Special Functions

Yury Holubeu *

12 ноября 2023 г.

This draft is not aimed for distribution.
....
Goals:
1) Просто быстро собрать их и все!

Содержание

*yura.winter@gmail.com

Часть I
Предисловие

Мотивация изучать спецфункции

Именно этот уровень в приложениях требуется (раскрою потом мысль)

Именно их используют в прикладных задачах, так что важно на этом уровне быть.

Так что скорее всего большое время именно эту запись я и буду делать, примерно столько же, сколько и запись по матану. По матану большая с теорией и общими основами, а тут - чисто для применений заготовки. И их тоже много, на 1000 страниц может быть запись растянется. Это как раз и прикладной уровень, когда на самом деле что угодно можешь, а не только тренировочное. По сути именно к таким темам мы и тренируемся в матане.

Часть II
Основные свойства типичных спецфункций

1 Суть основных функций

(вот и буду постепенно вписывать все.)

Часть III
Типичные спецфункции

1.1 Функции Бесселя

Суть Функциями Бесселя ν-го порядка называются регулярные решения цилиндрического дифференциального уравнения:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0.$$

Дадим некоторые явные выражения для функций Бесселя: 1) разложение в ряд:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2/2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)};$$

2) вырожденная гипергеометрическая функция:

$$J_\nu(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu+1, 2\mathrm{i}z\right).$$

Сферическая функция Бесселя

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad l = 0, 1, \dots$$

выражается через элементарные, например,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x.$$

Функция Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ является регулярным решением уравнения

$$y'' - xy = 0$$

и выражается через функции Бесселя порядков $\pm\frac{1}{3}$:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\left[I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)\right]; \quad \mathrm{Ai}(-x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\left[J_{-1/3}(\zeta) + J_{1/3}(\zeta)\right],$$

где $\quad I_\nu(\zeta) = \mathrm{i}^{-\nu} J_\nu(\mathrm{i}\zeta); \quad \zeta = \frac{2}{3}x^{3/2}.$

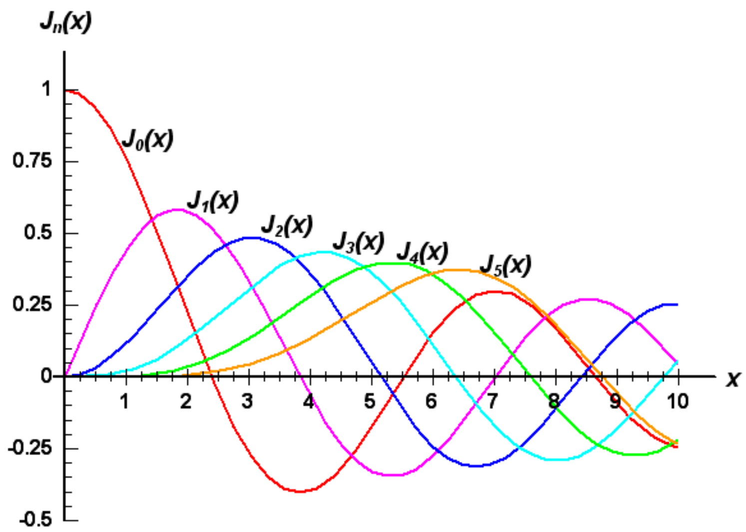


Рис. 1

Теория Решение волнового уравнения можно разложить по плоским волнам, зави си мость поля от координат в плоской волне определяется фактором $\exp(i\boldsymbol{kr})$, где $\boldsymbol{k}-$ волновой вектор, а $\boldsymbol{r}-$ радиус-вектор. В двумерном случае $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Часто удобным бывает решать задачи в полярной системе координат r, φ, где r - расстояние от начала отсчета до точки наблюдения, а φ - полярный угол. При соответствующем выборе начала отсчета полярного угла φ скалярное произведение $\boldsymbol{kr} = rk\sin\varphi$. Функции Бесселя являются коэффициентами р азложения $\exp(i\boldsymbol{kr})$ в ряд Фурье по угловым гармоникам:

$$\exp(iz\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z)\exp(in\varphi)$$

где $z = kr$. Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 3.8. Добавляя π к φ, находим

$$\exp(-iz\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n J_n(z)\exp(in\varphi)$$

Сравнивая это выражение с прямым разложением

$$\exp(-iz\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z)\exp(in\varphi)$$

мы заключаем, что $J_{-n} = (-1)^n J_n$. Подставляя в выражение (3.20)$t = e^{i\varphi}$, находим ряд Лорана по t

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n$$

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n$$

Здесь t может быть произвольным комплексным числом. Дифференцируем соотношение (3.21) по z, что дает

$$\frac{1}{2}(t - 1/t)\exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z)t^n$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях t, находим

$$\frac{d}{dz}J_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right].$$

Дифференцируем соотношение (3.21) по t, что дает

$$\frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nJ_n(z)t^{n-1}.$$

Подставляя здесь в место экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях t, находим

$$\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z).$$

Комбинируя (3.22) и (3.23), находим следующие рекуррентные соотношения $\frac{d}{dz}(z^n J_n) = z^n J_{n-1}$, $J_n' + \frac{n}{z} J_n = J_{n-1}$, $\frac{d}{dz}\frac{J_n}{z^n} = -\frac{J_{n+1}}{z^n}$, $J_n' - \frac{n}{z} J_n = -J_{n+1}$. В частности $dJ_0/dz = -J_1$. Рекуррентное соотношение (3.24) можно переписать в следующем виде

$$z^{-2n+1}\frac{d}{dz}\left[z^n J_n(z)\right] = z^{-n+1} J_{n-1}(z).$$

Дифференцируя это соотношение по z и используя для преобразования правой части рекуррентное соотношение (3.25), находим замкнутое уравнение на J_n

$$\frac{d^2}{dz^2}J_n + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2}J_n = 0,$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма- Лиувилля (2.6). Рассмотрим случай малых $z, z \ll 1$. В этом случае третьим слагаемым в уравнении (3.26) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2}g + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}g - \frac{n^2}{z^2}g = 0,$$

которое имеет степенные решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$. Обратим внимание на причину, по которой уравнение (3.27) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании $z \to Az$, где $A-$ произвольный фактор, все три слагаемых в уравнении (3.27) преобр азуются одинаковым образом, то есть ур авнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (3.27), которые при преобразовании $z \to Az$ переходят в себя с точностью до множителя, именно этим свойством обладают степенные решения. Поскольку уравнение Бесселя (3.26) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (3.27), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$ определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (3.26) при малых z. Обр атим внимание на то, что при $n > 0$ решение g_2 сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при

$z \to 0$. Поэтому, если функция g регулярна в нуле, то ее поведение определяется g_1, то есть $g \propto z^n$ при малых z. Это поведение с точностью до множителя определяет решение уравнения Бесселя (3.26). Такими решениями являются функции Бесселя $J_n(z)$, первый член разложения которой по z определяется (3.29).

Заметим, что при $n = 0$ оба решения уравнения (3.27), $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$, совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (3.27), в котором надо положить $n = 0$. Это уравнение является уравнением первого порядка для dg/dz, решением которого, очевидно, является $dg/dz = C_1/z$, где C_1- произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение $g = C_2 + C_1 \ln z$, где C_2- вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при $n = 0$ имеется два решения уравнения (3.27), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно. Решение уравнения (3.27) при $n = 0$, которое является регулярным в нуле, пропорционально $J_0(z)$.

Выписывая обратное преобразование Фурье к (3.20), находим следующее представление функций Бесселя

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz\sin\theta - in\theta) \\ &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi} d\theta \cos(z\sin\theta - n\theta) \end{aligned}$$

которое называется представлением Парсеваля. При получении второго равен ства в (3.28) мы воспользовались тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю из-за того, что мнимая часть $\exp(iz\sin\theta - in\theta)$ антисимметрична по θ, и что косинус является четной функцией. Отметим, что представление (3.28) автоматически приводит к соотношению $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Задача 3.3.1. Доказать правила дифференцирования (3.22), исходя из соотношения (3.28).

Задача 3.3.2. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z)$$

Задача 3.3.3. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z)$$

Задача 3.3.4. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}.$$

Раскладывая правую часть соотношения (3.28) по z, мы заключаем что при $n > 0$ первый член разложения $J_n(z)$ по z равен

$$\frac{z^n}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i \sin\theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!},$$

в соответствии с анализом, проведенным при малых z. Следующие члены разложения функции Бесселя по z можно найти из того же выражения (3.28). В результате мы получаем следующий ряд Тейлора для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$

Отметим, что это ряд по целым степеням z, который содержит только четные или только нечетные степени z, в зависимости от четности n.

Задача 3.3.5. Построить разложение в ряд (3.30), исходя из соотношения (3.28).

Ряд (3.30) абсолютно сходится при всех действительных z, поскольку отношение коэффициентов при степенях $(z/2)^{n+2m+2}$ и $(z/2)^{n+2m}$ равно $-[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]^{-1}$, то есть стремится к нулю с ростом m. Таким образом, ряд (3.30) определяет функцию Бесселя при всех действительных z. Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением $J_n(z)$ с действительных z. Поскольку ряд (3.30) является абсолютно сходящимся, то функция $J_n(z)$ не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного z. В то же время бесконечность является существенной особой точкой функции Бесселя $J_n(z)$.

Соотношение (3.28) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях z. В этом случае работает приближение стационарной фазы, смотри раздел 3.7.2. Положение точки стационарной фазы получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по θ в выражении (3.28), что дает $z\cos\theta_0 = n$. Таким образом, в силу большого значения z стационарная фаза близка к $\pi/2$ (что предполагает неравенство $z \gg n$). Используя выражение для приближения стационарной фазы (3.102), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, $J_n(z)$ осциллирует с амплитудой, которая стремится к нулю при $z \to \infty$.

Задача 3.3.6. Найти асимптотическое выражение Функции Бесселя при болвших по абсолютной величине отрицательных z.

В силу уравнения (3.26) функция $J_n(qx)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}J_n(qx) = -q^2 J_n(qx),$$
$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2}.$$

Таким образом, функция $J_n(qx)$ является собственной функцией дифференциального оператора (3.33), который относится к типу операторов Штурма-Лиувилля (2.6), с собственным значением $-q^2$. условие ортогональности (2.68) с весом $\rho = x$ для разных q. В данном случае речь идет о непрерывном спектре (q может принимать непрерывный ряд значений), поэтому функции должны быть нормированы на δ-функцию. Соответствующее соотношение имеет вид

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) = k^{-1}\delta(k-q),$$

где $k > 0, q > 0$. Приведем доказательство соотношения (3.34). Вклад значениях аргумента, поэтому в интеграле (3.34) мы можем использовать асимптотическое выражение (3.31). В результате находим

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) \to \int dx \frac{2}{\pi\sqrt{kq}} \cos(kx)\cos(qx).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(kz)\cos(qz) = \pi\delta(k-q),$$

где q и k считаются положительными, и учитывая, что интеграл по x идет только по положительным значениям, мы и приходим к соотношению (3.34).

Задача 3.3.7. Доказать соотношение (3.34), исходя из представления (3.20).

Соотношение (3.34) позволяет сформулировать разложение функций, заданных при положительных значениях аргумента, в интеграл по функциям Бесселя, аналогичное разложению в интеграл Фурье. Прямое и обратное преобразования функции $f(x)$ имеют вид

$$\breve{f}(q) = \int_0^\infty dx x J_n(qx) f(x),$$
$$f(x) = \int_0^\infty dq q J_n(qx) \breve{f}(q).$$

Выбор n в этом соотношении диктуется условиями решаемой задачи.

Задача 3.3.8. Разложить в интеграл (3.36) с $n = 0$ функцию $f(x) = \exp(-p^2x^2)$.

Изучим разложение по функциям Бесселя на конечном интервале. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных соотношений. Из (3.32, 3.33) следует

$$\begin{aligned} J_n(qx)\tfrac{d^2}{dx^2}J_n(kx) + J_n(qx)\tfrac{1}{x}\tfrac{d}{dx}J_n(kx) \\ -J_n(kx)\tfrac{d^2}{dx^2}J_n(qx) - J_n(kx)\tfrac{1}{x}\tfrac{d}{dx}J_n(qx) \\ = (q^2-k^2)\, J_n(qx)J_n(kx). \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение с весом x на интервале $0 < x < z$, находим

$$
\begin{aligned}
&J_n(qz)kzJ_n'(kz) - J_n(kz)qzJ_n'(qz) \\
&= \left(q^2 - k^2\right) \int_0^z dxxJ_n(qx)J_n(kx)
\end{aligned}
$$

Используя рекуррентное соотношение (3.25), находим

$$
\begin{aligned}
&\int_0^z dxxJ_n(qx)J_n(kx) \\
&= \frac{J_n(kz)qzJ_{n+1}(qz) - J_n(qz)kzJ_{n+1}(kz)}{q^2 - k^2}.
\end{aligned}
$$

Устремляя здесь k к q и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, находим

$$
\int_0^z dxx\left[J_n(kx)\right]^2 = \frac{z^2}{2}\left(J_{n+1}^2 + J_n^2\right) - \frac{nz}{k}J_{n+1}J_n,
$$

где аргументы функций Бесселя равны kz, и мы и спользовали рекуррентные соотношения $(3.24, 3.25)$

Р ассмотрим теперь задачу на собственные значения (3.32) на интервале $0 < x < 1$ на классе функций, обращающихся в ноль на конце интервала, при $x = 1$. Это условие приводит к дискретному набору собственных чисел $q = \gamma_k$, для которых $J_n\left(\gamma_k\right) = 0$. Набор γ_k зависит от индекса функции Бесселя n. Величины γ_k неограниченно растут с увеличением номера k.

Задача 3.3.9. Найти значения γ_k для болвших значений этого параметра. В силу общих свой ств задач на собственные значен ия, смотри раздел 2.4.1, формула (2.68), находи м свойство ортогональности

$$
\int_0^1 dxxJ_n\left(\gamma_k x\right)J_n\left(\gamma_j x\right) = 0
$$

если $\gamma_k \neq \gamma_j$. Действительно, левая часть соотношения (3.32) представляет собой оператор Штурма-Ли увилля (2.6) с $Q = 1/x$, поэтому в силу (2.67) находим $\rho = x$. Подставляя в соотношении (3.38) $z = 1$, получаем

$$
\int_0^1 dxx\left[J_n\left(\gamma_k x\right)\right]^2 = \frac{1}{2}J_{n+1}^2\left(\gamma_k\right).
$$

Задача 3.3.10. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.39).

Соотношения $(3.39, 3.40)$ позволяют сформулировать правила разложения функции $f(x)$, заданной на интервале $0 < x < 1$, по набору функций $J_n\left(\gamma_k x\right)$:

$$
\begin{gathered}
f(x) = \sum_k f_k J_n\left(\gamma_k x\right), \\
f_k = \frac{2}{J_{n+1}^2\left(\gamma_k\right)} \int dxxf(x)J_n\left(\gamma_k x\right).
\end{gathered}
$$

Это разложение является аналогом разложения в ряд Фурье.

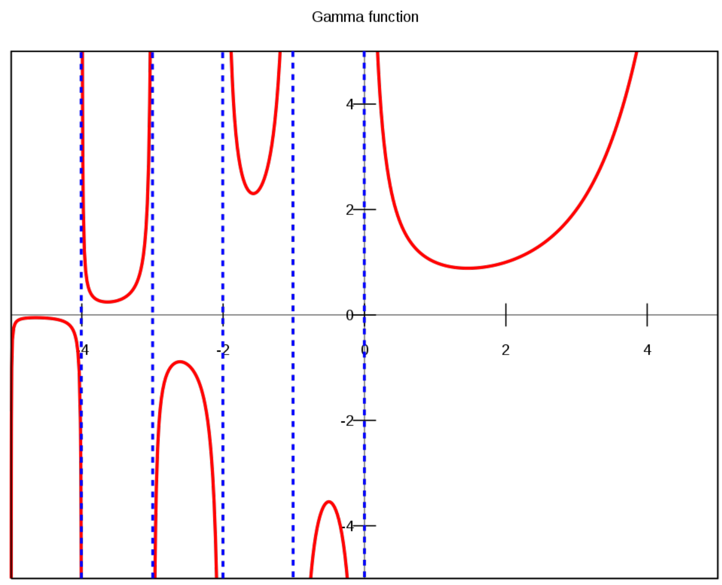
Задача 3.3.11. Разлоюить функцию $J_1(x) - xJ_1(1)$ на интервале $(0, 1)$ в ряд (3.41) по $J_1\left(\gamma_k x\right)$.

1.2 Гамма-функция (!!??!?)

(вроде такого раздела должно хватить, не хватит - поменяю структуру.)

1.2.1 Свойства

Суть График имеет вид:



Важно понимать, что гамма функции полюса в целых отрицательных числах и нуле.

Интегральное определение Если вещественная часть комплексного числа z положительна, то гамма-функция определяется через абсолютно сходящийся интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

Это определение было получено Лежандром из оригинального определения Эйлера (1730 г.)

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx$$

через замену переменной $x = e^{-t}$, и на сегодняшний день именно определение Лежандра известно как классическое определение Гамма-функции. Интегрируя по частям классическое определение, легко видеть, что $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Для приближённого вычисления значений гамма-фуункции удобнее третья формула, также полученная из определения Эйлера путём применения равенства $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ и замены переменной $x = y^2$:

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z+1}}{z} \int_0^1 y(-\ln y)^z dy.$$

Интеграл в этой формуле сходится при $\mathrm{Re}(z) > -1$, хотя она обычно используется для положительных вещественных значений аргумента (предпочтительные значения - вблизи 1). В случае вещественного аргумента $z > 0$ подынтегральная функция имеет единственную особую точку - устранимый разрыв при $y = 0$, и если доопределить её в этой точке значением 0 , она станет непрерывной на всём отрезке $[0; 1]$. Таким образом, интеграл является собственным, что упрощает численное интегрирование. Существует непосредственное аналитическое продолжение исходной формулы на всю комплексную плоскость, кроме целых чисел, называемое интегралом Римана - Ханкеля:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int_L t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}.$$

Определение по Гауссу

Оно верно для всех комплексных z, за исключением 0 и отрицательных целых чисел

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Определение по Эйлеру

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Определение по Вейерштрассу

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

где $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0,57722$ - постоянная Эйлера - Маскерони[1].

Примечание: иногда используется альтернативная, так называемая пи-функция, которая является обобщением факториала и связана с гамма-функцией соотношением $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$. Именно этой функцией (а не Γ-функцией) пользовались Гаусс, Риман, и многие другие немецкие математики XIX века.

Если $z = n$ - натуральное число, то

$$\Gamma(n+1) = n\ ! \ .$$

Основное свойство гамма-функции - это её рекуррентное уравнение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

которое при фиксированном начальном условии единственным образом определяет логарифмически выпуклое решение.

Для гамма-функции справедлива формула дополнения Эйлера:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Также справедлива и формула умножения Гаусса:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2} - nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(nz),$$

Частный случай этой формулы при n = 2 был получен Лежандром:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

Гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости. $\Gamma(z)$ является мероморфной на комплексной плоскости и имеющей простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$ [1]

Гамма-функция имеет полюс первого порядка в $z = -n$ для любого натурального n и нуля; вычет в этой точке задаётся так:

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Полезное свойство, которое может быть получено из предельного определения:

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z}).$$

Гамма-функция дифференцируема бесконечное число раз, и $\Gamma'(x) = \psi(x)\Gamma(x)$, где $\psi(x)$, часто называют «пси-функцией» или дигамма-суункцией. Гамма-функция и бета-функция связаны следующим соотношением:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

О применениях (предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

Логарифм Гамма-функции По целому ряду причин наряду с гамма-функцией часто рассматривают и логарифм гамма-функции — первообразную дигамма-функции. Для него справедливы следующие интегральные представления:

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \int_0^\infty \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-xz}}{x}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x/z)}{e^{2\pi x} - 1}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

данные Жаком Бине в 1839-м году (эти формулы ещё часто называют первой и второй формулой Бине соответственно для логарифма гамма-функции) [3]. Несколько отличные интегральные формулы для логарисрма гамма-функции также появлялись в работах Мальмстена, Лерха и некоторых других. Так, Мальмстен получил формулу, схожую с первой формулой Бине e[3]

$$\ln\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[z - 1 - \frac{1 - e^{-(z-1)x}}{1 - e^{-x}}\right]\frac{e^{-x}}{x}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

а Лерх показывает, что все интегралы вида

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\pi x}\cos\varphi - 1}{e^{4\pi x} - 2e^{2\pi x}\cos\varphi + 1}\operatorname{arctg}\frac{u}{x}dx, \quad 0 < u \leqslant 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi u$$

также сводятся к логарифмам гамма-функции. В частности, формула, аналогичная второй формуле Бине с «сопряжённым» знаменателем, имеет следующий вид:

$$\ln\Gamma(z) = -\left(z - \frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1 - \ln\left(z - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{1}{2}\ln 2\pi - 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left[x/\left(z - \frac{1}{2}\right)\right]}{e^{2\pi x} + 1}dx, \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$$

(см. упр. 40 В[4]) Кроме того, Мальмстен также получил ряд интегральных формул для логарифма гамма-функции, содержащих гиперболические функции с логарифмом в подынтегральном выражении (или, что то же, логарифм логарифма с полиномами). В частности,

$$\ln\Gamma(z) = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\ln\sin\pi z - \frac{2z-1}{2}\ln 2\pi - \frac{\sin 2\pi z}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch} x - \cos 2\pi z}dx, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$$

О решении задач на Гамма-функцию (!??!???!?) (предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

Вычисление интегралов Важным применением Гамма сункции служит сведение к ней интегралов следующего вида, где $,\alpha,\beta$ - постоянные параметры

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp\left(-ax^\beta\right)dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Доказательство После вынесения параметра:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp\left(-ax^\beta\right)dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty \left(a^{1/\beta}x\right)^\alpha \exp\left[-\left(a^{1/\beta}x\right)^\beta\right] d\left(a^{1/\beta}x\right)$$

Внесения дифференциала:

$$a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty \kappa^\alpha \exp\left(-\kappa^\beta\right)d\kappa = \frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \kappa^{\alpha+1-\beta} \exp\left(-\kappa^\beta\right)d\kappa^\beta$$

И замены переменной:

$$\frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \varkappa^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp(-\varkappa)d\varkappa = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

В частности, для широко встречающихся в приложениях физики интегралов Гауссова типа:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp\left(-x^2/a^2\right)dx = a^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

И Эйлеровых интегралов:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x/a)dx = a^{\alpha+1} \cdot \Gamma(\alpha+1)$$

1.2.2 Свойства по ПТФ

Правая часть соотношения (3.3) определена и для z с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на эту область переменной z. Контурный интеграл в (3.3) не имеет особенностей в плоскости z. Следовательно, особенности функции $\Gamma(z)$ определяются разностью $1-\exp(2\pi iz)$, которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательньгх) z. При положительных целых z в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталя. В любом случае, $\Gamma(z)$ не имеет особенностей при целых положительных z, в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательньх z контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках $\Gamma(z)$ имеет простые полюса.

Задача 3.1.2. Найти контурное представление Г(z) в терминах $(-t)^{z-1}e^{-t}$.

Задача 3.1.3. Показать, что

$$\int_0^\infty duu^{z-1}\cos u = \cos(\pi z/2)\Gamma(z)$$
$$\int_0^\infty duu^{z-1}\sin u = \sin(\pi z/2)\Gamma(z)$$

Установить область применимости этих выражений.

Найдем вычеты функции (z) в полюсах $z = 0, -1, -2, \ldots$. При $z = -n$ ($n-$ целое неотрицательное) контурный интеграл в (3.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\text{res } \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}.$$

График зависи мости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 3.2. В точках $x = -n$ функция Γ стремится к бесконечности. Можно найти асимптотическое выражение Гамма-функции $\Gamma(z)$ при больших положительных значениях z, воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 3.7.2. Для этого в интеграле (3.1) произведем замену $t \to tz$, которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (3.98). Стоящая в экспоненте функция $\ln t - t$ достигает максимума в точке $t = 1$. Используя теперь приближение (3.99), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z).$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших n) выражение для факториала $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что асимптотика (3.7) справедлива и для комплексных z при условии большого положительного значения действительной части z.

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

где действительные части α и β предполагаются положительными. Для доказатель ства ооотношения (3.8) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по с весом e^{-s}, мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных $s = x + y$ сводит правую часть к произведению интегралов по x по y, которые дают произведение $(\alpha)\Gamma(\beta)$. Таким образом, мы приходим к соотношению (3.8).

Задача 3.1.4. Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi$$

Задача 3.1.5. Доказать соотноиение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z).$$

Вьведем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Для этого запишем левую часть (3.9), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-8}.$$

Произведя здесь замену $s = t\zeta$ и взяв интеграл по t мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Чтобы взять стоящий здесь интеграл по ζ следует преобразовать его в контурный интеграл

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{1}{1-\exp(2\pi i z)} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}$$

где контур C изображен на рисунке 3.1. После этого контур можно дефор миров ать, загибая его 'усы' в левую полуплоскость. После этого интеграл сведется к вычету в точке $\zeta = -1$, что и дает выражение, стоящее в правой части (3.9).

Строго говоря, приведенные рассуж дения спр аведливы для $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$. Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные z. В частности, соотношение (3.9) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (3.6). Как следует из ооотношения (3.9), $\Gamma^{-1}(z)$ не имеет полю сов в плоскости z, то есть Γ(z) нигде не обращается в ноль.

Задача 3.1.6. Получить интегральное представление

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t,$$

zде контур C^* изображен ма рисунке 3.3.

Задача 3.1.7. Вычислить иятеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

Задача 3.1.8. Найтu $|\Gamma(1/2+ix)|$, де x действительное число.

1.2.3 Применения Гамма функции в КТП

(тут много всего может быть, очень сильно применяется.)

1.2.4 Бета-функция

Суть

1.3 Гипергеометрическая функция (!??!!?)

Суть В общем виде гипергеометрическая функция может зависеть от цифр p, q и многих параметров и имеет вид:

$$
{}_pF_q\left(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z\right) = 1 + \frac{a_1 \ldots a_p}{b_1 \ldots b_q} z + \frac{a_1\left(a_1+1\right) a_2\left(a_2+1\right) \ldots a_p\left(a_p+1\right)}{b_1\left(b_1+1\right) b_2\left(b_2+1\right) \cdots b_q\left(b_q+1\right)} \frac{z^2}{2} + \cdots = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a_1\right)^{(n)} \ldots \left(a_p\right)^{(n)}}{\left(b_1\right)^{(n)} \ldots \left(b_p\right)^{(n)}} \frac{z^n}{n!}
$$

Частные важные случаи это ${}_2F_1$ и ${}_1F_1$

Поговорим про ${}_2F_1$. Альтернативно её можно определить как регулярное в нуле решение следующего дифференциального уравнения:

$$
z(1-z)f''(z) + (c - (a+b+1)z)f'(z) - abf(z) = 0, \quad f(0) = 1
$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

(место убедиться в эквивалентности определений)

Можно убедиться, что второе линейно-независимое решение этого уравнения тоже можно выразить через гипергеометрическую функцию. Общее решение имеет следующий вид (при $c \neq 1$)

$$
f(z) = C_{12}F_1(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c}{}_2F_1(b-c+1, a-c+1; 2-c; z)
$$

К уравнению такого вида можно свести очень большой класс дифференциальных уравнений. В действительности, имеется классификация линейных дифференциальных уравнений с дробно-рациональными коэффициентами по их особенностям в комплексной плоскости (особенностями уравнения, записанного в канонической форме $f^{(n)}(z)+p_1(z)f^{(n-1)}(z)+\cdots+p_n(z)f(z)=0$, называются особенности функций $p_k(z)-$ точки, где она обрапается в бесконечность)$-$ в частности, у гипергеометрической функции их ровно три: $z = \{0, 1, \infty\}$; и более или менее любое уравнение с тремя особенностями можно свести к гипергеометрическому виду.

Продолжая обсуждение свойств этой функции, отметим, что она не определена при целых отрицательных c (знаменатель зануляется). Радиус сходимости ряда равен единице, и в действительности у гипергеометрической функции в точке $z = 1$ имеется особенность. Единственное исключение из этого правила - это когда либо a, либо b - отрицательное целое число: в таком случае, ряд обраывается и превращается в полином конечной степени, имеющий, естественно, бесконечный радиус сходимости. Последнее замечание будет важно при поиске связанных состояний.

свойства гипергеометрической функции

$$
{}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{}_2F_1(a, b, a+b+1-c, 1-z) + \\
+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z)
$$

Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1(a; b; z)$ На прошлом семинаре обсуждался общий класс гипергеометрических функций pF_q; однако для приложений наиболее часто встречаются именно функции ${}_2F_1$ (обсуждённая на прошлом семинаре) и ${}_1F_1$. Она, естественно, тоже определяется через гипергеометрический ряд [5] :

$$ {}_1F_1(a;b;z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}\frac{z^n}{n!} $$

Кроме того, альтернативное её определение - через решение дифференциального уравнения следующего вида:

$$ zf''(z) + (b-z)f'(z) - af(z) = 0, \quad f(0) = 1 $$

тоже выражается через гипергеометрическую функцию [6] : $f^{(2)}(z) = z^{1-b}{}_1F_1(a-b+1;2-b;z)$. Как и с обычной гипергеометрической функцией, несложно видеть, что при целых отрицательных $b = -n$ функция не определена, а при целых отрицательных $a = -n$ она является конечным полиномом степени n.

В общем случае, отношение соседних коэффициентов разложения в ряд ведёт себя как $1/n$, поэтому радиус сходимости этого ряда - бесконечность (в отличии ${}_2F_1$, где радиус сходимости был единичным).

Асимптотическое поведение на бесконечности следующее:

$$ {}_1F_1(a;b;z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} z^{a-b} e^z, \quad z \gg 1 $$

Опять-таки, мы ранее говорили, что всякое уравнение с тремя особенностями сводится к гипергеометрическому виду так и всякое уравнение с коэффициентами, которые представляют собой линейные функции z приводится к Вырожденному гипергеометрическому виду.

Гипергеометрическое уравнение хз какое

запись других функций через гипергеометрическую (википедия)
$(1+x)^n = F(-n,b;b;-x)$
$x^n = F(-n,b;b;1-x)$
$\frac{1}{x}\ln(1+x) = F(1,1;2;-x)$
$\frac{1}{x}\arcsin(x) = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)$
$e^x = \lim_{n\to\infty} F\left(1,n;1;\frac{x}{n}\right)$
$\cos x = \lim_{a,b\to\infty} F\left(a,b;\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4ab}\right)$
$\cosh x = \lim_{a,b\to\infty} F\left(a,b;\frac{1}{2};\frac{x^2}{4ab}\right)$
Полный эллиптический интеграл первого рода:
$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)$

Теория ПТФ Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha,\gamma,z)$ (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$ z\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - z)\frac{du}{dz} - \alpha u = 0 $$

где α и $\gamma-$ произвольные параметры. Уравнение (3.81) переписывается в виде $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$, то есть мы снова сталкиваемся с оператором ШтурмаЛиувилля (2.6). Функция $\Phi(\alpha,\gamma,z)$ характеризуется тем, что она аналитична в точке $z = 0$ и имеет единичное значение в нуле: $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$.

Уравнение (3.81) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ в ряд Тейлора около точки $z = 0$. Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (3.81) с учетом условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$, мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых α ряд (3.82) обрывается и $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. При больших n отношение коэффициентов при степенях z^n и z^{n-1} в разложении (3.82) стремится к $1/n$. Поэтому ряд (3.82) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой $\Phi(\alpha, \gamma, z)$.

При неотрицательных целых α ряд (3.82) обрьгвается и вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\Phi\left(-n, 1/2, x^2\right)$$
$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x\Phi\left(-n, 3/2, x^2\right)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции .

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$. Второе независимое решение можно найти, заметив, что если u удовлетворяет уравнению (3.81), то $z^{\gamma-1}u$ также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$. Таким образом, общим решением уравнения (3.81) является

$$u = c_1\Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma}\Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z),$$

где c_1 и c_2 - произвольные константы. При $\gamma = 1$ оба члена в сумме (3.85) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением, в котором переменная z входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 3.7.1. Составляем функции P и Q в соответствии с выражениями (3.96): $P = \gamma t - \alpha, Q = t(t-1)$, и далее находим $Z = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}$. Таким образом, решение уравнения (3.81) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dte^{tz}t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к $z^{\gamma-1}u$, мы находим

$$u = z^{1-\gamma}\int_C dte^{tz}t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{-\alpha}.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования $tz \to t$, мы получаем

$$u = \int_C dte^{t}t^{\alpha-\gamma}(t-z)^{-\alpha}.$$

Контур C в интеграле (3.86) естественно выбрать так, чтобы он приходил из $-\infty$ и возвращался в $-\infty$ (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при $t = 0$ и $t = z$), тогда произведение $ZQ\exp(t)$ на концах этого контура будет равно нулю .

Интеграл (3.86) не имеет особенностей при $z = 0$, если контур интегрирования "охватывает"обе особенности. Выберем контур C, который приходит "снизу"из $-\infty$ огибает особенности "справа"и возвращался в $-\infty$ "сверху смотри рисунок 3.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией $\Phi(\alpha,\gamma,z)$. Мы считаем, что разрезы функций $t^{\alpha-\gamma}$ и $(t-z)^{-\alpha}$ идут в $-\infty$, а значения этих функций при положительном зн ачении переменной положительны. При $z = 0$ контур интегрирования превращается в C^*, изображенный на рисунке 3.3, при этом возникает обратная Гамма-функция, смотри (3.10). Вспоминая теперь, что $\Phi(\alpha,\gamma,0) = 1$, находим

$$\Phi(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i}\int_C dte^t t^{\alpha-\gamma}(t-z)^{-\alpha}.$$

При целых отрицательных значениях γ ряд (3.82) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у $\Gamma(\gamma)$ в соотношении (3.87). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (3.87) остается конечным и при целых отрицательных значениях γ. Поэтому $\Phi(\alpha,\gamma,z)$, как функция γ, имеет простые полюса при $\gamma = 0,-1,-2,\ldots$ Производя в равенстве (3.87) замену $t \to t+z$, мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha,\gamma,z) = e^z\Phi(\gamma-\alpha,\gamma,-z).$$

Дифференцирование по z соотношения (3.87) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений :

$$\frac{d}{dz}\Phi(\alpha,\gamma,z) = \frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\gamma+1,z),$$
$$\frac{z}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\gamma+1,z) =$$
$$\Phi(\alpha+1,\gamma,z) - \Phi(\alpha,\gamma,z),$$
$$\alpha\Phi(\alpha+1,\gamma+1,z) =$$
$$(\alpha-\gamma)\Phi(\alpha,\gamma+1,z) + \gamma\Phi(\alpha,\gamma,z).$$

При больших положительных z основной вклад в контурный интеграл в (3.87) определяется окрестностью особой точки $t = z$. Делая замену переменных $t = z + \zeta$ и пренебрегая зависимостью от ζ в $t^{\alpha-\gamma}$, мы находим

$$\Phi(\alpha,\gamma,z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i}e^z z^{\alpha-\gamma}\int_{C^*} d\zeta e^\zeta \zeta^{-\alpha},$$

где контур C^* изображен на рисунке 3.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha,\gamma,z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}$$

$$\Phi(\alpha,\gamma,z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}$$

Асимптотическое выражение (3.92) справедливо и в комплексной области для z с большой положительной действительной частью.

Задача 3.6.1. Доказать, что $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$.

Задача 3.6.2. Доказать соотношения $(3.89, 3.90, 3.91)$.

Задача 3.6.3. Найти поведение вырољденной гипергеометрической функкиии $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при $\gamma \quad \to 0$. Выполняется ли при малых γ соотношение $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$?

Задача 3.6.4. Найти значение $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при целых положительных α u $\gamma, \alpha \geq \gamma$.Проверить выполнение условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$. Указание: в этом случае интеграл (3.87) сводится к вычету в точке $t = z$.

Задача 3.6.5. Найти второе независимое решение вырољденного гипергеометрического уравнения (3.81) при $\gamma = 1$. Указание: в соответствии с (3.85) при произволвном γ второе независимое решение моэтно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma}\left[z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)\right]$$

здесь надо перейти к пределу $\gamma \to 1$.

1.4 Эллиптические функции Якоби (!?)

(целая книга про них написана, так что и я поизучаю, очень много задач на них!!!)

(так быстро не доделать)

P. F. Byrd. M. D. Friedman очень круто про них написали!!

Суть

1.4.1 Обозначения и определение (!?!?!?)

(уже на этом этапе могут быть проблемы)

Обозначение Определение как обратные к эллиптическим интегралам эллиптическому интегралу первого рода.

Пусть

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}}$$

По определению:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn} u &= \sin\varphi \\
\operatorname{cn} u &= \cos\varphi \\
\operatorname{dn} u &= \sqrt{1 - m\sin^2\varphi}
\end{aligned}$$

эллиптические функции являются функциями двух аргументов: амплитуды φ и параметра m. Оставшиеся девять эллиптических функций легко построить из трёх вышеприведённых. Это будет сделано ниже. Заметьте, что когда $\varphi = \pi/2$, то u равен четверти периода K.

Определение в терминах тета-функций Эллиптический модуль k равен $k = \left(\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta}\right)^2$. Полагая $u = \pi\vartheta^2 z$, получим

$$\operatorname{sn}(u; k) = -\frac{\vartheta_{\vartheta_{11}}(z;\tau)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(z;\tau)}$$

примеры применения КдФ (??? не усвоил это???)

Механика (?? тоже пока не вижу это??)

1.5 Эллиптические функции (!?)

(вообще в спецфункциях именно про них раздел!!! пока не дохожу просто, так что пока тут)

(в матане заготовлю интегралы эти!)

Суть

Определение (?????) (проверю, норм ли оно????? никогда не думал, что они в неявном виде определяются!!)

Эллиптической функцией называют такую мероморфную функцию f, определённую на области $\mathbb{C}$, для которой существуют два ненулевых комплексных числа и b, таких что

$$f(z+a) = f(z+b) = f(z), \quad \forall z \in C,$$

а также частное $\frac{a}{b}$ не является действительным числом. Из этого следует, что для любых целых m и n

$$f(z+ma+nb) = f(z), \quad \forall z \in C.$$

Любое комплексное число ω, такое что

$$f(z+\omega) = f(z), \quad \forall z \in C,$$

называют периодом функции f. Если периоды и b таковы, что любое ω может быть записано как

$$\omega = ma + nb$$

то a и b называют фундаментальными периодами. Каждая эллиптическая функция обладает парой фундаментальных периодов. Параллелограмм П с вершинами в $0, a, b, a+b$ называется фундаментальным параллелоараммом.

СВоЙстВа

- Не существует отличных от констант целых эллиптических функций (первая теорема Лиувилля).

- Любая эллиптическая функция с периодами a и b может быть представлена в виде

$$f(z) = h(\wp(z)) + g(\wp(z))\wp'(z),$$

рациональна. - Эллиптические функции неэлементарны, это было доказано Якоби в 1830-х годах.

Эллиптические интегралы по Барбашовой Дадим определения этих функций.

Эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода в нормальной форме Лежандра или неполными эллиптическими интеграла ми 1,2 и 3 рода это функции $F(\theta, k), E(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, n, k)$ независимой переменной θ и параметров n, k

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$E(\theta, k) = \int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$\Pi(\theta, n, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\left(1+n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

Полные эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода это функции параметров k, n

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$
$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$
$$\Pi(n, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right)$$

Для неполных и полных интегралов 2 и 3 рода принято использовать одинаковые обозначения, а именно E и Π.

Эллиптические интегралы 1,2 и 3 рода в нормальной форме Якоби получаются заменой $x = \sin\varphi$:

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$
$$E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$
$$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Некоторые свойства $F(\theta, k)$, $E(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, n, k)$ (барбашова и др.)

Приведем некоторые свойства эллиптических интегралов $F(\theta, k)$, $E(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, n, k)$ (см. (2.162)).

Предполагается, что $0 < k < 1$.

1. Поскольку $0 < 1 - k^2\sin^2\theta < 1$ при $0 < k < 1$, то $F(\theta, k) > E(\theta, k)$, $\quad K(k) > E(k)$ (?? и что с того???)

2. Выполняются следующие равенства

$$\frac{d(aF + bE)}{d\theta} = \frac{a + b\left(1 - k^2\sin^2\theta\right)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{(a+b) - bk^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$
$$\frac{d^2F}{d\theta^2} = k^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dF}{d\theta}\right)^3, \quad \frac{d^2E}{d\theta^2} = -k^2\sin\theta\cos\theta\frac{dF}{d\theta}$$

(??? это вообще нужно????)

Применения эллиптических интегралов для вычисления других 3. Положив $a = -b = 1/k^2$, получим из формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_1(\theta, k) \equiv \frac{F(\theta, k) - E(\theta, k)}{k^2} = \int_0^\theta \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

4. Положив $a = 1 - 1/k^2, b = 1/k^2$, получим из формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_2(\theta, k) \equiv \frac{1}{k^2}E(\theta, k) - \frac{1-k^2}{k^2}F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

5. Производные эллиптических интегралов по параметру:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \int_0^\theta \frac{k\sin^2\theta d\theta}{\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{E - k'^2F}{k} - \frac{k\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right),$$

где $k'^2 = 1 - k^2$. Эта формула проверяется дифференцированием правой и левой ее части по θ с учетом формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$. Согласно (2.295) имеем

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\int_0^\theta \frac{k\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{E-F}{k}.$$

6. Пусть $\nu > \mu > 1$. Рассмотрим функцию

$$G_4(\theta,\mu,\nu) = \int_0^\theta \frac{\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену $\sin^2\theta = u$. Тогда $2\sin\theta\cos\theta d\theta = du$ и

$$G_4(u,\mu,\nu) = \int_0^u \frac{\sqrt{1-x}dx}{2\sqrt{x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным известным интегралом

$$\int_d^u \frac{\sqrt{c-x}dx}{\sqrt{(a-x)(b-x))(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(a-d)\Pi\left(\beta,\frac{d-c}{a-c},r\right) - (a-c)F(\beta,r)\right],$$

где $a > b > c \geqslant u > d$ и $\beta = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-d)}{(c-d)(a-u)}}$, $r = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}$.

(!! так вот оказывается, где вылазят эл интегралы!!! чет совсем в матане и спецфункциях плохая к ним подготовка.)

Положив $a = \nu, b = \mu, c = 1, d = 0$, получим

$$G_4(\theta,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[\nu\Pi\left(\beta,\frac{1}{1-\nu},r\right) - (\nu-1)F(\beta,r)\right],$$

и $\beta = \arcsin\sqrt{\frac{(\nu-1)\sin^2\theta}{\nu-\sin^2\theta}}$, $r = \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\mu(\nu-1)}}$.

При $\theta = \pi/2$ имеем $\beta = \pi/2$. Тогда

$$G_4\left(\frac{\pi}{2},\mu,\nu\right) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[\nu\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{1-\nu},r\right) - (\nu-1)K(r)\right].$$

7. Рассмотрим выражение $\sigma = \cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$. Домножив и поделив его на $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, имеем

$$\sigma = \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \frac{k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

Используя (2.294), преобразуем второе слагаемое

$$-\frac{k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \cos\theta\sin\theta\frac{d^2E}{d\theta^2} = \frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\frac{dE}{d\theta}\right)}{d\theta} -$$

$$-\left(2\cos^2\theta-1\right)\frac{dE}{d\theta} = \frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)}{d\theta} - 2\sigma + \frac{dE}{d\theta}.$$

Следовательно,

$$3\sigma = \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} + \frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)}{d\theta} + \frac{dE}{d\theta}.$$

Отсюда с учетом G_2 (????) находим

$$G_3(\theta,k) \equiv \int_0^\theta \cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta =$$
$$= \frac{1}{3}\cos\theta\sin\theta\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} + \frac{1+k^2}{3k^2}E(\theta,k) - \frac{1-k^2}{3k^2}F(\theta,k).$$

8. Пусть $\nu > \mu > 1$. Рассмотрим функцию

$$G_5(\theta,\mu,\nu) \equiv \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену $\sin^2\theta = u$. Тогда $2\sin\theta\cos\theta d\theta = du$ и

$$G_5(u,\mu,\nu) = \int_0^u \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\int_d^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x))(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\beta,r),$$

где $a > b > c \geqslant u > d$, а β и r находятся из (2.299). Положив $a=\nu, b=\mu$, $c=1, d=0$, получим

$$G_5(\theta,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}F(\beta,r)$$

где β и r находятся из (2.301).

9. Пусть $\nu > \mu > 1$. Рассмотрим функцию

$$G_6(\theta,\mu,\nu) \equiv \int_0^\theta \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}}.$$

Заметим, что $G_6(\theta,\mu,\nu) = G_5(\theta,\mu,\nu) - G_4(\theta,\mu,\nu)$, поэтому

$$G_6(\theta,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[F(\beta,r) - \Pi\left(\beta,\frac{1}{1-\nu},r\right)\right],$$

где β и r находятся из (2.301).

Эллиптический интеграл 1 рода в двух словах Эллиптический интеграл 1 рода есть

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

- так называемый полный эллиптической интеграл первого рода. При $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2 \ll 1$ (малые колебания) разложение функции $K(k)$ дает

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\ldots\right)$$

(?? что еще нужно про него знать?)

Встречается он в задаче про период колебания математического маятника.

и еще где?

эллиптический интеграл 2 рода тут хз.

Типичные математические преобразования для прихода к эллиптическим интегралам что-то там нужно заменять как синус, пока что не отработал.

О применениях эллиптических интегралов (в пер действие-угол встречаются, но я еще не оттренировал это, просто видел, что есть, потом прописывать буду.)

При построении переменных действие-угол решение может выражаться в специальных функциях, называемых эллиптическими интегралами.

Но кст рил, в маятниках, задаче Кеплера и особено в пер действие-угол, больше особо не замечал применений.

1.6 Другие типичные

1.6.1 Функция Эйри

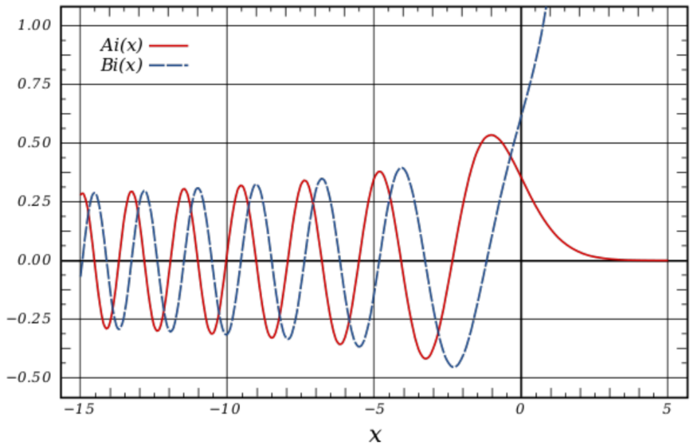


Рис. 2

Суть (?? хватит такого мелкого раздела на неё???)

Определение В данном разделе мы анализируем решения уравнения Эйри (Airy) которое возникает в ряде физических приложений. Пожалуй, наиболее важным приложением уравнения Эйри является определение поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом. Решения уравнения (3.11) демонстрируют ряд универсальных особенностей этого поведения.

Уравнение Эйри (3.11) линейно по переменной x. Поэтому его можно эффективно решить методом Лапласа, смотри раздел 3.7.1, где обсуждается общее уравнение (3.93). Приведем здесь логику раздела 3.7.1 для частного случая уравнения (3.11). Запишем решение этого уравнения в виде контурного интеграл

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt)$$

Где C - некоторый контур в комплексной плоскости t. Мы будем счит ать, что подынтегр альное выражение достаточно быстро стремится к нулю на концах этого контура (которые могут быть и в бесконечности).

Подставим уравнение (3.11) в представление (3.12), используем соотношение $x\exp(xt) = d\exp(xt)/dt$ и производим интегрирование по ч астям по t, счит ая граничные члены равными нулю (что обеспечивается быстрым стремлением подынтегрального выражения к нулю на концах контура интегрирования). В результате мы находим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -t^2 Z,$$

решение которого имеет вид $Z \propto \exp\left(-t^3/3\right)$. Подставляя это выражение в (3.12), находим общее решение уравнения Эйри (3.11)

$$Y(x) \propto \int_C dt \exp\left(xt - t^3/3\right).$$

Контур C в представлении (3.13) должен начин аться и оканчив аться в областях, где подынтегр альное выр ажение в (3.13) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур C должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение $\exp(xt-\ t^3/3)$ в бесконечности определяется фактором $-t^3$, имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю: $-\pi/6 < \operatorname{Arg} t < \pi/6$, $\pi/2 < \operatorname{Arg} t < 5\pi/6, 7\pi/6 < \operatorname{Arg} t < 3\pi/2$ смотри рисунок 3.4, юкторы I,II,III, Контур C должен начин аться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равн а, очевидно, нулю. Таким образом, имеется два линейно независи мых решения, что соответ ствует второму порядк у уравнения Эйри.

Решению, которое остается конечным при $x \to \pm\infty$ соответствует контур, идущий из сектора III в сектор I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 3.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы $\exp\left(xt - t^3/3\right)$ стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение $t = iu$, мы сводим этот интеграл к виду

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \cos\left(xu + u^3/3\right),$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (3.14) функция называется функцией Эйри первого рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях $|x|$. При больших отрицательных x в интеграле (3.14) имеется точка стационарной фазы $u = \sqrt{|x|}$, окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших $|x|$.Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 3.7.2), находим, используя выражение (3.102)

$$\mathrm{Ai(x)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

При больших положительных x стационарная точка в интеграле (3.14) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp\left(tx - t^3/3\right)$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 3.7.2. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку $t = -x^{1/2}$ (смотри вертикальную прямую на рисунке 3.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (3.105), находи м

$$\mathrm{Ai(x)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

График зависимости функции Эйри от x приведен на рисунке 3.5. На этом же гр афике красным цветом приведены асимптотики (3.15, 3.16).

В качестве второго решения уравнения Эйри (3.11) выбирают обычно функцию

$$\begin{aligned}\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \Big[&\exp\left(xu - u^3/3\right) \\ &+ \sin\left(xu + u^3/3\right)\Big]\end{aligned}$$

которая называется функцией Эйри второго рода. Выражение для Bi получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (3.17). Коэффициент в (3.17) традиционен. Сравнение функций йри Ai и Bi проведено на рисунке 3.6.

Задача 3.2.1. Найти значения $\mathrm{Ai}(0), \mathrm{Ai}'(0), \mathrm{Bi}(0)$, $\mathrm{Bi}'(0)$.

Асимптотическое поведение функции Bi при больших положительных значениях аргумента определяется выражением

$$\mathrm{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

Асимптотическое поведение функции Bi при больших отрицательных значениях аргумента определяется выражением

$$\mathrm{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Сравнение функции Bi(x) и ее асимптотик приведены на рисунке 3.7.

Задача 3.2.2. Получить асимптотическое поведение $\oint$ $\mathrm{Bi}(x)$ при $x \to \pm\infty$

Асимптотическое поведение функций Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ можно установить и методом WKB, смотри раздел 3.7.3. Уравнение Эйри (3.11) является частным случаем уравнения (3.106), при этом $U = x$. Таким образом $p = \sqrt{x}$ и $S = (2/3)x^{3/2}$. Таким образом, в соответствие с (3.107) при больших положительных x мы находим следующее поведение

$$x^{-1/4} \exp\left(\pm 2x^{3/2}/3\right).$$

Знак + относится к функции $\mathrm{Bi}(x)$, смотри (3.18), а знак минус относится к функци $\mathrm{Ai}(x)$, смотри (3.16). При больших отрицательных x мы находим следующее поведение

$$|x|^{-1/4} \exp\left(\pm 2i|x|^{3/2}/3\right).$$

Поскольку $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ являются действительными функциями, то в соответствие с (3.109) для них поведение при больших отрицательных x имеет вид

$$|x|^{-1/4} \cos\left(2|x|^{3/2}/3 + \varphi\right),$$

где φ - некоторая фаза. Это поведение соответствует асимптотикам (3.15) и (3.19).

Задача 3.2.3. Найти асимптотики решения уравнения $d^2Y/dx^2 - x^3Y = 0$ при больших значениях $|x|$.

асимптот поведение вот это хоть затронуто было

явление Стокса для нее

О подходе через теорию Пикара-Лефшица (????) (пока этот вопрос остается, не шарю.)

2 Сферические функции

(тут много теории будет и у нее много приложений!)
(почитаю тут статьи потом!)

2.0.1 Теория

Суть сферических функций Функциями Лежандра первого рода (присоединенными «полиномами» Лежандра) называются регулярные в точках ± 1 решения дифференциального уравнения

$$\left(1-x^2\right) y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0,$$
$$l = 0, 1, \ldots; \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l.$$

При $m = 0$ они становятся полиномами Лежандра. Приведем здесь формулу Родрига для этих функций:

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{|m|/2} \frac{\mathrm{d}^{l+|m|}}{\mathrm{d}x^{l+|m|}}\left(x^2-1\right)^l.$$

Присоединенные «полиномы» Лежандра входят в структуру сферических функций:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

являющихся регулярными на единичной сфере решениями уравнений

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\right] \Psi(\theta, \varphi) = 0;$$
$$\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} + m\right] \Psi(\theta, \varphi) = 0$$

и образующими на ней полную ортонормированную систему - базис:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin\theta \mathrm{d}\theta = \delta_{l'l}\delta_{m'm}$$
$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*\left(\theta', \varphi'\right) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta\left(\cos\theta' - \cos\theta\right) \delta\left(\varphi' - \varphi\right)$$

Сферические функции удовлетворяют рекуррентному соотношению $\cos\theta Y_{lm}(\theta, \varphi) =$

$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi),$$

представляющему собой разложение его левой части по базису сферических функций. Приведем явный вид некоторых сферических функций:

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta; \quad Y_{1\pm1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi}.$$

Теория по Мэтьюзу и Уоллеру Присоединенное диффференциальное уравнение Лежандра имеет вид [см. Формулу (1.69)]

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] y = 0$$

Легко убедиться, что если y-решение диффференциального уравнения Лежандра, то $\left(1 - x^2\right)^{m/2} (d/dx$ - решение присоединенного уравнения. Для положительного целого числа m определим

$$P_n^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_n(x).$$

Величину P_n^m называют п рис оед и нен ной ф ун кц ие й Л еж ан дра.

Интеграл ортогональности и нормировки пртисоединенных функций Лежандра имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Подчеркнем, что равенство (7.29) справедливо, если обе функции имеют одинаковые значения m. Это условие ортогональности можно получить тем же путем, что и (7.19).

Присоединенные функции Лежандра с фиксированным m представляют также полную систему функций в том смысле, что произвольную (разумную) функцию $f(x)$ можно разложить в ряд вида

$$f_\Delta(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x).$$

Комбинируя (7.30) с идеей рядов Фурье, которые уже рассматривались в гл. 4, мы видим, что функцию $f(\Omega)$, гдө Ω обозначает совокупность углов θ и ϕ, можно раз- ложить в ряд

$$f(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{mn} P_n^{|m|}(\cos\theta) \exp(\mathrm{i}m\phi).$$

Продолжим кратко рассмотрение основных свойств $P_n^{|m|}$. Обычно определяют $c\phi$ е р ичес ки е г армон и к и

$$Y_{lm}(\Omega) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\theta) \exp(\mathrm{i}m\phi) \times$$
$$\times \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } m \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } m < 0.32) \end{cases}$$

Предлагаем читателю проверить, что (7.32) можно записать также в виде $Y_{lm}(\Omega) = \frac{1}{2^l l!} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}$ e
$\times \frac{d^{l+m}}{d(\cos\theta)^{l+m}} \left(\cos^2\theta - 1\right)^l$. Это равенство верно как для положительных, так и для отрицательных m. Из (7.32) либо из (7.33) следует, что

$$Y_{l,-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega).$$

В (7.32) нормировочная константа выбрана так, что

$$\int d\Omega Y_{lm}^{*}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll}\delta_{mm'}.$$

Разложение (7.31) теперь можно записать в виде

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} B_{lm} Y_{lm}(\Omega),$$

причем B_{lm} легко находится из (7.35):

$$B_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^{*}(\Omega) f(\Omega).$$

Покажем полезность таких разложений по сферическим гармоникам на примере так называемой т е оремы сложения для сферических гармоник. Подставляя (7.37) в (7.36), получаем

$$f(\Omega) = \int d\Omega' f\left(\Omega'\right) \sum_{lm} Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right) Y_{lm}(\Omega).$$

150 Так как (7.38) верно для произвольной $f(\Omega)$, то

$$\sum_{lm} Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right) Y_{lm}(\Omega) = \delta\left(\Omega - \Omega'\right).$$

Функция $\delta\left(\Omega - \Omega'\right)$ характеризуется свойствами $\delta\left(\Omega - \Omega'\right) = 0$ при $\Omega \neq \Omega'$, $\int d\Omega\delta(\Omega) = 1°$. Функция $\delta\left(\Omega - \Omega'\right)$, конечно, зависит только от угла γ между направлениями Ω и Ω'. Из формул сферической тригонометрии находим

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi - \phi'\right).$$

Так как функция $\delta\left(\Omega - \Omega'\right)$ зависит только от γ, разложим ее в ряд по полиномам Лежавдра

$$\delta\left(\Omega - \Omega'\right) = \sum_{l} B_l P_l(\cos\gamma)$$

Коэффициенты B_l даются формулой [см. формулу (7.21)]

$$B_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos\gamma)\delta\left(\Omega - \Omega'\right) P_l(\cos\gamma) =$$

$$= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega\delta\left(\Omega - \Omega'\right) P_l(\cos\gamma),$$

так как $2\pi d(\cos\gamma)$ как раз равно элементу телесного угла на сфере. Используя свойства (7.40) функции $\delta\left(\Omega - \Omega'\right)$, из (7.42) получаем

$$B_l = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(1) = \frac{2l+1}{4\pi}.$$

Теперь, используя (7.39), (7.41) и (7.43), находим

$$\sum_{lm} Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right) Y_{lm}(\Omega) = \sum_{l} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma).$$

Чтобы закончить вывод, постулируем свойство сферических гармоник, справедливость которого будет очевидна после прочтевия гл. 8. Если произвольно повернуть оси координат, любая сферическая гармоника $Y_{lm}(\Omega)$ становится линейной комбинацией сферических гармоник $Y_{lm'}(\bar{\Omega})$ от новых угловых координат $\bar{\Omega}$. Подчеркнем, что в с е. э т и г ар мо ни к и имею т о д и н аков ы й й д е к с l, т. е.

$$Y_{lm}(\Omega) = \sum_{m'=-l}^{ll} C^l_{mm'} Y_{lm'}(\bar{\Omega})$$

причем коэффициенты $C^l_{mm'}$ зависят от величины поворота $\Omega \to \bar{\Omega}$, а также от l, m и m'.

Так как из (7.32) $Y_{l_0} = \sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(\cos\theta)$, то член $P_l(\cos\gamma)$ в (7.44) можно записать как $P_l(\cos\gamma) = = \sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{l0}(\bar{\Omega})$, где $\bar{\Omega}-$ угловые координаты того же направления, что и Ω, но в другой системе координат, полярная ось которой направлена вдоль Ω'. Тогда из (7.45) имеем (с переставленными Ω и Ω')

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m'=-l}^{l} A^l_{0m'}\left(\Omega'\right) Y_{lm'}(\Omega).$$

Сравнивая с (7.44), видим, что члены для каждого значения l равны, т. θ.

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}\left(\Omega'\right) Y_{lm}(\Omega).$$

С помищью (7.32) выражение (7.46) можно переписать через присоединөнные полиномы Лежандра:

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta) P_l\left(\cos\theta'\right) +$$
$$+2\sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right)$$

Уравнение (7.46) [(или (7.47)] и есть искомая теорема сложения.

Закончим этот раздел формулами для нескольких первых сферических гармоник:

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}; & Y_{2,\pm2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\phi}; \\
Y_{1,\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \mathrm{e}^{\pm 2i\phi}; & Y^{2,\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta \mathrm{e}^{\pm 21\phi}; \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta; & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\theta - 1\right).
\end{aligned}$$

(??!??!?!? так они нормированы на дельта функцию или на полином лежандра???)

2.0.2 Свойства сферических функций для квантовой механики (?)

(отдельно, наверное, указать это нужно.)

Сферические функции удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\cos\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) =$$
$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l^2-m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta,\varphi),$$

2.0.3 Scalar spherical harmon

2.0.4 Generalized spherical-harmonic tensor

2.0.5 tensor spherical harmonics

3 Некоторые многочлены

3.0.1 Полиномы Эрмита

Суть производящая ф-я
их ортог-сть
интегр представление

Теория Полиномы Эрмита возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку $(-1, 1)$. Кроме того, в ряде случаев разложение функции по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора. Полиномы Эрмита определяются, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора производящей функции:

$$\exp\left(-t^2 + 2tx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

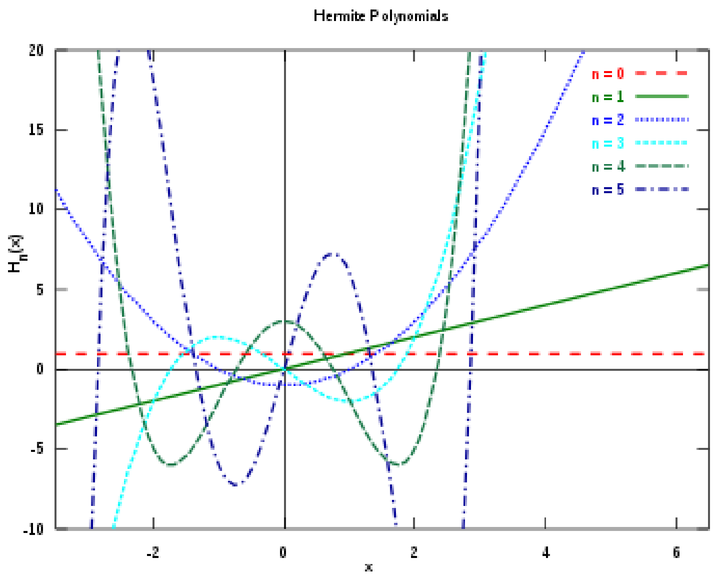
где n называется индексом полинома Эрмита. Легко понять, что $H_n(x)$ является полиномом n-ой степени, поскольку наибольшая степень x при t^n в разложении производящей функции $\exp\left(-t^2 + 2tx\right)$ в ряд Тейлора получается при разложении $\exp(2tx)$. Производящая функция $\exp\left(-t^2 + 2tx\right)$ инвариантна относительно преобразования $t, x \to -t, -x$. При этом преобразовании в правой части изменяет знак аргумент H_n, а t^n заменяется на $(-1)^n t^n$. Поскольку разложение должно остаться прежним, мы находим $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. Другими словами полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями x, а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями x.

Раскладывая $\exp\left(-t^2 + 2tx\right)$ до второго порядка по t, находим выражения для первых трех полиномов ЭрмиТа

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$

Следующие полиномы Эрмита могут быть найдены, если разложить $\exp\left(-t^2 + 2tx\right)$ до следующих порядков по t.

Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке ниже.



Полагая в выражении (3.65) $x = 0$ и раскладывая $\exp(-t^2)$ в ряд по t, находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!,$$

где $(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)\ldots$ Далее, при малых x справедливо соотношение $\exp(-t^2+2tx) \approx \exp(-t^2)\,(1+2tx)$. Снова раскладьгая $\exp(-t^2)$ в ряд по t, находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n+1)!!.$$

Дифференцируя соотношение (3.65) по x и приравнивая коэффициенты при степенях t в получившихся рядах, мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$$

Далее, беря производную по t от соотношения (3.65) и приравнивая коэффициенты при степенях t в получившихся рядах, мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита, стартуя с первых двух .

Соотношение (3.69) приводит нас к выводу, что функция $H_n(x)$ имеет ровно n нулей при действительном x.

Другими словами, все корни уравнения $H_n(x) = 0$ действительны. Проведем доказательство по индукции. Если $H_n(x)$ имеет n нулей, то в соответствии с (3.69) функция $H_{n+1}(x)$ имеет n экстремумов. Между ними лежит $n-1$ нулей функции $H_{n+1}(x)$. Еще два нуля $H_{n+1}(x)$ лежат вне крайних экстремумов $H_{n+1}(x)$, поскольку на больших x в полиноме доминирует член с наивысшей степенью x, то есть на больших x функция $H_{n+1}(x)$ монотонно стремится к ∞ или $-\infty$.

Выражая в соотношении (3.69) H_{n-1} в соответствии с (3.70), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n = -H_{n+1}.$$

Это соотношение легко позволяет доказать по индукции выражение

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-x^2\right).$$

Соотношение (3.72) очевидно, выполняется при $n = 0$, и воспроизводится при применении оператора в левой части (3.71), поскольку $(d/dx - 2x)\left[\exp\left(x^2\right) A\right] = \exp\left(x^2\right) dA/dx$ для произвольной функции $A(x)$. Соотношение (3.72) еще раз показывает, что H_n является полиномом степени n.

Задача 3.5.1. Доказать, что старший член разлоюения $H_n(x)$ имеет вид $2^n x^n$.

Задача 3.5.2. Получить соотношение (3.65) из (3.72).

Легко проверить, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\right) \exp\left(-t^2 + 2tx\right) = 0.$$

При меняя приведенный дифференциальный оператор к правой части соотношения (3.65) и приравнивая результат к нулю, мы находим замкнутое дифференциальное уравнение на полином Эрмита n-го порядка

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x\frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0.$$

Отметим, что оператор в (3.73) относится к типу Штурма-Лиувилля (2.6). Уравнение (3.73) инвариантно относительно замены $x \to -x$ и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанном выше о четности полиномов Эрмита. Уравнение (3.73) может быть получено и иначе. Подставляем в правую часть соотношения (3.69) H_{n-1}, выраженное в соответствии с (3.70) и дифференцируем получившееся соотношение по x. Выражая затем из (3.69) dH_{n+1}/dx, находим уравнение (3.73).

Четное решение уравнения (3.73) может быть разложено в ряд по четным степеням x :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Подставляя это выражсние в уравнение (3.73) и при равнивая коэффициенты при степенях x, мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения u в ряд по x. При четных n ряд по x обрывается на $k = n/2$, и мы и меем дело с конечным полиномом, пропорциональным H_n с четным индексом. При нечетных n мы имеем дело с бесконечным рядом, который сходится при всех (комплексных) x поскольку $a_{k+1} \approx a_k/k$ при больших k. Этот ряд представляет второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при нечетных n. Аналогичным образом исследуется нечетное решение уравнения (3.73), разложение которого в ряд по степеням x пропорционально $H_n(x)$ для нечетных n и дает второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при четных n.

Чтобы получить интегральное представление для полиномов Эрмита, используем соотношение

$$\exp\left(-\xi^2 + 2\xi x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-t^2 + 2\xi(x + it)\right]$$

Раскладывая обе части этого соотношения в ряд по ξ, находи м

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x+it)^n \exp\left(-t^2\right)$$

Представляем подынтегральное выражение в соотношении (3.74) в виде $\exp\left[n \ln(x+it) - t^2\right]$. Для больших n можно использовать метод перевала, мы находим две перевальные точки $t_\pm = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$. Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через эти перевальные точки и суммируя соответствующие перевальные вклады, находим

$$H_n(x) \approx \sqrt{2}(2n/e)^{n/2} \exp\left(x^2/2\right) \cos(\sqrt{2n}x - \pi n/2),$$

справедливое при $n \gg x^2, 1$.

Обращаем внимание на осциллирующий характер выражения (3.75). Осцилляции возникают, когда перевальные точки $t_\pm = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ имеют противоположные дей ствительные части, что и обеспечивает условие $n \gg x^2, 1$. В обратном предельном случае $x^2 \gg n$ обе перевальные точки $t_\pm = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ лежат на мнимой оси. В этом случае контур интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через ближайшую к действительной оси перевальную точку. (Отметим, что попытка провести контур через вторую перевальную точку некорректна, поскольку эта перевальная точка соответствует минимуму, а не максимуму подынтегрального выражения.) Вычисление перевального значения интеграла приводит к поведению $H_n \propto x^n$, то есть на больших $x \gg \sqrt{n}$ главный вклад в H_n определяется старшим членом полинома, как и следовало ожидать. Отметим, что на интервале $-\sqrt{n} < x < \sqrt{n}$, где работает приближение (3.75), осцилляции дают $\sim n$ нулей функции H_n, в соответствии с общими свойствами H_n.

Уравнение (3.73) для H_n может быть рассмотрено, как уравнение на собственные значения с оператором Штурма-Лиувилля (2.6) с $Q = -2x, U = 0$. Отсюда следует условие ортогональности (2.68)

$$\int dx \exp\left(-x^2\right) H_n(x) H_m(x) = 0$$

где в соответствие с (2.67) $\rho = \exp\left(-x^2\right)$, а интегрирование идет вдоль действительной оси. Найдем теперь константы A_n, фигурирующие в выражении (2.69):

$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Задача Доказать соотношение (3.77).

Указание: составить комбинацию $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$, выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (3.65) и проинтегрировать получившееся раветство по x с весом $\exp\left(-x^2\right)$. На этом пути получатся и соотношения ортогональности (3.76).

Таким образом, любую функцию $f(x)$, заданную на действительных x и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при $x \to \pm\infty$, можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) f(x)$$

Это разложение представляет собой моди фикацию разложения в ряд Тейлора.

Отметим, что условие полноты (2.70) имеет вид

$$\sum_n \frac{\exp\left(-x^2/2 - y^2/2\right)}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(y) = \delta(x-y).$$

Задача 3.5.4. Доказать непосредственно условие полноты (3.80).

Задача 3.5.5. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) H_{2n}(xy).$$

Задача 3.5.6. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[-(x-y)^2\right] H_n(x)$$

Задача 3.5.7. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp\left(-x^2\right) H_{2n-1}(xy)$$

Задача 3.5.8. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp\left(-x^2\right) H_n(xy)$$

Примечание: Ответ выражается через полином Лежандра.

Задача 3.5.9. Найти значение интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x)$$

Задача 3.5.10. Найти значение интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) \cosh(\beta x) H_{2n}(x)$$

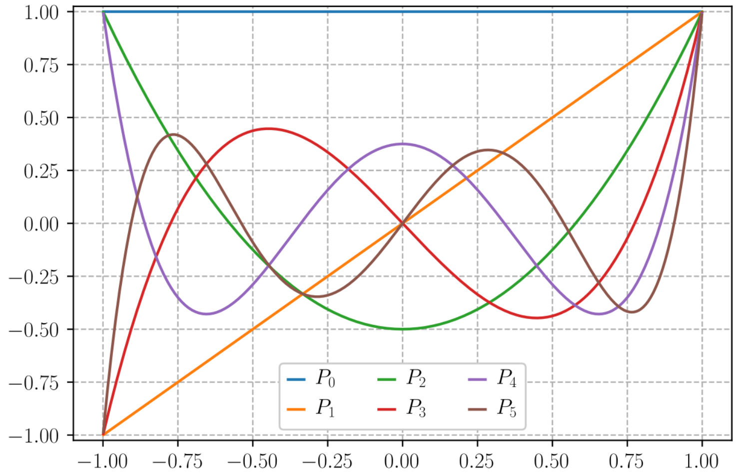
Задача 3.5.11. Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)(2x)^n.$$

Указание: просуммировать по n правую часть этого соотношения с весом $t^n/n\,!$ и показать, что эта сумма сводится кевой части соотношения (3.65).

3.0.2 Многочлены Лежандра (!?!?)

(тут к теормину по математике 2 заготовки!)



Суть

Теория Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда $1/R$ равен нулю, $\nabla^2(1/R) = 0$. Здесь $R-$ расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку $(0,0,1)$ и перейдем к сферической системе координат r, θ, φ. В этом случае $R = \sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}$. Условие же $\nabla^2 R^{-1} = 0$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) R^{-1} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial R^{-1}}{\partial\theta}\right) = 0$$

Здесь отсутствует производные по φ, поскольку R от этой переменной не зависит. Переходя к переменной $\mu = \cos\theta$, которая меняется от -1 до $+1$, мы находим

$$\left(r^2\partial_r^2 + 2r\partial_r\right) R^{-1} + \partial_\mu\left[\left(1-\mu^2\right)\partial_\mu R^{-1}\right] = 0$$

Полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора величины R^{-1} :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n.$$

Поскольку особенности левой части (3.44) по r (точки ветвления) $\mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$ лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в правой части (3.44) равен единице, то есть он сходится при $r < 1$. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2} - 2r^{-1}\mu + 1}}.$$

Это позволяет записать эквивалентное (3.44) разложение по отрицательным степеням r :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n}.$$

Этот ряд сходится при $r > 1$. Как следует из (3.44) или (3.45), функция $P_n(\mu)$ является полиномом n-го порядка, симметричным по μ при четных n и антисимметричным по μ при нечетных n. Отметим также равенство $P_n(1) = 1$. Оно непосредственно следует из того, что при $\mu = 1R = 1 - r$, а $(1-r)^{-1} = \sum r^n$. Аналогично получается равенство $P_n(-1) = (-1)^n$

Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением R^{-1} в соответствии с (3.44) или (3.45). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}\left(3\mu^2 - 1\right).$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 3.9, где они изображены на интервале $-1 < \mu < 1$. В силу антисимметрии полинома для нечетного индекса $P_{2n+1}(0) = 0$.

Задача 3.4.1. Найти значение $P_{2n}(0)$. Подставляя правую часть соотношения (3.44) вместо R^{-1} в уравнение (3.43), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_n\right] + n(n+1)P_n = 0,$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням r. В терминах угла $\theta, \mu = \cos\theta$, уравнение (3.47) переписываются в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2}P_n + \cot\theta\frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0,$$

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu\left(2r\partial_r + 1\right) + \left(r^2\partial_r + r\right),$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор $\hat{K}_1$ к правой части (3.44) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях r, находим следующее рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0.$$

Это соотношение позволяет явно находить $P_{n+1}(\mu)$, если известны выражения для $P_{n-1}(\mu)$ и $P_n(\mu)$. Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (3.51), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

Задача 3.4.2. Найти выражение для $P_3(\mu)$, воспользовавшись рекуррентным соотношением (3.51).

Задача 3.4.3. Доказать соотношение

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y)$$
$$= (n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}.$$

Указание: действовать по индукиии с учетом рекуррентного соотношения (3.51). Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0,$$
$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1-\mu/r)\partial_\mu$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор $\hat{K}_2$ к правой части (3.44) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях r, находим соотношение

$$nP_n - \mu\frac{d}{d\mu}P_n + \frac{d}{d\mu}P_{n-1} = 0,$$

которое переписывается в виде

$$(n+1)P_n = \frac{d}{d\mu}\left(\mu P_n\right) - \frac{d}{d\mu}P_{n-1}$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(\mu^2-1\right)^n.$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (3.51): если (3.55) справедливо для P_{n-1} и P_n, то в силу (3.51) оно справедливо и для P_{n+1}. Кроме того, выражение (3.55) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (3.46), что завершает доказательство.

Задача 3.4.4. Показать, что в силу (3.51) соотношение (3.55) справедливо для P_{n+1}, если (3.55) справедливо для P_{n-1} и P_n.

Задача 3.4.5. Показать, что в силу (3.54) соотношение (3.55) справедливо для P_n, если (3.55) справедливо для P_{n-1}.

Задача 3.4.6. Найти значение $P_{2n}(0)$, исходя из (3.55).

Соотношение (3.54) означает, что член $n(n+1)P_n$ в уравнении (3.47) записывается в виде полной производной. Беря первообразную от получившегося выражения, находим

$$\left(\mu^2-1\right)\frac{d}{d\mu}P_n(\mu) = n\left[\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)\right]$$

Константа интегрирования здесь равна нулю, поскольку при $\mu = 1$ обе части соотношения (3.56) обращаются в ноль. Соотношения (3.56) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

Задача 3.4.7. Докаюите, что если соотношение (3.56) справедливо для $n-1$, то в силу соотношений (3.51,3.54) оно справедливо и для .

Задача 3.4.8. Вывести соотношения (3.56), исходя из соотношения (3.55).

Задача 3.4.9. Проверить выполнение уравнения (3.47) для полиномов Леэандра, исходя из формул дифференцирования (3.54,3.56).

Соотношение (3.44) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (3.44)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z^{n+1}}\frac{1}{\sqrt{1-2z\mu+z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по z при $z_\pm =$

$\mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$, которые лежат на единичной окружности, если μ - действительное число и $|\mu| < 1$. Эти точки ветвления расположены в точках $z_\pm = \exp(\pm i\theta)$, где $\mu = \cos\theta$. Таким образом, разрез функции $\left(1-2z\mu+z^2\right)^{-1/2}$ можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости z, которая определяется условиями $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$, где θ предполагается лежащим в интервале $0 < \theta < \pi$, а ϑ - аргумент z. Это построение предст авлено на ри сунке 3.10, где разрез показан черной дугой. Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем "вывернем"через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции $\left(1-2z\mu+ z^2\right)^{-1/2}$. Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 3.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции $z^{-n-1}\left(1-2z\mu+z^2\right)^{-1/2}$, которая имеет противоположные знаки по берегам разреза. Мы можем подставить на разрезе $z = e^{i\vartheta}$, тогда $1-2z\mu+z^2 = 2e^{i\vartheta}(\cos\theta - \cos\vartheta)$. Преобразуем интегрирование по контуру к интегрированию по углу $dz = ie^{i\vartheta}d\vartheta$. В результате получаем

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi d\vartheta \frac{\sin[(n+1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\vartheta)}},$$

где синус возник в результате суммирования вкладов от верхней и от нижней полудуг.

Интегральное представление (3.57) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших n. В этом случае в силу быстрой осцилляции $\sin[(n+1/2)\vartheta]$ главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (3.57). Подставляя $\vartheta = \theta + x$, раскладывая по x подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx \frac{\sin[(n+1/2)(\theta+x)]}{\sqrt{2\sin\theta x}}$$

Вычисляя здесь интеграл по x, мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2\cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n+1)\pi\sin\theta}}$$

Задача 3.4.10. Получить выражение (3.59) из (3.58). Выражение (3.59) можно получить также методом WKB (смотри раздел 3.7.3), который работает как раз при больших n. Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (3.48) в терминах переменной $t = \ln\tan(\theta)$. Тогда оно принимает вид уравнения (3.106):

$$\frac{d^2P_n}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t}P_n = 0.$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin\theta,$$
$$S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$. При больших n выполняется неравенство $dp/dt \ll p^2$, что оправдывает применение метода W KB. Суммируя теперь два члена (3.107), мы и получаем выражение (3.59). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (3.47), регулярное в точке $\mu = 1$, когда оно разлагается в ряд Тейлора по $x = \mu - 1$. Перепишем уравнение (3.47) в терминах переменной x :

$$\left(2x+x^2\right)P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по x. Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора P по x, $P = \sum_k p_k x^k$, мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом n цепочка соотношений обрывается на $k = n$, и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с $P_n(\mu)$. Если же n не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени x. В пределе больших k мы имеем $p_{k+1} = -(1/2)p_k$. Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2 , и, более того, он приводит к простому полюсу при $x = -2$, то есть $\mu = -1$. Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (3.47), регулярные как в точке $\mu = 1$, так и в точке $\mu = -1$. Как следует из уравнения (3.47), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu}\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале $-1 < \mu < 1$ и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (3.61), то есть свойство (2.60), смотри раздел 2.4.1, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (2.61):

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_n(\mu) P_l(\mu) = 0$$

если $n \neq l$.

Задача 3.4.11. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.62). Указание: восползоватвся представлением (3.55).

Соотношение (3.62) можно получить и из уравнения (3.48), в соответствии с которым полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора Птурма-Лиувилля (2.6) с $Q = \cot\theta$ и $U = 0$. В этом случае в соответствии с (2.67)$\rho = \sin\theta$. Интервал же интегрирования по углу θ распространяется от 0 до π. У словие (2.61) переписывается в виде $\int d\mu f_n f_m = 0$, где $\mu = \cos\theta$. Таким образом, в терминах переменной μ полиномьг лежандра ортогональны с весом единица на интервале - ние (3.62).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}.$$

Общее соотношение (2.64) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (3.61), конечных на интервале $(-1, +1)$, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1/2)P_k(x)P_k(y) = \delta(x-y).$$

Задача 3.4.12. Получить выражение для нормировочного множителя (3.63). Указание: восполвзоваться соотношением (3.44).

Задача 3.4.13. Прямо получить соотношение (3.64). Указание: воспользоваться результатом задачи (3.4.3)

Задача 3.4.14. Найти $\int_{-1}^{1} dx x^2 P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$.

Задача 3.4.15. Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра $P_n(x)$ монома x^k.

О применениях многочленов Лежандра (!?!??!) При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае

Задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого U зависит только от расстояния r до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

3.0.3 Присоединенные полиномы Лежандра

3.0.4 Многочлены Лагерра (!?!?)

Суть (??) В математике многочлены Лагерра, названные в честь Эдмона Лагерра (1834–1886), являются каноническими решениями уравнения Лагерра:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

являющегося линейным дифференциальным уравнением второго порядка. В физической кинетике эти же многочлены (иногда с точностью до нормировки) принято называть полиномами Сонина или Сонина - Лагерра[1]. Многочлены Лагерра также используются в квадратурной формуле Гаусса - Лагерра численного вычисления интегралов вида:

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx.$$

Многочлены Лагерра, обычно обозначающиеся как $L_0, L_1, \ldots$, являются последовательностью полиномов, которая может быть найдена по формуле Родрига

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k.$$

Эти полиномы ортогональны друг другу со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x) g(x) e^{-x} dx.$$

Последовательность полиномов Лагерра - это последовательность Шесрфера. Многочлены Лагерра применяются в квантовой механике, в радиальной части решения уравнения Шрёдингера для атома с одним электроном. Имеются и другие применения многочленов Лагерра.

В следующей таблице приведены несколько первых многочленов Лагерра:

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x+1$
2	$\frac{1}{2}(x^2-4x+2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720)$

Рекуррентная формула

Полиномы Лагерра можно определить рекуррентной формулой:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}\left[(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)\right], \quad \forall k \geqslant 1,$$

предопределив первые два полинома как:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x. \end{aligned}$$

Обобщённые полиномы Лагерра

Обобщённые полиномы Лагерра $L_n^a(x)$ являются решениями уравнения:

$$xy'' + (a+1-x)y' + ny = 0,$$

так что $L_n(x) = L_n^0(x)$.

3.0.5 Многочлены Чебышева

Суть

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

О применениях

О применениях в вычислительной математике (??) (напишу потом, пока только там их встречал. почему именно они нужны, а не другие?)

Часть IV
Обобщенные функции

3.1 Свойства обобщенных функций

(по идее в матане тоже это будет.)

свойства обобщенных функций Умножсение обобщенных функций может быть опрелелено либо как предел произведения ε -представлений, либо как функционал. Во втором случае, если f и g - две обобщенные функнии. то произведение их определяется как:

$$(g \cdot f, \varphi) = (g, f\varphi)$$

видно, что одна из функций (в данном случае f) должна быть достаточно «хрошей», чтобы имеюшаяся сингулярность функции g не превысипа ционал, так и вычисляя производную какого-либо ε-прелставления Трехмерная функция $\delta(\mathbf{r})$ опрелеляется как

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathrm{d}^3\mathbf{k}$$

где интегрирование совершается по всему k-пространству. Соответственно, основное свойство (10.1) теперь принимает вил

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = f(0)$$

где интегрирование выполняется по некоторой области, включающей точку $\mathbf{r} = 0$.

Если функция $f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = f(r)$ и при этом регулярна в нуле, свойсгво (10.41) можно переписать как

$$\int \delta(\mathbf{r}) f(r) \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int f(r) r^2 \, \mathrm{d}r \int \delta(\mathbf{r}) \mathrm{d}\Omega = f(0)$$

Выражение (10.42) позволяет ввести «радиальную ф функцию $\delta(r)$:

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi}\frac{\delta(r)}{r^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\delta'(r)}{r}$$

δ-функции в нуле. При этом данная операция вполне допустима, посколь- ку элемент объема содержит r^2. Множитель $1/2\pi$ учитыгает что интегпи- делить как $1/z$, но с особым выбором пути интегрирования (контура) для каждой функции.

Действительно, это свойство вытекает из формул... (10.24) и (10.33) и рис. 10.1 и 10.2.

Заметим, что дтя δ-функции выбирается замкнутый контур, обходящий точку 0. Контуры интегрирования, дающие различные обобщенные функции из функции $1/z$, представлены на общем рис. 10.3.

1. Произведение двух функций $\wp\frac{1}{r}$ не определено. Действительно, согласно (10.39) можем записать:

$$\wp\frac{1}{x} \cdot \wp\frac{1}{x} = \left(\wp\frac{1}{x}, \wp\frac{1}{x}\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{M}{\varepsilon} \to \infty.$$

2. Вместе с тем определена производная от функции $\wp$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=-\left(\wp\frac{1}{x},\varphi'(x)\right)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(x)+\varphi'(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Если воспользоваться ε -представлением. получаем

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}\right)_\varepsilon=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}=-\frac{x^2-\varepsilon^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^2}$$

3. Покажем, что

$$\wp\frac{1}{x}\cdot\delta(x)=-\frac{1}{2}\delta'(x)$$

Действительно, воспользуемся ε -прелставлениями обеих функтий:

$$\left(\wp\frac{1}{x}\right)_\varepsilon=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2},\quad \delta_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)},\quad \delta'_\varepsilon(x)=-\frac{2\varepsilon x}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}$$

результат (10.44).

4. Можно так же показать, что не опрелелено произвеление лвухх δ-функций, имеюших одинаковый аргумент.

5. Так же как и во втором примере, используя ε -прелставления можно показать, что

$$\left(\wp\frac{1}{x}+\pi\delta(x)\right)\left(\wp\frac{1}{x}-\pi\delta(x)\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}$$

6. Определено произведение двух функций Сохошкого:

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}0}\cdot\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\mathrm{i}\pi\delta'(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}$$

1. Показать, что в смысле обобщенных функций

$$\int_0^\infty\sin k_1x\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+k_1}-\frac{1}{k-k_1}\right)$$

2. Показать, что при $a\neq b$ произведение

$$\delta(x-a)\delta(x-b)=0$$

3. Доказать формулу:

$$\delta(ax+by)\delta(cx+dy)=\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}\delta(x)\delta(y)$$

3.2 Дельта функция дирака

3.2.1 Основы дельта-функции

определение Оперирование с идеальными объектами в физике такими как дит к появлению в математическом аппарате, описывающем эти объек- ты, так называемых обобщенных функций. Наиболее известные и част выражениях, умноженными на «хорошую"функцию.

Поэтому свойст- ва обобщенных функций определяются свойствами интегралов – они имеют интегральный смысл.

Таким образом, математическая теория обобщенных функций стпоится на сопоставлении им функционалов, т. е. интегральных выражений. содержащих произведения с хорошими «функциями». Например. пляя $\delta(x)$-функции определяется функционал с пооизвотьной «хороших функцией:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

В функционале происходит «сглаживание (усрелнение) сингупапиости δ-функции. В физике это отвечает замене молели точечнота обтеита некоторым распределением в єфизически бесконечно маломм облеме так что среднее значение распределенного объекта совпалает с величиной точечного.

Прежде всего подчеркнем, что δ-функция - это операторная величина, которая приобретает «реальный» смысл только если она стоит под знаком интеграла. Иными словами, δ-функция есть ядро линейного интегрального оператора. При этом само ядро не есть функция в обычном смысле.

Представления и определения δ-функции мы рассмотрим в следующем параграфе, а сейчас приведем, пожалуй, самое распространенное определение:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} \mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \int_{0}^{K} \cos Kx\ \mathrm{d}x \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \frac{\sin Kx}{x}.$$

Сам по себе предел $K \to \infty$ выражения (10.2), конечно, не существует, однако, если его правую часть умножить на «хорошую» (обычную) функцию, регулярную при $x = 0$ и проинтегрировать по интервалу, включаюшшему точку $x = 0$, а после интегрирования выполнить предельный переход, предел будет сушествовать:

$$\int_{-a}^{b} \delta(x)f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \int_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y = f(0)$$

Формула (10.3) определяет основное свойство δ-функции и ее можно рассматривать как определение (10.1).

Наглядно $\delta(x)$ можно представить себе как функцию, равную нулю при всех $x \neq 0$, но имеюшую в точке $x = 0$ столь сильную сингулярНОСТЬ, чТО

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

Если формально продифференцировать определение (10.2), получим определение производной от δ-функции:

$$\delta'(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \left(\frac{K\cos Kx}{x} - \frac{\sin Kx}{x^2}\right)$$

которая имеет «реальный» смысл только в интегральном выражении. Если после выполнения интегрирования выполнить предельный перехол так же, как и в формуле (10.3), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x = -f'(0)$$

Заметим, что интегрированием по частям, выражение (10.3) сводится к выражению (10.6), где производная δ-функции опрелелена в соответствии с(10.5)

представления дельта-функции Рассмотрим наиболее часто встречаюшиеся случаи появления δ-функции, когда некоторый параметр стремится к нулю. 1. Бесконечно медленное (адиабатическое) изменение физической величины (как правило - некоторого взаимодействия). В этом случае имеем интегральное выражение:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\mathrm{e}^{\pm ikx}\ \mathrm{d}k$$

Действительно, выражение (10.7) обладает необходимыми свойствами:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}\right|_{x\neq 0}=0$$

и соответственно при $x=0$ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon}=\infty$$

Вычислим теперь интеграл от дроби, стоящей под знаком предела:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\mathrm{d}x}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\pi\left(1+y^2\right)}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{\pi}\ \mathrm{res}\ \left.\frac{1}{1+y^2}\right|_{y=\mathrm{i}}=1$$

Дельта функция в представлении Дирихле 2. Периодически меняюшееся взаимодействие (представление Дирихле)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\mathrm{e}^{\pm ikx}\ \mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N}\cos kx\ \mathrm{d}k$$

Здесь роль малого ε играет $1/N$. В дальнейшем придется часто пользоваться теоремой Римана-Лебега: интеграл от произведения медленно меняющейся функции $f(x)$ и периодической функции с малым периодом и средиим за период равным нулю мал и в пределе равен нулю. Это имеет место, например для функций: $\exp(\mathrm{i}Nx), \sin Nx, \cos Nx$ при $N\to\infty$. Действительно, беря по частям интеграл, получаем

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\ \mathrm{d}x=f(x)\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{\mathrm{i}N}\right|_a^b-\frac{1}{\mathrm{i}N}\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\ \mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{i}N}\left(f(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nb}-f(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Na}\right)+\left.O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right|_{N\to\infty}\to 0$$

Проверим теперь выполнение основных свойств δ-функции для выражения (10.8). Заметим, что в конечных пределах

$$\int_a^b\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

но интеграл в бесконечных пределах (по всей оси) отличен от нуля и равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y=1$$

Таким образом, согласно сформулированной выше теореме получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\ \mathrm{d}x=\varphi(0).$$

Следовательно, функция (10.8) удовлетворяет основному свойству δ-функции (10.1). Рассмотренные два представления наиболее часто встречаются в физических задачах.

Дельта функция в представлении гауссовой экспоненты:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\Big|_{x\neq 0} = 0, \quad \text{Но} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\Big|_{x=0} = \infty.$$

Сама функция по знаком предела (10.10) выбрана нормированной на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon} \mathrm{d}x = 1$$

Для любой хорошей функции, как и в представлении Дирихле можем записать:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon} \varphi(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon} \mathrm{d}x = \varphi(0)$$

Дельта функция в представлении, похожем на Дирихле (?? никак не называется?)

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}$$

Вновь легко проверяем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\Big|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\Big|_{x=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Осталось убедиться, что интеграл в бесконечных пределах от рассматриваемой функции равен 1. Для этого вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha y}{y^2} \, \mathrm{d}y$$

Интеграл вычисляется дифференцированием по параметру α :

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha y \cos \alpha y}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha y}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = 1$$

Решая тривиальное дифференциальное уравнение $I'(\alpha) = 1$, получаем: $I(\alpha) = \alpha +$ const с «ачальным» условием $I(0) = 0$, поэтому $I(\alpha) = \alpha$. Заметим теперь, что заменой $x/\varepsilon = y$ мы сводим нужный нам интеграл к вспомогательному при $\alpha = 1$. Таким образом убеждаемся, что функция под знаком предела нормирована на 1. Далее, воспользовавшись теоремой Римана-Лебега, убеждаемся, что рассматриваемое представление удовлетворяет основному свойству δ-функции (10.1).

Дельта функция в представлении Пикара

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}$$

Здесь так же как в представлении Дирихле $\varepsilon = N^{-1}$. Легко убеждаемся:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}\Big|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}\Big|_{x=0} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} = \infty$$

Интеграл в бесконечных пределах равен 1 и не зависит от параметра N.

Представление Стильтьеса

$$\delta(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{2\pi\operatorname{ch}Nx}$$

$$\delta(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{2\pi\operatorname{ch}Nx}$$

Проверяем выполнение необходимых требований:

$$\lim_{N\to\infty}\left.\frac{N}{2\pi\operatorname{ch}Nx}\right|_{x\neq0}=0,\quad \lim_{N\to\infty}\left.\frac{N}{2\pi\operatorname{ch}Nx}\right|_{x=0}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{2\pi}=\infty$$

Убедимся, что функция нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N\,\mathrm{d}x}{2\pi\operatorname{ch}Nx}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N\mathrm{e}^{-Nx}}{\pi\left(1+\mathrm{e}^{-2Nx}\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$$

Убелиться в том, что представление (10.14) удовлетворяет необходимому свойству (10.1) можно так же, как в случае с быстро убываюшей гауссовой экспонентой (10.8).

В заключение параграфа отметим, что δ-функция размерна, ее размерность обратна размерности аргумента:

$$[\delta(x)]=[x]^{-1}$$

свойства Подчеркнем еще раз, что свойства обобщенных функций не зависят от выбора представления, аппроксимирующего данную функцию: свойства обобщенных функций выполняются в пространстве основных, «хороших функций. Например, в классе функций C^{∞}, которые при $|x|\to\infty$ стремятся к нулю вместе со своими производными любого порядка быстрее любой степени $1/|x|$. Таким образом, равенства в формулах понимаются как равенства соответствующих функционалов. В этом смысле обобщенную функцию можно рассматривать как ядро линейного интегрального оператора.

Например, основное свойство δ-функции (10. 1) для какой-либо функции $f(x)$ записанное в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$$

следует понимать как::

$$\begin{aligned}(f(x)\delta(x),\varphi(x))&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta_{\varepsilon}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=f(0)\varphi(0)=\\&=f(0)\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{\varepsilon}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Поскольку все свойства в классе основных функций переносятся на исследуемые функции, в физике принято в записи формул опускать функЦии $\varphi(x)$, и оставлять только «нужные ф функции $f(x)$, как это представлено в формуле (10.1a). Перечислим основные свойства δ-функции.

1. При «сдвиге» аргумента δ-функции имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta\left(x-x_0\right)\mathrm{d}x=f\left(x_0\right)$$

2. δ-функции четная:

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

3. δ-функции однородная:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Свойства (10.17) – (10.19) легко доказываются заменой переменной под интегралом в определении (10.1).

4. δ-функция от функции:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left|f'\left(x_i\right)\right|}\delta\left(x - x_i\right)$$

где $f\left(x_i\right) = 0, x_i-$ простые (некратные) корни.

Это свойство легко доказывается разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора до первого порядка в окрестностях нулей: $f(x) = f\left(x_i\right) + f'\left(x_i\right)\left(x - x_i\right) + \ldots$ с учетом свойств (10.18) и (10.19)

5 . $x\delta(x) = 0$

6. Производная δ-функции может быть записана только в интегральном соотношении:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta(x))\mathrm{d}x = -f'(0)$$

Это свойство доказывается интегрированием по частям с учетом обращения в нуль на пределах интегрирования «хороших» функций. Свойство (10.21) обобщается на производную любого порядка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\delta(x))\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

7. Интегральное представление (фурье-образ) δ-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ \mathrm{d}x = 2\pi\delta(k)$$

Это свойство можно рассматривать как обратное преобразование Фурье для 1, поскольку из перечисленных выше свойств следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{ikx}\ \mathrm{d}x = 1$$

8. Функционал, определяющий действие δ-функции, можно представить интегралом по замкнутому контуру в комплексной плоскости:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \varphi(0)$$

3.2.2 Применения

математические преобразования Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \cos k_1 x \cos kx\ \mathrm{d}x$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\left(k + k_1\right)x + \cos\left(k - k_1\right)x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k+k_1\right)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{l}\left(k-k_1\right)x}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\delta\left(k + k_1\right) + \delta\left(k - k_1\right)\right)$$

2. Вычислить $\delta(\sin x)$. Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента δ-функции: $x_n = \pi n$, соответственно $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$. Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \cos k_1 x \cos kx \, \mathrm{d}x$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\left(k + k_1\right) x + \cos\left(k - k_1\right) x\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k_1)x}\right) \mathrm{d}x = 2\pi\left(\delta\left(k + k_1\right) + \delta\left(k - k_1\right)\right)$$

2. Вычислить $\delta(\sin x)$. Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента δ-функции: $x_n = \pi n$, соответственно $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$. Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Коэффициенты Фурье равны

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - 2\pi k) \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

поэтому имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

4. Показать, что в смысле обобщенных функций справедлива формула:

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} = \delta(x)$$

Если точка $x = 0 \notin [a, b]$, по теореме Римана-Лебега

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{N\to\infty} \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} \varphi(x) \mathrm{d}x = 0$$

Обходя точку $x = 0$ в комплексной плоскости по контуру, показанному на рис. 10.1, получаем

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\mp\mathrm{i}0}\varphi(x)\mathrm{d}x = \pm\frac{\varphi(0)}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int_{C_\pm}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\mp\mathrm{i}0}\,\mathrm{d}x = $$
$$= \pm\frac{\varphi(0)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\pm}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \varphi(0)$$

Что соответствует основному свойству δ-функции.

Упражнения

1. Показать, что

$$\delta\left[(x-x_1)(x-x_2)\right] = \frac{1}{|x_1-x_2|}\left(\delta(x-x_1)+\delta(x-x_2)\right)$$

2. Получить полезную формулу:

$$\delta\left(x^2-a^2\right) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a))$$

3. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \sin k_1 x \sin kx\ \mathrm{d}x$$

4. Используя теорему Римана-Лебега, показать, что в смысле обобщенных функций

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\pm\mathrm{i}0} = 0$$

5. Показать, что

$$x^n\delta^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

6. Показать, что при $k \geq n$ справедлива формула:

$$x^n\delta^{(k)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(k-n)!}\delta^{(k-n)}(x)$$

Указание. Воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(x)g^{(k-i)}(x)$$

где

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности, имеем

$$x\delta^{(k)}(x) + k\delta^{(k-1)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad n = 1$$
$$x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x) \quad \text{при} \quad n = k$$

3.2.3 Дополнения

о разных штуках, которые мы также часто используем, схожих с ней.

!! все, что не связано с дельта-функцией вынесу в запись про функан!!!

Применения дельта функции

Задача о трамвайном билете с помощью дельта функции и метода перевала (?!!!!) (оч крутая задача, жаль, что вряд ли скоро ей займусь. другие решения не обсуждаю, где-то в другом месте их напишу, эту задачу подробно обсужу скорее всего в записи по математике.)

"Билетик" - это последовательность вида

$$n_1 n_2 \dots n_N m_1 m_2 \dots m_N$$

где для каждого $i = 1, \dots, N$ параметры n_i и m_i - это целые числа от 0 до 9.

Будем называть билетик "счастливым", если у него

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Обозначим число счастливых билетиков как $H(N)$. Ваша задача посчитать $H(N)$ в пределе $N \gg 1$.

Действовать можно следующим образом.

- Докажите, что для целых a и b выполняется

$$\delta_{a,b} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(a-b)},$$

где $\delta_{a,b} = 1$, если $a = b$, и $\delta_{a,b} = 0$, если $a \neq b$.

- Придумайте, как можно использовать свойство из прошлого пункта для того, чтобы представить $H(N)$ в виде интеграла от некоторой функции.

- Примените к полученному интегралу метод перевала. Это даст Вам асимптотическую формулу для $H(N)$.

Назовем билетик с $N = 3$ "трамвайным". Точное число счастливых трамвайных билетиков равно 55252. Наивно можно было бы ожидать, что раз $N = 3$ - число порядка единицы, то приближенный ответ для $H(3)$, полученный при помощи метода перевала, будет очень неточным. Так ли это? Иными словами, какова относительная погрешность асимптотического ответа для числа счастливых трамвайных билетиков?

интересные вопросы про дельта-функцию там нам загадок полно задают, их сюда и буду писать в параграфах.

особенно обсудим вопросы про ошибочное представление про нее.

3.2.4 Функция Хевисайда $\theta(x), \operatorname{sign} x$

Функция Хевисайда или функция включения $\theta(x)$ определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Производная θ-функции есть δ-функция. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

Заметим, что производная любой функции, имеющей разрыв первого рода, выражается через δ-функцию.

Функцию Хевисайда можно представить как предел ε -последовательности:

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Функцию $\operatorname{sign} x = |x|/x$ можно выразить через функцию Хевисайда:

$$\operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0 \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

Упражнения
1. Показать, что

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign} x$$

2. Определить производную функции $\operatorname{sign} x$.
3. Доказать, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty} (-i)N\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx} = \delta(x)$$

Указание. Проинтегрировать по частям и воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

3.2.5 Функция $\wp\frac{1}{x}$

Обобщенная функция $\wp\frac{1}{x}$ определяется через функционал следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$$

С произвольной функцией $f(x)$ такой интеграл называется интегралом в смысле главного значения и обозначается как

$$V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \wp\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Часто в физике возникают следующие ситуации, когда необходимо использовать обобщенную функцию $\wp\frac{1}{x}$, аппроксимируемую функциями:

$$\wp\frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\mathbf{i}} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{|k|}\mathbf{e}^{-|k|\varepsilon}\mathbf{e}^{|kx}\,\mathrm{d}k$$

$$\wp\frac{1}{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1-\cos Nx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \sin kx\,\mathrm{d}k$$

Действительно, в случае (10.31) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-x} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{x}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\int_{-x}^{x} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left(\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right)$$

В случае (10.32) справедливость представления доказывается аналогично, но следует дополнительно воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Функционал (10.30) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости z по контуру C_+ или C_-, обходящему точку $x = 0$ по полуокружности радиуса $\varepsilon \to 0$ соответственно сверху или снизу (рис. 10.2) и вычитания или добавления полувычета $i\pi\varphi(0)$:

$$\left(\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_+} \frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z \mp \mathrm{i}\pi\varphi(0)$$

От интеграла по контуру в комплексной плоскости (10.33) можно перейти к интегралу по действительной оси, записав его в виде

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_\pm}\frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x\mp\mathrm{i}\varepsilon}=\left(\frac{1}{x\mp\mathrm{i}0},\varphi(x)\right)=\left(\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)\pm\mathrm{i}\pi(\delta(x),\varphi(x))$$

Полученная формула (10.34) позволяет ввести еше две новые обобщенные функции Сохоцкого:

$$\frac{1}{x\pm i0}=\wp\frac{1}{x}\mp\mathrm{i}\pi\delta(x)$$

Формулы Сохоцкого могут быть также легко получены в предельном переходе дия ε -последовательностях:

$$\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{x\mp\mathrm{i}\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\mp\mathrm{i}\pi\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}$$

Пример Показать, что обобщенная функция $\wp\frac{1}{x}$ есть производная от $\ln|x|$. Действительно, запишем функционал:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x},\varphi(x)\right)=(\ln|x|,\varphi'(x))=-\int_{-\infty}^{\infty}(\ln|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Выделяя теперь ε -окрестность 0 и разбивая интеграл на три, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon}+\ln|x|\varphi(x)|_{\varepsilon}^{\infty}-\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\left(\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)$$

Упражнение Показать, что фурье-образ функции $1/x$ можно получить из представления (10.32), и он равен

$$\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sign}\,k$$

С обобщенными функциями Сохоцкого можно связать еще две функции, имеюшие большое применение в физике:

$$\delta_\pm(x)=\pm\frac{i}{2\pi}\frac{1}{x\pm i0}$$

Обобщенные функции (10.36) получаются в ε -последовательностях

$$\delta_\pm(x)=\pm\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon k\pm\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

Функции δ_+ обладают полезными свойствами:

$$\delta_+(x)+\delta_-(x)=\delta_(x)$$
$$\delta_+(x)-\delta_-(x)=\frac{i}{\pi}\wp\frac{1}{x}$$

Часть V
Другие спецфункции

(тут всё из книг про табличные интегралы, чего только нет! соберу что-то, что интересно или чего касался.)

3.3 K-функция

(пока не встречалась, но известная, хз, потом мб встретится.)

Теория K-функция, обычно обозначаемая $K(z)$, является обобщением гиперфакториала для комплексных чисел, подобно тому, как Гаммафункция является обобщением для факториала. Формально, K-функция определяется, как

$$K(z) = (2\pi)^{(-z-1)/2} \exp\left[\begin{pmatrix} z \\ 2 \end{pmatrix} + \int_0^{z-1} \ln(t!)dt\right].$$

Также определяется в замкнутой форме:

$$K(z) = \exp\left[\zeta'(-1, z) - \zeta'(-1)\right]$$

где $\zeta'(z)$ обозначает производную дзета-фуунцци Римана, $\zeta(a, z)-$ это дзета-фуункция Гурвица и

$$\zeta'(a, z) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d\zeta(s, z)}{ds}\right]_{s=a}.$$

K-функция связана с Гамма-фуункцией и с G-функцией Барнса; для целых чисел n можно написать:

$$K(n) = \frac{(\Gamma(n))^{n-1}}{G(n)}.$$

Также

$$K(n+1) = 1^1 2^2 3^3 \cdots n^n.$$

Для положительных аргументов принимает минимальное значение $0,879786843\ldots$ в точке $x_{\min} = 0,53768886\ldots$

3.4 Эллиптическая функиия Вейеритрасса $\wp(u)$

(такое есть и все. из сборника Градштейна Рыжика)

8.160 Эллиптическая функиия Вейеритрасса $\wp(u)$ определяется равенством:

1. $8(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{m,n}\left\{\frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right\}$, Cu 307(6) где знак $\sum$ указывает на то, что суммирование распространяетея на все комбинации целых значений m и n, за исключением комбинации $m = n = U_>$ а $2\omega_1$ и $2\omega_2$ суть периоды функции $\wp(u)$. Очевидно,

2. $8\left(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_2\right) = 8(u)$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0$,

3. $\frac{d}{du} \odot (u) = -2\sum_{m,n} \frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^3}$, где суммирование распространяется на все целые значения m и n. Ряды 8.160 1. и 8.1603. сходятся повсюду, за исключением полюсөв, т. е. точек $2m\omega_1 + 2n\omega_2(m$ и $n-$ делые числа).

3.5 Шаровые функции

(такое есть и все. из сборника Градштейна Рыжика)

7.11 Паровые функции 7.111 $\int_{\cos\varphi}^{1} \mathrm{P}_{\vartheta}(x)dx = \sin\varphi \mathrm{P}_{v}^{-1}(\cos\varphi)$ 7.112

1. $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)dx = 0 \quad [n \neq k] = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad [n = k].$ CM III 185, VB II 120

2. $\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}_n^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)dx = (-1)^m \frac{1-(-1)^{n+k}(n+m)'}{(k-n)(k+n+1)(n-m)!}.$ ВТФ I 171(18)

3. $\int_{-1}^{1} P_v(x)P_\sigma(x)dx = \frac{2\pi \sin\pi(\sigma-v)+4\sin(\pi v)\sin(\pi\sigma)[\psi(v+1)-\psi(\sigma+1)]}{\pi^2(\sigma-v)(\sigma+v+1)} = \frac{\pi^2-2(\sin\pi v)^2\psi'(v+1)}{\pi^2\left(v+\frac{1}{2}\right)}[\sigma = v].$ ВТФ I 170(9)u

4 $\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}_v(x)\mathrm{Q}_\sigma(x)dx = = \frac{[\psi(v+1)-\psi(\sigma+1)][1+\cos(\pi\sigma)\cos(v\pi)]-\frac{\pi}{2}\sin\pi(v-\sigma)}{(\sigma-v)(\sigma+v+1)}$ $[\sigma + v + 1 \neq 0; v, \sigma \neq -1, -2, -3, \ldots];$ ВТФ 170(11)

$$= \frac{\frac{1}{i}\pi^2 - \psi'(v+1)\left[1 + (\cos v\pi)^2\right]}{2v+1} \quad [v = \sigma, v \neq -1, -2, -3, \ldots].$$

ВТФ I 170 (12)

5. $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_v(x)\mathrm{Q}_\sigma(x)dx = = \frac{1-\cos\pi(\sigma-v)-2\pi^{-1}\sin(\pi v)\cos(\pi\sigma)[\psi(v+1)-\psi(\sigma+1)]}{(v-\sigma)(v+\sigma+1)}$ $[\operatorname{Re} v > 0, \operatorname{Re}\sigma > 0, \sigma \neq v];$ ВТФI 170(13) $= -\frac{\sin(2v\pi)\psi'(v+1)}{\pi(2v+1)}[\operatorname{Re} v > 0, \sigma = v].$ ВТФ I 171(14)

Часть VI
Дополнения

.0.1 Особенности записи

(пока особо без особенностей, просто сборка функций)

О разных мелких особенностях Я раздел с задачами вынес в отдельную запись, потому что не вижу смысла в одной записи это делать, все равно запись схожа очень со справочником, и все равно задачи по ним - по сути в очень многих разделах физики и математики.

.0.2 Литература

Основная обучающая литература
Лебедев
Его лекции пока первые в планах в этой теме.

Другая профессиональная литература
И. С. Градштейн, И. М. Рыжик Таблицы интегралов, рядов, произведений
Более 1100 страниц крайне сложных формул, некоторые добавил, но вообще, выйти на их уровень - отдельная большая тренировка, не до этого.
Paul F. Byrd, Morris D. Friedman Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists
Скорее всего тоже многое возьму из нее.

Список литературы