}, \quad x < 1.$$

**В-12.13** Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$$1) \quad xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0;$$

$$u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad x > 0;$$

$$2) \quad xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3; \quad u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = \cos x, \quad x > 0.$$

**В-12.14**

$$xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0;$$

$$u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_x|_{y=1/x} = 2x^2, \quad x > 0.$$

**В-12.15**

$$u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0$$

$$u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2, \quad |y| < \infty.$$

**В-12.16**

$$1) \quad x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0;$$

$$u|_{x=1} = y, \quad u_x|_{x=1} = y, \quad y < 0;$$

$$2) \quad u_{xx} - 4x^2u_{yy} - \frac{1}{x}u_x = 0;$$

$$u|_{x=1} = y^2 + 1, \quad u_x|_{x=1} = 4, \quad |y| < \infty.$$

**В-12.17**

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0;$$

$$u|_{y=1} = 0, \quad u_y|_{y=1} = \sqrt[4]{x^7}, \quad x > 0.$$

**В-12.18**

$$yu_{xx} + x(2y-1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x + \frac{2x}{1+2y}(u_x + 2xu_y) = 0;$$

$$u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 1, \quad x > 0.$$

**В-12.19**

$$yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} - \frac{x+y}{x-y}(u_x - u_y) = 0; \quad u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = x, \quad x > 0.$$

**В-12.20**

Решить методом Римана задачу Коши

$$u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 1, \quad 0 < x, \quad y < 1;$$

$$u|_{x+y=1} = x, \quad u_x|_{x+y=1} = x.$$

**В-12.21 Метод Римана**

Решить методом Римана задачу Коши  
 $xyu_{xy} + xu_x - yu_y - u = 2y, \quad 0 < x, y < \infty;$

$$u|_{xy=1} = 1 - y, \quad u_y|_{xy=1} = x - 1.$$

**В-12.22 Метод Римана**

Решить методом Римана задачу Коши  
 $u_{xy} + \frac{1}{x+y}(u_x + u_y) = 2, \quad 0 < x, y < \infty;$

$$u|_{y=x} = x^2, \quad u_x|_{y=x} = 1 + x.$$

**В-12.23 Метод Римана**

Решить методом Римана задачу Коши  
 $u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x - \frac{2}{y}u_y = 0, \quad |x - y| < 1, \quad |x + y - 2| < 1; \quad u|_{y=1} = u_0(x), \quad u_y|_{y=1} = u_1(x), \quad u_0 \in C^2(0, 2), \quad u_1 \in C^1(0, 2).$

**В-12.24 Метод Римана**

$2u_{xy} - e^{-x}u_{yy} = 4x, \quad -\infty < x, \quad y < \infty;$

$$u|_{y=x} = x^5 \cos x, \quad u_y|_{y=x} = x^2 + 1.$$

**В-12.25**

Пусть функция  $u(x, t)$  является решением задачи Коши  $u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$ . Доказать, что для любого  $T > 0$  существует решение задачи Коши  $v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad t < T, \quad x \in R^1; \quad v|_{t=T} = u|_{t=T}, \quad v_t|_{t=T} = u_t|_{t=T}$ . Показать, что  $u(x, t) \equiv v(x, t)$  при  $0 \leq t \leq T$ .

**В-12.26**

Доказать, что если существует решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

то  $u \in C^2(t \geq 0), \quad u_0 \in C^2(R^1), \quad u_1 \in C^1(R^1)$ .

**В-12.27**

Пусть функция  $u(x, t)$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Доказать, что функция  $v(x, t) = \int_0^t u(x, \tau) d\tau$  является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v; \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

**В-12.28**

Пусть функция  $u(x, t, t_0)$  при каждом фиксированном  $t_0 \geq 0$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=t_0} = 0, \quad u_t|_{t=t_0} = f(x, t_0).$$

Доказать, что функция  $v(x, t, t_0) = \int_{t_0}^t u(x, t, \tau) d\tau$  является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + f(x, t); \quad v|_{t=t_0} = 0, \quad v_t|_{t=t_0} = 0.$$



**В-12.29**

Доказать, что если функции  $f(x), u_0(x), u_1(x)$  — гармонические в  $R^n$ , а  $g(t) \in C^1(t \geq 0)$ , то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + g(t)f(x); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

выражается формулой

$$u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x) \int_0^t (t - \tau)g(\tau)d\tau$$

**В-12.30**

Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если  $\Delta^N f = 0, \quad \Delta^N u_0 = 0, \quad \Delta^N u_1 = 0$ .

**В-12.31**

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in R^2;$$

$$u|_{t=0} = f(x_1) + g(x_2), \quad u_t|_{t=0} = F(x_1) + G(x_2)$$

достаточно, чтобы функции  $f(x_1)$  и  $g(x_2)$  принадлежали классу  $C^2(R^1)$ , а функции  $F(x_1)$  и  $G(x_2)$  — классу  $C^1(R^1)$ . Найти это решение.

**В-12.32**

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = f(x_1)g(x_2, x_3), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

достаточно, чтобы функция  $g(x_2, x_3)$  была гармонической и  $f \in C^2(R^1)$ . Найти это решение.

**В-12.33**

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = \alpha(|x|), \quad u_t|_{t=0} = \beta(|x|)$$

достаточно, чтобы  $\alpha(r) \in C^3(r \geq 0), \beta(r) \in C^2(r \geq 0)$  и  $\alpha'(0) = 0$ . Найти это решение.

**В-12.34**

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = \Delta u, \quad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = \theta(1 - |x|)|x|^\alpha(1 - |x|)^\beta, \quad u_t|_{t=0} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha \geq 2$  и  $\beta \geq 3$ . Найти это решение. Результат этой задачи сравнить с достаточными условиями (5) (с. 137) в случаях  $2 < \alpha < 3, \beta \geq 3$  и  $\alpha = 2, 2 < \beta < 3$ .

**В-12.35**

Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = \theta(1 - |x|)(x^2 - 1)^3, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Построить графики функций  $u(x, 0), u(x, \frac{1}{2}), u(x, 1), u(x, 2)$ . Решение задач 12.36-12.38 можно находить по формулам (6)-(8), но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 12.27-12.32.

**В-12.36 D1 задачи Коши**Решить задачи ( $n = 1$ ):

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} + 6$ ;  $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 4x$ ;
- 2)  $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$ ;  $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ;
- 3)  $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$ ;  $u|_{t=0} = \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + e^x$ ;  $u|_{t=0} = \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = x + \cos x$ ;
- 5)  $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$ ;  $u|_{t=0} = 1$ ,  $u_t|_{t=0} = 1$ ;
- 6)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 7)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**В-12.37 D2 задачи Коши**Решить задачи ( $n = 2$ ):

- 1)  $u_{tt} = \Delta u + 2$ ;  $u|_{t=0} = x$ ,  $u_t|_{t=0} = y$ ;
- 2)  $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$ ;  $u|_{t=0} = x^2 - y^2$ ,  $u_t|_{t=0} = xy$ ;
- 3)  $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2$ ;  $u|_{t=0} = e^x \cos y$ ,  $u_t|_{t=0} = e^y \sin x$ ;
- 4)  $u_{tt} = \Delta u + t \sin y$ ;  $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = \sin y$ ;
- 5)  $u_{tt} = 2\Delta u$ ;  $u|_{t=0} = 2x^2 - y^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2$ ;
- 6)  $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3$ ;  $u|_{t=0} = x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = y^2$ ;
- 7)  $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y}$ ;  $u|_{t=0} = e^{3x+4y}$ ,  $u_t|_{t=0} = e^{3x+4y}$ ;
- 8)  $u_{tt} = a^2 \Delta u$ ;  $u|_{t=0} = \cos(bx + cy)$ ,  $u_t|_{t=0} = \sin(bx + cy)$ ;
- 9)  $u_{tt} = a^2 \Delta u$ ;  $u|_{t=0} = r^4$ ,  $u_t|_{t=0} = r^4$ ;
- 10)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + r^2 e^t$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**В-12.38 D3 задачи Коши**Решить задачи ( $n = 3$ ):

- 1)  $u_{tt} = \Delta u + 2xyz$ ;  $u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 1$ ;
- 2)  $u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2$ ;  $u|_{t=0} = y^2$ ,  $u_t|_{t=0} = z^2$ ;
- 3)  $u_{tt} = 3\Delta u + 6r^2$ ;  $u|_{t=0} = x^2 y^2 z^2$ ,  $u_t|_{t=0} = xyz$ ;
- 4)  $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$ ;  $u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z \sqrt{2}$ ,  $u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x$ ;
- 5)  $u_{tt} = a^2 \Delta u$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = r^4$ ;
- 6)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + r^2 e^t$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 7)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \cos x \sin ye^z$ ;  $u|_{t=0} = x^2 e^{y+z}$ ,  $u_t|_{t=0} = \sin x e^{y+z}$ ;
- 8)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + x e^t \cos(3y + 4z)$ ;  $u|_{t=0} = xy \cos z$ ,  $u_t|_{t=0} = y z e^x$ ;
- 9)  $u_{tt} = a^2 \Delta u$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \cos r$ .

**В-12.39 Существование**

Пусть выполнены достаточные условия (5) (с. 137) для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \\ \|x\| \geq \delta > 0$$

и пусть при  $|x| \geq \delta > 0$ 

$$m|x|^\alpha \leq u_0(x) \leq M|x|^\alpha, \quad m|x|^{\alpha-1} \leq u_1(x) \leq M|x|^{\alpha-1},$$

$\alpha > 0, 0 < m < M$ . Доказать, что для каждой точки  $x_0$  существуют положительные числа  $t_0, C_1, C_2$  такие, что при всех  $t \geq t_0$  выполняется оценка

$$C_1 t^\alpha \leq u(x_0, t) \leq C_2 t^\alpha.$$

**В-12.40 Асимптотика решений**

Пусть выполнены достаточные условия (5) (с. 137) для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

и пусть для  $\alpha > 0$ 

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_0(x)}{|x|^\alpha} = A, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_1(x)}{|x|^{\alpha-1}} = B.$$

Доказать, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^\alpha} = C_n$  и найти  $C_n, n = 1, 2, 3$ .**В-12.41**Доказать, что если  $F(x, t) \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ ,  $F = 0$  при  $t < 0$ , то свертка  $\mathcal{E}_n * F$  существует в  $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ .

**В-12.42**

Доказать, что обобщенная задача Коши (9) имеет единственное решение в классе обобщенных функций из  $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ , обращающихся в нуль при  $t < 0$ .

**В-12.43**

Доказать:

- 1)  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  принадлежат классу  $C^\infty$  по  $t \in (0, \infty)$ ;
- 2)  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  удовлетворяют предельным соотношениям при

**В-12.44 Обобщенные задачи Коши**

Решить обобщенную задачу Коши (9) ( $x \in R^1$ ) со следующими источниками  $F(x, t)$ :

- 1)  $\delta(t) \cdot \delta(x)$ ;
- 2)  $\delta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0)$ ,  $t_0 \geq 0$
- 3)  $\delta(t) \cdot \delta'(x)$ ;
- 4)  $\delta'(t) \cdot \delta(x)$ ; 5)  $\delta'(t - t_0) \cdot \delta(x)$  6)  $\delta(t) \cdot \delta'(x_0 - x)$  7)  $\delta''(t) \cdot \delta(x)$ ; 8)  $\delta(t) \cdot \delta''(x)$ ; 9)  $\delta(t) \cdot \alpha(x)\delta(x)$ ,  $\alpha(x) \in C$  и  $\alpha(0) = 0$ ; 10)  $\delta(t) \cdot \beta(x)\delta(x)$ ,  $\beta(x) \in C$  и  $\beta(0) = 1$ . Ниже при постановке обобщенной задачи Коши будем считать источником функцию вида  $F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$ ,  $f = 0$  при  $t < 0$ .

**В-12.45 Обобщенные задачи Коши**

Решить обобщенную задачу Коши со следующими источниками ( $x \in R^1$ ):

- 1)  $f = \omega(t) \cdot \delta(x)$ ,  $\omega(t) \in C(t \geq 0)$ ,  $\omega(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $u_0 = \delta(x)$ ,  $u_1 = \delta(x)$ ;
- 2)  $f = \theta(t) \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = \delta(x - x_0)$ ,  $u_1 = x\delta(x)$
- 3)  $f = \theta(t)t \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = \delta(2 - x)$ ,  $u_1 = \delta(3 - x)$   $a = 1$ ;
- 4)  $f = \theta(t) \sin t \cdot \delta(x - x_0)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = x\delta'(x)$ ; 5)  $f = \theta(t) \cos t \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = x^2\delta''(x)$ ; 6)  $f = \theta(t)e^{\alpha t} \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = \delta(1 - |x|)$ ,  $u_1 = 0$  7)  $f = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} \cdot \delta(2 - x)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \delta(R - |x|)$ ;  $a = 1$ ; 8)  $f = \theta(t)t^2 \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = C = \text{const}$ ,  $u_1 = \theta'(R - |x|)$ ;  $a = 1$ ; 9)  $f = \theta(t) \ln t \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = \frac{1}{1+x^2}\delta(x)$ ,  $u_1 = 0$ ;
- 10)  $f = \frac{\theta(t-1)}{1+t^2} \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = \theta'(2 - |x|)$ ,  $u_1 = 0$ ;  $a = 1$  11)  $f = 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \theta''(2 - |x|)$ ;  $a = 1$ ; 12)  $f = \frac{\theta(t)}{1+t} \cdot \delta(x - 1)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \sin x\delta'(x - \pi)$ ; 13)  $f = \theta(at - |x|)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ; 14)  $f = \theta(t)(\alpha t + \beta) \cdot x\delta'(x)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = x\delta''(x)$ ;  $a = 1$ .

**В-12.46**

Доказать, что если  $u_1(x)$  - локально интегрируемая функция в  $R^1$ , то  $V_1^{(0)}(x, t)$  - непрерывная функция в  $R^2$  и выражается формулой

$$V_1^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi$$

**В-12.47**

Доказать, что если  $u_0(x)$  - локально интегрируемая функция в  $R^1$ , то  $V_1^{(1)}(x, t)$  - непрерывная функция в  $R^2$  и выражается формулой

$$V_1^{(1)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2} [u_0(x + at) + u_0(x - at)].$$

Указание. Воспользоваться тем, что  $V_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{E}_1 * u_0(x)]$  в силу задач 8.35 и 12.46.

**В-12.48**

Доказать, что если  $f(x, t)$  - локально интегрируемая функция в  $R^2$ , равная нулю при  $t < 0$ , то потенциал  $V_1(x, t)$  принадлежит  $C(R^2)$  и выражается формулой

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

**В-12.49 Обобщенные задачи Коши**

Решить обобщенные задачи:

- 1)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(x) \cdot \delta'(t) + \theta(x) \cdot \delta(t)$ ;
- 2)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x-1) + x \cdot \delta'(t) + \text{sign}(x) \cdot \delta(t)$ ;
- 3)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)tx + \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}} \cdot \delta(t)$ ;
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{\theta(x)}{t+1} + \theta(-x) \cdot \delta(t)$ ; 5)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-2) \ln t + |x| \cdot \delta'(t)$ ; 6)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)t^m + \theta(2-|x|) \cdot \delta'(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ; 7)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)e^{x+t} + \theta(x)e^{-x} \cdot \delta(t)$ ; 8)  $u_{tt} = 9u_{xx} + \theta(t-\pi) \cos t + \theta(x-3) \cdot \delta'(t) + 1(x) \cdot \delta(t)$ ;
- 9)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\theta(x)$ ; 10)  $u_{tt} = u_{xx} + 2\theta(t)\theta(x)x + e^{\alpha x} \cdot \delta(t)$ ,  $\alpha \neq 0$ ; 11)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-1)(x+t) + |x| \cdot \delta(t)$ ;
- 12)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t-2)t + \theta(x-1) \ln x \cdot \delta'(t)$ ; 13)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(x)x^m \cdot \delta'(t) + \theta(x)x^m \cdot \delta(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ; 14)  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} + \theta(x) \cos x \cdot \delta(t)$ ; 15)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\sqrt{t}x + \theta(-x) \cdot \delta'(t) + \theta(-x)x \cdot \delta(t)$ ; 16)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(x)e^{-\sqrt{x}} \cdot \delta'(t) + x^2 \cdot \delta(t)$ ; 17)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \sin(x+t) + \sin x \cdot \delta(t)$ ; 18)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(1-|x|) \cdot \delta(t)$ .

**В-12.50**

Доказать:

- 1) если  $u_0 \in C^2(R^1)$  и  $u_1 \in C^1(R^1)$ , то потенциалы  $V_1^{(0)}$  и  $V_1^{(1)}$  принадлежат классу  $C^2(t \geq 0)$ , удовлетворяют при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = 0$  и начальным условиям:

$$\begin{aligned} V_1^{(0)}|_{t=+0} &= 0, & (V_1^{(0)})_t|_{t=+0} &= u_1(x), \\ V_1^{(1)}|_{t=+0} &= u_0(x), & (V_1^{(1)})_t|_{t=+0} &= 0 \end{aligned}$$

(Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (11) и (12).);

- 2) если  $f \in C^1(t \geq 0)$ , то потенциал  $V_1 \in C^2(R^2)$  удовлетворяет при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = f(x, t)$  и начальным условиям

$$V_1|_{t=+0} = 0, \quad (V_1)_t|_{t=+0} = 0$$

(Указание. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (13).).

**В-12.51**

Пусть в задаче Коши (обобщенной)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$$

функции  $u_0 \in C^2$  и  $u_1 \in C^1$  для всех  $x$ , кроме  $x = x_0$ ,  $u_0, u_1$  (или их производные) имеют разрыв первого рода. Показать, что решение этой задачи является классическим всюду в полуплоскости  $t > 0$ , кроме точек, лежащих на характеристиках, проходящих через точку  $x = x_0, t = 0$  (распад разрыва), для следующих случаев:

- 1)  $u_0 = \theta(x)\omega(x)$ ,  $\omega \in C^2(R^1)$ ,  $\omega(0) \neq 0$  и  $u_1 = 0$ ;
- 2)  $u_0 = 0, u_1 = \theta(x-x_0)\omega(x)$ ,  $\omega \in C^1(R^1)$ ,  $\omega(x_0) \neq 0$ ;
- 3)  $u_0 = \theta(x-1), u_1 = \theta(x-2)$ .

**В-12.52 Фронты от волн (????)**

Для задачи Коши (9) убедиться в том, что:

- 1) от источника возмущения

$$F = u_0(x) \cdot \delta'(t) = \theta(x_0 - |x|) f(x) \cdot \delta'(t), \quad x_0 > 0,$$

$f \in C^2(R^1)$ , возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени  $t > 0$  передний фронт в точках  $x = \pm(at + x_0)$  соответственно и в каждый момент времени  $t > \frac{x_0}{a}$  задний фронт в точках  $x = \pm(at - x_0)$  (принцип Гюйгенса);

- 2) от источника

$$F = u_1(x) \cdot \delta(t) = \theta(x_0 - |x|) f(x) \cdot \delta(t), \quad x_0 > 0,$$

$f \in C^1(R^1)$ , возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени  $t > 0$  передний фронт в точках  $x = \pm(at + x_0)$  и не имеют

Указание. Воспользоваться формулами (11) и (12).

**В-12.53**

Решить следующие обобщенные задачи и доказать, что полученные решения являются решениями и классической задачи Коши (3), (4):

- 1)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x+t) + e^{\alpha x} \cdot \delta'(t)$ ;
- 2)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)t \ln t + 3^x \cdot \delta'(t)$ ;
- 3)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(t)(x^2 + t^2) + x^m \cdot \delta'(t), m = 1, 2, \dots$ ;
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)x^2 + \cos x \cdot \delta'(t) + \cos x \cdot \delta(t)$ ; 5)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x^2 \ln |x| \cdot \delta(t)$ ; 6)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \cos(x+t) + 2^x \cdot \delta(t)$ ; 7)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \sin t + \frac{1}{1+x^2} \cdot \delta(t)$ ; 9)  $u_{tt} = u_{xx} + (\alpha x^2 + \beta) \cdot \delta'(t) + x^{4/3} \cdot \delta(t)$ ; 10)  $u_{tt} = u_{xx} + \ln(1+e^x) \cdot \delta'(t) + e^{-x^2} \cdot \delta(t)$ ; 11)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)t^m x + \sin x \cdot \delta'(t) + x^m \delta(t), m = 1, 2, \dots$ ; 12)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \arctg t + \ln(1+x^2) \cdot \delta'(t)$ ; 13)  $u_{tt} = 4u_{xx} + \theta(t) \cos x + \sqrt{1+x^2} \cdot \delta'(t)$ ; 1
- 4)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)x \sin t + x^2 e^{-|x|} \cdot \delta'(t)$ ; 15)  $u_{tt} = 4u_{xx} + e^{-x^2} \cdot \delta'(t) + e^{-x} \sin x \cdot \delta(t)$ ; 16)  $u_{tt} = u_{xx} + \sin^2 x \cdot \delta'(t) + x e^{-|x|} \cdot \delta(t)$ ; 17)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t) \frac{x}{1+t^2} + \frac{1}{2-\cos x} \cdot \delta'(t)$ ; 18)  $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)(xe^t + te^x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \delta(t)$ .

**В-12.54**

Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in R^2$ ):

- 1)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t)$
- 2)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t)t^2 \cdot \delta(x) + |x|^m \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x-x^2) \cdot \delta(t), m = 1, 2, \dots$ ;
- 3)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \omega(t) \cdot \delta(x) + e^{|x|} \delta(x) \cdot \delta(t), \omega \in C(t \geq 0)$  и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t)(\alpha t + \beta) \cdot \delta(x) + \delta(x-x_0) \cdot \delta(t)$ .

**В-12.55**

Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in R^3$ ):

- 1)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t)$ ;
- 2)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t-t_0) \cdot \delta(x-x_0) + \delta(x-x') \cdot \delta(t), t_0 \geq 0$ ;
- 3)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \omega(t) \cdot \delta(x) + |x|^2 \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_k^2} \cdot \delta'(t) + \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k} \cdot \delta(t), k = 1, 2, 3$ ,  
 $\omega \in C(t \geq 0)$  и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(t) \sin t \cdot \delta(x) + e^{-|x|^2} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k} \cdot \delta'(t)$ .

**В-12.56**

Доказать, что если  $u_1(x)$  - локально интегрируемая функция в  $R^n, n = 2, 3$ , то  $V_n^{(0)}$  - локально интегрируемая функция в  $R^{n+1}$  и выражается формулами

$$V_2^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{|x-\xi| < at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}}$$

$$V_3^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi) ds.$$

**З а м е ч а н и е.** Так как  $V_n^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_n(x, t) * u_0(x))$ , то, заменяя в (14<sub>1</sub>) и (14<sub>2</sub>)  $u_1$  на  $u_0$  и дифференцируя по  $t$ , получим

$$V_2^{(1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{|x-\xi| < at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}} \right)$$

$$V_3^{(1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi) ds \right).$$

**В-12.57**

Доказать, что если  $f(x, t)$  - локально интегрируемая функция в  $R^{n+1}, n = 2, 3$ , равная нулю при  $t < 0$ , то  $V_2$  - непрерывная функция и  $V_3$  - локально интегрируемая функция в  $R^{n+1}$  и они выражаются формулами:

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{|x-\xi| < a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}},$$

$$V_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-\xi| < at} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|/a)}{|x-\xi|} d\xi.$$

**В-12.58**

Доказать:

1) если  $u_0 \in C^3(R^n)$ ,  $u_1 \in C^2(R^n)$  при  $n = 2, 3$ , то  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$ ,  $n = 2, 3$ , принадлежат классу  $C^2(t \geq 0)$ , удовлетворяют при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = 0$  и начальным условиям

$$\begin{aligned} V_n^{(0)} \Big|_{t=+0} &= 0, & \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t} \Big|_{t=+0} &= u_1(x), \\ V_n^{(1)} \Big|_{t=+0} &= u_0(x), & \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t} \Big|_{t=+0} &= 0 \end{aligned}$$

2) если  $f \in C^2(t \geq 0)$ , то  $V_n \in C^2(t \geq 0)$ ,  $n = 2, 3$ , удовлетворяет при  $t > 0$  уравнению  $\square_a u = f(x, t)$  и начальным условиям

$$V|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=+0} = 0.$$

У к а з а н и е. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (14) и (15), если в них сделать замену переменных  $\xi - x = at\eta$  и  $\xi - x = a(t - \tau)\eta$  соответственно.

**В-12.59**

Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in R^2$ ) и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (3), (4):

- 1)  $f = \theta(t)$ ,  $u_0 = C$ ,  $u_1 = C$ ,  $C = \text{const}$ ;
- 2)  $f = \theta(t)|x|^2$ ,  $u_0 = |x|^2$ ,  $u_1 = |x|^2$ ;
- 3)  $f = \theta(t)t^2$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1 + |x|^2$ ;
- 4)  $f = \theta(t)e^{-t}|x|^2$ ,  $u_0 = 1 + |x|^2$ ,  $u_1 = 0$ .

**В-12.60 Волновое уравнение**

Решить задачу Коши для волнового уравнения ( $x \in R^3$ ) со следующими данными:

- 1)  $f = \theta(t)|x|^2$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = |x|^2$
- 2)  $f = \theta(t)t^2|x|^2$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1$
- 3)  $f = \omega(t)$ ,  $\omega \in C^2(t \geq 0)$  и  $\omega = 0$  при  $t < 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \alpha|x|^2 + \beta$
- 4)  $f = \theta(t) \ln |x|$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ;  $a = 1$ ;
- 5)  $f = \theta(t)$   $u_0 = \frac{1}{1+|x|^2}$ ,  $u_1 = 0$
- 6)  $f = 0$ ,  $u_0 = \sin |x|^2$ ,  $u_1 = \text{sh } |x|^2$ ;  $a = 1$
- 7)  $f = \theta(t)t$ ,  $u_0 = |x|^2$ ,  $u_1 = \frac{1}{1+|x|^2}$ ; 8)  $f = \theta(t)e^{-ikt}\omega(x)$ ,  $\omega \in C^2$ ,  $u_0 = \sqrt{1+|x|^2}$ ,  $u_1 = 0$ ;  $a = 1$ ; 9)  $f = \theta(t)e^{-|x|^2}$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \cos |x|^2$ ;  $a = 1$ ; 10)  $f = 0$ ,  $u_0 = \ln(1+|x|^2)$ ,  $u_1 = e^{-|x|^2}$ ;  $a = 1$ ;
- 11)  $f = 0$ ,  $u_0 = e^{-|x|^2}$ ,  $u_1 = \ln |x|$ ;  $a = 1$ ;
- 12)  $f = \theta(t) \sin t$ ,  $u_0 = \cos |x|^2$ ,  $u_1 = 0$ ;
- 13)  $f = 0$ ,  $u_0 = C\theta(R - |x|)$ ,  $u_1 = 0$ ;
- 14)  $f = \theta(at - |x|)$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ .

Задачи Коши для уравнений 12.61-12.63 формулируются так же, как для волнового уравнения.

**В-12.61**

Решить обобщенную задачу Коши для уравнения гиперболического типа  $\square_a u = bu_x + \frac{b}{a}u_t + F(x, t)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,

$$F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + \left[ u_1(x) - \frac{b}{a}u_0(x) \right] \cdot \delta(t)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = \theta(t) \cdot \delta(x)$ ,  $u_0 = \delta(x)$ ,  $u_1 = \delta(x)$ ;
- 2)  $f = \theta(t)x$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \theta(x)$ ;  $a = b = 1$ ;
- 3)  $f = \theta(t)t$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = x$ ;  $a = b = 1$
- 4)  $f = \theta(t)e^t$ ,  $u_0 = e^x$ ,  $u_1 = e^x$ ;  $b = 1$
- 5)  $f = \theta(t)e^x$ ,  $u_0 = \alpha x + \beta$ ,  $u_1 = 0$ .

### В-12.62

Решить обобщенную задачу Коши для уравнения Клейна-Гордона -Фока

$$\square_a u + m^2 u = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = 0, \quad u_0 = \delta(x), \quad u_1 = \delta(x), \quad a = m = 1;$
- 2)  $f = \omega(t) \cdot \delta(x), \quad \omega \in C(t \geq 0) \text{ и } \omega = 0 \text{ при } t < 0, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = x; \quad a = m = 1;$
- 3)  $f = \theta(t), \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad a = m = 1;$
- 4)  $f = 0, \quad u_0 = \theta(x), \quad u_1 = \theta(x), \quad a = m = 1.$

### В-12.63

Решить обобщенную задачу Коши для телеграфного уравнения

$$\square_a u + 2mu_t = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = 0, \quad u_0 = \delta(x), \quad u_1 = \delta(x), \quad a = m = 1;$
- 2)  $f = \omega(t) \cdot \delta(x), \quad \omega \in C(t \geq 0) \text{ и } \omega = 0 \text{ при } t < 0, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 0; \quad a = m = 1;$
- 3)  $f = 0, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = \theta(x), \quad a = m = 1.$

### 14.2.3 Задача Коши для уравнения теплопроводности (?????)

(чет мне говорили, что нужно разобраться в этом, мб и сяду разбираться когда-то)

**Лебедев-1.3.2.** решение одномерного диффузионного уравнения для  $u(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ .

Найти решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия:  $u(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ . Сравните ответ с асимптотическим поведением (1.73).

### Лебедев-1.3.3.

Найти асимптотическое поведение решений при следующих начальных условиях 1)  $u(0, x) =$

$$x \exp[-x^2/(2l^2)]$$

$$u(0, x) = \exp(-|x|/l);$$

$$u(0, x) = x \exp(-|x|/l); \quad 4) \quad u(0, x) = (x^2 + l^2)^{-1}; \quad 5)$$

$$u(0, x) = x (x^2 + l^2)^{-2}$$

(???)

### Лебедев-1.3.4.

Найти асимптотическое поведение на больших временах для одномерного поля  $u(t, x)$ , динамика которого в Фурье-представлении задается уравнением  $\partial \tilde{u}/\partial t = -|q|\tilde{u}$ .

### В-13.1

Пусть функция  $u(x, t, t_0)$  принадлежит классу  $C^2$  при  $x \in R^n, t \geq t_0 \geq 0$ . Доказать, что функция  $u(x, t, t_0)$  при каждом  $t_0 \geq 0$  является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=t_0} = f(x, t_0)$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v(x, t, t_0) = \int_{t_0}^t u(x, t, \tau) d\tau$$

при каждом  $t_0 \geq 0$  является решением задачи Коши

$$v_t = a^2 \Delta v + f(x, t), \quad v|_{t=t_0} = 0.$$

**В-13.2**

Пусть  $u_k(x_k, t)$  - решение задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = f_k(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказать, что функция  $u(x, t) = \prod_{k=1}^n u_k(x_k, t)$  является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = \prod_{k=1}^n f_k(x_k).$$

**В-13.3**

Пусть функция  $f(x, t) \in C^2(t \geq 0)$  является гармонической по  $x$  при каждом фиксированном  $t \geq 0$ . Доказать, что функция  $u(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$  является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad u|_{t=0} = 0$$

**В-13.4**

Пусть  $u_0 \in C^\infty(R^n)$ , а ряд  $\sum_{k=0}^\infty \frac{\delta^k}{k!} \Delta^k u_0(x)$ ,  $\delta > 0$ , и все ряды, полученные из него почленным дифференцированием до второго порядка включительно, сходятся равномерно в каждой конечной области. Доказать, что функция

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^{2k} t^k}{k!} \Delta^k u_0(x)$$

является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 < t < \frac{\delta}{a^2}; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

Решения задач 13.5-13.8 можно находить по формуле Пуассона, но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 13.1-13.4.

**В-13.5**

Решить задачи ( $n = 1$ ):

- 1)  $u_t = 4u_{xx} + t + e^t$ ,  $u|_{t=0} = 2$ ;
- 2)  $u_t = u_{xx} + 3t^2$ ,  $u|_{t=0} = \sin x$ ;
- 3)  $u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x$ ,  $u|_{t=0} = \cos x$ ;
- 4)  $u_t = u_{xx} + e^t \sin x$ ,  $u|_{t=0} = \sin x$ ;
- 5)  $u_t = u_{xx} + \sin t$ ,  $u|_{t=0} = e^{-x^2}$ ;
- 6)  $4u_t = u_{xx}$ ,  $u|_{t=0} = e^{2x-x^2}$ ;
- 7)  $u_t = u_{xx}$ ,  $u|_{t=0} = xe^{-x^2}$ ;
- 8)  $4u_t = u_{xx}$ ,  $u|_{t=0} = \sin xe^{-x^2}$ .

**В-13.6**

Решить задачи ( $n = 2$ ):

- 1)  $u_t = \Delta u + e^t$ ,  $u|_{t=0} = \cos x \sin y$ ;
- 2)  $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y$ ,  $u|_{t=0} = 1$ ;
- 3)  $u_t = \Delta u + \cos t$ ,  $u|_{t=0} = xy e^{-x^2-y^2}$ ;
- 4)  $8u_t = \Delta u + 1$ ,  $u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}$ ;
- 5)  $2u_t = \Delta u$ ,  $u|_{t=0} = \cos xy$ .

**В-13.7**

Решить задачи ( $n = 3$ ):

- 1)  $u_t = 2\Delta u + t \cos x$ ,  $u|_{t=0} = \cos y \cos z$ ;
- 2)  $u_t = 3\Delta u + e^t$ ,  $u|_{t=0} = \sin(x-y-z)$ ;
- 3)  $4u_t = \Delta u + \sin 2z$ ,  $u|_{t=0} = \frac{1}{4} \sin 2z + e^{-x^2} \cos 2y$ ;
- 4)  $u_t = \Delta u + \cos(x-y+z)$ ,  $u|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}$ ;
- 5)  $u_t = \Delta u$ ,  $u|_{t=0} = \cos(xy) \sin z$ .



### В-13.8

Решить задачу Коши

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^n$$

для следующих  $u_0$ :

- 1)  $u_0 = \cos \sum_{k=1}^n x_k$
- 2)  $u_0 = e^{-|x|^2}$
- 3)  $u_0 = (\sum_{k=1}^n x_k) e^{-|x|^2}$ ;
- 4)  $u_0 = (\sin \sum_{k=1}^n x_k) e^{-|x|^2}$ ; 5)  $u_0 = \exp \left\{ -(\sum_{k=1}^n x_k)^2 \right\}$ .

### В-13.9

Найти решение обобщенной задачи Коши (5) для следующих  $F$ :

- 1)  $\delta(t) \cdot \delta(x)$
- 2)  $\delta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0), \quad t_0 \geq 0$
- 3)  $\delta(t) \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$
- 4)  $\delta'(t) \cdot \delta(x)$  5)  $\delta(t - t_0) \cdot \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_k^2}, \quad t_0 \geq 0$ ; 6)  $\delta'(t) \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$  7)  $\theta(t) \cdot \delta(x)$ ; 8)  $\theta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0), \quad t_0 \geq 0$ ; 9)  $\delta'(t) \cdot \delta(x - x_0)$  10)  $\omega(t) \cdot \delta(x), \omega \in C(t \geq 0), \omega = 0$  при  $t < 0$ .

### В-13.10

Пусть  $f(x, t) \in M$ . Показать, что свертка  $V = \mathcal{E} * f$ :

- 1) существует в  $M$  и представляется формулой

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp \left\{ -\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\xi d\tau$$

- 2) удовлетворяет оценке

$$|V(x, t)| \leq t \sup_{\substack{\xi \\ 0 \leq \tau \leq t}} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0$$

- 3) представляет собой единственное в классе  $M$  решение (обобщенное) уравнения  $V_t = a^2 \Delta V + f(x, t)$ .

### В-13.11

Пусть  $u_0(x)$  - ограниченная функция в  $R^n$ . Доказать, что свертка  $V^{(0)} = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x) \cdot \delta(t) = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x)$ :

- 1) существует в  $M$  и представляется формулой

$$V^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi$$

- 2) удовлетворяет оценке

$$|V^{(0)}(x, t)| \leq \sup_{\xi} |u_0(\xi)|, \quad t > 0$$

- 3) представляет собой единственное в классе  $M$  решение (обобщенное) уравнения  $V_t^{(0)} = a^2 \Delta V^{(0)} + u_0(x) \cdot \delta(t)$ .

### В-13.12

Доказать, что решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

выражается классической формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi + \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp \left\{ -\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\xi d\tau$$

если функция  $f$  локально интегрируема в  $R^{n+1}$  и равна нулю при  $t < 0$ , функция  $u_0$  локально интегрируема в  $R^n$  и оба слагаемых в формуле (9) локально интегрируемы в  $R^{n+1}$ .

**В-13.13**

Доказать:

1) если  $f \in C^2(t \geq 0)$  и все ее производные до второго порядка включительно принадлежат классу  $M$ , то  $V = \mathcal{E} * f \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$  удовлетворяет при  $t > 0$  уравнению  $V_t = a^2 \Delta V + f(x, t)$  и начальному условию  $V|_{t=+0} = 0$ ;

2) если  $u_0(x)$  - непрерывная и ограниченная функция, то

$$V^{(0)} = \mathcal{E} * u_0 = C^\infty(t > 0) \cap C(t \geq 0)$$

удовлетворяет уравнению  $V_t^{(0)} = a^2 \Delta V^{(0)}$  и начальному условию  $V^{(0)}|_{t=+0} = u_0(x)$

3) при выполнении условий 1), 2) функция  $u = V + V^{(0)}$ ,  $V, V^{(0)}$  определяются формулами (6) и (7), есть решение классической задачи Коши (1), (2).

У к а а н и е. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (8).

**В-13.14**

Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

для следующих  $u_0$ :

1)  $\theta(x)$ ;2)  $\theta(1-x)$ ;3)  $\theta(1-|x|)$ ;

4)  $\theta(x)e^{-x}$ ; 5)  $\theta(x)(x+1)$  6)  $\theta(x-1)x$ . Показать, что найденные функции  $u(x, t)$  при  $t > 0$  принадлежат классу  $C^\infty$  и удовлетворяют уравнению  $u_t = u_{xx}$ , а при  $t \rightarrow +0$  непрерывны во всех точках непрерывности функции  $u_0(x)$  и в этих точках удовлетворяют начальному условию  $u|_{t=+0} = u_0(x)$ .

**В-13.15**

Найти решение обобщенной задачи Коши для следующих  $f$ :

$$u_t = u_{xx} + f(x, t)$$

1)  $\theta(t-1)e^t$ ;2)  $\theta(t-\pi) \cos t$ 3)  $\theta(t-1)x$ ;

4)  $\theta(t-2)e^x$ ; 5)  $\theta(t)\theta(x)$ ; 6)  $\theta(t) \cdot \theta(1-|x|)$ . Показать, что найденные функции  $u(x, t)$  принадлежат классу  $C(R^2)$ , удовлетворяют начальному условию  $u|_{t=0} = 0$ , а в точках непрерывности функции  $f(x, t)$  принадлежат классу  $C^2$ .

**В-13.16**

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ( $x \in R^1$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):

1)  $f = \theta(t)x$ ,  $u_0 = x$ ;2)  $f = \theta(t)x^2$ ,  $u_0 = x^2$ 3)  $f = \theta(t)2xt$ ,  $u_0 = x^3 + x^4$ ,  $a = 1$ ;4)  $f = \theta(t)3x^2t^2$ ,  $u_0 = e^x$ ,  $a = 1$ ; 6\* 5)  $f = \theta(t)\sqrt{t}$ ,  $u_0 = \operatorname{sh} x$  6)  $f = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$ ;  $u_0 = xe^x$ ;

7)  $f = \theta(t) \ln t$ ,  $u_0 = x \sin x$ ,  $a = 1$ ; 8)  $f = \theta(t)x \cos x$ ,  $u_0 = x \cos x$ ,  $a = 1$ ; 9)  $f = \theta(t)e^x$ ,  $u_0 = \theta(x)x$ ,  $a = 1$ ; 10)  $f = \theta(t)xe^x$ ,  $u_0 = \theta(x)x^2$ ,  $a = 1$ .

**В-13.17**

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ( $x \in R^2$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):

1)  $f = \theta(t)xye^t$ ,  $u_0 = x^2 - y^2$ ;2)  $f = \theta(t)(x^2 + y^2)$ ,  $u_0 = x^2 + y^2$ ;3)  $f = \theta(t)4xy$ ,  $u_0 = x^2y^2$ ,  $a = 1$ ;4)  $f = \theta(t)e^x \cos y$ ,  $u_0 = e^{x+y}$ ; 5)  $f = 0$ ,  $u_0 = x \cos y$ ; 6)  $f = \theta(t)xy$ ,  $u_0 = \cos y$ .

**В-13.18**

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ( $x \in R^3$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):

- 1)  $f = \theta(t)xye^z$ ,  $u_0 = xe^y \cos z$ ;
- 2)  $f = \theta(t)xy \cos z$ ,  $u_0 = (x^2 + y^2) \cos z$ ,  $a = 1$ ;
- 3)  $f = \theta(t)xyz \cos t$ ,  $u_0 = xy^2z^3$ ;
- 4)  $f = \theta(t)(x^2 - 2y^2 + z^2)e^t$ ,  $u_0 = x + y^2 + z^3$  5)
- $f = \theta(t) \cos t \sin 3x \cos 4ye^{5z}$ ,  $u_0 = \sin 3x \cos 4ye^{4z}$ ,  $a = 1$ .

**В-13.19**

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности ( $x \in R^n$ ) с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):

- 1)  $f = \theta(t)|x|^2$ ,  $u_0 = |x|^2$ ;
- 2)  $f = \theta(t) \sum_{k=1}^n x_k^3$ ,  $u_0 = \sum_{k=1}^n x_k^3$ ;
- 3)  $f = \theta(t)e^t$ ,  $u_0 = \exp \{ \sum_{k=1}^n x_k \}$ ;
- 4)  $f = 0$ ,  $u_0 = \sum_{k=1}^n x_k \exp \{ \sum_{k=1}^n x_k \}$  5)  $f = 0$ ,  $u_0 = (\cos \sum_{k=1}^n x_k) \exp \{ \sum_{k=1}^n x_k \}$ . Уравнение  $u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t)$ ,  $a, b, c$  - постоянные, заменой  $v(y, t) = e^{-ct} u(y - bt, t)$  сводится к уравнению теплопроводности.

**В-13.20**

Найти решение задачи

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t), \quad u|_{t=0} = u_0(x)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = 1$ ,  $u_0 = 1$ ,  $c = 1$ ;
- 2)  $f = e^t$ ,  $u_0 = \cos x$ ,  $a = c = 1, b = 0$ ;
- 3)  $f = e^t$ ,  $u_0 = \cos x$ ,  $a = \sqrt{2}, c = 2, b = 0$ ;
- 4)  $f = t \sin x$ ,  $u_0 = 1$ ,  $a = c = 1$ ,  $b = 0$ ; 5)  $f = 0$ ,  $u_0 = e^{-x^2}$ ; 6)  $f = w(t) \in C^1(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in C$  и ограничена.

**В-13.21**

Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

со следующими данными:

- 1)  $f = \theta(t-1)$ ,  $u_0 = \theta(x)$ ,  $c \neq 0$ ;
- 2)  $f = \theta(t-1)$ ,  $u_0 = \theta(1-x)$ ,  $c = 0$ ;
- 3)  $f = \theta(t-1)e^t$ ,  $u_0 = \theta(1-|x|)$ ,  $c \neq 1$ ;
- 4)  $f = \theta(t-1)e^t$ ,  $u_0 = \theta(x)e^x$ ,  $c = 1$ ; 5)  $f = \theta(t-1)e^x$ ,  $u_0 = x\theta(x)$ ,  $a = 2$ ,  $b = c = -2$ ; 6)  $f = \theta(t)\theta(x)$ ,  $u_0 = x$ . Исследовать гладкость полученных решений, как и в 13.14, 13.15.

**В-13.22**

Решить обобщенную задачу Коши

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t), \quad u|_{t=0} = u_0(x)$$

- 1)  $f = \theta(t)x^2$ ,  $u_0 = x^2$ ,  $a = b = c = 1$ ;
- 2)  $f = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}$ ,  $u_0 = e^x$ ;
- 3)  $f = \theta(t)te^x$ ,  $u_0 = xe^x$ ,  $a = 2, b = -1, c = -2$ ;
- 4)  $f = \theta(t)xe^x$ ,  $u_0 = xe^x + \operatorname{sh} x$ ,  $a = c = 1, b = -2$ ; 5)  $f = \theta(t)e^x \cos t \sin x$ ,  $u_0 = e^x \cos x$ ,  $a = 1, b = -2, c = 2$ ; 6)  $f = \theta(t)x$ ,  $u_0 = x \sin x$ ,  $a = b = c = 1$ .

### В-13.23

Пусть  $u(x, t)$  - решение задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

$u_0 \in C(R^n)$  и  $|u_0(x)| \leq M e^{-\delta|x|^2}$ ,  $\delta \geq 0$ . Доказать, что при всех  $t \geq 0, x \in R^n$

$$|u(t, x)| \leq M (1 + 4a^2 \delta t)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{\delta|x|^2}{1 + 4a^2 \delta t} \right\}$$

### В-13.24

Пусть  $u(x, t)$  - решение задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

$u_0(x)$  - финитная непрерывная функция. Доказать, что для любых  $T > 0, \delta < \frac{1}{4a^2 T}$  существует  $M > 0$  такое, что

$$|u(x, t)| \leq M e^{-\delta|x|^2}, \quad x \in R^n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

### В-13.25

Пусть  $u_0 \in C(R^n)$  и  $|u_0(x)| \leq M_\delta e^{\delta|x|^2}$ ,  $\delta > 0$ . Доказать, что при  $0 < t < \frac{1}{4a^2 \delta}, x \in R^n$ , функция

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi$$

принадлежит классу  $C^\infty$  и является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 < t < \frac{1}{4a^2 \delta}; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

### В-13.26

Доказать, что если условие задачи 13.25 выполняется для всех  $\delta > 0$ , то функция (10) принадлежит классу  $C^\infty$  при  $t > 0, x \in R^n$  и является решением классической задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

### В-13.27

Методом обобщенных функций решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \\ u|_{x=0} = 0, \quad \text{где} \quad u_0(x) \in C(x \geq 0).$$

## 14.2.4 Задачи Коши для других уравнений и задача Гурса

### В-14.1

Доказать, что если  $u_0(x) \in \mathcal{S}(R^n)$ , то функция

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-it|y|^2 - i(x, y)} \int_{R^n} u_0(\xi) e^{i(\xi, y)} d\xi dy$$

является решением задачи Коши  $u_t = i\Delta u$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ;  $u(x, t) \in C^\infty(t \geq 0)$ ;  $u(x, t) \in \mathcal{S}(R^n)$  при каждом фиксированном  $t > 0$ ; для любых  $\alpha$

### В-14.2

Пусть  $u(x, t)$  - решение задачи Коши (4). Доказать, что для любого  $T > 0$  функция  $v(x, t) = u(x, T - t)$  является решением задачи Коши

$$v_t = -i\Delta v, \quad 0 < t < T; \quad v|_{t=T} = u_0(x).$$

### В-14.3

Пусть  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  - решения задач

$$\begin{aligned} u_t &= iu_{xx}, & u|_{t=0} &= u_0(x) \\ v_t &= -iv_{xx}, & 0 < t < T, & \quad v|_{t=T} = v_0(x) \end{aligned}$$

причем  $u(x, t) \in \mathcal{P}$ , а функция  $v(x, t)$  находится с помощью формул задач 14.1 и

### В-14.2

Доказать, что

$$\int_{R^1} u_0(x)v(x, 0)dx = \int_{R^1} u(x, T)v_0(x)dx$$

Ук а з а н и е. В равенстве

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} v(x, t)\varphi_{\delta}(x) [u_t(x, t) - iu_{xx}(x, t)] dxdt &= 0 \\ \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} v(x, t)\varphi_{\delta}(x) [u_t(x, t) - iu_{xx}(x, t)] dxdt &= 0 \end{aligned}$$

где функция  $\varphi_{\delta}(x)$  та же, что и в задаче 6.5, интегрированием по частям избавиться от производных функции  $u(x, t)$  и перейти к пределу при  $\delta \rightarrow \infty$ .

### В-14.4

Доказать единственность решения задачи Коши (5) в классе  $\mathcal{P}$ .

Ук а з а н и е. Воспользоваться результатом задачи 14.3. Решение задачи Коши (1) единственно в классе  $\mathcal{P}$  (для  $n = 1$  см. задачу 14.4). В задачах 14.5-14.10 рассматриваются решения только из этого класса, причем существования  $u_{tt}$  не требуется.

### В-14.5

Пусть  $u_0(x) \in C^{n+1}(R^n)$ ,  $|x|^{n+3}|u_0(x)| \leq M$ ,  $|x|^{n+1}|D^{\alpha}u_0(x)| \leq M$  для всех  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq n+1$ .

Доказать, что решение задачи Коши (

4) существует и выражается формулой (3), которую можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(-\frac{\pi n i}{4}\right) \int_{R^n} u_0(\xi) \exp\left(\frac{i|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi$$

### В-14.6

Пусть  $u_0(x) \in C^{\alpha}(R^1)$ ,  $\alpha \geq 2$ ,  $u_0(x) = 0$  при  $|x| \geq 1$  и  $|u_0^{(r)}(x)| \leq M$ ,  $r \leq \alpha$

Доказать, что решение задачи Коши (5) принадлежит классу  $C^{\infty}(t > 0)$  и

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x, t) \right| \leq CM(1 + |x|)^{2+r-\alpha}, \quad r = 0, 1, \dots, \alpha - 2,$$

для всех  $x \in R^1$ ,  $t \geq 0$ .

### В-14.7

Пусть  $u_0(x) \in C^{\alpha}(R^1)$ ,  $|u_0^{(r)}(x)| \leq C(1 + |x|)^{\lambda}$ ,  $r \leq \alpha$ ,  $\alpha \geq 2$ ,  $\lambda < \alpha - 5$ . И пусть  $u_k(x, t)$  - решение задачи Коши

$$u_t = iu_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x)e(x-k),$$

где функция  $e(x)$  та же, что и в задаче 6.4. Доказать, что решение задачи Коши (5) существует, выражается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(x, t)$$

и  $|u(x, t)| \leq C_1(1 + |x|)^{\alpha-2}$  для всех  $x \in R^1$ ,  $t \geq 0$ .

Ук а з а н и е. Используя результат задачи 14.6, показать, что

$$|u_k(x, t)| \leq \frac{C_1(2 + |k|)^{\lambda}}{(1 + |x-k|)^{\alpha-2}} \leq \frac{C_1(1 + |x|)^{\alpha-2}(2 + |k|)^{\lambda}}{(1 + |k|)^{\alpha-2}}$$

**В-14.8**

Пусть  $u_0(x) \in C^1(R^1)$  и  $\int_{R^1} |xu'_0(x)| dx < \infty$ . Доказать, что решение задачи Коши (5) существует и выражается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(+\infty) + u_0(-\infty)] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi i/4} \int_{R^1} u'_0(\xi) \int_0^{(x-\xi)/(2\sqrt{t})} e^{iy^2} dy d\xi.$$

**В-14.9**

Пусть  $u_0(x) = e^{ia|x|^2}$ ,  $a$  — действительное число,  $x \in R^n$ . Доказать, что при  $a \geq 0$  существует решение задачи Коши (4), а при  $a < 0$  решение существует только при  $0 \leq t < -\frac{1}{4a}$ . Найти это решение.

Результат этой задачи сравнить с результатом задачи 14.7 при  $n = 1$  в случаях  $a = 0, \pm 1$ .

**В-14.10**

Решить задачи:

- 1)  $u_t = iu_{xx} + tx^3$ ;  $u|_{t=0} = x^4$ ;
- 2)  $u_t = iu_{xx}$ ,  $0 < t < \frac{1}{4}$ ;  $u|_{t=0} = xe^{-ix^2}$ ;
- 3)  $u_t = i\Delta u + x \cos t - y^2 \sin t$ ;  $u|_{t=0} = x^2 + y^2$ ;
- 4)  $u_t = i\Delta u + 6x + y^2 + iz^3$ ;  $u|_{t=0} = i(x^3 + y^3 + z^3)$ ;

**В-14.11**

Найти решение обобщенной задачи Коши (2) для следующих  $F \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ :

- 1)  $\delta(t) \cdot \delta(x)$ ;
- 2)  $\delta(t) \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$ ;
- 3)  $\theta(t) \cdot \delta(x + x_0)$ ,  $n = 1$ ;
- 4)  $\theta(t - t_0) \cdot \delta(x)$ ,  $n = 1$ ,  $t_0 \geq 0$ .

**В-14.12**

Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = iu_{xx} + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

при  $t > 0$  для следующих  $f$  и  $u_0$  ( $f = 0$  при  $t < 0$  и задается только для  $t > 0$ ):

- 1)  $f = \theta(x)$ ,  $u_0 = \theta(x)$ ;
- 2)  $f = \theta(t - 1)$ ,  $u_0 = \theta(1 - |x|)$ ;
- 3)  $f = \theta(t - \pi) \sin t$ ,  $u_0 = x^2$ ;
- 4)  $f = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  $u_0 = \cos x$ ;
- 5)  $f = \theta(t - 1)(e^t - e)$ ,  $u_0 = x \sin x$ .

Доказать, что функции  $u(x, t)$ , найденные в задаче 14.12, 3), 4), 5), являются решением классической задачи Коши.

2. Задача Коши для уравнения  $u_{tt} = -\Delta^2 u + f(x, t)$ .

**В-14.13**

Пусть  $u(x, t) \in C^4(t \geq 0)$ . Доказать, что функция  $u(x, t)$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

тогда и только тогда, когда функция

$$w(x, t) = u(x, t) + i \int_0^t \Delta u(x, \tau) d\tau$$

является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = \varphi(x).$$

**В-14.14**

Пусть функция  $w(x, t) \in C^4(t \geq 0)$  является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$  — действительная функция. Доказать, что функция  $u(x, t) = \operatorname{Re} w(x, t)$  является решением задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

**В-14.15**

Пусть функция  $f(x, t) \in C^4(t \geq 0)$  является бигармонической ( $\Delta^2 f = 0$ ) при каждом  $t \geq 0$ . Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u + f(x, t); \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

**В-14.16**

Пусть  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  - бигармонические функции. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

**В-14.17**

Пусть функция  $w(x, t) \in C^4(t \geq 0)$  является решением задачи Коши  $w_t = i\Delta w$ ;  $w|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $\varphi(x)$  - действительная функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

**В-14.18**

Пусть функция  $w(x, t) \in C^4(t \geq 0)$  является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$  - чисто мнимая функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

**В-14.19**

Пусть  $u_0(x) \in C^{n+3}(R^n)$ ,  $|x|^{n+5}|u_0(x)| \leq M$ ,  $|x|^{n+1}|D^\alpha u_0(x)| \leq M$ ,  $|\alpha| \leq n+3$ . Доказать, что решение задачи Коши  $u_{tt} = -\Delta^2 u$ ,  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$  существует и выражается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int u_0(\xi) \cos\left(\frac{|x-\xi|^2}{4t} - \frac{\pi n}{4}\right) d\xi.$$

Ук аз ан и е. Воспользоваться результатами задач 14.5 и 14.14.

**В-14.20**

Решить задачи:

- 1)  $u_{tt} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6tx^3$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_{t=0}|_{t=0} x^4$ ;
- 2)  $u_{tt} = -\Delta^2 u + xye^t$ ;  $u|_{t=0} = x^2 y^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 3)  $u_{tt} = -\Delta^2 u + 6x^2 y^2 z^2$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 4)  $u_{tt} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ,  $0 < t < \frac{1}{4}$ ;  $u|_{t=0} = \cos x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$ .

**В-14.21**

Пусть задача Коши (6), (7) поставлена корректно в классе  $\mathcal{S}_n$

$$v(\sigma, t) = F[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ix\sigma} dx$$

$u(x, t)$  - решение задачи (6), (7). Доказать, что функция  $v(\sigma, t)$  при каждом  $t \geq 0$  принадлежит классу  $\mathcal{S}$  и является решением задачи

$$\frac{dv}{dt} = P(\sigma)v, \quad v|_{t=0} = F[u_0(x)]$$

### В-14.22

Пусть  $u_0(x) \in \mathcal{S}_n$

$$\operatorname{Re} P(\sigma) \leq C < \infty$$

при всех действительных  $\sigma$ . Доказать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma) - ix\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi d\sigma$$

является решением задачи (6), (7), принадлежит классу  $C^\infty(t \geq 0)$  и при  $|x| \rightarrow \infty$  убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$  равномерно относительно  $t \geq 0$ .

### В-14.23

Доказать, что условие (А) является необходимым и достаточным для корректности постановки задачи Коши (6), (7) в классе  $\mathcal{S}$ .

У к а з а н и е. Для доказательства необходимо показать, что если условие (А) не выполнено, то существует такая функция  $u_0(x) \in \mathcal{S}$ , для которой решение задачи (8) не принадлежит классу  $\mathcal{S}$ .

### В-14.24

Пусть задача Коши (6), (7) поставлена корректно в классе  $\mathcal{S}$ . Доказать, что ее решение выражается формулой (9), которую можно записать в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) G(x - \xi, t) d\xi$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma) - ix\sigma} d\sigma.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться оценкой  $|G(x, t)| \leq Ct^{-1/N}$ .

### В-14.25

Пусть условие (А) выполнено,  $u_0(x) \in C^{N+2}(R^1)$  и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0^{(k)}(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, N + 2.$$

Доказать, что решение задачи (6), (7) существует, выражается формулой (9) (или формулами (10), (11)) и функция  $u(x, t)$  ограничена при  $t \geq 0$  вместе со своими производными, входящими в уравнение (6).

## 14.2.5 Задача Коши для уравнения первого порядка

### В-14.26

Решить задачи:

- 1)  $u_t + 2u_x + 3u = 0, \quad u|_{t=0} = x^2;$
- 2)  $u_t + 2u_x + u = xt, \quad u|_{t=0} = 2 - x;$
- 3)  $2u_t = u_x + xu, \quad u|_{t=0} = 1;$
- 4)  $2u_t = u_x - xu, \quad u|_{t=0} = 2xe^{x^2/2};$  5)  $u_t + (1 + x^2)u_x - u = 0, \quad u|_{t=0} = \operatorname{arctg} x;$  6)  $u_t + (1 + t^2)u_x + u = 1, \quad u|_{t=0} = e^{-x};$  7)  $u_t = u_x + \frac{2x}{1+x^2}u, \quad u|_{t=0} = 1$  8)  $2tu_t + xu_x - 3x^2u = 0, \quad u|_{t=1} = 5x^2.$

### В-14.27

Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0, \quad 0 < y < \alpha x, \quad x > 0, \quad y > 0$$

$$u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{y=\alpha x} = g(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x, y) = f(x) + g\left(\frac{y}{\alpha}\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $f(0) = g(0)$ .



**В-14.28**

Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{x=0} = g(y)$$

имеет единственное решение  $u(x, y) = f(x) + g(y) - f(0)$ , если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  принадлежат классу

$$C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0) \quad \text{и} \quad f(0) = g(0).$$

**В-14.29**

Доказать, что решение задачи Гурса

$$u_{xy} = 0, \quad y > \alpha x, \quad x > 0, \quad \alpha < 0;$$

$$u|_{y=\alpha x} = 0, \quad u|_{x=0} = 0$$

не единственно. Показать, что множество всех решений этой задачи имеет вид

$$u(x, y) = f(x) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

$f(x)$  - любая функция из класса  $C^2(R^1)$ , равная нулю при  $x \leq 0$ .

**В-14.30**

Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0, \quad 0 < y < \varphi(x), \quad x > 0;$$

$$u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{y=\varphi(x)} = g(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x, y) = f(x) + g(\varphi^{-1}(y)) - f(\varphi^{-1}(y)),$$

если функции  $f(x), g(x), \varphi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ ,  $f(0) = g(0)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(x) > 0$ ,  $\varphi^{-1}(y)$  - функция, обратная к функции  $\varphi(x)$ .

**В-14.31**

Пусть функции  $\varphi(x), \psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $\varphi(0) = \psi(0)$ . При каких действительных значениях  $a$  задача Гурса 177

$$au_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = \psi(y)$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

**В-14.32**

Для каких положительных значений параметра  $b$  задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad 0 < t < bx, \quad x > 0$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=bx} = 0$$

имеет только нулевое решение? В задачах 14.33-14.55 требуется найти решение поставленной задачи Гурса и доказать единственность этого решения.

**В-14.33**

$$u_{xy} + u_x = x, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=0} = x^2.$$

**В-14.34**

$$u_{xy} + x^2 y u_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

**В-14.35**

$u_{xy} + u_y = 1, \quad x > 0, \quad y > 0;$   
 $u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u|_{y=0} = \psi(x),$  где функции  $\varphi(x), \psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$   
 и  $\varphi(0) = \psi(0)$

**В-14.36**

$$u_{xy} + xu_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u|_{y=0} = \psi(x),$$

где функции  $\varphi(x), \psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $\varphi(0) = \psi(0)$

**В-14.37**

$$2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x| \quad u|_{y=x} = 1, \quad u|_{y=-x} = (x+1)e^x$$

**В-14.38**

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad -\frac{1}{2}x < y < x, \quad x > 0;$$

**В-14.39**

$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \quad x < y < 5x, \quad x > 0; \quad u|_{y=x} = \varphi(x), \quad u|_{y=5x} = \psi(x),$  где функции  $\varphi(x), \psi(x)$  принадлежат классу  $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$  и  $\varphi(0) = \psi(0)$ .

**В-14.40**

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0, \quad -\frac{1}{4}x^2 < y < 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=-x^2/4} = x^2.$$

**В-14.41**

$$u_{xy} - e^x u_{yy} = 0, \quad y > e^{-x}, \quad x > 0;$$

$$u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=-e^x} = 1 + x^2.$$

**В-14.42**

$$yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=x} = 4x^4.$$

**В-14.43**

$$xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=x} = x.$$

**В-14.44**

$$y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0, \quad y^3 - 8 < 3x < y^3, \quad 0 < y < 2;$$

$$u|_{y=2} = 3x + 8, \quad u|_{3x=y^3} = 2y^3.$$

**В-14.45**

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad y > x, \quad x > 1 \quad u|_{x=1} = 1, \quad u|_{y=x} = x.$$

**В-14.46**

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \quad \frac{1}{x} < y < x, \quad x > 1; \quad u|_{y=x} = x, \quad u|_{y=1/x} = 1 + \ln x.$$

**B-14.47**

$$3x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0, \quad x < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad 0 < x < 1; \quad u|_{x=y} = y, \quad u|_{xy^3=1} = y^2.$$

**B-14.48**

$$3x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0, \quad 1 < y < x, \quad x > 1; \quad u|_{y=x} = 0, \quad u|_{y=1} = \cos \frac{\pi x}{2}.$$

**B-14.49**

$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0, \quad |y - \cos x| < x, \quad x > 0; \quad u|_{y=x+\cos x} = \cos x, \quad u|_{y=-x+\cos x} = \cos x.$$

**B-14.50**

$$u_{xy} - \frac{1}{x-y} (u_x - u_y) = 1, \quad y < -x, \quad x > 2; \quad u|_{y=-x} = 0, \quad u|_{x=2} = 2 + 2y + \frac{1}{2}y^2.$$

**B-14.51**

$$u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x} u_x = 0, \quad y > 1 + |x|; \quad u|_{y=x+1} = 1 - x, \quad u|_{y=1-x} = 1 + x.$$

**B-14.52**

$$u_{xx} - u_{yy} + \frac{4}{x} u_x + \frac{2}{x^2} u = 0, \quad y > x, \quad x > 1; \quad u|_{y=x} = 1, \quad u|_{x=1} = y.$$

**B-14.53**

$$u_{xy} = 1, \quad \alpha x < y < \beta x, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < \beta; \quad u|_{y=\alpha x} = 0, \quad u|_{y=\beta x} = 0.$$

**14.2.6 Задача Коши для квазилинейных уравнений**

**B-14.56**

Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

непрерывное для  $t \geq 0, |x| + t \neq 0$  и непрерывно дифференцируемое при  $t \neq |x|$ .

**B-14.57**

Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = \begin{cases} \alpha & \text{при } x < 0 \\ \beta & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

$\alpha, \beta (\geq 0)$  - постоянные, непрерывное для  $t \geq 0, |x| + t \neq 0$  и непрерывно дифференцируемое вне прямых  $t = x/\alpha, t = x/\beta$ .

**B-14.58**

Доказать, что задача Коши для уравнения Бюргерса с начальным условием

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= a^2 u_x \\ u|_{t=0} &= u_0(x) \end{aligned}$$

подстановкой  $u = -2a^2 \frac{v_x}{v}$  сводится к задаче Коши

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad v|_{t=0} = \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} \int_0^x u_0(\xi) d\xi \right\}.$$

**B-14.59**

Пусть  $u$  - решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

непрерывное при  $t \geq 0, |x| + t \neq 0$  и непрерывно дифференцируемое при  $t > 0$ . Доказать, что это решение при  $\varepsilon \rightarrow +0$  стремится к решению задачи 14.56 (теорема Э. Хопфа).

**В-14.60 Проверка решения КдФ**

Проверить, что решением уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

является функция

$$u(x, t) = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\sqrt{a}}{2} (x - x_0 - at) \right]}, \quad a > 0,$$

описывающая «уединенную волну» (солитонное решение). Показать, что это решение с конечной энергией

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + u_x^2) dx < \infty.$$

**Решение** Выглядит как легкая задача, просто посчитать производные и подставить их. Не вижу в ней особой важности.

**В-14.61 Проверка решения ур. Лиувилля**

Для уравнения Лиувилля

$$u_{tt} - u_{xx} = ge^u, \quad g > 0,$$

проверить следующие утверждения:

1) функция

$$u(x, t) = \ln \frac{\alpha^2 (1 - a^2)}{2g \operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\alpha}{2} (x - x_0 - at) \right]}, \quad 0 \leq a \leq 1$$

является решением при всех  $x$  и  $t$

2) функция

$$u(x, t) = \ln \frac{8\varphi'(x+t)\psi'(x-t)}{g[\varphi(x+t) - \psi(x-t)]^2}$$

является решением при любых  $\varphi$  и  $\psi$  таких, что  $\varphi, \psi \in C^3, \varphi'\psi' > 0$ ;

3) функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] - \ln \left\{ \cos^2 \left[ \sqrt{\frac{g}{8}} \int_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2} d\xi \right] \right\}$$

является решением задачи Коши с начальными условиями если

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ \left| \sqrt{\frac{g}{8}} \int_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2} d\xi \right| < \frac{\pi}{2}.$$

**Решение** Выглядит как легкая задача, просто посчитать производные и подставить их, но, может быть, какие-то сложности окажутся. Не вижу в ней особой важности.

**В-14.62**

Проверить, что для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u, \quad g > 0$$

функция

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left\{ \pm \frac{\sqrt{g} (x - x_0 - at)}{\sqrt{1 - a^2}} \right\}, \quad 0 \leq a < 1,$$

является решением с конечной энергией

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + u_x^2) dx < \infty$$

**В-14.63**

Проверить, что решением нелинейного уравнения Шрёдингера является функция

$$iu_t + u_{xx} + \nu |u|^2 u = 0, \quad \nu > 0,$$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}} \exp \left\{ i \left[ \frac{a}{2} x - \left( \frac{a^2}{4} - \alpha \right) t \right] \right\} \frac{1}{\operatorname{ch} [\sqrt{\alpha} (x - x_0 - at)]}, \quad \alpha \geq 0.$$

**В.з.доп-пр.1.**

Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y^2 u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y} u_y = 0, \quad y > 0,$$

$$u|_{y=1} = 1 - x, \quad u_y|_{y=1} = 3.$$

**Решение** Сначала найдем общее решение в полуплоскости  $y > 0$ , для этого приведем его к каноническому виду. Характеристическое уравнение  $-y^2 dx dy + (dx)^2 = 0$  распадается на два уравнения  $dx = 0$ ,  $-y^2 dy + dx = 0$ , для которых  $x = C$ ,  $3x - y^3 = C$  даются общими интегралами. В уравнении (1) нужно сделать замену переменных  $\xi = x$ ,  $\eta = 3x - y^3$ .

Тогда  $u_y = -3y^2 u_\eta$ ,  $u_{xy} = -3y^2 u_{\xi\eta} - 9y^2 u_{\eta\eta}$ ,  $u_{yy} = 9y^4 u_{\eta\eta} - 6y u_\eta$  и уравнение (1) приводится к каноническому виду  $u_{\xi\eta} = 0$ . Интегрируя это уравнение, находим  $u = f(\xi) + g(\eta) = f(x) + g(3x - y^3)$ .

Теперь воспользуемся начальными условиями:

$$f(x) + g(3x - 1) = 1 - x$$

$$-3g'(3x - 1) = 3$$

Решая эту систему, получаем  $f(x) = 2x + C$ ,  $g(x) = -x - C$ . Следовательно, ответ:

$$u(x, y) = 2x + C + (-3x + y^3 - C) = y^3 - x.$$

**В.з.доп-пр.2. Задача Гурса**

Найти решение задачи Гурса для уравнения

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0$$

во всей плоскости, удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u|_{y=-x} = 1.$$

**Решение** Найдем общее решение уравнения (1). Характеристическое уравнение  $(dy)^2 - 3dxdy - 4(dx)^2 = 0$  распадается на два уравнения  $dy + dx = 0$ ,  $dy - 4dx = 0$ , для которых  $y + x = C$ ,  $y - 4x = C$  являются общими интегралами. Заменой переменных  $\xi = y + x$ ,  $\eta = y - 4x$  уравнение (1) приводится к каноническому виду  $u_{\xi\eta} - \frac{1}{5}u_\eta = 0$ . Интегрируя это уравнение, находим

$$u = f(\eta)e^{-\xi/5} + g(\xi) = f(y - 4x)e^{-(y+x)/5} + g(y + x).$$

Воспользуемся условиями (2):

$$f(0)e^{-x} + g(5x) = 5x + e^x,$$

$$f(-5x) + g(0) = 1.$$

Решая эту систему, получаем  $f(x) = 1 - g(0)$ ,  $g(x) = x + e^{x/5} - f(0)e^{-x/5}$ . Следовательно,

$$u(x, y) = [1 - g(0)]e^{-(x+y)/5} + x + y + e^{(x+y)/5} - f(0)e^{-(x+y)/5}.$$

Учитывая, что из системы (3) при  $x = 0$  следует равенство  $f(0) + g(0) = 1$ , окончательно находим решение задачи (1), (2):  $u(x, y) = x + y + e^{(x+y)/5}$ .

**В.з.доп-пр.3.**

Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6xt$$

в области  $x > 0, t > 0$ , удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = t^3.$$

**Решение** Общее решение уравнения (1) имеет вид  $u(x, t) = f(x + 2t) + g(x - 2t) + xt^3$ . Из условий (2) получаем

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^3, & x \geq 0 \\ f'(x) - g'(x) &= 0, & x \geq 0 \\ f(2t) + g(-2t) &= t^3, & t \geq 0 \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений этой системы находим  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - C$ ,  $x \geq 0$ . Подставляя найденную функцию  $f(x)$  в третье уравнение системы (3), получаем  $g(x) = \frac{3}{8}x^3 - C$ ,  $x \leq 0$ . Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 2t)^3 + \frac{1}{2}(x - 2t)^3 + xt^3, & x \geq 2t \\ \frac{1}{2}(x + 2t)^3 + \frac{3}{8}(x - 2t)^3 + xt^3, & x < 2t \end{cases}$$

### В.з.доп-пр.4.

Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 2$$

в области  $x > 0, t > 0$ , удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = x + x^3, \quad u_t|_{t=0} = -9x^2, \quad (u - u_x)|_{x=0} = t^2 - 1.$$

**Решение.** Общее решение уравнения (1) имеет вид  $u(x, t) = f(x + 3t) + g(x - 3t) + t^2$ . Из условий (2) получаем  $f(x) + g(x) = x + x^3$ ,  $x \geq 0$ ,  $3f'(x) - 3g'(x) = -9x^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $f(3t) + g(-3t) - f'(3t) - g'(-3t) = -1$ ,  $t \geq 0$ . Из первых двух уравнений этой системы находим  $f(x) = \frac{1}{2}x + C$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x + x^3 - C$ ,  $x \geq 0$ . Подставляя найденную функцию  $f(x)$  в третье уравнение системы (3), получаем  $g'(x) - g(x) = C + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ , откуда  $g(x) = C_1 e^x + \frac{1}{2}x - C$ ,  $x \leq 0$ . Из условия непрерывности функции  $g(x)$  при  $x = 0$  находим  $C_1 = 0$ , т. е.  $g(x) = \frac{1}{2}x - C$ ,  $x \leq 0$ . Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x, t) = \begin{cases} (x - 3t)^2 + x + t^2, & x \geq 3t, \\ x + t^2, & x < 3t. \end{cases}$$

## 14.3 Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

### 14.3.1 Задачи про задачу Штурма-Лиувилля

#### В-15.1 Поиск функции Грина

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -y''$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 2)  $Ly = -y''$ ,  $y'(0) = y(0)$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$ ;
- 3)  $Ly = -y''$ ,  $y(0) = hy'(0)$ ,  $h \geq 0$ ,  $y(1) = 0$ ;
- 4)  $Ly = -y'' - y$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 5)  $Ly = -y'' - y$ ,  $y(0) = y'(0)$ ,  $y(1) = y'(1)$ ;
- 6)  $Ly = -y'' + y$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ;
- 7)  $Ly = -y'' + y$ ,  $y'(0) = y'(1) = 0$ .

**Решение 1.** Это должно быть типичная задача на функцию Грина для задачи ШЛ.

Вводим два решения однородного уравнения  $u$  и  $v$  (то есть  $\hat{L}u = 0 = \hat{L}v$ ), которые удовлетворяют 'левому' (при  $x = a$ ) и 'правому' (при  $x = b$ ) граничным условиям, соответственно,

$$G(x, y) = \begin{cases} Au(x), & x < y \\ Bv(x), & x > y \end{cases}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases}$$

$$W(x) := u(x)v'(x) - u'(x)v(x).$$

**Решение 2.**

**Решение 3.****В-15.2 Поиск функции Грина**

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(1, 2)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -x^2y'' - 2xy', \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0;$
- 2)  $Ly = -xy'' - y', \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0;$
- 3)  $Ly = -x^3y'' - 3x^2y - xy, \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0;$
- 4)  $Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y, \quad y(1) + y'(1) = 0, \quad y(2) + 3y'(2) = 0.$

**В-15.3 Поиск функции Грина**

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{4})$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -(\cos^2 x \cdot y')', \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0;$
- 2)  $Ly = -(\frac{y'}{\cos x})', \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0;$
- 3)  $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y', \quad y(0) = y'(0), \quad y(\frac{\pi}{4}) + y'(\frac{\pi}{4}) = 0.$

**В-15.4 Поиск функции Грина**

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -(1+x^2)y'' - 2xy', \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = 0;$
- 2)  $Ly = -(1+x^2)y'' - 2xy', \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0;$
- 3)  $Ly = -(3+x^2)y'' - 2xy', \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = 0;$
- 4)  $Ly = -(x+1)^2y'' - 2(x+1)y' + 2y, \quad y(0) = y(1) = 0;$
- 7)  $Ly = -(xy')' + \frac{4}{x}y, \quad y(0) = y(1) = 0$
- 8)  $Ly = -\frac{1}{x^2}y'' + \frac{2}{x^3}y' - \frac{2}{x^4}y, \quad y'(0) = y(1) = 0.$

**В-15.5**

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{4})$  при условии  $|y(0)| < \infty, y(\frac{\pi}{4}) = 0$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -(\operatorname{tg}^2 x \cdot y')'; \quad 2) Ly = -(\operatorname{tg} x \cdot y')'.$

**В-15.6**

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y', \quad y(0) = 0, \quad |y(\frac{\pi}{2})| < \infty;$
- 2)  $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y', \quad |y(0)| < \infty, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0;$
- 3)  $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y', \quad |y(0)| < \infty, \quad y(\frac{\pi}{2}) + y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

**В-15.7**

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  при условии  $|y(0)| < \infty$  в следующих случаях:

- 1)  $Ly = -x^2y'' - 2xy' + 6y, \quad y'(1) + 3y(1) = 0;$
- 2)  $Ly = -y'' + \frac{2}{x^2}y, \quad y(1) = 0;$
- 3)  $Ly = -x^2y'' - 2xy' + 2y, \quad y'(1) = 0;$
- 4)  $Ly = -(xy')', \quad y(1) = 0;$  5)  $Ly = -xy'' - y', \quad y'(1) + y(1) = 0;$  6)  $Ly = -x^2y'' - 2xy' + 2y, \quad y(1) + y'(1) = 0;$  7)  $Ly = -x^2y'' - 2xy' + 2y, \quad 2y(1) + y'(1) = 0;$  8)  $Ly = -y'' + \frac{a(a-1)}{x^2}y, \quad a > 1, \quad y(1) = 0;$  9)  $Ly = -(xy')' + (1+x)y, \quad y(1) = 0.$

**В-15.8**

Найти функцию Грина оператора  $Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y$  на интервале  $(1, 3)$ , если  $y(1) + y'(1) = 0, 2y(3) + 3y'(3) = 0.$

**В-15.9 Функция Грина экспонент-операторов (???)**

Найти функцию Грина оператора  $L$  на интервале  $(0, 1)$  в следующих случаях:

1)  $Ly = -\left(e^{-x^2/2}y'\right)' + e^{-x^2/2}y, \quad y(0) = y(1) = 0$

2)  $Ly = -e^{x^2}y'' - 2xe^{x^2}y', \quad y(0) = 2y'(0), \quad y(1) = 0;$

3)  $Ly = -y'' + (1 + x^2)y, \quad y(0) = y'(1) = 0.$

Указание. Частное решение уравнения  $-y'' + (1 + x^2)y = 0$  можно искать в виде  $y = e^{z(x)}$ .

**Решение** (???? нет пока идей)

**В-15.10**

Найти функцию Грина оператора  $Ly = -(\sqrt{x}y')' + 3x^{-3/2}y$  на интервале  $(0, 2)$ , если  $|y(0)| < \infty, y(2) = 0$ .

**В-15.11**

Найти функцию Грина оператора  $Ly = -(x+1)y'' - y'$ , если  $|y(-1)| < \infty, y(0) = 0$

**В-15.12**

Найти функцию Грина оператора  $Ly = -x^2y'' - xy' + n^2y$ , если  $|y(0)| < \infty, y(1) = 0$ .

**В-15.13**

Найти функцию Грина оператора  $Ly = -[(x^2 - 1)y']' + 2y$ , если  $|y(1)| < \infty, y(2) = 0$ .

**В-15.14**

Свести задачу Штурма-Лиувилля интегральному уравнению в следующих случаях:

1)  $Ly \equiv -(1 + e^x)y'' - e^xy' = \lambda x^2y, 0 < x < 1, y(0) - 2y'(0) = 0, y'(1) = 0$

2)  $Ly \equiv -(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y, 0 < x < 1, y'(0) = 0, y(1) - y'(1) = 0$

3)  $Ly \equiv -\sqrt{1 + e^{2x}}y'' - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}y' = \lambda xy, 0 < x < 1, y(0) = \sqrt{2}y'(0), y'(1) = 0 = \sqrt{2}y'(0), y'(1) = 0;$

4)  $Ly \equiv -(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, y'(0) = 0, |y(1)| < \infty$  5)  $Ly \equiv -\cos^4 x \cdot y'' + 4 \sin x \cos^3 x \cdot y' = \lambda xy, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 2y(0) - y'(0) = 0, |y(\frac{\pi}{2})| < \infty$  6)  $Ly \equiv -x^2y'' - 2xy' + (2 \cos^2 x + 1)y = \lambda y \cos 2x, 1 < x < 2, y(1) = 0, y'(2) = 0$  7)  $Ly \equiv -y'' = \lambda y, 0 < x < 1, y'(0) = y'(1) = 0.$

**В-15.15**

Свести интегральному уравнению нахождение решений уравнения  $-2xy'' - y' = 2\lambda\sqrt{xy}, \quad 0 < x < 1$ , при граничных условиях  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \cdot y') = 0, \quad y(1) = 0$ .

**В-15.16**

Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения  $-xy'' + y' = \lambda y, 1 < x < 2$ , при граничных условиях  $y(1) = y'(2) = 0$

**В-15.17**

Свести к интегральному уравнению нахождение решений каждого из следующих уравнений при указанных граничных условиях: 1)  $-(1 + x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(1) = 0;$  2)  $-e^xy'' - e^xy' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0;$  3)  $-y'' + \lambda y = f(x), \quad y(0) = hy'(0), \quad h \geq 0, \quad y(1) = 0;$  4)  $-xy'' - y' + \lambda xy = 0, \quad |y(0)| < \infty, y(1) = 0.$



**В-15.18**

С помощью функции Грина решить следующие задачи:

- 1)  $-\frac{xy''}{1+x} - \frac{y'}{(1+x)^2} = f(x), 1 < x < e, y(1) = 0, y(e) - ey'(e) = 0, e - \text{основание натуральных логарифмов};$
- 2)  $-x^4 y'' - 4x^3 y' - 2x^2 y = f(x), 1 < x < 2, y(1) = 0, y(2) + y'(2) = 0;$
- 3)  $-\frac{x}{1-x} y'' - \frac{1}{(1-x)^2} y' = f(x), -1 < x < 0, 2y(-1) + y'(-1) = 0, |y(0)| < \infty$
- 4)  $-(1 + \cos x)y'' + \sin x \cdot y' = f(x), 0 < x < \frac{\pi}{2}, y(0) - 2y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- 5)  $-y'' + \frac{2}{x^2} y = f(x), 1 < x < 2, 2y(1) = y'(1), y(2) + 2y'(2) = 0.$

**В-15.19**

Доказать, что краевая задача

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad y'(a) - hy(a) = c_1, \quad y'(b) + Hy(b) = c_2$$

эквивалентна трем задачам Коши:

- 1)  $g' + g^2 = q(x), g(a) = -h;$
- 2)  $Y' - g(x)Y = -f(x), Y(a) = c_1;$
- 3)  $y' + g(x)y = Y(x), y(b) = \frac{c_2 - Y(b)}{H - g(b)}.$

Указан и е. Факторизовать оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q = -\left(\frac{d}{dx} - g\right)\left(\frac{d}{dx} + g\right).$$

**14.3.2 Задачи на разделение переменных для ур. Пуассона на плоскости****В-16.1**

Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что  $u|_{r=1} = f(\varphi)$ , где:

- 1)  $f(\varphi) = \cos^2 \varphi;$
- 2)  $f(\varphi) = \sin^3 \varphi;$
- 3)  $f(\varphi) = \cos^4 \varphi;$
- 4)  $f(\varphi) = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi.$

**В-16.2**

Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что:

- 1)  $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = A \cos \varphi$
- 2)  $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = A \cos 2\varphi$
- 3)  $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \sin^3 \varphi.$

**В-16.3**

Найти стационарное распределение температуры  $u(r, \varphi)$  внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , если:

- 1) на его поверхности поддерживается температура

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = A \sin \varphi;$$

2) на одной половине поверхности цилиндра ( $0 \leq \varphi < \pi$ ) поддерживается температура  $-T_0$ , а на другой половине ( $-\pi \leq \varphi < 0$ ) — температура  $T_0$ .

**В-16.4**

Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = f_1(\varphi), \quad u|_{r=2} = f_2(\varphi)$ , где:

- 1)  $f_1(\varphi) = u_1 = \text{const}, \quad f_2(\varphi) = u_2 = \text{const};$
- 2)  $f_1(\varphi) = 1 + \cos^2 \varphi, \quad f_2(\varphi) = \sin^2 \varphi.$

**В-16.5**

Найти решение уравнения  $\Delta u = A$  в кольце  $R_1 < r < R_2$ , если  $u|_{r=R_1} = u_1, u|_{r=R_2} = u_2$  ( $A, u_1, u_2$  — заданные числа).

**В-16.6**

Найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -Axy \quad (A = \text{const})$$

в круге радиуса  $R$  с центром в начале координат, если  $u|_{r=R} = 0$ .

**В-16.7**

Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в прямоугольнике  $0 < x < a, 0 < y < b$ , если на границе этого многоугольника  $u(x, y)$  принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= A \sin \frac{\pi y}{b}, & u|_{x=a} &= 0, \\ u|_{y=0} &= B \sin \frac{\pi x}{a}, & u|_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

**В-16.8**

Найти распределение потенциала электростатического поля  $u(x, y)$  внутри прямоугольника  $[0 < x < a, 0 < y < b]$ , если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси  $y$ , равен  $v_0$ , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

**В-16.9**

Найти распределение потенциала электростатического поля  $u(x, y)$  внутри коробки прямоугольного сечения  $-a < x < a, -b < y < b$ , две противоположные грани которой ( $x = a$  и  $x = -a$ ) имеют потенциал  $v_0$ , а две другие ( $y = b, y = -b$ ) заземлены.

**В-16.10**

Найти стационарное распределение температуры  $u(x, y)$  в прямоугольной однородной пластинке  $0 < x < a, 0 < y < b$ , если ее стороны  $x = a$  и  $y = b$  покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны ( $x = 0, y = 0$ ) поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной плотностью  $q$ .

**В.з.доп-пр.5.**

Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - u_{xx} = 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = t$$

**Решение** Подберем сначала такую функцию  $w$ , чтобы она удовлетворяла заданным граничным условиям. Пусть, например,  $w = xt$ . Тогда  $w_{tt} - w_{xx} = 0$ ,  $w|_{t=0} = 0$ ,  $w_t|_{t=0} = x$ . Следовательно, функция  $v(x, t) = u(x, t) - xt$  удовлетворяет

Следовательно, функция  $v(x, t) = u(x, t) - xt$  удовлетворяет

$$v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=1} = 0,$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=1} = 0,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения  $v_{tt} - v_{xx} = 0$  при полученных граничных условиях положим

$$v(x, t) = X(x)T(t).$$

Приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

Решая эту задачу, находим ее собственные значения  $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и соответствующие собственные функции

Решение задачи для  $v$  ищем в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x$$

$$T_n(0) = 0, \quad T'_n(0) = 0.$$

Подставляя  $v(x, t)$ , получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t)) \sin \lambda_n x = 2t$$

Для нахождения функций  $T_n(t)$  разложим функцию 1 в ряд Фурье по системе функций  $\sin(\lambda_n x)$  на интервале  $(0, 1)$ :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x.$$

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad a_n = \int_0^1 \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n},$$

получаем

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n}.$$

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} + A \sin \lambda_n t + B \cos \lambda_n t.$$

Используя условие на  $T$ , получаем  $B = 0, A = -4/\lambda_n^4$ . Подставляя

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} - \frac{4}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n t$$

в  $v$ , а её в  $u$ , получаем ответ:

$$u = xt + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} (\lambda_n t - \sin \lambda_n t) \sin \lambda_n x; \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

(??? я когда-то узнаю, как упростить или посчитать такой заумный ответ?)

### В.з.доп-пр.6.

Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения параболического типа

$$u_t - u_{xx} = t(x+1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = 0$$

$$u_x|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t^2$$

**Решение** Функция  $w = xt^2$  удовлетворяет краевым условиям (3), уравнению  $w_t - w_{xx} = 2xt$  и начальному условию  $w|_{t=0} = 0$ . Поэтому функция  $v = u - xt^2$  удовлетворяет уравнению  $v_t - v_{xx} = (1-x)t$  и условиям  $v|_{t=0} = 0, \quad v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0$ .

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения  $v_t - v_{xx} = 0$  при условиях (6), положим  $v = X(x)T(t)$ . Получим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

собственными значениями которой являются числа  $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а собственными функциями - функции

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x.$$

Решение задачи (5), (6) ищем в виде

Подставляя  $v(x, t)$  из (8) в уравнение (5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t)) \cos \lambda_n x = (1-x)t.$$

Разложим функцию  $1-x$  в ряд Фурье по системе функций (7) на интервале  $(0, 1)$ :

$$1-x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$$

Так как

$$a_n = 2 \int_0^1 (1-x) \cos \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n^2},$$

то из (9) и (10) находим

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T(t) = \frac{2t}{\lambda_n^2}.$$

Решением уравнения (11) при условии  $T_n(0) = 0$  является функция

$$T_n(t) = 2\lambda_n^{-6} (e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1).$$

Отсюда ответ:

$$u = xt^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-6} (e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1) \cos \lambda_n x,$$

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

### ФР.? задача параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), 0 < t \leq 1, 0 < x < 1$$

$$u(0, x) = (1+x)/\sqrt{5}, 0 \leq x \leq 1$$

$$u(t, 0) = 1/\sqrt{5-4t}, 0 < t \leq 1$$

$$u(t, 1) = 2/\sqrt{5-4t}, 0 < t \leq 1$$

**Решение** (??? пока суть в том, что по принципу максимума у нас одно решение, которое легко находится из начальных условий.)

Для зануления начальных условий рассмотрим функцию  $v = u - \frac{1+x}{\sqrt{\sqrt{1+1}}}$

(?? все ниже нужно переделывать, верстка очень плохая)

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2(1+x)}{(5-4t)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{5-4t}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2u \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} + u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 2 \cdot \left( v + \frac{1+x}{\sqrt{5-4t}} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{5-4t}} \right)^2 + \left( v + \frac{1+x}{\sqrt{5-4t}} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$

$$= 2 \cdot \left( v + \frac{1+x}{\sqrt{5-4t}} \right) \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{5-4t}} + \frac{1}{5-4t} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( v^2 + 2v \frac{1+x}{\sqrt{5-4t}} + \frac{(1+x)^2}{5-4t} \right) =$$

$$= v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2v \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{5-4t}} + \frac{2v}{5-4t} + 22v^2 \cdot \frac{1+x}{\sqrt{2x}} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{\partial x} \frac{1+x}{5-4t} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{1+x}{(5-4)^{3/2}} + y^2 v v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{5-4t}} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{(1+x)^2}{5-4t} \right)$$

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{(1+x)}{\sqrt{5-4t}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{v^{-1}(1+x)^2}{5-4t} \right), 0 < t \leq 1, 0 < x < 1 \right.$$

$$vt = 0, 0 \leq x \leq 1$$

$$v_{x=0} = v_{x=1} = 0, 0 < t \leq 1$$

Это ур парабол типа, значит, справедлив принцип максимума, значит, решение единственно. оно 0 для задачи с 0ми начальными условиями, значит, оно = 0. значит, для этих начальных условий - решение

**Обоснование** (!!!!!) (мб часов 10 ушло бы на разбор теории, чтобы разобраться, пока я не шарю. пока просто принцип максимума и такой алгоритм решения. все.)

**ФР.? задача о уравнении Пуассона (?????)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2[x(1-x) + u(1-y)]$$

$$\| u|_{\Gamma} = 0$$

**Решение** (что такое  $\Gamma$  - информация утеряна, возможно, окружность.)  
 (?? все ниже нужно переделывать, верстка очень плохая)  
 (!!! шаблонная задача, методы которой максимально типичные!!! усвою - также буду решать, пока тут слабое моё место.)  
 (далее копия решения)

$$\Delta u = -2(x(1-x) + y(1-y)) \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad 0 \leq (x, y) \leq 1$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi & \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} \cdot u_r + \frac{1}{r^2} \cdot u_{\varphi\varphi} \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$f(x, y) = 2r(\cos \varphi(r \cos \varphi - 1) + \sin \varphi(r \sin \varphi - 1)) =$$

$$= 2r(r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \cos \varphi - \sin \varphi) = 2r(r - \cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$r^2 \cdot u_{rr} + r \cdot u_r + U_{\varphi\varphi} = 2r^4 - 2r^3(\cos \varphi + \sin \varphi)$$

$$u(1, \varphi) = 0$$

$$u(r, \varphi) = V(r, \varphi) + W(r, \varphi)$$

$$\Delta U = \Delta V + \Delta W$$

$$1. \quad r^2 \cdot V_{rr} + r \cdot V_r + V_{\varphi\varphi} = -2r^3(\cos \varphi + \sin \varphi)$$

$$V(T, \varphi) = R(T) \cdot \Phi(\varphi) \quad \Phi(\varphi) = \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$N^2 \cdot R'' \cdot \phi + r \cdot R' \cdot \phi + R \cdot \phi'' = -2\Gamma^3 \cdot \phi \quad \phi \neq 0$$

$$\phi' = -\sin \varphi + \cos \varphi \quad \phi'' = -\sin \varphi - \cos \varphi \quad \phi'' = -\phi$$

$$R = R(r); r^2 \cdot R'' + r \cdot R' - R = -2r^3 \quad R(1) = 0$$

$$r = e^t \quad R' = R'_t \cdot e^{-t} \quad R'' = e^{-2t} (R''_{tt} - R'_t) \quad (\text{ур-е Эйлера})$$

$$e^{-2t} e^{2t} (R''_{tt} - R'_t) + e^t \cdot e^{-t} \cdot R'_t - R = 2e^{3t}$$

$$R''_{tt} - R = 2e^{3t}$$

$$R''_{tt} - R = 0 \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{12} = \pm 1$$

$$R(t) = R_0(t) + R_r(t)$$

$$R_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad f(t) = -2e^{3t} \quad \alpha = 3 \quad R = 0$$

$$R_1(t) = A e^{3t} \quad R'_1(t) = 3A e^{3t} \quad R''_1(t) = 9A e^{3t}$$

$$9A - A = -2 \quad A = -\frac{1}{4} \quad R_1(t) = -\frac{1}{4} e^{3t}$$

$$R(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - \frac{e^{3t}}{4}$$

$$R(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 + \frac{r^3}{4}$$

$$R(1) = C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 0 \quad C_2 = \frac{1}{4} - C_1$$

$$R(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{r}{4} - C_1 r - \frac{r^3}{4} = \frac{C_1}{r} - C_1 r + \frac{r - r^3}{4}$$

$$c_1 = a; V(r, \varphi) = \left( a \cdot \left( \frac{1}{r} - r \right) + \frac{r - r^3}{4} \right) \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

$$2. \quad N^2 \cdot W_{\mu N} + r = W_{\mu} + W_{\varphi\varphi} = 2N^4$$

$$W(r, \varphi) = R(r) \quad W_{\varphi\varphi} = 0$$

$$N^2 \cdot R'' + r \cdot R' = 2\mu^4$$

$$\mu R'' + R' = 2\mu^3 \quad R(1) = 0 \quad \text{ур-е tinnepa}$$

$$r = e^t \quad e^t \cdot e^{-2t} (R''_{tt} - R'_t) + e^{-t} \cdot R'_t = \text{Refl} 2e^{3t}$$

$$R''_{tt} = 2e^{4t} \quad R'_t = \frac{1}{2} e^{4t} + c_1$$

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \frac{1}{8}e^{4t} + c_1 t + c_2 \quad t = \ln r \\
 R(r) &= \frac{r^4}{8} + c_1 \ln r + c_2 \\
 R(1) &= \frac{1}{8} + c_2 = 0 \quad c_2 = -\frac{1}{8} \quad c_1 = b \\
 R(M) &= w(r) = b \cdot \ln r + \frac{r^4 - 1}{8} \\
 u(r, \varphi) &= \left[ a \left( \frac{1}{r} - r \right) + \frac{r^4 - 1}{4} \right] (\cos \varphi + \sin \varphi) + b \ln r + \frac{r^4 - 1}{8} \\
 u(x, y) &= a \left[ \frac{x+y}{x^2+y^2} - (x+y) \right] + \frac{x+y}{4} (1 - x^2 - y^2) + \frac{b}{2} \ln (x^2 + y^2) + \frac{(x^2+y^2)^2 - 1}{8}
 \end{aligned}$$

**Проверка через программирование (!?!?)** (кст, мб во многих задачах буду вставлять!!)

### 14.3.3 Задачи на Краевые задачи в пространстве

#### МФТИ.Карлов-л5.31 Типичное уравнение теплопроводности

Решить

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2} \Delta u + e^{-7t} \cdot \cos(x + 2y + 3z) \\ u|_{t=0} = \sin x \cdot y \cdot \cos y \cdot e^{-z^2} \end{cases},$$

$$u = u(x, y, z, t), \Delta = \Delta_{x,y,z}.$$

**Решение** (??? как через формулу Пуассона решать???? потом подумаю.)  
Две неоднородности убираются подстановкой:

$$u = u_1 + u_2,$$

$$\begin{cases} (u_1)_t = \frac{1}{2} \Delta u_1 + e^{-7t} \cdot \cos(x + 2y + 3z) \\ (u_1)|_{t=0} = 0 \\ (u_2)_t = \frac{1}{2} \Delta u_2 \\ (u_2)|_{t=0} = \sin x \cdot y \cos y \cdot e^{-z^2} \end{cases}$$

1) В случае, когда в условии есть собственная функция оператора Лапласа, ищем  $u_1$  в виде

$$u_1(x, y, z, t) = f(t) \cdot \cos(x + 2y + z),$$

$f(t)$  - ищем. Используем, что  $\Delta(\cos(x + 2y + 3z)) = (-1^2 - 2^2 - 3^2) \cos(x + 2y + 3z) = -14 \cdot \cos(x + 2y + 3z)$ .  
Подставляем  $u_1$ :

$$\begin{cases} f'(t) \cos(x + 2y + 3z) = \frac{1}{2} f(t) \cdot (-14) \cos(x + 2y + 3z) + e^{-7t} \cos(x + 2y + 3z) \\ f(0) \cdot \cos(x + 2y + 3z) = 0 \end{cases}$$

$$\cos(x + 2y + 3z) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(t) = -7f(t) + e^{-7t} \\ f(0) = 0 \end{cases},$$

т.е. получили задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.  
Общее решение однородного уравнения:

$$\lambda = -7, \Rightarrow f(t) = C e^{-7t}$$

Так как данный случай - резонансный (показатель степени  $(e^t)^{-7}$  совпадает с корнем характеристического многочлена), то поэтому частное решение ищем в виде:

$$f(t) = a \cdot t \cdot e^{-7t}$$

Подставляем в уравнение:

$$a \cdot e^{-7t} - a \cdot 7t \cdot e^{-7t} = -7 \cdot a \cdot t \cdot e^{-7t} + e^{-7t}, \Rightarrow a = 1$$

Таким образом,

$$f(t) = C \cdot e^{-7t} + t \cdot e^{-7t}$$

- общее решение неоднородного уравнения. Из граничного условия:

$$0 = f(0) = C, \Rightarrow f(t) = t e^{-7t}.$$

Таким образом,

$$u_1(x, y, z, t) = te^{-7t} \cdot \cos(x + 2y + 3z).$$

2) Ищем  $u_2$ . Для  $u_2$ :

$$\begin{cases} (u_2)_t = \frac{1}{2}\Delta u_2 \\ (u_2)|_{t=0} = \sin x \cdot y \cos y \cdot e^{-z^2}. \end{cases}$$

Только для однородного уравнения теплопроводности работает следующий прием: если в начальном условии неоднородность представлена в виде произведений функций с разделенными переменными, то можно разбить задачи на несколько разных, а результаты перемножить:

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, t) \cdot w(y, t) \cdot g(z, t).$$

Таким образом, имеем 3 новые задачи:

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{2}v_{xx} \\ v|_{t=0} = \sin x \end{cases}, \quad \begin{cases} w_t = \frac{1}{2}w_{yy} \\ w|_{t=0} = y \cos y \end{cases}, \quad \begin{cases} g_t = \frac{1}{2}g_{zz} \\ g|_{t=0} = e^{-z^2} \end{cases}.$$

Для  $v, w$  используем следующую формулу:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v \\ v|_{t=0} = v_0(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases}$$

Фиксируем  $x_1, \dots, x_n$ . Задача превращается в следующую:

$$\begin{cases} v'(t) = a^2 \cdot \Delta v(t) \\ v(0) = v_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- задача Коши для дифференциального уравнения в  $\mathbb{R}$ , её решение:

$$v(t) = v_0 \cdot e^{a^2\Delta t} = v_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}\Delta^n \cdot t^n}{n!}, \Rightarrow v = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n} \cdot t^n \cdot \Delta^n v_0}{n!}$$

(данные выкладки приведены для запоминания этой формулы, поэтому обоснование опущено). Поскольку  $\sin x$  - собственная функция оператора Лапласа, то вышенаписанная формула подходит, а потому

$$v = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot t^n \Delta^n(\sin x)}{n!}$$

Т.к.

$$\begin{aligned} 0 : \quad \Delta^0(\sin x) &= \sin x \\ 1 : \quad \Delta^1(\sin x) &= -\sin x \\ \vdots & \\ n : \quad \Delta^n(\sin x) &= (-1)^n \sin x \end{aligned},$$

Это ответ, но его можно и нужно упростить:

$$v = \sin x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot t^n}{n!} = \sin x \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{since} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Для  $w$ :

$$\begin{cases} w_t = \frac{1}{2}w_{yy} \\ w|_{t=0} = y \cos y \end{cases}$$

Обозначим  $y \cos y = w_0(y)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^0(w_0) &= w_0 \\ \Delta^1(w_0) &= (1 \cdot \cos y - y \sin y)'_y = -\sin y - \sin y - y \cos y = -2\sin y - w_0 \\ \Delta^2(w_0) &= \Delta(-2\sin y - w_0) = 2\sin y - (-2\sin y - 2w_0) = 4\sin y + w_0, \\ \vdots & \\ \Delta^n(w_0) &= (-1)^n 2n \sin y + (-1)^n w_0 = (-1)^n (2n \sin y + w_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot t^n (-1)^n (2n \sin y + w_0)}{n!} = \sin y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n 2}{(n-1)!} + w_0 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^n}{n!} = \\ &= \sin y \cdot 2 \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!} + w_0 \cdot e^{-\frac{t}{2}} = w_0 \cdot e^{-\frac{t}{2}} - t \sin y \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^n}{n!} = e^{-\frac{t}{2}} w_0 - t e^{-\frac{t}{2}} \sin y \end{aligned}$$

Таким образом,

$$w(y, t) = e^{-\frac{t}{2}} (y \cos y - t \sin y).$$

Рассмотрим подзадачу для функции  $g$ :

$$\begin{cases} g_t = \frac{1}{2} g_{zz} \\ g|_{t=0} = e^{-z^2} \end{cases}$$

используем формулу Пуассона: (???? а иначе не решается задача? проверю?)

$$\begin{cases} u = u(x_1, \dots, x_n, t) \\ u_t = a^2 \Delta u \\ u|_{t=0} = u_0(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad \text{где } u_0 \text{ — непрерывная и ограниченная в } \mathbb{R}^n$$

Решение дается формулой

$$\Rightarrow u = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n), \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . (для волнового уравнения существует формула Кирхгофа. Однако при использовании формул Пуассона или Кирхгофа необходимо брать интегралы, поскольку требуется выразить ответ в элементарных функциях).

$$g(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{1}{2} t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4 \cdot \frac{1}{2} t}} e^{-\xi^2} d\xi$$

Интеграл Пуассона имеет вид:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , где в нашем случае показатель exp:

$$\begin{aligned} -\xi^2 - \frac{\xi^2 - 2z\xi + z^2}{2t} &= -\frac{1+2t}{2t} \xi^2 + \frac{z}{t} \xi - \frac{z^2}{2t} = \\ &= \left[ -\underbrace{\left(\sqrt{\frac{1+2t}{2t}} \xi\right)^2}_c + 2 \underbrace{\sqrt{\frac{1+2t}{2t}} \xi \cdot \left(\frac{1}{2t} \sqrt{\frac{2t}{1+2t}} z\right)}_c - \underbrace{\frac{z^2}{2t(1+2t)}}_{m^2} \right] - \frac{z^2}{2t} + \frac{z^2}{2t(1+2t)} = \\ &= -(c\xi - m)^2 - \frac{z^2}{(1+2t)} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(c\xi - m)^2} e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}} d\xi = \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(c\xi - m)^2} \frac{d(c\xi - m)}{c} = \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \sqrt{\frac{2t}{1+2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(c\xi - m)^2} d(c\xi - m) = \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+2t}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{1+2t}}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x, y, z, t) = t \cdot e^{-7t} \cos(x + 2y + 3z) + e^{-t/2} \sin x \cdot e^{-t/2} (y \cos y - t \sin y) \cdot \frac{e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{1+2t}}$$



**МФТИ.Карлов-л5.32. Типичное волновое уравнение**

Решить волновое уравнение:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + (x^2 - z^2 + x - 2y + 3z) \cdot e^t \\ u|_{t=0} = \sqrt[3]{x-2y+3z}, \\ u_t|_{t=0} = x^2yz, \end{cases}$$

где  $u = u(x, y, z, t)$ ,  $\Delta = \Delta_{x,y,z}$ .

**Решение**

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\begin{cases} (u_1)_{tt} = \Delta u_1 + (x^2 - z^2 + x - 2y + 3z) \cdot e^t, \\ (u_1)|_{t=0} = 0, \quad (u_1)_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u_2)_{tt} = \Delta u_2 \\ u|_{t=0} = \sqrt[3]{x-2y+3z}, \quad (u_2)_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u_3)_{tt} = \Delta u_3 \\ (u_3)|_{t=0} = 0, \quad (u_3)_t|_{t=0} = x^2yz \end{cases}$$

При решении задачи такого типа могут использоваться приёмы: использование собственной функции оператора Лапласа и нахождение ответа в виде ряда.

Собственной функцией оператора Лапласа в данном случае является

$$g(x, y, z) = (x^2 - z^2 + x - 2y + 3z)$$

- гармоническая функция с собственным числом 0.

1. Ищем  $u_1$ :

$$u(x, y, z, t) = f(t) \cdot g(x, y, z).$$

Подставляем в уравнение и в начальные условия:

$$\Delta(g) = 2 - 2 = 0 = 0 \cdot g,$$

а потому подстановка будет достаточно простой:

$$\begin{cases} f''(t) \cdot g = f(t) \cdot 0 \cdot g + g \cdot e^t \\ f(0) \cdot g = 0, \quad f'(0) \cdot g = 0 \end{cases}.$$

Поскольку функция  $g$  не является тождественно нулевой, то на неё можно сокращать:

$$\begin{cases} f'' = e^t \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \end{cases}$$

Получили задачу Коши. Находим общее решение  $f$  из  $f'(t) = e^t + C_1$ :

$$f(t) = e^t + C_1 t + C_2$$

Для выполнения условий получаем систему:

$$\begin{cases} f(0) = 1 + C_2 = 0 \\ f'(0) = 1 + C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Отсюда

$$u_1(x, y, z, t) = (e^t - t - 1) (x^2 - z^2 + x - 2y + 3z).$$

2. Ищем  $u_2$ :

$$\begin{cases} (u_2)_{tt} = \Delta u_2 \\ u|_{t=0} = \sqrt[3]{x-2y+3z}, \quad (u_2)_t|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

В данном случае необходимо использовать замену переменных. Другие приёмы неприменимы, поскольку корень, стоящий в начальном условии, не является собственной функцией оператора Лапласа, а искать

ответ в виде ряда будет крайне затруднительно. Неоднородность является функцией 3-х переменных, но эти три переменные входят в виде выражения, линейного по ним. Поэтому делаем замену

$$\xi = x - 2y + 3z,$$

а ответ ищется в виде функции:

$$v(\xi(x, y, z), t) = u_2(x, y, z, t).$$

Идея в том, что раз неоднородность в уравнении хоть и трёхмерна, но на самом деле зависит от выражения  $(x - 2y + 3z)$ , то есть шанс найти ответ в соответствующей форме, то есть в виде функции  $v(\xi, t)$ . Это попытка свести задачу к одномерному волновому уравнению. Если это получится, то далее можно будет пользоваться формулой Д'Аламбера. Пересчитаем производные:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= (u_2)_{tt}, & (u_2)_x &= v_\xi \cdot \xi_x = v_\xi \cdot 1, & (u_2)_{xx} &= v_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 = v_{\xi\xi} \cdot 1^2, \\ (2)_{yy} &= v_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 = v_{\xi\xi} \cdot (-2)^2 & (u_2)_{zz} &= v_{\xi\xi} \cdot 3^2 \end{aligned}$$

отсюда получается, что после замены:

$$\begin{cases} v_{tt} = (1 + (-2)^2 + 3^2) v_{\xi\xi}, \\ v|_{t=0} = \sqrt[3]{\xi}, \quad v_t|_{t=0} = 0 \end{cases},$$

лишний множитель, а вид уравнения не меняется - это по-прежнему волновое уравнение, только 5 теперь в  $\mathbb{R}$ . Значит, можно использовать формулу Д'Аламбера. Формула Д'Аламбера применима для задач вида:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot v_{xx}, & v = v(x, t) \\ v|_{t=0} = v_0(x), & v_t|_{t=0} = v_1(x) \end{cases}$$

и имеет вид:

$$v(x, t) = \frac{1}{2} (v_0(x + at) + v_0(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_1(\lambda) d\lambda$$

Необходимые условия:  $v_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $v_1(x) \in C^1(\mathbb{R})$ . внимание не акцентируется. Пользуясь формулой Д'Аламбера, получаем:

$$v(\xi, t) = \frac{1}{2} (\sqrt[3]{\xi + \sqrt{14}t} + \sqrt[3]{\xi - \sqrt{14}t})$$

Приводим к исходным переменным:

$$u_2(x, y, z, t) = \frac{1}{2} (\sqrt[3]{x - 2y + 3z + \sqrt{14}t} + \sqrt[3]{x - 2y + 3z - \sqrt{14}t})$$

Приём, который здесь применялся, называется линейной заменой переменных; этот приём действует только для линейной замены, поскольку иначе изменится тип уравнения. Для волнового уравнения этот приём применим, поскольку задача сводится к одномерной, а для одномерной задачи существует готовая формула - формула Д'Аламбера. 3. Ищем  $u_3$ : Для функции  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$  и задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \Delta u, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

есть готовый ответ (для вывода см. задачу 1):

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n} t^{2n} \Delta^n u_0}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n} t^{2n+1} \Delta^n u_1}{(2n+1)!}.$$

В этом случае ответ более громоздкий, чем в задаче на уравнение теплопроводности, поскольку тут вторая производная по  $t$ . Подобные формулы полезны тогда, когда можно посчитать степени оператора Лапласа от начальных условий, например, в случае начальных условий в виде многочлена или собственной функции оператора Лапласа. Если это невозможно, то данный способ решения ведет в тупик. Для рассматриваемой задачи  $a^2 = 1$ . Находим степени оператора Лапласа от начальных условий:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \Rightarrow \Delta^n u_0 = 0, \\ u_1(x, y, z) &= \Delta^0 (x^2 y z) = x^2 y z \\ \Delta (x^2 y z) &= 2 y z \\ \Delta^2 (x^2 y z) &= 0 \end{aligned}$$

откуда

$$u_3(x, y, z, t) = 0 + \frac{1 \cdot t \cdot x^2 y z}{1!} + \frac{t^3}{3!} \cdot 2 y z.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} u = u_1 + u_2 + u_3 &= (e^t - t - 1) (x^2 - z^2 + x - 2y + 3z) + \\ &+ \frac{1}{2} (\sqrt[3]{x - 2y + 3z + \sqrt{14}t} + \sqrt[3]{x - 2y + 3z - \sqrt{14}t}) + t x^2 y z + \frac{t^3}{3} y z \end{aligned}$$

**В-16.11**

Найти стационарную температуру  $u(r, z)$  внутренних точек цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ , если:

- 1) температура нижнего основания и боковой поверхности цилиндра равна нулю, а температура верхнего основания зависит только от  $r$  (расстояние от оси цилиндра);
- 2) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом, а температура верхнего основания есть функция от  $r$ ;
- 3) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры, а температура верхнего основания есть функция от  $r$ ;
- 4) температура верхнего и нижнего оснований равна нулю, а температура в каждой точке боковой поверхности зависит только от расстояния этой точки до нижнего основания (т. е. от  $z$ );
- 5) основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть заданная функция от  $z$ .

Нахождение решений задач 16.11, 16.12 методом разделения переменных требует применения бесселевых функций (см. с. 247).

**В-16.12**

Найти стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ , если:

- 1) к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $q$ , а боковая поверхность  $r = R$  и верхнее основание  $z = h$  поддерживаются при нулевой температуре;
- 2) к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $q$ , верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

Коэффициенты  $A_n, B_n$  определяются из краевых условий.

Нахождение решений задач 16.11, 16.12 методом разделения переменных требует применения бесселевых функций (см. с. 247).

**В-16.13**

Найти функцию  $u$ , гармоническую внутри шара радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=R} = f(\theta),$$

где:

- 1)  $f(\theta) = \cos \theta$ ;
- 2)  $f(\theta) = \cos^2 \theta$ ;
- 3)  $f(\theta) = \cos 2\theta$ ;
- 4)  $f(\theta) = \sin^2 \theta$ .

**В-16.14**

Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса  $R$  и такую, что  $(u + u_r)|_{r=R} = 1 + \cos^2 \theta$ .

**В-16.15**

Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса  $R$  и такую, что:

- 1)  $u_r|_{r=R} = \sin^2 \theta$
- 2)  $(u - u_r)|_{r=R} = \sin^2 \theta$
- 3)  $u_r|_{r=R} = A \cos \theta$ .

**В-16.16**

Выяснить, разрешима ли внутренняя задача Неймана для шара радиуса  $R$ , если:

- 1)  $u_r|_{r=R} = A \cos \theta$
- 2)  $u_r|_{r=R} = \sin \theta$ . Найти соответствующее решение.

**В-16.17**

Найти гармоническую внутри шарового слоя  $1 < r < 2$  функцию такую, что

$$\text{если: } u|_{r=1} = f_1(\theta), \quad u|_{r=2} = f_2(\theta),$$

- 1)  $f_1 = \cos^2 \theta, \quad f_2 = \frac{1}{8} (\cos^2 \theta + 1)$ ;
- 2)  $f_1 = \cos^2 \theta, \quad f_2 = 4 \cos^2 \theta - \frac{4}{3}$ ;
- 3)  $f_1 = 1 - \cos 2\theta, \quad f_2 = 2 \cos \theta$
- 4)  $f_1 = \frac{1}{2} \cos \theta, \quad f_2 = 1 + \cos 2\theta$ ; 5)  $f_1 = 9 \cos 2\theta, \quad f_2 = 3(1 - 7 \cos^2 \theta)$ .

**В-16.18**

Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса  $R$ , если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ , а основание полусферы - при нулевой температуре.

**В-16.19**

Найти стационарную температуру внутри однородного изотропного шара радиуса  $R$ , если на поверхности шара поддерживается температура

$$u|_{r=R} = \begin{cases} u_1 & \text{при } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ u_2 & \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

**В-16.20**

Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что:

- 1)  $u|_{r=1} = \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) \sin^2 \theta$ ;
- 2)  $u|_{r=1} = (\sin \theta + \sin 2\theta) \sin(\varphi + \frac{\pi}{6})$ ;
- 3)  $u|_{r=1} = \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta)$ ;
- 4)  $u_r|_{r=1} = \sin^{10} \theta \sin 10\varphi$ ,  $u|_{r=0} = 1$ .

**В-16.21**

Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что:

- 1)  $u|_{r=R} = \sin(2\varphi + \frac{\pi}{6}) \sin^2 \theta \cos \theta$ ;
- 2)  $u|_{r=R} = \sin(3\varphi + \frac{\pi}{4}) \sin^3 \theta$ ;
- 3)  $u|_{r=R} = \sin^2 \theta \cos(2\varphi - \frac{\pi}{4}) + \sin \theta \sin \varphi$ ;
- 4)  $(u + u_r)|_{r=R} = \sin^2 \theta [\sqrt{2} \cos(2\varphi + \frac{\pi}{4}) + 2 \cos^2 \varphi]$ ; 5)  $(u + u_r)|_{r=R} = \sin \theta (\sin \varphi + \cos \varphi \cos \theta + \sin \theta)$ .

**В-16.22**

Найти функцию, гармоническую вне единичной сферы и такую, что:

- 1)  $u_r|_{r=1} = \sin(\frac{\pi}{4} - \varphi) \sin \theta$ ;
- 2)  $u|_{r=1} = \cos^2 \theta \sin \theta \sin(\varphi + \frac{\pi}{3})$ .

**В-16.23**

Найти функцию, гармоническую вне сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что:

- 1)  $u|_{r=R} = \sin^3 \theta \cos \theta \cos(3\varphi + \frac{\pi}{4})$ ;
- 2)  $u|_{r=R} = \sin 100\varphi \sin^{100} \theta$ ;
- 3)  $(u - u_r)|_{r=R} = \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{6})$ .

**В-16.24**

Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = f_1(\theta, \varphi)$ ,  $u|_{r=2} = f_2(\theta, \varphi)$ , где:

- 1)  $f_1 = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $f_2 = 0$ ;
- 2)  $f_1 = 3 \sin 2\varphi \sin^2 \theta$ ,  $f_2 = 3 \cos \theta$ ;
- 3)  $f_1 = 7 \sin \theta \cos \varphi$ ,  $f_2 = 7 \cos \theta$ ;
- 4)  $f_1 = \sin^2 \theta (3 - \sin 2\varphi)$ ,  $f_2 = 4f_1$ ; 5)  $f_1 = 12 \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \varphi$ ,  $f_2 = 0$ ; 6)  $f_1 = \sin 2\varphi \sin^2 \theta$ ,  $f_2 = \cos 2\varphi \sin^2 \theta$ ; 7)  $f_1 = \cos \varphi \sin 2\theta$ ,  $f_2 = \sin \varphi \sin 2\theta$ ; 8)  $f_1 = 31 \sin 2\theta \sin \varphi$ ,  $f_2 = 31 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$ ; 9)  $f_1 = \cos \theta$ ,  $f_2 = \cos \varphi (12 \sin \theta - 15 \sin^3 \theta)$ .

**В-16.25**

Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя  $1 < r < 2$  и такую, что:

- 1)  $(3u + u_r)|_{r=1} = 5 \sin^2 \theta \sin 2\varphi$ ,  $u|_{r=2} = -\cos \theta$ ;
- 2)  $u|_{r=1} = \sin \theta \sin \varphi (5 + 6 \cos \theta)$ ,  $u_r|_{r=2} = 12 \sin 2\theta \sin \varphi$ ;
- 3)  $u|_{r=1} = 1$ ,  $u_r|_{r=2} = 15 \cos \varphi (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta)$ .

### В-16.26

Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя  $1/2 < r < 1$  и такую, что:

- 1)  $u|_{r=1/2} = 0, \quad u|_{r=1} = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta;$
- 2)  $u|_{r=1/2} = 30 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta, \quad u|_{r=1} = 0.$

### 14.3.4 Задачи на Функция Грина оператора Лапласа

#### В-17.1

Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ :

- 1) полупространство  $x_3 > 0$ ;
- 2) двугранный угол  $x_2 > 0, x_3 > 0$ ;
- 3) октант  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .

#### В-17.2

Построить функцию Грина для следующих областей в  $R^3$ :

- 1) шар  $|x| < R$ ;
- 2) полушар  $|x| < R, x_3 > 0$ ;
- 3) четверть шара  $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$ ;
- 4) восьмая часть шара  $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ .

#### В-17.3

Пользуясь методом отражений, построить функцию Грина для части пространства, заключенного между двумя параллельными плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = 1$ .

Ниже даны краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона, решения которых могут быть найдены с помощью соответствующей функции Грина из задач 17.1-17.3 и формулы (1).

### МФТИ.Карлов-4 (??)

Краевая задача для уравнений Лапласа и Пуассона на плоскости одна из самых легких и должна решаться минут за 10-15.

Полезные факты для решения задач на рассматриваемую тему Если решается задача  $\Delta v = 0$  в области с кусочно-гладкой границей  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, v \in C^2(\mathcal{D})$ , то в случае круговой области заранее известен ответ: 1) Если

$$\mathcal{D} = \{r < R\},$$

то

$$v(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n r^n \cos(n\varphi) + b_n r^n \sin(n\varphi))$$

(учтено условие, что  $|v(0)| < \infty$ ), т.е. в случае постановки такой задачи необходимо просто найти коэффициенты  $a_n, b_n$ , которые находятся из граничных условий. 2) Если

$$\mathcal{D} = \{r > R\},$$

то

$$v(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{c_n}{r^n} \cos n\varphi + \frac{d_n}{r^n} \sin n\varphi \right)$$

(учтено, что  $|v(\infty)| < \infty$ ). 3) Если

$$D = \{R_1 < r < R_2\},$$

то в этом случае:

$$v(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \left( a_n r^n + \frac{c_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left( b_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) \sin n\varphi \right).$$

Таким образом, для уравнения Лапласа в круговых областях (с центром в нуле) ответ заранее известен с точностью до коэффициентов.

Половина коэффициентов пропадает в случае 1 (случае 2), потому что функция должна быть гармонической, иметь вторые непрерывные частные производные в области и быть ограниченной в нуле (бесконечности).

Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta_{r,\varphi} u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Эти факты необходимо знать для решения задач на данную тему.

**Задача 1.**

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{8}{r^2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right), & r > 2, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \\ u|_{r=2} = \sin^4 \varphi & |u(\infty)| < \infty \end{cases}$$

**Комментарии:** Это не уравнение Лапласа, а уравнение Пуассона, поскольку правая часть не равна 0. Для того чтобы воспользоваться формулами, выписанными выше, необходимо свести задачу к однородному уравнению. Это и есть первый шаг решения. Однородность зависит от  $r$  и  $\varphi$ , поэтому оператор Лапласа необходимо записать в полярных координатах. Также для решения этой задачи полезно помнить школьные тригонометрические формулы (например, понижения степени и кратных углов - больше 4-ой степени обычно не требуется). Далее, не обязательно раскладывать функцию  $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$  на сумму тригонометрических функций, дабы воспользоваться формулами, ибо достаточно оставить её в свернутом виде.

**Решение:** 1) <Комментарий (здесь и далее выделен курсивом) - сводим к однородному уравнению путём подбора Функции  $g(r, \varphi) : \Delta g = \frac{8}{r^2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ . Таких функций бесконечно много, и среди них нужно подобрать оптимальную. После подбора уравнение запишется в виде  $\Delta v = 0$ , а ответ -  $v + g$ .

Ищем неоднородность в виде  $g(r, \varphi) = f(r) \cdot \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ , поскольку при подстановке этого произведения в уравнение каждое слагаемое в операторе Лапласа будет умножено на  $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ , так как  $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$  - собственная функция для второй производной (при дифференцировании она умножится на число). Можно искать и другими путями, но этот способ наиболее простой. Ищем  $f(r)$ , подставляя в уравнение:

$$f''(r) \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f'(r) \cdot \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)}{r} - \frac{16 \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) f(r)}{r^2} = \frac{8}{r^2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

Т.к. множитель  $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$  присутствует у каждого слагаемого, то на него можно сократить. Потери корней при этом не произойдёт, поскольку исходное уравнение функционально, то есть выполняется при всех значениях аргументов, а  $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0$ ,  $\Rightarrow$

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{16f}{r^2} = \frac{8}{r^2}.$$

Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Домножим на  $r^2$ :

$$r^2 f''(r) + r \cdot f'(r) - 16f(r) = 8,$$

т.е. это уравнение Эйлера. Сделаем замену:  $r = e^t$ , тогда

$$y(t) = f(r), f'(r) = \frac{y'(t)}{e^t}, f'' = \frac{y''(t) - y'(t)}{e^{2t}}.$$

Подставляем в уравнение (переменные коэффициенты  $e^t$  и  $e^{2t}$  сократятся):

$$(y''(t) - y'(t)) + y'(t) - 16 \cdot y(t) = 8, \Rightarrow y'' - 16 \cdot y = 8.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t},$$

но это можно не писать, поскольку нужна всего лишь одна любая функция, т.е. можно считать  $C_1 = C_2 = 0$ . Частное решение:  $y(t) = A$ , т.е.  $0 - 16A = 8, A = -\frac{1}{2}$ . 2 Таким образом:

$$g(r, \varphi) = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

По ходу решения было важно знать вид оператора Лапласа в полярных координатах, алгоритм решения уравнения Эйлера в частности и решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в общем. Ответ в исходной задаче будем искать в виде  $u(r, \varphi) = v(r, \varphi) + g(r, \varphi)$ , т.е.  $v$  будет решением однородного уравнения, и для его поиска применимы формулы для уравнения Лапласа. Подставляем  $u = v + g$  в уравнение и в граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{8}{r^2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \Delta u = \Delta v + \Delta g, & r > 2 \\ \sin^4 \varphi = u|_{r=2} = v|_{r=2} + g|_{r=2} = v|_{r=2} - \frac{1}{2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, & r > 2 \\ v|_{r=2} = \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

2) На этом этапе можно пользоваться формулами для решения уравнения Лапласа, но для этого надо граничные условия разложить по функциям Фурье. Это заведомо возможно, поскольку функции Фурье образуют базис на отрезке  $[0, 2\pi]$ , но задачи составляются так, что фактически никакого ряда не будет, поскольку ряд будет сходиться (сумма будет конечной). В контрольной работе метод Фурье используется в 2-3 задачах, и наиболее полно он представлен в смешанной задаче на отрезке, где будет ряд, а в остальных задачах, как здесь, будет конечная сумма. Разложим граничное условие по функциям Фурье. Для этого преобразуем:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2},$$

$$\sin^4 \varphi = (\sin^2 \varphi)^2 = \left( \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} = \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}}{4} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8}.$$

При этом второе слагаемое в правой части граничного условия  $\frac{1}{2} \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6})$  раскладывать не будем, поскольку её можно включить в функции Фурье (это уменьшит число вычислений). Таким образом, задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & r > 2 \\ v|_{r=2} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8} + \frac{1}{2} \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

Учитывая полученное разложение, достаточно искать ответ в виде:

$$v(r, \varphi) = a_0 + \frac{a_2}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{a_4}{r^4} \cos 4\varphi + \frac{\tilde{a}_4}{r^4} \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6})$$

Все другие коэффициенты  $a_n \equiv 0, b_n \equiv 0$ , поэтому их можно не писать.

3) Подставляем  $v(r, \varphi)$  в граничное условие и находим коэффициенты:  $\frac{3}{8} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8} - \frac{1}{2} \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6}) = v|_{r=2} = a_0 + \frac{a_2}{4} \cos 2\varphi + \frac{a_4}{16} \cos 4\varphi + \frac{\tilde{a}_4}{16} \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6})$ , где равенство верно  $\forall \varphi \in [0; 2\pi]$ . Поскольку функции Фурье линейно независимы на этом отрезке, то можно приравнять коэффициенты перед соответствующими базисными функциями:

$$\begin{cases} 1 : & \frac{3}{8} = a_0 \\ \cos 2\varphi : & -\frac{1}{2} = \frac{a_2}{4} \\ \cos 4\varphi : & \frac{1}{8} = \frac{a_4}{16} \\ \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6}) : & \frac{1}{2} = \frac{\tilde{a}_4}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{3}{8} \\ a_2 = -2 \\ a_4 = 2 \\ \tilde{a}_4 = 8 \end{cases}$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{2} \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6}) + \frac{3}{8} - \frac{2}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{2}{r^4} \cos 4\varphi + \frac{8}{r^4} \cos(4\varphi + \frac{\pi}{6})$$

## Задача 2.

$$\begin{cases} \Delta u = 40x, \\ u|_{r=1} = 5 \cos \varphi + \cos 2\varphi \\ u|_{r=2} = -9 \cos^2 \varphi \end{cases} \quad 1 < r < 2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

Решение: 1) Первым делом сведём к однородному уравнению, т.е. находим какое-нибудь решение уравнения без учета граничных условий, т.е. ищем одну из функций  $g(x, y) : \Delta g = 40x, \Delta g = g_{xx} + g_{yy}$ . Например,  $g = \frac{20}{3}x^3$  (Можно было бы взять любую функцию, например,  $g = \frac{20}{3}x^3 + 2011y$ , но это затруднило бы вычисления). Ищем ответ в виде  $u = v + g$ , подставляем в уравнение и в граничные условия: 1.1)  $\Delta v = 0$  (функция  $g$  именно так и подбиралась) 1.2)

$$\begin{aligned} 5 \cos \varphi + \cos 2\varphi &= u|_{r=1} = v|_{r=1} + g|_{r=1} = \\ &= / * \text{ переводим в полярные координаты } g(x, y) * / = \\ &= v|_{r=1} + \frac{20}{3} r^3 \cos^3 \varphi \Big|_{r=1} \\ v|_{r=1} &= 5 \cos \varphi + \cos 2\varphi - \frac{20}{3} r^3 \cos^3 \varphi \Big|_{r=1} = 5 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi - \frac{20}{3} \cos^3 \varphi \end{aligned}$$

1.3)

$$-9 \cos^2 \varphi = u_r|_{r=2} = v_r|_{r=2} + g_r|_{r=2} = v_r|_{r=2} + \frac{20}{3} \cdot 3r^2 \cos^3 \varphi \Big|_{r=2} = v_r|_{r=2} + 20 \cdot 4 \cdot \cos^3 \varphi.$$

Таким образом, задача свелась к:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 1 < r < 2 \\ v|_{r=1} = 5 \cos \varphi + \cos 2\varphi - \frac{20}{3} \cos^3 \varphi \\ v_r|_{r=2} = -9 \cos^2 \varphi - 80 \cdot \cos^3 \varphi \end{cases}$$

2) Раскладываем граничные условия по функциям Фурье. Для тройных углов и кратных степеней тригонометрических функций справедливы тождества:

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\ \sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \\ \cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \\ \cos^3 \varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi}{4} \\ \sin^3 \varphi = \frac{3 \sin \varphi - \sin 3\varphi}{4} \end{cases}$$

Таким образом: 1)

$$v|_{r=1} = 5 \cos \varphi + \cos 2\varphi - \frac{5}{3} \cos 3\varphi - 5 \cos \varphi = \cos 2\varphi - \frac{5}{3} \cos 3\varphi$$

2)

$$v_r|_{r=2} = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \cos 2\varphi - 20 \cos 3\varphi - 60 \cos \varphi.$$

Заметим, что граничные условия представимы с помощью 4 базисных функций Фурье, т.е. учитывая разложение граничных условий, достаточно искать ответ в виде:

$$v(r, \varphi) = (a_0 + b_0 \ln r) + \left(a_1 r + \frac{c_1}{r}\right) \cos \varphi + \left(a_2 r^2 + \frac{c_2}{r^2}\right) \cos 2\varphi + \left(a_3 r^3 + \frac{c_3}{r^3}\right) \cos 3\varphi.$$

Задача после разложения граничных условий имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 1 < r < 2 \\ v|_{r=1} = \cos 2\varphi - \frac{5}{3} \cos 3\varphi \\ v_r|_{r=2} = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \cos 2\varphi - 20 \cos 3\varphi - 60 \cos \varphi \end{cases}$$

 3) Подставляем  $v(r, \varphi)$  в граничные условия и ищем коэффициенты:

$$\begin{cases} v|_{r=1} = (a_0 + 0) + (a_1 + c_1) \cos \varphi + (a_2 + c_2) \cos 2\varphi + (a_3 + c_3) \cos 3\varphi \\ v_r|_{r=2} = 0 + \frac{b_0}{2} + (a_1 - \frac{c_1}{4}) \cos \varphi + (4a_2 - \frac{1}{4}c_2) \cos 2\varphi + (12a_3 - \frac{3}{16}c_3) \cos 3\varphi \end{cases}.$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих базисных функциях:

$$\begin{aligned} 1 : \quad 1 : & \begin{cases} 0 = a_0 \\ -\frac{9}{2} = \frac{b_0}{2} \end{cases} \\ \cos \varphi : & \begin{cases} 0 = a_1 + c_1 \\ -60 = a_1 - \frac{c_1}{4} \end{cases} \\ \cos 2\varphi : & \begin{cases} 1 = a_2 + c_2 \\ -\frac{9}{2} = 4a_2 - \frac{c_2}{4} \end{cases} \\ \cos 3\varphi : & \begin{cases} -\frac{5}{3} = a_3 + c_3 \\ -20 = 12a_3 - \frac{3}{16}c_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Откуда находятся коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= -9 \\ a_1 &= -48, & c_1 &= 48 \\ a_2 &= -1, & c_2 &= 2 \\ a_3 &= -\frac{5}{3}, & c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{20}{3} \cdot r^3 \cdot \cos^3 \varphi - 9 \ln r + 48 \left(-r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + \left(-r^2 + \frac{2}{r^2}\right) \cos 2\varphi - \frac{5}{3} r^3 \cos 3\varphi$$



Ответы на вопросы: 1) Всегда ли в ответе одна функция? Ответ: бывают случаи, когда данная задача имеет бесконечно много решений (часто пример такой дают в домашнем задании). Например, задача Неймана в ограниченной области:

$$\begin{cases} \Delta u = f(r, \varphi), \\ u_r|_{r=R} = u_0(\varphi) \end{cases}.$$

В случае задачи Неймана на границе области отслеживается только производная функции по направлению нормали. Если бы учитывалась только сама функция, то такая задача называлась бы задачей Дирихле. Задача Неймана имеет бесконечно много решений, поскольку если  $u$  - ответ, то  $u + C$  - ответ  $\forall C \in \mathbb{R}$ . В неограниченной области так бы не вышло. В контрольной такие задачи бывают. Принципиально ход решения это не меняет. В ходе решения при поиске коэффициентов выйдет выражение типа  $a_0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a_0$  - любое.

### В-17.4

Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(x), \quad x_3 > 0; \quad u|_{x_3=0} = u_0(x),$$

для следующих  $f$  и  $u_0$ :

- 1)  $f, u_0$  - непрерывны и ограничены;
- 2)  $f = 0, \quad u_0 = \cos x_1 \cos x_2$
- 3)  $f = e^{-x_3} \sin x_1 \cos x_2, \quad u_0 = 0;$
- 4)  $f = 0, \quad u_0 = \theta(x_2 - x_1);$  5)  $f = 0, \quad u_0 = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$  6)  $f = 2 \left[ x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 \right]^{-2}, \quad u_0 = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1}$  7)  $f = 0, \quad u_0 = \begin{cases} -1, & x_1 < 0 \\ +1, & x_1 > 0 \end{cases}$

### В-17.5

Найти решение задачи Дирихле  $\Delta u = 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad u|_S = u_0(x)$   $u_0$  - кусочно непрерывна и ограничена.

### В-17.6

Решить задачу 17.5 со следующими  $u_0$ :

- 1)  $u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2;$
- 2)  $u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = x_2 (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-3/2};$
- 3)  $u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = \theta(x_2 - |x_1|).$

### В-17.7

Найти решение задачи Дирихле для шара  $|x| < R$ :  $\Delta u = -f(x), \quad |x| < R, \quad u|_{|x|=R} = u_0(x).$

### В-17.8

Решить задачу 17.7 для следующих  $f$  и  $u_0$ :

- 1)  $f = a = \text{const}, \quad u_0 = 0;$
- 2)  $f = |x|^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad u_0 = a;$
- 3)  $f = e^{|x|}, \quad u_0 = 0.$

### В-17.9

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для полушара  $|x| < R, \quad x_3 > 0.$

### В-17.10

Найти решение уравнения Пуассона  $\Delta u = -f(|x|), f \in C(a \leq |x| \leq b)$  в шаровом слое  $a < |x| < b$ , удовлетворяющее краевым условиям  $u|_{|x|=a} = 1, \quad u|_{|x|=b} = 0.$

Функцией Грика задачи Дирихле для области  $G \subset \mathbb{R}^2$  является

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g(z, \zeta)$$

$z = x + iy \in \bar{G}, \zeta = \xi + i\eta \in G, \mathcal{G}(z, \zeta)$  обладает всеми свойствами функции Грина в  $R^3$  (см. начало §17). Решение задачи Дирихле  $\Delta u = -f(z), z \in G; u|_S = u_0(z)$  в  $R^2$  (если оно существует) определяется формулой, соответствующей формуле (1) в  $R^2$ . В случае, когда область  $G$  - односвязная с достаточно гладкой границей  $S$  и известна некоторая функция  $w = w(z)$ , конформно отображающая  $G$  на единичный круг  $|w| < 1$ , функция Грина находится по формуле

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\omega(z, \zeta)|}, \quad \omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(z)}w(\zeta)}$$

**В-17.11**

Найти функцию Грина для областей:

- 1) полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ ;
- 2) четверть плоскости  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ;
- 3) круг  $|z| < R$ ;
- 4) полукруг  $|z| < R, \text{Im } z > 0$ ; 5) четверть круга  $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ; 6) полоса  $0 < \text{Im } z < \pi$ ; 7) пологоса  $0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z > 0$ .

**В-17.12**

Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad u|_{y=0} = u_0(x)$$

для следующих  $u_0(x)$ :

- 1)  $u_0(x)$  кусочно непрерывна и ограничена;
- 2)  $u_0(x) = \theta(x - a)$
- 3)  $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$
- 4)  $u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$  5)  $u_0(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ; 6)  $u_0(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$  7)  $u_0(x) = \cos x$ .

**В-17.13**

Найти решение уравнения  $\Delta u = 0$  в первом квадранте  $x > 0, y > 0$  со следующими краевыми условиями:

- 1)  $u|_S = u_0(x, y)$  - кусочно непрерывная, ограниченная функция,  $S$  состоит из полупрямых  $\{x = 0, y \geq 0\}$  и  $\{y = 0, x \geq 0\}$ ;
- 2)  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$ ; 3)  $u|_{x=0} = a, \quad u|_{y=0} = b$ ;
- 4)  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \theta(x-1)$ ; 5)  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \frac{x}{(1+x^2)^2}$  6)  $u|_{x=0} = \sin y, \quad u|_{y=0} = \sin x$ .

**В-17.14**

Найти решение задачи Дирихле для уравнения  $\Delta u = 0, 0 < y < \pi$  со следующими краевыми условиями: известна некоторая функция  $w = w(z)$ , конформно отображающая  $G$  на единичный круг  $|w| < 1$ , функция Грина находится по формуле

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\omega(z, \zeta)|}, \quad \omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(z)}w(\zeta)}$$

**В-17.15**

Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в пологосе  $0 < y < \pi, x > 0$ , со следующими краевыми условиями:

- 1)  $u|_{x=0} = 1, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0$ ;
- 2)  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \sin x, \quad u|_{y=\pi} = 0$ ;
- 3)  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \text{th } x, \quad u|_{y=\pi} = \text{th } x$ ;
- 4)  $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \text{th } x$ .

**В-17.16**

Найти решение уравнения Пуассона  $\Delta u = -f(z)$  в круге  $|z| < R$  при краевом условии  $u|_{|z|=R} = u_0(z)$  для следующих  $f$  и  $u_0$ :

- 1)  $f, u_0$  - непрерывные функции;
- 2)  $f = a, \quad u_0 = b$ ;
- 3)  $f = |z|^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad u_0 = 0$ ;
- 4)  $f = \sin |z|, \quad u_0 = 0$ ; 5)  $f = 0, \quad u_0 = \cos \varphi, \quad \varphi = \arg z, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$ .

**В-17.17**

Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в полукруге  $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ , при условии  $u|_S = u_0(z)$ ,  $S$  - граница полукруга, для следующих  $u_0(z)$ :

- 1)  $u_0(z)$  - кусочно непрерывная функция;
- 2)  $u_0|_{r=1} = \sin \varphi, \quad u_0|_{\varphi=0} = 0, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 0, \quad r = |z|, \varphi = \arg z, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$
- 3)  $u_0|_{r=1} = 0, \quad u_0|_{\varphi=0} = 1, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 1;$
- 4)  $u_0|_{r=1} = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad u_0|_{\varphi=0} = \sqrt{r}, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 0.$

**В-17.18**

Найти решение задачи Дирихле  $\Delta u = 0, \operatorname{Re} z > 0, |z - 5| > 3; u|_{\operatorname{Re} z=0} = 0, u|_{|z-5|=3} = 1.$

**14.3.5 Задачи на Метод потенциалов****В-18.1**

Пусть  $\rho$  - абсолютно интегрируемая функция,  $\rho = 0$  вне  $\bar{G} \subset R^n$ . Доказать: а) объемный потенциал выражается формулой

$$V_n(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad n \geq 3;$$

б)  $V_n$  - гармоническая функция вне  $\bar{G}$ ; в)  $V_3(x) = \frac{1}{|x|} \int_G \rho(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$ . Выяснить физический смысл этих потенциалов.

**В-18.2**

Пусть  $\rho$  - абсолютно интегрируемая функция,  $\rho = 0$  вне  $\bar{G} \subset R^2$ . Доказать: а) потенциал площади выражается формулой

$$V_2(x) = \int_G \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy;$$

б)  $V_2$  - гармоническая функция вне  $\bar{G}$ ; в)  $V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int_G \rho(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$ . Выяснить физический смысл этих потенциалов.

**В-18.3**

Пусть  $S$  - ограниченная кусочно гладкая двусторонняя поверхность и  $\mu, \nu \in C(S)$ . Доказать: а) потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$V_3^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y,$$

$$V_3^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y$$

где угол  $\varphi_{xy}$  определен в начале §18; б)  $V_3^{(0)}$  и  $V_3^{(1)}$  - гармонические функции вне  $S$ ; в)  $V_3^{(0)}(x) = \frac{1}{|x|} \int_S \mu(y) dS + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$  и  $V_3^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), |x| \rightarrow \infty$ . Выяснить физический смысл этих потенциалов.

**В-18.4**

Пусть  $S$  - ограниченная кусочно гладкая кривая и  $\mu, \nu \in C(S)$ . Доказать: а) логарифмические потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$V_2^{(0)}(x) = \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y$$

$$V_2^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|} dS_y,$$

где угол  $\varphi_{xy}$  определен в тексте; б)  $V_2^{(0)}$  и  $V_2^{(1)}$  - гармонические функции вне  $S$ ; в)  $V_2^{(0)}(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int_S \mu(\zeta) d\zeta + O\left(\frac{1}{|x|}\right), V_2^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty$ . Выяснить физический смысл этих потенциалов.

**В-18.5**

- 1) Вычислить ньютонов потенциал  $V_3$  с плотностью  $\delta_{S_r}$ ;
- 2) вычислить логарифмический потенциал  $V_2$  с плотностью  $\delta_{S_r}$ .

**В-18.6**

Вычислить объемный потенциал  $V_3$  для шара  $|x| < R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho(|x|) \in C$
- 2)  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ;
- 3)  $\rho = |x|$ ;
- 4)  $\rho = |x|^2$ ; 5)  $\rho = \sqrt{|x|}$  6)  $\rho = e^{-|x|}$  7)  $\rho = \frac{1}{1+|x|^2}$  8)  $\rho = \sin |x|$  9)  $\rho = \cos |x|$

**В-18.10**

Найти потенциал площади для круга  $r < R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho(r) \in C([0, R])$ ;
- 2)  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ;
- 3)  $\rho = r$ ;
- 4)  $\rho = r^2$ ; 5)  $\rho = e^{-r}$ ; 6)  $\rho = \frac{1}{1+r^2}$  7)  $\rho = \sqrt{r}$ ; 8)  $\rho = \sin r$ ; 9)  $\rho = \cos r$  10)  $\rho = \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ; 11)  $\rho = \cos \varphi$ ; 12)  $\rho = \rho(\varphi)$  - непрерывная,  $2\pi$ -периодическая функция.

**В-18.11**

Найти логарифмический потенциал площади для кольца  $R_1 < r < R_2$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ;
- 2)  $\rho = \rho(r) \in C([R_1, R_2])$ .

**В-18.12**

Пусть  $f(|y|)$  непрерывна при  $|y| \leq R$  и  $f(|y|) = 0$  при  $|y| > R, y \in R^3$ . Доказать: а) объемный потенциал  $V_3(x)$  с плотностью  $f(|y|)$  зависит только от  $|x|$  и

$$V_3(x) = \frac{1}{|x|} \int_{|y| < r} f(|y|) dy, \quad |x| > R;$$

б) для того чтобы  $V_3(x)$  обратился в нуль при  $|x| > R$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int f(|y|) dy = 0$$

в) при условии (\*) справедливо равенство

$$\int V_3(x) dx = -\frac{2\pi}{3} \int f(|y|) |y|^2 dy.$$

Дать физическую интерпретацию полученных равенств.

**В-18.13**

Доказать: если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(|x|)$  непрерывны при  $|x| \leq R; x \in R^3$ , обращаются в нуль при  $|x| > R$  и удовлетворяют уравнению

$$\Delta f_1(x) = D^\alpha f_2(|x|),$$

то потенциал  $V_3(x)$  с плотностью  $f_2(|x|)$  обращается в нуль при  $|x| > R$ .

**В-18.14**

Доказать результаты, аналогичные результатам задач 18.12 и 18.14 для потенциала площади, а именно:

- 1)  $V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int_{|y| < r} f(|y|) dy, |y| > R$ ;
- 2)  $\int V_2(x) dx = -\frac{\pi}{2} \int f(|y|) |y|^2 dy$ , если  $\int f(|y|) dy = 0$ .

**В-18.15**

Распространить задачи 18.12-18.14 на случай, когда плотность  $f$  есть обобщенная функция. Под «интегралом»  $\int f(x)dx$  для финитной  $f \in \mathcal{D}'$  следует понимать число  $(f, \eta)$ ,  $\eta \in \mathcal{D}$ ,  $\eta \equiv 1$  в окрестности носителя  $f$  (это число не зависит от выбора вспомогательной функции  $\eta$ ).

**В-18.16**

Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере  $|x| = R$ .

**В-18.17**

В точке, лежащей на оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), найти потенциал простого слоя, распределенного на сфере  $r = R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\mu$  пропорциональна квадрату расстояния от плоскости  $\theta = \pi/2$ ;
- 2)  $\mu = \sin \frac{\theta}{2}$ ;
- 3)  $\mu = e^\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и  $\mu = e^{2\pi-\varphi}$ ,  $\pi \leq \varphi < 2\pi$ .

**В-18.18**

На круглом диске радиуса  $R$  распределен простой слой с плотностью  $\mu$ . Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска для следующих плотностей:

- 1)  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ;
- 2)  $\mu = r$ ;
- 3)  $\mu = r^2$ ;
- 4)  $\mu = \mu(\varphi)$  - непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция.

**В-18.19**

Найти потенциал простого слоя, распределенного с плотностью  $\mu$  на цилиндре

$$\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq H\}$$

в точке, лежащей на оси  $x_3$  для следующих плотностей:

- 1)  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ;
- 2)  $\mu = \mu(\varphi)$  - непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция.

**В-18.20**

Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью  $\nu_0$  для сферы  $|x| = R$ .

**В-18.21**

На сфере  $r = R$  распределены диполи с плотностью момента  $\nu$ , ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси  $\theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), для следующих плотностей:

- 1)  $\nu = \cos \theta$ ;
- 2)  $\nu = \sin \frac{\theta}{2}$ ;
- 3)  $\nu = e^\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и  $\nu = e^{2\pi-\varphi}$ ,  $\pi \leq \varphi < 2\pi$ ;
- 4)  $\nu = \nu(\varphi)$  - непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция; 5)  $\nu$  равна квадрату расстояния от плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

**В-18.22**

На круглом диске радиуса  $R$  распределены диполи с плотностью момента  $\nu$ , ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных  $x_3$ . Найти потенциал двойного слоя в точке, лежащей на оси диска, для следующих плотностей:

- 1)  $\nu = \text{const}$ ;
- 2)  $\nu = \nu(r) \in C([0, R])$ ;
- 3)  $\nu = \nu(\varphi)$  - непрерывная,  $2\pi$ -периодическая функция;
- 4)  $\nu = r + \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и  $\nu = r + 2\pi - \varphi$ ,  $\pi \leq \varphi < 2\pi$ .

**В-18.23**

Найти логарифмический потенциал простого слоя для окружности радиуса  $R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ;
- 2)  $\mu = \cos^2 \varphi$ ,  $R = 2$ .

**В-18.24**

Найти логарифмический потенциал двойного слоя для окружности радиуса  $R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\nu = \text{const}$ ;
- 2)  $\nu = \sin \varphi$ .

**В-18.25**

Найти логарифмический потенциал простого слоя для отрезка  $-a \leq x \leq a, y = 0$  со следующими плотностями:

- 1)  $\mu = \text{const}$ ;
- 2)  $\mu = -\mu_0, -a \leq x < 0$ , и  $\mu = \mu_0, 0 < x \leq a$ ;

**В-18.26**

Найти логарифмический потенциал двойного слоя для отрезка  $-a \leq x \leq a, y = 0$  со следующими плотностями:

- 1)  $\nu = \text{const}$ ;
- 2)  $\nu = -\nu_0, -a \leq x < 0$ , и  $\nu = \nu_0, 0 < x \leq a$ ;
- 3)  $\nu = x$

4)  $\nu = x^2$ . Пусть  $\rho(x)$  - финитная обобщенная функция. Свертки  $V = -4\pi \mathcal{E} * \rho$  и  $\bar{V} = -4\pi \bar{\mathcal{E}} * \rho$ , где

$$\mathcal{E} = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \bar{\mathcal{E}} = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$$

- фундаментальные решения оператора Гельмгольца  $\Delta + k^2$  в  $R^3$ , являются аналогами ньютонова потенциала. Потенциалы  $V$  и  $\bar{V}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = -4\pi \rho$ .

Так же определяются аналоги потенциалов простого и двойного слоев.

То же для оператора  $\Delta - k^2$ . Здесь аналогом ньютонова потенциала является  $V_* = -4\pi \mathcal{E}_* * \rho$ ,  $\mathcal{E}_* = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$  - фундаментальное решение оператора  $\Delta - k^2$  в  $R^3$ .

**В-18.27**

Пусть  $\rho$  - абсолютно интегрируемая функция и  $\rho(x) = 0, x \in G_1 = R^3 \setminus \bar{G}$ . Доказать:

- 1)  $V, \bar{V}$  и  $V_*$  выражаются формулами

$$V(x) = \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy, \quad \bar{V}(x) = \int_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy$$

$$V_*(x) = \int_G \frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|} \rho(y) dy$$

2)  $V, \bar{V}$  и  $V_* \in C^1(R^3) \cap C^\infty(G_1)$  удовлетворяют в области  $G_1$  однородным уравнениям  $\Delta u + k^2 u = 0$  и  $\Delta u - k^2 u = 0$  соответственно;

- 3)  $V$  и  $\bar{V}$  удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} \mp iku(x) = o(|x|^{-1})$$

$$|x| \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad V_*(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

**В-18.28**

Для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал  $V$  для шара  $|x| < R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho(|x|) \in C(\bar{U}_r)$
- 2)  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ;
- 3)  $\rho = e^{-|x|}$ .

**В-18.29**

Для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал  $V$  для сферического слоя  $R_1 < |x| < R_2$  с постоянной плотностью  $\rho_0$ .

**В-18.30**

- 1) Для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал простого слоя  $V^{(0)}$ , распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере;  
 2) для оператора  $\Delta + k^2$  вычислить потенциал двойного слоя  $V^{(1)}$ , распределенного с постоянной плотностью  $\nu_0$  на сфере.

**В-18.31**

Для оператора  $\Delta - k^2$  вычислить потенциал  $V_*$  для шара  $r < R$  со следующими плотностями:

- 1)  $\rho = \rho(|x|) \in C(\bar{U}_r)$
- 2)  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ;
- 3)  $\rho = e^{-|x|}$ .

**В-18.32**

- 1) Для оператора  $\Delta - k^2$  вычислить потенциал простого слоя  $V_*^{(0)}$ , распределенного с постоянной плотностью  $\mu_0$  на сфере;  
 2) для оператора  $\Delta - k^2$  вычислить потенциал двойного слоя  $V_*^{(1)}$ , распределенного с постоянной плотностью  $\nu_0$  на сфере.

**В-18.33**

- 1) Предполагая границу  $S$  области  $G \subset R^3$  поверхностью Ляпунова, доказать, что

$$V_3^{(1)}(x) = \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ -2\pi, & x \in S \\ 0, & x \in R^3 \setminus \bar{G}, \end{cases}$$

где угол  $\varphi_{xy}$  определен в начале параграфа;

- 2) предполагая границу  $S$  области  $G \subset R^2$  кривой Ляпунова, доказать, что

$$V_2^{(1)}(x) = \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|} dS_y = \begin{cases} -2\pi, & x \in G \\ -\pi, & x \in S \\ 0, & x \in R^2 \setminus \bar{G} \end{cases}$$

**В-18.37**

Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра  $0 \leq r < R$  при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью  $f(r, \varphi)$  и на границе  $r = R$  поддерживается температура  $u_0^-(R, \varphi)$  для следующих  $f$  и  $u_0^-$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_0^- = 0$ ;
- 2)  $f = r$ ,  $u_0^- = 0$ ;
- 3)  $f = r^2$ ,  $u_0^- = a$ ;
- 4)  $f = e^{-r}$ ,  $u_0^- = \sin \varphi$ ; 5)  $f = \sin r$ ,  $u_0^- = \cos \varphi$ ; 7)  $f = \cos \varphi$ ,  $u_0^- = \cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$ . 6)  $f = \sin \varphi$ ,  $u_0^- = \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$ ;

**В-18.38**

С помощью потенциала простого слоя решить задачу Неймана для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

**В-18.39**

Найти плотность диффундирующего вещества при стационарном процессе  $U(r, \varphi, z)$  внутри и вне бесконечного цилиндра радиуса  $R$  при условии, что источники вещества отсутствуют и коэффициент диффузии  $D = \text{const}$ , а на границе поддерживается заданный поток диффузии  $u_1$  для следующих  $u_1$ :

- 1)  $u_1 = \text{const}$ ;
- 2)  $u_1 = \sin \varphi$
- 3)  $u_1 = \cos \varphi$ .

**В-18.40**

Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра радиуса  $R$  при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью  $f(r, \varphi)$  и на границе поддерживается заданный поток тепла  $u_1^-(R, \varphi)$  для следующих  $f$  и  $u_1^-$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_1^- = -\frac{f_0 r}{2k}$ ;
- 2)  $f = r$ ,  $u_1^- = -\frac{R^3}{3}$ , коэффициент теплопроводности  $k = 1$ ;
- 3)  $f = \frac{1}{1+r^2}$ ,  $u_1^- = \frac{\ln(1+R^2)}{r}$ ,  $k = 1$ ;
- 4)  $f = \sin \varphi$ ,  $u_1^- = \sin \varphi$ ,  $k = 1$ ; 5)  $f = \cos \varphi$ ,  $u_1^- = \cos \varphi$ ,  $k = 1$ .

**В-18.42**

Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла при условии, что его граница заряжена до потенциала  $V_0 = \text{const}$  для следующих случаев:

- 1)  $x > 0, y > 0, -\infty < z < \infty$
- 2)  $0 < \varphi < \varphi_0, \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, 0 \leq r < \infty$ .

**В-18.43**

С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара  $|x| < R$ .

**В-18.44**

Найти стационарное распределение температуры в шаре  $r < R$  при условии, что в шаре выделяется тепло с плотностью  $f$  и на границе  $r = R$  поддерживается температура  $u_0^-$  для следующих  $f$  и  $u_0^-$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_0^- = 0$ ;
- 2)  $f = r$ ,  $u_0^- = a$ ;
- 3)  $f = \sqrt{r}$ ,  $u_0^- = \frac{2}{7}R^{5/2}$ ,  $k = 1$ .

**В-18.45**

Доказать, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара  $r < R$  определяется формулой

$$U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho}$$

$u$  - интеграл Пуассона для шара, т. е.

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0^-(R, \theta_1, \varphi_1) \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

$\gamma$  - угол между радиусами-векторами точек  $(\rho, \theta, \varphi)$  и  $(R, \theta_1, \varphi_1)$  и  $u_0^- = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=R} = u|_{\rho=R}$ .

Указание. Доказать, что если  $u(\rho, \theta, \varphi), u(0) = 0$  - гармоническая функция в области, содержащей начало координат, то и функция  $U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho}$  является гармонической. Далее воспользоваться условием разрешимости задачи, а именно  $\int_{r=R} u_0^- dS = 0$ .

**В-18.42**

Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла при условии, что его граница заряжена до потенциала  $V_0 = \text{const}$  для следующих случаев:

- 1)  $x > 0, y > 0, -\infty < z < \infty$
- 2)  $0 < \varphi < \varphi_0, \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, 0 \leq r < \infty$ .

**В-18.43**

С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара  $|x| < R$ .



**В-18.44**

Найти стационарное распределение температуры в шаре  $r < R$  при условии, что в шаре выделяется тепло с плотностью  $f$  и на границе  $r = R$  поддерживается температура  $u_0^-$  для следующих  $f$  и  $u_0^-$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_0^- = 0$ ;
- 2)  $f = r$ ,  $u_0^- = a$ ;
- 3)  $f = \sqrt{r}$ ,  $u_0^- = \frac{2}{7}R^{5/2}$ ,  $k = 1$ .

**В-18.45**

Доказать, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара  $r < R$  определяется формулой

$$U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho}$$

$u$  - интеграл Пуассона для шара, т. е.

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_0^-(R, \theta_1, \varphi_1) \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

$\gamma$  - угол между радиусами-векторами точек  $(\rho, \theta, \varphi)$  и  $(R, \theta_1, \varphi_1)$  и  $u_0^- = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=R} = u|_{\rho=R}$ .

Указ а н и е. Доказать, что если  $u(\rho, \theta, \varphi)$ ,  $u(0) = 0$  - гармоническая функция в области, содержащей начало координат, то и функция  $U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho}$  является гармонической. Далее воспользоваться условием разрешимости задачи, а именно  $\int_{r=R} u_0^- dS = 0$ .

**В-18.56**

Решить задачу

$$\Delta u - k^2 u = -f(x), \quad u|_{|x|=R} = u_0^-(x)$$

внутри сферы  $|x| = R$  для следующих  $f$  и  $u_0^-$ :

- 1)  $f = f_0 = \text{const}$ ,  $u_0^- = 0$ ,  $k = R = 1$
- 2)  $f = 1$ ,  $u_0^- = 1 - 2e^{-1} \text{sh } 1$ ,  $k = R = 1$ .

**В-18.57**

Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , если на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация  $u_0$ .

**14.3.6 Задачи на Вариационные методы****В.з.доп-пр.8. Типичная вариационная задача**

Найти минимум функционала

$$I(v) = \int_G \left[ |\text{grad } v|^2 + \frac{4v}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right] dx_1 dx_2$$

среди функций, принадлежащих классу  $\overset{\circ}{C}^1(G)$ , где  $G = \{1 < |x| < 3\}$ ,  $x = (x_1, x_2)$

**Решение.** (???? это пока не понял)

Известно, что существует функция  $v_0(x_1, x_2) \in \overset{\circ}{C}^1(G)$ , дающая минимум функционалу (1). Функция  $v_0(x)$  является решением краевой задачи

$$\Delta u = \frac{2}{r}, \quad u|_{|x|=1} = u|_{|x|=3} = 0$$

(??? откуда??)

записав лапласиан в полярных координатах, получим

$$(ru_r)' = 2, \quad u|_{|x|=1} = u|_{|x|=3} = 0$$

Решением этой краевой задачи является функция  $v_0 = 2(r-1) - \frac{4}{\ln 3} \ln r$ . Так как  $v_0$  не зависит от  $\varphi$ , то

$$|\operatorname{grad} v_0|^2 = \left| \frac{\partial v_0}{\partial r} \right|^2 = \left( 2 - \frac{4}{\ln 3} \frac{1}{r} \right)^2$$

Тогда

$$\begin{aligned} I(v_0) &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \left\{ \left( 2 - \frac{4}{\ln 3} \frac{1}{r} \right)^2 + \left[ 8(r-1) - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right] \frac{1}{r} \right\} r dr d\varphi = \\ &= 2\pi \int_1^3 \left( 4r - \frac{16}{\ln 3} + \frac{16}{\ln^2 3} \frac{1}{r} + 8r - 8 - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right) dr = \\ &= 2\pi \int_1^3 \left( 12r - \frac{16}{\ln 3} - 8 + \frac{16}{\ln^2 3} \frac{1}{r} - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right) dr = 32\pi \left( \frac{1}{\ln 3} - 1 \right) \end{aligned}$$

Итак, минимум функционала (1) равен  $32\pi \left( \frac{1}{\ln 3} - 1 \right)$ .

### В-19.1

Пусть  $u(x)$  - классическое решение задачи (1), (I). Показать, что если  $u \in C^1(\bar{Q})$ , то  $u(x)$  является обобщенным решением задачи (1), (I).

### В-19.2

Пусть  $u(x)$  - классическое решение задачи (1), (III) (или (II)). Показать, что если  $u \in C^1(\bar{Q})$ , то  $u(x)$  является обобщенным решением задачи (1), (III) (или (II)).

### В-19.3

Если  $u(x)$  - обобщенное решение задачи (1), (I) и  $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ , то  $u(x)$  является классическим решением этой задачи.

### В-19.4

Если  $u(x)$  - обобщенное решение задачи (1), (III) (или (II)) и  $u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ , то  $u(x)$  является классическим решением этой задачи.

### В-19.5

Доказать единственность обобщенного решения задачи (1), (I) при  $g = 0$ .

### В-19.6

Показать, что если функция  $g$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$  (в частности,  $g \in C^1(\Gamma)$ ), то обобщенное решение задачи (1), (I) существует.

### В-19.7

Пусть в области  $Q$  задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(x)u = f(x),$$

$p \in C^1(\bar{Q})$ ,  $\min p(x) = p_0 > 0$ ,  $q \in C(\bar{Q})$ ,  $f \in L_2(Q)$ . Принадлежащая пространству  $H^1(Q)$  функция  $u(x)$  называется обобщенным решением задачи (4), (I), если при всех  $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$  она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q (p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + quv) dx = \int_Q f v dx$$

и след ее на  $\Gamma$  равен  $g$ . Доказать, что принадлежащее  $H^1(Q)$  классическое решение задачи (4), (I) является обобщенным.

### В-19.8

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (4), (I) при  $q \geq 0$ .  
Ук а 3 ан и е. Воспользоваться результатом задачи 4.106.

**В-19.9**

Пусть в области  $Q$  задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( p_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q(x)u = f(x)$$

где вещественные функции  $p_{ij} \in C^1(\bar{Q})$ ,  $p_{ij}(x) = p_{ji}(x)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) и для всех  $x \in \bar{Q}$  и любых вещественных  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  справедливо неравенство  $\sum_{i,j=1}^n p_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma_0 |\xi|^2$  с постоянной  $\gamma_0 > 0$ ,  $q \in C(\bar{Q})$ ,  $f \in L_2(Q)$ . Принадлежащая пространству  $H^1(Q)$  функция  $u(x)$  называется обобщенным решением задачи (5), (I), если при всех  $v(x) \in \overset{\circ}{H}^1(Q)$  она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left( \sum p_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + quv \right) dx = \int_Q f v dx$$

и ее след на  $\Gamma$  равен  $g$ . Доказать, что принадлежащее  $H^1(Q)$  классическое решение задачи (5), (I) является обобщенным.

**В-19.10**

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (5), (I), если  $q \geq 0$ . У к а з а н и е. Воспользоваться результатом задачи 4.112.

**В-19.11**

Обобщенным решением задачи (4), (III) (или (II)) называется принадлежащая  $H^1(Q)$  функция  $u(x)$ , удовлетворяющая при всех  $v(x) \in H^1(Q)$  интегральному тождеству

$$\int_Q (p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + quv) dx + \int_{\Gamma} p \sigma u v ds = \int_Q f v dx + \int_{\Gamma} p g v ds.$$

Доказать, что принадлежащее  $C^1(\bar{Q})$  классическое решение задачи (4), (III) (или (II)) является обобщенным.

**В-19.12**

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (4), (III) (или (II)) в предположении, что  $f \in L_2(Q)$ ,  $g \in L_2(\Gamma)$ ,  $\sigma(x) \geq 0$  на  $\Gamma$ ,  $q(x) \geq 0$  в  $Q$ , причем либо  $\sigma(x) \not\equiv 0$ , либо  $q(x) \not\equiv 0$ . У к а з а н и е. Воспользоваться результатом задачи 4.117.

**В-19.13**

Пусть  $\tilde{l}_2(Q)$  и  $\tilde{H}^1(Q)$  - подпространства пространств  $L_2(Q)$  и  $H^1(Q)$ , состоящие из тех функций из  $L_2(Q)$  и  $H^1(Q)$  соответственно, для которых  $\int_Q f dx = 0$ . Доказать, что при  $g(x) \equiv 0$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $f \in \tilde{l}_2(Q)$  существует единственное обобщенное решение задачи (4), (II), принадлежащее  $\tilde{H}^1(Q)$ .

У к а з а н и е. Воспользоваться результатом задачи 4.121.

**В-19.14**

Рассмотрим при  $f \in L_2(Q)$  функционал

$$E_1(v) = \int_Q (\operatorname{grad} v)^2 dx - 2 \int_Q f v dx$$

на множестве функций  $v \in H^1(Q)$ , для которых  $v|_{\Gamma} = g$ , где функция  $g(x)$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал  $E(v)$  достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (1), (I).

**B-19.15**

Рассмотрим при  $f \in L_2(Q), p \in C(\bar{Q}), q \in C(\bar{Q}), \min p(x) = p_0 > 0, q(x) \geq 0$  функционал

$$E_1(v) = \int_Q p |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_Q q(x) v^2 dx - 2 \int_Q f v dx$$

на множестве функций  $v \in H^1(Q)$ , для которых  $v|_\Gamma = g$ , где функция  $g(x)$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (4), (I). че

**B-19.9**

Рассмотрим функционал

$$E_2(v) = \int_Q \left[ \sum_{i,j=1}^n p_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \right] dx + \int_Q q v^2 dx - 2 \int_Q f v dx$$

на множестве функций  $v \in H^1(Q)$ , для которых  $v|_\Gamma = g$ , где функция  $g(x)$  является следом на  $\Gamma$  некоторой функции из  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал  $E_2(v)$  достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (5), (I).

**B-19.17**

Рассмотрим при  $f \in L_2(Q), g(x) \in L_2(\Gamma), \sigma \in C(\Gamma), \sigma \geq 0$  на  $\Gamma, \sigma(x) \not\equiv 0$ , функционал

$$\tilde{E}_1(v) = \int_Q |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_\Gamma \sigma v^2 dS - 2 \int_Q f v dx - 2 \int_\Gamma g v dS, \quad v \in H^1(Q).$$

Показать, что функция  $u(x)$ , на которой функционал  $\tilde{E}_1(v)$  достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (1), (III).

**B-19.18**

Пусть  $f \in L_2(Q), g(x) \in L_2(\Gamma), p \in C(\bar{Q}), q \in C(\bar{Q}), \sigma \in C(\Gamma), \min p(x) = p_0 > 0, q(x) \geq 0, \sigma(x) \geq 0$  и или  $q(x) \not\equiv 0$ , или  $\sigma(x) \not\equiv 0$ . Рассмотрим на  $H^1(Q)$  функционал

$$E_2(v) = \int_Q p |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_Q q v^2 dx + \int_\Gamma \sigma p v^2 dS - 2 \int_Q f v dx - 2 \int_\Gamma p g v dS.$$

Показать, что функция  $u(x)$ , на которой этот функционал достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (4), (III) (или II).

У к а з а н и е. См. задачу 4.117.

**B-19.19**

Рассмотрим при  $f \in \tilde{L}_2(Q), \int_Q f dx = 0, p \in C(\bar{Q}), \min p(x) = p_0 > 0$  функционал

$$E_1(v) = \int_Q p |\operatorname{grad} v|^2 dx - 2 \int_Q f v dx$$

237 на подпространстве  $\tilde{H}^1(Q)$  (определения множеств  $\tilde{L}_2(Q)$  и  $\tilde{H}^1(Q)$  см. в задаче 19.13; см. также задачи 4.118-4.120) пространства  $H^1(Q)$ . Показать, что функция  $u \in \tilde{H}^1(Q)$ , на которой этот функционал достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (4), (II).

**B-19.20**

Найти функцию  $v_0$ , реализующую минимум функционала  $\int_0^1 (v'^2 + v^2) dx + 2 \int_0^1 v dx$  в классе  $\overset{\circ}{H}^1(0, 1)$

**B-19.21**

Доказать, что для всех  $v \in C^1([0, 1])$  справедливо неравенство  $\int_0^1 (v'^2 + 2xv) dx + v^2(0) + v^2(1) \geq -\frac{41}{270}$ . Имеет ли место знак равенства для какой-либо функции?

**В-19.22**

Доказать, что для всех функций  $v \in C^1[0, 1], v(1) = 0$  имеет место неравенство  $\int_0^1 v dx \leq \frac{5}{24} + \frac{v^2(0)}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 v'^2 dx$ . Найти функцию из этого класса, для которой достигается равенство.

**В-19.24**

Найти  $\inf_{v \in H^1(|x| < 1)} \left\{ \int_{|x| < 1} [(\text{grad } v)^2 + 2|x|^2 v] dx \right\}$ , где  $x = (x_1, x_2)$ .

**В-19.25**

Найти  $\inf_{v \in H^1(|x| < 1)} \int_{|x| < 1} |\text{grad } v|^2 dx$ ,  $x = (x_1, x_2), x_1 = |x| \cos \varphi, x_2 = |x| \sin \varphi, v|_{|x|=1} = \varphi(\pi - \varphi)(2\pi - \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

**В-19.26**

Найти  $\inf \int_{|x| < 1} |\text{grad } v|^2 dx$  на множестве функций  $v \in H^1(|x| < 1), x = (x_1, x_2), x_1 = |x| \cos \varphi, x_2 = |x| \sin \varphi$ , удовлетворяющих условию  $v|_{|x|=1} = \varphi^2, -\pi < \varphi \leq \pi$ .

**В-19.27**

Может ли заданная на окружности  $|x| = 1, x_1 = \cos \varphi, x_2 = \sin \varphi$ , функция  $\psi(\varphi)$  быть граничным значением какой-либо функции из  $H^1(|x| < 1)$ , если: а)  $\psi(\varphi) = \text{sign } \varphi, -\pi < \varphi \leq \pi$ ; б)  $\psi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^{2n} \varphi$ ; в)  $\psi(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^4 \varphi}{n^5}$ .

**В-19.28**

Пусть  $Q$  — квадрат  $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ . Доказать, что для любой  $f \in \overset{\circ}{H}^1(Q)$  имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_Q |\text{grad } f|^2 dx$$

и установить, что постоянная в неравенстве точная.

**В-19.29**

Пусть  $Q$  — куб  $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$ . Доказать, что для любой функции  $f \in \overset{\circ}{H}^1(Q)$  справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{3\pi^2} \|\text{grad } f\|_{L_2}^2.$$

**В-19.30**

Пусть  $Q$  — кольцо  $\{1 < |x| < 2\}$ . Найти

$$\inf_{f \in H^1(Q)} \left\{ \int_{1 < |x| < 2} [(\text{grad } f)^2 + 4f] dx + \int_{|x|=2} f^2 ds \right\}, \quad x = (x_1, x_2).$$

**В-19.31**

Пусть  $Q$  — квадрат  $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ . Найти функцию, дающую минимум функционалу

$$\inf_{u \in H^1} \left\{ \int_Q [(\text{grad } u)^2 + 4 \sin x_1 \sin x_2 u] dx + 2 \int_0^\pi \sin x_1 u(x_1, \pi) dx_1 \right\}$$

в классе функций  $u \in H^1(Q), u|_{x_2=0} = u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = 0$ .

**В-19.32**

Пусть  $Q$  – круг  $\{|x| < 1\}$ ,  $x = (x_1, x_2)$ . Доказать, что для любой функции  $u \in \overset{\circ}{H}(Q)$  справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} \|\text{grad } u\|_{L_2}^2.$$

**В-19.33**

Доказать, что для всех функций  $u \in C^1(0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1)$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = 0, \quad u|_{x_1=1} = x_2, \quad u|_{x_2=1} = x_1,$$

справедливо неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 (\text{grad } u)^2 dx_1 dx_2 \geq \frac{2}{3}$$

Имеет ли место равенство для какой-нибудь из этих функций?

**В-19.34**

Доказать, что для всех функций  $u \in \overset{\circ}{C}^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$  имеет место неравенство

$$2 \int_{|x|<1} x_1 x_2 u(x) dx \leq \frac{\pi}{1152} + \int_{|x|<1} (\text{grad } u)^2 dx$$

**В-19.35**

Доказать, что для всех функций  $u \in \overset{\circ}{C}^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  имеет место неравенство

$$\int_{|x|<1} [(\text{grad } u)^2 + u] dx \geq -\frac{\pi}{45}$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций? § 19. Вариационные методы 239

**В-19.36**

Показать, что для всех функций  $v \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ , удовлетворяющих условию  $v|_{|x|=1} = \sin \varphi$ ,  $x = (x_1, x_2)$ , справедливо неравенство

$$\int_{|x|<1} [2|x|^2 v + (\text{grad } v)^2] dx \geq \frac{63}{64} \pi$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**В-19.37**

Доказать, что для всех функций  $u \in C^1(0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$u|_{x_1=0} = x_2 x_3, \quad u|_{x_2=0} = x_1 x_3, \quad u|_{x_3=0} = x_1 x_2$$

справедливо неравенство

$$\iiint_{000}^{111} |\text{grad } u|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \geq \frac{7}{2}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**В-19.38**

Показать, что для всех функций  $v \in C^1(|x| \leq 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi \sin \theta$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi \sin \theta$ ,  $x_3 = |x| \cos \theta$ , удовлетворяющих условию  $v|_{|x|=1} = \cos \theta$ , справедливо неравенство

$$\int_{|x|<1} [2v + (\text{grad } v)^2] dx \geq \frac{56\pi}{45}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**В-19.39**

Пусть  $Q$  - квадрат  $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ . Доказать, что для любой функции  $v \in \overset{\circ}{C}^1(Q)$ , удовлетворяющей условию

$$\int_Q \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 v(x) dx = 0,$$

справедливо неравенство

$$\|v\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{5\pi^2} \|\operatorname{grad} v\|_{L_2}^2.$$

**В-19.40**

Пусть  $Q$  - куб  $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$ . Доказать, что для любой функции  $v \in \overset{\circ}{H}^1(Q)$ , удовлетворяющей условию

$$\int_Q \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 v(x) dx = 0,$$

справедливо неравенство  $\|v\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{6\pi^2} \|\operatorname{grad} v\|_{L_2}^2$ .

**В-19.41**

Пусть  $Q$  - куб  $\{0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi, 0 < x_3 < \pi\}$ . Среди функций  $u \in H^1(Q)$ , принимающих граничные значения

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = u|_{x_3=0} = u|_{x_1=\pi} = u|_{x_2=\pi} = 0,$$

найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u) = \int_Q (\operatorname{grad} u)^2 dx + \int_0^\pi \int_0^\pi \sin x_1 \sin x_2 u(x_1, x_2, \pi) dx_1 dx_2.$$

**В-19.42**

Пусть  $Q$  - шаровой слой  $\{1 < |x| < 2\}$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Среди функций  $u \in H^1(Q)$ , принимающих граничные значения  $u|_{|x|=2} = 0$ , найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u) = \int_Q [(\operatorname{grad} u)^2 + 2u] dx + \int_{|x|=1} u^2 dS.$$

Примеры от Владимирова в конце

Задача 8. Найти минимум функционала

$$I(v) = \int_G \left[ |\operatorname{grad} v|^2 + \frac{4v}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right] dx_1 dx_2$$

среди функций, принадлежащих классу  $\overset{\circ}{C}^1(G)$ ,  $G = \{1 < |x| < 3\}$ ,  $x = (x_1, x_2)$ .

**Р е ш е н и е.** Известно, что существует функция  $v_0(x_1, x_2) \in \overset{\circ}{C}^1(G)$ , дающая минимум функционалу (1). Функция  $v_0(x)$  является решением краевой задачи

$$\Delta u = \frac{2}{r}, \quad u|_{|x|=1} = u|_{|x|=3} = 0;$$

записав лапласиан в полярных координатах, получим

$$(ru_r)' = 2, \quad u|_{|x|=1} = u|_{|x|=3} = 0.$$

Решением краевой задачи (2) является функция  $v_0 = 2(r-1) - \frac{4}{\ln 3} \ln r$ . Так как  $v_0$  не зависит от  $\varphi$ , то

$$|\operatorname{grad} v_0|^2 = \left| \frac{\partial v_0}{\partial r} \right|^2 = \left( 2 - \frac{4}{\ln 3} \frac{1}{r} \right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I(v_0) &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \left\{ \left( 2 - \frac{4}{\ln 3} \frac{1}{r} \right)^2 + \left[ 8(r-1) - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right] \frac{1}{r} \right\} r dr d\varphi = \\ &= 2\pi \int_1^3 \left( 4r - \frac{16}{\ln 3} + \frac{16}{\ln^2 3} \frac{1}{r} + 8r - 8 - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right) dr = \\ &= 2\pi \int_1^3 \left( 12r - \frac{16}{\ln 3} - 8 + \frac{16}{\ln^2 3} \frac{1}{r} - \frac{16}{\ln 3} \ln r \right) dr = 32\pi \left( \frac{1}{\ln 3} - 1 \right). \end{aligned}$$

Итак, минимум функционала (1) равен  $32\pi \left( \frac{1}{\ln 3} - 1 \right)$ .

## 14.4 Задачи на обобщенные функции

### 14.4.1 Задачи на Основные и обобщенные функции

#### В-6.1

Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Выяснить, есть ли среди последовательностей:

- 1)  $\frac{1}{k} \varphi(x)$
- 2)  $\frac{1}{k} \varphi(kx)$ ;
- 3)  $\frac{1}{k} \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$ ;  $k = 1, 2, \dots$ , сходящиеся в  $\mathcal{D}$ .

#### В-6.2

Пусть  $n = 1$  и

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon, \\ 0 & \text{при } |x| > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Показать, что функция

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy,$$

$\omega_\varepsilon$  - «шапочка», является основной из  $\mathcal{D}(R^1)$ , причем  $0 \leq \eta(x) \leq 1$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  при  $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ ,  $\eta(x) \equiv 0$  при  $|x| > 3\varepsilon$ .

#### В-6.3

Пусть  $G_{2\varepsilon} = \bigcup_{x \in G} U(x; 2\varepsilon)$  -  $2\varepsilon$ -окрестность ограниченной области  $G$  и  $\chi(x)$  - характеристическая функция области  $G_{2\varepsilon}$ , т.е.  $\chi(x) = 1, x \in G_{2\varepsilon}$  и  $\chi(x) = 0, x \in G_{2\varepsilon}^c$ . Доказать, что функция

$$\eta(x) = \int \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy$$

основная из  $\mathcal{D}(R^n)$ , причем  $0 \leq \eta(x) \leq 1$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  при  $x \in G_\varepsilon$ ;  $\eta(x) \equiv 0$  при  $x \in G_{3\varepsilon}^c$ .

#### В-6.4

Пусть функция  $\eta(x)$  удовлетворяет условиям задачи 6.2,

$$H(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \eta(x - \varepsilon\nu), \quad e(x) = \frac{\eta(x)}{H(x)}.$$

Доказать, что  $H \in C^\infty(R^1)$ ,  $H(x) \geq 1$ ;  $e \in \mathcal{D}(R^1)$ ,  $0 \leq e(x) \leq 1$ ;  $e(x) \equiv 1$  при  $|x| \leq \varepsilon$  и  $e(x) = 0$  при  $|x| \geq 3\varepsilon$ ;  $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e(x - \varepsilon\nu) \equiv 1$ .

#### В-6.5

Доказать, что существуют такие функции  $\varphi_\delta \in \mathcal{D}(R^1)$ ,  $\delta > 1$ , что  $\varphi_\delta(x) = 1$  при  $|x| \leq \delta - 1$ ,  $\varphi_\delta(x) = 0$  при  $|x| \geq \delta$  и  $\left| \varphi_\delta^{(\alpha)}(x) \right| \leq C_\alpha$ , где постоянная  $C_\alpha$  не зависит от  $\delta$ .



**В-6.6**

Пусть непрерывная функция  $f(x)$  финитна:  $f(x) = 0, |x| > R$ . Показать, что функция

$$f_\varepsilon(x) = \int f(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy \quad (\varepsilon < R)$$

основная из  $\mathcal{D}(R^n)$ , причем  $f_\varepsilon(x) = 0$  при  $|x| > R + \varepsilon$ . Показать, что

$$f_\varepsilon(x) \xrightarrow{x \in R^n} f(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

**В-6.7**

1) Доказать, что функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[ \varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right], \quad m = 1, 2$$

основная из  $\mathcal{D}(R^1)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)$  и  $\eta \in \mathcal{D}(R^1)$ ,  $\eta \equiv 1$  в окрестности  $x = 0$ ;

2) доказать, что функция

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \eta(x)\varphi(0)}{\alpha(x)}$$

основная из  $\mathcal{D}(R^1)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)$ ,  $\eta(x)$  - функция из задачи 6.7, 1) и  $\alpha \in C^\infty(R^1)$ , имеет единственный нуль порядка 1 в точке  $x = 0$ .

**В-6.8**

1) Показать, что функция  $\varphi_1$  из  $\mathcal{D}(R^1)$  может быть представлена как производная от некоторой другой функции  $\varphi_2$  из  $\mathcal{D}(R^1)$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx = 0$$

2) показать, что всякая функция  $\varphi(x)$  из  $\mathcal{D}(R^1)$  может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') dx' + \varphi'_1(x)$$

$\varphi_1 \in \mathcal{D}(R^1)$ , а  $\varphi_0(x)$  - любая основная функция из  $\mathcal{D}(R^1)$ , удовлетворяющая условию  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1$ .

Указание. Воспользоваться задачей 6.8, 1).

**В-6.9**

Показать, что  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  и из сходимости в  $\mathcal{D}$  следует сходимость в  $\mathcal{S}$ .

**В-6.10**

Пусть  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Выяснить, есть ли среди последовательностей:

- 1)  $\frac{1}{k}\varphi(x)$ ;
- 2)  $\frac{1}{k}\varphi(kx)$
- 3)  $\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$   $k = 1, 2, \dots$ , сходящиеся в  $\mathcal{S}$ .

**В-6.11**

Пусть  $\varphi \in \mathcal{S}$  и  $P$  - полином. Доказать, что  $\varphi P \in \mathcal{S}$ .

**В-6.12**

Пусть функция  $\psi \in C^\infty(R^1)$ ,  $\psi(x) = 0$  при  $x < a$  и ограничена вместе со всеми производными. Доказать, что функция  $\psi(x)e^{-\sigma x}$  основная из  $\mathcal{S}(R^1)$ , если  $\sigma > 0$ .

### В-6.13

Доказать, что  $\delta(x)$  - сингулярная обобщенная функция. Дать физическую интерпретацию ее.

### В-6.14

Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям:

- 1)  $2\delta(x - x_0)$
- 2)  $\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_k)$ ;
- 3)  $\mu(x)\delta_S(x)$
- 4)  $|x|\delta_{S_r}(x - x_0)$ ; 5)  $2\delta(R_1 - |x - 1|) + 3\delta(R_2 - |x - 2|)$ . Найти их носители.

### В-6.15

Доказать, что:

- 1)  $\delta(x - \nu) \rightarrow 0, \nu \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'(R^1)$
- 2)  $\delta_{S_r}(x) \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'$ .

### В-6.16

Доказать, что  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$  и из сходимости в  $\mathcal{S}'$  следует сходимость в  $\mathcal{D}'$ .

### В-6.17

Доказать, что:

- 1)  $e^x \in \mathcal{D}'(R^1), e^x \notin \mathcal{S}'(R^1)$ ;
- 2)  $e^{1/x} \in \mathcal{D}'(R^1)$
- 3)  $e^x \sin e^x \in \mathcal{S}'(R^1)$ .

### В-6.18

Доказать, что функционал  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ , действующий по формуле

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

- сингулярная обобщенная функция.

### В-6.19

Вычислить пределы в  $\mathcal{D}'(R^1)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ :

- 1)  $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$
- 2)  $\frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$
- 3)  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/(4\varepsilon)}$ ;
- 4)  $\frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$ ; 5)  $\frac{1}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}$ .

### В-6.20

Доказать формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

### В-6.21 Некоторые пределы в $\mathcal{D}'(R^1)$ (!!!!!)

Вычислить пределы в  $\mathcal{D}'(R^1)$  при  $t \rightarrow +\infty$ :

- 1)  $\frac{e^{ixt}}{x - i0}$
- 2)  $\frac{e^{-ixt}}{x - i0}$
- 3)  $\frac{e^{ixt}}{x + i0}$
- 4)  $\frac{e^{-ixt}}{x + i0}$
- 5)  $t^m e^{ixt}, m \geq 0$ .  
(порешаю, 1я часть пока слишком слабая.)

### В-6.22

Найти предел  $\mathcal{D}\frac{\cos kx}{x}, k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{D}'(R^1)$ , где

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{D}\frac{\cos kx}{x}, \varphi \right) &= \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

### В-6.23

Доказать, что ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k)$ :

- 1) сходится в  $\mathcal{D}'$  при любых  $a_k$ ;
- 2) сходится в  $\mathcal{S}'$ , если  $|a_k| \leq C(1+|k|)^m$ .

### В-6.24

Пусть  $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ ,  $\psi \geq 0$ ,  $\int \psi(x) dx = 1$ . Доказать, что  $\varepsilon^{-n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \delta(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(R^n)$ ; в частности,  $\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$   $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(R^n)$

### В-6.25

Показать, что функционал  $\mathcal{D}\frac{1}{x^2}$ , действующий по формуле

$$\left( \mathcal{D}\frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

- сингулярная обобщенная функция.

### В-6.26

Показать, что:

- 1)  $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$ ,  $\alpha \in C^\infty(R^n)$ ; в частности,  $x\delta(x) = 0$ ,  $x \in R^1$
- 2)  $x\frac{1}{x} = 1$
- 3)  $x^m \mathcal{D}\frac{1}{x} = x^{m-1}$ ,  $m \geq 1$ .

### В-6.27

- 1) Пусть обобщенная функция  $f$  равна нулю вне отрезка  $[-a, a]$ ; доказать, что  $f = \eta f$ ,  $\eta \in C^\infty(R^1)$  и  $\eta(x) \equiv 1$  в  $[-a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  любое;
- 2) пусть  $f \in \mathcal{D}'(R^n)$  и  $\eta \in C^\infty(R^n)$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  в окрестности  $\text{supp } f$ ; показать, что  $f = \eta f$  и  $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ .

### В-6.28

Доказать, что  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ ,  $a \neq 0$ .

### В-6.29

Доказать, что  $(\alpha f)(x+h) = \alpha(x+h)f(x+h)$ ,  $\alpha \in C^\infty(R^n)$ ,  $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ ,  $h \in R^n$ .

### В-6.30

Доказать, что обобщенная функция

$$\begin{aligned} \left( \text{Pf} \frac{1}{x^2+y^2}, \varphi(x,y) \right) &= \\ &= \int_{x^2+y^2 < 1} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(0,0)}{x^2+y^2} dx dy + \int_{x^2+y^2 > 1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2} dx dy \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению  $(x^2+y^2) \text{Pf} \frac{1}{x^2+y^2} = 1$  в  $\mathcal{D}'(R^2)$ .

**В-6.31**

Пусть  $f \in \mathcal{S}'$  и  $P$  - полином. Показать, что  $fP \in \mathcal{S}'$ .

**В-6.32**

Пусть  $f \in \mathcal{D}'(R^1)$  финитна и  $\eta(x)$  - произвольная функция из  $\mathcal{D}(R^1)$ , равная 1 в окрестности  $\text{supp } f$ . Положим

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( f(x'), \frac{\eta(x')}{x' - z} \right), \quad z = x + iy.$$

Доказать, что:

- 1)  $\hat{f}(z)$  не зависит от выбора вспомогательной функции  $\eta$ ;
- 2)  $\hat{f}(z)$  - аналитическая функция при  $z \in \text{supp } f$ ;
- 3)  $\hat{f}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), z \rightarrow \infty$ ;
- 4)  $\hat{f}(x + i\varepsilon) - \hat{f}(x - i\varepsilon) \rightarrow f(x), \varepsilon \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(R^1)$ .

**В-6.33**

Пусть  $f \in \mathcal{D}'(R^1)$ ,  $\text{supp } f \subset [-a, a]$  и  $\eta \in \mathcal{D}(R^1), \eta(\xi) \equiv 1$  в окрестности  $\text{supp } f$ . Доказать, что функция

$$\tilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi)e^{iz\xi}), \quad z = x + iy,$$

не зависит от  $\eta$ , целая и удовлетворяет при некотором  $m \geq 0$  и любом  $\varepsilon > 0$  оценке

$$|\tilde{f}(x + iy)| \leq C_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|y|} (1 + |x|)^m.$$

**В-6.34**

Пусть  $f \in \mathcal{D}'(R^n)$  и  $\text{supp } f = \{0\}$ . Доказать, что  $f$  однозначно представляется в виде

$$f(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta(x).$$

**В-6.35**

Пусть ряд  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \delta^{(\nu)}(x)$  сходится в  $\mathcal{D}'(R^1)$ . Доказать, что  $a_\nu = 0$  при  $\nu > \nu_0$ .

**14.4.2 Задачи на Дифференцирование обобщенных функций**
**В-7.1**

Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям: В  $R^1$  -  $\delta'(x)$ ,  $-\delta'(x - x^0)$ ; В  $R^3$  -  $\frac{\partial}{\partial n}(\nu \delta_S)$ ,  $-2\frac{\partial}{\partial n} \delta_{S_r}(x - x^0)$ .

**В-7.2**

Показать, что  $(\delta^{(m)}(x - x_0), \varphi(x)) = (-1)^m \varphi^{(m)}(x_0), m \geq 1$ .

**В-7.3**

Показать, что в  $\mathcal{D}'(R^1)$ :

- 1)  $\rho(x)\delta'(x) = -\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x), \rho(x) \in C^1(R^1)$ ;
- 2)  $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x), m = 1, 2, \dots$ ;
- 3)  $x^m\delta^{(m)}(x) = (-1)^m m!\delta(x), m = 0, 1, 2, \dots$ ;
- 4)  $x^k\delta^{(m)}(x) = 0, m = 0, 1, \dots, k-1$ ; 5)  $\alpha(x)\delta^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{j+m} C_m^j \alpha^{(m-j)}(0)\delta^{(j)}(x), \alpha(x) \in C^\infty(R^1)$ ;
- 6)  $x^k\delta^{(m)}(x) = (-1)^k k! C_m^k \delta^{(m-k)}(x), m = k, k+1, \dots$

**В-7.4**

Показать, что  $\theta' = \delta$ ,  $\theta$  - функция Хевисайда.

**В-7.5**

 1) Показать, что в  $\mathcal{D}'(R^1)$ 

$$(\theta(x)\rho(x))' = \delta(x)\rho(0) + \theta(x)\rho'(x),$$

$$\rho(x) \in C^1(R^1)$$

 2) показать, что в  $\mathcal{D}'(R^2)$ 

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta(t)\rho(x, t)) = \delta(t)\rho(x, 0) + \theta(t)\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t},$$

$$\rho \in C^1(t \geq 0).$$

У к а з а н и е. Воспользоваться определением простого слоя (§6).

**В-7.6**

Вычислить:

1)  $\theta'(-x)$ ;

2)  $\theta^{(m)}(x - x_0)$ ,  $m \geq 1$  целое;

3)  $\theta^{(m)}(x_0 - x)$ ,  $m \geq 1$

4)  $(\text{sign } x)^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ ; 5)  $(x \text{ sign } x)'$ ; 6)  $(|x|)^{(m)}$ ,  $m \geq 2$ ; 7)  $(\theta(x) \sin x)'$ ; 8)  $(\theta(x) \cos x)'$ ; 9)  $(\theta(x)x^{m+k})^{(m)}$ ,  $m \geq 1, k = 0, 1, 2, \dots$ ; 10)  $(\theta(x)x^{m-k})^{(m)}$ ,  $m \geq 1, k = 1, \dots, m$ ; 11)  $(\theta(x)e^{ax})^m$ ,  $m \geq 1$ .

**В-7.7**

Вычислить производные порядка 1, 2, 3 функций:

**В-7.7**

Вычислить производные порядка 1, 2, 3 функций:

1)  $y = |x| \sin x$

2)  $y = |x| \cos x$ .

**В-7.8**

Показать, что

$$(D^\alpha f)(x + h) = D^\alpha f(x + h), \quad f \in \mathcal{D}', \quad h \in R^n.$$

**В-7.9**

 Доказать, что обобщенные функции  $\delta, \delta', \delta'', \dots, \delta^{(m)}$  линейно независимы.

**В-7.10**

Доказать:

1)  $\frac{d}{dx} \ln |x| = \mathcal{P} \frac{1}{x}$ ,  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$  определена в задаче 6.18;

2)  $\frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x} = -\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ ,  $\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$  определена в задаче 6.25;

3)  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x \pm i0} = \mp \pi \delta'(x) - \mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ ;

4)  $\frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P} \frac{1}{x^3}$ , где

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x^3}, \varphi \right) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - x\varphi'(0)}{x^3} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^1).$$

**В-7.11**

 Показать, что ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(x - k)$  сходится в  $\mathcal{D}'(R^1)$  при любых  $a_k$ .

**В-7.12**

 Показать, что если  $|a_k| \leq A|k|^m + B$ , то ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$  сходится в  $\mathcal{S}'(R^1)$ .

**В-7.13**

Пусть  $f(x)$  - такая кусочно непрерывная функция, что Доказать, что  $f \in C^1(x \leq x_0) \cap C^1(x \geq x_0)$ .

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(R^1), \quad (**)$$

$[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  - скачок функции  $f$  в точке  $x_0$ . Доказать, что если классическая производная функции  $f(x)$  имеет изолированные разрывы 1-го рода в точках  $\{x_k\}$ , то формула (\*\*) принимает вид

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k).$$

**В-7.14**

Вычислить  $f^{(m)}$  для функций:

1)  $\theta(a - |x|)$ ,  $a > 0$ ; 2)  $[x]$ ;

3)  $\text{sign} \sin x$

4)  $\text{sign} \cos x$ ; Здесь  $[x]$  означает целую часть  $x$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**В-7.15**

Пусть  $f(x) - 2\pi$ -периодическая функция, причем  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$ ,  $0 < x \leq 2\pi$ . Найти  $f'$ .

**В-7.16**

Пусть  $f(x) = x$ ,  $-1 < x \leq 1$ , - периодическая с периодом 2 Функция. Найти  $f^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ .

**В-7.17**

Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

**В-7.18**

Доказать, что

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(x - k\pi)$$

**В-7.19**

Пусть  $f(x) \in C^\infty(x \leq x_0) \cap C^\infty(x \geq x_0)$ . Доказать, что в  $\mathcal{D}'(R^1)$

$$f^{(m)}(x) = \left\{ f^{(m)}(x) \right\} + [f]_{x_0} \delta^{(m-1)}(x - x_0) + \\ + [f']_{x_0} \delta^{(m-2)}(x - x_0) + \dots + \left[ f^{(m-1)} \right]_{x_0} \delta(x - x_0)$$

где

$$\left[ f^{(k)} \right]_{x_0} = f^{(k)}(x_0 + 0) - f^{(k)}(x_0 - 0), \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

- скачок  $k$ -й производной в точке  $x_0$ .

**В-7.20**

Найти все производные функций:

$$1) y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$4) y = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases} \quad 5) y = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ (x+1)^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases} \quad 6) y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases} \quad 7) \\ y = \begin{cases} \sin x, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & |x| \geq \pi \end{cases} \quad 8) y = \begin{cases} |\sin x|, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & |x| \geq \pi \end{cases}$$

### В-7.21

Доказать: 1)  $|\sin x|'' + |\sin x| = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$ ; 2)  $|\cos x|'' + |\cos x| = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{2k+1}{2}\pi)$ . Указание. Воспользоваться задачей 7.14, 3) и 4). Пусть

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)} = f$$

- линейное дифференциальное уравнение порядка  $m$  с коэффициентами  $a_k(x) \in C^\infty(R^1)$  и  $f \in \mathcal{D}'(R^1)$ . Его обобщенным решением называется всякая обобщенная функция  $y \in \mathcal{D}'(R^1)$ , удовлетворяющая уравнению (\*) в обобщенном смысле, т. е.

$$\left( \sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}, \varphi \right) = \left( y, \sum_{k=0}^m (-1)^k (a_k \varphi)^{(k)} \right) = (f, \varphi)$$

для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(R^1)^*$ . Всякое решение уравнения (\*) можно представить в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

### В-7.22

Найти общие решения в  $\mathcal{D}'(R^1)$  следующих уравнений:

- 1)  $xy = 0$ ;
- 2)  $\alpha(x)y = 0$ ,  $\alpha \in C^\infty(R^1)$  и имеет единственный нуль в точке  $x = 0$  порядка 1
- 3)  $\alpha(x)y = 0$ ,  $\alpha \in C$  и  $\alpha > 0$ ;
- 4)  $(x-1)y = 0$ ; 5)  $x(x-1)y = 0$  6)  $(x^2-1)y = 0$  7)  $xy = 1$ ; 8)  $xy = \mathcal{D}'\frac{1}{x}$ ; 9)  $x^n y = 0, n = 2, 3, \dots$  10)  $x^2 y = 2$  11)  $(x+1)^2 y = 0$ ; 12)  $(\cos x)y = 0$ .

### В-7.23

Найти общие решения в  $\mathcal{D}'(R^1)$  уравнений:

- 1)  $y' = 0$ ;
- 2)  $y^{(m)} = 0$ ,  $m = 2, 3, \dots$

### В-7.24

Доказать, что общим решением в  $\mathcal{D}'(R^1)$  уравнения  $x^n y^{(m)} = 0, n > m$ , является обобщенная функция

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} b_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k$$

$a_k, b_k, c_k$  - произвольные постоянные.

### В-7.25

Найти общие решения в  $\mathcal{D}'(R^1)$  уравнений:

- 1)  $xy' = 1$ ;
- 2)  $xy' = \mathcal{D}'\frac{1}{x}$
- 3)  $x^2 y' = 0$
- 4)  $x^2 y' = 1$ ; 5)  $y'' = \delta(x)$ ; 6)  $(x+1)y'' = 0$ ; 7)  $(x+1)^2 y'' = 0$ ; 8)  $(x+1)y''' = 0$ .

**В-7.26**

Доказать, что общим решением в  $\mathcal{D}'(R^1)$  уравнения  $xy = \text{sign } x$  является обобщенная функция  $C\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{|x|}$ , где

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx.$$

**В-7.27**

Доказать, что если  $f \in \mathcal{D}'(R^1)$  инвариантна относительно сдвига, т.е.  $(f, \varphi) = (f(x), \varphi(x+h))$ ,  $h$  - любое вещественное число, то  $f = \text{const}$ .

Указани и е. Доказать, что  $f' = 0$ , и воспользоваться задачей 7.23, 1). \*) Иногда для краткости выражение «удовлетворяет уравнению в обобщенном смысле» заменяется выражением «удовлетворяет уравнению в  $\mathcal{D}' \rightarrow 4^*$ »

**В-7.28**

Найти решение в  $\mathcal{D}'(R^1)$  уравнения:

$$af'' + bf' + cf = m\delta + n\delta'$$

$a, b, c, m, n$  — заданные числа. Рассмотреть случаи:

- 1)  $a = c = n = 1, \quad b = m = 2;$
- 2)  $b = n = 0, a = m = 1, c = 4;$
- 3)  $b = 0, \quad a = n = 1, \quad m = 2, \quad c = -4.$

**В-7.29**

Доказать, что система  $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ , где матрица  $A(x) \in C^\infty(R^1)$  имеет в  $\mathcal{D}'$  только классическое решение.

**В-7.30**

Доказать, что уравнение  $u' = f$  разрешимо в  $\mathcal{D}'(R^1)$  при Любой  $f \in \mathcal{D}'(R^1)$ .

Ук аз ан и е. Воспользоваться задачей 6.8, 2).

**В-7.31**

Доказать, что уравнение  $xu = f$  разрешимо в  $\mathcal{D}'(R^1)$  при любой  $f \in \mathcal{D}'(R^1)$ .

Ук а з ан и е. Воспользоваться задачей 6.7, 1).

**В-7.32**

Доказать, что уравнение  $x^3u' + 2u = 0$  не имеет решений в  $\mathcal{D}'(R^1)$  (кроме 0).

**В-7.33**

Пусть  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta(x_1) \dots \theta(x_n)$ . Показать, что

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \delta(x) = \delta(x_1, \dots, x_n)$$

в  $\mathcal{D}'(R^n)$ .

**В-7.34**

На плоскости  $(x, y)$  рассмотрим квадрат с вершинами

$$A(1, 1), \quad B(2, 0), \quad C(3, 1), \quad D(2, 2).$$

Пусть функция  $f$  равна 1 в  $ABCD$  и 0 вне его. Вычислить

$$f''_{yy} - f''_{xx}$$



### В-7.35

Пусть область  $G \subset R^3$  ограничена кусочно гладкой поверхностью  $S$  и дана функция  $f \in C^1(\bar{G}) \cap C^1(\bar{G}_1)$ ,  $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$ . Доказать формулу

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(\mathbf{n}, x_i) \delta_S, \quad i = 1, 2, 3,$$

в  $\mathcal{D}'(R^3)$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$  - внешняя нормаль к  $S$  в точке  $x \in S$ , а  $[f]_S$  - скачок функции  $f(x)$  при переходе извне через поверхность  $S$ :

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in G_1}} f(x') - \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in G}} f(x') = [f]_S(x), \quad x \in S.$$

### В-7.36

Доказать, что если  $f \in C^2(\bar{G}) \cap C^2(\bar{G}_1)$ ,  $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$ , то справедлива формула Грина

### В-7.36

Доказать, что если  $f \in C^2(\bar{G}) \cap C^2(\bar{G}_1)$ ,  $G_1 = R^n \setminus \bar{G}$ , то справедлива формула Грина

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[ \frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n} ([f]_S \delta_S).$$

### В-7.37

Доказать, что если  $f(x, t) \in C^2(t \geq 0)$  и  $f = 0$  при  $t < 0$ , то в  $R^{n+1}$  справедливы формулы:

$$1) \square_a f = \{\square_a f\} + \delta(t) f_t(x, 0) + \delta'(t) f(x, 0);$$

$$2) \frac{\partial f}{\partial t} - a^2 \Delta f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} - a^2 \Delta f \right\} + \delta(t) f(x, 0).$$

## 14.4.3 Задачи на Прямое произведение и свертка обобщенных функций

### В-8.1

Доказать:  $\text{supp}(f(x) \cdot g(y)) = \text{supp } f \times \text{supp } g$ .

### В-8.2

Доказать, что в  $\mathcal{D}'(R^{n+1}(x, t))$ :

$$1) (u_1(x) \cdot \delta(t), \varphi) = (u_1(x), \varphi(x, 0))$$

$$2) (u_0(x) \cdot \delta'(t), \varphi) = - \left( u_0(x), \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} \right).$$

Указ а и и е. Воспользоваться формулой (1).

### В-8.3

Доказать:

1)  $\theta_t(x, t)$  - простой слой на оси  $t = 0$  плоскости  $(x, t)$  с плотностью  $\theta(x)$  2)  $-\theta_{tt}(x, t)$  - двойной слой на оси  $t = 0$  с плотностью  $\theta(x)$ . У к а ан и е. Воспользоваться задачей 8.2.

### В-8.4

Показать:

$$1) \theta(x_1) \cdot \theta(x_2) \cdot \dots \cdot \theta(x_n) = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$2) \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

### В-8.5

Показать:

$$\frac{\partial^n \theta(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n).$$

### В-8.6

Показать, что  $(f \cdot g)(x + x_0, y) = f(x + x_0) \cdot g(y)$ .

### В-8.7

Показать, что  $a(x)(f(x) \cdot g(y)) = a(x)f(x) \cdot g(y)$ ,  $a \in C^\infty(R^n)$

### В-8.8

Доказать, что в  $\mathcal{D}'(R^2)$ :

- 1)  $\frac{\partial}{\partial t}\theta(at - |x|) = a\delta(at - |x|)$ ;
- 2)  $\frac{\partial}{\partial x}\theta(at - |x|) = \theta(t)\delta(at + |x|) - \theta(t)\delta(at - |x|)$ ;
- 3)  $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(at - |x|), \varphi\right) = -a\left(\delta(at - |x|), \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$ ;
- 4)  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at - |x|), \varphi\right) = -\left(\theta(t)\delta(at + x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) +$   

$$+ \left(\theta(t)\delta(at - x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

Обобщенную функцию вида  $f(x) \cdot 1(y)$  назовем ке зависящей от  $y$ . Она действует по правилу

$$(f(x) \cdot 1(y), \varphi) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy.$$

### В-8.9

Показать:

- 1)  $\int (f(x), \varphi(x, y)) dy = (f(x), \int \varphi(x, y) dy)$ ;
- 2)  $D_y^\alpha (f(x) \cdot 1(y)) = 0$ ,  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $|\alpha| \neq 0$ .

### В-8.10

Пусть  $g(y) \in \mathcal{S}'(R^m)$  и  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$ . Доказать, что:

- 1)  $\psi(x) = (g(y), \varphi(x + y)) \in \mathcal{S}(R^n)$ ;
- 2)  $D^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y))$ ;
- 3) если  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{S}(R^{n+m})$ , то  $\psi_k \rightarrow \psi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{S}(R^n)$
- 4) если  $f \in \mathcal{S}'(R^n)$  и  $g \in \mathcal{S}'(R^m)$ , то  $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{S}'(R^{n+m})$ .

### В-8.11

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  локально интегрируемы в  $R^n$ . Показать, что свертка  $f * g$  является локально интегрируемой функцией, если:

- 1)  $f$  и  $g \in L_1(R^n)$
- 2)  $f$  или  $g$  финитна;
- 3)  $f = 0$  и  $g = 0$  при  $x < 0$ ;  $n = 1$ . В случае 1) показать, что  $f * g \in L_1(R^n)$  и справедливо неравенство

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}.$$

### В-8.12

Показать, что в условиях задачи 8.11, 3)

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x - y)dy.$$

### В-8.13

Показать:

- 1)  $\delta * f = f * \delta = f$ ;
- 2)  $\delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$ ;
- 3)  $\delta(x - a) * \delta(x - b) = \delta(x - a - b)$ ;
- 4)  $\delta^{(m)} * f = f^{(m)}$ ; 5)  $\delta^{(m)}(x - a) * f(x) = f^{(m)}(x - a)$ .

### В-8.14

Вычислить в  $\mathcal{D}'(R^1)$ :

- 1)  $\theta(x) * \theta(x)$ ;
- 2)  $\theta(x) * \theta(x)x^2$
- 3)  $e^{-|x|} * e^{-|x|}$
- 4)  $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}, a > 0$ ; 5)  $\theta(x)x^2 * \theta(x) \sin x$ ; 6)  $\theta(x) \cos x * \theta(x)x^3$  7)  $\theta(x) \sin x * \theta(x) \operatorname{sh} x$ ; 8)  $\theta(a - |x|) * \theta(a - |x|)$ . В задачах 8.15-8.29 доказать утверждения.

### В-8.15

Если  $f_\alpha(x) = \theta(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha x}, \alpha > 0$  - целое, то  $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ .

### В-8.16

Если  $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\alpha^2)}, \alpha > 0$ , то  $f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ .

### В-8.17

Если  $f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}, \alpha > 0$ , то  $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ .

### В-8.18

$\operatorname{supp}(f * g) \subset [\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g]$ . У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 8.1.

### В-8.19

Если  $f, g \in \mathcal{D}'_+$ , то  $e^{ax} f * e^{ax} g = e^{ax} (f * g)$ .

### В-8.20

Если  $f \in \mathcal{D}', \varphi \in \mathcal{D}$ , то  $f * \varphi = (f(y), \varphi(x - y)) \in C^\infty(R^1)$ . У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (7) и задачей 8.9, 1).

### В-8.21

Если  $f \in \mathcal{D}', f * g = 0$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}$  и  $\operatorname{supp} \varphi \in [x < 0]$ , то  $f = 0$  при  $x < 0$ .

### В-8.22

Если свертка  $f * 1$  существует, то она постоянна.

### В-8.23

Для независимости обобщенной функции от  $x_i$  необходима и достаточна ее инвариантность относительно всех сдвигов по  $x_i$ .

### В-8.24

Для независимости  $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$  от  $x_i$  необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ .

### В-8.25

Если  $f \in \mathcal{D}'$  не зависит от  $x_i$ , то и  $f * g$  не зависит от  $x_i$ .

### В-8.26

Решением уравнения  $Lu = \delta$ , где

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_1(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_{m-1}(x) \frac{d}{dx} + a_m(x)$$

$a_k \in C^\infty(R^1)$ , в  $\mathcal{D}'(R^1)$  является  $u(x) = \theta(x)Z(x)$ ,  $Z(x) \in C^m(R^1)$  – решение задачи

$$LZ = 0, \quad Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1.$$

### В-8.27

Решением уравнения  $Lu = f$ ,  $f \in \mathcal{D}'_+$ , в  $\mathcal{D}'_+$  является  $u = \theta Z * f$ ,  $Z(x)$  – функция из задачи 8.25.

### В-8.28

Решением уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi = g(x)$$

$g(0) = 0, g \in C^1(x \geq 0), 0 < \alpha < 1$ , является функция

$$u(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \frac{g'(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}.$$

У к а з а н и е. Уравнение записать в виде свертки  $u * \theta(x-\alpha) = g(x)$  (считаем  $u = 0$  и  $g = 0$  при  $x < 0$ ) и воспользоваться задачей 8.15 при  $\beta = 1 - \alpha$ .

### В-8.29

Решением уравнения  $\theta(x) \cos x * f = g$  в  $\mathcal{D}'(R^1)$ ,  $g \in C^1(x \geq 0), g = 0$  при  $x < 0$ , является

$$f(x) = g'(x) + \int_0^x g(\xi) d\xi$$

### В-8.30

Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления  $R$ , самоиндукции  $L$  и емкости  $C$ . В момент времени  $t = 0$  в цепь включается э. д. с.  $E(t)$ . Показать, что сила тока  $i(t)$  в цепи удовлетворяет уравнению  $Z * i = E(t)$ , где

$$Z = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{\theta(t)}{C} \text{ - импеданс цепи.}$$

### В-8.31

Пусть  $f \in D'(R^{n+1})$ . Доказать:

- 1)  $[\delta(x-x_0) \cdot \delta(t)] * f(x, t) = f(x-x_0, t)$
- 2)  $[\delta(x-x_0) \cdot \delta^{(m)}(t)] * f(x, t) = \frac{\partial^m f(x-x_0, t)}{\partial t^m}.$

### В-8.32

Вычислить следующие свертки в  $\mathcal{D}'(R^n)$ :

- 1)  $f * \delta_{S_r}, f(x) \in C$  и  $\delta_{S_r}(x)$  – простой слой на сфере  $|x| = R$  с плотностью 1 (см. §6);
- 2)  $f * \frac{\partial}{\partial n} \delta_{S_r}, f \in C^1$
- 3)  $\delta_{S_r} * |x|^2, n = 3$
- 4)  $\delta_{S_r} * e^{-|x|^2}, n = 3$ ; 5)  $\delta_{S_r} * \sin |x|^2, n = 3$ ; 6)  $\delta_{S_r} * \frac{1}{1+|x|^2}, n = 3$ ; 7)  $\frac{1}{|x|} * \mu \delta_S, n = 3$ ;  $\ln \frac{1}{|x|} * \mu \delta_S, n = 2$ ;
- 8)  $-\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S), n = 3$ ;  $\ln |x| * \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S), n = 2$ ;  $S$  – ограниченная поверхность. Определение обобщенных функций  $\mu \delta_S - \frac{\partial}{\partial n} (\nu \delta_S)$  см. в §6 и §7.

**В-8.33**

Вычислить в  $\mathcal{D}'(R^2)$ :

- 1)  $\theta(t)x * \theta(x)t$ ;
- 2)  $\theta(t - |x|) * \theta(t - |x|)$
- 3)  $\theta(t)\theta(x) * \theta(t - |x|)$ .

**В-8.34**

Пусть  $f, g \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ ,  $f(x, t) = 0$  при  $t < 0$  и  $g = 0$  вне  $\bar{\Gamma}^+$ . Доказать, что свертка  $g * f$  существует в  $\mathcal{D}'(R^{n+1})$  и выражается формулой

$$(g * f, \varphi) = (g(\xi, t) \cdot f(y, \tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2) \varphi(\xi + y, t + \tau)) \\ \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$$

$\eta(t) \in C^\infty(R^1)$ ,  $\eta(t) = 0$  при  $t < -\delta$  и  $\eta(t) \equiv 1$  при  $t > -\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \delta$ ).

**В-8.35**

Пусть  $g(x, t) \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ ,  $g = 0$  вне  $\bar{\Gamma}^+$  и  $u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ . Доказать:

- 1)  $g * u(x) \cdot \delta(t) = g(x, t) * u(x)$ , причем обобщенная функция  $g(x, t) * u(x)$  действует по правилу

$$(g(x, t) * u(x), \varphi) = (g(\xi, t) \cdot u(y), \eta(a^2t^2 - |\xi|^2) \varphi(\xi + y, t)),$$

$\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$

- 2)  $g * u(x) \cdot \delta^{(k)}(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}(g(x, t) * u(x)) = \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial t^k} * u(x)$ .

**В-8.36**

Вычислить в  $\mathcal{D}'(R^2)$ :

- 1)  $\theta(at - |x|) * [\omega(t) \cdot \delta(x)]$ ,  $a > 0$ ,  $\omega(t) \in C(t \geq 0)$  и  $\omega(t) = 0$  при  $t < 0$ ;
- 2)  $\theta(at - |x|) * [\theta(t) \cdot \delta(x)]$ ;
- 3)  $\theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial t}[\theta(t) \cdot \delta(x)]$ ;
- 4)  $\theta(at - |x|) * [\theta(t) \cdot \delta'(x)]$ ; 5)  $\theta(at - |x|) * [\theta(x) \cdot \delta(t)]$ ; 6)  $\theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial t}[\omega(x) \cdot \delta(t)]$ ,  $\omega(x) \in C(R')$  (Указ а и е. Воспользоваться задачей 7.5, 2.); 7)  $\theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial x}[\theta(x) \cdot \delta(t)]$ .

**В-8.37**

Вычислить в  $\mathcal{D}'(R^2)$ :

- 1)  $e^x \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$ ,  $a > 0$
- 2)  $\theta(t) e^t x * \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$
- 3)  $\theta(x) \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$ .

**В-8.38**

Пусть  $f \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$  и  $g \in \mathcal{D}'(R^n)$  финитна. Показать, что  $f * g \in C^\infty(R^n \setminus \text{supp } g)$ .

Указ а и е. Воспользоваться формулой (7).

**В-8.39**

Пусть  $f \in \mathcal{S}'$  и  $g \in \mathcal{D}'$  финитна. Доказать, что  $f * g \in \mathcal{S}'$ .

**В-8.40**

Доказать: если  $f \in \mathcal{D}'$ , то  $f * \omega_\varepsilon \rightarrow f'$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ . Указ а и е. Воспользоваться задачей 6.24. Введем обобщенную функцию  $f_\alpha(x)$ , зависящую от параметра  $\alpha$ ,  $f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\theta(x)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)}(x), & \alpha \leq 0, \alpha + n > 0, N \text{ целое} \end{cases}$  (ср. с задачей 8.15).

**В-8.41**

Доказать, что  $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ .

**В-8.42**

Доказать, что

$$f_0 * = \delta *, \quad f_{-n} * = \frac{d^n}{dx^n} *, \quad f_{n*} = \underbrace{\theta * \theta * \dots * \theta *}_{n \text{ раз}}.$$

Сверточная операция  $f_{-\alpha*}$  при  $\alpha > 0, \alpha$  не равно целому числу, называется (дробкой) производной порядка  $\alpha$  (эту производную обопервообразной порядка  $\alpha$  (эту первообразную обозначим через  $u_{(\alpha)}$ , т. е.  $u_{(\alpha)} = f_\alpha * u$ )

**В-8.43**

Вычислить производную порядка  $3/2$  от  $\theta(x)$ .

**В-8.44**

Вычислить первообразную порядка  $3/2$  от  $\theta(x)$ .

**В-8.45**

Вычислить производную порядка  $1/2$  от  $f(x), f = 0$  при  $x < 0$ .

**В-8.46**

Вычислить первообразную порядка  $1/2$  от  $f(x), f = 0$  при  $x < 0$ . функций со сходимостью  $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{E}'$ , если: а)  $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'$ ; б) существует число  $R$  такое, что  $\text{supp } f_k \subset U_R$  при всех  $k$ . Доказать теорему: если линейный непрерывный оператор  $L$  из  $\mathcal{E}'$  в  $\mathcal{D}'$  коммутирует с операцией сдвига, то  $L$  - оператор свертки,  $L = f_0 *$ , где  $f_0 = L\delta$ .

**В-8.47**

Обозначим через  $\mathcal{E}'$  пространство финитных обобщенных функций со сходимостью  $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{E}'$ , если: а)  $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'$ ; б) существует число  $R$  такое, что  $\text{supp } f_k \subset U_R$  при всех  $k$ . Доказать теорему: если линейный непрерывный оператор  $L$  из  $\mathcal{E}'$  в  $\mathcal{D}'$  коммутирует с операцией сдвига, то  $L$  - оператор свертки,  $L = f_0 *$ , где  $f_0 = L\delta$ .

**14.4.4 Задачи на преобр. Фурье обобщенных функций медленного роста**

**В-9.1**

- 1) Пусть  $f(x) \in C^k(R^1), k \geq 0$ , и  $\int |f^{(\alpha)}(x)| dx < \infty, \alpha \leq k$ ; доказать, что  $F[f] \in C[R^1]$  и  $|\xi|^k |F[f](\xi)| \leq a$ ;
- 2) пусть  $f(x) \in C^k(R^n), k \geq 0$  и  $|x|^{n+l} |D^\alpha f(x)| \leq b, |\alpha| \leq k, l \geq 1$  целое; доказать, что  $F[f] \in C^{l-1}(R^n)$  и  $|\xi|^k |D^\beta F[f](\xi)| \leq b, |\beta| \leq l-1$ .

**В-9.2**

Доказать, что  $f = F^{-1}[F[f]], F^{-1}$  определяется формулой (3), для следующих  $f$ :

- 1)  $f(x) \in C(R^n), |x|^{n+\varepsilon} |f(x)| \leq a, |\xi|^{n+\varepsilon} |F[f](\xi)| \leq a, \varepsilon > 0$ ;
- 2)  $f(x) \in C^2(R^1), \int |f^{(\alpha)}(x)| dx < \infty, \alpha \leq 2$ ;
- 3)  $f(x) \in C^{n+1}(R^n), |D^\alpha f(x)| |x|^{n+1} \leq a, |\alpha| \leq n+1$ . Проверить, что случай 3) вытекает из случая 1).

**В-9.3**

Доказать, что

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

### В-9.4

- 1) Доказать, что если  $\varphi \in \mathcal{S}$ , то и  $F[\varphi] \in \mathcal{S}$ ;
  - 2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ , т. е. что из  $\varphi_k \rightarrow \varphi, k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$  следует  $F[\varphi_k] \rightarrow F[\varphi]$  в  $\mathcal{S}$ .
- Ук а з а н и е. Воспользоваться задачей 9.3.

### В-9.5

- 1) Доказать, что если  $f \in \mathcal{S}'$ , то и  $F[f] \in \mathcal{S}'$ ;
- 2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$ , т. е. из  $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}'$  следует  $F[f_k] \rightarrow F[f]$  в  $\mathcal{S}'$ ;
- 3) доказать, что если  $f$  - функция медленного роста, то

$$F[f](\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} f(x) e^{i(\xi, x)} dx \quad \text{в } \mathcal{S}';$$

- 4) доказать, что если  $f \in L_2(R^n)$ , то  $F[f] \in L_2(R^n)$  и

$$F[f](\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} f(x) e^{i(\xi, x)} dx \quad \text{в } L_2(R^n)$$

- (теорема Планшереля); 5) доказать, что если  $f$  и  $g \in L_2(R^n)$ , то справедливо равенство Парсеваля

$$(2\pi)^n (f, g) = (F[f], F[g]);$$

- 6) доказать, что если  $f \in L_1(R^n)$ , то  $F[f] \in L_\infty(R^n) \cap C(R^n)$  и выражается формулой

$$F[f](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad \|F[f]\|_{L_\infty(R^n)} \leq \|f\|_{L_1(R^n)}, \\ F[f](\xi) \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

- (теорема Римана-Лебега),  $F[f * g] = F[f]F[g], f, g \in L_1(R^n)$ ; 7) доказать, что если  $f \in \mathcal{S}'$  и  $\varphi \in \mathcal{S}$ , то

$$F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi];$$

- 8) пусть  $f \in L_1(R^1)$  - кусочно непрерывная функция такая, что  $\{f'(x)\}$  - также кусочно непрерывна; доказать формулу обращения

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} F[f](\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad x \in R^1.$$

### В-9.6

Доказать в  $\mathcal{S}(R^n)$ :

- 1)  $F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)}$ ;
- 2)  $F[\delta] = 1$ ;
- 3)  $f[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$ ;
- 4)  $F\left[\frac{\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)}{2}\right] = \cos x_0 \xi, \quad n = 1$ ; 5)  $F\left[\frac{\delta(x-x_0) - \delta(x+x_0)}{2i}\right] = \sin x_0 \xi, \quad n = 1$ .

### В-9.7

Доказать в  $\mathcal{S}'(R^n)$ :

- 1)  $F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha$
- 2)  $F[x^\alpha] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi)$ .

### В-9.8

Вычислить преобразования Фурье следующих функций ( $n = 1$ ):

- 1)  $\theta(R - |x|)$
- 2)  $e^{-a^2 x^2}$
- 3)  $e^{ix^2}$ ;
- 4)  $e^{-ix^2}$ ;
- 5)  $f(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $f(x) = k$ ,  $k < x < k+1$ ,  $k = 0, 1, \dots$

### В-9.9

Доказать ( $n = 1$ ):

$$1) F[\theta(x)e^{-ax}] = \frac{1}{a-i\xi}, \quad a > 0$$

$$2) F[\theta(-x)e^{ax}] = \frac{1}{a+i\xi}, \quad a > 0;$$

$$3) F[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2+\xi^2}, \quad a > 0;$$

$$4) F\left[\frac{2a}{a^2+x^2}\right] = 2\pi e^{-a|\xi|}, \quad a > 0; \quad 5) F\left[\theta(x)e^{-ax} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] = \frac{1}{(a+i\xi)^\alpha}, \quad a > 0, \alpha > 0.$$

### В-9.10

Воспользовавшись формулой Сохоцкого (см. задачу 6.20) и результатами задач 9.5 и 9.9, 1) и 2), доказать:

$$1) F[\theta(x)] = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$$

$$2) F[\theta(-x)] = \pi\delta(\xi) - i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}.$$

### В-9.11

Вычислить преобразования Фурье следующих обобщенных функций ( $n = 1$ ):

$$1) \delta^{(k)}, k = 1, 2, \dots;$$

$$2) \theta(x-a)$$

$$3) \operatorname{sign} x;$$

$$4) 9\frac{1}{x}; \quad 5) \frac{1}{x \pm i0}; \quad 6) |x|; \quad 7) \theta(x)x^k, k = 1, 2, \dots; \quad 8) |x|^k, k = 2, 3, \dots; \quad 9) x^k \mathcal{P}\frac{1}{x}, k = 1, 2, \dots; \quad 10) x^k \delta, k = 1, 2, \dots \quad 11)$$

$$x^k \delta^{(m)}(x), m \geq k$$

$$13) \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \mathcal{P}\frac{1}{x^3} \text{ определена в задаче 7.10; } 1$$

$$4) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k), |a_k| \leq C(1+|k|)^m \quad 15) \theta^{(1/2)}(x) \text{ (определение дробных производных см. в § 8).}$$

### В-9.12

Доказать, что

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right] = -2c - 2\ln|\xi|,$$

где

$$c = \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u} du - \int_1^\infty \frac{\cos u}{u} du - \text{постоянная Эйлера},$$

а  $\mathcal{P}\frac{1}{|x|}$  ( $x \in R^1$ ) определена в задаче 7.26.

### В-9.13

Доказать, что

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}\right] = -2\pi \ln|\xi| - 2\pi c_0,$$

где обобщенная функция  $\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}, x \in R^2$ , определяется формулой

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx$$

$$c_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u} du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u} du$$

и  $J_0$  - функция Бесселя.

### В-9.14

Решить в  $\mathcal{S}'$  интегральное уравнение

$$\int_0^\infty u(\xi) \cos \xi x dx = \theta(1-x)$$



**В-9.15**

Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx.$$

Ук аз ан и е. Воспользоваться равенством Парсеваля и задачей 9.8, 1).

**В-9.16**

Доказать, что

$$F \cdot \left[ \frac{\theta(R - |x|)}{\sqrt{R^2 - |x|^2}} \right] = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}, \quad \xi \in R^2.$$

**В-9.17**

Доказать:

$$1) F \left[ \frac{1}{|x|^2} \right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \quad \xi \in R^3;$$

$$2) F [|x|^{-k}] = 2^{n-k} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} |\xi|^{k-n}, \quad \xi \in R^n, 0 < k < n.$$

Ук аз ан и е. Воспользоваться формулой (2) при  $f = |x|^{-k}$  в  $\mathcal{S}'(R^1)$  и  $\varphi = e^{-|x|^2/2}$ .

**В-9.18**

Доказать, что  $F \left[ \frac{1}{z} \right] = \frac{2\pi i}{\zeta}, \zeta = \xi + i\eta$ .

**В-9.19**

Вычислить преобразование Фурье обобщенной функции  $\frac{1}{4\pi r} \delta_{S_r}, n = 3$ , определенной в §6.

**В-9.20**

Методом преобразования Фурье доказать в  $\mathcal{S}'(R^1)$ , что:

$$1) y = c_0 \delta(x) + c_1 \delta^1(x) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x) - \text{общее решение уравнения } x^n y = 0, n = 1, 2, \dots;$$

$$2) \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k \delta^{(k-m)}(x) - \text{общее решение уравнения } x^n y^{(m)} = 0, n > m.$$

Ук а а н и е. Воспользоваться задачами 7.23, 2) и 7.24.

**В-9.21**

Доказать в  $\mathcal{S}'(R^{n+1}(x, t)), (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ :

$$1) F_x [\delta(x, t)] = 1(\xi) \cdot \delta(t);$$

$$2) F_x \left[ \frac{\partial^m f(x, t)}{\partial t^m} \right] = \frac{\partial^m}{\partial t^m} F_x [f(x, t)];$$

$$3) F_x [\theta(at - |x|)] = 2\theta(t) \sin \frac{a\xi t}{\xi}, a > 0, n = 1$$

$$4) F_x [f(x) \delta(t)] = F[f](\xi) \delta(t), f \in \mathcal{S}'(R^n).$$

**В-9.22**

Доказать в  $\mathcal{S}'(R^{n+m})$ :

$$1) D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x [f(x, y)] = F_x [(ix)^\alpha D_y^\beta f];$$

$$2) F_x [D_x^\alpha D_y^\beta f] = (-i\xi)^\alpha F_x [D_y^\beta f].$$

**В-9.23**

Доказать, что в  $\mathcal{S}'(R^2)$

$$F_\xi^{-1} [\theta(t) e^{-a^2 \xi^2 t}] = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}.$$

Ук а з ан и е. Воспользоваться формулой (3) и задачей 9.8, 2). 119

### В-9.24

Доказать, что в  $\mathcal{S}'(R^{n+1})$

$$F_{\xi}^{-1} \left[ \theta(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] = \theta(t) \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n e^{-|x|^2/(4a^2 t)}.$$

У к а а н и е. Воспользоваться задачей 9.23.

### В-9.25

Доказать, что в  $\mathcal{S}'(R^2)$

$$F_{\xi}^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin a \xi t}{a \xi} \right] = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 9.8, 1).

### В-9.26

Доказать, что в  $\mathcal{S}'(R^3)$

$$F_{\xi}^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin a |\xi| t}{a |\xi|} \right] = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 9.16.

### В-9.27

Доказать, что в  $\mathcal{S}'(R^4)$

$$F_{\xi}^{-1} \left[ \theta(t) \frac{\sin a |\xi| t}{a |\xi|} \right] = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x)$$

(здесь  $S_{at} = \{x : |x| = at\}$ ).

У к а а н и е. Воспользоваться задачей 9.19.

### В-9.28

Пусть  $f$  - финитная обобщенная функция и  $\eta$  - любая функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 в окрестности носителя  $f$ . Доказать, что функция  $\tilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi) e^{i(z, \xi)})$ ,  $z = x + iy$ : а) не зависит от  $\eta$ ; б) целая; в)  $\tilde{f}(x) = F[f]$ .

### В-9.29

Доказать, что если  $f$  и  $g$  финитны и  $f * g = 0$ , то либо  $f = 0$ , либо  $g = 0$ .

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 9.28.

### В-9.30

- 1) Доказать, что  $F[\delta(x) \cdot 1(y)] = (2\pi)^m 1(\xi) \delta(\eta)$ ;
- 2) обозначим  $\delta$ -функцию на гиперплоскости  $(a, x) = 0$  пространства  $R^n$  через  $\delta((a, x))$ , так что

$$(\delta((a, x)), \varphi) = \int_{(a, x)=0} \varphi ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n).$$

Доказать, что  $F[\delta(a_1 x_1 + a_2 x_2)] = 2\pi \delta(a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)$ .

## 14.4.5 Задачи на преобразование Лапласа обобщенных функций

В задачах 10.1-10.9 и 10.11-10.14 доказать утверждения.

### В-10.1

Если  $f(t)$  - локально интегрируема в  $R^1$ ,  $f(t) = 0, t < 0$  и

$$f(t) = O(e^{at}), t \rightarrow \infty, \text{ то } f \in \mathcal{D}'_+(a) \text{ и}$$

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad \sigma > a$$

### В-10.2

Если  $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $f(t) \longleftrightarrow \mathcal{F}(p)$ ,  $\sigma > a$  и функция  $\mathcal{F}(\sigma + i\omega)$  абсолютно интегрируема по  $\omega$  на  $R^1$  при некотором  $\sigma > a$ , то в этом случае формула обращения принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{F}(p) e^{pt} dp.$$

### В-10.3

- 1)  $\mathcal{D}'_+(a_1) \subset \mathcal{D}'_+(a_2)$ , если  $a_1 \leq a_2$ ;
- 2) если  $f \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{D}'_+$ , то  $f \in \mathcal{D}'_+(0)$ .

### В-10.4

Если  $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ , то:

- 1)  $pf \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $p$  — полином;
- 2)  $f(kt) \in \mathcal{D}'_+(ka)$ ,  $k > 0$
- 3)  $f(t)e^{\lambda t} \in \mathcal{D}'_+(a + \operatorname{Re} \lambda)$ .

### В-10.5

Если  $f, g \in \mathcal{D}'_+(a)$ , то  $f * g \in \mathcal{D}'_+(a)$  и справедливо равенство

$$(f * g)e^{-\sigma t} = (fe^{-\sigma t}) * (ge^{-\sigma t}), \quad \sigma > a.$$

Указание. Воспользоваться 8.20.

### В-10.6

Если  $f \in \mathcal{D}'_+(a)$ , то:

- 1)  $f(t - \tau) \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $\tau \geq 0$ ;
- 2)  $f^{(m)} \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;
- 3)  $f_{(m)} \in \mathcal{D}'_+(a)$ ,  $m = 1, 2, \dots$

### В-10.7

- 1)  $\delta(t) \longleftrightarrow 1$ ;
- 2)  $\delta^{(m)}(t - \tau) \longleftrightarrow p^m e^{-\tau p}$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $p$  любое,  $m = 0, 1, \dots$ ;
- 3)  $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p}$ ,  $\sigma > 0$ ;
- 4)  $\theta(t)e^{i\omega t} \longleftrightarrow \frac{1}{p - i\omega}$ ,  $\sigma > 0$ ; 5)  $\theta(t)e^{-i\omega t} \longleftrightarrow \frac{1}{p + i\omega}$ ,  $\sigma > 0$  6)  $\theta(t) \cos t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ ,  $\sigma > 0$  7)  $\theta(t) \sin t \longleftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ ,  $\sigma > 0$ ; 8)  $\frac{\theta(t)t^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{\lambda t} \longleftrightarrow \frac{1}{(p - \lambda)^m}$ ,  $\sigma > \operatorname{Re} \lambda$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ; 9)  $\theta(t)J_0(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ ,  $\sigma > 0$ .

### В-10.8

Если  $f$  — функция из  $\mathcal{D}'_+(a)$ ,  $f \in C^n(t \geq 0)$  и  $f \longleftrightarrow \mathcal{F}$ , то  $\{f^{(n)}(t)\} \longleftrightarrow p^n \mathcal{F}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0)p^{n-k-1}$ ,  $\sigma > a$ .

### В-10.9

Если  $f$  и  $g$  — функции из  $\mathcal{D}'_+(a)$ ,  $g \in C^1(t \geq 0)$  и  $f \longleftrightarrow \mathcal{F}$ ,  $g \longleftrightarrow \mathcal{G}$ , то  $\int_0^t f(\tau) \{g'(t - \tau)\} d\tau \longleftrightarrow p\mathcal{F}(p)\mathcal{G}(p) - g(+0)\mathcal{F}(p)$ ,  $\sigma > a$ .

### В-10.10

Решить уравнение  $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t)$ ,  $e(t)$  — локально интегрируемая функция,  $e(t) = 0$ ,  $t < 0$ .

### В-10.11

Фундаментальное решение  $\mathcal{E}(t)$  уравнения

$$\mathcal{E}^{(m)} + a_1 \mathcal{E}^{(m-1)} + \dots + a_m \mathcal{E} = \delta$$

существует и единственно в классе  $\mathcal{D}'_+(a)$  и удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{E}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{Q(p)}, \quad \sigma > a,$$

$\theta(p) = p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m, a = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j, \lambda_j$  — корни полинома  $Q$ .

### В-10.12

Если  $f_\alpha(t), -\infty < \alpha < \infty$ , — обобщенная функция, введенная в §8 (с. 110), то:

- 1)  $f_\alpha(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p^\alpha}, \sigma > 0, p^\alpha$  — та ее ветвь, для которой  $p^\alpha > 0$  при  $p > 0$ ;
- 2)  $f_\alpha(t)e^{\lambda t} \longleftrightarrow \frac{1}{(p-\lambda)^\alpha}; \sigma > \operatorname{Re} \lambda$ .

### В-10.13

Если  $|a_k| \leq c(1+k)^m, k = 0, 1, \dots$ , то

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t-k) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kp}, \quad \sigma > 0.$$

### В-10.14

Если  $f(t)$  —  $T$ -периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде, то

$$\theta(t)f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt, \quad \sigma > 0.$$

### В-10.15

Найти решения уравнений в классе  $\mathcal{D}'_+(a)$  (при надлежащем  $a$ ): 1)  $(\theta \cos t) * \mathcal{E} = \delta(t)$ ; 2)  $(\theta t \cos t) * \mathcal{E} = \delta(t)$ ;

3)  $\mathcal{E} + 2(\theta \cos t) * \mathcal{E} = \delta(t)$ ;

$$4) \begin{cases} \theta * u_1 + \delta' * u_2 = \delta(t) \\ \delta * u_1 + \delta' * u_2 = 0 \end{cases}$$

### В-10.16

Пусть  $\mathcal{E}_1$  — решение уравнения  $g * \mathcal{E}_1 = \theta$  в  $\mathcal{D}'_+(a)$ , причем  $\mathcal{E}_1$  — локально интегрируемая функция,  $\mathcal{E}_1 \in C^1(t \geq 0)$ . Доказать, что решение в  $\mathcal{D}'_+(a)$  уравнения  $g * u = f, f$  — локально интегрируемая функция из  $\mathcal{D}'_+(a)$ , выражается формулой

$$u(t) = \mathcal{E}_1(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau) \{\mathcal{E}'_1(t-\tau)\} d\tau.$$

### В-10.17

Вычислить преобразование Лапласа функции

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2^k, & k < t < k+1, k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

### В-10.18

Решить уравнение  $\chi * a = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta(t-k)$  в  $\mathcal{D}'_+(\ln 2)$ ; функция  $a(t)$  определена в задаче 10.17.

### В-10.19

Доказать формулу:  $\sin t = \int_0^t J_0(t-\tau)J_0(\tau)d\tau$ .

### В-10.20

Решить следующие задачи Коши:

- 1)  $u' + 3u = e^{-2t}$ ,  $u(0) = 0$ ;
- 2)  $u'' + 5u' + 6u = 12$ ,  $u(0) = 2, u'(0) = 0$ ;
- 3)  $\begin{cases} u' + 5u + 2v = e^{-t}, \\ v' + 2v + 2u = 0, \end{cases}$   $u(0) = 1, v(0) = 0$ .

## 14.4.6 Задачи на фундаментальные решения линейных дифф. операторов

### В-11.1

Доказать, что единственное в  $\mathcal{D}'_+$  фундаментальное решение оператора

$$\frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_m$$

выражается формулой задачи 8.26 (определение  $\mathcal{D}'_+$  см. §8).

### В-11.2

Доказать, что функция  $\mathcal{E}(x)$  является фундаментальным решением оператора:

- 1)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{\pm ax}$ ,  $\frac{d}{dx} \mp a$ ;
- 2)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\frac{\sin ax}{a}$ ,  $\frac{d^2}{dx^2} + a^2$ ;
- 3)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\frac{\sinh ax}{a}$ ,  $\frac{d^2}{dx^2} - a^2$ ;
- 4)  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{\pm ax}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ ,  $(\frac{d}{dx} \mp a)^m$ ,  $m = 2, 3, \dots$

### В-11.3

Найти единственные в  $\mathcal{D}'_+$  фундаментальные решения следующих операторов:

- 1)  $\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}$
- 2)  $\frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 1$
- 3)  $\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2$
- 4)  $\frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 5$  5)  $\frac{d^3}{dx^3} - a^3$ ; 6)  $\frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}$  7)  $\frac{d^4}{dx^4} - a^4$  8)  $\frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ .

### В-11.4

Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{\pi z} = \frac{1}{\pi(x+iy)}$  - Фундаментальное решение оператора Коши-Римана  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$
- 2)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{\bar{z}^{k-1} e^{\lambda z}}{\pi \Gamma(k) z}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , - фундаментальное решение оператора  $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda)^k$
- 3)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{2\bar{z}^{k-1} z^{m-1}}{\pi \Gamma(k) \Gamma(m)} \ln |z|$ ,  $k, m = 1, 2, \dots$ , - фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial^{k+m}}{\partial \bar{z}^k \partial z^m}$ ;
- 4)  $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda}{y - \lambda x} e^{-\mu \alpha}$  - фундаментальное решение обобщенного оператора Коши-Римана  $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} + \mu, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ .

### В-11.5

Доказать, что  $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$  - фундаментальное решение оператора Лапласа в  $R^2$ . Выяснить физический смысл.

### В-11.6

Доказать: са в  $R^3$ ; выяснить физический смысл;

2)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, n = 3, 4, \dots$  – фундаментальное решение оператора Лапласа в  $R^n$ ,  $\sigma_n = \int_{S_1} dS = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  – площадь поверхности единичной сферы в  $R^n$ ;

3)  $\mathcal{E}_{n,k}(x) = \frac{(-1)^k \Gamma(n/2-k)}{2^{2k} \pi^{n/2} \Gamma(k)} |x|^{2k-n}$  – фундаментальное решение итерированного оператора Лапласа  $\Delta^k$  при  $2k < n, k = 1, 2, \dots$ ,

$$\mathcal{E}_{n,k}(x) = \frac{1}{\pi \cdot 2^{2k-1} \Gamma(k)} |x|^{2k-2} \ln |x|, \quad n = 2.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 9.17, 2).

### В-11.7

Доказать, что  $\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$  и  $\overline{\mathcal{E}}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$  – фундаментальные решения оператора Гельмгольца  $\Delta + k^2$  в  $R^3$ .

### В-11.8

Доказать, что если функция  $u(x)$  удовлетворяет в  $R^3$  уравнению  $\Delta u + k^2 u = 0$  и условиям излучения

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku(x) = o(|x|^{-1})$$

$\infty$ , то  $u \equiv 0$ .

при  $|x| \rightarrow \infty$ , то  $u \equiv 0$ .

### В-11.9

Доказать, что фундаментальными решениями оператора Гельмгольца  $\Delta + k^2$  являются функции:

1)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|)$  и  $\overline{\mathcal{E}}(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x|)$  в  $R^2$ ,  $H_0^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , – функции Ханкеля;

2)  $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{i2k} e^{ik|x|}$  и  $\overline{\mathcal{E}}(x) = -\frac{1}{i2k} e^{-ik|x|}$  в  $R^1$ .

### В-11.10

Доказать, что фундаментальными решениями оператора  $\Delta - k^2$  являются функции:

1)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$  в  $R^3$ ;

2)  $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2\pi} K_0(k|x|)$  в  $R^2$ ,  $K_0(\xi) = i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\xi)$  – функция Ханкеля мнимого аргумента;

3)  $\mathcal{E}(x) = \frac{e^{-k|x|}}{2k}$  в  $R^1$

4)  $\mathcal{E}(x) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{k}{|x|}\right)^{n/2-1} K_{n/2-1}(k|x|)$  в  $R^n$ .

### В-11.11

Доказать, что если  $\mathcal{E}_1(x, t)$  – фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial}{\partial t} + L(D_x)$ , то  $\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \mathcal{E}_1(x, t)$  – фундаментальное решение оператора  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + L(D_x)\right)^k$ .

### В-11.12

Доказать, что:

1)  $\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$  – фундаментальное решение оператора теплопроводности  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$  в  $R^n$ ; выяснить физический смысл;

2)  $\frac{\theta(t)t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n \Gamma(k)} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$  – Ф фундаментальное решение оператора  $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta\right)^k$  в  $R^n, k = 1, 2, \dots$

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 11.11.

### В-11.13

Доказать, что  $\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{ct-(x+bt)^2/(4a^2 t)}$  – фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial x} - c$ .

### В-11.14

Доказать, что:

1)  $\mathcal{E}_1(x, t) = -\frac{i\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{i(x^2/(4t) - \pi/4)}$  – Фундаментальное решение оператора Шрёдингера  $i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

(Указан и е. Воспользоваться формулой  $\int_0^\infty e^{iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$ )

2)  $\mathcal{E}_n(x, t) = -\frac{i\theta(t)}{\hbar} \left(\frac{m_0}{2\pi\hbar t}\right)^{n/2} \exp\left\{i\left[\frac{|x|^2}{2\hbar t}(m + i0) - \frac{\pi n}{4}\right]\right\}$  – фундаментальное решение оператора  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta$ ;  $n$  любое;

3)  $\frac{\theta(t)t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n \Gamma(k)} \exp\left\{\pm\left(\frac{|x|^2}{4ia^2t} + \frac{\pi n}{4}i\right)\right\}, k = 1, 2, \dots$  – фундаментальное решение оператора  $(\frac{\partial}{\partial t} \pm ia^2\Delta)^k$  в  $R^n$  (Указан и е. Воспользоваться задачей 11.11.).

### В-11.15

Доказать, что:

1)  $\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$  – фундаментальное решение одномерного волнового оператора  $\square_a$ ; выяснить физический смысл;

2)  $\mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}$  – фундаментальное решение двумерного волнового оператора

$\square_a, x = (x_1, x_2)$ ; выяснить физический смысл.

Указан и е. Воспользоваться задачей 9.26.

### В-11.16

Доказать, что:

1)  $\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2t^2 - |x|^2), S_{at} : |x| = at$ , является фундаментальным решением трехмерного волнового оператора  $\square_a, x = (x_1, x_2, x_3)$ ; выяснить физический смысл (

Указан и е. Воспользоваться задачей 9.27.);

3)  $\frac{1}{\pi^{2k-1} a^{2k+1} \Gamma(k) \Gamma(k-1)} (a^2t^2 - |x|^2)^{k-2} \theta(at - |x|)$  – фундаментальное решение оператора  $\square_a^k$  в  $R^n$ ;

4) фундаментальное решение оператора  $\square_a$  в  $R^4$  можно представить в виде

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{1}{8\pi a^3} \square_a \theta(at - |x|).$$

### В-11.17

Доказать, что

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2a)^{n-2} \pi^{(n-1)/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \square_a^{(n-3)/2} [\theta(t) \delta(a^2t^2 - |x|^2)], \\ \frac{1}{(2a)^{n-1} \pi^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \square_a^{(n-2)/2} \left[ \frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}} \right], \end{cases} \quad n \text{ четное,}$$

является фундаментальным решением волнового оператора  $\square_a$ .

Указан и е. При нечетных  $n$  воспользоваться формулой

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \theta(t) F_\xi^{-1} \left[ \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \right]$$

и задачей 9.27; при четных  $n$  применить метод спуска по переменной  $x_{n+1}$ .

### В-11.18

Доказать, что  $\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)e^{b(at-x)/(2a^2)}$  – фундаментальное решение оператора

$$\square_a - b\frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{где } a, b > 0.$$

Указан и е. Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{z\tau}}{z} dz = \theta(\tau), \quad \alpha > 0.$$

**В-11.19**

Доказать, что:

- 1)  $\mathcal{E}(x, t) = -\theta(t)\theta(-x)e^{at+bx}$  - фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} - b \frac{\partial}{\partial t} + ab$ ,  $b > 0$  (см. указание к задаче 11.18);
- 2)  $\mathcal{E}(x, t) = \theta(t)\theta(x)I_0(2m\sqrt{xy})$  - фундаментальное решение оператора  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - m^2$  в  $R^2$ .

**В-11.20**Доказать, что фундаментальным решением оператора  $\square_a - m^2$  является функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a} I_0\left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}\right).$$

**В-11.21 Фундаментальное решение Клейна-Гордона (!!!!!)**Доказать, что фундаментальным решением оператора Клейна-Гордона-Фока  $\square_a + m^2$  являются функции

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(at - |x|)}{2a} J_0\left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}\right), \quad n = 1; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a^2} \frac{\cos\left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}\right)}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2}}, \quad n = 2; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2) - \frac{m}{4\pi a^2} \theta(at - |x|) \frac{J_1\left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}\right)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad n = 3, \end{aligned}$$

 $J_0, J_1$  — функции Бесселя.**Решение** (!!! доучу когда-то, мб скоро!!!! не знаю пока!!! в 1ю впишу тоже это!!!)**В-11.22 Фундаментальное решение телеграфного уравнения (??)**Доказать, что фундаментальными решениями телеграфного оператора  $\square_a + 2m \frac{\partial}{\partial t}$  являются функции

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \frac{1}{2a} e^{-mt} \theta(at - |x|) I_0\left(m \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right), \quad n = 1; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{e^{-mt} \theta(at - |x|) \operatorname{ch}\left(m \sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}\right)}{2\pi a^2 \sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}}, \quad n = 2; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(at)}{2\pi a} e^{-mt} \delta(a^2 t^2 - |x|^2) - \frac{m e^{-mt} \theta(at - |x|) I_1\left(m \sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}\right)}{4\pi a^3 \sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}}, \quad n = 3, \end{aligned}$$

 $I_0(\xi) = J_0(i\xi), I_1(\xi) = -iJ_1(i\xi)$  — функции Бесселя мнимого аргумента.

Ук а з а н и е. Воспользоваться фундаментальным решением Клейна-Гордона.

**Решение****В-11.23 Оператор переноса (?????)**

1) Доказать, что

$$\mathcal{E}(x, t) := v\theta(t)e^{-\alpha vt}\delta(x - vts),$$

где  $(\theta(t)e^{-\alpha vt}\delta(x - vts), \varphi(x, t)) = \int_0^\infty e^{-\alpha vt}\varphi(vts, t)dt$  это фундаментальное решение оператора переноса

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + (s, \operatorname{grad} \mathcal{E}) + \alpha \mathcal{E} = \delta(x, t), \quad |s| = 1, \quad v > 0, \quad \alpha \geq 0; \quad n = 3.$$

2) Доказать, что

$$\mathcal{E}^0(x) := \left( \frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2} \delta\left(s - \frac{x}{|x|}\right), \varphi \right) = \int_0^\varphi e^{-\alpha\rho} \varphi(\rho s) d\rho$$

это фундаментальное решение стационарного оператора переноса

$$(S, \operatorname{grad} \mathcal{E}^0) + \alpha \mathcal{E}^0 = \delta(x), \quad n = 3.$$



### В-11.24

Найти фундаментальное решение уравнения  $Z * \mathcal{E} = \delta$ ,  $Z$  из задачи 8.30.

### В-11.25

Доказать, что если  $\mathcal{E}(x, t)$  - фундаментальное решение оператора переноса

$$L(D) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \alpha, \quad |a| \neq 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(k)|a|^{2(k-1)}} (\bar{a}_1 x_1 + \dots + \bar{a}_n x_n)^{k-1} \mathcal{E}(x, t)$$

то - фундаментальное решение оператора  $L^k(D)$ .

Ук аз ан и е. Воспользоваться индукцией по  $k$ . Пусть  $f(x, t) \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$  и  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(R^n)$ . Введем обобщенную функцию  $(f(x, t), \varphi(x)) \in \mathcal{D}'(R^1)$ , действующую на основные функции  $\psi \in \mathcal{D}(R^1)$  по формуле  $((f(x, t), \varphi(x)), \psi(t)) = (f, \varphi\psi)$ . Из определения вытекает, что

$$\left( \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k}, \varphi(x) \right) = \frac{d^k}{dt^k} (f(x, t), \varphi(x)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Говорят, что обобщенная функция  $f(x, t)$  принадлежит классу  $C^p$  по переменной  $t$  в интервале  $(a, b)$ , если для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$  обобщенная функция  $(f(x, t), \varphi(x)) \in C^p(a, b)$ .

### В-11.26

Для фундаментальных решений  $\mathcal{E}_n(x, t)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , волнового оператора, рассмотренных в задачах 11.15-11.16, доказать:

- 1)  $\mathcal{E}_n(x, t) \in C^\infty$  по  $t \in [0, \infty)$ ;
- 2)  $\mathcal{E}_n(x, t) \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x)$ ,  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(R^n)$

### В-11.27

Для фундаментального решения  $\mathcal{E}(x, t)$  оператора теплопроводности (см. задачу 11.12) доказать, что

$$\mathcal{E}(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow +0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(R^n).$$

### В-11.28

Для фундаментального решения оператора Шрёдингера (см. задачу 11.14) доказать, что

$$\mathcal{E}_1(x, t) \rightarrow -i\delta(x), \quad t \rightarrow +0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(R^1).$$

### В-11.29

Для фундаментального решения из задачи 11.18 доказать:

- 1)  $\mathcal{E}(x, t) \in C^\infty$  по  $t \in [0, \infty)$
- 2)  $\mathcal{E}(x, t) \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x)$ ,  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow -\frac{b}{a}\delta(x)$ ,  $t \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(R^1)$ .

### В-11.30

Для фундаментального решения из задачи 11.13 доказать, что

$$\mathcal{E}(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow +0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(R^1).$$

## 14.5 Функциональные пространства и интегральные уравнения

### 14.5.1 Задачи на измеримость функций, интеграл Лебега

(это же в функане. Скучные задачи, мб когда-то посмотрю.)

**В-3.1**

Установить, что следующие множества являются множествами меры нуль:

- 1) конечное множество точек;
- 2) счетное множество точек;
- 3) пересечение счетного множества множеств меры нуль;
- 4) объединение счетного множества множеств меры нуль;
- 5) гладкая  $(n-1)$ -мерная поверхность;
- 6) гладкая  $k$ -мерная поверхность ( $k \leq n-1$ ). В задачах 3.2-3.9 доказать утверждения.

**В-3.2**

Функция Дирихле  $\chi(x)$  (равная 1, если все координаты точки  $x$  рациональны, и 0 в противном случае) равна нулю п. в.

**В-3.3**

Функция  $f(x) = \frac{1}{1-|x|}$  почти всюду непрерывна в  $R^n$ .

**В-3.4**

Последовательность функций  $f_n(x) = |x|^n$  в шаре  $|x| \leq 1$  сходится к нулю п. в.

**В-3.5**

Теорема. Для того чтобы множество  $E$  было множеством меры нуль, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое его покрытие сетью системой открытых кубов с конечной суммой объемов, при котором каждая точка  $E$  оказывается покрытой бесконечным множеством кубов.

**В-3.6**

Функция  $f \in C(Q)$  измерима.

**В-3.7**

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны и  $g(x)$  измерима в  $Q$ , то  $f(x)$  тоже измерима в  $Q$ .

**В-3.8**

Предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций является измеримой функцией.

**В-3.9**

Функция, непрерывная в  $Q$  за исключением подмножества, составленного из конечного (или счетного) числа гладких  $k$ -мерных поверхностей ( $k \leq n-1$ ), измерима в  $Q$ .

**В-3.10**

Установить измеримость следующих функций, заданных на отрезке  $[-1, 1]$  а)  $y = \operatorname{sign} x$ ; б)  $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  в)  $y = \begin{cases} \operatorname{sign} \left( \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  г)  $y = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n} \text{ при взаимно простых } m, n, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

**В-3.11**

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы в  $Q$ . Установить измеримость следующих функций: а)  $f(x)g(x)$ ; б)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (при условии  $g(x) \neq 0, x \in Q$ ); в)  $|f(x)|$ ; г)  $(f(x))^{g(x)}$ , если  $f(x) > 0$ .

**В-3.12**

Пусть  $f(x) \in C(Q)$  и в каждой точке  $x \in Q$  существует производная  $f_{x_i}$ . Доказать, что  $f_{x_i}$  измерима в  $Q$ .

**В-3.13**

а) Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы в  $Q$ . Доказать измеримость в  $Q$  функций  $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$ . б) Доказать, что всякая измеримая функция  $f(x)$  есть разность двух неотрицательных измеримых функций

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \min\{0, -f(x)\}.$$

**В-3.14**

Доказать, что неубывающая (невозрастающая) на отрезке  $[a, b]$  функция измерима.

**В-3.15**

Доказать, что если  $f(x)$  измерима в  $Q$ , то существует последовательность многочленов, сходящихся к  $f(x)$  п. в. в  $Q$ .  
В задачах 3.16-3.20 доказать утверждения.

**В-3.16**

Если  $f(x) \geq 0$  и  $\int_Q f(x) dx = 0$ , то  $f(x) = 0$  п. в. в  $Q$ .

**В-3.17**

Если  $f(x) = 0$  п. в. в  $Q$ , то  $\int_Q f dx = 0$ .

**В-3.18**

Если  $f, g \in L_1(Q)$ , то  $\alpha f + \beta g \in L_1(Q)$  при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ .

**В-3.19**

Если  $f \in L_1(Q)$ , то  $|f| \in L_1(Q)$  и

$$\left| \int_Q f dx \right| \leq \int_Q |f| dx$$

**В-3.20**

Если  $f \in L_1(Q)$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такая финитная функция  $g_\varepsilon \in C(\bar{Q})$ , что  $\int_Q |f - g_\varepsilon| dx < \varepsilon$ .

**В-3.21**

Проверить, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$ , но не интегрируема по Риману. Чему равен ее интеграл Лебега?

**В-3.22**

Найти интегралы по отрезку  $[0, 1]$  от следующих функций (предварительно доказав их интегрируемость):

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases} \quad \text{б)}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } 1/3, \\ x^3, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } 1/3, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } 1/2, \\ x^2, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } 1/2, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases} \quad \text{г)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = m/n, \text{ где } m, n \text{ взаимно просты,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \end{cases}$$

$$\text{д) } f(x) = \begin{cases} x^{-1/3}, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ x^3, & \text{если } x \text{ рационально;} \end{cases} \quad \text{е) } f(x) = \operatorname{sign} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right).$$

**В-3.23**

При каких значениях  $\alpha$  интегрируемы по шару  $|x| < 1$  следующие функции: а)  $f(x) = \frac{1}{|x|^2}$  б)  $f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^\alpha}$  в)  $f(x) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{|x|^\alpha}$ ?

**В-3.24**

Пусть  $g(x)$  - измеримая и ограниченная функция в ограниченной области  $Q$ . Показать, что функция  $f(x) = \int_Q \frac{g(\xi)}{|x-\xi|^\alpha} d\xi$  принадлежит  $C^k(R^n)$  при  $k < n - \alpha$ .

**В-3.25**

Пусть  $f \in L_1(Q)$ . Показать, что функция

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если в точке } x |f(x)| < N, \\ N, & \text{если в точке } x |f(x)| \geq N, \end{cases}$$

интегрируема по  $Q$  и справедливо соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_Q f_N(x) dx = \int_Q f(x) dx.$$

**В-3.26**

Пусть  $Q = (0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1)$ , а функция  $f(x)$  задана в  $Q$  следующим образом: а)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{|x|^4} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$  б)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0; \end{cases}$  в)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2^2} & \text{при } 0 < x_1 < x_2 < 1, \\ -\frac{1}{x_1^2} & \text{при } 0 < x_2 < x_1 < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

- 1) Принадлежат ли эти функции пространству  $L_1(Q)$ ?
- 2) Принадлежат ли  $L_1(0, 1)$  функции  $\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1, \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2$ ?
- 3) Выполняется ли равенство

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 dx_2 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1?$$

**В-3.27**

На отрезке  $[0, 1]$  задана последовательность ступенчатых функций  $f_n(x), n = 1, 2, \dots$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{i}{2^k} \leq x \leq \frac{i+1}{2^k} \\ 0 & \text{для остальных } x \in [0, 1], \end{cases}$$

где целые числа  $n, k, i$  связаны соотношениями

$$n = 2^k + i, \quad 0 \leq i \leq 2^k - 1.$$

Показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 0$  и что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $x \in [0, 1]$ .

Множество измеримых в  $Q$  функций, квадрат модуля которых принадлежит  $L_1(Q)$ , называется пространством  $L_2(Q)$  (при этом, как и в случае  $L_1(Q)$ ; эквивалентные функции считаются отождествленными). В задачах 3.28-3.33 доказать утверждения.

**В-3.28**

Если  $f_1, f_2 \in L_2(Q)$ , то  $\alpha f_1 + \beta f_2 \in L_2(Q)$  при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ .

**В-3.29**

Если  $f \in L_2(Q)$  и  $Q$  - ограниченная область (или область с ограниченным объемом), то  $f \in L_1(Q)$ .

**В-3.30**

Ни одно из включений  $L_1(R^n) \subset L_2(R^n)$ ,  $L_2(R^n) \subset L_1(R^n)$  места не имеет.

**В-3.31**

Если  $f, g \in L_2(Q)$ , то  $f \cdot g \in L_1(Q)$ .

**В-3.32**

Если  $f, g \in L_2(Q)$ , то имеет место неравенство Буняковского

$$\left| \int_Q f \cdot g dx \right| \leq \left( \int_Q |f|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_Q |g|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**В-3.33**

Если  $f, g \in L_2(Q)$ , то имеет место неравенство Минковского

$$\left( \int_Q |f + g|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_Q |f|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_Q |g|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**В-3.34**

Установить принадлежность к  $L_2(Q)$  следующих функций: а)  $y = x^{-1/3}$ ,  $Q = [0, 1]$ ; б)  $y = \frac{\sin x}{x^{3/4}}$ ,  $Q = (0, 1)$  в)  $y = \begin{cases} x^{-1/3} \cos x, & x \text{ иррационально,} \\ x^{-1/3}, & x \text{ рационально, } x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad Q = [-1, 1]; \quad \text{г) } y = \begin{cases} \frac{\sin(x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & |x| \neq 0, \\ 0, & |x| = 0, \end{cases} \quad Q = (|x| < 1)$  д)  $y = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3} \sin(\frac{\pi}{x})}, & |x| \neq 0, x \neq 1/k, \\ 0, & x = 0, x = 1/k, \end{cases} \quad Q = [0, 1].$

**В-3.35**

При каких  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $f(x) = \frac{1}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta}$  принадлежит  $L_2(Q)$ , если  $Q = \{|x_1| + |x_2| > 1\}$ ?

**В-3.36**

При каких  $\alpha$  функция  $r^{-\alpha}$ ,  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ , принадлежит  $L_2(Q)$ , если: а)  $Q = (r < 1)$ ; б)  $Q = (r > 1)$ ?

**В-3.37**

При каких  $\alpha$  функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin|x|^2}{|x|^\alpha} & \text{при } |x| \neq 0, \\ 0 & \text{при } |x| = 0, \end{cases} \quad |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

принадлежит  $L_2(Q)$ , если  $Q = (|x| < 1)$ ?

**В-3.38**

При каких  $\alpha$  функция  $|x|^{-\alpha}$ ,  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ , принадлежит  $L_2(Q)$ , если: а)  $Q = (|x| < 1)$  б)  $Q = (|x| > 1)$ ; в)  $Q = R^n$ ?

**В-3.39**

Пусть функция  $g \in L_2(Q)$ ,  $Q$  - ограниченная область. Показать, что функция  $f(x) = \int_Q \frac{g(y)}{|x-y|^\alpha} dy$  для  $\alpha < \frac{n}{2}$  принадлежит пространству  $C^k(\bar{Q})$  при  $k < \frac{n}{2} - \alpha$ .

**В-3.40**

Показать, что для функции  $f \in L_2(Q)$  ( $Q$  - ограниченная область) по любому  $\varepsilon > 0$  найдется такая функция  $f_\varepsilon \in C(\bar{Q})$ , что

$$\int_Q |f - f_\varepsilon|^2 dx < \varepsilon.$$

**14.5.2 Задачи на Функциональные пространства****В-4.1**

Установить, что следующие множества являются линейными пространствами: а) множество  $C^k(Q)$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ ; б) множество точек  $n$ -мерного пространства  $R^n$ ; множество точек комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ; в) множество финитных в  $Q$  функций; г) множество ограниченных в  $Q$  функций; д) множество аналитических функций в области  $Q$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ; е) множество функций из  $C(\bar{Q})$ , обращающихся в нуль на некотором множестве  $E \in \bar{Q}$  ж) множество  $C(Q \setminus \{x^0\})$ ,  $x^0 \in Q$ ;

з) множество функций  $f$  из  $C(\bar{Q})$ , для которых  $\int_Q f \varphi dx = 0$ ,  $\varphi$  - некоторая функция из  $C(\bar{Q})$ , а  $Q$  - ограниченная область; и) множество функций  $f$  из  $C(\bar{Q})$ , для которых  $\int_S f \varphi ds = 0$ ,  $\varphi$  - некоторая функция из  $C(\bar{Q})$ , а  $S$  - ограниченный кусок гладкой поверхности, лежащей в  $Q$ ; к) множество функций, интегрируемых по Риману (по области  $Q$ ); л) множество принадлежащих  $C^k(\bar{Q})$  решений линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(x) D^\alpha f = 0, \quad \text{где} \quad A_\alpha \in C(\bar{Q}), \quad |\alpha| \leq k;$$

м) множество измеримых в  $Q$  функций; н) пространство  $L_1(Q)$ ; о) пространство  $L_2(Q)$ .

**В-4.2**

Убедиться, что следующие множества функций не составляют линейного пространства: а) множество функций из  $C(\bar{Q})$ , равных 1 в некоторой точке  $x^0 \in Q$ ; б) множество функций  $f \in C(\bar{Q})$ , для которых  $\int_Q f dx = 1$  ( $Q$  - ограниченная область); в) множество решений дифференциального уравнения  $\Delta u = 1$ .

**В-4.3**

Доказать, что следующие системы функций линейно независимы: а)  $1, x, x^2, \dots$  на отрезке  $[a, b]$  ( $a < b$ ); б)  $x^\alpha$ ,  $|\alpha| = 0, 1, 2, \dots$ , в области  $Q$ ; в)  $e^{ikx}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , на отрезке  $[a, b]$ ; г)  $[f(x)]^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , в области  $Q$ ,  $f(x)$  - некоторая функция из  $C(Q)$ ,  $f \not\equiv \text{const}$ .

**В-4.4**

Доказать, что множество  $C(\bar{Q})$  является линейным нормированным пространством с нормой: 1)  $\|f\|_{C(\bar{Q})} = \max_{x \in \bar{Q}} |f(x)|$ ; 2)  $\|f\|'_{C(\bar{Q})} = 13 \max_{x \in \bar{Q}} |f(x)|$ .

**В-4.5**

Доказать, что множество  $C^k(\bar{Q})$  есть линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{C^k(\bar{Q})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{Q}} |D^\alpha f(x)|.$$

**В-4.6**

Пусть  $E$  - некоторое множество из  $\bar{Q}$ . Показать, что множество непрерывных в  $\bar{Q}$  функций  $f(x)$ , обращающихся в нуль в точках  $E$ , есть линейное нормированное пространство с нормой (1) при  $k = 0$ .

**В-4.7**

Установить, что следующие множества определенных в ограниченной области  $Q$  функций являются линейными нормированными пространствами с нормой (1) при  $k = 0$ : а) множество функций из  $C(\bar{Q})$ , финитных в  $Q$ ; б) множество  $C^\infty(\bar{Q})$ ; в) множество аналитических в  $Q$  и непрерывных в  $\bar{Q}$  функций.

**В-4.8**

Убедиться, что в  $R^n$  можно ввести норму следующим образом: а)  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  б)  $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ ; в)  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i$ .

**В-4.9**

Убедиться, что при любом  $p \geq 1$  в  $R^n$  можно ввести норму формулой

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Найти  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$ .

**В-4.10**

Показать, что при любом  $p \geq 1$  в качестве нормы в  $C(\bar{Q})$  можно взять выражение

$$\|f\|_p = \left( \int_G |f|^p dx \right)^{1/p}$$

(область  $Q$  ограничена). Найти  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ .

**В-4.11**

Убедиться, что линейные пространства примеров 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9 являются банаховыми (т.е. полными в соответствующих нормах), а линейные нормированные пространства примеров В-4.7, 4.10 при конечном  $p$  - неполными.

**В-4.12**

Показать, что в пространствах  $L_1(Q)$  и  $L_2(Q)$  можно ввести нормы

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_1(Q)} &= \int_Q |f| dx, \\ \|f\|_{L_2(Q)} &= \left( \int_Q |f|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

**В-4.13**

Пусть область  $Q$  ограничена. Показать, что: а) множество  $\dot{C}^\circ(\bar{Q})$  функций из  $C(\bar{Q})$ , обращающихся в нуль на границе области  $Q$ , есть банахово подпространство  $C(\bar{Q})$  (с нормой (1) при  $k=0$ ); б) подмножество функций  $f$  из:

- 1)  $C(\bar{Q})$ ;
- 2)  $L_1(Q)$ ;

3)  $L_2(Q)$ , для которых  $\int_Q f(x) \varphi_i(x) dx = 0, i = 1, 2, \dots, s$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  - некоторые функции из  $C(\bar{Q})$ , есть банахово подпространство пространства  $C(\bar{Q})$  (с нормой (1) при  $k=0$ ),  $L_1(Q)$  (с нормой (3)) и  $L_2(Q)$  (с нормой (4)) соответственно.

**В-4.14**

Показать, что счетное множество, составленное из линейных комбинаций с рациональными коэффициентами одночленов  $x^\alpha, x = (x_1, \dots, x_n), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| = 0, 1, 2, \dots$ , всюду плотно в: а)  $C(\bar{Q})$  (норма (1) при  $k=0$ ); б)  $L_1(Q)$  (норма (3)); в)  $L_2(Q)$  (норма (4)),  $Q$  - ограниченная область.

**В-4.15**

Показать, что  $L_2(Q)$  - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_Q f \bar{g} dx.$$

**В-4.16**

Подмножество функций  $f \in L_2(Q)$ , ортогональных к некоторым функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  из  $L_2(Q)$ , образует подпространство пространства  $L_2(Q)$ .

Пусть в области  $Q$  задана непрерывная и положительная функция  $\rho(x)$  (весовая функция). Обозначим  $L_{2,\rho}(Q)$  множество измеримых в  $Q$  функций  $f(x)$ , для которых  $\rho|f|^2 \in L_1(Q)$ .

**В-4.17**

Показать, что  $L_{2,\rho}(Q)$  - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_Q \rho f \bar{g} dx$$

**В-4.18**

Доказать, что: а)  $L_2(Q) \subset L_{2,\rho}(Q)$ , если  $\rho(x)$  ограничена в  $Q$ ; б)  $L_{2,\rho}(Q) \subset L_2(Q)$ , если  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$  в  $Q$  ( $\rho_0 = \text{const}$ ).

**В-4.19**

Установить ортогональность в  $L_2(0, 2\pi)$  тригонометрической системы  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$

**В-4.20**

Доказать, что системы функций  $\sin(n + 1/2)x, n = 1, 2, \dots$ , и  $\cos(n + 1/2)x, n = 1, 2, \dots$ , ортогональны в  $L_2(0, \pi)$ .

**В-4.21**

Доказать, что многочлены Жежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

образуют ортонормированную систему в  $L_2(-1, 1)$ .

**В-4.22**

Доказать, что система функций

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n(\arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

есть система многочленов (многочлены Чебышева), ортонормированная в  $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1, 1)$ .

**В-4.23**

Доказать, что система функций

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

есть система многочленов (многочлены Эрмита), ортогональная в  $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$

**В-4.24**

Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора  $-\frac{d^2}{dx^2}$ , заданного на функциях из  $C^2((0, 1)) \cap C^1([0, 1])$  при граничных условиях  $(hu - u_x)|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, h$  - постоянная, ортогональны в  $L_2(0, 1)$ .



**В-4.25**

Показать, что отвечающие различным значениям собственные функции оператора  $-\Delta$ , заданного на функциях  $f \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  при граничном условии  $u|_\Gamma = 0$  или  $(\frac{\partial u}{\partial n} + g(x)u)|_\Gamma = 0$ ,  $g \in C(\Gamma)$ , ортогональны в  $L_2(Q)$ .

**В-4.26**

Пусть  $\rho \in C(\bar{Q})$ ,  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора  $-\frac{1}{\rho(x)}\Delta$ , заданного на  $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в  $L_{2,\rho}(Q)$ .

**В-4.27**

Пусть  $p \in C^1[0, 1]$ ,  $q \in C[0, 1]$ ,  $\rho \in C[0, 1]$ ,  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора

$$-\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + \frac{q(x)}{\rho(x)},$$

заданного на  $C^2((0, 1)) \cap C^1([0, 1])$  при граничных условиях  $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $(u_x + Hu)|_{x=1} = 0$  ( $H$  — постоянная), ортогональны в  $L_{2,\rho}(0, 1)$ .

**В-4.28**

Пусть  $p \in C^1(\bar{Q})$ ,  $q \in C(\bar{Q})$ ,  $\rho \in C(\bar{Q})$ ,  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора  $-\frac{1}{\rho(x)} \operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q(x)$ , заданного на  $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в  $L_{2,\rho}(Q)$ .

**В-4.29**

Показать, что принадлежащие  $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  решения в  $Q$  уравнения  $\Delta u = 0$ , удовлетворяющие при различном  $\lambda$  граничному условию  $(\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u)|_\Gamma = 0$ , ортогональны в  $L_2(\Gamma)$ .

**В-4.30**

Показать, что последовательность  $\sin kx$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится слабо к нулю в  $L_2(0, 2\pi)$ , но не сходится в норме  $L_2(0, 2\pi)$ . В задачах 4.31-4.39 доказать утверждения.

**В-4.31**

Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится к  $f(x)$  по норме  $L_2(Q)$ , то она сходится и слабо к  $f(x)$ .

**В-4.32**

Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится к  $f(x)$  по норме  $L_2(Q)$ , то  $\int_Q f_n dx \rightarrow \int_Q f dx$ ,  $n \rightarrow \infty$  ( $Q$  — ограниченная область).

**В-4.33**

Если  $u_k \in L_2(Q)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится к  $u(x)$  по норме  $L_2(Q)$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_Q u_k dx = \int_Q u dx$  ( $Q$  — ограниченная область).  $C(\bar{Q})$  сходится к  $f(x)$  равномерно в  $\bar{Q}$ , то она сходится и по норме  $L_2(Q)$  ( $Q$  — ограниченная область).

**В-4.35**

Если последовательность  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится слабо к  $f(x) \in L_2(Q)$ , то последовательность норм  $\|f_n(x)\|_{L_2(Q)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ограничена.

**В-4.36**

Если последовательность  $f_n(x), n = 1, 2, \dots$ , функций из  $L_2(Q)$  сходится слабо к  $f(x) \in L_2(Q)$  и  $\|f_n(x)\| \rightarrow \|f(x)\|$  при  $n \rightarrow \infty$ , то эта последовательность сходится к  $f(x)$  и по норме  $L_2(Q)$ .

**В-4.37**

Для любой функции  $f(x) \in L_2(Q)$  имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2$$

$f_k, k = 1, 2, \dots$ , - коэффициенты Фурье функции  $f$  по ортонормированной системе  $e_1, e_2, \dots$

**В-4.38**

Любая ортонормированная система  $e_1, \dots, e_n, \dots$  в  $L_2(Q)$  сходится слабо к нулю, но не сходится по норме  $L_2(Q)$ .

**В-4.39**

Для любой  $f \in L_2(Q)$

$$\min_{c_1, \dots, c_n} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|$$

(т. е.  $n$ -я частная сумма ряда Фурье наилучшим образом приближает  $f(x)$  в  $L_2(Q)$ ).

**В-4.40**

Найти многочлен 2-й степени, наилучшим образом приближающий в  $L_2(-1, 1)$  функцию: а)  $x^3$ ; б)  $\sin \pi x$ ; в)  $|x|$ .

**В-4.41**

Найти тригонометрический многочлен первого порядка, наилучшим образом приближающий в  $L_2(-\pi, \pi)$  функцию: а)  $|x|$ ; б)  $\sin \frac{x}{2}$ .

**В-4.42**

Найти многочлен первой степени, наилучшим образом приближающий в  $L_2(Q_i)$  функцию  $x_1^2 - x_2^2$ ,  $Q_i$ : а) круг  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  б) квадрат  $0 < x_1, x_2 < 1$ .

**В-4.43**

Установить полноту в  $L_2(Q)$  систем: а)  $\sin kx, k = 1, 2, \dots, Q = [0, \pi]$ ; б)  $\sin(2k+1)x, k = 0, 1, \dots, Q = [0, \pi/2]$ . В задачах 4.44-4.50 доказать утверждения.

**В-4.44**

Многочлены Лежандра (задача 4.21) и многочлены Чебышева (задача 4.22) образуют ортонормированные базисы пространства  $L_2(-1, 1)$  и  $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1, 1)$  соответственно.

**В-4.45**

Чтобы ортонормированная в  $L_2(Q)$  система  $e_1, e_2, \dots$  была ортонормированным базисом  $L_2(Q)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $f \in L_2(Q)$  выполнялось неравенство Парсеваля-Стеклова

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2.$$

**В-4.46**

Если  $f \in L_2(a, b)$  и  $\int_a^b x^k f(x) dx = 0$  для  $k = 0, 1, \dots$ , то  $f(x) = 0$  п. в. на  $(a, b)$ .

**В-4.47**

Если  $f \in L_2$  и  $\int_Q x^\alpha f(x) dx = 0$  для всех  $\alpha$ ,  $|\alpha| = 0, 1, \dots$ , то  $f(x) = 0$  п. в. в  $Q$ .

**В-4.48**

Если  $f_k$  и  $g_k, k = 1, 2, \dots$ , - коэффициенты Фурье функций  $f$  и  $g$  из  $L_2(Q)$  по некоторому ортонормированному базису, то

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k.$$

**В-4.49**

Всякая ортонормированная система  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независима.

**В-4.50**

Для того чтобы система функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  из  $L_2(Q)$  была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грамма  $\det \|(\varphi_i, \varphi_j)\|, i, j = 1, \dots, n$ , был отличен от нуля.

**В-4.51**

Найти явное выражение функций  $e_k, k = 1, 2, \dots, n$ , через функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

**В-4.52**

Ортонормировать в  $L_{2,\rho}(Q)$  методом Грамма-Шмидта следующие последовательности функций, предварительно убедившись в их линейной независимости: а)  $1, x, x^2, x^3$  ( $\rho \equiv 1, Q = (-1, +1)$ ); б)  $1 - x, 1 + x^2, 1 + x^3$  ( $\rho \equiv 1, Q = (-1, +1)$ ); в)  $\sin^2 \pi x, 1, \cos \pi x$  ( $\rho \equiv 1, Q = (-1, +1)$ ); г)  $1, x, x^2$  ( $\rho = e^{-x}, Q = (0, \infty)$ ); д)  $1, x, x^2$  ( $\rho = e^{-x^2/2}, Q = (-\infty, +\infty)$ ); е)  $1, x, x^2$  ( $\rho = \sqrt{1-x^2}, Q = (-1, 1)$ ); ж)  $1, x, x^2$  ( $\rho = 1/\sqrt{1-x^2}, Q = (-1, 1)$ ).

**В-4.53**

Показать, что в результате ортонормирования системы  $1, x, x^2, \dots$  методом Грамма-Шмидта в скалярном произведении

$$(f, g) = \int_0^1 \frac{f \bar{g}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

получается ортонормированный базис пространства  $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1, 1)$ , состоящий из многочленов Чебышева  $T_n(x), n = 1, 2, \dots$

**В-4.54**

Ортонормировать систему многочленов  $1, x_1, x_2$  в круге  $|x| < 1$  со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u \bar{v} dx.$$

**В-4.55**

Ортонормировать систему многочленов  $1, x_1, x_2, x_3$  в шаре  $|x| < 1, x = (x_1, x_2, x_3)$ , со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u \bar{v} dx.$$

**В-4.56**

Обозначим через  $L'_2(-\infty, \infty)$  множество таких функций  $f(x) \in L_{2, \text{loc}}(-\infty, \infty)$ , для которых существует конечный предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \int_{-k}^k |f|^2 dx$ . Показать, что  $L'_2(-\infty, \infty)$  - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \int_{-k}^k f \bar{g} dx.$$

**В-4.57**

Доказать, что система функций  $e^{i\alpha x}$ ,  $\alpha$  - любое вещественное число, является ортонормированной системой в  $L'_2(-\infty, \infty)$  (см. предыдущую задачу).

**В-4.59**

Показать, что из существования о.п.  $D^\alpha f$  не следует существования о.п.  $D^{\alpha'} f$  при  $\alpha'_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n, |\alpha'| < |\alpha|$ .

Укажи. Рассмотреть функцию  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ ,  $f_i(x_i)$  не имеют о.п. первого порядка.

**В-4.60**

Показать, что если в области  $Q$  функция  $f(x)$  имеет о.п.  $D^\alpha f$ , то и в любой подобласти  $Q' \subset Q$  функция  $f(x)$  имеет о.п.  $D^\alpha f$ .

**В-4.61**

Пусть в области  $Q_1$  задана функция  $f_1(x)$ , имеющая о.п.  $D^\alpha f_1$ , а в области  $Q_2$  - функция  $f_2(x)$ , имеющая о.п.  $D^\alpha f_2$ . Доказать, что если  $Q_1 \cup Q_2$  - область и для  $x \in Q_1 \cap Q_2$   $f_1(x) = f_2(x)$ , то функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in Q_1, \\ f_2(x), & x \in Q_2 \end{cases}$$

имеет о.п.  $D^\alpha f$  в  $Q_1 \cup Q_2$ , равную  $D^\alpha f_1$  в  $Q_1$  и  $D^\alpha f_2$  в  $Q_2$ .

**В-4.62**

Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, x_2 > 1, \\ -1, & \text{если } |x| < 1, x_2 < 1. \end{cases}$$

Убедиться, что  $f(x_1, x_2)$  имеет обобщенные производные первого порядка в каждом из полукругов, но не имеет о.п. по  $x_2$  в круге  $|x| < 1$ .

**В-4.63**

Доказать свойства средних функций: а)  $f_h \in C^\infty(R^n)$  б)  $f_h(x)$  сходятся при  $h \rightarrow 0$  к  $f(x)$  в  $L_2(Q)$ , если  $f \in L_2(Q)$ ; в) в любой строго внутренней подобласти  $Q' \Subset Q$  при достаточно малом  $h$  имеет место равенство  $(D^\alpha f)_h = D^\alpha f_h$ , т. е. обобщенная производная от средней функции равна средней функции от обобщенной производной. В задачах 4.64-4.72 доказать утверждения.

**В-4.64**

Если у функции  $f(x)$  в области  $Q$  существует о.п.  $D^\alpha f = \omega(x)$ , а для функции  $\omega(x)$  существует о.п.  $D^\beta \omega$ , то существует о.п.  $D^{\alpha+\beta} f$

**В-4.65**

а)  $y = \text{sign } x \notin H^1(-1, 1)$ ; б)  $y = |x| \in H^1(-1, 1)$ ,  $y = |x| \notin H^2(-1, 1)$ .

**В-4.66**

Если  $f \in H^1(a, b)$  и о.п.  $f'(x) = 0$ , то  $f(x) = \text{const}$  п. в.

**В-4.67**

Если  $f \in H^1(a, b)$ , то  $f(x)$  эквивалентна на  $[a, b]$  непрерывной функции.

**В-4.68**

Если  $f(x) \in H^1(-\infty, \infty)$ , то  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**В-4.69**

Обозначим через  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$  подпространство пространства  $H^1(0, 2\pi)$ , состоящее из всех функций  $f(x)$  из  $H^1(0, 2\pi)$ , для которых  $f(0) = f(2\pi)$ .

Доказать следующее утверждение: для того чтобы функция  $f(x)$  (из  $H^1(0, 2\pi)$ ) принадлежала  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд с общим членом  $n^2(a_n^2 + b_n^2)$ , где

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Равенство

$$\|f\|_{\tilde{H}^1(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) (k^2 + 1)$$

определяет одну из эквивалентных норм  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$ .

**В-4.70**

Для того чтобы функция  $f \in L_2(0, \pi)$  принадлежала  $\overset{\circ}{H}^1(0, \pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд с общим членом  $k^2 b_k^2$ ,  $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$ . При этом

$$\|f\|_{\overset{\circ}{H}^1(0, \pi)}^2 = \int_0^{\pi} (f^2 + f'^2) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + 1) b_k^2$$

**В-4.71**

Для любой  $f \in \overset{\circ}{H}^1(a, b)$  имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Стеклова)

$$\int_a^b f^2 dx \leq \left( \frac{b-a}{\pi} \right)^2 \int_a^b f'^2 dx$$

**В-4.72**

Найти функцию  $f_0(x) \not\equiv 0$ , для которой неравенство задачи 4.71 превращается в равенство. Показать, что если  $f(x) \neq c f_0(x)$ ,  $c$  - постоянная, то для  $f(x)$  имеет место строгое неравенство.

**В-4.73**

Доказать, что для любой функции  $f \in H^1(0, 2\pi)$ , для которой  $f(0) = f(2\pi)$ , имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} f^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (f')^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(x) dx \right)^2$$

**В-4.74**

Доказать, что для любой функции  $f \in H^1(0, 2\pi)$  имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Пуанкаре)

$$\int_0^{2\pi} f^2 dx \leq 4 \int_0^{2\pi} (f')^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f dx \right)^2$$

Указание. Воспользоваться тем, что система  $\cos(kx/2)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , является ортогональным базисом пространства  $H^1(0, 2\pi)$ .

**В-4.75**

Доказать, что существует двумерное подпространство пространства  $H^1(0, 2\pi)$ , для всех элементов которого неравенство задачи 4.74 превращается в равенство. Найти это подпространство и доказать, что для всех элементов из  $H^1(0, 2\pi)$ , не принадлежащих этому подпространству, неравенство задачи 4.74 строгое.

**В-4.76**

Пусть  $f \in \overset{\circ}{H}^1(|x| < 1)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ ,  $f(x) = f(|x|, \varphi)$ . Доказать, что  $\lim_{|x| \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} f^2(|x|, \varphi) d\varphi = 0$ .

**В-4.77**

Пусть  $f \in H^1(|x| < 1)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ ,  $f|_{|x|=1} = h(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Доказать, что

$$\lim_{|x| \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} |h(\varphi) - f(|x|, \varphi)|^2 d\varphi = 0.$$

**В-4.78**

Пусть  $f \in \overset{\circ}{H}^1(0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1)$ . Доказать, что

$$\int_0^1 f^2(x_1, x_2) dx_1 = o(x_2) \quad \text{при} \quad x_2 \rightarrow 0.$$

**В-4.79**

Пусть  $x = (x_1, x_2) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  и функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

принадлежит  $H^1(|x| < 1)$ . Выразить через  $a_k, b_k$  интеграл

$$\int_{\rho < 1} (|\operatorname{grad} f|^2 + |f|^2) dx.$$

**В-4.80**

Пусть

$$\psi(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

Доказать, что существует функция  $f(x_1, x_2) \in H^1(|x| < 1)$  такая, что  $f|_{\rho=1} = \psi(\varphi)$ ,  $x_1 = \rho \cos \varphi$ ,  $x_2 = \rho \sin \varphi$ .

**В-4.81**

При каких значениях  $\alpha$  функция  $f = |x|^{-\alpha} \sin |x|$  принадлежит  $H^2(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ?

**В-4.82**

Доказать, что  $|x_1|(|x|^2 - 1) \in \overset{\circ}{H}^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

**В-4.83**

При каких значениях  $\alpha$  функция  $f = |x|^{-\alpha} e^{x_1 - x_2}$  принадлежит  $H^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ?

**В-4.84**

. Пусть  $f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx_1 e^{-kx_2}$ ,  $0 \leq x_1 \leq \pi$ ,  $x_2 > 0$ . При каких  $a_k$  функция  $f$  принадлежит  $H^1(0 < x_1 < \pi, x_2 > 0)$ ?

**В-4.85**

Пусть  $f \in H^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 2$ . Обязана ли функция  $f(x)$  быть эквивалентной непрерывной функции в шаре  $|x| < 1$  (ср. с результатом задачи 4.67)? В задачах 4.86-4.90 доказать утверждения.

**В-4.86**

Если  $f \in H^1(Q)$  и  $f(x) = \text{const}$  п. в. в  $Q' \subset Q$ , то  $\text{grad } f = 0$  п. в. в  $Q'$ .

**В-4.87**

Если  $f \in H^1(Q)$  и  $|\text{grad } f| = 0$  п. в. в  $Q$ , то  $f(x) = \text{const}$  л. в. в  $Q$ .

**В-4.88**

Если  $f \in H^1(Q)$ ,  $g \in \overset{\circ}{H}^1(Q)$ , то для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  справедлива формула  $\int_Q f g_{x_i} dx = - \int_Q g f_{x_i} dx$  (формула интегрирования по частям).

**В-4.89**

Если  $f \in H^1(Q)$  и  $g \in H^1(Q)$ , то для всех  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\int_Q f g_{x_i} dx = - \int_Q g f_{x_i} dx + \int_{\Gamma} f g \cos(n x_i) ds,$$

где под знаком интеграла по  $\Gamma$  стоят следы функций  $f$  и  $g$  на  $\Gamma$ .

**В-4.90**

$\overset{\circ}{H}^1(Q)$  есть подпространство пространства  $H^1(Q)$ . Пусть функция  $f \in L_2(Q)$  продолжена, например, нулем вне  $Q$ . Конечноразностным отношением  $f(x)$  по переменному  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , будем называть при  $h \neq 0$  функцию

$$\delta_i^h f = \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x)}{h}$$

также принадлежащую пространству  $L_2(Q)$ . В задачах 4.91-4.96 доказать утверждения.

**В-4.91**

Для любой финитной на  $(a, b)$  функции  $f$  из  $L_2(a, b)$  и любой функции  $g \in L_2(a, b)$  при достаточно малых  $|h|$  имеет место формула «интегрирования по частям»

$$(\delta_i^h f, g) = - (f, \delta_i^{-h} g), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**В-4.92**

Для достаточно малых  $|h| \neq 0$  для произвольной финитной в  $Q$  функции  $f \in L_2(Q)$  и произвольной функции  $g \in L_2(Q)$  имеет место формула «интегрирования по частям»

$$(\delta_i^h f, g) = - (f, \delta_i^{-h} g), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**В-4.93**

Если финитная на  $(a, b)$  функция  $f$  принадлежит  $H^1(a, b)$ , то при  $h \rightarrow 0$   $\delta_i^h f(x) \rightarrow f'(x)$  в норме  $L_2(a, b)$ .

**В-4.94**

Если для финитной на  $(a, b)$  функции  $f \in L_2(a, b)$  при  $h \rightarrow 0$   $\delta^h f \rightarrow \tilde{f}(x)$  в норме  $L_2(a, b)$ , то  $f(x)$  принадлежит  $H^1(a, b)$  и  $\tilde{f}(x)$  является о. п. функции  $f(x)$ .

**В-4.95**

Если финитная в  $Q$  функция  $f \in L_2(Q)$  имеет о. п.  $f_{x_i} \in L_2(a, b)$  при некотором  $i = 1, 2, \dots, n$ , то при  $h \rightarrow 0$   $\delta_i^h f \rightarrow f_{x_i}$  в норме  $L_2(Q)$ .

**В-4.96**

Если финитная в  $Q$  функция  $f$  принадлежит  $L_2(Q)$  и при  $h \rightarrow 0$   $\delta_i^h f \rightarrow \tilde{f}_i(x)$  в норме  $L_2(Q)$  при некотором  $i = 1, 2, \dots, n$ , то  $f(x)$  имеет в  $Q$  о. п. по  $x_i$ , совпадающую с  $\tilde{f}_i(x)$ .

**В-4.97**

С помощью результата задачи 4.71 показать, что скалярные произведения

$$(f, g)_I = \int_0^\pi (fg + f'g') dx, \quad (f, g)_{II} = \int_0^\pi f'g' dx$$

в пространстве  $W^1_2(0, \pi)$  эквивалентны.

**В-4.98**

Доказать с помощью задачи 4.74, что скалярные произведения  $(f, g)_I = \int_0^{2\pi} (fg + f'g') dx$ ,  $(f, g)_{II} = \int_0^{2\pi} f'g' dx + \left( \int_0^{2\pi} f dx \right) \left( \int_0^{2\pi} g dx \right)$  в пространстве  $H^1(0, 2\pi)$  эквивалентны.

**В-4.99**

Множество  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$  функций  $f \in H^1(0, 2\pi)$ , для которых  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ , есть подпространство пространства  $H^1(0, 2\pi)$ . Показать, что в  $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$  скалярное произведение можно определить соотношением  $(fg)_{\tilde{H}^1(0, 2\pi)} = \int_0^{2\pi} f'g' dx$ .

**В-4.100**

Пусть  $\rho(x) \in C(\bar{Q})$  и  $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ . Показать, что формулой  $(f, g)_I = \int_Q \rho f g dx$ ,  $f, g \in L_2(Q)$ , определяется скалярное произведение в  $L_2(Q)$ , эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q f g dx$ .

**В-4.101**

Пусть  $\rho \in C(\bar{Q})$ ,  $\rho(x) > 0$  в  $\bar{Q} \setminus x^0$  и  $\rho(x^0) = 0$ ,  $x^0$  — является скалярное произведение в  $L_2(Q)$ , не эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q f g dx$  ( $Q$  — ограниченная область).

**В-4.102**

Пусть  $\rho \in C(\bar{Q} \setminus x^0)$ ,  $x^0$  — некоторая точка из  $\bar{Q}$  и  $\rho(x) > 0$  для  $x \in \bar{Q} \setminus x^0$ ,  $\rho(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x^0$ ,  $x \in \bar{Q}$ . Показать, что в  $L_{2,\rho}(Q)$  можно ввести скалярное произведение  $\int_Q f g dx$ , не эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q \rho f g dx$ .

**В-4.103**

Пусть  $f \in H^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2)$  и  $f(x)|_{|x|=1} = h(\varphi)$ ,  $x_1 = |x| \cos \varphi$ ,  $x_2 = |x| \sin \varphi$ . Доказать, что существует такая не зависящая от функции  $f(x)$  постоянная  $c > 0$ , что

$$\int_{|x|<1} f^2 dx \leq c \left[ \int_0^{2\pi} h^2(\varphi) d\varphi + \int_{|x|<1} |\text{grad } f|^2 dx \right].$$



**В-4.104**

Доказать существование такой постоянной  $c > 0$ , что для любой  $f \in \overset{\circ}{H}^1(Q)$  имеет место неравенство Стеклова

$$\int_Q f^2 dx \leq c \int_Q |\text{grad } f|^2 dx.$$

**В-4.105**

Показать, что выражение  $\int_Q (\text{grad } f, \text{grad } g) dx$  задает скалярное произведение в  $\overset{\circ}{H}^1(Q)$ , эквивалентное скалярному произведению  $\int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx$ .

**В-4.106**

Пусть  $p, q \in C(\bar{Q})$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ . Доказать, что скалярные произведения в  $\overset{\circ}{H}^1(Q)$

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx,$$

$$(f, g)_I = \int_Q [qfg + p(\text{grad } f, \text{grad } g)] dx$$

эквивалентны.

**В-4.107**

Пусть вещественные функции  $p_{ij}, p_{ij}(x) = p_{ji}(x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , и  $q$  принадлежат  $C(\bar{Q})$ ,  $q \geq 0$ , и для всех  $x \in \bar{Q}$  и всех вещественных векторов  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$  имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

где постоянная  $\gamma_0 > 0$ .

$$(f, g)_I = \int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx.$$

**В-4.108**

Пусть  $p, q \in C(\bar{Q})$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq q_0 > 0$ . Тогда скалярные произведения в  $H^1(Q)$

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx$$

$$(f, g)_I = \int_Q [qfg + p(\text{grad } f, \text{grad } g)] dx$$

эквивалентны.

(?? и в чем задача? доказать это??)

**В-4.109**

Пусть  $x^0$  - произвольная точка из  $\bar{Q}$ , а  $U = Q \cap \{|x - x_0| < r\}$  при некотором  $r > 0$ . Доказать, что существует такая постоянная  $c > 0$ , что для всех  $f \in H^1(Q)$  имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \int_Q |\text{grad } f|^2 dx + \int_U f^2 dx \right].$$

**В-4.110**

С помощью результата задачи 4.108 показать, что скалярные произведения в  $H^1(Q)$

$$(f, g)_I = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx,$$

$$(f, g)_{II} = \int_Q [qfg + p(\text{grad } f, \text{grad } g)] dx$$

эквивалентны, если непрерывные в  $\bar{Q}$  функции  $p(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют условиям:  $p \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  и  $q(x) \not\equiv 0$  в  $Q$ .

**В-4.111**

Если в условиях задачи 4.107  $q(x) \geq q_0 > 0$ , то выражение

$$\int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в  $H^1(Q)$ , причем оно будет эквивалентным скалярному произведению  $\int_Q [(fg + (\text{grad } f, \text{grad } g) + fg)] dx$ .

**В-4.112**

Если в условиях задачи 4.107  $q(x) \geq 0$  в  $\bar{Q}$  и  $q(x) \not\equiv 0$ , то выражение

$$\int_Q \left( \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в  $H^1(Q)$ , причем оно будет эквивалентным скалярному произведению  $\int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx$ .

**В-4.113**

Показать, что существует такая постоянная  $c > 0$ , что для любой  $f \in H^1(Q)$  имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \int_Q |\text{grad } f|^2 dx + \int_{\partial Q} f^2 ds \right].$$

**В-4.114**

Пусть  $x^0$  - произвольная точка границы  $\partial Q$ , а  $U = \partial Q \cap \{|x - x^0| < r\}$  при некотором  $r > 0$ . Доказать существование такой постоянной  $c > 0$ , что для всех  $f \in H^1(Q)$  справедливо неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \int_Q |\text{grad } f|^2 dx + \int_U f^2 ds \right].$$

**В-4.115**

Доказать, что если  $\sigma \in C(\partial Q)$  и  $\sigma(x) > 0$ , то выражение

$$(f, g)_I = \int_Q (\text{grad } f, \text{grad } g) dx + \int_{\partial Q} \sigma fg ds$$

задает в  $H^1(Q)$  скалярное произведение, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx.$$

**В-4.116**

Доказать, что если  $\sigma \in C(\partial Q)$ ,  $\sigma(x) \geq 0$ ,  $\sigma(x) \not\equiv 0$ , то в  $H^1(Q)$  можно задать скалярное произведение

$$(f, g)_I = \int_Q (\text{grad } f, \text{grad } g) dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx.$$

**В-4.117**

Пусть  $p \in C(\bar{Q})$ ,  $q \in C(\bar{Q})$ ,  $\sigma \in C(\partial Q)$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  в  $\bar{Q}$ ,  $\sigma(x) \geq 0$  на  $\partial Q$ , причем или  $q(x) \not\equiv 0$ , или  $\sigma(x) \not\equiv 0$ . Тогда скалярные произведения в  $H^1(Q)$

$$(f, g)_I = \int_Q [p(\text{grad } f, \text{grad } g) + qfg] dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds,$$

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx$$

эквивалентны.

**В-4.118**

Показать, что существует постоянная  $c > 0$  такая, что для любой функции  $f \in H^1(Q)$  ( $\partial Q \in C^1$ ) имеет место неравенство (неравенство Пуанкаре)

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[ \left( \int_Q f dx \right)^2 + \int_Q |\text{grad } f|^2 dx \right].$$

**В-4.119**

С помощью результата задачи 4.118 показать эквивалентность скалярных произведений

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx,$$

$$(f, g)_I = \int_Q (\text{grad } f, \text{grad } g) dx + \int_Q f dx \cdot \int_Q g dx$$

в пространстве  $H^1(Q)$ .

**В-4.120**

Показать, что множество  $\tilde{H}^1(Q)$  функций  $f \in H^1(Q)$ , для которых  $\int_Q f dx = 0$ , образует подпространство  $H^1(Q)$ .

**В-4.121**

Показать, что в подпространстве  $\tilde{H}^1(Q)$  можно определить скалярное произведение  $(f, g)_I = \int_Q (\text{grad } f, \text{grad } g) dx$ , эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\text{grad } f, \text{grad } g)] dx.$$

### 14.5.3 Задачи на интегральные уравнения

**МФТИ.Карлов-лб.31**

Решить уравнение при всех  $\lambda$  и найти собственные функции и характеристические числа интегрального оператора (который в этом уравнении участвует):

$$u(x) = \lambda \int_1^2 \left( \frac{4}{x^2 y^2} - 1 \right) u(y) dy + 3x^2 - 4, \quad u \in C[1; 2]$$

**Об интегральных уравнения**    Общий вид интегрального уравнения на отрезке:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy + f(x)$$

Интегральное уравнение можно рассматривать не только на отрезке, но и на компакте. Выражение (2) называется интегральным уравнением Фредгольма, выражение  $\int_a^b K(x, y)u(y)dy$  называется интегральным оператором. Это - линейное отображение, действующее на функцию  $u$ .  $K(x, y)$  не меняется и называется ядром оператора. В письменной контрольной ядро должно быть вырождено, т.е. иметь вид:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^m g_i(x) \cdot h_i(y),$$

т.е. вырожденное ядро является суммой функций с разделенными переменными. Это позволяет легко свести интегральное уравнение к системе линейных уравнений. В общем случае, когда ядро невырождено, строится приближение этого ядра вырожденными по норме  $\ell_2$ . Тогда уравнение решается приближённо. На контрольной ядро всегда будет вырожденным, однако это необходимо проверить.

**Решение.** В рассматриваемом случае ядро  $\left(\frac{4}{x^2y^2} - 1\right)$  является вырожденным.

1) Выносим из под интеграла функции, зависящие от  $x$  (это возможно и в общем случае), т.е. те, которые не зависят от переменной интегрирования:

$$u(x) = \lambda \frac{4}{x^2} \left( \int_1^2 \frac{1}{y^2} u(y) dy \right) - \lambda \left( \int_1^2 u(y) dy \right) + 3x^2 - 4,$$

где оставшиеся интегралы обозначим  $a_1$  и  $a_2$  соответственно, получив:

$$u(x) = \lambda \cdot \frac{4}{x^2} a_1 - \lambda \cdot a_2 + 3x^2 - 4.$$

Если найти  $a_1$  и  $a_2$ , то можно найти и  $u$ . Они ищутся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_1^2 \frac{1}{y^2} u(y) dy = \int_1^2 \frac{1}{y^2} \left( \lambda \cdot \frac{4}{y^2} a_1 - \lambda \cdot a_2 + 3y^2 - 4 \right) dy = \int_1^2 \left( \frac{4\lambda a_1}{y^4} - \frac{\lambda a_2}{y^2} + 3 - \frac{4}{y^2} \right) dy \\ a_2 &= \int_1^2 u(y) dy = \int_1^2 \left( \lambda \cdot \frac{4}{y^2} a_1 - \lambda \cdot a_2 + 3y^2 - 4 \right) dy \end{aligned}$$

Отсюда можно получить систему линейных уравнений на  $a_1$  и  $a_2$ . Самая частая ошибка при решении этой задачи - ошибка в вычислениях при вычислении интегралов. Если этот этап выполнен верно, то получается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными с параметром  $\lambda$ , которую можно легко решить. Для экономии времени интегралы считаются отдельно:

$$\begin{aligned} \int_1^2 1 dy &= 1 & \int_1^2 y^2 dy &= \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7}{3} & \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy &= -\frac{1}{y} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \\ \int_1^2 y^2 dy &= \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7}{3} & \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy &= -\frac{1}{y} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} & \int_1^2 \frac{1}{y^4} dy &= -\frac{1}{3y^3} \Big|_1^2 = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

При подстановке получаем:  $\begin{cases} a_1 = 4\lambda a_1 \cdot \frac{7}{24} - \lambda a_2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \\ a_2 = 4\lambda a_1 \cdot \frac{1}{2} - \lambda a_1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{7}{3} - 4 \cdot 1 \end{cases}$ , то есть

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{7}{6}\lambda\right) a_1 + \frac{a_2}{2} \lambda = 1 \\ -2\lambda a_1 + (1 + \lambda) a_2 = 3. \end{cases}$$

При решении этой системы надо выделить случай, когда детерминант не равен нулю и решение равно одно. Обычно корни уравнения  $D = 0$  - целые или простые дробные числа.

Рассмотрим:

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{7}{6}\lambda & \frac{\lambda}{2} \\ -2\lambda & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda = 2; -3$$

Таким образом, можно выписать решение уравнения. 1 случай:  $\lambda \neq 2; -3$ . Тогда  $\exists!$  решение. Найдём его по правилу Крамера:

$$a_1 = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda}{2} \\ 3 & 1 + \lambda \end{vmatrix}}{-\frac{\lambda^2}{6} - \frac{\lambda}{6} + 1} = \frac{(1 + \lambda) - \frac{3}{2}\lambda}{-\frac{1}{6}(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{(1 - \frac{\lambda}{2})(-6)}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{3 \cdot (\lambda - 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{3}{\lambda + 3}$$

$$a_2 = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{7}{6}\lambda & 1 \\ -2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{-\frac{1}{6}(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{(3 - \frac{7}{2}\lambda + 2\lambda)(-6)}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{(3 - \frac{3}{2}\lambda)(-6)}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{9(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{9}{\lambda + 3}$$

Отсюда решение уравнения для случая  $\lambda \neq 2, \lambda \neq -3$  есть:

$$u(x) = \frac{4\lambda}{x^2} \cdot \frac{3}{\lambda + 3} - \lambda \cdot \frac{9}{\lambda + 3} + 3x^2 - 4.$$

2 случай:  $\lambda = 2$ . Тогда:

$$\begin{cases} (1 - \frac{7}{3})a_1 + a_2 = 1 \\ -4a_1 + 3a_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}a_1 + a_2 = 1 \\ -4a_1 + 3a_2 = 3 \end{cases}$$

Получили бесконечно много ответов:

$$a_2 = 1 + \frac{4}{3}a_1.$$

Тогда

$$u(x) = \frac{8 \cdot a_1}{x^2} - 2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}a_1\right) + 3x^2 - 4, \quad a_1 \in \mathbb{R}.$$

Почти всегда бывает (в силу особенностей составления задач) так, что для одной из  $\lambda$  ответов бесконечно много, а для второй - ответов нет.

3 случай:  $\lambda = -3$ . Тогда:

$$\begin{cases} (1 + \frac{7}{2})a_1 - \frac{3}{2}a_2 = 1 \\ 6a_1 - 2a_2 = 3 \end{cases}$$

Видно, что  $\emptyset$ . Тогда ответ на первый вопрос: При  $\lambda \neq 2, -3$ :  $u(x) = \frac{4\lambda}{x^2} \cdot \frac{3}{\lambda + 3} - \lambda \cdot \frac{9}{\lambda + 3} + 3x^2 - 4$ , При  $\lambda = 2$ :  $u(x) = \frac{8 \cdot a_1}{x^2} - 2 \cdot (1 + \frac{4}{3}a_1) + 3x^2 - 4$ ,  $a_1 \in \mathbb{R}$ . При  $\lambda = -3$ : Нет решений. На этом этапе было заработано где-то 3 из 4 очков за задачу. Заметим, что теоремы Фредгольма здесь нигде не были использованы. Однако иногда задачи составляются таким образом, что без них не обойтись.

2) Ищем собственные функции и характеристические числа. Рассмотрим однородное интегральное уравнение на отрезке:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy.$$

В качестве ответа явно подходит функция ноль. Решения этого уравнения, не равные нулю, называются собственными функциями оператора  $K, \lambda$ , при которых получаются ненулевые решения, называются характеристическими числами, соответствующими данной собственной функции. Если интеграл рассматривать как линейный оператор, действующий на функцию  $u$ , то тогда, если  $\lambda \neq 0$ , можно записать:

$$\frac{1}{\lambda}u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy,$$

Т.е.

$$K(u) = \frac{1}{\lambda}u, \quad \lambda \neq 0.$$

Характеристические числа  $\lambda$  характеризуют оператор, являясь некоторой аналогией его спектра. Таким образом, для ответа на вопрос надо решить однородное уравнение:

$$u(x) = \lambda \int_1^2 \left( \frac{4}{x^2 y^2} - 1 \right) u(y)dy.$$

Используем предыдущие вычисления; искомый ответ:

$$u(x) = \frac{4\lambda a_1}{x^2} - \lambda a_2,$$

$a_1, a_2$  - решение системы:

$$\begin{cases} (1 - \frac{7}{6}\lambda) a_1 + \frac{a_2}{2}\lambda = 0 \\ -2\lambda a_1 + (1 + \lambda)a_2 = 0 \end{cases}.$$

Пользуясь уже проведёнными вычислениями:

$$\det = 0 \iff \lambda = 2; -3.$$

1 случай:  $\lambda \neq 2; -3$ . Тогда система (35) имеет только тривиальное решение, а потому собственных функций нет.

2 случай:  $\lambda = 2$ :

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}a_1 + a_2 = 0 \\ -4a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a_1 + 3a_2 = 0 \\ -4a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{4}{3}a_1; u(x) = a_1 \cdot \left( \frac{4 \cdot 2}{x^2} - \frac{2 \cdot 4}{3} \right), a_1 \in \mathbb{R}.$$

Также встречаются ошибки, когда для собственной функции забывают отбросить неоднородную часть. В этом случае ответ не определяется с точностью до умножения на константу, что неверно. 3 случай:  $\lambda = -3$ :

$$\begin{cases} (1 + \frac{7}{2}) a_1 - \frac{3}{2}a_2 = 0 \\ 6a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2}a_1 - \frac{3}{2}a_2 = 0 \\ 6a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_2 = 3a_1, u(x) = a_1 \cdot \left( \frac{4(-3)}{x^2} + 3 \cdot 3 \right), a_1 \in \mathbb{R}$$

Ответ (2 часть):  $u_1(x) = (\frac{8}{x^2} - \frac{8}{3})$  - собственная функция,  $\lambda = 2$  - соотв. характеристическое число  $u_2(x) = (9 - \frac{12}{x^2})$  - собственная функция,  $\lambda = -3$  - соотв. характеристическое число. В данной задаче теоремы Фредгольма не были востребованы, но можно сформулировать задачу таким образом, что эти теоремы будут использоваться.

### МФТИ.Карлов-лб.32

Найти условия на функцию  $f(x) \in C[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , при которых уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \cdot \sin|x| + y \cdot |x|) u(y) dy + f(x).$$

разрешимо при всех допустимых  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Заметим, что ядро вырождено. Можно решать эту задачу как предыдущую, но можно решить проще. (?? и как как предыдущую??)  
(потом все короче напишу, пока сойдет, потому что мало задач написано.)

**О теореме Фредгольма - критерии разрешимости интегрального уравнения** Критерий интегральной разрешимости: при фиксированном  $\lambda \in \mathbb{C}$  уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy + f(x)$$

разрешимо (у него существуют решения)  $\iff f$  ортогонально любому решению сопряжённого однородного уравнения, т.е.

$$0 = (f(y), \overline{\psi(y)}) = \int_a^b f(y) \overline{\psi(y)} dy$$

для любой функции  $\psi$  - решения сопряженного однородного уравнения:

$$\psi(y) = \bar{\lambda} \int_a^b \overline{K(y, x)} \psi(x) dx,$$

т.е. в ядре заменены местами переменные  $x$  и  $y$  и берется комплексное сопряжение, а  $\lambda$  заменяется на  $\bar{\lambda}$ . Отсюда следует, что применительно к рассматриваемой задаче необходимо рассмотреть однородное уравнение, поменяв местами  $x$  и  $y$ .

**Решение** Рассматриваем сопряжённое однородное уравнение:

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|x| \cdot \sin |y| + x \cdot |y|) \psi(y) dy.$$

Здесь комплексного сопряжения в ядре нет, поскольку на рассматриваемом отрезке переменные действительны. Надо найти решения уравнения (47) при разных  $\bar{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \bar{\lambda} |x| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin |y| \psi(y) dy + \bar{\lambda} x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y| \psi(y) dy = \bar{\lambda} |x| a_1 + \bar{\lambda} x a_2 \\ \psi(x) &= \bar{\lambda} |x| \cdot a_1 + \bar{\lambda} x \cdot a_2 \\ a_1 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin |y| \cdot (\bar{\lambda} \cdot y \cdot a_1 + \bar{\lambda} y \cdot a_2) dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\bar{\lambda} a_1 \sin |y| \cdot |y| + \bar{\lambda} a_2 y \sin |y|) dy \\ a_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y| (\bar{\lambda} |y| \cdot a_1 + \bar{\lambda} \cdot y \cdot a_2) dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\bar{\lambda} \cdot a_1 \cdot y^2 + \bar{\lambda} \cdot a_2 y \cdot |y|) dy \end{aligned}$$

Считаем отдельно коэффициенты, нужные для получения системы:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin |y| \cdot |y| dy &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y \cdot y \cdot dy = / * \quad \begin{matrix} u = y, \Rightarrow \\ dv = \sin y dy, \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} du = dy \\ v = -\cos y \end{matrix} * / = \\ &= -y \cdot \cos y \Big|_0^{\pi/2} + 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos dy = 0 + 2(\sin y) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \cdot \sin |y| dy &= 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2 dy &= \frac{y^3}{3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{12} \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \cdot |y| dy &= 0 \end{aligned}$$

тут второй и четвёртый интегралы - интегралы от нечётных функций на отрезке с центром в нуле, отсюда следует то, что они равны 0. При интегрировании первой функции пользуемся её чётностью.

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a_1 = \bar{\lambda} a_1 \cdot 2 \\ a_2 = \bar{\lambda} a_1 \cdot \frac{\pi^3}{12} \\ a_1 \cdot (1 - 2\bar{\lambda}) = 0 \\ \bar{\lambda} \frac{\pi^3}{12} a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} |x| a_1 + \bar{\lambda} \cdot x \cdot a_2$$

На данном этапе ищутся собственные функции сопряжённого оператора (решения сопряжённого уравнения).

$$\det \begin{vmatrix} 1 - 2\bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} \cdot \frac{\pi^3}{12} & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff (2\bar{\lambda} - 1) = 0 \iff \bar{\lambda} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем 2 случая.

1. Если  $\bar{\lambda} \neq \frac{1}{2}$ ,  $\Rightarrow \det \neq 0$ ,  $\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$ ,  $\psi(x) = 0$ , а потому заведомо

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cdot \psi(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cdot 0 = 0$$

т.е. при  $\bar{\lambda} = 1/2$  уравнение разрешимо при всех  $f$ .

2. Если  $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}$ , то

$$\begin{cases} a_1 \cdot 0 = 0 \\ \frac{\pi^3}{24} a_1 = a_2 \end{cases},$$

т.е.  $a_1$  — любое. Тогда

$$\psi(x) = \frac{1}{2} a_1 \cdot |x| + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{24} a_1 \cdot x = \frac{a_1}{2} \left( |x| + \frac{\pi^3}{24} x \right), \quad a_1 \in \mathbb{R}.$$

По теореме Фредгольма необходимо, чтобы  $f$  была ортогональна функции (61), т.е. при  $\lambda = \bar{\lambda} = \frac{1}{2}$  исходное неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cdot \frac{a_1}{2} \left( |x| + \frac{\pi^3}{24} x \right) dx = 0.$$

Ответ: исходное однородное уравнение разрешимо при всех допустимых  $\lambda \in \mathbb{C} \iff$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \cdot \frac{a_1}{2} \left( |x| + \frac{\pi^3}{24} x \right) dx = 0.$$

### В.з.доп-пр.7. Типичное ИУ

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x) \varphi(y) dy + a \sin x + bx$$

при всех допустимых значениях  $a, b, \lambda$ .

**Решение.**

$$C_1 := \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot \varphi(y) dy, \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y \varphi(y) dy$$

$$\varphi(x) = \lambda C_1 x + \lambda C_2 \cos x + a \sin x + bx.$$

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y (\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + by) dy$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y (\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + by) dy$$

$$C_1 = \lambda C_1 \cdot 2\pi + a\pi + 2\pi b,$$

$$C_2 = \lambda C_1 \frac{2\pi^3}{3} + a \cdot 2\pi + b \frac{2\pi^3}{3}$$

$$C_1(1 - 2\pi\lambda) = a\pi + 2\pi b$$

$$-\lambda \frac{2\pi^3}{3} C_1 + C_2 = 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}$$

Определитель  $\Delta(\lambda)$  системы (5) равен  $\Delta(\lambda) = 1 - 2\pi\lambda$ . Если  $\Delta(\lambda) \neq 0$ , т. е.  $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ , то система (5) имеет единственное решение при любых  $a$  и  $b$ :

$$C_1 = \frac{a\pi + 2\pi b}{1 - 2\pi\lambda}, \quad C_2 = \frac{2\pi^3 \lambda (a\pi + 2\pi b)}{3(1 - 2\pi\lambda)} + 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}$$

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  из (6) в (3), найдем при  $x \neq \frac{1}{2\pi}$  единственное решение интегрального уравнения (1).

Пусть  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ , тогда система (5) примет вид

$$C_1 \cdot 0 = (a + 2b)\pi$$

$$-\frac{\pi^2}{3} C_1 + C_2 = 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}$$

Система (7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a + 2b = 0$$

Условие (8) является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) при  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ . Здесь  $\frac{1}{2\pi}$  - характеристическое число интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x) \varphi(y) dy.$$

Общее решение однородной линейной системы



$$\begin{aligned} C_1 \cdot 0 &= 0 \\ -\frac{\pi^2}{3}C_1 + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

соответствующей системе (7), имеет вид

$$\tilde{C}_1 = C, \quad \tilde{C}_2 = \frac{\pi^2}{3}C$$

где  $C$  - произвольная постоянная. В качестве частного решения системы (7) можно взять

$$C_1^0 = 0, \quad C_2^0 = 2a\pi - \frac{a\pi^3}{3}$$

Поэтому общее решение системы (7) имеет вид

$$C_1 = C, \quad C_2 = \frac{\pi^2}{3}C + a\pi \left(2 - \frac{\pi^2}{3}\right)$$

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  из (9) в (3), найдем все решения уравнения (1) при  $\lambda = \frac{1}{2\pi}$  при условии (8). Эти решения можно записать формулой

$$\varphi(x) = \left(A - \frac{a}{2}\right)x + \left[\frac{A\pi^2}{2} + a\left(1 - \frac{\pi^2}{6}\right)\right]\cos x + a\sin x \quad A = \text{const.}$$

### В-5.1

Показать, что интегральный оператор  $K$  с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  ограничен из  $L_2(G)$  в  $L_2(G)$ , если

$$\int_{G \times G} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy = c^2 < \infty.$$

### В-5.2

Показать, что интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  является нулевым в  $L_2(G)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{K}(x, y) = 0, x \in G, y \in G$ .

### В-5.3

Пусть ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  интегрального уравнения (1) принадлежит  $L_2(G \times G)$ . Доказать сходимость метода последовательных приближений для любой функции  $f \in L_2(G)$ , если  $|\lambda| < 1/|c|$  (постоянная  $c$  взята из задачи 5.1).

### В-5.4

Пусть  $K$  - интегральный оператор с непрерывным ядром. Доказать, что операторы  $K^p = K(K^{p-1}), p = 2, 3, \dots$ , являются интегральными операторами с непрерывными ядрами  $\mathcal{K}_p(x, y)$  и эти ядра удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \int_G \mathcal{K}(x, \xi) \mathcal{K}_{p-1}(\xi, y) d\xi.$$

### В-5.5

Показать, что ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$ , введенные в задаче 5.4 (они называются повторными (итерированными) ядрами ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ ), удовлетворяют неравенствам:

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \leq M^p v^{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots$$

### В-5.6

Показать, что ряд  $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathcal{K}_{m+1}(x, y), x \in \bar{G}, y \in \bar{G}$ , сходится в круге  $|\lambda| < \frac{1}{Mv}$ , а его сумма  $(x, y; \lambda)$  (резольвента ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ ) непрерывна в  $\bar{G} \times \bar{G} \times U_{1/(Mv)}$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < \frac{1}{Mv}$ . Показать также, что при  $|\lambda| < \frac{1}{Mv}$  решение интегрального уравнения (1) единственно в классе  $C(\bar{G})$  и для любой  $f \in C(\bar{G})$  представляется через резольвенту  $(x, y; \lambda)$  формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y; \lambda) f(y) dy.$$

**В-5.7**

Показать, что резольвента  $(x, y; \lambda)$  (см. задачу 5.6) непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  удовлетворяет при  $|\lambda| < \frac{1}{Mv}$  каждому из уравнений:

а)  $(x, y; \lambda) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, \xi)(\xi, y; \lambda) d\xi + \mathcal{K}(x, y);$

б)  $(x, y; \lambda) = \lambda \int_G \mathcal{K}(\xi, y)(x, \xi; \lambda) d\xi + \mathcal{K}(x, y);$

в)  $\frac{\partial(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_G (x, \xi; \lambda)(\xi, y; \lambda) d\xi.$

В задачах 5.8-5.13 рассматриваются интегральные уравнения вида

$$\int_0^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x),$$

которые называются интегральными уравнениями Вольтерра первого и второго родов соответственно. (??? а не Фредгольма?)

**В-5.8**

Пусть выполнены следующие условия: а) функции  $\mathcal{K}^*(x, y)$  и  $\mathcal{K}_x(x, y)$  непрерывны на множестве  $0 \leq x \leq y \leq a$  б)  $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$  для всех  $x$ ; в)  $f \in C^1([0, a])$  и  $f(0) = 0$ . Доказать, что при этих условиях уравнение (4) равносильно уравнению

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{\mathcal{K}(x, x)} - \int_0^x \frac{\mathcal{K}_x(x, y)}{\mathcal{K}(x, x)} \varphi(y) dy.$$

**В-5.9**

Показать, что дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = F(x)$$

с непрерывными коэффициентами  $a_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$  при начальных условиях  $y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$  равносильно интегральному уравнению (5), где

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{m=1}^n a_m(x) \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$f(x) = F(x) - C_{n-1}a_1(x) - (C_{n-1}x + C_{n-2})a_2(x) - \dots$$

$$\dots - \left( C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1x + C_0 \right) a_n(x).$$

**В-5.10**

Пусть  $\mathcal{K} \in C(x \geq 0), \mathcal{K}(x) = 0$  при  $x < 0$ . Доказать, что обобщенная функция

$$\mathcal{E}(x) = \delta(x) + \mathcal{B}(x), \quad \text{где} \quad \mathcal{B}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{K} * \mathcal{K} * \dots * \mathcal{K}}_{m \text{ раз}},$$

есть фундаментальное решение оператора Вольтерра второго рода с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  (см. (5)), т.е.

$$\mathcal{E} - \mathcal{K} * \mathcal{E} = \delta.$$

Показать, что при этом ряд для  $(x)$  сходится равномерно в каждом конечном промежутке и удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x-y)(y) dy + \mathcal{K}(x), \quad x \geq 0$$

(функция  $(x-y)$  является резольвентой ядра  $\mathcal{K}(x-y)$  при  $\lambda = 1$ ).

**В-5.11**

Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра (5) с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$ :

1)  $\mathcal{K}(x, y) = 1;$

2)  $\mathcal{K}(x, y) = x - y.$

**В-5.12**

Решить следующие интегральные уравнения:

- 1)  $\varphi(x) = x + \int_0^x (y-x)\varphi(y)dy$
- 2)  $\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy + x^2$ .

**В-5.13**

Показать, что если  $g \in C^1(x \geq 0)$ ,  $g(0) = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ , то функция

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^x \frac{g'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy$$

удовлетворяет интегральному уравнению Абеля

$$\int \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dx = g(x)$$

В задачах 5.14-5.30 ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  интегрального уравнения является вырожденным, т. е.

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{m=1}^N f_m(x)g_m(y),$$

где функции  $f_m(x)$  и  $g_m(y)$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) непрерывны в квадрате  $a \leq x, y \leq b$  и линейно независимы между собой. В этом случае интегральное уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^N c_m f_m(x),$$

где неизвестные  $c_m$  определяются из системы алгебраических уравнений.

**В-5.14**

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = x - 1$ ,  $f(x) = x$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = 2e^{x+y}$ ,  $f(x) = e^x$ ;
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = x + y - 2xy$ ,  $f(x) = x + x^2$ .

**В-5.15**

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях: в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = xy + x^2y^2$ ,  $f(x) = x^2 + x^4$ ;
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = x^{1/3} + y^{1/3}$ ,  $f(x) = 1 - 6x^2$ ;
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = x^4 + 5x^3y$ ,  $f(x) = x^2 - x^4$ ;
- 4)  $\mathcal{K}(x, y) = 2xy^3 + 5x^2y^2$ ,  $f(x) = 7x^4 + 3$ ; 5)  $\mathcal{K}(x, y) = x^2 - xy$ ,  $f(x) = x^2 + x$ ; 6)  $\mathcal{K}(x, y) = 5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2$ ,  $f(x) = x$ .

**В-5.16**

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin(2x + y), \quad f(x) = \pi - 2x;$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin(x - 2y), \quad f(x) = \cos 2x;$
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos(2x + y), \quad f(x) = \sin x;$
- 4)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin(3x + y), \quad f(x) = \cos x;$  5)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin y + y \cos x, \quad f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi};$  6)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos^2(x - y), \quad f(x) = 1 + \cos 4x.$

**В-5.17**

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y, \quad f(x) = \cos 3x;$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \cos x \cos y + 2 \sin 2x \sin 2y, \quad f(x) = \cos x$
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \sin x \sin y + 3 \cos 2x \cos 2y, \quad f(x) = \sin x.$

**В-5.18**

Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \left[ \sin(x + y) + \frac{1}{2} \right] \varphi(y) dy;$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \left[ \cos^2(x + y) + \frac{1}{2} \right] \varphi(y) dy;$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left( x^2 y^2 - \frac{2}{45} \right) \varphi(y) dy;$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[ \left( \frac{x}{y} \right)^{2/5} + \left( \frac{y}{x} \right)^{2/5} \right] \varphi(y) dy;$  5)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y + \sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y) \varphi(y) dy.$

**В-5.19**

При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 12 \int_0^1 \left( xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3} \right) \varphi(y) dy + ax^2 + bx - 2?$$

Найти решения при этих значениях  $a$  и  $b$ .

**В-5.20**

При каких значениях параметра  $a$  разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sqrt{15} \int_0^1 [y(4x^2 - 3x) + x(4y^2 - 3y)] \varphi(y) dy + ax + \frac{1}{x}?$$

**В-5.21**

Выяснить, при каких значениях  $\lambda$  интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y) \varphi(y) dy + f(x)$$

разрешимо для любой  $f(x) \in C([0, 2\pi])$ , и найти решение.

**В-5.22**

Найти решения следующих интегральных уравнений при всех  $\lambda$  и при всех значениях параметров  $a, b, c$ , входящих в свободный член этих уравнений:

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (y \sin x + \cos y) \varphi(y) dy + ax + b$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y) \varphi(y) dy + a \sin x + b$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xy) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c$
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2y + xy^2) \varphi(y) dy + ax + bx^3$  5)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + ax + b$  6)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 [5(xy)^{1/3} + 7(xy)^{2/3}] \varphi(y) dy + ax + bx^{1/3}$  7)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{1+y^2} \varphi(y) dy + a + x + bx^2$ ; 8)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c$  9)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2) \varphi(y) dy + ax + b$ .

**В-5.23**

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

при всех  $\lambda, a, b$ , если:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = 3x + xy - 5x^2y^2, \quad f(x) = ax$ ;
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = 3xy + 5x^2y^2, \quad f(x) = ax^2 + bx$ .

**В-5.24**

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

при всех  $\lambda, a, b$ , если:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = x \cos y + \sin x \sin y, \quad f(x) = a + b \cos x$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = x \sin y + \cos x, \quad f(x) = ax + b$ .

**В-5.25**

Найти решение и резольвенту  $(x, y; \lambda)$  следующих интегральных уравнений:

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y) \varphi(y) dy + f(x)$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1-y+2xy) \varphi(y) dy + f(x)$ ;
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos x) \varphi(y) dy + ax + b$ ;
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y) \varphi(y) dy + f(x)$ .

**В-5.26**

Найти все значения параметров  $a, b, c$ , при которых следующие интегральные уравнения имеют решения при любых  $\lambda$ :

- 1)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xy) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ;
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{\sqrt{1-y^2}} \varphi(y) dy + x^2 + ax + b$ ;
- 4)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (xy - \frac{1}{3}) \varphi(y) dy + ax^2 - bx + 1$ ; 5)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x+y) \varphi(y) dy + ax + b + 1$  6)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x+4y) \varphi(y) dy + e^{ax+b}$ ; 7)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \sin 2y + \sin 2x \sin 4y) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c$ ;
- 8)  $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+x^2+y^3) \varphi(y) dy + ax + bx^3$ .

**В-5.27**

Найти все значения параметра  $a$ , при которых интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (ax - y) \varphi(y) dy + f(x)$$

разрешимо при всех действительных  $\lambda$  и всех  $f \in C([0, 1])$ .

**В-5.28**

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

- 1)  $\varphi(x_1, x_2) = \lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [x_1 + x_2 + \frac{3}{32}(y_1 + y_2)] \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2$
- 2)  $\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (|x|^2 + |y|^2) \varphi(y) dy, \quad x = (x_1, x_2);$
- 3)  $\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} \frac{1+|y|}{1+|x|} \varphi(y) dy, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$

**В-5.29**

Выяснить, имеет ли интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (|x|^2 - |y|^2) \varphi(y) dy, \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

вещественные характеристические числа, и если имеет, то найти соответствующие собственные функции.

**В-5.30**

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра  $\mathcal{K}(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2$  и решить интегральное

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x_1 x_2 + y_1 y_2) \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + f(x_1, x_2)$$

В задачах 5.31, 5.33–5.35 ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  интегрального уравнения (1) является эрмитовым, т. е. совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром:

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}.$$

В частности, если эрмитово ядро является вещественным, то оно симметрично, т.е.  $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$ .

Эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$  обладает следующими свойствами:

- 1) множество характеристических чисел этого ядра не пусто, расположено на действительной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;
- 2) система собственных функций  $\{\varphi_k\}$  может быть выбрана ортонормальной:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}.$$

**В-5.31**

Доказать, что если  $\mathcal{K}(x, y)$  - эрмитово ядро, то характеристические числа второго итерированного ядра  $\mathcal{K}_2(x, y)$  (см. задачи 5.4-5.5) положительны.

**В-5.32**

Доказать, что если ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  является кососимметричным, т.е.  $\mathcal{K}(x, y) = -\mathcal{K}^*(x, y)$ , то его характеристические числа чисто мнимые.

В задачах 5.33-5.35 предполагается, что характеристические числа  $\lambda_k$  эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  занумерованы в порядке возрастания их модулей, т. е.

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$$

и каждое из этих чисел повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Тогда можно считать, что каждому характеристическому числу  $\lambda_k$  соответствует одна собственная функция  $\varphi_k$ . Систему собственных функций  $\{\varphi_k\}$  будем считать ортонормальной.

**В-5.33**

Пусть  $\mathcal{K}(x, y)$  - эрмитово непрерывное ядро,  $\mathcal{K}_p(x, y)$  - повторное ядро ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Доказать формулы:

- 1)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\varphi_m(x)|^2}{\lambda_m^2} = \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy;$
- 2)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} = \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy;$  3)  $(Kf, f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}, f \in L_2(G), K$  - интегральный оператор с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$

4)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^{2p}} = \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}_p(x, y)|^2 dx dy$   $p = 1, 2, \dots$  Пусть  $\mathcal{K}_n(x, y)$  - е повторное ядро для эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Назовем величину

$$\alpha_n = \int_a^b \mathcal{K}_n(x, x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

n-м следом ядра  $\mathcal{K}(x, y)$

### В-5.34

Доказать:

- 1) отношение  $\frac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}$  не убывает и ограничено;
- 2) существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{2n+2}}$  и этот предел равен наименьшему характеристическому числу ядра  $\mathcal{K}_2(x, y)$ ;
- 3)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^n} = \alpha_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\lambda_m, m = 1, 2, \dots$ , - характеристические числа ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ ,  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ ;
- 4)  $\frac{1}{|\lambda_1|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_{2n}}$ .

### В-5.35

Пусть  $\lambda$  не является характеристическим числом эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Доказать, что (единственное) решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

можно представить в виде ряда

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_m)}{\lambda_m - \lambda} \varphi_m(x) + f(x),$$

равномерно сходящегося на  $\bar{G}$ , а для резольвенты  $(x, y; \lambda)$  имеет место формула

$$(x, y; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \bar{\varphi}_m(y)}{\lambda_m - \lambda},$$

где билинейный ряд сходится в  $L_2(G \times G)$ .

### В-5.36

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}x, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ \frac{2-x}{2}y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$
- 4)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (x+1)(y-2), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ (y+1)(x-2), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$
- 5)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (x+1)y, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ x(y+1), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$
- 6)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (e^x - e^{-x})(e^y + e^{2-y}), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (e^x + e^{2-x})(e^y - e^{-y}), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$
- 7)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin(1-y), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ \sin(1-x) \sin y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$

**В-5.37**

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  в следующих случаях:

- 1)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (1+x)(1-y), & \text{если } -1 \leq x \leq y \leq 1 \\ (1-x)(1+y), & \text{если } -1 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$
- 2)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \cos x \sin y, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq \pi, \\ \cos y \sin x, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq \pi; \end{cases}$
- 3)  $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq \pi, \\ \sin y \cos x, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq \pi \end{cases}$

**В-5.38**

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \omega(x+y) \varphi(y) dy$$

в следующих случаях:

- 1)  $\omega(t)$  - четная  $2\pi$ -периодическая функция, причем  $\omega(t) = t$ , если  $t \in [0, \pi]$
- 2)  $\omega(t)$  - четная  $2\pi$ -периодическая функция, причем  $\omega(t) = \pi - t$ , если  $t \in [0, \pi]$ .

**В-5.39**

Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром  $\mathcal{K}(x, y) = \omega(x-y)$ ,  $\omega(t)$  - непрерывная кусочно гладкая четная  $2\pi$ -периодическая функция,  $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ .

**В-5.40**

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x),$$

если  $f(x) \in C^2([0, 1])$  и

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Пусть  $\mathcal{K}(x, y)$  - непрерывное ядро интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x).$$

Выражение называется символом Фредгольма, а функция

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n}{n!} \lambda^n$$

$$A_n = \int_a^b \dots \int_a^b \mathcal{K} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \dots t_n \\ t_1 & t_2 \dots t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

где называется определителем Фредгольма ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  или интегрального уравнения (6).

**В-5.41**

Доказать, что коэффициенты  $A_n$  определителя Фредгольма удовлетворяют неравенствам  $|A_n| \leq n^{n/2} M^n (b-a)^n$ . Вывести отсюда, что  $D(\lambda)$  - целая функция от  $\lambda$ .

Ук а з а н и е. Использовать неравенство Адамара (см. [2]). Минором Фредгольма называется функция

$$D(x, y; \lambda) = \lambda \mathcal{K}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n(x, y)}{n!} \lambda^{n+1}$$

где

$$B_n(x, y) = \int_a^b \dots \int_a^b \mathcal{K} \begin{pmatrix} x & t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ y & t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$



**В-5.42**

Показать, что если  $\mathcal{K}(x, y)$  — непрерывная в квадрате  $L : \{a \leq x, y \leq b\}$  функция, то  $D(x, y; \lambda)$  — непрерывная функция переменных  $x, y, \lambda$  в  $L \times \mathbb{C}$  и  $D(x, y; \lambda)$  (при фиксированных  $x$  и  $y$ ) является целой функцией от  $\lambda$ .

**В-5.43**

Доказать, что коэффициенты  $A_n$ , функции  $B_n(x, y)$  и ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  (см. (7)-(10)) связаны равенствами:

$$1) B_n(x, y) = A_n \mathcal{K}(x, y) - n \int_a^b B_{n-1}(x, \xi) \mathcal{K}(\xi, y) d\xi;$$

$$2) B_n(x, y) = A_n \mathcal{K}(x, y) - n \int_a^b \mathcal{K}(x, \xi) B_{n-1}(\xi, y) d\xi.$$

Указан и е. Разложить определитель, входящий в подынтегральное выражение для  $B_n(x, y)$ , по элементам первого столбца.

**В-5.44**

Доказать первое и второе фундаментальные соотношения Фредгольма:

$$D(x, y; \lambda) - \lambda \mathcal{K}(x, y) D(\lambda) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, \xi) D(\xi, y; \lambda) d\xi,$$

$$D(x, y; \lambda) - \lambda \mathcal{K}(x, y) D(\lambda) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(\xi, y) D(x, \xi; \lambda) d\xi.$$

Указан и е. Воспользоваться разложением (9), сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  в левой и правой частях доказываемых равенств и применить результат предыдущей задачи.

**В-5.45**

Доказать формулы

$$A_n = \int_a^b B_{n-1}(x, x) dx, \quad \int_a^b D(x, x; \lambda) dx = -\lambda D'(\lambda)$$

**В-5.46**

Доказать формулу  $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^{n-1}$  (коэффициенты  $\alpha_n$  определены на с. 75).

**В-5.47**

Пусть определитель Фредгольма  $D(\lambda)$  интегрального уравнения (6) не равен нулю. Доказать, что в этом случае интегральное уравнение для любой  $f(x) \in C([a, b])$  имеет решение и при том только одно и что это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)} f(y) dy.$$

**В-5.48**

Используя представление решения интегрального уравнения при  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$  через резольвенту  $(x, y; \lambda)$  (см. задачу 5.6) и результат предыдущей задачи, доказать формулу

$$(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{\lambda D(\lambda)}$$

(эта формула определяет аналитическое продолжение резольвенты, заданной при  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$  в виде ряда (см. задачу 5.6)).

**В-5.49**

Доказать, что характеристические числа интегрального уравнения с непрерывным ядром совпадают с нулями определителя Фредгольма  $D(\lambda)$  этого уравнения.

**В-5.50**

Доказать, что ранг  $m$  характеристического числа  $\lambda_0$  интегрального уравнения с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  конечен и имеет место неравенство

$$m \leq |\lambda_0|^2 \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy$$

**В-5.51**

Доказать, что определители Фредгольма непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и союзного с ним ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$  совпадают и, следовательно, данное и союзное уравнения имеют одни и те же характеристические числа (см. задачу 5.49).

**В-5.52**

Показать, что ранг характеристического числа для данного непрерывного ядра и союзного с ним ядра один и тот же.

**В-5.53**

Доказать, что при  $|\lambda| < 1$  интегральное уравнение Милна

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \left( \int_{|x-y|=0}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \varphi(y) dy$$

имеет единственное решение  $\varphi = 0$  в классе ограниченных функций на  $[0, \infty)$ .

**В-5.54**

Для интегрального уравнения Пайерлса

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_G \frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|^2} \varphi(y) dy, \quad \alpha > 0,$$

доказать оценку

$$\lambda_1 (1 - e^{-\alpha D}) \geq \alpha,$$

$D$  - диаметр области  $G \subset R^3$ ,  $\lambda_1$  - наименьшее по модулю характеристическое число ядра.

**В-5.55**

Доказать, что при  $\lambda < 1/2$  решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^\infty e^{-|x-y|} \varphi(y) dy + f(x)$$

единственно в классе ограниченных функций в  $R^1$  и выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y) dy.$$

**14.6 Задачи на смешанные задачи**

(подумаю потом про название)

## МФТИ.Карлов-3 Типичная смешанная задача на отрезке и метод Фурье

(!! вот то отработать нужно!)

$$\begin{cases} u_{tt} + 6u_t = 2u_{xx} - 5x \cdot e^{-t} + (2x - \pi)^2 \cdot e^{-4t}; & x \in (0; \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u|_{t=0} = x + 3, & u_t|_{t=0} = 2 \cdot \sin 3x \sin x + \cos 4x - x \\ u_x|_{x=0} = e^{-t}, & u_x|_{x=\pi/2} = e^{-t} \end{cases}$$

Поскольку задача смешанная, то будут начальные и граничные условия. Рассматривается функция  $u(x, t)$ . За такую задачу дают больше всего баллов. Решение: Для решения задачи воспользуемся методом Фурье, т.е. будем решать задачу через ряд. Для этого необходимо занулить граничные условия. Поэтому:

1) Обнуляем граничные условия, т.е. подбираем функцию, удовлетворяющую граничным условиям. Таких функций много, и потому можно взять любую попроще. Эта функция  $g(x, t)$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$g_x|_{x=0} = e^{-t}, g_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = e^{-t}.$$

Общего метода нет, почти всегда такую функцию можно подобрать устно. Совет: на самом деле можно, глядя на условия задачи, неоднородности, стоящие в уравнении или в начальных условиях, понять, какое желательно подобрать  $g$ . Это следует из-за особенности составления этих задач. Например:

$$g(x, t) = x \cdot e^{-t}.$$

В случае любой другой функции ответ получался бы всё равно тем же самым, только более сложные функции могли бы привести к более сложным вычислениям. Ищем ответ в виде:

$$u = v + g.$$

Подставляем эту сумму в уравнение, в начальные и в граничные условия и смотрим, какими они станут для  $v$ :

$$\begin{cases} v_{tt} + x e^{-t} + 6v_t - 6x e^{-t} = 2v_{xx} - 5x \cdot e^{-t} + (2x - \pi)^2 \cdot e^{-4t}, \\ v|_{t=0} + x = x + 3; \quad v_t|_{t=0} - x = 2 \sin 3x \sin x + \cos 4x - x \\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

В большинстве случаев в правой части уравнения должна оставаться одна функция, отвечающая за неоднородность, поскольку её необходимо в процессе решения разложить в ряд Фурье. Если остались две функции, то скорее всего либо была выбрана не лучшая функция  $g$ , либо были сделаны ошибки в подсчётах. Полученное уравнение не является ни волновым, ни теплопроводности. Однако метод Фурье является общим и может применяться и для волнового уравнения, и для уравнения теплопроводности, и для уравнения такого вида. За доведение до этого этапа даётся 1 балл. Если ошибиться на каком-то из этапов, то на дальнейших этапах проверяющими считается, что решаемая задача не имеет ничего общего с данной, а потому баллы за дальнейшее решение не выставляются. Однако некоторые преподаватели проверяют лояльнее и могут какое-то количество баллов поставить. 2) Ищем ответ в виде ряда:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t),$$

причем требуется, чтобы функция  $X_n(x)$  была собственной для второй производной, т.е.:

$$-X_n''(x) = \lambda X_n(x).$$

Это попытка найти ответ. Если это получится, то вычисления будут простые. Условие (8) нужно для того, чтобы подстановка в уравнение (6) была удобной. Минус присутствует в обычной записи данного уравнения, потому что это уравнение второго порядка будет решаться на функциях  $X_n$ , удовлетворяющих граничным условиям:

$$X_n'(0) = X_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

В задаче могут быть 4 различных варианта задания граничных условий, поскольку из четырёх условий (2 для функций и 2 для их производных на концах отрезка) нужно выбрать два. Условия на  $X_n$  ставятся такими же, как и на  $v$  на границе соответствующей области. Если будут найдены такие  $X_n$ , то граничные условия точно будут выполнены. На лекциях было доказано, что оператор минус вторая производная - линейный оператор на функциях, рассматривающийся на линейном пространстве (если взять функции класса  $C^2$  на отрезке такие, что для них на концах отрезка выполнены соответствующие условия, то они образуют линейное пространство, поскольку их сумма тоже будет удовлетворять этим условиям). Более того, этот оператор неотрицательно определён, т.е. все  $\lambda$  точно неотрицательны. В противном случае необходимо было бы рассматривать два случая. Для  $\lambda < 0$  возможны только  $X_n = 0$ . Отсюда следует, что общий вид ответа:

$$X_n(x) = C_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Этим можно пользоваться на контрольной. Ответ будет определен с точностью до умножения на  $C$ . Для производной  $X'_n(x)$ :

$$X'_n(x) = -\sqrt{\lambda}C_1 \cdot \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2 \cos \sqrt{\lambda}x$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} 0 = X'_n(0) = C_2\sqrt{\lambda}, \Rightarrow & \quad \text{или} \quad \lambda = 0, \Rightarrow X_n = C_1 \\ & \quad \text{или} \quad C_2 = 0 \\ 0 = X'_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1\sqrt{\lambda} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}\right), \Rightarrow & \quad \text{или} \quad C_1 = 0 \Rightarrow X_n = 0, \\ & \quad \text{или} \quad \lambda = 0, \Rightarrow X_n = C_1, \\ & \quad \text{или} \quad \sin\left(\sqrt{\lambda \frac{\pi}{2}}\right) = 0, \Rightarrow \sqrt{\lambda \frac{\pi}{2}} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ & \quad \sqrt{\lambda} = 2n, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \\ & \quad \lambda = (2n)^2, n \geq 0 \end{aligned}$$

Таким образом, все искомые из условий  $X_n$  получились следующими:

$$X_n(x) = \cos 2nx, n \geq 0.$$

Здесь учтена и константа (при  $n = 0$ ).  $X_n$  определяется с точностью до умножения на константу, поэтому не надо указывать  $C_1$ . Больше всего ошибок в этой задаче происходит при решении тригонометрического уравнения. Важно помнить, что

$$\begin{aligned} \sin x = 0 & \iff x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 0 & \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Таким образом, половина ответа уже известна. Именно поэтому важно было занулить граничные условия, ибо при их обнулении получаются именно функции Фурье. Возможны и другие коэффициенты перед  $x$ . В любом случае это будут функции Фурье, т.е. независимые функции, образующие базис, по которому можно раскладывать ответ. 3)

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t) \cdot \cos 2nx.$$

Этот ряд надо подставить в уравнение и стараться всё превращать в ряды. Раскладываем в ряды  $v_{tt}, v_t, v_{xx}$  и неоднородности в уравнении:

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \cdot 1 \text{ где } 1 = X_0(x) \\ 2 \sin 3x \sin x + \cos 4x &= / * \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) * / \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \cos 4x = \cos 2x \\ \cos 2x &= 1 \cdot \cos 2x, \text{ где } \cos 2x = X_1(x) \end{aligned}$$

3 С третьей функцией дела обстоят сложнее, поскольку её разложение будет больше:

$$(2x - \pi)^2 x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \cos 2nx$$

Вообще говоря, произвольная функция не обязана раскладываться в ряд Фурье, который, возможно, не сходится. Однако часто на экзамене делают грубое решение в целях экономии времени. В его рамках предполагается, что разложение будет. Однако в этом случае на веру берётся факт о том, что разложение будет и именно по ортогональной системе. Тогда для нахождения коэффициентов  $a_n$  необходимо левую и правую части (19) скалярно умножить на нужную базисную функцию:

$$a_n = \frac{((2x - \pi)^2, \cos 2nx)}{(\cos 2nx, \cos 2nx)},$$

где учтено, что базис ортогонален. Если расписать более конкретно:

Можно в рамках проверки рассмотреть функцию  $(2x - \pi)^2$  на интервале  $(0; \pi/2)$ . Это - парабола с вершиной в точке  $\frac{\pi}{2}$ . Требуется эту функцию разложить по косинусам чётной кратности. Это означает, что при продолжении этой функции и рассмотрении её на отрезке  $[-\pi; \pi]$  она должна была бы быть чётной, а из-за того, что косинусы у неё только чётной кратности, она также должна быть чётной на интервале

$[0; \pi]$  относительно  $\pi/2$ . Т.е. если функция обладает этим свойством, то она будет раскладываться на отрезке  $[-\pi; \pi]$  по косинусам и будет чётной относительно точек  $-\pi/2, 0, \pi/2$ . Такими же свойствами обладают и чётные косинусы. Далее вспоминаем, что продолженная таким образом функция вышла непрерывной кусочно-гладкой, т.е. график непрерывный, а кусочная гладкость означает, что у функции конечное число точек, в которых может быть разрыв первой производной - разрыв первого рода (у данной функции одна такая точка - в нуле), а значения на концах совпадают, то ряд Фурье к ней сходится равномерно на нужном отрезке.

Посчитаем знаменатель:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 2nxdx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4nx}{2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Для числителя (интегрирование по частям):  
 $\int_0^{\pi/2} (2x - \pi)^2 \cdot \cos 2nxdx = \int_0^{\pi/2} \frac{u = (2x - \pi)^2, \Rightarrow du = 2 \cdot 2(2x - \pi)dx}{dv = \cos 2nxdx, \Rightarrow v = \frac{\sin 2nx}{2n}} =$   
 $= \int_0^{\pi/2} u dv = (2x - \pi)^2 \cdot \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{n} (2x - \pi) \cdot \sin 2nx = - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{n} (2x - \pi) \cdot \sin 2nx$ . Нужно еще раз провести интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{u = \frac{2}{n}(2x - \pi), \Rightarrow du = \frac{4}{n}dx}{dv = \sin 2nxdx, \Rightarrow v = -\frac{\cos 2nx}{2n}} = - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{n} (2x - \pi) \cdot \sin 2nx = \\ & = \frac{2}{n} (2x - \pi) \cdot \frac{\cos 2nx}{2n} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{n^2} \cos 2nxdx = \frac{2}{n} (2x - \pi) \cdot \frac{\cos 2nx}{2n} \Big|_0^{\pi/2} = \\ & = 0 - \frac{2}{n} (2x - \pi) \cdot \frac{\cos 2nx}{2n} \Big|_{x=0} = \frac{\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

Можно не находить коэффициенты  $a_n$  и написать ответ в виде ряда, но за это снимут 1 балл. Иногда необходимо учесть, что  $\cos \pi n = (-1)^n$ , и встречаются выражения типа  $((-1)^n - 1)$ . Для  $n \geq 1$  имеем:

$$a_n = \frac{\pi/n^2}{\pi/4} = \frac{4}{n^2}.$$

Для  $n = 0$ :

$$a_0 = \frac{\int_0^{\pi/2} (2x - \pi)^2 dx}{\int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx} = \frac{\frac{(2x - \pi)^3}{3 \cdot 2} \Big|_0^{\pi/2}}{\pi/2} = 0 - \frac{\frac{(-\pi)^3}{6}}{\pi/2} = \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Найденные коэффициенты не потребуются до самого ответа. 4) Нужно разложенные ряды подставить в уравнение и найти  $T_n$ ; подставляем:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cdot \cos 2nx$$

в уравнение и в начальные условия (граничные условия уже выполнены, их можно не проверять). По ходу дела необходимо дважды продифференцировать ряд, однако функциональный ряд можно дифференцировать не всегда. Необходимо, чтобы продифференцированный ряд равномерно сходил на интервале, а исходный ряд сходил хотя бы в одной точке. Однако 5 на письменном экзамене не следует это проверять.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} T_n''(t) \cos 2nx + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} T_n'(t) \cos 2nx &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) (-(2n)^2 \cos 2nx) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2 \cos nx e^{-4t} \\ \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cdot \cos 2nx &= 3, \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) \cos 2nx = \cos 2x \end{aligned}$$

Это - наиболее содержательная часть метода Фурье. В левой и правой частях уравнения и условий функции разложены по базису Фурье на интервале  $(0; \frac{\pi}{2})$ . Поскольку функции  $\cos 2nx$  образуют базис и являются линейно независимыми, то можно приравнять коэффициенты перед ними справа и слева. Собираем подобные слагаемые перед базисными функциями  $\cos 2nx$ :

$$\begin{aligned} n \geq 2 : \quad & \begin{cases} T_n'' + 6 \cdot T_n' = -8 \cdot n^2 T_n + a_n \cdot e^{-4t} \\ T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0 \end{cases} \quad n = 1 : \quad \begin{cases} T_1'' + 6T_1' = -8T_1 + a_1 \cdot e^{-4t} \\ T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = 1 \end{cases} \\ n = 0 : \quad & \begin{cases} T_0'' + 6T_0' = a_0 e^{-4t} \\ T_0(0) = 3, \quad T_0'(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, остались задачи Коши для  $T_n$  для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Можно оценить количество исключений (таких как

подзадачи (31) и (32)) по количеству баллов за задание, и если за задачу ставится 9 баллов, а исключений нет или оно всего одно, то вероятно была допущена ошибка. Бывают исключения, связанные с резонансом, а также связанные с тем, что в одном случае корни комплексные, а в другом экспоненты. В этом примере есть все возможные исключения. На этом этапе заработано 5-6 очков, и дальше по одному будет даваться за каждую из подзадач (30)-(32). 5)  $n \geq 2$ . Характеристический многочлен:

$$M^2 + 6M + 8n^2 = 0.$$

$$D = 36 - 32n^2$$

Таким образом, дискриминант отрицательный для  $n \geq 2$ .

$$M = \frac{-6 \pm 2i\sqrt{8n^2 - 9}}{2} = -3 \pm i\sqrt{8n^2 - 9}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$T_n(t) = C_1 \cdot e^{-3t} \cdot \cos \omega_n t + C_2 \cdot e^{-3t} \sin \omega_n t,$$

где

$$\omega = \sqrt{8n^2 - 9}.$$

Ищем частное решение:

$$T_n'' + 6T_n' + 8n^2 \cdot T_n = a_n \cdot e^{-4t}.$$

6 Резонанс отсутствует. Поэтому вид частного решения:  $A \cdot e^{-4t}$ . Подставляем в (38):

$$\begin{aligned} 16A \cdot e^{-4t} - 24A \cdot e^{-4t} + 8n^2 A e^{-4t} &= a_n \cdot e^{-4t} \\ (8n^2 - 8) A &= a_n \\ A &= \frac{a_n}{8(n^2 - 1)} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$T_n(t) = C_1 \cdot e^{-3t} \cos \omega_n t + C_2 \cdot e^{-3t} \sin \omega_n t + \frac{a_n}{8(n^2 - 1)} \cdot e^{-4t}.$$

Подставляем начальные условия, получив систему линейных уравнений на  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Подстановка даёт:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + \frac{a_n}{8(n^2 - 1)} \\ 0 = -3C_1 + C_2 \omega_n - \frac{4a_n}{8(n^2 - 1)} \end{cases}$$

Находим  $C_1, C_2$ :

$$T_n(t) = \frac{a_n}{8(n^2 - 1)} \cdot \left[ e^{-3t} \left( \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t - \cos \omega_n t \right) + e^{-4t} \right].$$

6)  $n = 1$ :

$$\begin{cases} T_1'' + 6T_1' + 8T_1 = a_1 \cdot e^{-4t} \\ T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = 1 \end{cases}$$

Характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} M^2 + 6M + 8 &= 0 \\ M_1 &= -2, \quad M_2 = -4 \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$T_1(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-4t}.$$

Наступает резонанс, поскольку неоднородность в уравнении (46) - это  $e^{\gamma t}$ ,  $\gamma = -4$  - в то же время корень характеристического многочлена, имеющий кратность 1. В этом случае частное решение ищется как:

$$a \cdot t^k \cdot e^{-4t} = ate^{-4t}.$$

Подставляем в уравнение, получая:

$$\begin{aligned}(ate^{-4t})'' &= (ae^{-4t} - 4ate^{-4t})' = -4ae^{-4t} - 4ae^{-4t} + 16ate^{-4t} = -8ae^{-4t} + 16ate^{-4t} \\ &- 8ae^{-4t} + 16ate^{-4t} + 6ae^{-4t} - 24ate^{-4t} + 8ate^{-4t} = a_1 \cdot e^{-4t} \quad | \div e^{-4t} \\ &-2a = a_1, \Rightarrow a = -\frac{a_1}{2}\end{aligned}$$

Общее решение неоднородного уравнения есть:

$$T_1(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-4t} - \frac{a_1}{2} t \cdot e^{-4t}$$

Начальные условия:

$$T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}0 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= -2C_1 - 4C_2 - \frac{a_1}{2}\end{aligned}$$

Ищем  $C_1, C_2$ :

$$T_1(t) = \left(\frac{a_1}{4} + \frac{1}{2}\right)(e^{-2t} - e^{-4t}) - \frac{a_1}{2}te^{-4t}$$

7)  $n = 0$ :

$$\begin{cases} T_0'' + 6T_0' = a_0e^{-4t} \\ T_0(0) = 3; \quad T_0'(0) = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}M^2 + 6M &= 0 \\ M_1 &= 0, \quad M_2 = -6\end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$T_0(t) = C_1 + C_2e^{-6t}.$$

Резонанса нет  $\Rightarrow$  частное решение имеет вид  $a \cdot e^{-4t}$ . Подставляем:

$$\begin{aligned}16ae^{-4t} - 24ae^{-4t} &= a_0e^{-4t} \\ -8a &= a_0, \Rightarrow a = -\frac{a_0}{8}\end{aligned}$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$T_0(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-6t} - \frac{a_0}{8}e^{-4t}$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} 3 = T_0(0) = C_1 + C_2 - \frac{a_0}{8} \\ 0 = T_0'(0) = -6C_2 + \frac{a_0}{2} \end{cases}$$

Находим  $T_0(t)$ :

$$T_0(t) = 3 + a_0 \left( \frac{1}{24} + \frac{1}{12}e^{-6t} - \frac{1}{8}e^{-4t} \right).$$

Ответ:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= xe^{-t} + \left( 3 + a \left( \frac{1}{24} + \frac{e^{-6t}}{12} - \frac{e^{-4t}}{8} \right) \right) + \cos 2x \left[ \left( \frac{a_1}{4} + \frac{1}{2} \right) (e^{-2t} - e^{-4t}) - \frac{a_1}{2}te^{-4t} \right] + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \cos 2nx \left( \frac{a_n}{8(n^2-1)} \cdot \left[ e^{-3t} \left( \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t - \cos \omega_n t \right) + e^{-4t} \right] \right)\end{aligned}$$

8 где На контрольной на этом моменте можно поставить точку. Рассмотрим, почему при использовании метода Фурье можно дважды почленно дифференцировать по  $t$  или по  $x$ . Было сказано, что дифференцирование законно, если после дифференцирования получается равномерно сходящийся ряд, то есть надо посмотреть надо на последнюю часть в выражении (67). Коэффициент  $\frac{a_n}{8(n^2-1)}$  убывает как  $\frac{1}{n^4}$ . Если дважды продифференцировать этот ряд по  $x$ , то от косинуса выйдет еще  $4n^2$ , тогда этот коэффициент будет убывать как  $\frac{1}{n^2}$ . Остальная часть функционального ряда будет ограничена. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд можно по модулю ограничить коэффициентами числового сходящегося ряда и ряд равномерно сходится. Если дважды продифференцировать по  $t$ , то выйдет множитель  $\omega_n^2$ , который имеет порядок  $n^2$ , и ситуация не изменится. Таким образом, дифференцирование корректно.

## 14.6.1 Задачи на Метод разделения переменных

(??? а где на метод Фурье задачи?????)

## МФТИ.Карлов-2 Смешанная задача для полубесконечной струны

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6t, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = x + \sin x, & u_t|_{t=0} = 1 - \cos x \\ u_x|_{x=0} = 2, & t \geq 0 \end{cases}$$

**Суть решения** В первой строке стоит одномерное волновое уравнение. Поскольку  $x > 0$ , речь идёт о полуструне. Необходимо свести задачу к однородной, поскольку для неё есть готовое решение, а для задачи Коши есть формула Д'Аламбера.

**Решение** Сводим к однородному уравнению: ищем функцию  $g(x, t)$  такую, что  $g_{tt} = g_{xx} + 6t$ . Ясно, что их бесконечно много. Например:

$$g(x, t) = t^3.$$

Неоднородность обычно подбирается устно, иногда надо считать. Общего алгоритма нет.

$$u(x, t) \equiv v(x, t) + t^3.$$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ v|_{t=0} = x + \sin x = v_0, & v_t|_{t=0} = 1 - \cos x = v_1. \\ v_x|_{x=0} = 2, & t \geq 0 \end{cases}$$

Для однородного уравнения есть готовые ответы. Для однородного волнового уравнения на оси:

$$v_{tt} = a^2 \cdot v_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

общее решение имеет вид:

$$v(x, t) = I(x - at) + J(x + at),$$

$I, J$  - произвольные функции из класса  $C^2$ .

Имеется формула Даламбера для решения задачи Коши для однородного волнового уравнения:

$$\begin{cases} v|_{t=0} = v_0(x) \\ v_t|_{t=0} = v_1(x) \end{cases}$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2} (v_0(x + at) + v_0(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_1(\lambda) d\lambda$$

Идея решения заключается в следующем: первая четверть делится на две области линией  $x = at$ , при этом ниже этой линии для нахождения ответа используются только начальные условия, поскольку если взять любую точку, лежащую ниже этой характеристики, то для неё соответствующие ей линии  $x - at = C_1$  и  $x + at = C_2$  не попадают на ось  $Ot$ , то есть не попадают на ту ось, где поставлены граничные условия, и получается, что для области, лежащей ниже характеристики  $x = at$ , учитываются только начальные условия (при  $t = 0$ ).

2) В области  $x > t(a = 1)$  используем формулу Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2}((x + t) + \sin(x + t) + (x - t) + \sin(x - t)) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (1 - \cos \lambda) d\lambda = x + \frac{\sin(x + t) + \sin(x - t)}{2} + \frac{1}{2}(\lambda - \sin \lambda) \Big|_{x-t}^{x+t} = \\ &= x + \frac{\sin(x + t) + \sin(x - t)}{2} + \frac{1}{2}((x + t) - (x - t) + \sin(x - t) - \sin(x + t)) = \\ &= (x + t) + \sin(x - t). \end{aligned}$$

3)  $x \leq t$  В этом случае одна из линий  $x - at = C_1, x + at = C_2$  будет попадать на ось  $t = 0$ , т.е. туда, где поставлены граничные условия. Но необходимо и второе условие. Вид ответа:

$$v(x, t) = I(x - t) + J(x + t),$$

поскольку это - решение однородного волнового уравнения. Неизвестных - две, потому нужно два условия. Одно - это граничное условие на  $v_x|_{x=0} = 2$ , а второе - непрерывность склейки: искомый ответ должен



быть класса  $C^2$  в первой четверти, т.е. при  $x = t$  функция должна быть непрерывна. Поскольку при  $x > t$  решение уже было найдено, то этим можно воспользоваться: условие непрерывной склейки:

$$I(0) + J(2t) = x + t + \sin(x - t) = 2t.$$

Вторым условием будет:

$$2 = v_x|_{x=0} = I'(-t) + J'(t),$$

где производные функций - производные именно по тем переменным, от которых они зависят. Таким образом:

$$\begin{cases} J(2t) = 2t - I(0) \\ I'(-t) + J'(t) = 2 \end{cases}.$$

Функции  $I, J$  находятся с точностью до  $+C$ . Поэтому можно принять  $I(0) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} J(2t) = 2t, &\Rightarrow J(\eta) = \eta, \Rightarrow J'(\eta) = 1 \\ I'(-t) + 1 = 2, &\Rightarrow I'(-t) = 1, \Rightarrow I'(\xi) = 1 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \xi + C, \\ 0 = I(0) &\Rightarrow C = 0 \\ J(\eta) &= \eta \\ I(\xi) &= \xi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$v(x, t) = I(x - t) + J(x + t) = 2x$$

Ответ:

$$u(x, t) = t^3 + \begin{cases} x + t + \sin(x - t), & x > t \\ 2x, & x \leq t \end{cases}$$

## Задача 2:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & t > 0; x > 0 \\ u|_{t=0} = 2 \cdot e^{2x} - 4, & u_t|_{t=0} = 0; x \geq 0 \\ (u_x - 2u)|_{x=0} = 8t^2 + 8, & t \geq 0 \end{cases}$$

Проверить, что решение принадлежит к классу  $C^2$ , ответ обосновать.

**Поиск решения** Уравнение изначально однородное. Рассматриваем первую четверть. В данном случае  $a = 2$ , поэтому проводим линию  $x = 2t$ . Решение будет состоять из двух частей.

1)  $x > 2t$  Общий вид ответа для однородного волнового уравнения:

$$u(x, t) = I(x - 2t) + J(x + 2t).$$

Так выглядит решение любого однородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}$ . В области  $x > 2t$  учитываются только начальные условия:

$$\begin{cases} 2 \cdot e^{2x} - 4 = u|_{t=0} = I(x) + J(x) \\ 0 = u_t|_{t=0} \end{cases}$$

Продифференцируем выражение (23) по  $t$ , пользуясь формулой дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -2I'(x - 2t) + 2J'(x + 2t) \\ u_t|_{t=0} &= -2I'(x) + 2J'(x) \end{aligned}$$

В данной области граничные условия не учитываются.

При решении (24), пользуясь (26), получаем:

$$\begin{cases} I(x) = -J(x) + 2 \cdot e^{2x} - 4 \\ I'(x) = J'(x) \end{cases};$$

найдем производную  $I'_\xi(\xi)$ :

$$\frac{d}{dx} : \quad I'(x) = -J'(x) + 4 \cdot e^{2x}.$$

Подставляем это во второе уравнение:

$$2J'(x) = 4 \cdot e^{2x},$$

откуда

$$\begin{aligned} J'(x) &= 2 \cdot e^{2x}, \\ J(x) &= e^{2x} + C. \end{aligned}$$

Находим отсюда  $I$ :

$$I(x) = e^{2x} - C - 4.$$

Таким образом, получаем ответ при  $x > 2t$ :

$$u(x, t) = e^{2(x-2t)} - 4 + e^{2(x+2t)}.$$

Данный способ решения, в отличие от поиска решения с помощью формулы Даламбера, помогает ускорить процесс нахождения ответа во второй части, потому что известен не только ответ первой области, но и его разбиение на части  $I$  и  $J$ .

2)  $x < 2t$ ; учтём, что известны следующие ответы:

$$u(x, t) = I_2(x - 2t) + J_2(x + 2t),$$

$I_2$  и  $J_2$  могут отличаться от соответствующих функций из первой области. Однако вид ответа будет таким из-за того, что рассматривается волновое однородное уравнение. Заметим, что обратная волна  $J$  в обеих областях одинакова:  $J_2(\eta) = J(\eta)$ , т.к. при подстановке  $x = 2t$  и учёте непрерывности предыдущего ответа получается, что

$$I(x - 2t) + J(x + 2t) = I_2(x - 2t) + J_2(x + 2t), \quad x = 2t.$$

Это приводит к тому, что:

$$I(0) + J(4t) = I_2(0) + J_2(4t),$$

откуда непосредственно следует равенство  $J_2(\eta) = J(\eta)$ . Константу можно выбросить, поскольку эти функции находятся с точностью до констант, т.е.  $J = J_2$  с точностью до  $+C$ . Тогда

$$u(x, t) = I_2(x - 2t) + e^{2(x+2t)}$$

Используем граничное условие:

$$8t^2 + 8 = (u_x - 2u)|_{x=0} = I_2'(-2t) \cdot 1 + 2 \cdot e^{4t} - 2I_2(-2t) - 2 \cdot e^{4t}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} I_2'(-2t) - 2I_2(-2t) &= 8t^2 + 8 \\ \xi = -2t, \xi^2 &= 4t^2 \\ I_2'(\xi) - 2 \cdot I_2(\xi) &= 2\xi^2 + 8 \end{aligned}$$

Производная берется по переменной, от которой зависит  $I_2$ ; в первой области было известно, как ответ разбивается на две части (прямая и обратная волна), это помогло во второй области уже сразу найти половину ответа, поскольку неизвестно только  $I_2$ . Решим уравнение (41); общее решение:

$$I_2(\xi) = C \cdot e^{2\xi}$$

Частное решение - многочлен второй степени  $a\xi^2 + b\xi + c$ . Подставляем:

$$\begin{aligned} 2a\xi + b - 2a\xi^2 - 2b\xi - 2c &= 2\xi^2 \\ \begin{cases} a = -1 \\ 2a = 2b, \Rightarrow b = -1 \\ b - 2c = 8, \Rightarrow c = -4.5 \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда общее решение неоднородного уравнения:

$$I_2(\xi) = C \cdot e^{2\xi} - \xi^2 - \xi - 4.5$$

Для нахождения  $C$  надо выполнить проверку для любой общей точки обеих областей, например,  $(0; 0)$ :

$$\begin{cases} x > 2t : & e^{2(x-2t)} - 4 + e^{2(x+2t)} \\ x < 2t : & e^{2(x+2t)} + C \cdot e^{2(x-2t)} - (x-2t)^2 - (x-2t) - 4.5 \\ & 1 - 4 + 1 = 1 + C - 4.5, \Rightarrow C = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Отсюда ответ:

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{2(x-2t)} - 4 + e^{2(x+2t)}, & x > 2t, \\ e^{2(x+2t)} + \frac{3}{2} \cdot e^{2(x-2t)} - (x-2t)^2 - (x-2t) - 4.5, & x \leq 2t \end{cases}$$

Ответ непрерывен на всей линии  $x = 2t$ , поскольку он непрерывен в  $(0; 0)$ .

**Гладкость ответа** Рассмотрим вопрос о том, находится ли функция в классе  $C^2$ . Внутри областей функция является  $C^2$ -гладкой. Проблемы могут быть только при склейке. Для проверки ответа на  $C^2$  необходимо проверить согласование начальных и граничных условий: если они согласуются в точке  $(0; 0)$  (там, где они пересекаются) до второго порядка, то проблемы будут отсутствовать везде вдоль линии  $x = 2t$ . При ответе на этот вопрос формула (48) (решение уравнения) не требуется. Проверим  $u_x$ :

$$8 = 8t^2 + 8 \Big|_{t=0} \stackrel{(1)}{=} u_x(0, 0) - 2u(0, 0) \stackrel{(2)}{=} [(2e^{2x} - 4)_x - 2(2e^{2x} - 4)] \Big|_{x=0},$$

где переход (1) следует из граничного условия, а переход (2) - из начального. Для правой части:

$$4e^{2x} - 4e^{2x} + 8 = 8,$$

а потому (49) - верное равенство. Проверим вторые производные:

$$(8t^2 + 8)' \Big|_{t=0} = u_{xt}(0, 0) - 2u_t(0, 0) = (0)' \Big|_{t=0} - 2 \cdot 0 \Big|_{t=0}.$$

Таким образом, условия совпали в начальной точке до второго порядка, т.е. согласованы, т.е. ответ лежит в классе  $C^2$ . Если бы не было равенства (49), то решение было бы не  $C^1$ -гладким, а если бы выполнялось (49), но не (51), то решение было бы  $C^1$ -гладким, но не  $C^2$ -гладким.

### В-20.1

Решить задачу о колебании струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение  $u_0$  имеет форму:

- 1) синусоиды  $u_0(x) = A \sin \frac{\pi n x}{l}$  ( $n$  целое);
- 2) параболы, осью симметрии которой служит прямая  $x = \frac{l}{2}$ , а вершиной - точка  $M(\frac{l}{2}, h)$ ;
- 3) ломаной  $OAB$ ,  $O(0, 0)$ ,  $A(c, h)$ ,  $B(l, 0)$ ,  $0 < c < l$ . Рассмотреть случай  $c = \frac{l}{2}$ .

### В-20.2

Решить задачу о колебании струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое ( $u_0 = 0$ ), а начальная скорость  $u_1$  задается формулой:

- 1)  $u_1(x) = v_0 = \text{const}$ ,  $x \in [0, l]$ ;
- 2)  $u_1(x) = \begin{cases} v_0, & \text{если } x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & \text{если } x \in [\alpha, \beta], \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq l$
- 3)  $u_1(x) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}, & \text{если } x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \\ 0, & \text{если } x \notin [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \end{cases} \quad 0 \leq x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \leq l$ . Уравнение (1) описывает

свободные продольные колебания стержня. В задачах 20.3, 20.4 требуется найти продольные колебания стержня, применяя метод разделения переменных.

### В-20.3

Решить задачу о продольных колебаниях однородного стержня при произвольных начальных данных в каждом из следующих случаев:

- 1) один конец стержня ( $x = 0$ ) жестко закреплен, а другой конец ( $x = l$ ) свободен;
- 2) оба конца стержня свободны;
- 3) один конец стержня ( $x = l$ ) закреплен упруго, а другой конец ( $x = 0$ ) свободен.

### В-20.4

Найти продольные колебания стержня, если один его конец ( $x = 0$ ) жестко закреплен, а к другому концу ( $x = l$ ) приложена сила  $P$  (в момент времени  $t = 0$  сила перестает действовать).

### В-20.5

Найти силу тока  $i(x, t)$  в проводе длины  $l$ , по которому течет переменный ток, если утечка тока отсутствует и омическим сопротивлением можно пренебречь. Предполагается, что начальный ток в проводе (при  $t = 0$ ) равен нулю, а начальное напряжение задается формулой  $v|_{t=0} = E_0 \sin \frac{\pi x}{2l}$ . Левый конец провода ( $x = 0$ ) изолирован, а правый конец ( $x = l$ ) заземлен.

Задача о нахождении вынужденных колебаний однородной струны  $0 < x < l$ , жестко закрепленной на концах, под действием внешней силы с плотностью  $p$  приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t)$$

( $g = p/\rho$ ,  $\rho$  - линейная плотность струны) при граничных условиях (3) и начальных условиях (2). Решение задачи (11), (2), (3) ищут в виде суммы

$$u = v + w,$$

$v$  - решение неоднородного уравнения (11), удовлетворяющее граничным условиям (3) и нулевым начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,$$

а  $w$  есть решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3) и начальным условиям (2).

Решение  $v$  представляет вынужденные колебания струны (эти колебания совершаются под действием внешней возмущающей силы при отсутствии начальных возмущений), а решение  $w$  представляет свободные колебания струны (они обусловлены начальными возмущениями). Функцию  $v$  отыскиваем в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

по собственным функциям задачи (6), (7). Подставляя (12) в (11), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ T_k''(t) + \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = g(x, t).$$

Разлагая функцию  $g(x, t)$  в интервале  $(0, l)$  в ряд Фурье по синусам

$$g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и сравнивая (13) и (14), находим дифференциальные уравнения

$$T_k''(t) + \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) = g_k(t)$$

где

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi, t) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Решая уравнения (15) при нулевых начальных условиях

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

находим  $T_k(t)$ , а затем определяем  $v$  с помощью формулы (12). Заметим, что решения  $T_k(t)$  уравнений (15) при условиях (16) можно представить в виде

$$T_k(t) = \frac{2}{k\pi a} \int_0^t \left[ \int_0^l g(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi a}{l} (t - \tau) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi \right] d\tau.$$

Решение задачи (11), (2), (3) представляется в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где функции  $T_k(x)$  определяются формулой (17), а коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  - формулами

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

## B-20.6

Решить методом разделения переменных следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} + 2b$  ( $b = \text{const}$ ,  $0 < x < l$ ),  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 2)  $u_{tt} = u_{xx} + \cos t$  ( $0 < x < \pi$ ),  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ .

**В-20.7**

Решить задачу о колебаниях однородной струны ( $0 < x < l$ ), закрепленной на концах  $x = 0$  и  $x = l$ , под действием внешней непрерывно распределенной силы с плотностью  $\rho(x, t) = A\rho \sin \omega t$ ,  $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Начальные условия - нулевые.

**В-20.8**

Решить задачу о продольных колебаниях стержня, подвешенного за конец  $x = 0$  (конец  $x = l$  свободен), совершаемых под влиянием силы тяжести.

Задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны под действием внешней силы в случае, когда концы струны двигаются по некоторому закону, приводится к решению уравнения (11) при граничных условиях вида

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t)$$

и начальных условиях (2). Решение задачи (11), (2), (18) ищем в виде  $u = v + w$ ,  $w = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$  - функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям (18).

Тогда функция  $v(x, t)$  удовлетворяет нулевым граничным условиям  $v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$ , уравнению  $v_{tt} - a^2 v_{xx} = g_1$ ,  $g_1(x, t) = g(x, t) - (w_{tt} - a^2 w_{xx})$ , и следующим начальным условиями:

$$v|_{t=0} = u_0(x) - w|_{t=0}, \quad v_t|_{t=0} = u_1(x) - w_t|_{t=0}.$$

Мы пришли к задаче типа (11), (2), (3) для функции  $v$ . Замечание. Иногда удается найти функцию  $v$ , удовлетворяющую неоднородному уравнению (11) и заданным граничным условиям (18). Тогда, отыскивая решение задачи (11), (2), (18) в виде  $u = v + w$ , находим, что функция  $w$  удовлетворяет однородному уравнению (1), нулевым граничным и начальным условиям (19).

**В-20.9**

Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{xx} = u_{tt}$ ,  $0 < x < l$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = t$ ,  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ ;
- 2)  $u_{xx} = u_{tt}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u|_{x=0} = t + 1$ ,  $u|_{x=1} = t^3 + 2$ ,  $u|_{t=0} = x + 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ .

**В-20.10**

Решить задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны, закрепленной на одном конце ( $x = 0$ ) и подверженной на другом конце ( $x = l$ ) действию возмущающей силы, которая вызывает смещение, равное  $A \sin \omega t$ ,  $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). В момент времени  $t = 0$  смещения и скорости равны нулю.

**В-20.11**

Пусть стержень длиной  $l$ , конец которого  $x = 0$  жестко закреплен, находится в состоянии покоя. В момент  $t = 0$ х его свободному концу  $x = l$  приложена сила  $Q = \text{const}$ , действующая вдоль стержня. Найти смещение  $u(x, t)$  стержня.

**В-20.12**

Решить задачу о продольных колебаниях однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила  $Q = A \sin \omega t$ , направление которой совпадает с осью стержня ( $\omega \neq \frac{a\pi(2k+1)}{2l}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

**В-20.13**

Решить задачу о свободных колебаниях однородной струны длиной  $l$ , закрепленной на концах и колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Начальные условия нулевые.

**В-20.14**

Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} - 4u$  ( $0 < x < 1$ );  $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ ;  $u|_{t=0} = x^2 - x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$
- 2)  $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$  ( $0 < x < \pi$ );  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ;  $u|_{t=0} = \pi x - x^2$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$
- 3)  $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$  ( $0 < x < \pi$ );  $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=\pi} = 0$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x$
- 4)  $u_{tt} + u_t = u_{xx}$  ( $0 < x < 1$ );  $u|_{x=0} = t$ ,  $u|_{x=1} = 0$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 1 - x$
- 5)  $u_{tt} = u_{xx} + u$  ( $0 < x < 2$ );  $u|_{x=0} = 2t$ ,  $u|_{x=2} = 0$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} + u$  ( $0 < x < l$ );  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=l} = t$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = \frac{x}{l}$

**В-20.15**

Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} = u_{xx} + x(0 < x < \pi)$ ;  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ;  $u|_{t=0} = \sin 2x$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$
- 2)  $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1(0 < x < 1)$ ;  $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$

**В-20.16**

Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x(0 < x < \pi/2)$ ;  $u_x|_{x=0} = 2t$ ,  $u|_{x=\pi/2} = \pi t$ ;  $u|_{t=0} = \cos x$ ,  $u_t|_{t=0} = 2x$ ;
- 2)  $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x)(0 < x < \pi/2)$ ;  $u|_{x=0} = 3$ ,  $u_x|_{x=\pi/2} = t^2 + t$ ;  $u|_{t=0} = 3$ ,  $u_t|_{t=0} = x + \sin x$
- 3)  $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4 + t) + \cos \frac{3x}{2}(0 < x < \pi)$ ;  $u_x|_{x=0} = t + 1$ ,  $u|_{x=\pi} = \pi(t + 1)$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = x$
- 4)  $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x} \sin 3x(0 < x < \pi)$ ;  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=\pi} = \pi t$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ;
- 5)  $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1 - 4t) + \cos 3x(0 < x < \pi/2)$ ;  $u_x|_{x=0} = t$ ,  $u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi t}{2}$ ;  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ ;
- 6)  $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x(0 < x < \pi)$ ;  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$
- 7)  $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x \cos x(0 < x < \pi/2)$ ;  $u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0$ ;  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$
- 8)  $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t(0 < x < \pi)$ ;  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=\pi} = \pi t$ ;  $u|_{t=0} = e^{-x} \sin x$ ,  $u_t|_{t=0} = x$ .

В задачах 20.17-20.20 требуется применять метод разделения переменных для изучения колебаний мембраны. Задача о колебаниях однородной мембраны сводится к решению уравнения  $u_{tt} = a^2 \Delta u + f$  при некоторых начальных и граничных условиях (см. с. 14-16).

В частности, задача о свободных колебаниях прямоугольной мембраны ( $0 < x < p, 0 < y < q$ ), закрепленной по контуру, сводится к решению волнового уравнения при граничных условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x, y).$$

**В-20.17**

Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны ( $0 < x < p, 0 < y < p$ ), закрепленной вдоль контура, если  $u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{p}$ ,  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ .

**В-20.18**

Решить следующую смешанную задачу:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi) \\ u|_{x=0} &= u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} &= 3 \sin x \sin 2y, \quad u_t|_{t=0} = 5 \sin 3x \sin 4y. \end{aligned}$$

**В-20.19**

Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны ( $0 < x < p, 0 < y < q$ ), закрепленной вдоль контура, если  $u|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q)$ ,  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ .

**В-20.20**

. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленной по краю, в следующих случаях:

- 1) начальное отклонение определяется равенством  $u|_{t=0} = AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{r}\right)$ ,  $\mu_k$  - положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ ; начальная скорость равна нулю;
- 2) начальное отклонение и начальная скорость зависят только от  $r$ , т. е.  $u|_{t=0} = f(r)$ ,  $u_t|_{t=0} = F(r)$ ;
- 3) начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальная скорость равна нулю.

**В-20.21**

Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + f(t)J_0(\mu_k x)$$

$\mu_k$  - положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0, 0 < x < 1$ , если:  $u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad |u|_{x=0}| < \infty,$

- 1)  $f(t) = t^2 + 1$
- 2)  $f(t) = \sin t + \cos t.$

### В-20.22

Найти решение смешанной задачи  $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1$   
 $|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = g(t), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$   
 если:

- 1)  $g(t) = \sin^2 t, \quad u_0(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} \right], \quad u_1(x) = 0;$
- 2)  $g(t) = \cos 2t, \quad u_0(x) = \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}, \quad u_1(x) = 0;$
- 3)  $g(t) = t - 1, \quad u_0(x) = J_0(\mu_1 x) - 1, \mu_1$  - положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0, u_1(x) = 1.$

### В-20.23

Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} + f(t) = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = g(t), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

- 1)  $f(t) = \cos t, \quad u_0(x) = 1 - \frac{J_0(x)}{J_0(1)}, \quad u_1(x) = 0;$
- 2)  $f(t) = \sin 3t, \quad g(t) = u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{J_0(3x)}{J_0(3)} \right];$
- 3)  $f(t) = -2 \cos 2t, \quad g(t) = u_1(x) = 0, \quad u_0(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1 \right] + J_0(\mu_1 x), \mu_1$  - положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0.$

### В-20.24

Решить смешанную задачу

$$u_{xx} + \frac{1}{x}u_x = u_{tt} + u, \quad 0 < x < 1$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = \cos 2t + \sin 3t$$

$$u|_{t=0} = \frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}, \quad u_t|_{t=0} = \frac{3J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}$$

### В-20.25

Решить задачу о колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленной по краю, если эти колебания вызваны равномерно распределенным давлением  $p = p_0 \sin \omega t$ , приложенным одной стороне мембраны. Предполагается, что среда не оказывает сопротивления и что  $\omega \neq \frac{\alpha \mu_n}{r}, \mu_n (n = 1, 2, \dots)$  - положительные корни уравнения  $J_0(\mu) = 0$  (нет резонанса).

### В-20.26

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2}, \quad 0 < x < 1$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

если:

- 1)  $u_0(x) = J_1(\mu_k x) + J_1(\mu_m x), \quad u_1(x) = 0$
- 2)  $u_0(x) = J_1(\mu_k x), \quad u_1(x) = J_1(\mu_m x)$  Здесь  $\mu_k$  и  $\mu_m$  - два различных положительных корня уравнения  $J_1(\mu) = 0.$

**В-20.27**

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + e^t J_1(\mu_k x)$$

 $\mu_k$  - положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0, 0 < x < 1$ ,

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

**В-20.28**

Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2}, \quad 0 < x < 1 \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = \sin 2t \cos t, \quad u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} &= \frac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \frac{3}{2} \frac{J_1(3x)}{J_1(3)} \end{aligned}$$

**В-20.29**

Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \end{aligned}$$

если:

- 1)  $u_0(x) = u_1(x) = J_2(\mu_k x)$ ;
- 2)  $u_0(x) = \frac{1}{2}J_2(\mu_k x)$ ,  $u_1(x) = \frac{3}{2}J_2(\mu_k x)$ . Здесь  $\mu_k$  - положительный корень уравнения  $J_2(\mu) = 0$ .

**В-20.30**

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4u}{x^2} + f(t)J_2(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1$$

 $\mu_1$  - положительный корень уравнения  $J_2(\mu) = 0$ ,

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

если:

- 1)  $f(t) = t$
- 2)  $f(t) = \cos t$ .

**В-20.31**

Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ |u|_{x=0} &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_3(\mu_1 x), \end{aligned}$$

 $\mu_1$  - положительный корень уравнения

$$J_3(\mu) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

если:

- 1)  $u_0(x) = 0$ ;
- 2)  $u_0(x) = J_3(\mu_1 x)$ .



**В-20.32**

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{x^2} + f(t)J_3(\mu_k x), \quad 0 < x < 1$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$$

 $\mu_k$  - положительный корень уравнения  $J_3(\mu) = 0$ , если:

- 1)  $f(t) = e^{-t}$
- 2)  $f(t) = t - t^2$ .

**В-20.33**

Решить смешанную задачу

$$(xu_x)_x = u_{tt}, \quad 0 < x < \frac{1}{4},$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1/4} = 0, \quad u|_{t=0} = J_0(2\mu_1\sqrt{x}), \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

 $\mu_1$  - положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .**В-20.34**

Тяжелая однородная нить длиной  $l$ , подвешенная за один из своих концов ( $x = l$ ), выводится из положения равновесия и отпускается без начальной скорости. Изучить колебания нити, которые она совершает под действием силы тяжести; предполагается, что среда не оказывает сопротивления.

**В-20.35**

Тяжелая однородная нить длиной  $l$ , закрепленная верхним концом ( $x = l$ ) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти отклонение  $u(x, t)$  нити от положения равновесия.

**В-20.36**

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = (xu_x)_x, \quad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u_x|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_k\sqrt{x}),$$

где  $\mu_k$  - положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ .

**В-20.37**

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x + f(t)J_0(\mu_1\sqrt{x}), \quad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

 $\mu_1$  - положительный корень уравнения  $J_1(\mu) = 0$ , если:

- 1)  $f(t) = t$
- 2)  $f(t) = \sin t$ .

**В-20.38**

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{x}, \quad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_2(\mu_k\sqrt{x})$$

 $\mu_k$  - положительный корень уравнения  $J_2(\mu) = 0$ .

**В-20.39**

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{9u}{4x}, \quad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0} < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_3(\mu_1\sqrt{x}),$$

$\mu_1$  - положительный корень уравнения  $J_3(\mu) = 0$ .

**В-20.40**

Дан тонкий однородный стержень  $0 < x < l$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры  $u(x, t)$  в стержне, если:

- 1) концы стержня  $x = 0$  и  $x = l$  поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ; рассмотреть случаи: а)  $u_0(x) = A = \text{const}$ , б)  $u_0(x) = Ax(l - x)$ ,  $A = \text{const}$ ;
- 2) конец  $x = 0$  поддерживается при нулевой температуре, а на конце  $x = l$  происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, начальная температура стержня  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ;
- 3) на обоих концах стержня ( $x = 0$  и  $x = l$ ) происходит теплообмен с окружающей средой, а начальная температура стержня  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ;
- 4) концы стержня ( $x = 0$  и  $x = l$ ) теплоизолированы, а начальная температура  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ ; 5) концы стержня теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & \text{если } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

изучить поведение  $u(x, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ; 6) концы стержня теплоизолированы, а

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}x, & \text{если } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l}(l - x), & \text{если } \frac{l}{2} \leq x < l \end{cases}$$

$u_0 = \text{const}$ ; найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ .

**В-20.41**

Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u|_{x=1} = 0$ ,  $u|_{t=0} = x^2 - 1$ ;
- 2)  $u_{xx} = u_t + u$ ,  $0 < x < l$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = 1$ ;
- 3)  $u_t = u_{xx} - 4u$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ ,  $u|_{t=0} = x^2 - \pi x$ .

**В-20.42**

Дан тонкий однородный стержень  $0 < x < l$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры  $u(x, t)$  в стержне, если:

- 1) концы стержня поддерживаются при постоянных температурах  $u|_{x=0} = u_1$ ,  $u|_{x=l} = u_2$ , а начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ ; найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ ;
- 2) концы стержня имеют постоянную температуру  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_1$ , а начальная температура задается формулой

$$u|_{t=0} = u_0(x) = Ax(l - x),$$

$A = \text{const}$ ; найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ ; § 20. Метод разделения переменных 257

- 3) левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре  $u|_{x=l} = u_2$ , начальная температура равна  $u|_{t=0} = \frac{A}{l}x$ ,  $A = \text{const}$ ;

4) левый конец стержня поддерживается при заданной постоянной температуре  $u|_{x=0} = u_1$ , а на правый конец подается извне заданный постоянный тепловой поток; начальная температура стержня  $u|_{t=0} = u_0(x)$ .

**В-20.43**

Дан тонкий однородный стержень длины  $l$ , с боковой поверхности которого происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, имеющую нулевую температуру; левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре  $u|_{x=0} = u_1$ . Определить температуру  $u(x, t)$  стержня, если:

- 1) правый конец стержня  $x = l$  поддерживается при температуре  $u|_{x=l} = u_2 = \text{const}$ , а начальная температура равна  $u|_{t=0} = u_0(x)$ ;

2) на правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю; начальная температура равна нулю. В задаче о распространении тепла в стержне, концы которого

поддерживаются при заданных температурах, зависящих, вообще говоря, от  $t$ , граничные условия имеют вид

$$u|_{x=0} = \alpha_1(t), \quad u|_{x=l} = \alpha_2(t).$$

В этом случае решение задачи (1), (3), (8a) можно искать в виде  $u = v + w$ , где функция  $w$  определяется формулой  $w = \alpha_1(t) + \frac{x}{l} \times (\alpha_2(t) - \alpha_1(t))$

### В-20.44

Найти распределение температуры в стержне  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце  $x = l$  поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце температура равна  $u|_{x=0} = At$ ,  $A = \text{const}$ . Начальная температура стержня равна нулю.

### В-20.45

Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $u_x|_{x=0} = 1$ ,  $u|_{x=l} = 0$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ;
- 2)  $u_t = u_{xx} + u + 2 \sin 2x \sin x$ ,  $0 < x < \pi/2$ ,  $u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = u|_{t=0} = 0$ ;
- 3)  $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u|_{x=0} = u|_{x=1} = t$ ,  $u|_{t=0} = e^x \sin \pi x$ ;
- 4)  $u_t = u_{xx} + u - x + 2 \sin 2x \cos x$ ,  $0 < x < \pi/2$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=\pi/2} = 1$ ,  $u|_{t=0} = x$ ;
- 5)  $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + 2 \cos^2 x$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=\pi} = 2\pi t$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ;

$$\begin{aligned} 6) \quad u_t - u_{xx} + 2u_x - u &= e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 1 + t, \quad u|_{x=\pi} = \\ &= 1 + t, \quad u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x. \end{aligned}$$

### В-20.46

Решить следующие смешанные задачи:

- 1)  $u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2 \cos t$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u_x|_{x=0} = t^2$ ,  $u_x|_{x=\pi} = t^2$ ,  $u|_{t=0} = \cos 2x$ ;
- 2)  $u_t - u_{xx} - 9u = 4 \sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u_x|_{x=0} = 0$ ,  $u_x|_{x=\pi} = 2\pi$ ,  $u|_{t=0} = x^2 + 2$ ;
- 3)  $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2 \cos x \cos 2x$ ,  $0 < x < \pi/2$ ,  $u_x|_{x=0} = 1$ ,  $u|_{x=\pi/2} = t^2 + \pi/2$ ,  $u|_{t=0} = x$ ;
- 4)  $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u_x|_{x=0} = 1$ ,  $u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1$ ,  $u|_{t=0} = x$ ;
- 5)  $u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x} \cos^2 \pi x$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u|_{x=0} = t$ ,  $u|_{x=1} = 2t$ ,  $u|_{t=0} = 0$

### Указания для задач ниже

Задача о распространении тепла в однородном шаре радиуса  $R$  с центром в начале координат в случае, когда температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки от центра шара, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(r).$$

Если на поверхности шара происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, то граничное условие имеет вид

$$(u_r + hu)|_{r=R} = 0.$$

Полагая  $v = ru$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \\ v|_{r=0} &= 0, \quad \left[ v_r + \left( h - \frac{1}{r} \right) v \right] \Big|_{r=R} = 0, \\ v|_{t=0} &= ru_0(r). \end{aligned}$$

Таким образом, задача (14)-(16) приводится к задаче (17)-(19) о распространении тепла в стержне, один конец которого ( $r = 0$ ) поддерживается при нулевой температуре, а на другом конце ( $r = R$ ) происходит теплообмен с окружающей средой (см. задачу 20.43).

**В-20.47**

Дан однородный шар радиуса  $R$  с центром в начале координат. Определить температуру внутри шара, если:

1) внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, т. е.  $u|_{t=0} = u_0(r)$

2) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру, а  $u|_{t=0} = u_0(r)$ ; 3) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру  $u_1 = \text{const}$ , а  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ ;

4) внутрь шара, начиная с момента  $t = 0$ , через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности  $q = \text{const}$ , а начальная температура  $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ .

**В-20.48**

Дана тонкая квадратная пластинка ( $0 < x < l, 0 < y < l$ ), для которой известно начальное распределение температуры  $u|_{t=0} = u_0(x, y)$ . Боковые стороны  $x = 0, x = l$  и стороны оснований  $y = 0, y = l$  во все время наблюдения удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластинки в момент времени  $t > 0$ .

**14.6.2 Задачи на Другие методы****В-21.1**

Доказать, что задача  $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g(t)$  имеет единственное решение  $u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ g(t - \frac{x}{a}), & x < at \end{cases}$  если  $g \in C^2(t \geq 0), g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ .

**В-21.2**

Доказать, что задача  $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_{x=0} = 0$  имеет единственное решение  $u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, & x \geq at, \\ \frac{1}{2} [u_0(x+at) - u_0(at-x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} u_1(\xi) d\xi, & x < at, \end{cases}$  если  $u_0 \in C^2(x \geq 0), u_1 \in C^1(x \geq 0), u_0(0) = u_0'(0) = u_1(0) = 0$ . Показать, что это решение можно получить из формулы Даламбера (с. 137), если функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  продолжить нечетным образом для  $x < 0$ .

**В-21.3**

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = g(t)$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq at \\ -a \int_0^{t-x/a} g(\tau) d\tau, & x < at \end{cases}$$

если  $g \in C^1(t \geq 0), g(0) = g'(0) = 0$ .

**В-21.4**

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u_x|_{x=0} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, & x \geq at \\ \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(at-x)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \int_0^{at-x} u_1(\xi) d\xi \right], & x < at \end{cases}$$

если  $u_0 \in C^2(x \geq 0), u_1 \in C^1(x \geq 0), u_0'(0) = u_1'(0) = 0$ . Показать, что это решение можно получить из формулы Даламбера, если функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  продолжить четным образом для  $x < 0$ .

**В-21.5**

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g(t), \quad u|_{x=l} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \tilde{g} \left( t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a} \right) - \tilde{g} \left( t + \frac{x}{a} - \frac{2(n+1)l}{a} \right) \right]$$

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

если  $g \in C^2(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ .**В-21.6**

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}(x + at) + \tilde{u}_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi$$

где функции  $\tilde{u}_0(x)$ ,  $\tilde{u}_1(x)$  - нечетные,  $2l$ -периодические и совпадающие с функциями  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  при  $0 \leq x \leq l$ , если  $u_0 \in C^2[0, l]$ ,  $u_1 \in C^1[0, l]$ ,  $u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = \overline{u_0''}(0) = u_0''(l) = 0$ .

В задачах 21.7-21.23 требуется доказать, что существует единственное решение поставленной задачи; найти это решение.

**В-21.7**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x - \beta u)|_{x=0} = g(t),$$

$$g \in C^1(t \geq 0), \quad g(0) = g'(0) = 0.$$

**В-21.8**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x - \beta u)|_{x=0} = 0$$

$$u_0 \in C^2(x \geq 0), \quad u_0'(0) - \beta u_0(0) = 0.$$

**В-21.9**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = g(t), \quad u_x|_{x=l} = 0,$$

$g \in C^1(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ .

**В-21.10**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0,$$

$$u_0 \in C^2([0, l]), \quad u_1 \in C^1([0, l])$$

**B-21.18**

$$u_{tt} = 9u_{xx} + e^t, t > 0, x > 0;$$

$$u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 3 \cos \frac{x}{3}, \quad u_x|_{x=0} = 2 - \cos t.$$

**B-21.19**

$$u_{tt} = 3u_{xx} + 2(1 - 6t^2)e^{-2x}, t > 0, x > 0;$$

$$u|_{t=0} = 1, \quad u|_{t=0} = x, \quad (u_x - 2u)|_{x=0} = -2 + t - 4t^2.$$

**B-21.20**

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, x > 0; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x + u)|_{x=0} = 1 - \cos t.$$

**B-21.21**

$$u_{tt} = u_{xx} + 4, t > 0, x > 0; \quad u|_{t=0} = 1 - x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x + u)|_{x=0} = \frac{3}{2}t^2.$$

**B-21.22**

$$u_{tt} = u_{xx}, t > 0, x > 0;$$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_t - u)|_{x=0} = 2t - t^2.$$

**B-21.23**

$$1) \quad u_{tt} = u_{xx} - 6, t > 0, x > 0;$$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_t + 2u_x)|_{x=0} = -4t$$

$$2) \quad u_{tt} = 4u_{xx} + 2, t > 0, x > 0;$$

$$u|_{t=0} = 2 - x, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad (u_t + 3u_x)|_{x=0} = 3t - e^t.$$

**B-21.24**

Найти наибольшую область, в которой поставленная задача имеет единственное решение, и найти это решение:

$$1) \quad u_{tt} = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0 \quad 0 \leq x \leq 2, \quad u|_{x=0} = t^3, \quad 0 \leq t \leq 2;$$

$$2) \quad u_{tt} = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad u|_{t=3x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

**B-21.25**

Доказать, что задача имеет единственное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 + at \\ \frac{1}{|x|} g\left(t + \frac{1-|x|}{a}\right), & 1 < |x| < 1 + at \end{cases}$$

если  $g \in C^2(t \geq 0)$ ,  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ . Показать, что если  $g(t)$  - финитная функция, то  $u(x, t) = 0$  для любого фиксированного  $x$ ,  $|x| \geq 1$ , при достаточно больших  $t$ . В случае, когда  $g(t) \neq 0$  при  $0 < t < T$ ,  $g(t) = 0$  при  $t \geq T$ , найти момент времени  $t_x$ , в который через точку  $x$ ,  $|x| > 1$  пройдет задний фронт волны.

**B-21.26**

Найти решение задачи

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad |x| > 1, \quad x \in R^3$$

$$u|_{t=0} = \alpha(|x|), \quad u_t|_{t=0} = \beta(|x|), \quad u|_{|x|=1} = 0$$

$\alpha(r) \in C^2(r \geq 1)$ ,  $\beta(r) \in C^1(r \geq 1)$ ,  $\alpha(1) = 0$ ,  $\alpha''(1) + 2\alpha'(1) = 0$ ,  $\beta(1) = 0$ . Доказать, что если функции  $\alpha(r)$  и  $\beta(r)$  финитные, то  $u(x, t) = 0$  для любого фиксированного  $x$ ,  $|x| \geq 1$ , при достаточно больших  $t$ .

**В-21.29**

Решить задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \quad |x| > 1, \quad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad \left(ku + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{|x|=1} = g(t), \quad k = \text{const.}$$

Решить задачи 21.30-36

**В-21.30**

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad t > 0, \quad x > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = 0.$$

**В-21.31**

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g(t).$$

**В-21.32**

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_x|_{x=0} = 0.$$

**В-21.33**

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = g(t).$$

276 Гя. VI. Снеианная задаяя

**В-21.34**

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (u - u_x)|_{x=0} = g(t).$$

**В-21.35**

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (u_x - hu)|_{x=0} = 0, \quad h \geq 0.$$

**В-21.36**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = 0.$$

**14.7 Постановки краевых задач математической физики****14.7.1 Вывод уравнений и постановки краевых задач**

(да, это мб важно, тем не менее, это очень прикладной уровень, так что вдали, начинать не с него следует.)

**В-1.1**

Найти статический прогиб струны, закрепленной на концах, под действием непрерывно распределенной нагрузки (на единицу длины).

**В-1.2**

Вывести уравнение малых поперечных колебаний струны с насаженной на нее в некоторой внутренней точке  $x_0$  бусиной массы  $m$ .

**В-1.3**

Вывести уравнение колебания струны, колеблющейся в упругой среде.

**В-1.4**

Крутильными колебаниями стержня называют такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Вывести уравнение малых крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня. Рассмотреть случаи: а) концы стержня свободны; б) концы стержня жестко закреплены; в) концы стержня упруго закреплены.

**В-1.5**

Точкам упругого однородного прямоугольного стержня, жестко закрепленного на левом конце и свободного на правом, в начальный момент времени  $t = 0$  сообщены малые поперечные отклонения и скорости, параллельные продольной вертикальной плоскости симметрии стержня.

Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений точек стержня при  $t > 0$ , предполагая, что стержень совершает малые поперечные колебания.

**В-1.6**

Труба, заполненная идеальным газом и открытая с одного конца, движется поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью  $v$ . В момент времени  $t = 0$  труба мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу об определении смещения газа внутри трубы на расстоянии  $x$  от закрытого конца.

**В-1.7**

Заклученный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра. Поставить краевую задачу для определения смещения  $u(x, t)$  частиц газа в случаях, когда концы трубки: а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками; б) открыты; в) закрыты поршеньками с пренебрежимо малой массой, насаженными на пружинки с коэффициентами жесткости  $\nu$  и скользящими без трения внутри трубки.

**В-1.8**

Начиная с момента времени  $t = 0$  один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила  $\Phi(t)$ , направленная по оси стержня. В момент времени  $t = 0$  поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в неотклоненном положении. Поставить краевую задачу для определения малых продольных отклонений точек стержня при  $t > 0$ .

**В-1.9**

Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах, в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

**В-1.10**

Составить уравнение продольных колебаний стержня, у которого площадь поперечного сечения есть заданная функция от  $x$ , считая материал стержня однородным.

**В-1.11**

. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях упругого стержня, имеющего форму усеченного конуса, если концы стержня закреплены неподвижно и стержень выведен из состояния покоя тем, что его точкам в момент времени  $t = 0$  сообщены начальные скорости и продольные отклонения. Длина стержня равна  $l$ , радиусы оснований  $R, r (R > r)$ , материал стержня однороден. Деформацией поперечных сечений пренебречь.

**В-1.12**

Находящаяся в горизонтальной плоскости невесомая струна с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вращается вокруг вертикальной оси, причем один конец струны прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени  $t = 0$  точкам этой струны сообщаются малые отклонения и скорости по нормальям к этой плоскости. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от плоскости равновесного движения.



**В-1.13**

Пусть в точке  $x = 0$  бесконечной однородной струны находится шарик массы  $m_0$ . Начальные скорости и начальные отклонения точек струны равны нулю. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от их положения равновесия в следующих случаях: а) начиная с момента времени  $t = 0$  на шарик действует сила  $F = F_0 \sin \Omega t$  б) в начальный момент времени  $t = 0$  шарик получает импульс  $p_0$  в поперечном направлении; в) шарик в случае б) закреплен упруго с эффективной жесткостью  $k^2$ .

**В-1.14**

Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Сопротивлением среды пренебречь.

**В-1.15**

Во внутренних точках  $x = x_i, i = 1, \dots, n$ , на струне сосредоточены массы  $m_i, i = 1, \dots, n$ . Поставить краевую задачу для определения малых поперечных колебаний струны при произвольных начальных данных. Концы струны закреплены.

**В-1.16**

Два полуограниченныг однородных упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены жестко торцами и составляют один неограниченный стержень. Пусть  $\rho_1, E_1$  - плотность и модуль упругости одного из них, а  $\rho_2, E_2$  - другого. Поставить краевую задачу для определения отклонений поперечных сечений неограниченного стержня от их положения равновесия, если в начальный момент времени поперечным сечениям сообщены некоторые продольные смещения и скорости.

**В-1.17**

Тяжелая однородная нить длиной  $l$ , закрепленная верхним концом ( $x = l$ ) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u.$$

**В-1.18**

Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой однородной струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец жестко закреплен, а нижний свободен.

**В-1.19**

Поставить задачу об определении магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника, по поверхности которого течет ток силой  $J$ .

**В-1.20**

Кабель, имеющий потенциал  $v_0$ , при  $t = 0$  заземляется на одном конце через сосредоточенную емкость (или индуктивность); другой конец изолирован. Поставить задачу об определении электрического тока в кабеле.

**В-1.21**

Конец  $x = 0$  круглого однородного вала закреплен, а к концу  $x = l$  жестко прикреплен диск с моментом инерции  $J_0$ . В начальный момент времени диск закручивается на угол  $\alpha$  и отпускается без начальной скорости. Поставить краевую задачу для определения углов поворота поперечных сечений вала при  $t > 0$ .

**В-1.22**

Тяжелый стержень подвешен вертикально и зашпемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени  $t = 0$  24 Гя. I. Постановки краевых задач математической физики стержень освобождается. Поставить краевую задачу о вынужденных колебаниях стержня.

**В-1.23**

Пусть все условия предыдущей задачи остаются без изменения, за исключением условия на нижнем конце: к нему прикреплен груз  $Q$ , причем за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент времени из-под груза убирается подставка и груз начинает растягивать стержень).

**В-1.24**

Поставить задачу о движении полуограниченной струны ( $0 \leq x < \infty$ ) при  $t > 0$ , если при  $t < 0$  по ней бежит волна  $u(x, t) = f(x + at)$ , а конец струны  $x = 0$  закреплен жестко.

**В-1.25**

Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в цилиндрической трубке радиуса  $R$  настолько длинной, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Начальные отклонения и начальные скорости есть заданные функции от  $r$ .

**В-1.26**

Поставить задачу об обтекании шара стационарным потоком идеальной жидкости (потенциальное течение). Привести электростатическую аналогию.

**В-1.27**

Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в сферическом сосуде радиуса  $R$ , если начальные скорости и начальные отклонения заданы как функции от  $r$ .

**В-1.28**

Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях мембраны, к которой приложено нормальное давление  $P$  на единицу площади, если в невозмущенном состоянии мембрана является плоской, а окружающая среда не оказывает сопротивления колебаниям мембраны. Рассмотреть случаи: а) мембрана жестко закреплена на границе  $L$ ; б) мембрана свободна на  $L$ ; в) на части  $L_1$  границы  $L$  мембрана закреплена жестко, а на остальной части  $L_2$  границы  $L$  она свободна.

**В-1.29**

Поставить краевую задачу о колебании круглой однородной мембраны, закрепленной по краю, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. В момент времени  $t = 0$  К поверхности мембраны приложена внешняя сила плотности  $f(r, \varphi, t)$ , действующая перпендикулярно плоскости невозмущенной мембраны. Начальные скорости и отклонения точек мембраны отсутствуют.

**В-1.30**

Закрепленная по краям однородная прямоугольная мембрана в начальный момент времени  $t = 0$  получает удар в окрестности центральной точки, так что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_\varepsilon} v_0(x) dx = A, \quad x = (x_1, x_2),$$

$A$  - некоторая постоянная,  $v_0(x)$  - начальная скорость. Поставить краевую задачу о свободных колебаниях.

**В-1.31**

Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления  $R$ , самоиндукции  $L$  и емкости  $C$ . В момент времени  $t = 0$  в цепь включается э. д. с.  $E_0$ . Показать, что сила тока  $i(t)$  в цепи удовлетворяет уравнению

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E_0, \quad t > 0.$$

**В-1.32**

Рассмотрим электромагнитное поле в некоторой среде. Исходя из уравнений Максвелла вывести уравнения, которым удовлетворяют компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей для случаев: а) плотность зарядов  $\rho = 0, \varepsilon = \text{const}, \lambda = \text{const}, \mu = \text{const}, \mathbf{J} = \lambda \mathbf{E}$  (закон Ома); б) среда - вакуум и токи отсутствуют.

**В-1.33**

Поставить задачу о проникновении магнитного поля в правое полупространство, заполненное средой с проводимостью  $\sigma$ , если начиная с момента времени  $t = 0$  на поверхности  $x = 0$  поддерживается напряженность магнитного поля  $H = H_0 \sin \Omega t$ , направленная параллельно поверхности.

**В-1.34**

Поставить краевую задачу об определении температуры стержня  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью. Рассмотреть случаи: а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре; б) на концах стержня поддерживается заданный тепловой поток; в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

**В-1.35**

Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной плотности в каждый момент времени  $t$  являются плоскости, перпендикулярные к оси  $x$ . Написать граничные условия, предполагая, что диффузия происходит в плоском слое  $0 \leq x \leq l$ . Рассмотреть случаи: а) на граничных плоскостях концентрация диффундирующего вещества поддерживается равной нулю; б) граничные плоскости непроницаемы; в) граничные плоскости полупроницаемы, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

**В-1.36**

Вывести уравнение диффузии распадающегося газа (количество распавшихся молекул в единицу времени в данной точке пропорционально плотности с коэффициентом пропорциональности  $\alpha > 0$ )

**В-1.37**

Дан тонкий однородный стержень длиной  $l$ , начальная температура которого  $f(x)$ . Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на конце  $x = 0$  поддерживается постоянная температура  $u_0$ , а на боковой поверхности и на конце  $x = l$  происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры.

**В-1.38**

Поставить задачу об определении температуры в бесконечном тонком теплоизолированном стержне, по которому с момента  $t = 0$  в положительном направлении со скоростью  $v_0$  начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий  $q$  единиц тепла в единицу времени.

**В-1.39**

Поставить краевую задачу об остывании тонкого однородного кольца радиуса  $R$ , на поверхности которого происходит конвективный теплообмен окружающей средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

**В-1.40**

Вывести уравнение диффузии взвешенных частиц с учетом оседания, предполагая, что скорость частиц, вызываемая силой тяжести, постоянна, а плотность частиц зависит только от высоты  $z$  и от времени  $t$ . Написать граничное условие, соответствующее непроницаемой перегородке.

**В-1.41**

Поставить краевую задачу об остывании равномерно нагретого стержня формы усеченного конуса (искривлением изотермических поверхностей пренебрегаем), если концы стержня теплоизолированы, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

**В-1.42**

Растворенное вещество с начальной плотностью  $c_0 = \text{const}$  диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями  $x = 0$  и  $x = h$ , в растворитель, ограниченный плоскостями  $x = h, x = l$ . Поставить краевую задачу для процесса выравнивания плотности, предполагая, что границы  $x = 0, x = l$  непроницаемы для вещества.

**В-1.43**

Внутри однородного шара начиная с момента времени  $t = 0$  действуют источники тепла с равномерно распределенной постоянной плотностью  $Q$ . Поставить краевую задачу о распределении температуры при  $t > 0$  внутри шара, если начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Рассмотреть случаи: а) на поверхности шара поддерживается нулевая температура; б) на поверхности шара происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой нулевой температуры.

**В-1.44**

Дан однородный шар радиуса  $R$  с начальной температурой, равной нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при  $t > 0$  внутри шара, если: а) шар нагревается равномерно по всей поверхности постоянным тепловым потоком  $q$ ; б) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой зависит только от времени.

**В-1.45**

Начальная температура неограниченной пластины толщины  $2h$  равна нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при  $t > 0$  по толщине пластины, если:

а) пластина нагревается с обеих сторон равными постоянными тепловыми потоками  $q$ ; б) в пластине начиная с момента времени  $t = 0$  действует источник тепла с постоянной плотностью  $Q$ , а ее основания поддерживаются при температуре, равной нулю.

**В-1.46**

Неограниченный цилиндр радиуса  $R$  имеет начальную температуру  $f(r)$ . Поставить краевую задачу о радиальном распространении тепла, если: а) боковая поверхность поддерживается при постоянной температуре; б) с боковой поверхности происходит лучеиспускание в окружающую среду нулевой температуры.

**В-1.47**

Дана тонкая прямоугольная пластина со сторонами  $l, m$ , для которой известно начальное распределение температуры. Поставить краевую задачу о распространении тепла в пластине, если боковые стороны поддерживаются при температуре

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi_1(x), & u|_{y=m} &= \varphi_2(x), \\ u|_{x=0} &= \psi_1(y), & u|_{x=l} &= \psi_2(y). \end{aligned}$$

**В-1.48**

Начальное распределение температуры в однородном шаре задано функцией  $f(r, \theta, \varphi)$ . Поставить краевую задачу о распределении тепла в шаре, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре  $u_0$ .

**В-1.49**

Два полуограниченных стержня, сделанных из разных материалов, в начальный момент времени приведены в соприкосновение своими концами. Поставить краевую задачу о распределении тепла в бесконечном стержне, если известны начальные температуры каждого из двух полуограниченных стержней.

**В-1.50**

Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры в тонкой прямоугольной пластине  $ACB$  со сторонами  $OA = a, OB = b$ , если: а) на боковых сторонах пластины поддерживаются заданные температуры; б) на сторонах  $OA$  и  $OB$  заданы тепловые потоки, а стороны  $BC$  и  $AC$  теплоизолированы.

**В-1.51**

На плоскую мембрану, ограниченную кривой  $L$ , действует стационарная поперечная нагрузка с плотностью  $f(x, y)$ . Поставить краевую задачу об отклонении точек мембраны от плоскости, если: а) мембрана закреплена на краю; б) край мембраны свободен; в) край мембраны закреплён упруго.

**В-1.52**

Дан цилиндр с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ . Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутри цилиндра, если температура верхнего и нижнего оснований есть заданная функция от  $r$ , а боковая поверхность: а) теплоизолирована; б) имеет температуру, зависящую только от  $z$ ; в) свободно охлаждается в среде нужной температуры.

**В-1.53**

Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутренних точек полусферы, если сферическая поверхность поддерживается при заданной температуре  $f(\varphi, \theta)$ , а основание полусферы - при нулевой температуре.

**В-1.54**

Шар радиуса  $R$  нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности  $q$ , падающим на его поверхность, и отдает тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Поставить краевую задачу о распределении температуры внутренних точек шара.

**В-1.55**

Пусть  $n(x, s, t)$  - плотность частиц в точке  $x$ , летящих с постоянной скоростью  $v$  в направлении  $8 = (s_1, s_2, s_3)$  в момент времени  $t$ ; обозначим через  $\alpha(x)$  коэффициент поглощения и  $h(x)$  коэффициент умножения в точке  $x$ . Предполагая рассеяние в каждой точке  $x$  изотропным, показать, что  $n(x, s, t)$  удовлетворяет интегродифференциальному уравнению переноса

$$\frac{1}{v} \frac{\partial n}{\partial t} + (8, \text{grad } n) + \alpha(x)n = \frac{\beta(x)}{4\pi} \int_{|s'|=1} n(x, s', t) ds' + F,$$

$F(x, s, t)$  - плотность источников,  $\beta(x) = \alpha(x)h(x)$ .

**В-1.56**

Поставить краевую задачу для уравнения задачи 1.55, считая, что задано начальное распределение плотности и задан падающий поток частиц на границу  $S$  области  $G$ .

**В-1.57**

Показать, что для решения  $n(x, s)$  стационарной краевой задачи

$$(s, \text{grad } \mathbf{n}) + \alpha(x)\mathbf{n} = \frac{\beta(x)}{4\pi} \int_{|s'|=1} n(x, s') ds' + F(x),$$

$$\mathbf{n}|_S = 0, \quad \text{если } (s, \mathbf{n}) < 0,$$

$\mathbf{n}$  - внешняя нормаль к  $S$ , средняя плотность

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|s|=1} n(x, s) ds$$

удовлетворяет интегральному уравнению Пайерлса

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-|x-x'|}}{|x-x'|^2} \left( \int_0^1 \alpha[tx + (1-t)x'] dt \right) [\beta(x') n_0(x') + F(x')] dx'.$$

**В-1.58**

Разлагая решение  $n(x, s)$  стационарной краевой задачи 1.57 в ряд по сферическим функциям от  $s$ , удерживая только члены с нулевой и первыми гармониками, показать, что функция

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|s|=1} n(x, s) ds$$

есть решение краевой задачи (диффузное приближение)

$$-\frac{1}{3} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{grad} h_0 \right) + (1-h)h_0 = \frac{f}{\alpha}, \quad \left( n_0 + \frac{2}{3\alpha} \frac{\partial n_0}{\partial n} \right) \Big|_S = 0$$

**14.7.2 Классификация уравнений второго порядка**

Уравнение

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0$$

в каждой фиксированной точке  $x_0$  можно привести к каноническому виду неособым линейным преобразованием  $\xi = B^T x$ ,  $B$  - такая матрица, что преобразование  $y = B\eta$  приводит квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) y_i y_j$$

к каноническому виду. (Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, например, методом выделения полных квадратов.)

**В-2.1**

Привести к каноническому виду уравнения:

- 1)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$
- 2)  $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$ ;
- 3)  $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$ ;
- 4)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$ ; 5)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$ ; 6)  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$ ; 7)  $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$ ; 8)  $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$ ; 9)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0$ ; 10)  $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0$ ;
- 11)  $u_{x_1 x_1} + 2 \sum_{k=2}^n u_{x_k x_k} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} u_{x_k x_{k+1}} = 0$ ; 12)  $u_{x_1 x_1} - 2 \sum_{k=2}^n (-1)^k u_{x_{k-1} x_k} = 0$ ; 13)  $\sum_{k=1}^n k u_{x_k x_k} + 2 \sum_{l < k} l u_{x_l x_k} = 0$ ;

**В-2.2**

В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнения:

- 1)  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$ ;
- 2)  $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$ ;
- 3)  $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$ ;
- 4)  $u_{xx} - xu_{yy} = 0$ ; 5)  $u_{xx} - yu_{yy} = 0$ ; 6)  $xu_{xx} - yu_{yy} = 0$ ; 7)  $yu_{xx} - xu_{yy} = 0$ ; 8)  $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$ ; 9)  $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$  10)  $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$  11)  $(1+x^2) u_{xx} + (1+y^2) u_{yy} + yu_y = 0$ ; 12)  $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0$ ;
- 13)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x) u_{yy} = 0$ ; 1)  $4y^2 u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$ ; 15)  $x^2 u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$ .

Пусть коэффициенты уравнения (1) непрерывны в некоторой области  $D$ . Функция  $u(x, y)$  называется решением уравнения (1), если она принадлежит классу  $C^2(D)$  и удовлетворяет уравнению (1) в области  $D$ . Множество всех решений уравнения (1) называется общим решением уравнения (1).

**В-2.3**

Найти общее решение уравнений с постоянными коэффициентами:

- 1)  $u_{xy} = 0$ ;
- 3)  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ ;
- 2)  $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0$ ; 5)  $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$
- 4)  $u_{xy} + au_x = 0$  7)  $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$ ; 6)  $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$ ; 8)  $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2 u_{yy} + u_x + au_y = 0$ .

**В-2.4**

Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

заменой  $u(x, y) = v(x, y)e^{-bx-ay}$  приводится к виду  $v_{xy} + (c - ab)v = 0$ .

**В-2.5**

Доказать, что общее решение уравнения  $u_{xy} = u$  имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^x f(t) J_0(2i\sqrt{y(x-t)}) dt + \\ + \int_0^y g(t) J_0(2i\sqrt{x(y-t)}) dt + [f(0) + g(0)] J_0(2i\sqrt{xy})$$

$J_0(z)$  - функция Бесселя, а  $f$  и  $g$  - произвольные функции класса  $C^1$ .

**В-2.6**

Доказать, что общее решение уравнения  $u_{xy} = F(x, y)$ ,  $F \in C(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b)$ , имеет вид

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y F(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

$f$  и  $g$  - произвольные функции класса  $C^2$ .

**В-2.7**

Доказать, что общее решение уравнения  $u_{xy} + A(x, y)u_x = 0$ ,  $A(x, y) \in C^1(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b)$ , имеет вид

$$u(x, y) = f(y) + \int_{x_0}^x g(\xi) \exp \left\{ - \int_{y_0}^y A(\xi, \eta) d\eta \right\} d\xi$$

$f$  и  $g$  - произвольные функции классов  $C^2$  и  $C^1$  соответственно.

**В-2.8**

Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{1}{x-y} u_x + \frac{1}{x-y} u_y = 0$$

имеет вид  $u(x, y) = \frac{f(x)+g(y)}{x-y}$ ,  $f$  и  $g$  - произвольные функции из класса  $C^2$ .

**В-2.9**

Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{n}{x-y} u_x + \frac{m}{x-y} u_y = 0$$

$n$  и  $m$  - натуральные числа, имеет вид

$$u(x, y) = \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \left[ \frac{f(x) + g(y)}{x-y} \right],$$

$f$  и  $g$  - произвольные функции из классов  $C^{m+1}$  и  $C^{n+1}$  соответственно.

**В-2.10**

Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} + \frac{n}{x-y}u_x - \frac{m}{x-y}u_y = 0$$

$n$  и  $m$  - неотрицательные целые числа, имеет вид

$$u(x, y) = (x - y)^{n+m+1} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[ \frac{f(x) + g(y)}{x - y} \right],$$

$f$  и  $g$  - произвольные функции из классов  $C^{n+2}$  и  $C^{m+2}$  соответственно.

**В-2.11**

В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнений:

- 1)  $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$ ;
- 2)  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$ ;
- 3)  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0$ ;
- 4)  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$ ; 5)  $u_{xy} - xu_x + u = 0$ ; 6)  $u_{xy} + 2xyu_y - 2xu = 0$ ; 7)  $u_{xy} + u_x + yu_y + (y - 1)u = 0$ ;
- 8)  $u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0$ .

**15 Другие задачи****15.0.1 Другие задачи курса Лебедева**

(Пока тут они побудут, потом буду вносить в разделы выше)

Задача 2.1.1. Найти функцию Грина операторов  $\hat{L}_1 = (d/dx + x)(d/dx - x)$  и  $\hat{L}_2 = (d/dx - x)(d/dx + x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.

Задача 2.1.2. Найти функцию Грина оператора  $d^2/dx^2 + \kappa^2$  для периодических функций с периодом  $2\pi$ .

Задача 2.1.3. Найти решение задачи

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2 \right) f = \text{sign}(x)$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Задача 2.1.4. Найти решение задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \text{sign}(x)$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

**15.0.2 Задачи про мацубаровские суммы**

(скоро порешаю пару)

**15.0.3 Простейшие задачи о нелинейных уравнениях****Лебедев-**

7.1.1. Решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями  $u = -c_1x + c_2x^3$ , полученное с помощью метода характеристик, можно формально продолжить и на времена  $t > c_1^{-1}$ , что приводит к неоднозначному решению ( $x$ ). Найти область существования этой неоднозначности и значения Функции и в этой области.

**Лебедев-**

7.1.2. Найти решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями  $u = -c_1x + c_2x^2$ .



**Лебедев-**

7.1.3. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая является константой  $f_0$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $f_0$ ?

**Лебедев-**

7.1.4. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая равна  $h_0 x$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $h_0$ ?

**Лебедев-**

7.1.6. Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием  $\Psi(0, x) = 1 - A \exp(-x^2)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ .

**Лебедев-**

7.2.1. Проверить непосредственно законы сохранения интегралов (7.17, 7.18, 7.19), исходя из уравнения (7.14).

**Лебедев-**

7.2.2. Вывести соотношение Таланова (7.21).

**Лебедев-**

7.1.5. Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием  $\Psi(0, x) = \cosh(ax) + B \cosh(bx)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ . Проследить, как большой шок "поедает" маленький, считая  $b > a$  и  $B \ll 1$ .

---

## Part IV

# —— Special PDE in a Nutshell ——

## 16 Properties of PDE-s in a nutshell

(специфические свойства и методы их много вообще, потом когда-то допишу)

### 16.0.1 Свойства типичных методов в двух словах

(что-то очень важное отсюда в 1ю часть перенесу, пока сюда буду выписывать. Разделю потом по подподглавам!!! Пока названия слишком большие, чтобы создавал подподглавы для них)

Литература:

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. " Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[2] Уроев В.М. Уравнения математической физики. Москва: ИФ Яуза, 1998.

[3] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва: БИНОМ, 2005.

**О начальных условиях и постановке задач математической физики**

лагранжев формализм???

**3. Начально-краевая задача для уравнения колебания струны на полуоси. Условия согласования начальных и граничных данных. [2] - 70-73, [1]-61,63.**

Суть (???) (скоро выпишу)

**Минимальная теория**

**Смешанная задача для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^n$**

[1] - 348-353.

**Закон сохранения энергии**

**Априорная оценка решения**

**Единственность классического решения.**

**Корректность постановки задачи математической**

Суть (???) (скоро выпишу)

**Минимальная теория**

**Пример Адамара некорректно поставленной классической задачи Коши эллиптического типа**

$$u_{tt}(x, t) = -u_{xx}(x, t), x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = u_{1,k}(x) = \frac{1}{k^2} \sin kx, k \in N$$

Ее решение есть  $u_k(x, t) = \frac{\sin kt}{k^3} \sin kx$ . Следовательно, не смотря на то, что функциональные последовательности  $\{u_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{\frac{d}{dx}u_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$  равномерно стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , решение  $u_k(x, t)$  к нулю не стремится. Непрерывной зависимости от начальных данных нет.

**Корректность смешанной задачи для волнового уравнения в области из априорной оценки решения.** [2] - 66,69, [1] - 61,63.

**Свойства задачи Коши для волнового уравнения в  $\mathbf{R}^3$  и в  $\mathbf{R}^2$ .**

**Принцип Дюамеля.**

$$u_{tt}(x, t) - a^2 \Delta_x u(x, t) = f(x, t), x \in R^n, t > 0$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_l(x).$$

Для определенности будем считать, что  $a > 0$ . Из линейности уравнения следует, что решение представимо в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где  $v(x, t)$  - решение задачи Коши для однородного волнового уравнения начальными условиями (8.2) (предполагается известным),  $w(x, t)$  - решение задачи Коши для уравнения (8.1) с однородными начальными условиями ( $w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0$ ). Найдем функцию  $w$  из класса  $C^2(R^n \times [0; \infty))$ , для чего рассмотрим следующую задачу Коши, зависящую от параметра  $\tau \geq 0$ :

$$\begin{aligned} p_{tt}(x, t, \tau) - a^2 \Delta_x p(x, t, \tau) &= 0, x \in R^n, t > \tau, \\ p(x, \tau, \tau) &= 0, p_t(x, \tau, \tau) = f(x, \tau). \end{aligned}$$

**Утверждение 1 (принцип Дюамеля).** Если существует решение  $p(x, t, \tau)$  вспомогательной задачи (8.3), (8.4) из класса  $C_{x,t,t}^{2,2,0}(M)$ , где  $M = \{(x, t, \tau) : x \in R^n, \tau \geq 0, t > \tau\}$ , то функция  $W(x, t) = \int_0^t p(x, t, \tau) d\tau$  удовлетворяет поставленным требованиям.

То есть при фиксированном значении  $\tau \geq 0$  строится решение  $p(x, t, \tau)$  задачи Коши (8.3), (8.4) для  $t \geq \tau$ . Решение неоднородного уравнения в момент  $t_0$  получается как интеграл по отрезку  $AB$  от функции  $p(x, t_0, \tau)$

**Метод спуска.**

**Формула Пуассона.**

**Распространение волн в случае двух и трёх пространственных переменных.** [2] - 64-65 и 47-50, 57-62 или [3] - 203-207.

7. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для уравнения колебания струны на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных. [2] - 79-86.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

8. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Представление решения формулой Пуассона. Принцип Дюамеля. [3] 186-189 (для  $f=0$ ) и [2] - 121.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

9. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области. [2] - 94-96, 98-99.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

13. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения с постоянными коэффициентами, его применение для решения задачи Коши.

[2] – 229-232.

14. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Фундаментальное решение оператора Лапласа. [2] – 224-226, 232-235.

16. Формула представления решения уравнения Пуассона. Потенциалы, их физический смысл и их свойства

(без доказательства). [2] – 243-245, [1] – 282-287.

17. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Интеграл Пуассона в  $R^3$ .

[2] – 257-258, 261-266.

18. Теорема о среднем для гармонических функций. Принцип максимума для гармонических функций в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области.

[2] – 251-254.

19. Определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Теорема существования и единственности обобщенного решения краевой задачи для уравнения Пуассона в ограниченной области.

[3] – 131-133, 136-138.

20. Метод Фурье решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и во внешности круга. Внешние краевые задачи, условия на бесконечности. Метод Фурье решения краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре и вне шара. Сферические функции. [2] – 178-181, 270-282.

## 17 Особые методы в двух словах

(специфические свойства и методы их много вообще, потом когда-то допишу)

### 17.1 Особые методы и применения функции Грина

#### 17.1.1 Функция Грина для случайного блуждания, корреляторов, диаграммы (???)

(потом с конд. средами свяжу, тут методы, которые там и будут применяться)

**О функции Грина для возврата назад при случайном блуждании.** Рассмотрим частицу, совершающую случайное блуждание по  $n$ -мерной кубической решетке. Движение начинается при  $t = 0$  из начала координат. Попадая на очередном шаге в какой-то из узлов решетки, частица на следующем шаге с одинаковой вероятностью переходит в любой из  $2n$  соседних узлов. Пусть  $p(t, \mathbf{x})$  - вероятность того, что частица через  $t$  шагов оказалась в узле  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  решетки. (В этой задаче время  $t$  является дискретным.) В теории вероятностей рассматривают производящую функцию

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}, t} z^t e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) \quad (t \geq 0, |z| < 1).$$

Свойства этой величины во многом аналогичны свойствам функции Грина. Покажите, что

$$G(z, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n} (\cos q_1 + \dots + \cos q_n).$$

Рассмотрим производящую функцию  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  для блужданий, начинающихся из начала координат, но ни разу не возвращающихся туда на последующих шагах. Величина  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  по своим свойствам похожа на функцию Грина частицы в поле отталкивающего центра (см. задачи 11, 12 и 13). В частности, для нее можно написать такое же интегральное уравнение (напоминающее уравнение Дайсона). Выразите  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  через  $G(z, \mathbf{q})$ . Найдите вероятность  $P$  того, что частица никогда не возвращается в начало координат. Покажите, что

$$P^{-1} = \int G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}.$$

Здесь интеграл берется по зоне Бриллюэна, т. е. по периоду обратной решетки. Вероятность возврата (2.17) имеет нетривиальную зависимость от размерности решетки  $n$ . Покажите, что а)  $P = 0$  при  $n \leq 2$ ; б)  $0 < P < 1$  при  $n > 2$ ; в)  $P \rightarrow 1$  при  $n \gg 2$ .

Типичная диффузионная траектория имеет бесконечно много возвратов при  $n \leq 2$ , и конечное число при  $n > 2$ .

(ниже суть ЛШ9, крутая задача, многое поясняет про ф грина)

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|=1} p(t, \mathbf{x}') & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Переходя к фурье-образу  $p(t, \mathbf{q})$ , получаем

$$p(t+1, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q})p(t, \mathbf{q}) - \int W(\mathbf{k})p(t, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}.$$

Производящая функция  $\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \sum_{t \geq 0} z^t p(t, \mathbf{q})$  получается умножением (2.86) на  $z^{t+1}$  и суммированием по  $t \geq 0$ . Находим

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q})(1 - zW(\mathbf{q})) = 1 - z \int W(\mathbf{k})\tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}$$

Это уравнение можно записать в таком виде:

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = G(z, \mathbf{q}) + G(z, \mathbf{q}) \int \Sigma(z, \mathbf{k})\tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n},$$

где  $\Sigma(z, \mathbf{k}) = G^{-1}(z, \mathbf{k}) - 1$ . (Заметим, что по форме уравнение (2.89) напоминает уравнение Дайсона (4.9).) Ищем решение (2.89) в виде

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \lambda(z)G(z, \mathbf{q}),$$

где  $\lambda(z)$  - некоторая функция  $z$ . Подставляя (2.90) в (2.89), находим

$$\lambda(z) = 1 - \lambda(z) \int (G(z, \mathbf{q}) - 1) \frac{d^n q}{(2\pi)^n},$$

откуда

$$\lambda^{-1}(z) = \int G(z, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}.$$

где  $a$  - вспомогательный параметр, принимающий значения  $0 < a < r$ , а  $A_t = (1 + a + \dots + a^{t-1})^{-1} = (1 - a)/(1 - a^t)$ . Переходя в (2.95) к пределу  $t \rightarrow \infty$ , получаем

$$P_a^* = \frac{1-a}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\lambda(z)dz}{(1-z)(z-a)},$$

Рассмотрим контурный интеграл (2.96). Функция  $\lambda(z)$  аналитична внутри единичного круга, поэтому внутри контура  $|z| = r$  подынтегральное выражение в (2.96) имеет один простой полюс  $z = a$ . Вычет в точке  $z = a$  есть  $\lambda(a)$ , и поэтому  $P_a^* = \lambda(a)$ . Искомая вероятность невозвращения, согласно (2.95), есть  $\lim_{a \rightarrow 1} P_a^*$ . Следовательно,

$$P = \lambda(a)_{a \rightarrow 1} = \left[ \int G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \right]^{-1}.$$

При  $n \leq 2$  интеграл в (2.97) расходится на малых  $q$ , поэтому вероятность невозвращения  $P = 0$ .

## 17.2 О других типичных задачах

(тоже типичные задачи в рамках бакалавриата, но менее встречающиеся. Для совсем особенных тем 2я 1я часть, помню.)

### 17.2.1 О простейших матричных уравнениях

### 17.2.2 О методе потенциалов (??)

(есть и не до него)

**17.2.3 Об автомодельных решениях (??)**

(см. Лебедева, специфическая тема, пока нужно продумывать)

**17.2.4 О методе потенциалов (??)**

(см. Лебедева, специфическая тема, пока нужно продумывать)

**17.2.5 Другие свойства обобщенных функций****17.2.6 Свойства обобщенных функций для интегральных уравнений****Для интегральных уравнений от Владимирова**

Обозначим через  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(R^n)$  совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций  $\mathcal{D}$ . Всякий функционал  $f \in \mathcal{D}'$  назовем обобщенной функцией (из пространства  $D'$ )

Обозначим через  $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}'(R^n)$  совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций  $\mathcal{S}$ . Всякий функционал  $f \in \mathcal{S}'$  назовем обобщенной функцией медленного роста (из пространства  $\mathcal{S}'$ ).

Значение функционала  $f$  на основной функции  $\varphi$  обозначим через  $(f, \varphi)$ . Чтобы указать аргумент основных функций, иногда вместо  $f$  и  $(f, \varphi)$  будем писать  $f(x)$  и  $(f(x), \varphi(x))$ .

Последовательность  $\{f_k\}$  обобщенных функций из  $\mathcal{D}'$  называется сходящейся к обобщенной функции  $f$  (из  $\mathcal{D}'$ ), если  $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$ ,  $k \rightarrow \infty$  для любой  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$ . В частности, ряд из обобщенных функций  $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$  называется сходящимся в  $\mathcal{D}'$  к обобщенной функции  $f$ , если для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k, \varphi)$  сходится к  $(f, \varphi)$ . Сходимость последовательности и ряда в  $\mathcal{S}'$  определяется аналогично. Говорят, что обобщенная функция  $f$  равна нулю в области  $G$ , если  $(f, \varphi) = 0$  для всех  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$  с носителем в  $G$ .

Обобщенные функции  $f_1$  и  $f_2$  называются равными в области  $G$ , если их разность  $f_1 - f_2$  равна нулю в  $G$ ;  $f_1$  и  $f_2$  называются равными, если  $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Носителем обобщенной функции  $f$  называется множество всех таких точек, ни в какой окрестности которых  $f$  не обращается в нуль.

**17.3 Special methods for curved spaces and gravity**

---

## Part V

# Other PDE Topics and Methods

## 18 Special methods of functional analysis (???)

### 18.1 Mellin transform

#### 18.1.1 Main methods

#### 18.1.2 Examples

#### 18.1.3 Details about Mellin transform

## 19 Другие методы решения уравнений математической физики (???)

### 19.0.1 Метод Гамильтона-Якоби (??)

Обсудим подробно метод Гамильтона-Якоби.  
(скоро напишу, пока основы доучивать нужно!)

## 20 Нелинейные уравнения

(потом добавлю теорию из уже написанной выше, ну и другую также)

## 21 Интегрируемые системы в математической физике

## 22 Геометрические методы в математической физике

(идея почтить Катанаева, подумать про гравитацию, дописать для них методы. Пока не до этого.)

## 23 Численные решения и моделирование

(тут коротко обсудим, прямо супер подробно в отдельных статьях, до которых я скорее всего никогда не дойду.)

### 23.0.1 Основные методы численного решения

(суть записи по вычматам)

### 23.0.2 Типичные примеры

#### моделирование уравнения Геймгольца

итак, нужно записать эту главу, чтобы начать видеть приложения.

итак, код найден [тут](#), потом его я разберу подробно, пока что просто принимаем, что что-то такое есть, и в принципе очень полезно.



классическая такая матфизика - часто нужна, а потом уже мы идем в гильбертовы пространства и смотрим дополнения. пока что начнем с основ.

итак, у нас есть  $\Omega$  - граница 2D поверхности. и имеется функция  $u(x, y)$ , которая должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}\nabla^2 u + k^2 u &= 0, & x, y \in \Omega \\ u(x, y) &= 0 & \forall x, y \in \Omega\end{aligned}\tag{23.1}$$

создадим в Wolfram команду `helmholzSolve` чтобы она решала такие уравнения.  
(я хз, как)

```

1 Needs["NDSolve`FEM`"];
2 helmholzSolve[g_,
3 numEigenToCompute_Integer,
4
5 opts: OptionsPattern[]]:= Module[
6 {u,
7   x,
8   y,
9   t,
10  pde,
11  dirichletCondition,
12  mesh,
13  boundaryMesh,
14  nr,
15  state,
16  femdata,
17  initBCs,
18  methodData,
19  initCoeffs,
20  vd,
21  sd,
22  discretePDE,
23  discreteBCs,
24  load,
25  stiffness,
26  damping,
27  pos,
28  nDiri,
29  numEigen,
30  res,
31  eigenValues,
32  eigenVectors,
33  evIF},
34
35 (* Discretize the region *)
36 If[Head[g] === ImplicitRegion || Head[g] === ParametricRegion,
37 mesh = ToElementMesh[DiscretizeRegion[g],
38 opts],
39 mesh = ToElementMesh[DiscretizeGraphics[g],
40 opts]
41 ];
42 boundaryMesh = ToBoundaryMesh[mesh];
43
44 (* Set up the PDE and boundary condition *)
45 pde = D[u[t,x,y],
46 t] - Laplacian[u[t,x,y],
47 {x,
48   y}] + u[t,x,y] == 0;
49 dirichletCondition = DirichletCondition[u[t,x,y] == 0,
50 True];
51
52 (* Pre-process the equations to obtain the FiniteElementData in StateData *)
53 nr = ToNumericalRegion[mesh];
54 {state} = NDSolve`ProcessEquations[{pde,
55   dirichletCondition,
56
57   u[0,
58     x,
59     y] == 0},
60 u,
```

```

61 {t,
62     0,
63     1},
64 Element[{x,
65     y},
66 nr]];
67 femdata = state["FiniteElementData"];
68 initBCs = femdata["BoundaryConditionData"];
69 methodData = femdata["FEMMethodData"];
70 initCoeffs = femdata["PDECoefficientData"];
71
72 (* Set up the solution *)
73 vd = methodData["VariableData"];
74 sd = NDSolve["SolutionData" -> nr,
75     "Time" -> 0.];
76
77 (* Discretize the PDE and boundary conditions *)
78 discretePDE = DiscretizePDE[initCoeffs,
79     methodData,
80     sd];
81 discreteBCs = DiscretizeBoundaryConditions[initBCs,
82     methodData,
83     sd];
84
85 (* Extract the relevant matrices and deploy the boundary conditions *)
86 load = discretePDE["LoadVector"];
87 stiffness = discretePDE["StiffnessMatrix"];
88 damping = discretePDE["DampingMatrix"];
89 DeployBoundaryConditions[{load,
90     stiffness,
91     damping},
92     discreteBCs];
93
94 (* Set the number of eigenvalues ignoring the Dirichlet positions *)
95 pos = discreteBCs["DirichletMatrix"]["NonzeroPositions"][[All,
96     2]];
97 nDiri = Length[pos];
98 numEigen = numEigenToCompute + nDiri;
99
100 (* Solve the eigensystem *)
101 res = Eigensystem[{stiffness,
102     damping},
103     -numEigen];
104 res = Reverse /@ res;
105 eigenValues = res[[1,
106     nDiri + 1 ;; Abs[numEigen]]];
107 eigenVectors = res[[2,
108     nDiri + 1 ;; Abs[numEigen]]];
109 evIF = ElementMeshInterpolation[{mesh},
110     #] & /@ eigenVectors ;
111
112 (* Return the relevant information *)
113 {eigenValues,
114     evIF,
115     mesh}
116 ]

```

только говорят, что там какие-то подводные камни и вообще так вот зрешать это все нельзя. (тут я кстати задумался, что вообще говоря я не знаю, как их решать, и это в самом деле хороший вопрос)

## 24 Физические приложения

(судя по всему его нужно раскидать будет)

наверное, это прямо очень интересный раздел, наконец-то овладеем всеми методами.

### 24.1 квантовая теория поля

очень актуально.

заготовлю сперва выше разделы!!!!  
потом сюда уже буду применять их.

## 24.2 оптика !!!

хз, но это на самом деле актуально!!!!

### 24.2.1 волновое уравнение

(тоже часть задания, когда-то дойду. но мб в другое место писать буду)

### 24.2.2 формула Кирхгофа в оптике

## 24.3 уравнение теплопроводности!!

## 24.4 плазма

там еще есть много много приложений, которые вкратце хотелось бы упомянуть, берешь и решаешь.

---

## Part VI

# Appendix

Обсудим известные из курса классического анализа теоремы и конструкции, которые активно применяются в различных задачах математической физики.

## А Введение

### А.1 Мотивация

(вообще, эта запись может быть одной из центральных записей, потому что часто к этому происходит возврат. хз, пока еще не прочувствовал, но по сути именно через УМФ многое и связано в физике!!! пока не глубоко это вижу к сожалению.)

**все строгие задачи теоретической физики сводятся к задаче математической физики**

Так что по сути этой записью я и пользуюсь, когда решаю задачи теорфиза.

То есть запись очень используемая.

И поэтому она отражает во многом уровень.

Очень важно собрать его нормально, потому что по сути именно эта запись ключевая для физики, а не запись по матану или еще чему-то.

Другие тоже важны очень, но основные шаблоны решения задач прописаны именно тут.

**квантовая теория поля во многом это та же матфизика**

**Мотивация изучать обобщенные задачи**

(неплохо бы сформулировать её, пока не уверен.)

### А.2 Мышление для математической физики

#### А.2.1 Подход к уравнениям математической физики

**Технические особенности**

**Используем горизонтальную ориентацию листов** Эффективная мелочь, потому что формулы очень большие.

**Строгие вычисления и преобразования на 5 страниц как способ развлечься**

(пропишу это глубже, чисто подход к Консту. С таким подходом все и берется. такое особое развлечение, тем не менее, когда в целом все понимаешь, можно и такими строгими способами идти. тут порассуждаю про это.)

**О важности параллельной доработки функционального анализа**

потому что связи тут самые передовые.

и это не сложно, примерно просто неделю потратить на него нужно - и все, четкость математической физики становится огромная.

### А.2.2 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания математической физики.

### А.2.3 Необходимые темы для математической физики

Математическая физика использует многие темы математики: функции, дифференциалы, т.п.... но я ее излагать буду с точки зрения физики, показывая кучу примеров и приложений методов. Можно было бы фокусироваться на математику, но она у меня в соответствующих разделах, поэтому тут сфокусируемся на физических приложениях математики.

В записи содержится много примеров, много расчетов, что важно для строгости. что еще особенное?

### Важность математического анализ

всё полностью на нем стоит..

### Важность функционального анализ

вроде нужен, но пока что я не уверен.

### Важность дифференциальных уравнений

мб и нужны, не знаю точно.

### А.2.4 Дополнительные темы для математической физики

### А.2.5 способы изучения математической физики

## А.3 Короткий исторический обзор

### От ПТФ

В настоящем пособии мы представим подходы, которые используются в теоретической физике для решения задач, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений, включая нелинейные уравнения и уравнения в частных производных, то есть уравнений полевых. Мы обсуждаем также методы, связанные с интегральными уравнениями и теорией групп. Значимость этих сюжетов была установлена в ходе развития физики. Осознание важности решения дифференциальных уравнений и связанных с ними задач восходит к тому же времени, когда был достигнут первый грандиозный успех современной теоретической физики - объяснение Ньютоном формы орбит планет на основе законов механики. Хотя сам Ньютон зачастую предпочитал пользоваться геометрическими методами, он хорошо сознавал, что наиболее адекватным языком созданной им конструкции являются именно дифференциальные уравнения.

В течение восемнадцатого века параллельно с быстрым ростом качества астрономических наблюдений происходило уточнение законов движения планет и более мелких астрономических объектов (комет, астероидов), связанное с воздействием на них других планет. На этом пути родилась, по современной терминологии, теория возмущений, которая имеет дело с поправками, связанными со слабым дополнительным воздействием на физическую систему. В частности, было осознано, что в некоторых случаях даже слабое возмущение способно за большое время сильно исказить орбиту

планеты или иного тела. Так появилась теория так называемых секулярных членов в уравнениях механики.

В том же восемнадцатом веке возник новый предмет изучения - гидродинамика. Эйлер и Лагранж сформулировали основные уравнения, которым подчиняется движение любой жидкости. И эти уравнения оказались дифференциальными уравнениями в частных производных. Впоследствии эти уравнения были уточнены Навье и Стоксом, которые включили в рассмотрение вязкость. Гидродинамика оказалась удивительно богатой на различные физические явления, что связано с существенной ролью нелинейности в динамике жидкости.

Гидродинамика на долгие годы стала тем полигоном, на котором испытывались различные методы математической физики. Особенно плодотворным в этом отношении оказался период конца девятнадцатого - начала двадцатого века, когда были поставлены и решены многие гидродинамические задачи. Эта наука не исчерпана до сих пор, например, не существует последовательной теории турбулентности, то есть хаотического состояния жидкости, которое возникает при больших числах Рейнольдса.

Однако гидродинамика сыграла и еще одну очень важную роль - она стала парадигмой, на основе которой строилось понимание других физических явлений. Именно гидродинамика послужила плацдармом, с которого началась осознание таких явлений, как термодинамика и электромагнетизм. И хотя понятия флогистона и эфира были впоследствии отброшены, как слишком грубые модели явлений, использующие прямые аналогии с жидкостью, сам подход, связанный с дифференциальными уравнениями в частных производных, восходящий к гидродинамике, оказался чрезвычайно плодотворным. Именно на этом пути в течение девятнадцатого века в физике родилось современное понятие поля.

В девятнадцатом веке произошло первое великое объединение - постепенно было осознано, что такие явления, как электричество, магнетизм и распространение света являются проявлениями единой сущности электромагнитного поля. Впоследствии к свету добавились Электромагнитные волны различной длины волны, от радиоволн до рентгеновского излучения. И описание всех этих явлений в рамках единой теории электромагнитного поля остается одним из самых значимых достижений физики. Это описание базируется на дифференциальных уравнениях в частных производных.

По мере расширения круга задач, с которыми имеет дело физика, выяснилось, что далеко не во всех случаях для анализа можно обойтись элементарными функциями. Поэтому в течение восемнадцатого-девятнадцатого века в оборот математической физики были введены более сложные функции, которые называются специальными. Репертуар специальных функций установился к началу двадцатого века. Подтвердим, что использование специальных функций тесно связано с теорией функций комплексного переменного, построенной в основном в девятнадцатом веке.

В течение девятнадцатого века было осознано, что теоретическая физика имеет дело с разнообразным асимптотическим поведением. В связи с этим в математической физике были разработаны методы определения асимптотического поведения различных функций и решений широкого спектра уравнений. С другой стороны, выявилась значительная роль законов сохранения, симметричное происхождение которых было выявлено уже в двадцатом веке.

При построении в первой половине двадцатого века теории относительности (как специальной, так и общей) и квантовой механики использовались в основном методы, разработанные в рамках теории классического поля. Это объясняет удивительно высокий темп создания этих совершенно новых разделов физики. Например, уравнение Шрёдингера представляет собой типичное полевое уравнение в частных производных.

В ходе дальнейшего развития в двадцатом веке в теоретической физике возникли

разделы, исследования в рамках которых приводят к интегродифференциальным уравнениям. Примерами могут служить кинетика физических систем, которая исследуется в рамках кинетического уравнения, или квантовая теория поля. Эти области лежат вне рамок настоящего пособия. В то же время даже в квантовой теории поля возникают задачи, которые по своей постановке являются уравнениями классического поля. В качестве примера можно привести так называемые инстантоны. Даже при решении задач, которые и сходно восходят к дифференциальным уравнениям, зачастую возникают интегральные уравнения. Такая ситуация типична при использовании метода функций Грина, который подробно обсуждается в настоящем пособии. Мы обсуждаем ряд задач, которые ставятся в терминах интегральных уравнений, которые возникают в самых разных физических контекстах.

В двадцатом веке чрезвычайно расширилась область применимости методов классического поля. Речь идет о динамике любой среды, которую можно рассматривать, как непрерывную. Приведем в качестве примера плазму, которая чрезвычайно богата на различные динамические явления. Подчеркнем также, что плазма может существовать на различных масштабах, от космических до ядерных (где осуществима так называемая кварк-глюонная плазма), способ ее описания от этого принципиально не меняется.

В связи с бурным развитием динамики непрерывных сред во второй половине двадцатого века были сформулированы базисные нелинейные уравнения, которые описывают ключевые динамические явления в самых разных физических ситуациях. Это в основном уравнения для полей, зависящих от времени и одной координаты. Поразительным образом оказалось, что значительная часть этих базисных уравнений имеют бесконечный набор законов сохранения. С другой стороны, эти уравнения допускают аналитическое построение весьма сложных решений, которые обычно называют солитонными.

В течение двадцатого века была осознана фундаментальная роль симметричных соображений в объяснении различных физических явлений. Фактически, в основании любой современной физической теории лежит та или иная симметрия, которая в значительной мере определяет особенности применяемого в этой теории математического аппарата. Чрезвычайно важным является понятие спонтанного нарушения симметрии, которое лежит в основе таких явлений, как сверхтекучесть и сверхпроводимость, а также возникновения масс элементарных частиц за счет механизма Хиггса. Анализ всех этих явлений требует использования аппарата теории групп.

Во второй половине двадцатого века нашли широкое развитие методы исследования систем, обладающих стохастическим поведением. Такие системы должны описываться в рамках величин, усредненных по флуктуациям, то есть случайным изменениям характеризующих систему величин во времени и пространстве. Зачастую такие усредненные уравнения описываются дифференциальными или интегральными уравнениями. В качестве примера можно привести диффузность Бродовского движения.

(добавлю формулы, перепису)

## А.4 Литература

### А.4.1 Основная литература

#### Основная обучающая литература

[1] Колоколов, Лебедев и др. Умф для ПТФ

Компактные лекции, много хороших тем, разве что не уверен, что только их читая, можно понять тему. Возможно, нужно преподавателя тоже слушать, чтобы разобраться

в том, что там написано. Также там много задач для тренировки.

[2] <https://www.youtube.com/@alexandrosin9101> Осин А. Семинары по УМФ

Хорошие, подробные семинары, нет сомнений, что после таких семинаров предмет будет отлично усвоен.

[? ] Колесникова С. И. "Методы решения основных задач математической физики"  
Прекрасная методичка с примерами.

### Задачники

[3] Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики

Хороший задачник, который уже пару лет как хотелось решить, может, когда-то и порешаю.

## А.4.2 Дополнительная и профессиональная литература

### Другая обучающая литература и методички

[4] Самарова семинары <https://www.resolventa.ru/index.php/mfti-umf-fopf>

Хорошие записи хороших типичных вузовских семинаров, большое матфизическое счастье, что они есть. Разве что эти методы не часто нужны, поэтому не ставлю их в основную литературу.

[? ] Яковлев "Функциональные пространства".

Пока не изучал, не до этого.

[? ] Карасёв Р.Н. Отдельные темы математического анализа

по введению математическому анализу конспект с кучей всяких тем, не особо он нужен на самом деле, можно и отложить его прохождение.

[5] Константинов Р. В. Классические и обобщенные решения уравнений математической физики

Большая книга, где подробно делаются выкладки, которые многим кажутся элементарными. Используется строгий математический подход. Для изучения её необходима вера в то, что строгая математика действительно полезна.

Д.А.Шапиро Конспект лекций по математическим методам физики часть II: представления групп и их применение в физике. функции грин.

крутая книга со многими примерами, потом посмотрю в качестве дополнений для всего. пока что-то и лень и не совсем она про умф. но вообще, давно в планах была, особенно по теории групп много конструкций там хороших.

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. " Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Типичный учебник, очень известный в России.

[6] Уроев В.М. Уравнения математической физики.

370 страниц типичной, хорошей и содержательной теории, но такое учить за недели 3 работы над этой книгой, не меньше. Есть много понятных примеров. Пока использую как справочник, будет время - буду доучивать. Доступна на lib.mipt.

[7] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.

Хорошие лекции, 230 страниц, много теории. Есть, о чем думать недели 2. Доступна на lib.mipt.

[? ] Михайлова "Сборник задач по УМФ"

пока не трогал. второй задачник на случай, если первого мало будет.

### Углубленные и профессиональные книги

Зельдович Элементы математической физики 1973



Очень крутая книга, давно в планах было разобрать её, дойду - обязательно пару дней буду дополнять ей структуру.

Саймонс Рид том 4. Анализ операторов

Очень заумная книга, где может быть многое профессиональное найду, пока не до этого.

### Книги по функциональному анализу в помощь

(??)

### Книги и статьи по применениям в теоретической физике

[8] Тахтаджаян Л.А. Квантовая механика для математиков

Хорошая книга, много математики обсуждается, мало физики. Может, когда-то завершу изучение её?

[9] Левитов Шитов Функция Грина. Задачи и решения

Обсуждается много уравнений в конденсированных средах, но от основ УМФ она уже далеко.

[10] Катанаев М. О. "Геометрические методы в математической физике"

Много теории, много тем, пока не была актуальной, но скорее всего когда-то полезно будет почитать и дополнить ей свои записи.

[11] Мышкис прикладная математика для инженеров

Много интересных тем, жаль, пока нет времени изучать это.

### Статьи о деталях уравнений математической физики

(??)

### Статьи про моделирование

(Моделирование - отдельное профессиональное направление, которым я пока не занимался.)

[тут](#) отличный пример о моделировании в вольфраме.

## А.5 Обзор математической физики

что вообще в нем происходит?

### А.5.1 математической физики в двух словах

Обсудим, что из себя представляет математической физики наиболее кратко, выделяя самую суть.

#### появление математической физики в нашей картине мира

один подход

второй подход

обзор различных задач и решений

какие есть и как они связаны друг с другом?

## **суть функции грина**

по сути самое важное, чем мы и занимаемся тут.  
что отличает нас от тех, кто просто диффуры прошел!!!  
четко пропишу!

## **один большой раздел**

### **такой-то набор следствий**

**обзор необходимых для математической физики математических методов**  
(освою - напишу)

## **А.5.2 наиболее прикладные темы математической физики**

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

## **title**

### **А.5.3 итоговые формулы и закономерности**

### **А.5.4 обзор теоретических подходов**

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

### **А.5.5 Удивительные факты**

### **А.5.6 Результаты математической физики**

### **А.5.7 Применения математической физики в других разделах физики**

### **А.5.8 Обзор дальнейших развитий математической физики**

## **А.6 связь математической физики с разными другими разделами**

### **А.6.1 связь с дифференциально геометрией**

не шарю.

## **А.7 Описание записи**

### **А.7.1 описание глав и разделов**

описание записи в целом

первая часть

вторая часть

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

### **А.7.2 обозначения и константы**

## **А.8 обзор математической физики**

что вообще в нем происходит?

### А.8.1 обзор теоретических подходов

### А.8.2 математическая физика в задачах дифференциальной геометрии

многие параграфы чисто как приложения к диффгему

### А.8.3 обзор приложений

## А.9 Головоломки математической физики

сбалансирую и наберу потом по интересности

надо бы найти что-то лишь идейное, чтобы не было много вычислений.

## В Методы математического анализа для УМФ

### В.1 примеры различных преобразований

#### В.1.1 вычисление свертки

и тут в каждом параграфе каждая свертка полезна

по сути дз 2 по УМФ, чисто тут сгруппирую и все.

### В.2 оценки

как с пределами там работаем и всем таким?

теорема Лебега об ограниченной сходимости дает нам условие на занос предела под сумму.

### В.3 интегралы

перечень основных методов

#### В.3.1 теоремы Лебега

## С Пространства функций

### С.1 Гильбертово пространство

(определение и все из 4го семестра распишу тут)

если функция лежит в нем, то это можно проверить условием на ряд:<sup>4</sup>

$$\sum_n |v_n|^2 |e^{-i\lambda t}|^2 < +\infty \quad (\text{C.1})$$

короче, у нас еще дофига проверок всякой хрени по всем мелочам.

в Гильбертовом пространстве вводят также:

**Определение С.1.** производная  $\dot{u}$  в смысле гильбертова пространства - если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \dot{u} \right\|^2 = 0$$

Если  $\dot{u}$  существует, то ее можно разложить в ряд  $\dot{u}$ <sup>5 6</sup>

---

<sup>4</sup>откуда это?

<sup>5</sup>????

<sup>6</sup>мы можем раскладывать по базису и дальше подставлять эти ряды. да? я так делал?

### С.1.1 свойства и дополнительные характеристики

суть в том, что они скорее всего нужны просто для понимания происходящего, но применять их не будем.

**Теорема 2.** *Рисса об ортогональном разложении*

(что типа если есть подпространство, то само  $H$  разбивается в прямую сумму.)

**Теорема 3.** *Рисса, Фреше*

*Proof.* оно есть

оно не малое.

оно займет 40 мин, чтобы разобраться.

скипаю.

□

## С.2 пространство Шварца

(что это?)

суть в том, что там про свертки и все такое.

### С.2.1 свертка

большая часть задания по УМФ, которое мы потом все посмотрим.

### С.2.2 пределы

## С.3 О некоторых обобщенных функциях

### С.3.1 Дельта-функция, ее производные, функция Хевисайда

**определение**

Оперирование с идеальными объектами в физике такими как дит к появлению в математическом аппарате, описывающем эти объек- ты, так называемых обобщенных функций. Наиболее известные и част выражениях, умноженными на «хорошую» функцию. Поэтому свойст- ва обобщенных функций определяются свойствами интегралов — они имеют интегральный смысл.

Таким образом, математическая теория обобщенных фуниший стпоится на сопоставлении им функционалов, т. е. интегральных выражений. содержащих произведения с хорошими «функциями». Например. пляя  $\delta(x)$  -функции определяется функционал с пооизвольной «хороших функцией:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

В функционале происходит «сглаживание (усреднение) сингулпности  $\delta$  -функции. В физике это отвечает замене модели точечнота обтеита некоторым распределением в ефизически бесконечно маломм облеме так что среднее значение распределенного объекта совпадает с величиной точечного.

В теории обобщенных функций часто используется другой подход: обобщенная функция рассматривается как предел последовательности «хороших» функций. Такой подход может оказаться более наглядным, чем функциональный, поскольку в этом случае производится предельный переход после выполнения всех «обычных» операций

нал последовательностью «хороших» функций, аппроксимирующих обобщенную. 10.2  $\delta$ -ФУНКЦИЯ В этом параграфе рассмотрим «основную» обобщенную функцию на уровне «физической строгости». Оправданием такого подхода может служить высказывание одного из великих математиков: «Если Ньютон ждал три века, пока его душу спасут из ада, построив строгую теорию математического анализа, то Шварц спас душу Дирака еще при его жизни».

Прежде всего подчеркнем, что  $\delta$ -функция - это операторная величина, которая приобретает «реальный» смысл только если она стоит под знаком интеграла. Иными словами,  $\delta$ -функция есть ядро линейного интегрального оператора. При этом само ядро не есть функция в обычном смысле.

Представления и определения  $\delta$ -функции мы рассмотрим в следующем параграфе, а сейчас приведем, пожалуй, самое распространенное определение:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{iKx} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \cos Kx dx \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{x}.$$

Сам по себе предел  $K \rightarrow \infty$  выражения (10.2), конечно, не существует, однако, если его правую часть умножить на «хорошую» (обычную) функцию, регулярную при  $x = 0$  и проинтегрировать по интервалу, включающему точку  $x = 0$ , а после интегрирования выполнить предельный переход, предел будет существовать:

$$\int_{-a}^b \delta(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\sin y}{y} dy = f(0)$$

Формула (10.3) определяет основное свойство  $\delta$ -функции и ее можно рассматривать как определение (10.1).

Наглядно  $\delta(x)$  можно представить себе как функцию, равную нулю при всех  $x \neq 0$ , но имеющую в точке  $x = 0$  столь сильную сингулярность, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Если формально продифференцировать определение (10.2), получим определение производной от  $\delta$ -функции:

$$\delta'(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \frac{K \cos Kx}{x} - \frac{\sin Kx}{x^2} \right)$$

которая имеет «реальный» смысл только в интегральном выражении. Если после выполнения интегрирования выполнить предельный переход так же, как и в формуле (10.3), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0)$$

Заметим, что интегрированием по частям, выражение (10.3) сводится к выражению (10.6), где производная  $\delta$ -функции определена в соответствии с (10.5)

### представления дельта-функции

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи появления  $\delta$ -функции, когда некоторый параметр стремится к нулю. 1. Бесконечно медленное (адиабатическое) изменение физической величины (как правило - некоторого взаимодействия). В этом случае имеем интегральное выражение:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi (x^2 + \varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|} e^{\pm i k x} dk$$

Действительно, выражение (10.7) обладает необходимыми свойствами:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \Big|_{x \neq 0} = 0$$

и соответственно при  $x = 0$  получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Вычислим теперь интеграл от дроби, стоящей под знаком предела:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon dx}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi(1 + y^2)} = \frac{2\pi i}{\pi} \operatorname{res} \frac{1}{1 + y^2} \Big|_{y=i} = 1$$

2. Периодически меняющееся взаимодействие (представление Дирихле)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin Nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{\pm i k x} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \cos kx dk$$

Здесь роль малого  $\varepsilon$  играет  $1/N$ . В дальнейшем придется часто пользоваться теоремой Римана-Лебега: интеграл от произведения медленно меняющейся функции  $f(x)$  и периодической функции с малым периодом и средним за период равным нулю мал и в пределе равен нулю. Это имеет место, например для функций:  $\exp(iNx)$ ,  $\sin Nx$ ,  $\cos Nx$  при  $N \rightarrow \infty$ . Действительно, беря по частям интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{iNx} dx &= f(x) \frac{e^{iNx}}{iN} \Big|_a^b - \frac{1}{iN} \int_a^b f'(x) e^{iNx} dx = \\ &= \frac{1}{iN} (f(b)e^{iNb} - f(a)e^{iNa}) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \Big|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Проверим теперь выполнение основных свойств  $\delta$ -функции для выражения (10.8). Заметим, что в конечных пределах

$$\int_a^b \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin Nx}{\pi x} \varphi(x) dx = 0$$

но интеграл в бесконечных пределах (по всей оси) отличен от нуля и равен

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1$$

Таким образом, согласно сформулированной выше теореме получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} \varphi(x) dx = \varphi(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = \varphi(0).$$

Следовательно, функция (10.8) удовлетворяет основному свойству  $\delta$ -функции (10.1). Рассмотренные два представления наиболее часто встречаются в физических задачах. 3. Представление в виде гауссовой экспоненты:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \text{Но} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \Big|_{x=0} = \infty.$$

Сама функция по знаку предела (10.10) выбрана нормированной на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} dx = 1$$

Для любой хорошей функции, как и в представлении Дирихле можем записать:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \varphi(x) dx = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} dx = \varphi(0)$$

4. Это представление похоже на представление Дирихле:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}$$

Вновь легко проверяем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2} \Big|_{x=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Осталось убедиться, что интеграл в бесконечных пределах от рассматриваемой функции равен 1. Для этого вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha y}{y^2} dy$$

Интеграл вычисляется дифференцированием по параметру  $\alpha$ :

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha y \cos \alpha y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 1$$

Решая тривиальное дифференциальное уравнение  $I'(\alpha) = 1$ , получаем:  $I(\alpha) = \alpha + \text{const}$  с «ачальным» условием  $I(0) = 0$ , поэтому  $I(\alpha) = \alpha$ . Заметим теперь, что заменой  $x/\varepsilon = y$  мы сводим нужный нам интеграл к вспомогательному при  $\alpha = 1$ . Таким образом убеждаемся, что функция под знаком предела нормирована на 1. Далее, воспользовавшись теоремой Римана-Лебега, убеждаемся, что рассматриваемое представление удовлетворяет основному свойству  $\delta$ -функции (10.1). 5. Представление Пикара:

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|}$$

Здесь так же как в представлении Дирихле  $\varepsilon = N^{-1}$ . Легко убеждаемся:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|} \Big|_{x=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} = \infty$$

Интеграл в бесконечных пределах равен 1 и не зависит от параметра  $N$ . Основное свойство  $\delta$ -функции также выполняется. 6. Представление Стильтьеса:

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}$$

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}$$

Проверяем выполнение необходимых требований:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx} \Big|_{x=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi} = \infty$$

Убедимся, что функция нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N dx}{2\pi \operatorname{ch} Nx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N e^{-Nx}}{\pi (1 + e^{-2Nx})} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Убедиться в том, что представление (10.14) удовлетворяет необходимому свойству (10.1) можно так же, как в случае с быстро убывающей гауссовой экспонентой (10.8).

В заключение параграфа отметим, что  $\delta$ -функция размерна, ее размерность обратна размерности аргумента:

$$[\delta(x)] = [x]^{-1}$$

### свойства

Подчеркнем еще раз, что свойства обобщенных функций не зависят от выбора представления, аппроксимирующего данную функцию: свойства обобщенных функций выполняются в пространстве основных, «хороших» функций. Например, в классе функций  $C^\infty$ , которые при  $|x| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю вместе со своими производными любого порядка быстрее любой степени  $1/|x|$ . Таким образом, равенства в формулах понимаются как равенства соответствующих функционалов. В этом смысле обобщенную функцию можно рассматривать как ядро линейного интегрального оператора.

Например, основное свойство  $\delta$ -функции (10.1) для какой-либо функции  $f(x)$  записанное в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

следует понимать как::

$$\begin{aligned} (f(x) \delta(x), \varphi(x)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = f(0) \varphi(0) = \\ &= f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Поскольку все свойства в классе основных функций переносятся на исследуемые функции, в физике принято в записи формул опускать функции  $\varphi(x)$ , и оставлять только «нужные» функции  $f(x)$ , как это представлено в формуле (10.1а). Перечислим основные свойства  $\delta$ -функции. 1. При «сдвиге» аргумента  $\delta$ -функции имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

2.  $\delta$ -функции четная:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

3.  $\delta$ -функции однородная:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$



Свойства (10.17) – (10.19) легко доказываются заменой переменной под интегралом в определении (10.1). 4.  $\delta$ -функция от функции:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

где  $f(x_i) = 0, x_i$  – простые (некратные) корни. Это свойство легко доказывается разложением функции  $f(x)$  в ряд Тейлора до первого порядка в окрестностях нулей:  $f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \dots$  с учетом свойств

$$(10.18) \text{ и } (10.19). \\ 5. x\delta(x) = 0$$

6. Производная  $\delta$ -функции может быть записана только в интегральном соотношении:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx}(\delta(x)) dx = -f'(0)$$

Это свойство доказывается интегрированием по частям с учетом обращения в нуль на пределах интегрирования «хороших» функций. Свойство (10.21) обобщается на производную любого порядка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^n}{dx^n}(\delta(x)) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

7. Интегральное представление (фурье-образ)  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$$

Это свойство можно рассматривать как обратное преобразование Фурье для 1, поскольку из перечисленных выше свойств следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{ikx} dx = 1$$

8. Функционал, определяющий действие  $\delta$ -функции, можно представить интегралом по замкнутому контуру в комплексной плоскости:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z) \frac{dz}{z} = \varphi(0)$$

### математические преобразования

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \cos k_1 x \cos k x dx$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(k + k_1)x + \cos(k - k_1)x) dx = \\ = \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k_1)x} + e^{i(k-k_1)x} \right) dx = 2\pi (\delta(k + k_1) + \delta(k - k_1))$$

2. Вычислить  $\delta(\sin x)$ . Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента  $\delta$ -функции:  $x_n = \pi n$ , соответственно  $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$ . Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$  функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \cos k_1 x \cos kx \, dx$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(k + k_1)x + \cos(k - k_1)x) \, dx = \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k_1)x} + e^{i(k-k_1)x} \right) \, dx = 2\pi (\delta(k + k_1) + \delta(k - k_1)) \end{aligned}$$

2. Вычислить  $\delta(\sin x)$ . Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента  $\delta$ -функции:  $x_n = \pi n$ , соответственно  $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$ . Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$  функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Коэффициенты Фурье равны

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - 2\pi k) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi}$$

поэтому имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

4. Показать, что в смысле обобщенных функций справедлива формула:

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} = \delta(x)$$

Если точка  $x = 0 \notin [a, b]$ , по теореме Римана-Лебега

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} \varphi(x) \, dx = 0$$

Обходя точку  $x = 0$  в комплексной плоскости по контуру, показанному на рис. 10.1, получаем

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} \varphi(x) dx &= \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_{\pm}} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} dx = \\ &= \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{dx}{x} = \varphi(0) \end{aligned}$$

Что соответствует основному свойству  $\delta$ -функции.

Упражнения 1. Показать, что

$$\delta[(x - x_1)(x - x_2)] = \frac{1}{|x_1 - x_2|} (\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2))$$

2. Получить полезную формулу:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x - a) + \delta(x + a))$$

3. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \sin k_1 x \sin kx \, dx$$

4. Используя теорему Римана-Лебега, показать, что в смысле обобщенных функций

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \pm i0} = 0$$

5. Показать, что

$$x^n \delta^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

6. Показать, что при  $k \geq n$  справедлива формула:

$$x^n \delta^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}(x)$$

Указание. Воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{d^k}{dx^k} (f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

где

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned} x \delta^{(k)}(x) + k \delta^{(k-1)}(x) &= 0 \quad \text{при} \quad n = 1 \\ x^n \delta^{(n)}(x) &= (-1)^n n! \delta(x) \quad \text{при} \quad n = k \end{aligned}$$

### интересные вопросы про дельта-функцию

там нам загадок полно задают, их сюда и буду писать в параграфах. особенно обсудим вопросы про ошибочное представление про нее.

### схожие функции

они часто используются для разных свойства дельта-функции, так что обсудим и их. мб ранее уже использовались.

## О функции Хевисайда

(потом напишу, дополнение все-таки)

**Суть** Функция Хевисайда или функция включения  $\theta(x)$  определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Производная  $\theta$ -функции есть  $\delta$ -функция. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx$$

Заметим, что производная любой функции, имеющей разрыв первого рода, выражается через  $\delta$ -функцию.

Функцию Хевисайда можно представить как предел  $\varepsilon$ -последовательности:

$$\theta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Функцию  $\operatorname{sign} x = |x|/x$  можно выразить через функцию Хевисайда:

$$\operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Упражнения 1. Показать, что

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign} x$$

2. Определить производную функции  $\operatorname{sign} x$ . 3. Доказать, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (-i)N\theta(x)e^{iNx} = \delta(x)$$

Указание. Проинтегрировать по частям и воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Обобщенная функция  $\wp_x^{\frac{1}{x}}$  определяется через функционал следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

С произвольной функцией  $f(x)$  такой интеграл называется интегралом в смысле главного значения и обозначается как

$$V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \equiv \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

Часто в физике возникают следующие ситуации, когда необходимо использовать обобщенную функцию  $\wp_x^{\frac{1}{x}}$ , аппроксимируемую функциями:

$$\begin{aligned} \wp_x^{\frac{1}{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{|k|} e^{-|k|\varepsilon} e^{ikx} dk \\ \wp_x^{\frac{1}{x}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos Nx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \sin kx dk \end{aligned}$$

Действительно, в случае (10.31) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-x} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_x^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) + \\ &+ \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow +0} \int_{-x}^x \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \left( \wp_x^{\frac{1}{x}}, \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

В случае (10.32) справедливость представления доказывается аналогично, но следует дополнительно воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Функционал (10.30) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости  $z$  по контуру  $C_+$  или  $C_-$ , обходящему точку  $x = 0$  по полуокружности радиуса  $\varepsilon \rightarrow 0$  соответственно сверху или снизу (рис. 10.2) и вычитания или добавления полювычета  $i\pi \varphi(0)$ :

$$\left( \wp \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_+} \frac{\varphi(z)}{z} dz \mp i\pi \varphi(0)$$

От интеграла по контуру в комплексной плоскости (10.33) можно перейти к интегралу по действительной оси, записав его в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_{\pm}} \frac{\varphi(z)}{z} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x \mp i\varepsilon} = \left( \frac{1}{x \mp i0}, \varphi(x) \right) = \\ &= \left( \wp \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) \pm i\pi (\delta(x), \varphi(x)) \end{aligned}$$

Полученная формула (10.34) позволяет ввести еще две новые обобщенные функции Сохоцкого:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \wp \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x)$$

Формулы Сохоцкого могут быть также легко получены в предельном переходе для  $\varepsilon$ -последовательности X:

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{x^2}{x^2 + \varepsilon^2} \mp i\pi \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

Пример Показать, что обобщенная функция  $\wp \frac{1}{x}$  есть производная от  $\ln|x|$ . Действительно, запишем функционал:

$$\left( \frac{d \ln|x|}{dx}, \varphi(x) \right) = (\ln|x|, \varphi'(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} (\ln|x|) \varphi'(x) dx$$

Выделяя теперь  $\varepsilon$ -окрестность 0 и разбивая интеграл на три, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \ln|x| \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x| \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left( \wp \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

Упражнение Показать, что фурье-образ функции  $1/x$  можно получить из представления (10.32), и он равен

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-ikx} dx = -i\pi \operatorname{sign} k$$

С обобщенными функциями Сохоцкого можно связать еще две функции, имеющие большое применение в физике:

$$\delta_{\pm}(x) = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{1}{x \pm i0}$$

Обобщенные функции (10.36) получаются в  $\varepsilon$ -последовательностях

$$\delta_{\pm}(x) = \pm \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon k \pm i k x} dk$$

Функции  $\delta_{\pm}$  обладают полезными свойствами:

$$\begin{aligned} \delta_+(x) + \delta_-(x) &= \delta(x) \\ \delta_+(x) - \delta_-(x) &= \frac{i}{\pi} \wp \frac{1}{x} \end{aligned}$$

**свойства обобщенных функций** Умножение обобщенных функций может быть определено либо как предел произведения  $\varepsilon$ -представлений, либо как функционал. Во втором случае, если  $f$  и  $g$  - две обобщенные функции, то произведение их определяется как:

$$(g \cdot f, \varphi) = (g, f\varphi)$$

видно, что одна из функций (в данном случае  $f$ ) должна быть достаточно «хорошей», чтобы имеющаяся сингулярность функции  $g$  не превысила функционал, так и вычисляя производную какого-либо  $\varepsilon$ -представления Трехмерная функция  $\delta(\mathbf{r})$  определяется как

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$$

где интегрирование совершается по всему  $\mathbf{k}$ -пространству. Соответственно, основное свойство (10.1) теперь принимает вид

$$\int d^3\mathbf{r} \delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = f(0)$$

где интегрирование выполняется по некоторой области, включающей точку  $\mathbf{r} = 0$ .

Если функция  $f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = f(r)$  и при этом регулярна в нуле, свойство (10.41) можно переписать как

$$\int \delta(\mathbf{r}) f(r) d^3\mathbf{r} = \int f(r) r^2 dr \int \delta(\mathbf{r}) d\Omega = f(0)$$

Выражение (10.42) позволяет ввести «радиальную» функцию  $\delta(r)$  :

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta'(r)}{r}$$

$\delta$ -функции в нуле. При этом данная операция вполне допустима, поскольку элемент объема содержит  $r^2$ . Множитель  $1/2\pi$  учитывает что интегрирование делить как  $1/z$ , но с особым выбором пути интегрирования (контур)

для каждой функции.

Действительно, это свойство вытекает из формул...

(10.24) и (10.33) и рис. 10.1 и 10.2. Заметим, что для  $\delta$ -функции выбирается замкнутый контур, обходящий точку 0. Контур интегрирования, дающие различные обобщенные функции из функции  $1/z$ , представлены на общем рис. 10.3.

1. Произведение двух функций  $\wp \frac{1}{r}$  не определено. Действительно, согласно (10.39) можем записать:

$$\begin{aligned} \wp \frac{1}{x} \cdot \wp \frac{1}{x} &= \left( \wp \frac{1}{x}, \wp \frac{1}{x} \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{M}{\varepsilon} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Вместе с тем определена производная от функции  $\wp$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) &= - \left( \wp \frac{1}{x}, \varphi'(x) \right) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(x) + \varphi'(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Если воспользоваться  $\varepsilon$ -представлением, получаем

$$\left( \frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x} \right)_{\varepsilon} = \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = -\frac{x^2 - \varepsilon^2}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}$$

3. Покажем, что

$$\wp \frac{1}{x} \cdot \delta(x) = -\frac{1}{2} \delta'(x)$$

Действительно, воспользуемся  $\varepsilon$ -представлениями обеих функций:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{\left(\wp \frac{1}{x}\right)_\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \delta'_\varepsilon(x) = -\frac{2\varepsilon x}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

результат (10.44). 4. Можно так же показать, что не определено произведение двух  $\delta$ -функций, имеющих одинаковый аргумент. 5. Так же как и во втором примере, используя  $\varepsilon$ -представления можно показать, что

$$\left(\wp \frac{1}{x} + \pi \delta(x)\right) \left(\wp \frac{1}{x} - \pi \delta(x)\right) = -\frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x}$$

6. Определено произведение двух функций Сохоцкого:

$$\frac{1}{x - i0} \cdot \frac{1}{x - i0} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{x - i0} = -i\pi \delta'(x) - \frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x}$$

Упражнения 1. Показать, что в смысле обобщенных функций

$$\int_0^\infty \sin k_1 x \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k + k_1} - \frac{1}{k - k_1} \right)$$

2. Показать, что при  $a \neq b$  произведение

$$\delta(x - a)\delta(x - b) = 0$$

3. Доказать формулу:

$$\delta(ax + by)\delta(cx + dy) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \delta(x)\delta(y)$$

### С.3.2 бесселя

### С.3.3 полиномы эрмита

,

## References

- [1] Колоколов, И. В., Лебедев, В. В.: *Избранные главы математической физики*. 2021.
- [2] Осин, А. : *Семинары по УМФ*. 2021. <https://www.youtube.com/@alexandrosin910>.
- [3] Владимиров, В. С., Вашарин, А. А., Каримова, Х.Х., Михайлов, В.П., Сидоров, Ю.В., Шабунин, М.И.: *Сборник задач по уравнениям математической физики*. 2001.
- [4] Самарова, С. С.: *Семинары по математической физике в мфти*. 2021.
- [5] Константинов, Р. В.: *Лекции по математической физике*. 2021.
- [6] Уроев, В.М.: *Уравнения математической физики*. Москва: ИФ Яуза, 1998.
- [7] Олейник, О.А.: *Лекции об уравнениях с частными производными*. Москва: БИНОМ, 2005.
- [8] Тахтаджян Л. А.: *Квантовая механика для математиков*. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
- [9] Левитов Л. С., Шитов А. В.: *Функция Грина. Задачи и Решения*.
- [10] Катанаев, М. О.: *Геометрические методы в математической физике: E-print*. arXiv preprint arXiv:1311.0733, 2016.
- [11] Мышкис, А.: *Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы*. Litres, 2018.
- [12] Aranson, I. S., Kramer, L.: *The world of the complex ginzburg-landau equation*. Reviews of Modern Physics, 74(1):99–143, February 2002, ISSN 1539-0756. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.74.99>.