Path Integral Mathematics

Yury Holubeu *

2 декабря 2023 г.

Запись не предназначена для распространения.

Обсуждается гравитационное линзирование и его приложения.

Цели:

1) 4 дня как минимум нужно подумать, ну и дописать запись, потом какие-то цели можно формулировать.

Содержание

*yura.winter@gmail.com

1 Предисловие

Обсудим минимальное, что хорошо бы понимать для занятий предметом.

1.1 Основная мотивация

Обсудим основную мотивацию, которая позволит нам познать предмет без проблем.

Результаты

Обсудим, что полезного и важного человечество получило, поняв этот предмет.

1.2 Головоломки для мотивации

(пишу самое крутое, просто разные поболтать - в дополнениях)

1.2.1 Лучшие идейные головоломки

1.2.2 Лучшие технические головоломки

Часть I

Path Integral in a Nutshell

(потом пропишу, пока что явно не тот уровень.)

2 On main formulas

3 On construction and properties

3.1 On main formulas for applications

Часть II

Теория интеграла по траекториям

4 Построение интеграла по траекториям

вставлю скоро

4.1 обзор методов построения и их отличия

??

чем интеграл для поля от интеграла для волновой функции отличен?

отличие интеграла по траекториям в квантовой механике и в квантовой теории поля

очень актуально для понимания происходящего

4.2 типичное построение интеграла по траекториям

построение для волновой функции

Рассмотрим одномерную квантовую систему, описываемую волновой функцией в координатном представлении.

В начальный момент времени t' обозначим:

$$|\Psi\left(t=t'\right)\rangle=|q'\rangle$$

где q'– обобщенная координата.

А состояние в момент времени t получается в результате разбиения всего интервала $t-t'$ на $N\to\infty$ отрезков, и действием оператора эволюции $\hat{U}\left(t,t'\right)=\hat{\mathrm{T}}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t'}^{t}\hat{H}\ \mathrm{d}t\right\}$ на начальное состояние:

$$|\Psi(t)\rangle=\hat{U}\left(t,t'\right)|\Psi\left(t'\right)\rangle$$

В соответствии с таким разбиением интервала , так что $\mathrm{d}t=\left(t-t'\right)/N$ при $N\to\infty$

Бесконечно малый сдвиг по времени $t'\to t_1=t'+\mathrm{d}t=t'+(t-t')/N$ дает

$$|\Psi\left(t'+\mathrm{d}t\right)\rangle=\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\left(\hat{q},\hat{p},t_1\right)\mathrm{d}t\right\}|q'\rangle+\mathcal{O}\left(\mathrm{d}t^2\right)$$

и, подставляя единичные операторы в координатном и импульсном представлениях, находим

$$|\Psi\left(t_1\right)\rangle=\int\mathrm{d}q_1\,|q_1\rangle\,\langle q_1\mid p_1\rangle\,\frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi\hbar}\left\langle p_1\left|\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\left(\hat{q},\hat{p},t_1\right)\mathrm{d}t\right\}\right|q'\right\rangle+\mathcal{O}\left(\mathrm{d}t^2\right)$$

Для квадратичных по импульсу гамильтонианов вида

$$\hat{H}(\hat{q},\hat{p},t)=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{q},t)$$

очевидно,

$$\langle p|\hat{H}(\hat{q},\hat{p},t)|q\rangle=\mathcal{H}(q,p,t)\langle p\mid q\rangle$$

где $\mathcal{H}(q, p, t)-$ гамильтониан классической системы. Поэтому, опуская члены второго порядка малости по инкременту времени, с учетом

$$\langle p \mid q\rangle = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p q}$$

получаем

$$\left|\Psi\left(t_1\right)\right\rangle = \int\left|q_1\right\rangle \frac{\mathrm{d} q_1\, \mathrm{d} p_1}{2 \pi \hbar} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_1\left(q_1-q_0\right)-\mathcal{H}\left(q_1, p_1, t_1\right) \mathrm{d} t\right]}$$

где $q_0=q'$. Повторяя эту процедуру N раз, приходим к выражению

$$|\Psi(t)\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int\left|q_N\right\rangle \prod_{k=1}^N \frac{\mathrm{d} q_k\, \mathrm{d} p_k}{2 \pi \hbar} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_k\left(q_k-q_{k-1}\right)-\mathcal{H}\left(q_k, p_k, t_k\right) \mathrm{d} t\right]}$$

Введем скорость

$$\dot{q}\left(t_k\right)=\frac{q_k-q_{k-1}}{\mathrm{d} t}$$

Тогда множество точек $\left\{q_k\right\}$ образуют ломаную траекторию, которая показана на рис. 7.1. Точно также вводится и траектория в импульсном пространстве $\left\{p_k\right\} \rightarrow p(t)$.

Тогда произведение экспоненциальных факторов под интегралом в (13.6) сводится к

$$\exp \left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{t'}^t[p(t) \dot{q}(t)-\mathcal{H}(q(t), p(t), t)] \mathrm{d} t\right\}=\exp \left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S\left(t', t\right)\right\}$$

где $S\left(t', t\right)-$ классическое действие на траектории в фазовом пространстве $\{q(t), p(t)\}$ с граничными условиями в координатном пространстве $q\left(t'\right)=q'$ и $q(t)=q_N$. Получающееся выражение для состояния

$$\left|\Psi\left(t''\right)\right\rangle=\lim_{N \rightarrow \infty} \int\left|q_N\right\rangle \prod_{k=1}^N \frac{\mathrm{d} q_k\, \mathrm{d} p_k}{2 \pi \hbar} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S\left(t', t''\right)}$$

обозначают как интеграл по траекториям

$$\left|\Psi\left(t''\right)\right\rangle=\int \mathrm{d} q_N\left|q_N\right\rangle \int \mathcal{D} q \mathcal{D} p \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S\left[q, p ; t', t''\right]}$$

где (первый и последний раз) указана функциона.льная зависимость классического действия S от траектории в фазовом пространстве, а мера интегрирования получается при предельном переходе к континууму

$$\mathcal{D} q \mathcal{D} p=\frac{\mathrm{d} p_N}{2 \pi \hbar} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{\mathrm{d} q_k\, \mathrm{d} p_k}{2 \pi \hbar}$$

и поэтому фейнмановский интеграл по траекториям называют также континуа.Льным интегралом. Матричный элемент $\left\langle q'' \mid \Psi\left(t''\right)\right\rangle$ есть интеграл по траекториям

$$\left\langle q'' \mid \Psi\left(t''\right)\right\rangle=\int \mathcal{D} q \mathcal{D} p \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S\left(t', t''\right)}$$

где интегрирование по q_N «снялось» вследствие

$$\left\langle q'' \mid q_N\right\rangle=\delta\left(q''-q_N\right)$$

так что траектории движения в координатном пространстве имеют граничные условия

$$q\left(t'\right)=q', \quad q\left(t''\right)=q''$$

Подчеркнем, что матричный элемент - это число или числовая функция, т.е. к.лассический объект, и континуальный интеграл построен из чисто к.лассических величин: траекторий и действия на них.

Физический смысл такого представления матричного элемента в виде интеграла по траекториям прост: амплитуда перехода из точки $q(t')=q'$ в точку $q(t'')=q''$ есть супер-mopuu. Как видим, в фейнмановской формулировке прослеживается явная свяЗь с принципом Гюйгенса в теории волн, а именно, интеграл по траекториям устанав.ливает квантовый аналог принципа Гюйгенса. Оператор эволюции можно представить как

$$\hat{U}(t'',t')=\int \mathrm{d}q''\,|q''\rangle\left\langle q''\left|\hat{U}(t'',t')\right|q'\right\rangle \mathrm{d}q'\,\langle q'|$$

откуда

$$\hat{U}(t'',t')=\int \mathrm{d}q''\mathrm{d}q'\,|q''\rangle\langle q'|\int \mathcal{D}q\mathcal{D}p\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t',t'')}$$

1. Классический предел. При $\hbar\to 0$ под интегралом стоит функция с быстро осциллирующей фазой $S/\hbar$, за исключением случая, когда у действия имеется стационарная точка:

$$\delta S=0,\quad \delta q(t')=\delta q(t'')=0$$

т.е. вариация действия на траектории с фиксированными концами обрашается в нуль. Но это есть ничто иное, как принщип наименьшего действия в классической механике. Значит,

$$Z_0=\int \mathcal{D}q\mathcal{D}p\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t',t'')}\approx A\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_0(t',t'')}+\text{ квантовые поправки}$$

где S_0 - действие на «прямой» классической траектории. 2. Иитегрировамие по импульсу. Интеграл по импульсам можно взять, так как

$$\mathcal{I}_p=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_k}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_k\dot{q}_k-\frac{p_k^2}{2m}\right]\mathrm{d}t\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_k}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[-\frac{(p_k-m\dot{q}_k)^2}{2m}+\frac{m\dot{q}_k^2}{2}\right]\mathrm{d}t\right\}$$

откуда

$$\mathcal{I}_p=\mathcal{N}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m\dot{q}_k^2}{2}\,\mathrm{d}t\right\}$$

где нормировочная константа $\mathcal{N}$ не зависит от траектории. Тогда

$$Z_0=\mathcal{N}\int \mathcal{D}q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t',t'')}$$

где уже действие зависит только от траектории в координатном пространстве:

$$S(t',t'')=\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\left\{\frac{m\dot{q}^2(t)}{2}-V[q(t),t]\right\}$$

а

$$\mathcal{N}=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\mathcal{N}$$

3. Поворот Вика. Для интегрирования, в частности, для оценки константы $\mathcal{N}$ часто используют поворот Вика контура интегрирования по времени. Формально полагают, что

$$\mathrm{d}t=\mathrm{i}\mathrm{d}t_E$$

где t_E– «евклидово время» (см. рис. 7.2). Для правомерности такого поворота необходимо, чтобы на пути смещения контура не было особых точек. Обычно полагают, что это условие выполнено. Тогда

$$\mathcal{N}=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d} p_k}{2 \pi \hbar} \exp \left\{-\frac{1}{\hbar} \frac{\left(p_k-m \dot{q}_k\right)^2}{2 m} \mathrm{~d} t_E\right\}=\sqrt{\frac{m}{2 \pi \hbar \mathrm{d} t_E}}$$

Отсюда видно, что, во-первых, нормировочный фактор, действительно, не зависит от параметров траектории, и его можно вынести из под знака континуального интеграла. Вовторых, корректное определение континуального предела подразумевает «регуляризацию"этого расходящегося вклада.

Рассмотрим теперь частицу, на которую действует внешняя сила $j(t)$, зависящая от времени, так что

$$\mathcal{H}=\frac{p^2}{2 m}+V(q)-j(t) q$$

В этом случае говорят о гамильтониане с источником j. В присутствии источника интеграл по траекториям функционально зависит от j

$$Z(j)=\mathcal{N} \int \mathcal{D} q \exp \left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{t^{\prime}}^{t^{\prime \prime}} \mathrm{d} t\left[\frac{m \dot{q}^2(t)}{2}-V(q(t))+j(t) q(t)\right]\right\}$$

или

$$Z(j)=\mathcal{N} \int \mathcal{D} q \exp \left\{\frac{i}{\hbar} S\left(t^{\prime}, t^{\prime \prime}, j\right)\right\}$$

Функциональная замена переменных

$$q(t) \rightarrow \tilde{q}(t)=q(t)+\delta q(t), \quad \delta q\left(t^{\prime}\right)=\delta q\left(t^{\prime \prime}\right)=0$$

представляет собой сдвиг, который не изменяет ни меры интегрирования

$$\mathcal{D} q=\mathcal{D} \tilde{q}$$

ни значение функтиона.льного интеграла

$$Z(j)=\mathcal{N} \int \mathcal{D} \tilde{q} \exp \left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \tilde{S}\left(t^{\prime}, t^{\prime \prime}, j\right)\right\}$$

Вычитая из функционала (13.23) самого себя в записи (13.21), находим при $\delta q(t) \rightarrow 0$

$$\frac{\delta Z(j)}{\delta q(t)}=0 \Leftrightarrow \int \mathcal{D} q \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \frac{\delta S}{\delta q(t)} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S\left(t^{\prime}, t^{\prime \prime}, j\right)}=0$$

изображение интеграла по траекториям

почему ломанные?

какие траектории по мы берем, какие нет?

источник и производящий функционал (?)

(киселев, далее)

Рассмотрим теперь частицу, на которую действует внешняя сила $j(t)$, зависяшая от време- Ни, так что

$$\mathcal{H}=\frac{p^2}{2 m}+V(q)-j(t) q$$

В этом случае говорят о гамильтониане с источником j. В присутствии источника интеграл по траекториям функциона.льно зависит от j

$$Z(j)=\mathcal{N}\int\mathcal{D}q\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\left[\frac{m\dot{q}^{2}(t)}{2}-V(q(t))+j(t)q(t)\right]\right\}$$

И.Ли

$$Z(j)=\mathcal{N}\int\mathcal{D}q\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left(t',t'',j\right)\right\}$$

Функциональная замена переменных

$$q(t)\to\tilde{q}(t)=q(t)+\delta q(t),\quad \delta q\left(t'\right)=\delta q\left(t''\right)=0$$

представляет собой сдвиг, который не изменяет ни меры интегрирования

$$\mathcal{D}q=\mathcal{D}\tilde{q}$$

ни значение функтиона.льного интеграла

$$Z(j)=\mathcal{N}\int\mathcal{D}\tilde{q}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tilde{S}\left(t',t'',j\right)\right\}$$

Вычитая из функционала (13.23) самого себя в записи (13.21), находим при $\delta q(t)\to 0$

$$\frac{\delta Z(j)}{\delta q(t)}=0\Leftrightarrow\int\mathcal{D}q\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\delta S}{\delta q(t)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t',t'',j)}=0$$

Сюда нужно подставить вариацию Эйлера

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)}=-m\ddot{q}(t)-V'(q(t))+j(t)$$

где $V'-$ производная потенциала по координате, так что

$$\int\mathcal{D}q\left\{m\ddot{q}(t)+V'(q(t))-j(t)\right\}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t',t'',j)}=0$$

Значит, мы установили квантовый аналог уравнения Лагранжа-Эйлера: уравнения движения остаются справедливыми в смысле интеграла по траекториям.

Наличие источника позволяет преобразовать квантовые уравнения Эйлера-.Лагранжа. Действительно,

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\delta Z(j)}{\delta j(t)}=\mathcal{N}\int\mathcal{D}q\cdot q(t)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t',t'',j)}$$

поэтому (13.25) представимо в виде

$$m\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}t^{2}}\left\{-\mathrm{i}\hbar\frac{\delta Z(j)}{\delta j(t)}\right\}=-V'\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta j(t)}\right)Z(j)+j(t)Z(j)$$

Принято делать подстановку

$$Z(j)=\mathcal{N}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}G(j)}$$

тогда

$$m\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}t^{2}}\left\{\frac{\delta G(j)}{\delta j(t)}\right\}=-\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}G(j)}V'\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta j(t)}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}G(j)}+j(t)$$

Это уравнения Швингера-Дайсона.

(??? да ну, а в других местах вид другой!)

гармонический осциллятор через интеграл по траекториям

Для иллюстрации приведем пример гармонического осциллятора:

$$V(q)=\frac{m\omega_0^2}{2}q^2 \Rightarrow V'(q)=m\omega_0^2 q$$

откуда уравнение на $G(j)$ для осциллятора принимает вид

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left\{\frac{\delta G(j)}{\delta j(t)}\right\}=-m\omega_0^2\frac{\delta G(j)}{\delta j(t)}+j(t)$$

Это - функциона.льное уравнение с источником. Функционал $G(j)$ можно разложить в функциональный ряд

$$G(j)=\mathcal{G}_0+\int \mathcal{G}^{(1)}(t)j(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2!}\int \mathcal{G}^{(2)}\left(t_1,t_2\right)j\left(t_1\right)j\left(t_2\right)\mathrm{d}t_1\ \mathrm{d}t_2+\ldots$$

Очевидно,

$$\mathcal{G}_0=\ln Z_0/\mathcal{N}$$

а основное уравнение (13.30) содержит в себе уравнения на все остальные функции $\mathcal{G}^n\left(t_1,\ldots,t_n\right)$, потому что его можно дифференцировать и полагать $j=0$. Так, полагая $j=0$, находим

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathcal{G}^{(1)}(t)=-m\omega_0^2\mathcal{G}^{(1)}(t)$$

- уравнение для свободного классического осциллятора. Его решение - это $\mathcal{G}^{(1)}(t)=q_0(t)$, т.е. классическая траектория с заданными граничными условиями. Вариационная производная основного уравнения дает

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t_1^2}\left\{\frac{\delta^2 G(j)}{\delta j\left(t_1\right)\delta j\left(t_2\right)}\right\}+m\omega_0^2\frac{\delta^2 G(j)}{\delta j\left(t_1\right)\delta j\left(t_2\right)}=\delta\left(t_1-t_2\right)$$

так что, полагая $j=0$, находим

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t_1^2}\mathcal{G}^{(2)}\left(t_1,t_2\right)+m\omega_0^2\mathcal{G}^{(2)}\left(t_1,t_2\right)=\delta\left(t_1-t_2\right)$$

т.е. уравнение для двухточечной функции Грина. Домножая это уравнение на $j\left(t_2\right)$ и интегрируя по t_2, очевидно, находим уравнение движения для осциллятора с внешней силой (источником)

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t_1^2}+\omega_0^2\right\}\int \mathcal{G}^{(2)}\left(t_1,t_2\right)j\left(t_2\right)\mathrm{d}t_2=j\left(t_1\right)$$

где решение этого уравнения записано в виде вынужденных колебаний

$$q(j;t)=\int \mathcal{G}^{(2)}\left(t,t_2\right)j\left(t_2\right)\mathrm{d}t_2$$

причем общее решение получается суммированием свободных колебаний $q_0(t)$ и вынужденных $q(j;t)$. Поскольку исходное уравнение для двухточечной функции содержит оператор, симметричный по аргументам t_1 и t_2, и зависит от источника с аргументом t_1-t_2 его общее решение можно представить в виде

$$\mathcal{G}^{(2)}\left(t_1,t_2\right)=\mathcal{G}^{(2)}\left(t_1-t_2\right)+C\cdot\mathcal{G}^{(1)}\left(t_1\right)\mathcal{G}^{(1)}\left(t_2\right)$$

т.е. с точностью до вклада свободной волны с произвольной нормировкой C. Последний вк.лад просто дает добавку к траектории

$$\Delta q(t)=C\cdot q_0(t)\int q_0\left(t_2\right) j\left(t_2\right) \mathrm{d} t=\tilde{C}\cdot q_0(t)$$

и эта добавка заменяет уже имеющийся вклад $q_0(t)$ от $\mathcal{G}^{(1)}(t)$

$$q_0(t)\rightarrow q_0(t)(1+\tilde{C})$$

что несовместимо с заданными граничными условиями, если только C не равно нулю. Значит, для осциллятора имеем точное равенство

$$\mathcal{G}^{(2)}\left(t_1, t_2\right)=\mathcal{G}^{(2)}\left(t_1-t_2\right)$$

Точно также при $n\geqslant 3$ уравнение Швингера-Дайсона означает, что

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d} t_1^2}\mathcal{G}^{(n)}\left(t_1,\ldots, t_n\right)+m\omega_0^2\mathcal{G}^{(n)}\left(t_1,\ldots, t_n\right)=0$$

и, следовательно, многоточечные функции Грина для осциллятора удовлетворяют свободному уравнению и могут быть построены в виде композиций $\mathcal{G}^{(1)}\left(t_k\right)$, что опять приводит к

нулевым коэффициентам нормировки из-за граничных условий (свободное движение уже включено в линейный вклад $\mathcal{G}^{(1)}$), так что

$$\mathcal{G}^{(n)}\left(t_1,\ldots, t_n\right)=0,\quad n\geqslant 3$$

Л.ля осциллятора

$$G(j)=\mathcal{G}_0+\int\mathcal{G}^{(1)}(t) j(t)\mathrm{d} t+\frac{1}{2!}\int\mathcal{G}^{(2)}\left(t_1-t_2\right) j\left(t_1\right) j\left(t_2\right)\mathrm{d} t_1\ \mathrm{d} t_2$$

Это есть исключительное свойство гармонического осциллятора - системы, гамильтониан которой квадратичен как по импульсу, так и по координате.

Подынтегра.льные выражения принято изображать в виде диаграмм Фейнмана согласно правилам:

1. источнику $j\left(t_k\right)$ сопоставляется луч, показанный штриховой линией с началом в точке t_k

2. одноточечной функции Грина $\mathcal{G}^{(1)}\left(t_k\right)$ сопоставляется отрезок, показанный сплошной линией с началом в точке t_k и концом в точке, помеченной знаком $\otimes$, который обозначает зависимость от граничных условий;

3. многоточечная функции Грина $\mathcal{G}^{(n)}\left(t_1,\ldots, t_n\right)$ изображается отрезками сплошной линии с началами в точках $t_1,\ldots, t_n$ и обшим концом в точке, показанной кружком.

(а дальше вообще то, что я не понял в принципе)

4.3 Интеграл по траекториям в теории случайных процессов

связь с типичным интегралом по траекториям

теория

Построим простейшую модель, в которой есть случайность. Пусть у нас есть простейшее уравнение динамики системы: $\dot{x}(t)=-f(x(t))$, добавим к нему случайную величину, то, что получим называется уравнением Ланжевена:

$$\dot{x}(t)=-f(x(t))+\xi(t).$$

Нашу добавку можно интерпретировать как случайную силу.

Простейшая задача, которую хочется решать, это задача о том, что если мы в момент времени $t = 0$ поместили частицу в точку x_i, с какой вероятностью она перейдет в окрестность точки x_f. (хз, почему, но запишем ее так):

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \left\langle \delta\left(x_f - x_\xi(t)\right)\right\rangle_\xi$$

Постараемся записать это в форме, которая нас сдвинет дальше. Преобразуем полный переход через сумму переходов за равные промежутки времени $\delta t = t/N$:

$$\delta(x_f - x_\xi(t)) = \delta(x_f - x_{n_1}))\delta(x_{n_1} - x_\xi(t)) = \ldots = \prod_{k=1;}^{N} \delta(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}); \qquad n_0 = i,\ n_N = f. \quad (4.1)$$

Хочется переписать каждый переход с учетом уравнений движения. Для этого посмотрим на дискретную их версию в интегральной форме, которое приближенно записывается в виде:

$$x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right) = -\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt f(x(t)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t) \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2}\left(t_{k+1} - t_k\right)\left(f\left(x\left(t_{k+1}\right)\right) + f\left(x\left(t_k\right)\right)\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t) \quad (4.2)$$

Введем обозначение $x_k = x\left(t_k\right)$, в итоге один переход записывается как:

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{\delta t}{2}\left(f\left(x_{k+1}\right) + f\left(x_l\right)\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t)$$

Вставка в дельта-функцию производится за счет ее свойства: $\delta(x_1 - x_2) = |f'(x_c)|\delta(f(x_c))$, поэтому

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int dx_{N-1}\ldots dx_1 \prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{\delta t}{2} f'\left(x_k\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left\langle \delta^{N-1}\left(x_{k+1} - x_k + \frac{\delta t}{2}\left(f\left(x_{k+1}\right) + f\left(x_k\right)\right) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t)\right)\right\rangle_\xi \quad (4.3)$$

Перепишем далее каждую дельта функцию через $\delta(x) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx}$, получим:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int dx_{N-1}\ldots dx_1 dp_N \ldots dp_1 \prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{\delta t}{2} f'\left(x_k\right)\right)$$
$$\cdot\, e^{i\sum_{k=1}^{N} p_k\left(x_k - x_{k-1} + \frac{\delta t}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k-1})\right)\right)}\left\langle e^{-i\sum_{k=1}^{N} p_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt\xi(t)}\right\rangle_\xi \quad (4.4)$$

Далее учтем именно свойства самого случайного процесса, за счет добавления производящего функционала для марковского случая:

$$F[\chi(t)] \equiv e^{-W[\chi(t)]} \equiv \left\langle e^{-i\int_0^l dt' G(\chi(t'))}\right\rangle_\xi$$

Получим:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int dx_{N-1} \dots dx_1 dp_N \dots dp_1 \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{\delta t}{2} f'\left(x_k\right)\right) \cdot$$
$$\cdot\, e^{i \sum_{k=1}^{N} p_k \left(x_k - x_{k-1} + \frac{\delta t}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k-1})\right)\right)} \left\langle e^{-\sum_{k=1}^{N} \delta t G(p_k)} \right\rangle_{\xi} \quad (4.5)$$

Теперь у нас есть готовое выражение для дискретного времени, которое будем решать. Его можно записать и в случае непрерывных переходов, для этого нужно перейти к непрерывной мере, записав бесконечное произведение в виде члена в экспоненте:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} \mathcal{D}x(\tau) \mathcal{D}p(\tau) e^{i \int_0^t d\tau p(\tau)(\dot{x}(\tau) + f(x(\tau))) - \int_0^t d\tau G(p(\tau)) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau f'(x(\tau))}$$

А также в случае гауссовой силы $G(\chi) = D\chi^2$ после интегрирования по импульсу получаем (???):

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau (x(\tau) + f(x(\tau)))^2 + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau f'(x(\tau))}$$

Или в более понятном виде:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = e^{-\frac{1}{2D} \int_{x_i}^{x_f} dy f(y)} \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^t d\tau \left(\frac{\dot{x}^2(\tau)}{4D} + \frac{1}{4D} f^2(x(\tau)) - \frac{1}{2} f'(x(\tau))\right)}.$$

Часть III
Problems

4.3.1 Вопросы на понимание

почему он не бесконечность?

что такое интеграл по траекториям для полей? как он отличается от интеграла для частиц?

как континуальный интеграл связан с принципом наименьшего действия в механике?

оказывается, в квантовой механике интегралы по другим путям существуют, в классической же - нет.

про измерения движущегося объекта в середине движения и интеграл по траекториям

что даже если ты проводишь измерения в середине интеграла по траекториям, все равно свет может идти по путям, которые вне этой плоскости измерений.

мб хреново сформулировал, мб забью на этот вопрос.

как его аналитически продолжить в комплексную плоскость?

связано ли описание системы интегралом по траекториям с соотношением неопределенностей?

как континуальный интеграл связан с принципом наименьшего действия?

переход тут в механику такой мб???

не знаю.

Часть IV
Другая теория интеграла по путям

(по Виттену напишу мб потом)

4.4 основные его свойства

4.4.1 Интеграл по Виттену

Интеграл Фейнмана в лоренцевской сигнатуре это схематично форма

$$\int D\Phi \exp(iI(\Phi))$$

где Φ это некоторые поля и $I(\Phi)$ это действие. Чаще всего $I(\Phi)$ это полном с вещественными значениями от Φ и его производных.

Имеется также евклидова версия интеграла по путям, а именно

$$\int D\Phi \exp(-I(\Phi))$$

где теперь $I(\Phi)$ это полином, в котором действительная часть положительна, и который равен комплексно спряженному себе при обращении ориентации пространства-времени.

аналогия с конечномерным интегралом

Простейшее пояснение природы фейнмановского интеграла, это одномерный интеграл. Например, прототип Евклидова интеграла имеет вид:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(S(x))$$

где $S(x)$ полином, например

$$S(x) = -x^4/4 + ax$$

где a - параметр.

В таком интеграле мы можем аналитически продолжить параметр интегрирования до голоморфной функции от $z = x + iy$ и рассмотреть интеграл по в принципе возможным разным циклам интегрирования z -плоскости:

$$I_\Gamma = \int_\Gamma \mathrm{d}z \exp(S(z))$$

Интеграл по замкнутому контуру Γ занулится, как интеграл от изначальной функции.

Вместо этого возьмем в качестве Γ путь, соединяющий две разные области на бесконечности, в которых $\operatorname{Re} S(z) \to -\infty$.

В нашем примере таких 4 области, где фаза z близка к $k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3)$

и поэтому в принципе у нас три цикла интегрирования $\Gamma_r, r = 0, 1, 2$.

в этих обозначениях цикл Γ_r проходит между $k = r$ и $k = r + 1$,

как мб будет на рисунке, если я его прикреплю.

В общем случае, циклы интегрирования принимают значения в какой-то конкретной группе гомологий.

В нашем случае у нас группа гомологий третьего ранга, генерируемая $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$.

(и что дальше с этим примером?)

Теперь посмотрим на такой же интеграл в n размерном пространстве,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \exp\left(S\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$$

и опять, аргументы полинома S можно снова аналитически продолжить из вещественных значений x_i в комплексные $z_i = x_i + iy_i$ и заменить интеграл другим, по подходящему контуру для интегрирования $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$

$$\int_{\Gamma} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \ldots \mathrm{d}z_n \exp\left(S\left(z_1, \ldots, z_n\right)\right)$$

The appropriate integration cycles are n -cycles, simply because what we are trying to integration is the n -form $\mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \ldots \mathrm{d}z_n \exp\left(S\left(z_1, \ldots, z_n\right)\right)$. Of course, the differential form that we are trying to integrate is middle-dimensional simply because, in analytically continuing from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{C}^n$, we have doubled the dimension of the space in which we are integrating. So what began in the real case as a differential form of top dimension has become middle-dimensional upon analytic continuation.

In [2], it was shown that, at least in the case of three-dimensional Chern-Simons gauge theory, these concepts can be effectively applied in the infinite-dimensional case of a Feynman integral. But what do we learn when we do this? When one constructs different integration cycles for the same integral - or the same path integral - how are the resulting integrals related? For one answer, return to the original example I_Γ. Regardless of Γ (using only the facts that it is a cycle, without boundary, that begins and ends in regions where the integrand is rapidly decaying, so that one can integrate by parts , I_Γ obeys the differential

equation

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}a^3} - a\right) I_\Gamma = 0$$

Indeed, I_Γ where Γ runs over a choice of three independent integration cycles gives a basis of the three-dimensional space of solutions of this third-order differential equation.

For quantum field theory, the analog of (1.8) are the Ward identities obeyed by the correlation functions. Like (1.8), they are proved by integration by parts in function space, and do not depend on the choice of the integration cycle. One might think that different integration cycles would correspond to different vacuum states in the same quantum theory, but this is not always right. In some cases, as we will explain in section 2.4 with an explicit example, different integration cycles correspond to different quantum systems that have the same algebra of observables. In other cases, the interpretation is more exotic.

The first goal of the present paper is to apply these ideas to a particularly basic case of the Feynman path integral. This is the phase space path integral of nonrelativistic quantum mechanics with coordinates and momenta q and p :

$$\int Dp(t) Dq(t) \exp\left(i \int (p\mathrm{d}q - H(p,q)\mathrm{d}t)\right)$$

($H(p,q)$ is the Hamiltonian and plays a secondary role from our point of view.) Integration cycles for this integral are analyzed in section 2. There are some fairly standard integration cycles, such as the original one assumed by Feynman, with $p(t)$ and $q(t)$ being real. The main new idea in this paper is that by restricting the integral to complex-valued paths $p(t), q(t)$ that are boundary values of pseudoholomorphic maps - in a not obvious sense - we can get a new type of integration cycle in the path integral of quantum mechanics. Moreover, this cycle has a natural interpretation in a two-dimensional quantum field theory - a sigma-model in which the target is the complexification of the original classical phase space. The sigmamodel is in fact a topologically twisted A -model, and the integration cycle can be described using an exotic type of A -brane known as a coisotropic brane [3] .

It has been known from various points of view $[4-9]$ that there is a relationship between the A -model and quantization. In the present paper, we make a new and particularly direct proposal for what the key relation is: the most basic coisotropic A -brane gives a new integration cycle in the Feynman integral of quantum mechanics.

The fact that boundary values of pseudoholomorphic maps give a middle-dimensional cycle in the loop space of a symplectic manifold (or classical phase space) is one of the main ideas in Floer cohomology [10]. For an investigation from the standpoint of field theory, see $[11-13]$. The middle-dimensional cycles of Floer theory are not usually interpreted as integration cycles, because there typically are no natural middle-dimensional forms that can be integrated over these cycles. In the present paper, we first double the dimension

by complexifying the classical phase space, whereupon the integrand of the usual Feynman integral becomes a middle-dimensional form that can be integrated over the cycles given by Floer theory of the complexified phase space.

The relationship we describe between theories in dimensions one and two has an analog in dimensions three and four. Here the three-dimensional theory is Chern-Simons gauge theory, with a compact gauge group G, and the four-dimensional theory is $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills theory, with the same gauge group. To some extent, the link between the two was made in [2]. It was shown that to define an integration cycle in three-dimensional Chern-Simons theory, it is useful to add a fourth variable and solve certain partial differential equations that are related to $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills theory. Here we go farther and show exactly how a quantum path integral in $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills theory on a four-manifold with boundary can reproduce the Chern-Simons path integral on the boundary, with a certain integration cycle. This has an application which will be described elsewhere [14]. The application involves a new way to understand the link [15] between BPS states of branes and Khovanov homology [16] of knots.

In sections 2 and 3 of this paper, we begin with the standard Feynman integral of quantum mechanics and motivate its relation to a twisted supersymmetric theory in one dimension more. In section 4, we run the same story in reverse, starting in the higher dimension and deducing the relation to a standard Feynman integral in one dimension less. Some readers might prefer this second explanation. Section 5 generalizes this approach to gauge fields and contains the application to Chern-Simons theory.

What is the physical interpretation of the Feynman integral with an exotic integration cycle? In the present paper, we make no claims about this, except that it links one and two (or three and four) dimensional information in an interesting way.

4.4.2 циклы интегрирования для квантовой механики

подготовка

Классическая механическая система описывается $2n$ -мерным фазовым пространством $\mathcal{M}$, наделенным симплектической структурой. Симплектическая структура описывается 2-формой f, которая замкнута, то есть

$$\mathrm{d}f=0$$

а также невырождена, то есть матрица f_{ab} определенная в локальных координатах $x^a, a=1,\ldots,2n$ как $f=\sum_{a<b} f_{ab}\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b$ обратима; будем писать f^{ab} для обратной матрицы.

Локально если f замкнута и невырождена, можно взять канонические координаты, такие как $p_r, q^s, r, s=1,\ldots,n$ такие что

$$f=\sum_{s=1}^{n}\mathrm{d}p_s\wedge\mathrm{d}q^s$$

И скобки пуассона двух функций u, v на $\mathcal{M}$ можно определить как

$$\{u, v\}=f^{ab} \frac{\partial u}{\partial x^{a}} \frac{\partial v}{\partial x^{b}}=\sum_{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q^{s}} \frac{\partial v}{\partial p_{s}}-\frac{\partial u}{\partial p_{s}} \frac{\partial v}{\partial q^{s}}\right)$$

При квантовании можно ассоциировать с объектами выше Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и алгебру $\mathcal{R}$ наблюдаемых. $\mathcal{H}$ будет конечномерным если и только если $\mathcal{M}$ имеет конечный объем. Тогда элементы $U_{1}, \ldots, U_{n}$ алгебры $\mathcal{R}$, можно ассоциировать со следом

$$\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} U_{1} U_{2} \ldots U_{n} \tag{4.6}$$

который описывает $\mathcal{R}$ и его действие на $\mathcal{H}$, я точностью до унитарности. В типичных физических приложениях существует такой элемент H в $\mathcal{R}$, называемый Гамильтонианом, который участвует во взятии следа

$$\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} U_{1}\left(t_{1}\right) U_{2}\left(t_{2}\right) \ldots U_{n}\left(t_{n}\right) \exp (-i H t)$$

где для $U \in \mathcal{R}, U(t)$ is defined as $\exp (-i H t) U \exp (i H t)$. However, the basic problem of quantization [2] is to associate to $\mathcal{M}$ a Hilbert space $\mathcal{H}$ and algebra $\mathcal{R}$, and what we will say about this problem in the present paper mostly has nothing to do with the choice of H. We will omit H (that is, set $H=0$) except in section 3 .

A more incisive approach to quantum mechanics is to consider not only a trace as in (2.5) but matrix elements $\left\langle\psi_{f}\left|U_{1} U_{2} \ldots U_{n}\right| \psi_{i}\right\rangle$ between initial and final quantum states $\left|\psi_{i}\right\rangle\left|\psi_{f}\right\rangle$. (This also avoids the technical difficulty that if $\mathcal{M}$ has infinite volume, $\mathcal{H}$ is infinitedimensional and the traces in (2.4) and (2.5) may diverge, depending on the U_{i} and H.) However, the approach to Feynman integrals in the present paper is most easily explained if we begin with traces rather than matrix elements. The additional steps involved in describing matrix elements between initial and final states are sketched in section 2.10 .

основы интеграла Фейнмана

Типичный фейнмановский интеграл представляет собой след 4.6 как интеграл от отображений из S^{1} в $\mathcal{M}$:

$$\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} U_{1} U_{2} \ldots U_{n}=\int_{\mathcal{U}} D p_{r}(t) D q^{r}(t) \exp \left(i \oint p_{s} \mathrm{d} q^{s}\right) u_{1}\left(t_{1}\right) u_{2}\left(t_{2}\right) \ldots u_{n}\left(t_{n}\right)$$

Here $p_{r}(t)$ and $q^{r}(t)$ are periodic with a period of, say, 2π, so they define a map $\mathcal{T}: S^{1} \rightarrow \mathcal{M}$ or in other words a point in the free loop space $\mathcal{U}$ of $\mathcal{M}$. The u_{α} are functions on $\mathcal{M}$ that upon quantization will correspond to the operators U_{α}. We have assigned a time t_{α} to each function u_{α}, but as we have taken the Hamiltonian to vanish, all that matters about the t_{α} is their cyclic ordering on S^{1}. As is usual, $u(t)$ is an abbreviation for $u(\mathcal{T}(t))$.

As written, the Feynman integral depends on a choice of canonical coordinates q^{r} and momenta p_{r}. We could, for example, make a canonical transformation from p, q to $-q, p$, replacing $\oint p_{s} \mathrm{d} q^{s}$ with $-\oint q^{s} \mathrm{d} p_{s}$. This amounts to adding to the exponent of the path integral a term $\oint \mathrm{d}\left(-p_{s} q^{s}\right)=0$, where the vanishing holds because the functions are periodic in time.

Rather than picking a particular set of canonical coordinates, a more intrinsic approach is to observe that, as the two-form f is closed, it can be regarded as the curvature of an abelian gauge field b :

$$f=\mathrm{d} b, \quad b=\sum_{a=1}^{2 n} b_{a} \mathrm{d} x^{a}$$

Then we can write (2.6) more intrinsically as

$$\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} U_1 U_2 \ldots U_n=\int_{\mathcal{U}} D x^a(t) \exp \left(i \oint b_a \mathrm{d} x^a\right) u_1\left(t_1\right) u_2\left(t_2\right) \ldots u_n\left(t_n\right)$$

We say that the Dirac condition is obeyed if the periods of f are integer multiples of 2π. In that case, a unitary line bundle $\mathfrak{L} \rightarrow \mathcal{M}$ with a connection of curvature f exists and we take b to be that connection; its structure group is $U(1) . \mathfrak{L}$ is called a prequantum line bundle. If $H_1(M, \mathbb{Z}) \neq 0$, there are inequivalent choices of $\mathfrak{L}$ and quantization depends on such a choice. When $\mathfrak{L}$ exists, the factor $\exp \left(i \oint b_a \mathrm{d} x^a\right)$ is the holonomy of the connection b on $\mathfrak{L}$ (pulled back to S^1 via the map $\mathcal{T}: S^1 \rightarrow \mathcal{M}$) If the Dirac condition is not obeyed, the Feynman integral with the usual integration cycle (real phase space coordinates x^a) does not make sense since the factor $\exp \left(i \oint b_a \mathrm{d} x^a\right)$ in the path integral is not well-defined. We can make this factor well-defined by replacing $\mathcal{U}$ by its universal cover - or by any cover $\mathcal{U}^*$ on which the integrand of the path integral is singlevalued. Once we do this, the integral over the usual integration cycle of the Feynman integral

is not interesting because all integrals (2.6) vanish. (They transform with a non-trivial phase under the deck transformations of the cover $\mathcal{U}^* \rightarrow \mathcal{U}$.) However, as analyzed in [2], and as we will see below, after analytic continuation, there may be sensible integration cycles (related to deformation quantization, which does not require the Dirac condition, rather than quantization, which does). So we do not want to assume that the Dirac condition is obeyed.

In what follows, it might be helpful to have an example in mind. A simple example is the case that $\mathcal{M}=S^2$, defined by an equation

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=j^2$$

for some constant j. We take

$$f=\frac{\epsilon_{i j k} x_i \mathrm{d} x_j \wedge \mathrm{d} x_k}{3!R^2}=\frac{\mathrm{d} x_1 \wedge \mathrm{d} x_2}{x_3}$$

The first formula for f makes $SO(3)$ invariance manifest, and the second is convenient for computation. One can verify that $\int_{S^2} f=4 \pi j$, so that the Dirac condition becomes $j \in \mathbb{Z} / 2$. However, as already explained, we do not necessarily want to assume this condition. We can think of f as the magnetic field due to a magnetic monopole (of magnetic charge $2j$) located at the center of the sphere; b is the gauge connection for this monopole field.

аналитическое продолжение

The Feynman integral, as we have formulated it so far, is an integral over the free loop space $\mathcal{U}$ of $\mathcal{M}$, or possibly a cover of this on which the integrand of the Feynman integral is well-defined. Our first step, as suggested in the introduction, is to analytically continue from $\mathcal{U}$ to a suitable complexification $\hat{\mathcal{U}}$. We simply pick a complexification $\widehat{\mathcal{M}}$ of $\mathcal{M}$ and let $\hat{\mathcal{U}}$ be the free loop space of $\widehat{\mathcal{M}}$ (or, if necessary, an appropriate cover of this).

What do we mean by a complexification of $\mathcal{M}$? At a minimum, $\widehat{\mathcal{M}}$ should be a complex manifold with an antiholomorphic involution ${}^3\tau$ such that $\mathcal{M}$ is a component of the fixed point set of τ. Moreover, we would like $\widehat{\mathcal{M}}$ to be a complex symplectic manifold endowed with a holomorphic two-form Ω that is closed and nondegenerate and has the property that its imaginary part, when restricted to $\mathcal{M}$, coincides with f. We introduce the real and imaginary parts of Ω by

$$\Omega=\omega+i f$$

The fact that Ω is closed and nondegenerate implies that ω and f are each closed and nondegenerate. And we assume that under τ, Ω is mapped to $-\bar{\Omega}$, so in other words

$$\tau^*(\omega) = -\omega, \quad \tau^*(f) = f$$

It follows that on the fixed point set $\mathcal{M}, \omega$ must vanish:

$$\left.\omega\right|_{\mathcal{M}} = 0$$

We denote local complex coordinates on $\widehat{\mathcal{M}}$ as X^a, and their complex conjugates as $\bar{X}^a$ and we denote a complete set of local real coordinates (for example, the real and imaginary parts of the X^a) as Y^A. since Ω is a closed form, we can write it as the curvature of a complex-valued abelian gauge field:

$$\Omega = \mathrm{d}\Lambda, \quad \Lambda = \sum_A \Lambda_A \, \mathrm{d}Y^A$$

If the original model obeyed the Dirac condition and the complexification introduces no new topology, we can regard Λ as a gauge field with structure group $\mathbb{C}^*$ (the complexification of $U(1)$). In general, however, as stated in section 2.2, we do not assume this to be the case, and instead we replace $\widehat{\mathcal{U}}$ by a suitable cover on which the integrand of the integral (2.20) introduced below is well-defined. It is convenient to introduce the real and imaginary parts of Λ just as we have done for Ω. So we write

$$\Lambda = c + ib$$

where b and c are real-valued connections. Thus

$$\mathrm{d}c = \omega, \quad \mathrm{d}b = f$$

We will slightly sharpen (2.13) and assume that there is a gauge with

$$\left.c\right|_{\mathcal{M}} = 0$$

Let us describe what these definitions mean for our example with $\mathcal{M} = S^2$. We define $\widehat{\mathcal{M}}$ by the same equation (2.9) that we used to define $\mathcal{M}$, except [4] we regard it as an equation for complex variables X_i rather than real variables x_i :

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = j^2$$

And we define Ω by the same formula as before except for a factor of i :

$$\Omega = i\frac{\epsilon_{ijk} X_i \, \mathrm{d}X_j \wedge \mathrm{d}X_k}{3! R^2} = i\frac{\mathrm{d}X_1 \wedge \mathrm{d}X_2}{X_3}$$

(The factor of i in the definition of Ω is a minor convenience; the formulas that follow are slightly more elegant if we take f to be the imaginary part of $\Omega-$ restricted to $\mathcal{M}-$ rather than the real part.)

In addition to the conditions that we have already stated, $\widehat{\mathcal{M}}$ must have one additional property. Some condition of completeness of $\widehat{\mathcal{M}}$ must be desireable, since certainly we do not expect to get a nice theory if we omit from $\widehat{\mathcal{M}}$ a randomly chosen τ -invariant closed set that is disjoint from $\mathcal{M}$. It is not obvious a priori what the right condition should be, but as we will find (and as found in [9] in another way) the appropriate condition is that $\widehat{\mathcal{M}}$, regarded as a real symplectic manifold with symplectic structure ω, must have a well-defined A -model. For noncompact symplectic manifolds, this is a non-trivial though in general not well understood condition. Our example of the complexification of S^2 certainly has a good A -model, since in fact this manifold admits a complete hyper-Kahler metric the Eguchi-Hansen metric.

As for the functions u_α that appear in the path integral (2.6), to make sense of them in the context of an analytic continuation of the Feynman integral, they must have an analytic continuation to holomorphic functions on $\widehat{\mathcal{M}}$ (which we still denote as u_α). Moreover, so as not to affect questions involving convergence of the path integral, the analytically continued functions should not grow too fast at infinity. For example, in the case of S^2, a good class of functions are the polynomial functions $u\left(x_1, x_2, x_3\right)$. The analytic continuation of such a polynomial is simply the corresponding polynomial $u\left(X_1, X_2, X_3\right)$. These are the best observables to consider, because they are the (nonconstant) holomorphic functions with the slowest growth at infinity.

Having analytically continued the loop space $\mathcal{U}$ of $\mathcal{M}$ to the corresponding complexified loop space $\hat{\mathcal{U}}$ of $\widehat{\mathcal{M}}$, and having similarly analytically continued the symplectic structure and the observables, we can formally write down the Feynman integral over an arbitrary integration cycle $\Gamma \subset \hat{\mathcal{U}}$:

$$\int_\Gamma DY^A(t) \exp \left(\oint \Lambda_A \, \mathrm{d}Y^A\right) u_1\left(t_1\right) \ldots u_n\left(t_n\right)$$

Γ is any middle-dimensional cycle in $\widehat{\mathcal{U}}$ on which the integral converges. Eqn. (2.17) ensures that if we take Γ to be the original integration cycle $\mathcal{U}$ of the Feynman integral, then (2.20) does coincide with the original Feynman integral.

простейшие контуры интегрирования

The reason that there is some delicacy in choosing Γ is that the real part of the exponent in (2.20) is not bounded above.

The troublesome factor in (2.20) comes from the real part of Λ. (We assume that the observables u_α do not grow so rapidly as to affect the following discussion.) The integration

cycle Γ must be chosen so that the dangerous factor

$$\exp \left(\oint c_A \, \mathrm{d}Y^A\right)=\exp \left(\operatorname{Re} \oint \Lambda_A \, \mathrm{d}Y^A\right)$$

does not make the integral diverge. The reason that this is troublesome is that the exponent

$$h=\oint c_A \, \mathrm{d}Y^A$$

is unbounded above and below. For example, the map

$$Y^A(t) \rightarrow \tilde{Y}^A(t)=Y^A(n t)$$

multiplies h by an arbitrary integer n, which can be positive or negative. Leaving aside the question of convergence, how can we find a middle-dimensional cycle $\Gamma \subset \widehat{\mathcal{U}}$? The most elementary approach is to define Γ by a local-in-time condition. We pick a middle-dimensional submanifold $\mathcal{M}_0 \subset \widehat{\mathcal{M}}$ and take $\Gamma \subset \hat{\mathcal{U}}$ to be the free loop space of $\mathcal{M}_0$. In other words, Γ parametrizes maps $\mathcal{T}: S^1 \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ whose image lies in $\mathcal{M}_0$ for all time. This type of choice cannot be wrong, since if we take $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}$, we get back to the original Feynman integral. Now let us ask for what other choices of $\mathcal{M}_0$ we get a suitable integration cycle.

When restricted to the loop space of $\mathcal{M}_0$, the function h must be identically zero, or the argument around eqn. (2.23) will again show that it is not bounded above or below. The variation of h under a small change in a map $\mathcal{T}: S^1 \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ is

$$\delta h=\oint \omega_{A B} \delta Y^A \, \mathrm{d}Y^B$$

For this to vanish identically when evaluated at any loop in $\mathcal{M}_0$, we require that ω restricted to $\mathcal{M}_0$ must vanish. [5]

The requirement, in other words, is that $\mathcal{M}_0$ must be a Lagrangian submanifold with respect to ω. This is a familiar condition in the context of the two-dimensional A -model: it is a classical approximation to the condition for $\mathcal{M}_0$ (endowed with a trivial Chan-Paton bundle) to be the support of an A -brane. This is no coincidence, but a first hint that the possible integration cycles for the path integral are related to the A -model.

Upon picking $\mathcal{M}_0$ so that the real part of the exponent of the path integral is bounded above, we are not home free: to make sense of the infinite-dimensional path integral, the

4.5 Lorenzian Quantum Cosmology

Покажем, как брать методом Пикарда-Лефшица осциллирующие интегралы вида

$$I=\int_D \mathrm{d}x e^{iS[x]/\hbar} \tag{4.7}$$

где $\hbar$ это вещественный параметр, а $S[x]$ - действие - функция, принимающая вещественные значения, а интеграл берется по области на вещественной оси D и определяется особенностями подынтегрального выражения, или в больших размерностях или случае интегрирования по пути, частичными интегралами.

Особенно интересно поведение интеграла для малых значений параметра $\hbar$: из квантовой механики переход к классической делается как раз устремлением $\hbar$ к нулю.

Теория Пикарда-Лефшица изначально создавалась и использовалась для конечномерных интегралов, например, позже Виттен [1] и другие ученые заметили ее применение в квантовой механике для интеграла по путям.

Например, она была использована для создания нового метода Монте-Карло, который способен решить известную “знаковую проблему” для некоторых квантовых теорий.

В этой записи мы преследовать будем более простую цель.

Мы рассмотрим простые минисуперпространственные модели квантовой космологии, которые сужаются на простой одномерный интеграл.

Поэтому вспомним теорию Пикарда-Лефшица применительно к самым простым случая. Важно понимать, что вообще-то теория Пикарда-Лефшица может таким же образом быть применена и к более размерным, или даже к бесконечно размерным, которые используются в физике, интегралам по путям.

Идея метода Пикарда-Лефшица состоит в том, чтобы интерпретировать в 4.7 действие $S[x]$ как голоморфную функцию от $x\in\mathbb{C}$, комплексной плоскости.

Теорема коши позволяет нам деформировать интегральный контур из части вещественной области D на вещественную x-ось комплексного пространства, которое обозначим $\mathcal{C}$ в комплексной x -плоскости, в то же время оставляя концы этого контура фиксированными.

В частности, мы хотим деформировать $\mathcal{C}$ в контур наискорейшего спуска, проходя через одну или несколько критических точек $S[x]$, то есть точек, где $\partial_x S=0$.

С помощью условий Коши-Римана, вещественная часть экспоненты, $\operatorname{Re}[iS[x]]$, которая отвечает за величину подынтегрального выражения, имеет седловую точку в вещественной двумерной $(\operatorname{Re}[x],\operatorname{Im}[x])$ -плоскости.

Контур наискорейшего спуска через седловую точку определен как путь, на котором $\operatorname{Re}[iS[x]]$ убывает быстрее всего.

Простейший пример.

Рассмотрим функцию $S[x]=x^2$, с критической точкой $x=0$. Записывая $x=\operatorname{Re}[x]+i\operatorname{Im}[x]$, имеем $\operatorname{Re}[iS[x]]=-2\operatorname{Re}[x]\operatorname{Im}[x]$.

Величина подынтегрального выражения убывает как можно быстрее вдоль контура $\mathrm{Im}[x] = +\mathrm{Re}[x]$, который назовем контуром наискорейшего убывания.

И наоборот, она возрастает быстрее всего вдоль $\mathrm{Im}[x] = -\mathrm{Re}[x]$, который назовем путем наискорейшего возрастания.

Известно, что контура наискорейшего спуска таковы, что по ним интеграл всегда сходится и называются также наперстками Лефшица $\mathcal{J}_\sigma$.

Более подробно, запишем выражение под экспонентой $\mathcal{I} = iS/\hbar$ и его аргумент x в терминах его вещественной и мнимой части, $\mathcal{I} = h + iH$ и $x = u^1 + iu^2$. Исходящий поток определим как

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\lambda} = -g^{ij}\frac{\partial h}{\partial u^j} \tag{4.8}$$

где λ параметр вдоль потока и g_{ij} - риманова метрика, индуцированная на комплексную плоскость.

Вещественная часть экспоненты h, также известная как функция Морса, убывает на потоке от критической точке потому что $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_i \frac{\partial h}{\partial u^i}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\lambda} = -\sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial u^i}\right)^2 < 0$, где наибольшая скорость спадания находится в направлении наискорейшего спуска, на котором модуль градиента максимальный.

Чтобы определить последний, нужно ввести метрику.

Виттен показал, что свобода, с которой мы можем выбирать метрику может быть использована разными способами (?????)

Для простых примеров простейшая метрика $\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}x|^2$ мне достаточна.

Введем комплексные координаты, $(u, \bar{u}) = ((\mathrm{Re}([x] + i\,\mathrm{Im}[x]), (\mathrm{Re}[x] - i\,\mathrm{Im}[x]))$, теперь метрика $g_{uu} = g_{\bar{u}\bar{u}} = 0, g_{u\bar{u}} = g_{\bar{u}u} = 1/2$. В итоге $h = (\mathcal{I} + \overline{\mathcal{I}})/2$ и 4.8 запишется так:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\partial\overline{\mathcal{I}}}{\partial\bar{u}}, \quad \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial u}$$

Мнимая часть экспоненты $H = \mathrm{Im}[iS/\hbar]$ сохраняется вдоль линиц потока, так как

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{2i}\frac{\mathrm{d}(\mathcal{I} - \overline{\mathcal{I}})}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} - \frac{\partial\overline{\mathcal{I}}}{\partial\bar{u}}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\lambda}\right) = 0$$

Поэтому подынтегральное выражение $e^{iS[x]/\hbar}$, которое было осциллирующим фактором в обычном интеграле, теперь не осциллирует вдоль линий спуска.

Вместо этого, оно монотонно убывает, так что интеграл сходится абсолютно, а также так быстро, как только возможно.

Для спадающего потока, начинающегося в седловой точке, λ меняется от $-\infty$ на седловой точке, до положительных значений, в то время, как h возрастает.

Наперстки Лефшица связаны с данной седловой точкой, определяются, как набор нисходящих линий, покидающих седловую точку.

По аналогии восходящие потоки можно определить как:

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\lambda} = +g^{ij}\frac{\partial h}{\partial u^j}$$

где H аналогично будет сохраняться вдоль этих путей.

Каждая критическая точка имеет восходящий поток, который назовем $\mathcal{K}_\sigma$.

В очень редком кстати случае может так получиться, что контур наименьшего спуска от одной точки p_σ окажется контуром наибольшего подъема для другой p'_σ в которую он упрется, в то время как $\lambda \to \infty$.

Например если $S[x]$ это вещественная функция вещественного x, то тогда любая комплексная седловая точка должна иметь комплексно сопряженную такую же точку. Функция Морса $h = i(S[x] - S[\bar{x}])/(2\hbar)$ значительно отличается на этих двух точках, в то же время мнимая часть экспоненты H остается такой же, даже более того, линия наискорейшего подъема из верхнего седла и линия наискорейшего спуска из нижнего идут по линии $\mathrm{Re}[x] = \mathrm{const}$.

С такой ситуаций где-то ниже наверное мы еще встретимся.

Such a degeneracy between steepest ascent and steepest descent contours may generally be removed by adding an infinitesimal perturbation to $S[x]$, and defining the contour $\mathcal{C}$ in the limit as the perturbation is taken to zero.

In this limit the contribution of the perturbation to the integral is negligible.

However, a generic perturbation will break the degeneracy between the values of the imaginary part of the exponent H at the two saddle points, making it impossible, according to (4), for steepest ascent and descent flows from the two critical points to coincide.

Of course, if a symmetry was responsible for the degeneracy, as we have discussed for the case where $S[x]$ is real, then the perturbation must violate the symmetry if it is to remove the degeneracy.

So if $S[x]$ being real is responsible for the degeneracy, an imaginary perturbation will be needed to remove it. This is not a problem, however, since as explained, in the limit that the perturbation is taken to zero, its influence on the integral is negligible.

Once all such degeneracies are removed, we are left with a one-to-one correspondence between saddle points p_σ and the associated steepest ascent and descent contours $\mathcal{J}_\sigma$ and $\mathcal{K}_\sigma$. The generic situation is then that any steepest descent contour from a saddle ends on a singularity where $h \rightarrow -\infty$, and any steepest ascent contour likewise ends on a singularity where $h \rightarrow +\infty$ Thus, Lefshetz thimbles and upward flows only intersect at a single critical point, the one where both are defined. With a suitable choice of orientation, we can write for the intersection number

$$\mathrm{Int}\left(\mathcal{J}_\sigma, \mathcal{K}_{\sigma'}\right) = \delta_{\sigma\sigma'}$$

Our objective is to deform the original integral (1) into one evaluated over a sum of Lefschetz thimbles. That is, we would like to write

$$\mathcal{C} = \sum_\sigma n_\sigma \mathcal{J}_\sigma$$

in a homological sense, for some integers n_σ which may take the values 0 or ± 1 when accounting for the orientation of the contour over each thimble. It follows from these equations that $n_\sigma = \mathrm{Int}\left(\mathcal{C}, \mathcal{K}_\sigma\right) = \mathrm{Int}\left(D, \mathcal{K}_\sigma\right)$, since the intersection number is topological and will not change if we deform the contour $\mathcal{C}$ back to the original, real domain D. Thus a necessary and sufficient condition for a given thimble $\mathcal{J}_\sigma$ to be relevant is that a steepest ascent con-

tour from the critical point p_σ intersects the original, real integration domain D. In this circumstance, intuitively, there is no obstacle to smoothly "sliding"the intersection point from the real axis along $\mathcal{K}_\sigma$ down to p_σ, and in the process deforming the original integration contour onto the the thimble $\mathcal{J}_\sigma$. This is the argument we alluded to in the introduction, showing that if one starts from a real Lorentzian theory, one never obtains semiclassical enhancement factors such as are found in the Euclidean approach.

In one complex dimension, the way this works is that the original integral along the real x -axis is deformed into a series of thimbles. With the appropriate choice of orientation, adjacent thimbles end and start on singularities of the Morse function h, so that there is no obstacle to deforming the combined contour back onto the real x -axis. The two "free ends"in the sum over thimbles, corresponding to the first and last steepest descent contours, from

the first and last critical points, run to singularities of h in a complex direction determined by the steepest descent flow. In order to show that the original integral I equals the sum of integrals over thimbles, we must show that the original integration contour, which approaches the initial and final singularities of h along the real x -axis, can be deformed into one which ends on initial and final steepest descent contours which approach the same singularities from a different direction. This requires that the integral taken along an "arc"drawn around the singularity vanishes in the limit that the arc is taken closer and closer to the singularity. We shall now illustrate this behavior in the integral which arises in the simplest models of minisuperspace quantum cosmology. As we shall see in the next section, this takes the form

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dN}{\sqrt{N}} e^{if(N)/\hbar}$$

where $f(N)$ is holomorphic in N over the relevant domain. The integrand possesses singularities at $N=0$ and $N=\infty$ and the contour of integration runs from one to the other, over all positive values of N. We wish to show that it is possible to deform this contour to a sum of the relevant steepest descent contours, the first and last of which approach the singularities of the integrand at some finite angle with respect to the real N -axis.

Consider first a singularity of $f(N)$ which occurs at infinite N. We take the original integral up to some large positive value, N_0. It is convenient to change variables to $N=(\ln z)^2$, so that (8) becomes $2\int_1^{z_0} \frac{dz}{z} e^{if\left((\ln z)^2\right)/\hbar}$, with $z_0 = e^{\sqrt{N_0}}$. The relevant steepest

the first and last critical points, run to singularities of h in a complex direction determined by the steepest descent flow. In order to show that the original integral I equals the sum of integrals over thimbles, we must show that the original integration contour, which approaches the initial and final singularities of h along the real x -axis, can be deformed into one which
ends on initial and final steepest descent contours which approach the same singularities from a different direction. This requires that the integral taken along an "arc"drawn around the singularity vanishes in the limit that the arc is taken closer and closer to the singularity. We shall now illustrate this behavior in the integral which arises in the simplest models of minisuperspace quantum cosmology. As we shall see in the next section, this takes the form

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dN}{\sqrt{N}} e^{if(N)/\hbar}$$

where $f(N)$ is holomorphic in N over the relevant domain. The integrand possesses singularities at $N=0$ and $N=\infty$ and the contour of integration runs from one to the other, over all positive values of N. We wish to show that it is possible to deform this contour to a sum of the relevant steepest descent contours, the first and last of which approach the singularities of the integrand at some finite angle with respect to the real N -axis.

Consider first a singularity of $f(N)$ which occurs at infinite N. We take the original integral up to some large positive value, N_0. It is convenient to change variables to $N=(\ln z)^2$, so that (8) becomes $2\int_1^{z_0} \frac{dz}{z} e^{if\left((\ln z)^2\right)/\hbar}$, with $z_0 = e^{\sqrt{N_0}}$. The relevant steepest

descent trajectory at large $|z|$ will be determined by the term with the largest power of N in $f(N)$. It will run to infinity at some angle θ with respect to the real z -axis. To show that the original integral taken up to some large real value z_0 is accurately approximated by the steepest descent integral taken out to $(|z|,\theta)=(z_0,\theta_0)$, we need to show that the integral along an arc at fixed $|z|$ with the angle θ running from 0 to θ_0, becomes negligible as z_0 is taken to infinity. Assume, for example, that $f(N)=aN$ at large $|N|$, with a positive. Now set $z=e^{\sqrt{N_0}+i\theta}$ so that the integral along the arc at fixed $|z|$ becomes

$$2\int_0^{\theta_0} \frac{dz}{z} e^{ia(\ln z)^2/\hbar} = 2i\int_0^{\theta_0} d\theta e^{ia\left(\sqrt{N_0}+i\theta\right)^2/\hbar} \equiv iI_0 \to |I_0| < 2\int_0^{\theta_0} d\theta e^{-2a\sqrt{N_0}\theta/\hbar} < \frac{\hbar}{a\sqrt{N_0}}, \quad (9)$$

where we used a standard Schwarz-type inequality, and the fact that the last integral is bounded by its value when taken over an infinite range. We have thus bounded the magnitude of the integral along the arc at fixed $|z|$, by a quantity which tends to zero as N_0 tends to infinity. Hence in the limit of large N_0, the original contour may indeed be deformed to one ending on the steepest descent contour at the same value of N_0, with negligible change in the value of the integral. The limit $N_0 \to \infty$ can now be taken, with the conclusion that the two integrals are identical in this limit. It is not hard to generalize this argument to any holomorphic $f(N)$ behaving as a power of N at large N : one just needs to choose N_0 large enough to ensure that all terms in the real part of the exponent in the analog of (9) are bounded by some finite multiple of the term involving the highest power of N_0.

Similarly, the steepest descent contour approaches the singularity at $N=0$ along a complex direction. For example, if $f(N) \sim -a/N$ as $N \to 0$, with a positive, then $N=0$ is approached from positive imaginary values. To show that the original integral (9) taken along the real N -axis equals the steepest descent integral, we cut the former off at some small real $N=\epsilon_0$. Setting $N=1/(\ln z)^2$, (9) becomes $2\int_1^{z_0} \frac{dz}{z}\frac{1}{(\ln z)^2} e^{-ia\left((\ln z)^2\right)/\hbar}$ with $z_0=e^{1/\sqrt{\varepsilon_0}}$ By Cauchy's theorem, the original integral taken over $N>\epsilon_0$ may be deformed into an integral along an arc $z=e^{1/\sqrt{\epsilon_0}}e^{-i\theta}$, plus the steepest descent integral taken from the arc's intersection with the steepest descent contour. On the arc, $|\ln z|^2>1/\epsilon_0$, so the integral along the arc is bounded by $2\epsilon_0\int d\theta e^{2a\theta/(\hbar\sqrt{\epsilon_0})}<\hbar\epsilon_0^{\frac{3}{2}}/a$ and hence vanishes as $\epsilon_0 \to 0$. Therefore the steepest descent integral and the original Lorentzian integral give the same result in the limit as the cutoff is removed.

Once we have deformed the contour from the real axis to run through a set of thimbles associated with the contributing critical points, we have:

$$I=\int_D \mathrm{d}x e^{iS[x]/\hbar}=\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}x e^{iS[x]/\hbar}=\sum_\sigma n_\sigma \int_{\mathcal{J}_\sigma} \mathrm{d}x e^{iS[x]/\hbar}$$

As (10) indicates, typically more than one Lefschetz thimble contributes to the Lorentzian path integral, with given boundary conditions, even in mini-superspace quantum cosmology. The integral taken over a thimble is absolutely convergent if

$$\left|\int_{\mathcal{J}_\sigma} \mathrm{d}x e^{iS[x]/\hbar}\right| \leq \int_{\mathcal{J}_\sigma} |\mathrm{d}x|\left|e^{iS[x]/\hbar}\right|=\int_{\mathcal{J}\sigma}|dx| e^{h(x)}<\infty$$

Defining the length along the curve as $l=\int|dx|$, the integral will converge if $h(x(l))<-\ln(l)+A$, for some constant A, as $l \to \infty$, which is a rather weak requirement.

We have then expressed the original integral as a sum of absolutely convergent steepest descent integrals. In an expansion in $\hbar$, we have

$$I=\int_D \mathrm{d}x e^{iS[x]/\hbar}=\sum_\sigma n_\sigma e^{iH(p_\sigma)}\int_{\mathcal{J}_\sigma} e^h\, \mathrm{d}x \approx \sum_\sigma n_\sigma e^{iS(p_\sigma)/\hbar}\left[A_\sigma+\mathcal{O}(\hbar)\right]$$

where A_σ represents the result of the leading-order Gaussian integral about the critical point p_σ. Sub-leading terms may be evaluated perturbatively in $\hbar$. In the case of degenerate h, a similar expansion applies - we will encounter such an example later in the paper.

4.6 космология, которую потом удалю

по ошибке она тут, зато мб заодно ее и выучу.

минисуперпространство и Лоренцев интеграл

Далее будем использовать положительную космологическую константу Λ, которая описывает действие

$$S=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}(R-2\Lambda)+\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^3 y \sqrt{g^{(3)}} K$$

а также положим $8\pi G=1$.

The second term, involving the 3 -metric $g_{ij}^{(3)}$ and the trace of the second fundamental form K of the boundary $\partial\mathcal{M}$, is needed to ensure the variational prin- ciple yields the Einstein equations if the boundary geometries are held fixed.

For simplicity, we truncate the theory to the simplest cosmologies, represented by the line element

$$\mathrm{d}s^2=-N(t)^2\ \mathrm{d}t^2+a(t)^2\ \mathrm{d}\Omega_3^2$$

with $\mathrm{d}\Omega_3^2$ the metric of a homogeneous, isotropic 3 -dimensional space with curvature k. This is a gross simplification of the original theory - we no longer have propagating gravitational waves - but we retain a dynamical scale factor $a(t)$ as well as diffeomorphism invariance in the timelike coordinate t, and these will be sufficient for us to illustrate many key features of Lorentzian quantum cosmology. The Feynman path integral for the reduced theory is

$$G\left[a_1;a_0\right]=\int\mathcal{D}N\mathcal{D}\pi\mathcal{D}a\mathcal{D}p\mathcal{D}C\mathcal{D}\bar{P}e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^1[\dot{N}\pi+\dot{a}p+\dot{C}P-NH]\mathrm{d}t}$$

where, in addition to a,N and the fermionic ghost C, we have introduced the conjugate momenta p,π and $\bar{P}$, and the corresponding Liouville measure. Without loss of generality,

we can choose the range of the time coordinate to be $0\leq t\leq 1$. The Hamiltonian constraint $H[a,p;N,\pi;C,\bar{P}]=H_{EH}[a,p]+H_g[N,\pi;C,\bar{P}]$ consists of the Einstein-Hilbert Hamiltonian H_{EH}, in our case a minisuperspace Hamiltonian, and a Batalin, Fradkin and Vilkovisky (BFV) ghost Hamiltonian H_g^1. The ghost is necessary since the minisuperspace action is diffeomorphism invariant. The ghost term breaks time reparametrization symmetry and fixes the proper-time gauge $\dot{N}=0$. For a detailed discussion of the BFV ghost in this setting see Teitelboim [22,23] and Halliwell [24]. For minisuperspace models, most of the path integrals can be performed analytically, yielding

$$G\left[a_1;a_0\right]=\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{d}N\int_{a=a_0}^{a=a_1}\mathcal{D}ae^{iS(N,a)/\hbar}$$

which has a very simple interpretation. The path integral $\int\mathcal{D}ae^{iS(N,a)/\hbar}$ represents the quantum mechanical amplitude for the universe to evolve from a_0 to a_1 in a proper time N. The integral over the lapse function indicates that we should consider paths of every proper duration $0<N<\infty$. Teitelboim [25] showed that this choice of integration domain leads to the causal ordering of the a_0 and a_1, i.e. a_0 precedes a_1. This allows us to describe both an expanding $a_1>a_0$ and a contracting $a_1<a_0$ universe, since the direction of the arrow of time is determined by the Feynman propagator and not by the choice of boundary conditions. For an illustration see Fig. 2 .

The path integral $\int\mathcal{D}ae^{iS(N,a)/\hbar}$ represents the amplitude for the universe to evolve from a_0 to a_1 in a proper time N. The integral over the lapse function indicates that we should

consider paths $a(t)$ from a_0 to a_1, of every proper duration $0<N<\infty$. Teitelboim [25] showed that this choice of integration domain leads to the causal ordering of the a_0 and a_1, i.e. a_0 precedes a_1. This allows us to describe both an expanding $a_1>a_0$ and a contracting $a_1<a_0$ universe, since the direction of the arrow of time is determined by the Feynman propagator and not by the choice of boundary conditions. For an illustration see Fig. 2 .

The action in (16) reduces to

$$S=2\pi^2\int_0^1\ \mathrm{d}tN\left(-3a\frac{\dot{a}^2}{N^2}+3ka-a^3\Lambda\right)$$

We are faced with a functional integral over $a(t)$, and an ordinary integral over the proper time N. The former may be performed in the semiclassical approximation. Notice first that the classical equations for $a(t)$ and N are real. In fact, the equations of motion for $a(t)$ yield a unique solution in the form $a = a_c(Nt)$, for arbitrary initial and final a_0 and a_1. However, the constraints which follow from varying N in generally can only be satisfied by complex N. since the equations of motion are real, it follows that solutions for N come in complex conjugate pairs. Also, reversing the sign of N is classically equivalent to reversing the arrow of time, a symmetry of the classical equations. Hence we may anticipate that, quite generally, there will be four solutions for N, with only two of them being distinct after time reversal symmetry is taken into account.

In fact, we can simplify the calculation by noticing that redefining the lapse function $N(t) \to N(t)/a(t)$ renders the action (17) quadratic in $q(t) \equiv a(t)^2$, allowing the path integral over $q(t)$ to be performed exactly [24]. (Actually, there is a subtlety since such a redefinition alters the path integral measure. More fundamentally, one must ensure that the quantum mechanical propagator is properly covariant under such changes of variable. As discussed in [16, 24], the starting point for constructing the propagator is a proper ordering of the Hamiltonian operator. This ordering is determined by covariance under changes of

variables including the one just given. With this correction, involving the Ricci curvature

on superspace, the quantum Hamiltonians of the theories expressed in terms of a or $q = a^2$ are equivalent. In the case of the redefinition considered here, the correction term is only important at small a. For simplicity, as well as consistency with earlier treatments, we shall ignore it in the leading, semiclassical analysis we perform in this paper.) In these new variables, the action (17) becomes

$$S = 2\pi^2 \int_0^1 \mathrm{d}t \left(-\frac{3}{4N}\dot{q}^2 + N(3k - \Lambda q) \right)$$

The equation of motion and the constraint following from this action are

$$\ddot{q} = \frac{2\Lambda}{3}N^2; \quad \frac{3}{4N^2}\dot{q}^2 + 3k = \Lambda q$$

With boundary conditions $q(0) = q_0$ and $q(1) = q_1$, the general solution to the first equation (before imposing the constraint) is

$$\bar{q} = \frac{\Lambda}{3}N^2t^2 + \left(-\frac{\Lambda}{3}N^2 + q_1 - q_0 \right) t + q_0$$

Writing the full solution, which does satisfy the constraint as

$$q(t) = \bar{q}(t) + Q(t)$$

the path integral becomes

$$G\left[q_1; q_0\right] = \int_0^\infty \mathrm{d}N e^{2\pi^2 i S_0/\hbar} \int_{Q[0]=0}^{Q[1]=0} \mathcal{D}Q e^{2\pi^2 i S_2/\hbar}$$

with

$$S_0 = \int_0^1 \mathrm{d}t \left(-\frac{3}{4N}\dot{\bar{q}}^2 + 3kN - N\Lambda\bar{q} \right), \quad S_2 = -\frac{3}{4N}\int_0^1 \mathrm{d}t\dot{Q}^2$$

The path integral over Q is Gaussian and can be evaluated exactly:

$$\int_{Q[0]=0}^{Q[1]=0} \mathcal{D}Q e^{2\pi^2 i S_2/\hbar} = \sqrt{\frac{3\pi i}{2N\hbar}}$$

The propagator thus reduces to an ordinary integral

$$G\left[q_1; q_0\right] = \sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}N}{N^{1/2}} e^{2\pi^2 i S_0/\hbar}$$

Equation (25) is an oscillatory integral, to which we apply the methods of the pre section. We lift the lapse N to the complex plane and regard the boundary values 0 ar of the integral as points on the Riemann sphere. The action S_0 can be explicitly evalu

$$S_0 = N^3 \frac{\Lambda^2}{36} + N\left(-\frac{\Lambda}{2}(q_0+q_1)+3k\right) + \frac{1}{N}\left(-\frac{3}{4}(q_1-q_0)^2\right)$$

The action S_0 has four saddle points in the complex plane, which are solutions of

$$\partial S_0/\partial N = \Lambda^2 N_s^4 + \left(-6\Lambda(q_0+q_1)+36k\right)N_s^2 + 9(q_1-q_0)^2 = 0$$

given by

$$N_s = c_1 \frac{3}{\Lambda}\left[\left(\frac{\Lambda}{3}q_0 - k\right)^{1/2} + c_2\left(\frac{\Lambda}{3}q_1 - k\right)^{1/2}\right]$$

with $c_1, c_2 \in \{-1, 1\}$. The action evaluated at these saddle points is given by

$$\begin{aligned}
S_0^{\text{saddle}} &= N_s^3 \frac{\Lambda^2}{36} + N_s\left(-\frac{\Lambda}{2}(q_0+q_1)+3k\right) + \frac{1}{N_s}\left(-\frac{3}{4}(q_1-q_0)^2\right) \\
&= \frac{1}{N_s}\left[N_s^4\frac{\Lambda^2}{36} + N_s^2\left(-\frac{\Lambda}{2}(q_0+q_1)+3k\right) - \frac{3}{4}(q_1-q_0)^2\right] \\
&= \frac{1}{N_s}\left[-\frac{\Lambda^2}{18}N_s^4 - \frac{3}{2}(q_1-q_0)^2\right] \\
&= -c_1\frac{6}{\Lambda}\left[\left(\frac{\Lambda}{3}q_0 - k\right)^{3/2} + c_2\left(\frac{\Lambda}{3}q_1 - k\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$

Each of these four saddle points corresponds to a Lefschetz thimble $\{\mathcal{J}_\sigma\}$, and a steepest ascent contour $\{\mathcal{K}_\sigma\}$. Each is also associated with wedges J_σ, K_σ in which the real part of the exponent $iS/\hbar$ is respectively lower and higher than the saddle point value. Writing the original integration contour in terms of the Lefschetz thimbles

$$(0^+, \infty) = \sum_\sigma n_\sigma \mathcal{J}_\sigma$$

we approximate the propagator using the saddle point approximation in the limit $\hbar \to 0$,

$$\begin{aligned}
G[q_1; q_0] &= \sum_\sigma n_\sigma \sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \int_{\mathcal{J}_\sigma} \frac{\mathrm{d}N}{N^{1/2}} e^{2\pi^2 i S_0/\hbar} \\
&\approx \sum_\sigma n_\sigma \sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \frac{2\pi^2 i S_0^{\text{sadde}}/\hbar}{N_s^{1/2}} \int_{\mathcal{J}_\sigma} \mathrm{d}N e^{\frac{i\pi^2}{\hbar} S_{0,NN}(N-N_s)^2}\left[1+\mathcal{O}\left(\hbar^{1/2}\right)\right] \\
&\approx \sum_\sigma n_\sigma \sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \frac{2\pi^2 i S_0^{\text{sadde}}/\hbar}{N_s^{1/2}} e^{i\theta_\sigma} \int_{\mathcal{J}_\sigma} \mathrm{d}n e^{-\frac{\pi^2}{\hbar}|S_{0,NN}|n^2}\left[1+\mathcal{O}\left(\hbar^{1/2}\right)\right] \\
&\approx \sum_\sigma n_\sigma \sqrt{\frac{3i}{2N_s|S_{0,NN}|}} e^{i\theta_\sigma} e^{2\pi^2 i S_0^{\text{saddle}}/\hbar}\left[1+\mathcal{O}\left(\hbar^{1/2}\right)\right]
\end{aligned}$$

where we defined $N - N_s \equiv n e^{i\theta}$ with n real and θ being the angle of the Lefschetz thimble with respect to the positive real N axis.

The intersection coefficient n_σ, the angle θ_σ and action at the saddle point S_0^{saddle} all depend on the boundary conditions q_0 and q_1 and the spatial curvature k. In particular, saddle points can become relevant or irrelevant as the boundary conditions are varied. Earlier approaches amount to choosing particular contour in the complex N plane "by hand,"on the basis of some preconceived notions. However, as we argued in section II, the virtue of the Lorentzian path integral combined with Picard-Lefschetz theory is that the proper combination of saddle points and relative phases between them is completely fixed.

As can be seen from equation (28), for spherical three-geometries, $k = 1$, the saddle points can be complex, while for the flat and hyperbolic case the saddle points are real. Complex saddle points imply non-classical behaviour since the propagator becomes dominated by non-Lorentzian geometries. In the following sections we concentrate on spherical expanding universes. We study the saddle point approximation (31) in four qualitatively different configurations:

- For $q_1 \geq q_0 > \frac{3}{\Lambda}$ the saddle points are real. These boundary conditions represent a classical universe. This case is studied in section III A.
- For $q_1 > \frac{3}{\Lambda} > q_0$ one of the roots becomes imaginary. This case includes the "noboundary"proposal and is studied in section III B.
- The limiting case between the classical and quantum phase, for which $q_1 \geq q_0 = \frac{3}{\lambda}$, is studied in section III C.
- For $\frac{3}{\Lambda} > q_1 \geq q_0$ both square roots become imaginary and both q_0 and q_1 are expected to behave quantum mechanically. We study this case in section III D.

Classical boundary conditions

For classical boundary conditions $q_1 \geq q_0 > \frac{3}{\Lambda}$, the four saddle points are real, see Fig. 3 for the corresponding lines of steepest descent and ascent. The two positive saddle points

$$N_{s\pm} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left[\left(q_1 - \frac{3}{\Lambda}\right)^{1/2} \pm \left(q_0 - \frac{3}{\Lambda}\right)^{1/2}\right]$$

contribute to the integral since their curves of steepest ascent trivially intersects the original interval $(0, \infty)$. The two negative saddle points do not contribute to the propagator.

The equation of motion is solved by the de Sitter space solution. For classical boundary conditions there exist two solutions: either q_0, q_1 both sit on the same side of the waist of the de Sitter hyperboloid, or they are separated by the waist. Using the classical solution $\bar{q}(t)$ (see equation (20)) we can study the two saddle points. At $t = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Lambda}{3}N_{s\pm}^2 + q_1 - q_0 = 2\left(-q_0 + \frac{3}{\Lambda}\right) \mp 2\sqrt{\left(q_0 - \frac{3}{\Lambda}\right)\left(q_1 - \frac{3}{\Lambda}\right)}$$

We observe that N_{s+} corresponds to a decreasing solution. The waist of the de Sitter space sits between the specified boundaries. The other saddle point N_{s-} corresponds to an increasing solution. In this case both boundaries sit on the same side of the waist.

Figure 3 illustrates the Lefschetz thimbles corresponding to the saddle points. The first Lefschetz thimble runs from the origin at $N = 0$ up in the positive imaginary N direction [2] curves around, moves through N_{s-}, and asymptotically approaching the negative imaginary axis. The second thimble runs up from the negative imaginary axis, through N_{s+} and asymptotes to positive $\mathrm{Re}(N)$ at an angle of $\pi/6$[3]. Note that the sum of these two thimbles is indeed deformable to the positive real N axis. In Fig. 3 the integration contour that runs through the saddle points along the Lefschetz thimbles $\mathcal{J}_{1,2}$ is shown by a dashed orange line – along this contour the integral is manifestly convergent. since we have two relevant saddle points, the saddle point approximation of the propa- gator (31) is the sum of two phases, since we have two relevant saddle points, the saddle point approximation of the propa- gator (31) is the sum of two phases,

$$G\left[q_1;q_0\right]\approx\left(\frac{3i}{4\Lambda\sqrt{\left(q_0-\frac{3}{\Lambda}\right)\left(q_1-\frac{3}{\Lambda}\right)}}\right)^{1/2}\left[e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{iS(N_{s-})/\hbar}+e^{i\frac{\pi}{4}}e^{iS(N_{s+})/\hbar}\right]$$
$$\approx\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}3^{1/2}}{\left[\left(\Lambda q_0-3\right)\left(\Lambda q_1-3\right)\right]^{1/4}}\cos\left(\frac{4\pi^2\Lambda^{1/2}}{3^{1/2}\hbar}\left(q_0-\frac{3}{\Lambda}\right)^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{-i\frac{4\pi^2\Lambda^{1/2}}{3^{1/2}\hbar}\left(q_1-\frac{3}{\Lambda}\right)^{3/2}} \quad (34)$$

The factors $e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$, arise from aligning the fluctuation integrals with the Lefschetz thimbles

No-boundary conditions

(вот тут уже шикарные просто картинки и нарисованы, когда до этого дойду - будет сделана на самом деле работа)

The "no-boundary"conditions were proposed by Hartle and Hawking as a theory of initial conditions for the universe $[1-3]$. The idea is that in the path integral one should sum only metrics whose only boundary is provided by the final spatial hypersurface (corresponding to the current state of the universe). To implement "no-boundary"conditions, we must take $q_0=0$ and find a 4 -metric which is regular there. This is possible for positive k. The "no-boundary"condition is supplemented with the constraint equation (19) evaluated at $q=0$

$$\dot{q}^2=-4N^2k \quad (q=0)$$

We will take the final boundary to correspond to a late time configuration, where the universe has become large, $q_1>\frac{3}{\Lambda}$. The saddle points of the action are given by

$$N_{s,nb1}=+\frac{3}{\Lambda}\left[i\pm\left(\frac{\Lambda}{3}q_1-1\right)^{1/2}\right],\quad N_{s,nb2}=-\frac{3}{\Lambda}\left[i\pm\left(\frac{\Lambda}{3}q_1-1\right)^{1/2}\right]$$

with corresponding actions

$$S_{0,nb1}=-\frac{6}{\Lambda}\left[-i\pm\left(\frac{\Lambda}{3}q_1-1\right)^{3/2}\right],\quad S_{0,nb2}=+\frac{6}{\Lambda}\left[-i\pm\left(\frac{\Lambda}{3}q_1-1\right)^{3/2}\right]$$

Note that saddle points in the upper half plane lead to a $e^{i2\pi^2S_0}\sim e^{-12\pi^2/(\hbar\Lambda)}$, while those in the lower half plane lead to $e^{i2\pi^2S_0}\sim e^{+12\pi^2/(\hbar\Lambda)}$ Given the saddle points, we can determine the wedges and the curves of steepest descent and ascent emanating from them. We use the fact that curves with $\mathrm{Re}\left(iS_0\right)$ specify the boundaries of the wedges, and that $\mathrm{Im}\left(iS_0\right)$ is constant along the flow lines to determine

them numerically - see also [26]. For the case of interest to us, the wedge boundaries and flow lines are shown in Fig. 4, while the directions of the flows are sketched in Fig. 5 .

One can identify the direction of the flows analytically by expanding the action around a saddle point,

$$\delta S_0=S_0^{\text{saddle}}+\frac{1}{2}S_{0,NN}^{\text{saddle}}(\delta N)^2+\ldots$$

The second derivative is given by

$$S_{0,NN}^{\text{saddle}}=N_s\frac{\Lambda^2}{6}-\frac{3}{2N_s^3}\left(q_1-q_0\right)^2$$
$$=\frac{1}{6N_s^3}\left[\Lambda^2N_s^4-9\left(q_1-q_0\right)^2\right]$$

By evaluating the second derivative, we can determine the direction along which the imaginary part of the action stays constant. Our numerical example serves as an illustration. For the saddle point (number 2) at $N_s = -3 + i$ for instance, the second derivative is given by $S_{,NN} = 9/5 \times (-1 + 3i)$. This means that $\alpha \equiv \mathrm{Arg}\,(S_{,NN}) = \pi - \mathrm{ArcTan}(3) \approx 1.89$ We want $\mathrm{Im}\,(iS - iS\,(N_s)) = 0$. Around the saddle point, the change in iS goes like $\Delta(iS) \propto iS_{,NN}(\delta N)^2 \sim n^2 e^{i(\pi/2+2\theta+\alpha)}$, where we have written $\delta N = ne^{i\theta}$. The change in the imaginary part will be proportional to $\sin(\pi/2 + 2\theta + \alpha)$, and this change is zero if

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\approx -0.16, 1.41, 2.98, 4.55, \ldots \end{aligned}$$

This is in good agreement with the flow lines shown in the figure. Note that the change in the real part of the integrand $h = \mathrm{Re}(iS)$ is given by $\cos(\pi/2 + 2\theta + \alpha)$. The direction of steepest descent is thus given by $\cos(\pi/2 + 2\theta + \alpha) = -1$, i.e. for

$$\begin{aligned} \theta &= k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \text{(steepest descent)} \\ &\approx -0.16, 2.98, \ldots \end{aligned}$$

while the curves of steepest ascent are at $\theta \approx 1.41, 4.55, \ldots$ Thus the line of steepest descent of h is towards the origin $N = 0$, while the curve of steepest ascent is down towards the real line. This line eventually connects with the saddle point at $-3 - i$. Thus we encounter the degenerate situation described in section II where the curves of steepest ascent from one saddle point coincides with the curve of steepest descent from another. As discussed there, we can lift this degeneracy by considering a small complex perturbation of the action, and subsequently take the limit where the perturbation vanishes. The effect of such a perturbation is shown in Fig. 6, where one can clearly see that the degeneracy is now lifted, and the intersection formula (6) can be applied. It is straightforward to repeat this calculation for the other three saddle points, with the result that the two saddles in the upper half plane have flow lines that are mirror images of each other, while the two saddles in the lower half plane have their upward and downward flow reversed.

Note that the downward flow lines (Lefschetz thimbles) of the upper saddle points can indeed be deformed to the real N line, while the downward flow lines of the lower saddle points cannot. Moreover, only saddle point 1 can be linked to the original integration contour (the positive real half line) via an upward flow, and hence the appropriate integration contour, along which the integral will be manifestly convergent, is given by the Lefschetz thimble $\mathcal{J}_1$ also indicated by the dashed orange line in Fig. 5. More precisely, it is implied by the arguments presented around Eq. (9) that the integral along the arc at infinity linking the real integration domain to the Lefschetz thimble $\mathcal{J}_1$ vanishes, and thus the path integral manifestly converges. Saddle point 1 lies at

$$N^+_{s,nb1} = +\frac{3}{\Lambda}\left[i + \left(\frac{\Lambda}{3}q_1 - 1\right)^{1/2}\right]$$

and the action evaluated on the saddle point is

$$S^+_{0,nb1} = -\frac{6}{\Lambda}\left[-i + \left(\frac{\Lambda}{3}q_1 - 1\right)^{3/2}\right]$$

For saddle points of the form (28), we have

$$S_{0,NN} = \frac{2c_2}{N_s}\left(\Lambda q_0 - 3\right)^{1/2}\left(\Lambda q_1 - 3\right)^{1/2}$$

implying that $\mathrm{Arg}\,(N_s) = -\alpha + \mathrm{Arg}\left[(\Lambda q_0 - 3)^{1/2}(\Lambda q_1 - 3)^{1/2}\right]$. For the "no-boundary"conditions we thus find $Arg\,(N_s) + \alpha = \frac{\pi}{2}$, and combined with (43) this implies $\theta - \frac{1}{2} Arg\,(N_s) = 0$. In the saddle point approximation, we thus obtain the wavefunction

$$G_{nb}\left[q_1; 0\right] \approx e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{3^{1/4}}{2\,(\Lambda q_1 - 3)^{1/4}} e^{-12\pi^2/(\hbar\Lambda) - i4\pi^2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\left(q_1 - \frac{3}{\Lambda}\right)^{3/2}/\hbar}$$

Note that the real part of the classical action for the dominant saddle point is negative, as expected from the general arguments presented in section II. This concludes the explicit derivation of our result that the relevant saddle point contributes a weighting $e^{-12\pi^2/(\hbar\Lambda)}$, the inverse of the Hartle-Hawking result.

Классичность

The properties of the physical spacetime should be inferred from the quantum mechanical amplitude. In particular, whether or not we are describing a classical spacetime depends on how the amplitude changes as its arguments are varied. Above we have calculated $G_{nb}\left[q_1\right]$ as a function of q_1, the scale factor on a spatial hypersurface. The amplitude $G_{nb} = e^{A+iP}$ that we have obtained has a slowly varying amplitude A and a fast-varying phase P as the universe expands, i.e. in the large q_1 limit

$$\frac{\partial A/\partial q_1}{\partial P/\partial q_1} \sim \frac{1}{\left(q_1 - \frac{3}{\Lambda}\right)^{3/2}} \to 0$$

This implies that the amplitude is increasingly classical in a WKB sense as the universe expands. Hence it describes a classical universe. The scaling of the WKB condition for large q_1 is inversely proportion to the volume of space since the spatial volume is proportional to $q_1^{3/2}$. This is what is expected from studies of inflationary "no-boundary"instantons in the limit of an exactly flat potential [27].

It is interesting to ask why our results differ from the earlier approaches that took as their starting point the Euclidean path integral. After all, one can simply translate our results into this language by replacing the lapse function N by iN. The graphs we plotted would then simply rotate by 90 degrees. Why would any physical results be changed? The crucial point is that the Euclidean approach assumes the Euclidean time to be fundamental. The path integral should really be performed along the imaginary N axis. In other words, in the Euclidean approach one would take the original integration contour to extend from $N = 0$ (again excluding the point at $N = 0$ itself) to infinity in the positive or negative imaginary direction. At this point it is useful to take another look at Fig. 5. First note that none of the saddle points are related to the imaginary axis by an upward flow line. There are two flow lines that tend towards $N = 0$ asymptotically, but they do not intersect the imaginary axis. This immediately implies that one cannot perform the integral thus defined using the saddle point method. In other words, no combination of saddle points provides a good estimate of the value of the integral. What is more, the integral has no chance of converging. In the positive imaginary direction, the integral diverges at large values of $i|N|$, while along the negative imaginary axis it diverges as it approaches $N = 0$. Another way to say this is to observe that every integration path containing a saddle point passes through a region where the integral is divergent, when one tries to smoothly deform it to the imaginary axis using Cauchy's theorem. Hence we conclude that the Euclidean path integral is simply ill-defined. By contrast, the real time path integral leads to unambiguous and convergent results.

4.6.1 простейшие диаграммы

4.7 численные методы

как его считать численно?

Часть V

Применения интеграла по траекториям

5 квантовая механика

https://mathoverflow.net/questions/20393/path-integrals-outside-qft?rq=1

5.1 смысл и интерпретации континуального интеграла

первое, с чем мы сталкиваемся, это с разными интерпретациями и идейными вопросами.

попробуем их решить, указав все многочисленные подводные камни, обход которых требует отдельного мышления.

5.2 основы квантовой механики

через интеграл их привожу

определение формализма квантовой механики через интеграл по траекториям

?????

5.3 открытые системы

есть про них статья, там еще П-Л используется

6 Квантовая теория поля

6.0.1 уравнение Швингера-Дайсона

7 Другие применения континуального интеграла (!?!??)

7.1 Случайные блуждания

7.2 Оптика

7.2.1 Формализм континуального интеграла в оптике (!??!?!?)

(в записи по оптике тоже будет раздел про него!)

почему его в оптике можно использовать, был определен для волновой функции изначально?

то есть не для поля.
а для поля почему он работает?

7.2.2 гравитационное линзирование

то, что я уже разбирал, сюда потом вставлю.

7.3 финансы

см литературу, знаю статью про это, с нее и начну потом. пока не актуально.

7.3.1 Обзор (!??!?)

(пока хз.)

введение

In this paper we consider some applications of the path integral formalism of quantum mechanics to financial modeling. Path integrals constitute one of the basic tool of modern quantum physics. They were introduced in physics by Richard Feynman in 1942 in his Ph.D. thesis on path integral formulation of quantum mechanics (Feynman, 1942, 1948; Feynman and Hibbs, 1965; Kac, 1949, 1951, 1980; Fradkin, 1965; Simon, 1979; Schulman, 1981; Glimm and Jaffe, 1981; Freidlin, 1985; Dittrich and Reuter, 1994). In classical deterministic physics, time evolution of dynamical systems is governed by the Least Action Principle. Classical equations of motion, such as Newton's equations, can be viewed as the Euler–Lagrange equations for a minimum of a certain action functional, a time integral of the Lagrangian function defining the dynamical system. Their deterministic solutions, trajectories of the classical dynamical system, minimize the action functional (the least action principle). In quantum, i.e. probabilistic, physics, one talks about probabilities of different paths a quantum (stochastic) dynamical system can take. One defines a measure on the set of all possible paths from the initial state xi to the final state xf of the quantum (stochastic) dynamical system, and expectation values (averages) of various quantities dependent on paths are given by path integrals over all possible paths from xi to xf (path integrals are also called sums over histories, as well as functional integrals, as the integration is performed over a set of continuous functions of time (paths)). The classical action functional is evaluated to a real number on each path, and the exponential of the negative of this number gives a weight of the path in the path integral. According to Feynman, a path integral is defined as a limit of the sequence of finite-dimensional multiple integrals, in a much the same way as the Riemannian integral is defined as a limit of the sequence of finite sums. The path integral representation of averages can also be obtained directly as the Feynman–Kac solution to the partial differential equation describing the time evolution of the quantum (stochastic) dynamical system (Schrodinger equation in quantum mechanics or diffusion (Kolmogorov) equation in the theory of stochastic processes). In finance, the fundamental principle is the absence of arbitrage (Ross, 1976; Cox and Ross, 1976; Harrison and Kreps, 1979; Harrison and Pliska, 1981; Merton, 1990; Duffie, 1996). In finance it plays a role similar to the least action principle and the energy conservation law in natural sciences. Accordingly, similar to physical dynamical systems, one can introduce Lagrangian functions and action functionals for financial models. Since financial models are stochastic, expectations of various quantities contingent upon price paths (financial derivatives) are given by path integrals, where the action functional for the underlying risk-neutral price process defines a risk-neutral measure on the set of all paths. Averages satisfy the Black–Scholes partial differential equation, which is a finance counterpart of the Schrodinger equation of quantum mechanics, and the risk-neutral valuation formula is interpreted as the Feynman–Kac representation of the PDE solution. Thus, the path-integral formalism provides a natural bridge between the risk-neutral martingale pricing and the arbitrage-free PDE-based pricing. To the best of our knowledge, applications of path integrals and related techniques from quantum physics to finance were first systematically developed in the eighties by Jan Dash (see Dash, 1988, 1989 and 1993). His work influenced the author of the present paper as well. See also Esmailzadeh (1995) for applications to path-dependent options and Eydeland (1994) for applications to fixed-income derivatives and interesting numerical algorithms to compute path integrals. This approach is also very close to the semigroup pricing developed by Garman (1985), as path integrals provide a natural representation for pricing semigroup kernels, as well as to the Green's functions approach to the term structure modeling of Beaglehole and Tenney (1991) and Jamshidian (1991). See also Chapters 5–7 and 11 in the monograph Duffie (1996) for the Feynman–Kac approach in finance and references therein. It is the purpose of this paper to give an introductory overview of the path integral approach to financial modeling and options pricing and demonstrate that path integrals and Green's functions constitute both a natural theoretical concept and a practical computational tool in finance, especially for path-dependent derivatives. The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, we give an overview of the general framework of path-integral options pricing. We start by considering a single-asset Black–Scholes model as an example. Then, we develop the path integral formalism for a multi-asset economy with asset- and time-dependent volatilities and correlations. The central result here is a general path integral representation (Feynman–Kac formula) for a path-dependent option contingent upon a finite number of underlying asset prices. The path integration measure is given by an exponential of the negative of the action functional for the risk-neutral price process. This formula constitutes a basis for practical calculations of pathdependent options. In Section 3, we give a brief overview of the main techniques to evaluate path integrals. Gaussian path integrals are calculated analytically by means of the Van Vleck formula. Certain initially non-Gaussian integrals may be reduced to Gaussians by changes of variables, time re-parametrizations and projections. Finally, essentially non-Gaussian path integrals must be evaluated either numerically by Monte Carlo simulation or a deterministic discretization scheme, such as binomial or trinomial trees, or by analytical approximations such as the semiclassical or WKB approximation. In Section 4, three examples of path-dependent options are given to illustrate the theory (weighted Asian options, floating barrier options and barrier options with ladder-like barriers).

7.3.2 Risk-Neutral Valuation and Wiener-Feynman Path Integrals

BLACK-SCHOLES EXAMPLE

We begin by reviewing the Black-Scholes model (Black and Scholes (1973) and Merton (1973); see also Hull (1996) and Duffie (1996)). A path-independent option is defined by its payoff at expiration at time T

$$\mathcal{O}_F\left(S_T, T\right) = F\left(S_T\right)$$

where F is a given function of the terminal asset price S_T. We assume we live in the Black-Scholes world with continuously compounded risk-free interest rate r and a single risky asset following a standard geometric Brownian motion

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = m\ \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z$$

with constant drift rate m and volatility σ (for simplicity we assume no dividends). Then the standard absence of arbitrage argument leads us to constructing a replicating portfolio consisting of the underlying asset and the risk-free bond and to the Black-Scholes PDE for the present value of the option at time t preceeding expiration

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{O}_F}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \mathcal{O}_F}{\partial S} - r\mathcal{O}_F = -\frac{\partial \mathcal{O}_F}{\partial t}$$

и пошло там по статье, пока не до нее.

Часть VI
Adds

A Введение и обзор предмета

Приведу общие важные соображения о том, как я вижу предмет.

(все это уже проявлено выше, тут лишь четкие указания для полноты и для тех, у кого вопросы в том, что мне итак очевидно.)

A.1 Еще мотивация

Обсудим все, что нас мотивирует для изучения предмета.

A.2 Мышление профессионала в

(потом раскрою)

A.2.1 Суть предмета

A.2.2 Отношение к предмету (!?)

A.2.3 Способы заработать, зная предмет

A.2.4 Использование предмета в обычной жизни (!)

Укажем, как предмет используется в обычной жизни.

A.2.5 Актуальнейшие приложения

A.2.6 Построение с нуля

(потом раскрою, еще я не профессионал, а вопрос этот самый профессиональный)

A.2.7 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания предмета.
(потом раскрою)

A.2.8 Особенности эффективного изучения

Осудим, какое мышление наиболее эффективное для усвоение предмета.

1/1) Вообще не занимайся отдельно этим предметом, пока основы физики и математики не сделаны на примерно уровне теормина.

Потому что минимальная теория - дело 3 дней размышлений и чтения. Отдельные темы - дело не знаю, может, года общего фонового развития. Абсолютно не вижу никакого смысла сидеть в этой теме, если нет общей устойчивости. Это и пользы не принесет, и время по сути потратишь, гораздо полезнее просто порешать обычные задачи по физике.

Способы изучения предмета

(потом раскрою)

Необходимые темы для

(потом раскрою)

Дополнительные темы для

(потом раскрою)

A.2.9 Особенности эффективного преподавания (???)

Обсудим, каким образом наиболее эффективно преподавать.

A.3 Литература

A.3.1 Основная

Основная обучающая

[2] Зинн-Жюстен, Жан Континуальный интеграл в квантовой механике

самая прекрасная книга, по которой и буду создавать изначально запись. книга настолько прекрасна, что ничего другого перед ней читать не хочу!

[1] Witten E. New look at Path integral

наверное, континуальный интеграл по нему буду изучать. Пока просто не понимаю, что там такого особенного?

[3] Feldbrugge, Job and Lehners, Jean-Luc and Turok, Neil Lorentzian quantum cosmology

приложение континуального интеграла к квантовой космологии. Ставлю эту статью в раздел главных книг, потому что там крутейшие картинки, которые очень хочется понять!

(по теории меры нужно что-нибудь добавить, все-таки известно, что она тут много используется)

ефимов функциональный интеграл и рассеяние статья

есть такая.

[4] Kleinert, Hagen Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets

1600 страниц наверное шикарного текста, который наверное возьму в основу этой записи.

литература с дополнительными методами

[5] Studerus, Cedric Reduze–Feynman integral reduction in C++

Вычисление континуального интеграла программными методами. интересно, потом досмотрю, небольшая такая запись. пока просто не до этого.

Литература крепкого минимума

A.3.2 Дополнительная

Дополнительная по теории

литература с приложениями континуального интеграла

[6] Киселев 1

раздел про определение интеграла из него.

[7] Побойко и др. лекции проблем теоретической физики

!!! их также досмотрю и прорешаю, уже вроде бы материал из них был взят.

[8] Зи Э. Квантовая теория поля в двух словах

Применение континуального интеграла к КТП. Здесь немного указаний про это, в КТП - это большая часть.

[9] Linetsky, Vadim The path integral approach to financial modeling and options pricing

Интересно узнать это приложения. Судя по всему кстати приложений в финансах много, так что дойти до него нужно. разве что потом это все.

статьи с решенными задачами методом континуального интеграла и дополнениями

[10] А.Г. Семенов Уравнение Ланжевена и функциональный интеграл
интересная связка, потом посмотрю обязательно.

Основная

Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets Hagen Kleinert

В помощь

Статьи о теоретических методах

О приложениях

A.4 Обзор

(потом раскрою)

A.4.1 предмет в двух словах

Обсудим, что из себя представляет предмет наиболее кратко, выделяя самую суть.

появление Предмет в нашей картине мира

один подход

второй подход

один большой раздел

такой-то набор следствий

A.4.2 Итоговые формулы и закономерности

A.4.3 обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

A.4.4 Обзор дальнейших развитий

A.4.5 Связи с другими науками

Обсудим связи с разделами
(потом раскрою)

A.4.6 Описание записи

Общее описание записи

Общие особенности записи

Особенности глав и разделов

Первая часть про предмет в двух словах

Вторая часть

Часть про приложения какие вообще приложения я разбирал?

Обозначения и константы

A.4.7 Об истории предмета

Обсудим вкратце историю развития ...

A.5 Головоломки

Обсудим в порядке интересности задачки и вопросы

A.5.1 Типичные головоломки

A.5.2 Бытовые головоломки

A.5.3 Принципиальные головоломки

A.5.4 Головоломки о деталях

A.5.5 Головоломки для освоения типичных понятий

Допустим, видим человека, который в принципе хотел бы понять суть, опишем, какие в какой последовательности будем задавать, чтобы в типичном случае ему было бы интереснее въезжать. В частности это могут быть младшие студенты или редко школьники.

Головоломки для освоения школьного уровня

Головоломки для освоения уровня теормина

Головоломки для освоения других особенностей

B Дополнения

B.0.1 title

Литература

[1] Witten, Edward: *A new look at the path integral of quantum mechanics.* arXiv preprint arXiv:1009.6032, 2010.

[2] Зинн-Жюстен, Жан: *Континуальный интеграл в квантовой механике.* 2010.

[3] Feldbrugge, Job, Lehners, Jean Luc, и Turok, Neil: *Lorentzian quantum cosmology.* Physical Review D, 95(10):103508, 2017.

[4] Kleinert, Hagen: *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets.* World scientific, 2009.

[5] Studerus, Cedric: *Reduze–Feynman integral reduction in C++.* Computer Physics Communications, 181(7):1293–1300, 2010.

[6] Киселёв, Валерий Валерьевич: *Квантовая механика. Курс лекций ч. 1.* 2005.

[7] др., Побойко И. и: *Семинары по квантовой механике ПТФ.* 2018.

[8] Зи, Э: *Квантовая теория поля в двух словах.* Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

[9] Linetsky, Vadim: *The path integral approach to financial modeling and options pricing.* Computational Economics, 11(1):129–163, 1997.

[10] Семенов, А.Г.: *Уравнение Ланжевена и функциональный интеграл.*