# Group Theory

Yury Holubeu *

July 30, 2024

This note is not intended for distribution.

Group theory is discussed in details. Links below show contents of solved problems, summary of other topics.

Цели: 1) by 30.07 at least one weak is needed to think about basics.

# Contents



*yuri.holubev@gmail.com

# 1 Preface and main motivation

### Основная мотивация

**Теория групп нужна в квантовой механике** (с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

**Теория групп нужна в теории представлений группы Пуанкаре, которая используется в теории поля и в квантовой теории поля** (с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

### Лучшие технические головоломки

### Лучшие головоломки о приложениях

(для приложений ведь теорию групп мы и учим)

# Part I
# —— Group Theory in a Nutshell ——

## 2 Main topics of group theory in a nutshell

### 2.1 On typical constructions

#### 2.1.1 Основные определения и понятия

(скоро напишу, раз повторить только нужно)

**Основные определения**

Группа $G$ - это множество элементов, в котором определена 1 операция "умножения", которое: 1) замкнуто: $\forall g_1, g_2 \in G g_1 g_2 \in G$ 2) ассоциативно: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3 = g_1 g_2 g_3$ 3) $\exists e \in G : \forall g \quad eg = ge = g$ 4) $\exists g^{-1} \in G : \quad gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Из аксиом группы следует, что единичный элемент единственный, обратный элемент удовлетворяет также свойству $a^{-1} \cdot a = e$.

Абелева группа - если $\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 g_2 = g_2 g_1$. Иначе - группа неабелева.

$H$ - подгруппа, если $H \subset G$ и она группа относительно той же операции умножения, что и в $G$.

нормальная подгруппа $H \trianglelefteq G : \forall g \in G$

дальше мы клеем вообщем интересную конструкцию, над которой хорошо бы подумать.

факторгруппа

в общем, нужно как-то находить схожие и отличные группы, (позже напишу истинный смысл гомеоморфизма), но первая схожесть вводится так:

гомеоморфизм - отображение из $G$ в $G_2$, такое что $\forall g_1, g_2 \in G$

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

$$f(g^{-1}) = f^{-1}(g)$$

взаимно однозначный гомеоморфизм - изоморфизм.

и тут изоморфность групп - изоморфизм. (почему именно так гомеоморфизм вводится?)

здесь же смежные классы как основная характеристика - вторая.

прямое произведение групп $G$ и $H$.

**изоморфность**

**действия группы**

**Классификация и обзор типов групп**

???

| Name | Group | Field | Form | Maximal compact subgroup | Lie algebra | Root system |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Special linear | $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ | $\mathbf{R}$ | — | $\mathrm{SO}(n)$ | | |
| Complex special linear | $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ | $\mathbf{C}$ | — | $\mathbf{SU}(n)$ | Complex | $A_m, n = m + 1$ |
| Quaternionic special linear | $\mathrm{SL}(n, \mathbf{H}) = \mathrm{SU}^*(2n)$ | $\mathbf{H}$ | — | $\mathrm{Sp}(n)$ | | |
| (Indefinite) special orthogonal | $\mathrm{SO}(p, q)$ | $\mathbf{R}$ | Symmetric | $\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$ | | |
| Complex special orthogonal | $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ | $\mathbf{C}$ | Symmetric | $\mathbf{SO}(n)$ | Complex | $\begin{cases} B_m, & n = 2m+1 \\ D_m, & n = 2m \end{cases}$ |
| Symplectic | $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ | $\mathbf{R}$ | Skew-symmetric | $\mathrm{U}(n)$ | | |
| Complex symplectic | $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ | $\mathbf{C}$ | Skew-symmetric | $\mathbf{Sp}(n)$ | Complex | $C_m, n = 2m$ |
| (Indefinite) special unitary | $\mathrm{SU}(p, q)$ | $\mathbf{C}$ | Hermitian | $\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ | | |
| (Indefinite) quaternionic unitary | $\mathrm{Sp}(p, q)$ | $\mathbf{H}$ | Hermitian | $\mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q)$ | | |
| Quaternionic orthogonal | $\mathrm{SO}^*(2n)$ | $\mathbf{H}$ | Skew-Hermitian | $\mathrm{SO}(2n)$ | | |

### 2.1.2 On representations

#### Main formulas

### 2.1.3 Discrete groups basics in a nutshell

#### Main formulas

#### Об элементарных определениях и перестановках

(тут простые свойства, потом заново их пропишу, удалил многое, потому что всё тут очевидно. Но нужно еще задач нарешать)

Перестановка (подстановка) $n$ элементов - биекция $n$-элементного множества на себя. Множество всех перестановок множества $\{1, 2, ..., n\}$ обозначается $S_n$.

Произведение перестановок - композиция биекций; $\alpha\beta$ означает, что сначала действует $\beta$, а потом $\alpha$.

Порядок элемента $g \in G$ - наименьшее натуральное $n : g^n = e$. Если его не существует, то порядок "равен бесконечности".

Порядок группы $|G|$ - количество элементов в группе.

Если перестановка равна произведению независимых циклов длины $d_1, ..., d_k$, то ее порядок равен НОК $(d_1, d_2, ..., d_k)$ (???)

•8. Четные перестановки образуют подгруппу в группе $S_n$ (эта подгруппа обычно называется $A_n$). Нечетные перестановки подгруппу не образуют.

#### Об абелевых группах, действии на множестве, примерах

(раздел очень полезен многими примерами, по идее после этого раздела очень многие задачи и порешаются!)

**Типичные примеры**

Группу можно задавать таблицей умножения. Например:

$C_4$

| | $e$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ |
| $r$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $e$ |
| $r^2$ | $r^2$ | $r^3$ | $e$ | $r$ |
| $r^3$ | $r^3$ | $e$ | $r$ | $r^2$ |

$\mathbb{Z}_4$

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

$\mathbb{Z}_5^*$

| | 1 | 2 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 4 |

В таблице умножения группы в каждой строчке и столбце встречаются все элементы группы по одному разу.

Две группы $G$ и $H$ называются изоморфными, если существует биекция $\varphi : G \to H$ такая, что

$$\forall a, b \in G, \varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b).$$

При изоморфизме групп таблицы умножения переходят друг в друга.

Например, группа $\mathbb{Z}_n$ изоморфна $C_n$. Требуемая биекция - отображение, которое переводит остаток $k, 0 \leqslant k < n$ переходит в поворот на угол $\frac{2\pi k}{n}$. Или это очевидно из схожести таблиц умножения.

(???? кст, как вообще доказывать эти изоморфизмы укажу тут!!! пока не уверен.)

(??) Группа $G$ из $n$ элементов изоморфна $C_n$ тогда и только тогда, когда в ней есть элемент $g$ порядка $n$. В одну сторону это очевидно, а в другую - нужно доказывать только что если элемент $g$ имеет порядок $n$, то $G \simeq C_n$. Но в этом случае все элементы $e, g, ..., g^{n-1}$ различны, а так как $|G| = n$, то любой элемент $G$ имеет вид $g^k$, $0 \leqslant k < n$. Тогда изоморфизм строится так: элемент $r^k \in C_n$ переходит в $g^k \in G$.

•4. Группа $\mathbb{Z}_5^*$ изоморфна группе $C_4$. Доказательство. При изоморфизме 1,2, 4, 3 (остатки по модулю 5) переходят в повороты на углы $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. То, что это изоморфизм, видно из таблицы умножения.

Другой способ: воспользоваться предыдущим предложением и заметить, что элемент $2 \in \mathbb{Z}_5^*$ имеет порядок 4. (???????????????7)

Определение 3. Прямым произведением групп $G$ и $H$ называется множество пар $G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$ с операцией $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$.

Например, группа $\mathbb{Z}_8^*$ изоморфна группе $C_2 \times C_2$, ибо см. таблицы умножения.

$\mathbb{Z}_8^*$

| | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 3 | 3 | 1 | 7 | 5 |
| 5 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 7 | 7 | 5 | 3 | 1 |

$C_2 \times C_2$

| | (e, e) | (e, r) | (r, e) | (r, r) |
|---|---|---|---|---|
| (e, e) | (e, e) | (e, r) | (r, e) | (r, r) |
| (e, r) | (e, r) | (e, e) | (r, r) | (r, e) |
| (r, e) | (r, e) | (r, r) | (e, e) | (e, r) |
| (r, r) | (r, r) | (r, e) | (e, r) | (e, e) |

•6. Группы $C_2 \times C_2$ и $C_4$ не изоморфны. Доказательство. В группе $C_2 \times C_2$ любой элемент в квадрате равен 1, а в группе $C_4$ нет.

Теорема 7. Любая абелева группа с конечным числом образующих изоморфна произведению циклических групп $G \simeq \mathbb{Z}^n \times C_{n_1} \times ... \times C_{n_l}$.

В формулировке теоремы $\mathbb{Z}^n$ - это произведение $n$ групп изоморфных $\mathbb{Z}$ - бесконечная абелева группа. Теорема в частности утверждает, что любая конечная абелева группа изоморфна произведению конечных циклических групп $G \simeq C_{n_1} \times ... \times C_{n_l}$. При этом порядок группы $G$ равен $|G| = n_1 \cdot ... \cdot n_l$.

Пользуясь этой теоремой, можно перечислить абелевы группы данного порядка. Ясно, что существует ровно одна абелева группа порядка 1, так же для групп порядка 2 и порядка 3. Выше мы уже видели, что существует две неизоморфныее абелевы группы порядка 4: $C_2 \times C_2$ и $C_4$. Для порядка 5 абелева группа одна: $C_5$, для порядка 6 есть уже два кандидата $C_2 \times C_3$ и $C_6$, но на самом деле они изоморфны.

•8. Группы $C_2 \times C_3$ и $C_6$ изоморфны. Доказательство. В группе $C_2 \times C_3$ есть элемент $(r, r)$ порядка 6.

Можно доказать общее утверждение

•9. Группы $C_m \times C_n$ и $C_{mn}$ изоморфны если и только если $m$ и $n$ взаимно просты. Доказательство Если $m$ и $n$ взаимно просты, то элемент $(r, r) \in C_m \times C_n$ имеет порядок $mn$, значит группа $C_m \times C_n$ изоморфна циклической.

В другую сторону, если $m$ и $n$ не взаимно просты, то НОК$(m, n) < mn$. Ясно, что любой элемент группы $C_m \times C_n$ равен 1 в степени НОК$(m, n)$, т.е. в этой группе нет элемента порядка $mn$.

Часто в физике группы возникают как группы симметрий какой-то физической задачи в пространстве. Среди движений пространства можно выделить трансляции и движения сохраняющие некоторую точку, которую удобно считать началом координат. Также движения разделяются на движения сохраняющие ориентацию (они также называются собственными) и несохраняющие ориентацию. Все движения пространства описаны:

а) Движения плоскости, сохраняющие начало координат: повороты $R_\alpha$ вокруг начала координат на угол $\alpha$ (сохраняют ориентацию) и симметрии $S_l$ относительно прямых $l$, проходящих через начало координат (меняют ориентацию).

б) Движения трехмерного пространства, сохраняющие начало координат: повороты $R_{l,\alpha}$ вокруг осей, проходящих через начало координат (сохраняют ориентацию) и зеркальные поворотъ $S_{\pi,\alpha}$ - композиции симметрии относительно плоскости $\pi$ и поворота вокруг перпендикулярно ей оси на угол $\alpha$, плоскость и ось пересекаются в начале координат, зеркальные повороты меняются ориентацию.

Конечные группы возникают как подгруппы группы симметрий.

Пример а) Группа симметрий на плоскости правильного многоугольника $D_n$. Эта группа часто называется диэдральной группой. Состоит из $n$ поворотов и $n$ осевых симметрий. Всего $2n$ элементов.

б) Группа симметрий правильного многогранника т.е. группа движений трехмерного пространства переводящих правильный многогранник в себя.

**О действии на множестве** Действие группы $G$ на множестве $X$ - это отображение $\rho : G \times X \to X$ такое, что:

$$\forall g, h \in G, x \in X, \rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x),$$

$$\forall x \in X, \rho(e, x) = x.$$

Для упрощения обозначений обычно действие группы записывается как умножение слева $\rho(g, x) = gx$. Тогда первое свойство - это просто ассоциативность, а второе это свойство единичного элемента.

Пример Группа $S_n$ действует на множестве $\{1, 2, ..., n\}$ переставляя его элементы.

Пусть группа $G$ действует на множестве $X$.

Орбита элемента $x \in X$ - множество $Gx = \{y \in X | \exists g \in G, y = gx\}$. Множество всех орбит обозначается $X/G$. Стабилизатором элемента $x \in X$ называется множество $G_x = \{g \in G | gx = x\}$.

Например, группа $S_n$ действует на множестве $\{1, 2, ..., n\}$. Тогда орбита любой точки $i$ совпадет со всем множеством $\{1, 2, ..., n\}$, а стабилизатор будет изоморфен $S_{n-1}$.

2. Группа $C_n$ действует на $\mathbb{R}^2$ поворотами на угол $2\pi/n$. Тогда орбитой точки будут вершины правильного $n$-угольника. Множество орбит можно отождествить с точками угла $2\pi/n$ в котором стороны угла между собой склеены. Таким образом, множество орбит - это конус.

•10. Для любой точки $x \in X$ стабилизатор $G_x$ является подгруппой в $G$.

•11. Любые две орбиты $Gx$ и $Gy$ или не пересекаются или совпадают.

Можно ввести отношение $x \sim y$ если $x \in Gy$ и проверить, что оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. То есть является отношением эквивалентности.

Например, Группа $C_n$ действует на $\mathbb{R}^2$ поворотами. Тогда орбита любой точки из $\mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$ состоит из $n$ точек, а стабилизатор тривиален. Для начала координат орбита состоит только из одной точки, но стабилизатор состоит из всей группы, т.е. из $n$ элементов. В любом случае произведение длины орбиты на порядок стабилизатора равен $n$.

2 Группа $G = D_n$ симметрий правильного $n$-угольника, множество $X$ - множество вершин правильного $n$-угольника. Тогда если $A$ - произвольная вершина, то орбита $GA$ это все $X$, стабилизатор $G_A$ - это группа состоящая из тождественного преобразования и симметрии относительно оси проходящей через $A$ и начало координат. Теорема 10 дает равенство: $|D_n| = n \cdot 2$.

3 Группа $G$ симметрий куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $X = \{A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1\}$ - множество вершин куба. Тогда орбита $GA$ состоит из всех 8 вершин куба. А стабилизатор $G_A$ состоит из 6 преобразований сохраняющих $A$: тождественное, два поворота вокруг оси $AC_1$, симметрии относительно плоскостей $ABC_1, ADC_1, AA_1C_1$. Тогда $|G| = 6 \cdot 8 = 48$. Через $G_+$обозначим подгруппу собственных движений куба, ее порядок равен 24.

### О теореме Лагранжа, классах сопряженности, нормальных подгруппах, полупрямом произведении

Для конечной группы $G$

$$\forall x \in X \qquad |G| = |Gx| \cdot |G_x| \,.$$

Доказательство. Пусть $|Gx| = a, |G_x| = b$. Элементы орбиты $Gx = \{g_1x, g_2x, ..., g_ax\}$, $g_1, ..., g_a$ - элементы $G$, можно считать, что $g_1 = e$. Занумерум также элементы стаблизатора $G_x = \{h_1, h_2 ... h_b\}$, опять же можно считать, что $h_1 = e$. Любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = g_ih_j$, потому что так как $gx \in Gx$ значит $gx = g_ix$, тем самым мы однозначно определили $g_i$. После этого $h_j = g_i^{-1}g$. Значит, $|G| = a \cdot b = |Gx| \cdot |G_x|$. (????? подумаю еще про это!!!)

### О теореме Лагранжа, Ферма, Эйлера (!??!?!??!?!?!?)

(вот это понять хотелось бы уже!!!)

Определение 1. Группа $G$ действует на себе умножением слева по формуле $(g, x) \mapsto gx$.

Полезно ограничить это действие на подгруппу $H \subset G$, то есть рассмотреть действие $H$ на $G$ по формуле $(h, x) \mapsto hx$. Орбиты для этого действия - множества $Hg$ - называются правыми классами смежности.

Так как $hx = x$ означает, что $h = e$, то стабилизатор любой точки тривиален, значит все орбиты состоят из $|H|$ элементов. Следовательно $|G| = |H| \cdot |G/H|$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 2 (Лагранж). Пусть $G$ - конечная группа, $H$ - подгруппа. Тогда $|H|$ делит порядок $|G|$.

•3 (Следствие). Пусть $G$ - конечная группа. Тогда для любого элемента $g \in G$ порядок $g$ делит $|G|$. В частности $g^{|G|} = e$

Доказательство. Пусть порядок $g$ равен $d$. Тогда элементы $e, g, g^2, ..., g^{d-1}$ образуют подгруппу, порядок этой подгруппы равен $d$. По теореме Лагранжа получаем, что $d$ делит $|G|$, что и требовалось доказать. Также $g^{|G|} = \left(g^d\right)^{|G|/d} = e$.

**Малая теорема Ферма.** если $p$ - простое число, $a \in \mathbb{Z}$, и НОД $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} - 1$ делится на $p$.

Доказательство Возьмем $G = \mathbb{Z}_p^*$, тогда заменив $a$ на его остаток по модулю $p$ имеем $a^{p-1} = 1$ в группе $\mathbb{Z}_p^*$, значит $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod} p)$.

(!?!??!??!?!?)

**Теорема Эйлера.** Если НОД $(a, n) = 1$, то $a^{|\mathbb{Z}_n^*|=\varphi(n)} - 1$ делится на $n$.

Доказывается аналогично прошлому пункту.

(!?!??!??!?!?)

Помимо действия умножения слева можно определить действие справа.

Определение 2. Группа $G$ действует на себе умножением справа по формуле $(g, x) \mapsto xg^{-1}$.

Определение 3. Группа $G$ действует на себе сопряжениями по формуле $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$.

Орбиты для действия группы на себе сопряжениями называются классами сопряженности.

Сопряжение является автоморфизмом (изоморфизмом с собой) группы так как

$$gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}$$

**Примеры** • Если группа $G$ коммутативная, то каждый класс сопряженности состоит из одного элемента.

• В группе $S_3$ есть три класса сопряженности: $e$; $(1,2),(1,3),(2,3)$; $(1,2,3),(1,3,2)$.

•6. Пусть $\sigma = (i_1, i_2, ..., i_k)(j_1, j_2, ..., j_l) ...$ и $\alpha$ произвольная перестановка. Тогда $\alpha\sigma\alpha^{-1} = (\alpha(i_1), \alpha(i_2), ..., \alpha(i_k))(\alpha(j_1), \alpha(j_2), ..., \alpha(j_l)) ...$

•7 (Следствие). Две перестановки сопряжены в группе $S_n$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую циклическую структуру, т.е. их разложения в произведения независимых циклов для любого $k$ содержат одинаковое число циклов длины $k$.

• Пусть $G$ - группа движений $\mathbb{R}^3$, $S_\pi$ симметрия относительно плоскости $\pi$, $g$ - некоторое движение. Тогда $gS_\pi g^{-1} = S_{g(\pi)}$ является симметрией относительно плоскости $g(\pi)$.

Пусть $R_{l,\varphi}$ - поворот вокруг оси $l$ на угол $\varphi$, $g$ - некоторое движение. Тогда $gR_{l,\varphi}g^{-1} = R_{g(l),\varphi}$ является поворотом поворот вокруг оси $g(l)$ на угол $\varphi$.

Вообще, сопряжение движения посредством $g$ означает ортогональную замену базиса (и, возможно, смену начала координат) в $\mathbb{R}^3$, поэтому движение будет переходить в движение такого же типа, но геометрические данные изменяются посредством $g$.

• Пусть $G$ - группа матриц $GL(n, C)$. Тогда две матрицы $A, B$ сопряжены если и только если у них одинаковые жордановы нормальны формы.

По аналогии с векторными пространствами естественно хотеть ввести структуру умножения на классах смежности. Для этого надо чтобы $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$. Т.е. для любых $h_1, h_2 \in H$ существует $h \in H$ такой $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h$. Значит $g_2^{-1}h_1g_2 = hh_2^{-1}$. Т.е. нужно чтобы $g\mathrm{Hg}^{-1} \subset H$.

Определение 4. Подгруппа $N \subset G$ называется нормальной (иногда говорят инвариантной) если для любого $g \in G$ верно $gNg^{-1} = N$. Это иногда записывают $N \triangleleft G$. Свойства. 1. Если $N \triangleleft G$, то $N$ является объединением каких-то классов сопряженности.

• Если $N \triangleleft G$, то левые и правые смежные классы совпадают $gN = Ng$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $gn \in gN$ левого класса смежности. Тогда $gn = gng^{-1}g \in Ng$ так как $gng^{-1} \in N$ всилу нормальности $N$.

Оба этих свойства можно было взять в качестве определения нормальной подгруппы.

• Если группа $G$ коммутативная, то любая подгруппа является нормальной.

• Пусть $G = S_3$. По теореме Лагранжа подгруппы могут быть только из $1, 2, 3$ или $6$ элементов. Подгруппа из одного элемента это $\{e\}$, она всегда нормальна, подгруппа из 6 элементов это вся $G$, она тоже нормальная. Подгруппа из двух элементов может состоять только из $e$ и какая-то транспозиция, такая подгруппа не является нормальной так как сопряжением мы можем перевести транспозицию в любую другую. Подгруппа из трех элементов это только $\{e, (1,2,3), (1,3,2)\}$, она нормальная, так как состоит из полных классов сопряженности.

• Пусть $G = A \times B$. Тогда подгруппы $\{(a, e)\} \simeq A$ и $\{(e, b)\} \simeq B$ являются нормальными.

•8. Если $N \triangleleft G$, то смежные классы по $N$ образуют группу. Эта группа называется факторгруппой и обозначается $G/N$.

Операция умножения вводится по формуле

$$g_1 N \cdot g_2 N = g_1 g_2 N$$

надо проверять корректность определения, и она следует из нормальности $N$, как было показано выше.

Определение 5. Пусть даны две группы $A, B$ и гомоморфизм $\phi$ из группы $A$ в группу автоморфизмов $B$. Т.е. для любого элемента $a \in A$ есть биекция $\phi_a : B \to B$ такая, что

$$\phi_a (b_1 b_2) = \phi_a (b_1) \phi_a (b_2), \quad \text{и} \quad \phi_{a_1} (\phi_{a_2}(b)) = \phi_{a_1 a_2}(b)$$

для любых $a, a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2, b \in B$. Полупрямым произведением $A \ltimes B$ называется группа элементами которой являются всевозможные пары $\{(a, b)\} \in A \times B$ с умножением

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = \Big( a_1 a_2, \phi_{a_2^{-1}} (b_1) b_2 \Big)$$

Замечание. В полупрямом произведении $A \ltimes B$ есть подгруппы изоморфные $A$ и $B$, но только подгруппа изоморфная $B$ является нормальной. Смысл отображения $\phi_a$ - это сопряжение $B$ посредством элемента $a \in A$.

Замечание. Условия на $\phi_a$ можно сформулировать, как то, что группа $A$ действует на группе $B$ автоморфизмами.

**Примеры** • Пусть $\phi_a(b) = b$, для любых $a \in A, b \in B$. Тогда полупрямое произведение $A \ltimes B$ изоморфно прямому произведению $A \times B$

• Группа $G$ симметрий общей параллелограмной решетки изоморфна полупрямому произведению $G_0 \ltimes T$. Группа $G_0$ действует на $T$ следующим образом $\phi_e (t_{n_1,n_2}) = t_{n_1,n_2}, \phi_{s_0} (t_{n_1,n_2}) = t_{-n_1,-n_2}$.

**важные свойства**

Гомоморфизмом групп $G, H$ - отображение $\varphi : G \to H$, для которого

$$\forall a, b \in G, \varphi (a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b).$$

При любом гомоморфизме а) $\varphi(e) = e$; б) $\varphi (g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$;

Ядро $\operatorname{Ker} \varphi$ (для гомоморфизма групп $\varphi : G \to H$) - это $\{g \in G | \varphi(g) = e\}$. Образ $\operatorname{Im}(\varphi)$ - это $\{h \in H | \exists g \in G \varphi(g) = h\}$.

$\operatorname{Ker} \varphi$ является нормальной подгруппой в $G$.

$\operatorname{Im} \varphi$ является подгруппой в $H$.

$\varphi (g_1) = \varphi (g_2) \Leftrightarrow g_1 \in g_2 \operatorname{Ker} \varphi$. В частности гомоморфизм $\varphi$ инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = \{e\}$.

**Примеры** • Отображение взятия остатка по модулю $n$ из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_n$ является гомоморфизмом. Ядро - это подгруппа $n\mathbb{Z}$.

• Отображение четности определяет гомоморфизм из группы перестановок $S_n$ в группу $C_2$. Ядро - это подгруппа четных перестановок, она обозначается $A_n$.

• Вычисление определителя задает гомоморфизм из группы матриц $GL(N, \mathbb{C})$ в группу $\mathbb{C}^*$. Ядро это матрицы с определителем 1, эта группа обозначается $SL(N, \mathbb{C})$. 4. Действия группы $G$ на множестве $\{1, 2, ..., n\}$ находятся в биекции с гомоморфизмами $G \to S_n$.

Теорема 4 (Теорема о гомоморфизме). Пусть $\varphi : G \to H$ гомоморфизм групп. Тогда $G/\operatorname{Ker}(\varphi) \simeq \operatorname{Im}(\varphi)$.

Краткое доказательство. Изоморфизм устроен так: каждому элементу $h = \varphi(g) \in \operatorname{Im}\varphi$ ставится в соответствии класс $g\operatorname{Ker}\varphi$. Корректность следует из доказанных выше свойств, свойство гомоморфизма проверяется напрямую.

•5 (Следствие). Если группа $G$ конечна, то $|G| = |\operatorname{Ker}\varphi|.\ |\operatorname{Im}\varphi|$.

Теорема 6 (Теорема Кэли). Любая конечная группа изоморфна подгруппе в симметрической группе $S_n$ для какого-то $n$.

Краткое доказательство Пусть $n = |G|$. Группа $G$ действует на себе умножением слева. Значит, по примеру выше есть гомоморфизм $G \to S_n$, элемент $g \in G$ переходит в перестановку $\begin{pmatrix} x_1 x_2 & ... & x_n & \\ gx_1 & gx_2 & ... & gx_n \end{pmatrix}$.

•7. Пусть группа $G$ содержит две подгруппы $A, B$, такие, что $A, B$ коммутируют (для любых $a \in A, b \in B, ab = ba$), $A \cap B = \{e\}, G = A \cdot B$ (т.е. $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B : g = ab$). Тогда $G \simeq A \times B$.

Доказательство. Построим гомоморфизм из $A \times B$ в $G$, который переводит пару $(a, b)$ в их произведение. То, что это гомоморфизм следует из того подгруппы $A, B$ коммутируют. Далее, из того $A \cap B = \{e\}$ следует, что это инъекция, а из $G = A \cdot B$ то, что это сюрьекция. Значит это изоморфизм.

Докажем теперь, что $D_6 \simeq D_3 \times C_2$. Три вершины шестиугольника стоящие через один образуют правильный треугольник. Подгруппа группы $D_6$ переводящая этот треугольник в себя изоморфна $D_3$. Подгруппа $D_6$ состоящая из тождественного преобразования и центральной симметрии изоморфна $C_2$. Эти две подгруппы коммутируют, не пересекаются, и любой элемент $D_6$ может быть записан как их произведение. Значит, по предложению выше $D_6 \simeq D_3 \times C_2 \simeq D_{3h}$.

Определение 3. Центром группы $G$ называется множество $Z(G) = \{g \in G | \forall x \in G, xg = gx\}$.

Легко видеть что $Z(G)$ является подгруппой. В задаче выше в разложении $D_6 \simeq D_3 \times C_2$ элементы $C_2$ должны лежать в центре, поэтому в качестве порождающей $C_2$ можно взять центральную симметрию, но нельзя брать никакую осевую симметрию.

Упомянем еще такую тему как задание группы образующими и соотношениями. Мы не будем давать аккуратного определения, а ограничимся одним примером.

•8. Группа $D_n$ порождается одним поворотом на угол $2\pi/n$ который мы обозначим $r$ и одним отражением, которое мы обозначим $s$. Соотношения имеют вид $r^n = s^2 = \mathrm{rsrs} = e$.

Доказательство. Во первых, легко видеть, что любое вращение из $D_n$ иеет вид $r^b, 0 \leq b \leq n-1$, а любое отражение может быть получено как композиция $s$ и вращения. Из этого следует, что группа $D_n$ порождена $s, r$.

Во вторых, эти соотношения выполнены в группе $D_n$. Единственное, что не сразу очевидно, это rsrs =e, это происходит из того, что $rs$ является несобственным преобразованием, а, значит, отражением.

Наконец, проверим, что другие соотношения налагать не надо. Любой элемент группы порожденной $r, s$ может быть записан в виде $s^{a_1} r^{b_1} \cdots s^{a_k} r^{b_k}$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Пользуясь соотношением $rs = sr^{-1}$ мы можем пронести $s$ влево и переписать слово в виде $s^a r^b$, $a = 0, 1, b = 0, ..., n-1$. Значит группа с данными образующими и соотношениями содержит не более $2n$ элементов. С другой стороны, она содержит не менее $2n$ элементов так как из нее есть сюрьективный гомоморфизм в $D_n$.

•9. Пусть группа $G$ содержит две подгруппы $A, B$ такие, что $A \cap B = \{e\}, A \cdot B = G, B \triangleleft G$. Тогда $G$ является полупрямым произведением $A$ и $B$.

Доказательство. Определим $\phi_a(b) = aba^{-1}$. Легко проверить, что сопоставление $a \mapsto \phi_a$ удовлетворяет условиям

$$\phi_a(b_1b_2) = \phi_a(b_1)\,\phi_a(b_2)\,, \quad \text{и} \quad \phi_{a_1}(\phi_{a_2}(b)) = \phi_{a_1a_2}(b).$$

Поэтому мы можем определить полупрямое произведение $G = A \ltimes B$. Гомоморфизм $\varphi : A \ltimes B \to G$ строится по формуле $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Инъективность и сюръективность этого отображения следует из того, что $A \cap B = \{e\}, A \cdot B = G$. То, что это действительно гомоморфизм проверяется напрямую

$$\varphi((a_1, b_1)) \cdot \varphi((a_2, b_2)) = a_1b_1a_2b_2 = a_1a_2\left(a_2^{-1}b_1a_2\right)b_2 = a_1a_2\phi_{a_1^{-1}}(b_1)\,b_2 = \\ = \varphi\left(\left(a_1a_2, \phi_{a_1^{-1}}(b_1)\,b_2\right)\right) = \varphi((a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2))$$

•10. Если $G = A \ltimes B$, то $G/B \simeq A$.

Доказательство. Построим гомоморфизм из $G$ в $A$ по формуле $(a, b) \mapsto a$. Его ядро есть $B$, образ изоморфен $A$, по теореме о гомоморфизме получаем нужное.

Замечание. Аналогичное задаче утверждение верно и дле всей группы движений - она изоморфна полупрямому произведению ортогональной группы и группы трансляций $O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$. Также для любой сигнатуры, например группа Пуанкаре есть полупрямое произведение группы Лоренца и группы трансляций $O(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4$.

### 2.1.4 Об основах представлений групп

#### О конструкции представлений

Определение 1. Пусть $G$ - конечная группа, $V$ - конечномерное комплексное векторное пространство. Гомоморфизм групп $\rho : G \to GL(V)$ называется (конеч- номерным, комплексным) представлением группы $G$. Пространство $V$ называется пространством представления. Размерность $\dim V$ называется размерностью представления.

Если в пространстве $V$ выбран базис $e_1, e_2, ..., e_n$, то можно считать, что представление задает гомоморфизм $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$. В частности, одномерные представления - это тоже самое, что и гомоморфизмы из $G$ в $\mathbb{C}^*$.

Часто допускают вольность речи и говорят что $V$ и есть представления, имея в виду, что $\rho$ или ясен из контекста или не важен. Также, нередко $\rho$ опускают в формулах, т.е. вместо $\rho(g)v$ пишут $gv$.

Определение 2. Пусть дана группа $G$ и два ее векторных представления $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ и $\rho_2 : G \to Gl(V_2)$. Изоморфизмом представлений называется изоморфизм векторных пространств $\varphi : V_1 \to V_2$ коммутирующий с действием группы:

$$\varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)\varphi(v)$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

В терминах матриц это означает, что для любого $g$ матрицы $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ сопряжены: $\rho_2(g) = \varphi\rho_1(g)\varphi^{-1}$.

**Примеры** 1 (Перестановочное представление) Пусть группа $G$ действует на множестве $X$, $|X| = n$. Тогда есть представление группы $G$ в векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ с базисом $e_x$, $x \in X$. Действие группы задается формулой $\rho(g)e_x = e_{gx}$.

2 Частным случаем прошлого примера является представление группы $S_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$. Группа действует перестановкой базисных векторов.

Пусть $n = 3$. Тогда это перестановочное представление $S_3$ задается матрицами:

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1,2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1,3,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(1,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 (Регулярное представление) Этот пример тоже является частным случаем первого примера. А именно, можно рассмотреть действие группы на себе умножениями слева. Более явно - пусть $|G| = n$, тогда рассмотрим пространство $V = \mathbb{C}^n$ с базисом $e_x$ занумерованным элементами $x \in G$. Группа действует на $V$ по формуле $ge_x = e_{gx}$.

Определение 3. Подпространство $U \subset V$ называется подпредставлением (другой термин - инвариантное подпространство), если оно является $G$ инвариантным, т.е. для если любых $g \in G, u \in U$ выполняется $\rho(g)u \in U$. Пример. Расмотрим перестановочное представление $S_3$. Оно имеет два нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и $V$) подпредставления

$$U_1 = \left\{\sum x_i e_i | x_1 = x_2 = x_3\right\}, \quad U_2 = \left\{\sum x_i e_i | \sum x_i = 0\right\},$$

Все пространство $\mathbb{C}^3$ разлагается в прямую сумму подпространств $U_1$ и $U_2$. Если выбрать в $\mathbb{C}^3$ базис, согласованный с этим разложением (например $e_1+e_2+e_3, e_1$ - $e_2, e_1-e_3$, то матрицы, соответствующие операторам $\rho(g)$ будут блочными.

В общем случае, если есть подпредставление $U \subset V$, то выберем базис в $V$ дополняющий базис в пространстве $U$. Тогда матрицы операторов $\rho(g)$ будут иметь блочный вид $\rho(g) = \begin{pmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & D(g) \end{pmatrix}$. Условие того, что $\rho$ задает представление записывается как $\rho\left(g_1 g_2\right) = \rho\left(g_1\right) \rho\left(g_2\right)$ или в терминах матриц

$$\begin{cases} A\left(g_1 g_2\right) = A\left(g_1\right) A\left(g_2\right) \\ B\left(g_1 g_2\right) = A\left(g_1\right) B\left(g_2\right) + B\left(g_1\right) D\left(g_2\right) \\ D\left(g_1 g_2\right) = D\left(g_1\right) D\left(g_2\right) \end{cases}$$

Первое уравнение означает, что сопоставление $g \mapsto A(g)$ задает представление группы $g$, пространством этого представления является $U$. По третьему уравнению сопоставление $g \mapsto D(g)$ также задает представление группы $G$, пространством этого представления является фактор пространство V/U.

В примере выше можно выбрать базис так, что в блочной форме блок $B$ равен нулю. Это приводит к следующему определению.

Определение 4 (Прямая сумма представлений). Пусть дана группа $G$ и два ее векторных представления $V_1, \rho_1$ и $V_2, \rho_2$. Тогда пространство $V = V_1 \oplus V_2$ также имеет структуру представления группы $G$, в котором $g$ переходит в оператор заданный блочной матрицей $\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$.

Например, выше для трехмерного представления группы $S_3$ мы построили $U_1$ и $U_2$ такие, что $\mathbb{C}^3 \simeq U_1 \oplus U_2$. Естественно спросить - всегда ли можно занулить блок $B$? Иными словами, для любого ли инвариантного подпространства $U_1 \subset V$ можно найти подпространство $U_2 \subset V$ которое является дополнительнм к $U_1$ (то есть $U_1 \cap U_2 = 0, U_1 \oplus U_2 = V$) и инвариантным относительно действия группы $G$. Вообще говоря, ответ отрицательный, как показывает следующий пример.

Рассмотрим следующее двумерное представление группы $Z$, в котором $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда подпространство, натянутое на первый базисный вектор $e_1$ является инвариантным, но никакого дополнительного к нему инвариантного подпространства нет.

Однако верна следующая теорема

Теорема 2. Пусть $G$ конечная группа, $V$ ее представление, $U_1 \subset V$ инвариантное подпространство. Тогда существует дополнительное инвариантное подпространство $U_2 \subset V$.

Доказательство. Изложим доказательство двумя способами.

Первый способ. Сделаем треугольную замену базиса при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где

$$S = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g) B\left(g^{-1}\right).$$

Тогда при сопряжении такой матрицей матрицы $\rho(h)$ становятся блочно-диагональными.

Второй способ. Доказательство основано на очень важной идее усреднения. Первым примером такой идеи является усреднение в представлении. А именно, для любого представления $V$ конечной группы $G$ и любого вектора $v \in V$

$$\rho(h)\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) v\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) v.$$

То есть, стартуя с произвольного вектора $v \in V$ при помощи усреднения по группе мы построили вектор инвариантный относительно группы.

Теперь вернемся к нашей теореме. Чтобы построить инвариантное дополнение к $U_1 \subset V$ мы построим проектор $P$ на $U_1$, инвариантный относительно действия группы. Тогда в качестве $U_2$ можно будет взять ядро $P$. Для того, чтобы построить такой $P$, возьмем сначала $P_0$ - какой-то проектор на $U_1$, напомним, что эти слова означают, что $P_0^2 = P_0, \operatorname{Im} P_0 = U_1$. Тогда $P$ определяется при помощи усреднения:

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P_0 \rho\left(g^{-1}\right).$$

Тогда легко проверить, что $P$ - проектор на $U_1$ и $\rho(h)P = P\rho(h)$. Значит $U_2 = \operatorname{Ker} P$ является инвариантным дополнением к $U_1$.

Естественно хотеть выбрать в качестве $U_2$ ортогональное дополнение к $U_1$. На самом деле так можно сделать при удачном выборе скалярного произведения, мы обсудим это на следующей лекции.

Определение 5. Представление $V$ называется неприводимым, если у него нет подпредставлений отличных от 0 и $V$.

Ясно, что любое одномерное представление неприводимо. Другим примером неприводимого представления является $U_2$, можно проверить, что в нем нет одномерных инвариантных подпространств.

Теорема 3 (Машке). Любое конечномерное комплексное представление $V$ конечной группы $G$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

Теорема легко следует из теоремы 2. Если $V$ неприводимо, то все уже доказано. Если нет, то найдем подпредставление $U_1 \subset V$ тогда ему есть дополнительное $U_2$. Если они оба неприводимы, то $V = U_1 \oplus U_2$, если нет, то будем их разлагать дальше пока не приведем все $V$ к сумме неприводимых.

**Примеры** • Пусть $G = C_n$ циклическая группа, как обычно обозначим ее образующую через $r$. Любое представление $C_n$ задается образом $\rho(r)$, который должен удовлетворять условию $\rho(r)^n = E$. Отсюда следует, что матрица $\rho(r)$ диагонализируема и ее собственные значения равны $\sqrt[n]{1}$.

Так как различных комплексных $\sqrt[n]{1}$ существует $n$, то у группы $C_n$ есть $n$ различных неприводимых представления Обозначим эти представления $R_j, 0 \leq j \leq n-1$, в представлении $R_j$ элемент $r^m$ переходит в $\exp\left(\frac{2pi}{n} mj\right)$.

Любое представление $C_n$ разлагается в сумму представлений $R_j$. Точнее, если оператор $\rho(r)$ имеет $a_0$ собственных значений равных $1, a_1$ собственных значений равных $e^{\frac{2\pi i}{n}}, ..., a_{n-1}$ собственных значений равных $e^{\frac{2\pi i}{n}(n-1)}$, то $R = R_0^{\oplus a_0} \oplus R_1^{\oplus a_1} \oplus ... R_{n-1}^{\oplus a_{n-1}}$.

• Пусть $G = S_3$, найдем все ее одномерные представления. Любая транспозиция имеет порядок 2, значит должна переходить либо в 1, либо в -1. Так как тройной цикл имеет порядок 3, то он должен перейти в $\sqrt[3]{1}$, но он равен произведению транспозиций. Значит, единственная возможность, если тройные циклы перейдут в 1. Тогда все транспозиции должны перейти в одно и то же. Если они все переходят в 1, то это тривиальное представление. Если все переходят в -1, то это знаковое представление.

В любом одномерном представлении $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$ коммутант $[G, G]$ лежит в ядре. Это потому что коммутант порождается элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$. Так как $\mathbb{C}^*$ абелева, то

$$\varphi\left(xyx^{-1}y^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi\left(x^{-1}\right)\varphi\left(y^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi\left(x^{-1}\right)\varphi(y)\varphi\left(y^{-1}\right) = e,$$

а, значит и весь коммутант, лежит в ядре.

Определение 6. Пусть дано представление $\rho : G \to GL(V)$. Характером представления называется функция $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$, Tr - это след матрицы.

•5. Характеры изоморфных представлений совпадают.

Доказательство Изоморфизм представлений в терминах матриц означает $\rho_1(g) = \phi\rho_2(g)\phi^{-1}$, т.е. матрицы $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ сопряжены, значит, их следа равны.

### 2.1.5 Унитарность, характеры, таблицы характеров

#### Основная теория

Унитарные пространства - пространства $V$, в которых есть положительно определенное скалярное произведение $(x|y)$. Его можно задавать через матрицу произведений базисных векторов (матрицу Грамма) $S_{ij} = (e_i|e_j)$. Эта матрица должна быть эрмитовой $S^* = S$. При замене базиса $e'_i = A_{ij}e_j$ матрица $S$ преобразуется $S \mapsto A^*SA$, где матрица $A^*$ получается из $A$ транспонированием и комплексным сопряжением. В ортонормированным базисе матрица Грамма равна единичной.

Унитарный оператор - оператор, который сохраняет форму, т.е. $(Ax|Ay) = (x|y)$, для любых $x, y \in A$. В базисе это равносильно матричному уравнению $S = A^*SA$. Обычно это уравнение пишется в ортонормированном базисе, тогда оно выглядит $A^*A = E$, матрицы удовлетворяющие этому условию называется унитарными.

•1. Любое комплексное представление $\rho : G \to GL(V)$ конечной группы $G$ является унитаризуемым, т.е. в каком-то базисе все матрицы представления являются унитарными.

•2. Пусть $V$ - представление конечной группы $G, (x|y) - G$ инвариантное скалярное произведение, $U_1 \subset V - G$-инвариантное подпространство. Тогда, его ортогональное дополнение $U_2 = U_1^{\perp}$ также является $G$ инвариантным пространством.

$\chi_V(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g))$,

$$\chi_V(e) = \dim(V).$$

$$\chi_{V_1 \oplus V_2}(g) = \chi_{V_1}(g) + \chi_{V_2}(g).$$

$$\chi_V\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_V(g)},$$

верно для любого представления $V$ конечной группы $G$.

Определение 1. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ представление группы $G$, тогда можно определить действие группы на двойственном пространстве $V^*$ - пространстве линейных функционалов на $V$ - по формуле

$$\rho^*(g)\varphi(x) = \varphi\left(\rho\left(g^{-1}\right)x\right), \quad \forall\varphi \in V^*, x \in V.$$

Заметим, что появление $g^{-1}$ связано с тем, что мы хотим получить левое, а не правое действие. На языке матриц, двойственное представление задается отображением $g \mapsto (\rho(g)^t)^{-1}$, легко проверить, что это гомоморфизм групп. Для унитарных матриц это тоже самое, что комплексное сопряжение $(\rho(g)^t)^{-1} = \overline{\rho(g)}$. Характеры двойственных представлений комплексно сопряжены $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$.

**О тензорном произведении (????)**

**Тензорное произведение векторных пространств** $V, U$ - это пространство порожденное векторами $v \otimes u$ с соотношениями

$$\lambda(v \otimes u) = \lambda v \otimes u = v \otimes \lambda u$$
$$(v_1 + v_2) \otimes u = v_1 \otimes u + v_2 \otimes u$$
$$v \otimes (u_1 + u_2) = v \otimes u_1 + v \otimes u_2.$$

Если выбрать базисы $V = \langle e_1, ..., e_n\rangle, U = \langle f_1, ..., f_m\rangle$, то базисом в тензорном произведении $V \otimes U$ будут вектора $e_i \otimes f_j$. В самом деле, если $v = \sum a^i e_i, u = \sum b^j f_j$, то

$$v \otimes u = \left(\sum a^i e_i\right) \otimes u = \sum a^i e_i \otimes u = \sum a^i b^j e_i \otimes f_j.$$

$$\dim(V \otimes U) = \dim V \cdot \dim U.$$

Тензоры вида $v \otimes u$ называются разложимыми. Не любой тензор является разложимым, например $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ не разложим, см упражнение ниже.

Определение 3. Пусть $A : V \to V$ и $B : U \to U$ два линейных оператора. Их тензорным произведением называется оператор $A \otimes B : V \otimes U \to V \otimes U$, определенный на разложимых тензорах по формуле $(A \otimes B)(v \otimes u) = Av \otimes Bu$.

Пример. Пусть $\dim V = \dim U = 2$, матрицы $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $B = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$. Тогда матрица $A \otimes B$ имеет вид: $A \otimes B = \mathrm{diag})\lambda_1\mu_1, \lambda_1\mu_2, \lambda_2\mu_1, \lambda_2\mu_2)$.

В общем случае, если операторы заданы матрицами $Ae_i = \sum a_i^{i'} e_{i'}$ и $Bf_j = \sum b_i^{j'} f_{j'}$, то матрица $A \otimes B$ равна $A \otimes B\,(e_i \otimes f_j) = \sum a_i^{i'} j_j^{j'} e_{i'} \otimes f_{j'}$.

•4. $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}\,A \cdot \mathrm{Tr}\,B$

Определение 4. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ и $\rho' : G \to GL(U)$ два представления одной группы $G$. Их тензорным произведением $\rho \otimes \rho'$ называется представление группы $G$ в пространстве $V \otimes U$ определенное по формуле $g \mapsto (\rho(g) \otimes \rho'(g))$.

•5. $\chi_{V \otimes U}(g) = \chi_V(g) \cdot \chi_U(g)$

Пусть дана группа $G$. Обозначим характеры ее неприводимых представлений $\chi^{(1)}, ..., \chi^{(k)}$, пусть их размерности равны $d_1, ..., d_k$. Обозначим через $C_1, C_2, ..., C_l$ классы сопряженности в группе $G$, через $h_i$ обозначим представителей этих классов $h_i \in C_i$.

Рассмотрим пространство $\Theta$ состоящее из функций на группе, инвариантных на классах сопряженности. По задаче из прошлого задания характеры всех представлений лежат в пространстве $\Theta$. Другой пример - это функции $\gamma_i$ равные 1 на классе $C_i$ и нулю на других классах. Таких функций $l$ штук $\gamma_1, ..., \gamma_l$, они образуют базис в пространстве $\Theta$.

Введем эрмитово скалярное произведение на пространстве $\Theta$:

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{l} |C_i| \cdot \overline{\phi(h_i)} \psi(h_i).$$

Последнее равенство следует, из того, что функции $\phi, \psi$ постоянны на классах сопряженности. Из этой формулы очевидно, что $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{i,j} \frac{|C_i|}{|G|}$, т.е. $\gamma_i$ образуют ортогональный базис в пространстве $\Theta$.

Теорема 6 (Соотношение ортогональности характеров). $\left\langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \right\rangle = \delta_{i,j}$.

Теорема 7 (Полнота). Характеры неприводимых представлений ортонормированный базис в пространстве $\Theta$.

В частности из свойства полноты следует, что число неприводимых представлений группы равно числу классов сопряженных элементов.

Алгоритм разложения на неприводимые. Пусть при разложении пространства $V$ на неприводимые пространство $V_1$ встречается $a_1$ раз, пространство $V_2$ встречается $a_2$ раз и т.д. Тогда $\chi = \sum a_i \chi^{(i)}$ и кратности $a_i$ могут быть найдены по формуле $a_i = \left\langle \chi^{(i)}, \chi \right\rangle$.

Заметим еще, что $\langle \chi, \chi \rangle = \sum a_i^2$, поэтому из условия $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ следует, что одно из $a_i$ равно 1, а остальные равны 0, то есть представление $V$ является неприводимым.

Характеры неприводимых представлений удобно записывать в виде таблицы где в столбцах стоят представители классов сопряженности, а в строках характеры неприводимых. Эта таблица называется таблицей характеров. Пример Таблица характеров для группы $S_3$ имеет вид:

| | $e$ | $(1,2)^3$ | $(1,2,3)^2$ |
|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi^{(3)}$ | 2 | 0 | -1 |
| $\chi_{\mathbb{C}^3}$ | 3 | 1 | 0 |
| $\chi_{\mathrm{reg}}$ | 6 | 0 | 0 |

В столбцах верхним индексом написано количество элементов в соответствующем классе. По строкам, в первой строке стоит тривиальное представление, во второй знаковое, в третьей двумерное построенное на прошлой лекции, далее для полноты картины приведены еще два приводимых представления - перестановочное и регулярное. Характер $\chi^{(3)}$ легче всего найти вычитанием характера тривиального представления из характера перестановочного представления $\chi_{\mathbb{C}^3}$.

•8. Характер регулярного представления группы $G$ равен

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{при } g = e \\ 0, & \text{при } g \neq e \end{cases}.$$

•9. Скалярное произведение $\left\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi^{(i)} \right\rangle = d_i$. Следствие. $\chi_{\mathrm{reg}} = d_1 \chi^{(1)} + d_2 \chi^{(2)} + \cdots + d_k \chi^{(k)}$. Следствие. $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2$. Пример. $|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

Пример. Пусть группа $G = S_4$. В ней есть 5 классов сопряженности, значит должно быть 5 непривидимых представлений. Мы знаем два одномерных - тривиальное и знаковое. Сумма квадратов размерностей трех остальных должна быть равна 22 - единственная возможность $22 = 3^2 + 3^2 + 2^2$. Характеры этих представлений частично были в прошлом домашнем задании, частично будут в этом.

Пример. Пусть группа $G$ абелева. Тогда у нее $|G|$ классов сопряженности, значит, $|G|$ неприводимых представлений. Сумма квадратов их размерностей также должна равняться $|G|$ - единственная возможность для этого, это все представления являются одномерными. Мы это видели на прошлой лекции на примере группы $C_k$.

Для произвольной, возможно неабелевой группы $G$ мы знаем, что коммутант $[G, G]$ лежит в ядре любого одномерного представления. Значит, любое одномерное представление $G$ является представлением фактора по коммутанту $G/[G, G]$. По задаче из прошлого задания этот фактор является абелевой группой, значит количество его представлений (т.е. одномерных представлений группы $G$) равно $|G/[G, G]|$.

### 2.1.6 Представления абелевых групп, полнота, $SO(2)$

**Основная теория**

**Второе соотношение ортогональности для характеров:** для любых двух классов сопряженности $C_i, C_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \chi^{(\alpha)}\left(h_i\right) \overline{\chi^{(\alpha)}\left(h_j\right)} = \delta_{i,j} \frac{|G|}{|C_i|}$$

Доказывается из того, что (??? в теории сделаю это (уже написано)!!!?) матрица характеров является матрицей переход от одного ортонормированного базиса $\chi^{(i)}$ к другому ортогональному базису $\gamma_i$, поэтому после некоторого домножения столбцов должна стать унитарной, а значит ее столбцы будут попарно ортогональны. Тут использовано свойство полноты - то, что характеры образуют ортонормированный базис, поэтому это соотношение ортогональности иногда называют соотношением полноты.

**Разные конструкции. Группа $SO(2)$**

Обсудим еще две конструкции из теории представлений.

Определение тензорного представления следующее. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ и $\rho' : G' \to GL\left(V'\right)$ два представления разных групп. Их тензорным произведением $\rho \otimes \rho'$ называется представление группы $G \times G'$ в пространстве $V \otimes V'$ определенное по формуле $(g, g') \mapsto (\rho(g) \otimes \rho'\left(g'\right))$.

У Берштейна оно обозначается $\boxtimes$, но это задротство, можно и не вводить новое обозначение, итак понятно, что происходит.

Пример. Пусть $G = G' = C_2$. Представления $\rho = \rho'$ заданы матрицами $e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда представление $\rho \otimes \rho'$ задается матрицами:

$$(e, e) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (e, \sigma) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (\sigma, e) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\sigma, \sigma) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что это получилось регулярное представление группы $C_2 \times C_2$. Так как $\operatorname{Tr}(A \otimes B) = \operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B$, то $\chi_{\rho \bigotimes \rho'}\left(g, g'\right) = \chi_\rho(g) \chi_{\rho'}\left(g'\right)$. Найдем скалярное произведение:

$$\left\langle \chi_{\rho_1 \otimes \rho_1'}, \chi_{\rho_2 \otimes \rho_2'} \right\rangle = \frac{1}{|G \times G'|} \sum_{g \in G, g' \in G'} \chi_{\rho_1}(g) \chi_{\rho_1'}\left(g'\right) \overline{\chi_{\rho_2}(g) \chi_{\rho_2'}\left(g'\right)} =$$

$$= \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g) \overline{\chi_{\rho_2}(g)} \right) \left( \frac{1}{|G'|} \sum_{g' \in G'} \chi_{\rho_1'}\left(g'\right) \overline{\chi_{\rho_2'}\left(g'\right)} \right) = \left\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \right\rangle \left\langle \chi_{\rho_1'}, \chi_{\rho_2'} \right\rangle$$

**Теорема о неприводимости тензорного произведения представлений:** а) Если $\rho$ и $\rho'$ неприводимые представления групп $G$ и $G'$, то $\rho \bigotimes \rho'$ - неприводимое представление группы $G \times G'$. б) Все неприводимые представления группы $G \times G'$ получаются таким способом.

Доказательство. а) Из формулы (2) следует, что $\left\langle \chi_{\rho\otimes\rho'}, \chi_{\rho\bigotimes\rho'} \right\rangle = 1$. Как мы показывали на прошлой лекции из этого следует неприводимость представления $\rho\otimes\rho'$.

б) Пусть $k$ (соответственно $k'$) - число классов сопряженности группы $G$ (соответственно $G'$). Мы знаем, что число классов сопряженности (а, значит, и число неприводимых представлений) группы $G\times G'$ равно $k\cdot k'$. Если $(\rho_1, \rho'_1)$ и $(\rho_2, \rho'_2)$ разные пары неприводимых представлений, то из формулы (2) следует, что характеры $\chi_{\rho_1 \trianglerighteq \rho'_1}$ и $\chi_{\rho_2 \trianglerighteq \rho'_2}$ ортогональны. Таким образом беря тензорные произведения неприводимых представлений $G, G'$ мы получим $k\cdot k'$ различных неприводимых представлений $G\times G'$, что и требовалось доказать.

**Определение ограничения.** Пусть заданы $H$ - подгруппа в $G$ и представление $\rho : G \to GL(V)$. Тогда $\rho$ задает представление группы $H$ в пространстве $V$, оно называется ограничением представления $\rho$ на подгруппу $H$.

Пример. Рассмотрим подгруппы $A_3 \subset S_3$, ясно что $A_3 \simeq C_3$. Таблица характеров $S_3$ приведена на рисунке слева.

При ограничении на $C_3$ представления $\chi_1$ и $\chi_2$ совпадут, а представление $\chi_3$ окажется приводимым: $\chi_3 = \tilde{\chi}_4 + \tilde{\chi}_{2\pi i}$. Соответствующая таблица характеров $C_3$ приведена на рисунке справа, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

| | $e$ | $(1,2)^3$ | $(1,2,3)^2$ |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | 0 | -1 |

| | $e$ | $(1,2,3)$ | $(1,3,2)$ |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | -1 | -1 |
| $\tilde{\chi}_4$ | 1 | $\epsilon$ | $\epsilon^2$ |
| $\tilde{\chi}_5$ | 1 | $\epsilon^2$ | $\epsilon$ |

**Представления абелевых групп.**

Пусть $G = C_N$. Все неприводимые представления одномерны, и мы их уже обсуждали ранее, таблица характеров имеет вид:

| | $e$ | $r$ | $r^2$ | ... | $r^N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_0$ | 1 | 1 | 1 | ... | 1 |
| $R_1$ | 1 | $\epsilon$ | $\epsilon^2$ | ... | $\epsilon^{N-1}$ |
| $R_2$ | 1 | $\epsilon^2$ | $\epsilon^4$ | ... | $\epsilon^{2N-2}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $R_{N-1}$ | 1 | $\epsilon^{N-1}$ | $\epsilon^{2N-2}$ | ... | $\epsilon^1$ |

$\epsilon = \exp(2\pi i/N)$. Можно сказать, что представление $R_j$ переводит $r^p$ в $\epsilon^{pj}$.

Можно проверить соотношения ортогональности, например между характерами представлений $R_j$ и $R_k$. Проверка сводится к тождеству

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \overline{\chi^{(j)}\left(r^n\right)}\chi^{(k)}\left(r^n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(k-j)\right)^n = \delta_{k,j}$$

Последнее равенство очевидно при $j = k$ так как мы складываем одни единицы, а при $j \neq k$ следует из формулы суммы геометрической прогрессии (подобно тождеству (1) выше). Кстати, из этой проверки видно, что тут комплексное сопряжение нужно для ортонормированности.

Аналогично можно проверить соотношение полноты (второе соотношение ортогональности), оно записывается таким образом

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \chi^{(j)}\left(r^n\right)\overline{\chi^{(j)}\left(r^m\right)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n-m)\right)^j = \delta_{n,m}$$

Пространство $\Theta$ - это пространство всех функций на группе, так как группа абелева. То есть для любого $n = 0, ...N-1$ у нас есть число $f(r^n)$. Удобно не ограничиваться конечным набором значений $n$, а рассматривать все целые $n$, наложив условие периодичности, то есть $\Theta = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} | f(x+N) = f(x)\}$.

Пользуясь полнотой можно написать

$$f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\delta_{n,m} = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \chi^{(j)}(r^n)\overline{\chi^{(j)}(r^m)} = \sum c_j e^{\frac{2\pi i}{N}nj}$$

$c_j = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(m)\overline{\chi^{(j)}(r^m)}$. Такие формулы для разложения называются дискретным преобразованием Фурье. Мы к ним пришли рассматривая теорию представлений группы $C_N$.

Если $G$ не циклическая, а произведение циклических $G \simeq C_{n_1} \times C_{n_2}$, то ее представления строятся по предложению выше $R_{j_1,j_2} = R_{j_1} \bigotimes R_{j_2}$; в таком представлении общий элемент $(r^{m_1}, r^{m_2}) \in G$ переходит в $\exp\left(\frac{2\pi i}{n_1}m_1 j_1 + \frac{2\pi i}{n_2}m_2 j_2\right)$.

Рассмотрим теперь первый пример бесконечной (непрерывной группы).

Через $SO(2)$ мы обозначим группу ортогональных преобразований плоскости с определителем 1 (O от слова Orthogonal, $S$ от слова Special). Геометрически элементы группы $SO(2)$ - это повороты на углы $0 \le \alpha < 2\pi$, матрица имеет вид

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Сопоставление $\alpha \mapsto R(\alpha)$ задает изоморфизм между группами $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и группой $SO(2)$.

Есть еще одно описание этой же группы. А именно, обозначим через $U(n)$ множество унитарных матриц размера $n \times n$($U$ от слова Unitary ). Тогда $U(1)$ состоит из комплексных чисел по модулю равных 1, их можно записать в виде $\exp(2\pi i\alpha)$. Ясно, что это та же самая группа.

Будем искать представления группы $U(1)$. То есть мы хотим найти набор матриц $T(\alpha)$ таких, что $T(\alpha+\beta) = T(\alpha)T(\beta)$ и $T(2\pi) = 1$. При этом мы будем рассматривать только гладкие представления, то есть такие, что все матричные элементы $T(\alpha)$ будут гладкими функциями от $\alpha$.

Взяв производную равенства $T(\alpha+\beta) = T(\alpha)T(\beta)$ по $\beta$ при $\beta = 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$T'(\alpha) = T(\alpha)T'(0)$$

Это линейное дифференциально уравнение, его общее решение имеет вид $T(\alpha) = C\exp(\alpha A)$, $A = T'(0), C$ константа интегрирования. Из условий $T(0) = T(2\pi) = 1$ следует, что $C = 1$ и матрица $A$ диагональная с собственными значениями вида $ik, k \in \mathbb{Z}$. Представление таким образом, разлагается в прямую сумму одномерных, соответствующих собственным векторам матрицы $A$.

Таким образом неприводимые представления параметризуются собственными значениями $ik$ матрицы $A$, характер соответствующего представления равен:

$$\chi^{(k)}(\alpha) = \exp(ik\alpha).$$

Проверим соотношения ортогональности для характеров. Сумму по элементам группы естественно заменить интегралом $\int_0^{2\pi} d\alpha$, $|G|$ заменяется на интеграл 1 (объем группы), то есть на $2\pi$. Соотношения ортогональности принимают вид

$$\left\langle \chi^{(k)}, \chi^{(j)} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\alpha(k-j)) d\alpha = \delta_{j,k}.$$

Соотношение полноты тогда принимает вид

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi^{(k)}(\alpha)\overline{\chi^{(k)}(\beta)} = \delta_{2\pi}(\alpha-\beta)$$

$\delta_{2\pi}(\alpha)$ это дельта функция на окружности, т.е. такая обобщенная функция, что $\int_0^{2\pi} f(\beta)\delta_{2\pi}(\beta-\alpha)d\beta = f(\alpha)$, для любой $2\pi$ периодической функции $f$. Соотношение полноты можно переписать явно через формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\alpha} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\alpha - 2n\pi) = 2\pi\delta_{2\pi}(\alpha),$$

Пространство $\Theta$ функций на группе можно отождествить с пространством периодических функций $\Theta = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f(x+2\pi) = f(x)$. Используя формулу полноты или теоремы из математического анализа, получаем, что $f(z)$ принимает вид

$$f(\alpha) = \int_0^{2\pi} f(\beta)\delta_{2\pi}(\beta-\alpha)d\beta = \int_0^{2\pi} f(\beta)\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha k}e^{-i\beta k}d\beta = \sum c_k e^{i\alpha k}$$

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\beta)\overline{\chi^{(k)}(\beta)}d\beta$. То есть функция $f$ разлагается в ряд Фурье.

### 2.1.7 Группы Ли, алгебры Ли.

**Некоторые решения задач из лекции 6.**

Задача 3. Найдите таблицу характеров группы $S_4$. Проверьте соотношения ортогональности между характерами. Разложите тензорные произведения трехмерных на неприводимые.

Решение. Так как классов сопряженности 5, то всего неприводимых представлений 5. Мы уже знаем два одномерных представления: $\rho_1$ - тривиальное, $\rho_2$ знаковое. Также у нас есть геометрическая конструкция двух трехмерных представлений: $\rho_3$ происходит из геометрического действия $S_4$ симметриями тетраэдра, $\rho_4$ происходит из из геометрического действия $S_4$ вращениями куба.

Характеры $\rho_3$ и $\rho_4$ находятся следующим образом. Матрица поворота вокруг оси на угол $\alpha$ может быть приведена к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, поэтому ее след равен $1+2\cos\alpha$. Аналогично, для зеркального поворота на угол $\alpha$ - получаем $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и ее след равен $-1+2\cos\alpha$

Представление $\rho_3$ можно еще описать аналогично примеру с $S_3$. А именно, это представление можно реализовать как подпредставление четырехмерного перестановочного представления $S_4$ в пространстве $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Его характер находится вычитанием из характера перестановочного представления характера тривиального представления. Представление $\rho_4$ после этого можно найти как тензорное произведение $\rho_4 = \rho_3 \otimes \rho_1$.

Из того что сумма квадратов размерностей равна 24 следует, что нужно двумерное представление, обозначим его $\rho_5$. Его характер можно найти из соотношений ортогональности. Другой способ - воспользоваться разложением регулярного представления и написать $2\chi^{(5)} = \chi_{\text{reg}} - \chi^{(1)} - \chi^{(2)} - 3\chi^{(3)} - 3\chi^{(4)}$.

Явно построить это двумерное представление можно при помощи гомоморфизма $S_4 \to S_3$ и последующего двумерного представления $S_3$.

| | $e$ | $(1,2)^6$ | $(1,2,3)^8$ | $(1,2,3,4)^6$ | $(1,2)(3,4)^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi^{(3)}$ | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| $\chi^{(4)}$ | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| $\chi^{(5)}$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |

**Группы Ли, алгебры Ли.**

Обсудим еще раз группу $SO(2)$ на которой мы закончили прошлую лекцию. Она состоит из элементов вида $g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Матрицы $g(\alpha)$ удовлетворяют соотношению

$$g(\alpha+\beta) = g(\alpha)g(\beta).$$

Можно сказать, что группа $SO(2)$ задана в своем двумерном представлении. Если продифференцировать последнее равенство по $\beta$ и положить $\beta = 0$, то получаем

$$g'(\alpha) = g(\alpha)g'(0) = g(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это равенство (дифференциальное уравнение) можно проверить и непосредственно, используя $g'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$. Единственным решение этого уравнения удовлетворяющим начальному условию $g(0) = E$ является матричная экспонента

$$g(\alpha) = \exp\left(\alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Опять же, последнее равенство легко проверить непосредственно:

$$\exp\left(\alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^2}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^3}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\alpha^4}{24}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ... = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ определяет группу $SO(2)$ - любой элемент является экспонентой это этой матрицы. Она называется инфинитезимальным генератором группы $SO(2)$. На прошлой лекции мы описывали представления группы $SO(2)$ основываясь на образе этой матрицы - для любого представления $g(\alpha) \mapsto T(\alpha)$ мы имеем соотношение $T(\alpha) = \exp(T'(0))$. При этом матрица $T'(0)$ должна удовлетворять соотношению $\exp(2\pi T'(0)) = E$. Поэтому ее собственные значения должны быть равны $ik_1, ..., ik_N$, $k_1, ..., k_N \in \mathbb{Z}$.

Далее мы (кроме некоторых отступлений) будем заниматься непрерывным группами (другой термин группы Ли). Все группы которые мы будем рассматривать будут матричными, то есть заданными как подгруппы в $GL(n,\mathbb{R})$ или $GL(n,\mathbb{C})$. Элементы группы должны быть представлены как функции $g(\alpha_1, ..., \alpha_d)$ от какого-то набора вещественных параметров $\alpha_1, ..., \alpha_d$. Требуется, чтобы матричные элементы как функции от $\alpha_1, ..., \alpha_d$ были гладкими. Также требуется, чтобы функции $\gamma_i(\alpha_1, ..., \alpha_d, \beta_1, ..., \beta_d)$ определенные при помощи умножения в группе

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_d)\, g(\beta_1, ..., \beta_d) = g(\gamma_1, ..., \gamma_d)$$

были гладкими. Аналогично, требуется, чтобы функции $\delta_i(\alpha_1, ..., \alpha_d)$ определенные при помощи операции взятия обратного элемента в группе

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_d)^{-1} = g(\delta_1, ..., \delta_d)$$

были гладкими.

Первым примером группы Ли является группа $SO(2)$ которую мы обсуждали ранее.

Выше мы не уточняли какому множеству принадлежат параметры $\alpha_1, ..., \alpha_d$ - правильно думать, что они принадлежат некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^d$ и $g$ осуществляет гладкую биекцию между этим открытым множеством и окрестностью единицы в группе $G$. Число параметров $d$ называется размерностью группы.

**Примеры.**

• Группа всех невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$. В качестве параметров $\alpha_1, ..., \alpha_d$ можно взять все матричные элементы. Размерность группы равна $n^2$. Аналогично, группа всех невырожденных комплексных матриц $GL(n, \mathbb{C})$ вдвое большую размерность $2n^2$.

• Группа матриц с единичным определителем $SL(n, \mathbb{R})$. Она задается одним уравнением $\det(g) - 1 = 0$. По теореме о неявной функции можно взять $n^2 - 1$ матричных элементов и тогда оставшийся выражается через них при помощи гладкой функции. Эти $n^2 - 1$ элементов и можно взять в качестве локальных параметров, размерность группы равна $n^2 - 1$. Единственное, что надо проверить, что дифференциал не равен нулю. На более конкретном языке это означает, что есть ненулевая частная производная.

Проверим это сначала для случая $n = 2$. Тогда

$$\delta(\det g - 1) = g_{11}\delta g_{22} + g_{22}\delta g_{11} - g_{12}\delta g_{21} - g_{21}\delta g_{12}.$$

Мы видим, что $\delta(\det g - 1) = 0$ только если все матричные элементы $g$ равны нулю, но такая матрица не лежит в $SL(2, \mathbb{R})$.

Для произвольной матрицы $g$ легко видеть, что $\delta \det g = \sum_{i,j} G^{ij}\delta g_{ij}$, $G^{ij}$ алгебраическое дополнение к матричному элементу $g_{ij}$. Так как $\det g = 1$, то одно из этих дополнений не равно 0, значит дифференциал невырожден.

В частности в точке $g = E$, мы имеем

$$\delta \det g = \delta g_{11} + \cdots + \delta g_{nn} = \mathrm{Tr}\, \delta g.$$

То есть мы получили, что частные производные по координатам $g_{ii}$ не равны нулю, в качестве локальных координат можно взять все координаты кроме любой из них. 2. Через $O(n)$ обозначается группа всех ортогональных матриц, через $SO(n)$ подгруппа, состоящая из ортогональных матриц с определителем 1. Ортогональные матрицы задаются уравнением $gg^t = E$. Так как матрица $XX^t$ - симметрична, то уравнение $gg^t = E$, являет собой $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений на матричные элементы матрицы $g$ которых всего $n^2$. По теореме о неявной функции матрицы из $SO(n)$ могут локально быть выражены через $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ параметров. Но для того чтобы применить теорему о неявной функции надо проверить, что дифференциалы этих уравнений линейно независимы.

Рассмотрим малое приращение $g = E + t\delta g + o(t)$. Подставим это в уравнение на $g$ мы получаем, что в первом порядке $\delta g + \delta g^t = 0$. Это система линейных уравнений на $\delta g$, ее решения это кососимметричные матрицы которые образуют пространство размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит ранг системы равен $\frac{n(n+1)}{2}$, совпадает с количеством уравнений, что и требовалось показать.

• Группа унитарных матриц $U(n)$. У нее есть подгруппа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем 1. О них речь в задаче ниже.

Рассмотрим все возможные гладкие кривые $g(t)$, $g(0) = E$. При малых $t$ эта кривая имеет вид $g(t) = E + At + o(t)$, $A = g'(0)$. Множество таких $A$ называется касательным пространство к $G$ в точке $E$, обозначает $T_E G$.

Заметим, что $T_E G$ является векторным пространством. Действительно, если есть две кривые $g_1(t) = E + A_1 t + o(t)$ и $g_2(t) = E + A_2 t + o(t)$, то их произведение имеет вид $g_1(t)g_2(t) = E + (A_1 + A_2)\, t + o(t)$. Значит, если $A_1, A_2 \in T_E G$, то $A_1 + A_2 \in T_E G$. Кроме того, если рескалироть параметр $t$, то есть взять кривую $g_3(t) = g_1(\lambda t) = 1 + \lambda A_1 t + o(t)$, то мы получаем, что если $A_1 \in T_E G$, то $\lambda A_1 \in T_E G$.

Укажем, что это за векторные пространства для примеров выше. В случае группы $G = SO(2)$ порождено матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В случае группы $G = SL(n, \mathbb{R})$ мы нашли, что матрица $A$ должна удовлетворять условию $\operatorname{Tr} A = 0$. В случае $G = SO(n, \mathbb{R})$ матрица $A$ удовлетворяет условию $A = -A^t$.

Замечание. Аналогично можно определить касательное пространство к любой точке $g \in G$ (подобно тому как есть касательное пространство к сфере в любой ее точке). Это касательное пространство обозначается $T_g G$, оно всегда будет векторным пространством, для этого структура группы на самом деле не нужна. Но для следующих свойств $T_E G$ структура группы уже является необходимой.

Рассмотрим гладкую кривую $g(t) = E + At + o(t)$. Тогда для любого $h \in G$ кривая $\tilde{g}(t) = hg(t)h^{-1} = E + hAh^{-1}t + o(t)$ тоже является гладкой и $\tilde{g}(0) = E$. То есть, мы доказать, что если $A_1 \in T_E G$ и $h \in G$, то элемент $hAh^{-1} \in T_E G$. Значит, пространство $T_E G$ имеет структуру представления группы $G$. Такое представление есть для любой группы Ли $G$, оно называется присоединениым представлением.

Пусть теперь элемент $h$ также зависит от параметра, другими словами, рассмотрим кривую $h(s) = E + Bs + o(s)$. Тогда, для любого $s, h(s)Ah(s)^{-1} \in T_E G$. Вычисляя мы получаем

$$h(s)Ah(s)^{-1} = (E + Bs + o(s))A(E - Bs + o(s)) = A + (BA - AB)s + o(s).$$

Дифференцируя по $s$ мы получаем, что $BA - AB \in T_E G$. Это выражение называется коммутатором матриц $B, A$ и обозначается $[B, A]$. Резюмируя, мы получили, что векторное пространство $T_E G$ является замкнутым относительно действия группы $G$ сопряжениями и взятия коммутатора.

Алгебра Ли - векторное пространство $\mathfrak{g}$ снабженное билинейное операцией $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$:

$$\text{Антикоммутативность } [x, y] = -[y, x]$$
$$\text{Тождество Якоби } [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

Легко проверить, что коммутатор матриц $[A, B] = AB - BA$ удовлетворяет антикоммутативности и тождеству Якоби.

**Примеры.**

• Касательное пространство к единице к любой группе Ли $G$ является алгеброй Ли. Обычно обозначается Lie$G$ или маленькой готической буквой g. Для матричных групп:

а) Алгебра Ли группы всех невырожденных матриц $GL(n)$ размера $n \times n$ обозначается $\mathfrak{gl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n \times n$

б) Алгебра Ли группы всех матриц с определителем $1 SL(n)$ обозначается $\mathfrak{sl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n \times n$ с нулевым следом.

в) Алгебра Ли группы всех ортогональных матриц $O(n)$ обозначается $\mathfrak{so}(n)$. Состоит из всех кососимметричных матриц размера $n \times n$.

• Вектора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Коммутатор - векторное произведение.

Замечание. Тождество Якоби введенное можно еще переписать в виде:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x.z]]$$

что означает, что оператор $[x,\cdot]$ является дифференцированием, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница.

• Пространство функций от переменных $q_i$ и $p_i$ со скобкой Пуассона:

$$\{f,g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

• Одномерная алгебра Ли $\dim \mathfrak{g} = 1$. Можно считать, что порождается одним элементом $x$. Тогда, $[x,x] = -[x,x]$, значит $2[x,x] = 0, [x,x] = 0$.

Определение 2. Алгебра Ли называется коммутативной (абелевой) если для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ верно, что $[x,y] = 0$.

Ясно, что есть коммутативная алгебра любой размерности.

• Двумерные алгебры Ли $\dim \mathfrak{g} = 2$. Можно считать, что $\mathfrak{g}$ порождается двумя элементами $x, y$. Так как $[x,x] = [y,y] = 0$ и $[x,y] = -[y,x]$, то единственный коммутатор который надо описать это $[x,y]$. Если коммутатор $[x,y] = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативная. Иначе коммутатор $[x,y] \neq 0$ можно взять в качестве одного из базисных элементов, скажем $y$. Тогда коммутатор $[x,y]$ пропорционален $y$ и перенормировав $x$ можно сделать $[x,y] = y$. Получилась такая новая алгебра $\mathfrak{g} = \langle x, y \rangle$

и единственный ненулевой коммутатор имеет вид $[x,y] = y$. Эту алгебру можно реализовать как подалгебру в алгебре матриц $2 \times 2$ : $x = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $I_1, I_2, ..., I_l$ базис в алгебре Ли. Тогда коммутатор базисных элементов снова разлагается по базису $[I_i, I_j] = \sum_k c_{ij}^k I_k$. Числа $c_{ij}^k$ называются структурными константами. По аналогии с тем, что конечная группа описывается таблицей умножения, алгебра Ли описывается своими структурными константами.

Определение 3. Линейное отображение $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется изоморфизмом алгебр Ли, если оно является изоморфизмом векторных пространств и $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x,y]), \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Эквивалентно, можно сказать, что две алгебры Ли являются изоморфными, если у них есть базисы в которых совпадают структурные константы.

Любая двумерная алгебра Ли изоморфна или коммутативной алгебре или алгебре с коммутатором $[x,y] = y$.

Трехмерные алгебры Ли (???? что про них????). Отметим, что помимо коммутативных алгебр выше были еще три примера трехмерных алгебр: $\mathbb{R}^3, \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Среди них есть изоморфные.

### 2.1.8 О тензорах в теории групп

(все о них тут вот)

#### Основная теория

Определение 1. Рассмотрим векторное пространство $V$ с базисом $e_1, ..., e_N$. Тензор $a = a^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ называется симметричным если его коэффициенты $a^{i_1 \cdots i_k}$ симметричны относительно перестановки индексов. Пространство симметричных тензоров обозначается $S^k V$.

Здесь и далее по повторяющимся индексам сверху и снизу предполагается суммирование.

Определение 2. Тензор $a = a^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ называется кососимметричным если его коэффициенты $a^{i_1 \cdots i_k}$ умножаются на знак $(-1)^{|\sigma|}$ при перестановке индексов $\sigma \in S_k$. Пространство кососимметричных тензоров обозначается $\Lambda^k V$.

Более инвариантно можно сказать, что симметричные тензоры это тензоры который при перестановке сомножителей переходят в себя, а кососимметричные тензоры -это тензоры которые при перестановке сомножителей умножаются на знак. В пространствах $S^k V$ и $\Lambda^k V$ несложно указать базис, в простейшем примере $k = 2$ этот базис имеет вид

$$S^2 V = \langle e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i | 1 \le i \le j \le N \rangle , \quad \Lambda^2 V = \langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i | 1 \le i < j \le N \rangle .$$

Для произвольного $k$ базис можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} S^k V &= \langle e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} + \text{ sym. terms } \quad | 1 \le i_1 \le ... \le i_k \le N \rangle , \\ \Lambda^k V &= \langle e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} + \text{ asym. terms } \quad | 1 \le i_1 < ... < i_k \le N \rangle . \end{aligned}$$

Размерности:

$$\begin{aligned} \dim S^k V &= \binom{N+k-1}{k} = \frac{N(N+1)...(N+k-1)}{k!} = \frac{N^{\uparrow k}}{k!}, \\ \dim \Lambda^k V &= \binom{N}{k} = \frac{N(N-1)...(N-k+1)}{k!} = \frac{N^{\downarrow k}}{k!}. \end{aligned}$$

•2. $V \otimes V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$, далее появляются еще слагаемые $V^{\otimes k} = S^k V \oplus \Lambda^k V \oplus ...$

Для любого линейного преобразования $A$ оператор $A^{\otimes k} : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ сохраняет подпространства $S^k V$ и $\Lambda^k V$. В частности, если $V$ является представлением группы $G$, то $S^k V$ и $\Lambda^k V$ также являются представлениями группы $G$.

•3. Для любого оператора $A : V \to V$ верно

$$\operatorname{Tr} S^2 A = \frac{1}{2} \left( (\mathrm{Tr\, A})^2 + \mathrm{Tr\, A}^2 \right) , \quad \operatorname{Tr} \Lambda^2 A = \frac{1}{2} \left( (\mathrm{Tr\, A})^2 - \mathrm{Tr\, A}^2 \right) .$$

Из этой формулы находятся характеры представлений $S^2 \rho$ и $\Lambda^2 \rho$:

$$\chi_{S^2 \rho}(g) = \frac{1}{2} \left( \chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho \left( g^2 \right) \right) , \quad \chi_{\Lambda^2 \rho}(g) = \frac{1}{2} \left( \chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho \left( g^2 \right) \right) .$$

### 2.1.9 О группах $SO(3)$ и $SU(2)$.

(!! наконец-то проработаю их!!!)

SO(3) Группа $SO(3)$ состоит из матриц $R$ удовлетворяющих $R^t R = E, \det R = 1$. В терминах матричных элементов

$$R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij}, \qquad \epsilon_{pqr} R_{1p} R_{2q} R_{3r} = 1$$

где используется суммирование Эйнштейна и $\epsilon$ - тензор Леви-Чивиты. Второе соотношение можно переписать в более общей форме

$$\epsilon_{pqr} R_{ip} R_{jq} R_{kr} = \epsilon_{ijk}$$

Свернув с $R_{ks}$ получаем

$$\epsilon_{ijk} R_{ks} = \epsilon_{pqs} R_{ip} R_{jq}$$

Мы проверяли на прошлой лекции, что группа $SO(3)$ трехмерная. Это означает, что все эти соотношения можно локально разрешить и выразить все матричные элементы через какие-то три, эти три являются локальными координатами на группе. Более геометрически элементы группы $SO(3)$ описываются при помощи углов Эйлера, их опять же три и они тоже являются локальными координатами.

Нам будет удобно ввести координаты на группе $SO(3)$ еще одним способом. Любой элемент $SO(3)$ является вращением относительно некоторой оси на некоторый угол $\alpha$. Через $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ мы обозначим направляющий вектор этой оси. Отнормируем вектор $\vec{n}$ так, что $|\vec{n}| = 1$. То есть мы считаем, что любой элемент $SO(3)$ параметризуется точкой двумерной сферы $\vec{n}$ и углом $\alpha$.

$$\forall \qquad \vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp$$

$\vec{x}_\parallel = (\vec{x}, \vec{n})\vec{n}$

$$\vec{x}_\parallel \mapsto x_\parallel, \quad \vec{x}_\perp \mapsto \cos\alpha \vec{x}_\perp + \sin\alpha \left[\vec{n}, \vec{x}_\perp\right].$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \sin\alpha[\vec{n}, \vec{x}] + (1 - \cos\alpha)((\vec{x}, \vec{n})\vec{n} - \vec{x}).$$

Вычислим теперь это в матричном языке. Оператор векторного умножения на $\vec{n}$ имеет матрицу $N$, матрица оператора $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, \vec{n})\vec{n} - \vec{x}$ равна $N_2$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$N_2 = N^2$. Поэтому матрица поворота на угол $\alpha$ относительно оси натянутой на $\vec{n}$ имеет вид

$$R = E + \sin\alpha N + (1 - \cos\alpha) N^2.$$

Вектор $\vec{n}$ имел единичную длину, поэтому матрица $N$ имеет свойство $N^3 = -N$. Используя разложение в ряд экспоненты мы получаем, что

$$R = \exp(\alpha N)$$

Матрица $\alpha N$ является произвольной кососимметричной матрицей $3 \times 3$, т.е. произвольным элементом алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Это является иллюстрацией к следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $G$ группа Ли и $A \in T_E G$ элемент ее алгебры Ли. Тогда $\exp A \in G$.

Для случая группы $SO(2)$ это утверждение уже видели раньше.

Отметим, что вообще говоря неверно, что любой элемент группы Ли является экспонентой от элемента алгебры Ли. Но для элементов близких к $E$ это верно, с другой стороны верно, что окрестность $E$ порождает связную компоненту единицы группы $G$, в этом смысле алгебра Ли в большой мере определяют группу Ли.

Для групп $SO(N)$ при $N > 3$ уже сложно описать все элементы геометрически. С алгеброй Ли можно работать точно также, образующими являются элементарные кососимметрически матрицы $J_{ab} = E_{ab} - E_{ba}, 1 \le a < b \le N$, которые есть разность двух матричных единиц. В примере группы $SO(3)$ эти матрицы соответствуют единичным базисным векторам

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутаторы в этом базисе имеют вид $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J_c$ из этого следует, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ изоморфна $\mathbb{R}^3$. Матрица $N$ использованная выше по этому базису разлагается просто как $N = n_1 J_1 + n_2 J_2 + n_3 J_3$.

U(2) Группа $U(2)$ состоит матриц $g$ таких, что $gg^* = E$. Запишем эти соотношения явно:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1, a\bar{c} + b\bar{d} = 0, c\bar{c} + d\bar{d} = 1$$

Решая эти уравнения получаем, что $c = -\lambda\bar{b}, d = \lambda\bar{a}$, $|a|^2 + |b^2| = 1, |\lambda| = 1$. То есть элемент группы $U(2)$ задается точкой трехмерной сферы и еще комплексным числом по модулю равным 1. Группа $U(2)$ четырехмерна, вообще размерность группы $U(N)$ равна $N^2$.

SU(2) Группа $SU(2)$ состоит из $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Разложив по $a, b$ на вещественную и мнимую часть $a = a_0 + \mathrm{i}a_3, b = a_2 + \mathrm{i}a_1$ мы можем переписать произвольный элемент из $SU(2)$ в виде

$$a_0 E + \mathrm{i}a_1\sigma_1 + \mathrm{i}a_2\sigma_2 + \mathrm{i}a_3\sigma_3$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Набор параметров $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ удовлетворяющие $a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$ можно воспринимать как точку трехмерной сферы, и это взаимно-однозначное соответствие между трехмерной сферой и $SU(2)$.

Есть еще вариант параметризации при помощи угла $\alpha$ и трехмерного вектора $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. А именно, пусть $a_0 = \cos\alpha, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sin^2\alpha$, тогда введем $n_j$ так, что $a_j = n_j \sin\alpha$. Тогда матрица $g$ равна

$$g = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}).$$

Последняя формула может быть переписана как $\exp(\mathrm{i}\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))$.

Матрицы $\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$ образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{su}_2$. Как легко видеть из определения эта алгебра состоит из косоэрмитовых матриц со следом 0. Если их перенормировать на минус двойку, то есть ввести $I_a = -\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_a, a = 1, 2, 3$, то получим, что $[I_a, I_b] = \epsilon_{abc}I_c$, то есть алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ изоморфна $\mathfrak{so}(3)$. Но группы Ли на самом деле разные, см. задачи.

•5. а) Алгебра Ли коммутативной группы Ли будет тоже коммутативной.

б) Если группа Ли связна и ее алгебра Ли коммутативна, то и сама группа тоже коммутативна.

Доказательство. а) Напомним, что структура алгебры Ли на касательном пространстве происходила из коммутирования элементов в группе. А именно мы брали две кривые $g(t) = E + At + o(t)$ и $h(s) = E + Bs + o(s)$ и рассматривали коммутатор $h(s)g(t)h(s)^{-1}$. Разлагая его в ряд в первых членах получается $E + h(s)Ah(s)^{-1}$ Теперь оставляя только первый член по $s$ мы получаем $[B, A]$.

Если мы предполагаем, что группа коммутативная, $h(s)g(t)h(s)^{-1} = g(t)$. Оставляя только первый член по $t$ получаем $A = h(s)Ah(s)^{-1}$. Оставляя первый член по $s$ получаем $[B, A] = 0$.

б) Если $[A, B] = 0$, то $\exp(A)$ и $\exp(B)$ коммутируют. Поскольку для связной группы образ экспоненциального отображения порождает всю группу, то мы получаем, что группа коммутативная.

### 2.1.10 Представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$

**Основные конструкции (??)**

Определение 1. Представлением группы Ли $G$ называется гладкий гомоморфизм $\rho : G \to GL(V)$.

Рассматривая образ любой кривой $g(t) = E + tA + o(t)$ можно найти образ элемента $A \in \operatorname{Lie} G$ как первый член в разложении $\rho(g(t)) = E + d\rho(A) + o(t)$. Это отображение $d\rho$ является линеаризацией отображения $\rho$, в локальных координатах оно задается матрицей которая является матрицей якобина $\rho$.

Отображение $d\rho$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е.(??? додумаю этот вывод в теории!!!)

$$[d\rho(A), d\rho(B)] = d\rho([A, B]), \qquad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

Определение 2. Представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм алгебр Ли $\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Предыдущее предложение доказывает, что по представлению группы Ли всегда строится представление алгебры Ли. Один из главных способов изучения представлений групп Ли заключается в том, что сначала изучаются представления соответствующей алгебры Ли, а уже потом изучается вопрос их подъема (интегрирования) до представлений группы Ли.

Замечание. Операцию подъема можно объяснить при помощи экспоненциального отображения. А именно, для любого $A \in \mathfrak{g}$ есть кривая $g(\alpha) = \exp(\alpha A) \in G$, эти элементы удовлетворяют $g(\alpha + \beta) = g(\alpha)g(\beta)$. Тогда в представлении мы имеем, что

$$\rho(g(\alpha + \beta)) = \rho(g(\alpha))\rho(g(\beta)).$$

Дифференцируя это уравнение по $\beta$ и подставляя $\beta = 0$ получаем, что $\frac{d}{d\alpha}\rho(g(\alpha)) = \rho(g(\alpha))d\rho A$. Это дифференциально уравнение имеет единственное решение с начальным условием $\rho(g(0)) = E$, а именно $\rho(g(\alpha)) = \exp(d\rho A)$. То есть мы показали, что

$$\rho(\exp(\alpha A)) = \exp(d\rho A).$$

Пример 1. Рассмотрим одномерную группу $SO(2) \simeq U(1)$. Ее алгебра Ли одномерна, порождена одним элементом $J$, с соотношением $[J, J] = 0$. Чтобы найти $n$-метрное представление это алгебр Ли надо найти матрицу $n \times n$ с таким коммутатором, но это условие ничего не означает, так как любая матрица в коммутаторе с собой равна 0. Мы знаем, что с представлениями группы тут ситуация более тонкая, из того, что $\exp(2\pi J) = 1$ следует дополнительное условие, заключающееся в том, что матрица $iJ$ диагонализуема с целыми собственными числами.

Пример 2. Найдем теперь представления алгебры $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$. Эта алгебра задается образующими $J_1, J_2, J_3$ с соотношениями $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J_c$. Прежде чем строить общую теорию поищем маломерные представления.

У любой алгебры Ли есть тривиальное одномерное представление, в котором все генераторы переходят в 0. У алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ других одномерных представлений нет, так как любой элемент является коммутатором, а в одномерном представлении все коммутаторы равны нулю.

Конечно представления большой размерности можно строить как прямые суммы уже имеющихся. Например, можно взять прямую сумму $n$ тривиальных одномерных, в нем все генераторы переходят в нулевые матрицы размера $n \times n$. Это не очень интересно, далее мы будем искать неприводимые представления.

Мы знаем, что у алгебры $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ есть двумерное представление (где она задана матрицами $\frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_1, \frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_2, \frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_3$. Здесь $\sigma$ матрицы Паули определяются по формулам

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Также есть трехмерное представление, оно задано матрицами

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы докажет, что для любого натурального числа $n$ у алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ существует единственное $n$-мерное неприводимое представление. Рассмотрим для этого дополнительные операторы действующие в представлении:

$$J^2 = -J_1^2 - J_2^2 - J_3^2, \quad J_+ = J_1 + \mathrm{i}J_2, \quad J_- = J_1 - \mathrm{i}J_2$$

Отметим, что все представления у нас над комплексными числами поэтому мы можем рассматривать такие линейные комбинации. Выбор $J_+, J_-$похож на переход к комплексным координатам, как видно из следующего предложения полученные операторы являются собственными относительно коммутатора с $J_3$. Оператор $J^2$ полезно сравнить с квадратом момента импульса.

•2. Операторы $J^2, J_+ . J_-$удовлетворяют соотношениями:

$$[\mathrm{i}J_3, J_+] = J_+, \quad [\mathrm{i}J_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = -2\mathrm{i}J_3,$$
$$[J_a, J^2] = 0, \quad a = 1, 2, 3;$$

Доказательство. Проверим одно соотношение, остальные проверяются аналогично

$$[J_1, J^2] = [J_1, -J_2^2 - J_3^2] = -J_1J_2J_2 + J_2J_1J_2 - J_2J_1J_2 + J_2J_2J_1 -$$
$$-J_1J_3J_3 + J_3J_1J_3 - J_3J_1J_3 + J_3J_3J_1 = -[J_1, J_2]J_2 - J_2[J_1, J_2] - [J_1, J_3]J_3 - J_3[J_1, J_3] =$$
$$= -J_3J_2 - J_2J_3 - (-J_2)J_3 - J_3(-J_2) = 0.$$

Оператор $J^2$ называется оператором Казимира. Из того, что он коммутирует со всеми генераторами алгебры следует, что он действует константой (постоянной матрицей) в любом конечномерном неприводимом представлении. ??? .1 В одномерном тривиальном представлении это $J^2$ конечно действует нулем, используя формулу (2) находим, что в двумерном представлении $J^2$ действует числом $\frac{3}{4}$, используя формулу (3) находим, что в трехмерном представлении $J^2$ действует числом 2.

Пусть $V$ - какое-то неприводимое представление алгебры $\mathfrak{so}(3)$. Так как операторы $J^2$ и $iJ_3$ коммутируют, то их можно одновременно диагонализовать. $2^2$ Обозначим через $v_{\lambda,m}$ базис из их собственных векторов:

$$J^2 v_{\lambda,m} = \lambda v_{\lambda,m}, \quad \mathrm{i}J_3 v_{\lambda,m} = m v_{\lambda,m}$$

•3. $J_+ v_{\lambda,m}$ является собственным для операторов $J, J_3$ с собственными значениями $\lambda$ и $m+1$ соответственно, т.е. $J_+ v_{\lambda,m}$ пропорционален $v_{\lambda,m+1}$. Аналогично $J_- v_{\lambda,m}$ пропорционален $v_{\lambda,m-1}$.

Доказательство. Используя выведенные выше соотношения имеем:

$$J^2 (J_+ v_{\lambda,m}) = J_+ (J^2 v_{\lambda,m}) = \lambda J_+ v_{\lambda,m}$$
$$iJ_3 (J_+ v_{\lambda,m}) = J_+ (iJ_3 v_{\lambda,m}) + [iJ_3, J_+] v_{\lambda,m} = (m+1) J_+ v_{\lambda,m}$$

Вычисления с $J_-$полностью аналогичны.

Таким образом, начиная с одного собственного вектора $v_{\lambda,m}$ можно построить целую цепочку собственных векторов применяя $J_+$и $J_-$. Так как пространство представления $V$

является конечномерным, в цепочке найдутся крайние вектора $v_{\lambda,m_{\max}}, v_{\lambda,m_{\min}}$ такие, что $J_+ v_{\lambda,m_{\max}} = 0$ и $J_- v_{\lambda,m_{\min}} = 0$.

Вычислим теперь $J^2$:

$$\lambda v_{\lambda,m_{\max}} = J^2 v_{\lambda,m_{\max}} = \left(-J_3^2 - J_1^2 - J_2^2\right) v_{\lambda,m_{\max}} = \left(-J_3^2 - \frac{J_+J_- + J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} =$$
$$= \left(-J_3^2 - \frac{2J_-J_+ + [J_+, J_-]}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} =$$
$$= \left(-J_3^2 + iJ_3 - \frac{2J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} = \left(m_{\max}^2 + m_{\max}\right) v_{\lambda,m_{\max}}$$

Аналогично $\lambda v_{\lambda,m_{\min}} = J^2 v_{\lambda,m_{\min}} = \left(m_{\min}^2 - m_{\min}\right) v_{\lambda,m_{\max}}$. Обозначим теперь $j = m_{\max}$, тогда $\lambda = j^2 + j$, и на $m_{\min}$ мы получаем квадратное уравнение с корням $j+1$ и $-j$. Первый корень не подходит, так как $m_{\max} - m_{\min} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ так как один вектор получается из другого операторами $J_-$. Второй корень может подойти если $2j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Эквивалентно $j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...\right\}$.

Будем обозначать через $\pi_j$ представление $\mathfrak{su}(2)$ в котором $j = m_{\max}$. Оно имеет базис из векторов $v_{\lambda,j}, v_{\lambda,j-1}, ..., v_{\lambda,-j}$. Следовательно $\dim \pi_j = 2j + 1$.

В базисе $v_{\lambda,j}, v_{\lambda,j-1}, ..., v_{\lambda,-j}$ матрица оператора $\mathrm{i}J_3$ имеет диагональный вид. оператора $J_+$все ненулевые элементы стоят над диагональю, у оператора $J_-$все ненулевые элементы стоят под диагональю.

$$J_+ \mapsto \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j-2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -j+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -j \end{pmatrix},$$

$$J_+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a_{j-1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{j-2} & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{-j} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ b_j & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & b_{j-1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & b_{1-j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы $a_m, b_m$ зависят от нормировки собственных векторов $v_{\lambda,m}$. Часто изучают унитарные представления групп Ли, в которых элементам группы соответствуют операторы из унитарной группы $U(N)$, а элементам алгебры Ли соответствуют элементы из алгебры Ли $\mathfrak{u}(N)$. Тогда разные собственные вектора являются ортогональными и можно сделать вектора $v_{\lambda,m}$ ортонормированным базисом.

Тогда оператор $J_a^* = -J_a$, откуда $J_+^* = -J_-$, т.е. $\overline{a_m} = -b_{m+1}$. Можно найти точное значение $|a_m|$, см. задачу ниже.

Заметим, что все представление $\pi_j$ порождено из вектора $v_\lambda$ действием оператора $J_-$. По аналогии с квантово-механической задачей о гармоническом осцилляторе его можно называть оператором рождения, а оператор $J_+$оператором уничтожения. Но, в отличии от гармонического осциллятора, где нарождать состояния можно до бесконечности, представления $\pi_j$ конечномерны.

Перейдем теперь от представления алгебры Ли к представлению группы. Начнем с группы $SO(3)$. На прошлой лекции мы показали, что любой элемент этой группы имеет вид $\exp\left(\alpha \sum n_a J_a\right)$, $\sum n_a^2 = 1$. Легко написать формулу для $\exp\left(\alpha J_3\right)$:

$$e^{\alpha J_3} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-i\alpha j} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha(j-1)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha(j-2)} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & e^{it(j-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & e^{i\alpha j} \end{pmatrix}$$

С другой стороны, в группе $SO(3)$ верно $\exp 2\pi J_3 = E$ (так как геометрически $\alpha$ это угол поворота и поворот на угол $2\pi$ это тождественное преобразование). А по формуле (5) получаем, что в представлении $\pi_j$ элементу $e^{2\pi J_3}$ соответствует единичный только если $j$ - целое. А для полуцелых $j$ получается, что единичному элементу соответствует неединичный элемент, что невозможно. Для группы $SU(2)$ ситуация другая. Любой элемент это экспонента $\exp\left(\alpha \mathrm{i} \sum n_a\sigma_a\right)$, но элементу $J_3$ соответствует матрица $\frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_3$. Поэтому, в группе $SU(2)$ верно $\exp 4\pi J_3 = E$, но из формулы (5) следует, что в представлении $\pi_j$ элементу $e^{4\pi J_3}$ всегда соответствует единичная матрица, так что противоречия не получается.

•4. а) Для целых $j$ представление $\pi_j$ интегрируется до представления группы $SO(3)$. При полуцелых $j$ однозначного представления группы $SO(3)$ не существует.

б) Для любого $j$ представление $\pi_j$ интегрируется до представления группы $SU(2)$.

Замечание. Это предложение является свидетельством того, что группы Ли $SU(2)$ и $SO(3)$ не изоморфны, в отличии от соответствующих алгебр Ли.

Замечание. Строго говоря, выше мы доказали что при полуцелых $j$ нет представления группы $SO(3)$, но не доказывали существования представления при целых $j$. Мы это выведем из другой конструкции представлений $\pi_j$ на следующей лекции.

Перейдем к характерам представлений и тензорным произведениям. Характер вводится стандартной формулой $\chi(g) = \mathrm{Tr}\,\rho(g)$. В группе $SU(2)$ любая матрица сопряжена матрице $\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} = \exp\left(\mathrm{i}\varphi\sigma_3\right)$. Поэтому характер достаточно вычислять на таких диагональных матрицах: $\chi(\varphi) = \mathrm{Tr}\,\rho\left(\exp\left(\mathrm{i}\varphi\sigma_3\right)\right)$.

•5. Характеры неприводимых представлений $\pi_j$ группы $SU(2)$ равны

$$\chi_j(\varphi) = e^{2j\mathrm{i}\varphi} + e^{2(j-1)\mathrm{i}\varphi} + ... + e^{-2j\mathrm{i}\varphi} = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Доказательство. Следует из формулы (5).

Рассмотри тензорное произведение двух представлений. Оно задается той же формулой, что раньше. Как и раньше, характер тензорное произведения равен произведению характеров. Чтобы понять что такое тензорное произведение на уровне алгебр Ли, надо опять взять кривую $g(t)$. Тогда

$$\rho_1(g(t)) \otimes \rho_2(g(t)) = E \otimes E + \left(d\rho_1(A) \otimes E + E \otimes d\rho_2(A)\right) t + o(t)$$

Определение 3. Пусть $\xi_1, \xi_2$ два представления алгебры Ли g. Их тензорным произведением $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ называется представление заданное формулой:

$$\xi(x) = \xi_1(x) \otimes 1 + 1 \otimes \xi_2(x), \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Предыдущее вычисление показывает, что если представления $\xi_1, \xi_2$ происходят (являются дифференциалами) представлений группы, то понятия тензорного произведения представлений группы и тензорного произведения представлений алгебры Ли между собой согласованы.

### 2.1.11 Представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$

Теорема 1 (Без доказательства). Если $G \subset SO(3)$ и $|G| < \infty$, то $G$ изоморфна одной из следующий групп: $C_n, D_n, A_4, S_4, A_5$.

Для поиска представлений иногда может помочь следующая теорема.

Теорема 2 (Без доказательства). Размерность неприводимого представления делит порядок группы $|G|$.

#### Представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$

На прошлой лекции мы строили представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ и от них переходили к представлениям групп Ли $SU(2)$ и $SO(3)$. Сейчас мы обсудим как можно строить представления стартуя с группы.

Группа $SO(3)$ задана своим трехмерным представлением $V = \mathbb{R}^3$. Напомним, что матрицы $R$ в нем удовлетворяю уравнениям

$$R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}, \quad \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}R_{kr} = \epsilon_{pqr}.$$

Из этих уравнений сверткой получается

$$\epsilon_{pqr}R_{rk} = \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}.$$

Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V$. Элементы в нем можно писать как тензоры $t = t_{ij}e_i \otimes e_j$. Группа $SO(3)$ действует по формуле

$$(R \otimes R)t = t'_{pq}e_p \otimes e_q, \quad t'_{pq} = R_{pi}R_{qj}t_{ij}.$$

Мы знаем, что тензорное произведение можно разложить в прямую сумму $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$. Начнем с кососимметрических тензоров. Имеем $\dim \Lambda^2 V = 3$. Это можно еще объяснить сказав, что у кососимметричного тензора есть только три нетривиальные компоненты $t_{12}, t_{13}, t_{23}$. Обозначим базис в $\Lambda^2 V$ как $e'_i = \epsilon_{ijk}e_j \otimes e_k$. Тогда имеем

$$Re'_i = R \otimes R\,(\epsilon_{ijk}e_j \otimes e_k) = R_{qj}R_{rk}\epsilon_{ijk}e_q \otimes e_r = \epsilon_{pqr}R_{pi}e_q \otimes e_r = R_{pi}e'_p.$$

Получили, что группа $SO(3)$ действует на $\Lambda^2 V$ в базисе $e'_i$ той же формулой, что и на $V$ в базисе $e_i$. Значит эти представления изоморфны.

Можно это увидеть и на уровне характеров. Характеры постоянен на классах сопряженности, классы сопряженности в $SO(3)$ задаются углом поворота. Тогда, если $R(\alpha)$ какой-то поворот на этот угол, то

$$\begin{aligned}
\chi_V(R(\alpha)) &= 1 + 2\cos\alpha \\
\chi_{\Lambda^2 V}(R(\alpha)) &= \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 - \chi_V\left(R(\alpha)^2\right)}{2} = 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos(2\alpha) = 1 + 2\cos\alpha \\
\chi_{S^2 V}(R(\alpha)) &= \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 + \chi_V\left(R(\alpha)^2\right)}{2} = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

Мы видим, что характеры $\chi_V$ и $\chi_{\Lambda^2 V}$ равны, это является подтверждением того, что эти представления изоморфны.

Теперь посмотрим на симметрические тензоры $S^2V$. Это пространство шестимерно, независимые компоненты - это $t_{11}, t_{12}, t_{22}, t_{13}, t_{23}, t_{33}$. Его характер мы нашли выше, правда формула пока не очень внятная.

Удобно перейти от косинусов к экспонентам от мнимых аргументов. Тогда

$$\chi_V(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha}$$
$$\chi_{S^2V}(R(\alpha)) = e^{-2\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 2 + e^{\mathrm{i}\alpha} + + e^{2\mathrm{i}\alpha}$$

На самом деле представление $S^2V$ не является неприводимым. В нем есть тривиальное подпредставление натянутое на вектор

$$\delta = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$$

Можно это записать в тензорных обозначениях

$$t_{ij} = \delta_{ij}, \quad R_{pi}R_{qj}\delta_{ij} = \delta_{pq}$$

Вторым представлением будет ортогональное дополнение, оно соответственно будет пятимерным. Чтобы говорить о таком дополнении надо ввести эрмитово скалярное произведение, но это, в данном случае, просто, базис $e_1, e_2, e_3$ является ортонормированным и скалярное произведение на тензоры переносится по формуле $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \langle x_2, y_2\rangle$. Тогда ортогональное дополнение к $\delta$ задается уравнением

$$t_{11} + t_{22} + t_{33} = 0.$$

Если отождествить симметричные тензоры $t_{ij}$ с симметричными матрицами, то последнее условие превратится в условие бесследовости матрицы.

Обозначим получившееся пятимерное представление как $\mathrm{S}_2$. Тогда его характер находится из характера $S^2V$:

$$\chi_{\mathrm{S}_2}(R(\alpha)) = e^{-2\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{2\mathrm{i}\alpha}$$

Если обозначить $\mathrm{S}_1$ представление $V$ и $\mathrm{S}_0$ тривиальное представление, то имеем их характеры

$$\chi_{\mathrm{S}_1}(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha}, \quad \chi_{\mathrm{S}_0}(R(\alpha)) = 1.$$

Из этих примеров можно предположить схему для любого целого $n$ есть представление $\mathrm{S}_n$ размерности $2n+1$, с характером

$$\chi_{\mathrm{S}_n}(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}n\alpha} + \ldots + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha} + \ldots + e^{\mathrm{i}n\alpha}.$$

По формулам для характеров видно, что это представления $\pi_n$ которые были на прошлой лекции.

Как строить следующие $\mathrm{S}_n$? Надо брать большие тензорные степени. Возьмем треть степень $V \otimes V \otimes V$. Там есть подпространства $S^3V$ и $\Lambda^3 V$. Размерность $\Lambda^3 V$ равна 1, единственная нетривиальная компонента это $t_{123}$. Представление будет тривиальным

$$t_{ijk} = \epsilon_{ijk}, \quad (R \otimes R \otimes R)\epsilon_{ijk} = R_{pi}R_{qj}R_{rk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{pqr}.$$

Симметрические тензоры $S^3V$ образуют 10 мерное пространство. По аналогии с прошлыми случаями надо ожидать, что $S^3V$ является приводимым и там внутри найдется 7 -мерное подпредставление $\mathrm{S}_3$. Это представлением можно выделить условием бесследовости, т.е. что свертка с $\delta_{ij}(SO(3)$ инвариантный тензор) равна нулю

$$\delta_{ij}t_{ijk} = 0.$$

Так как индекс $k$ является свободным, то это 3 линейных уравнения в 10-мерном пространстве, они задают 7-мерное подпредставление. И так далее, представление $\mathrm{S}_n$

можно построить как пространство тензоров ранга $n$ которые являются симметричными и бесследовыми (зануляются при свертке с $\delta_{ij}$).

Есть другой способ явно реализовать эти представления $\mathrm{S}_n$ как гармонические полиномы степени $n$. Подробности даны в задаче ниже.

Рассмотрим теперь группу $SU(2)$. Она задана своим двумерным представлением, назовем пространство представления $V]$[1] Будем брать его тензорные степени, а в них симметричные тензоры. Зафиксируем ортонормированный базис $e_+, e_-$в пространстве $V$ в котором матрицы i $J_3, J_+, J_=$имеют вид

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пространство $S^2V$. Базисом в нем являются вектора

$$e_+ \otimes e_+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+\right), \quad e_- \otimes e_-.$$

Коэффициент во втором векторе подобран, чтобы базис был ортонормированным. Пользуясь формулой действия алгебры Ли в тензорном произведении находим формулы для действия генераторов i $J_3, J_+, J_=$в этом базисе

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что получилось представление изоморфное $\pi_1$ построенное на прошлой лекции: структура матриц такая же.

Рассмотрим пространство $S^3V$. Базисом в нем являются вектора

$$e_+ \otimes e_+ \otimes e_+, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e_+ \otimes e_+ \otimes e_- + e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+\right),$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_- \otimes e_+\right), \quad e_- \otimes e_- \otimes e_-.$$

Пользуясь формулой действия алгебры Ли в тензорном произведении находим формулы для действия генераторов i$J_3, J_+, J_=$в этом базисе

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Получилось представление $\pi_{3/2}$, построенное на прошлой лекции.

Очевидно, что это вычисление работает и в общем случае, представление $S^nV$ неприводимо и изоморфно $\pi_{n/2}$. В частности мы доказали, что все эти представления интегрируются до представления группы $SU(2)$.

Перейдем к характерам представлений и тензорным произведениям. Напомним, что в группе $SU(2)$ любая матрица сопряжена матрице $\exp\left(i\varphi\sigma_3\right)$ и характер можно писать в виде $\chi(\varphi) = \mathrm{Tr}\,\rho\left(\exp\left(i\varphi\sigma_3\right)\right)$. Характеры представлений мы нашли на прошлой лекции:

$$\chi_j(\varphi) = e^{2j\mathrm{i}\varphi} + e^{2(j-1)\mathrm{i}\varphi} + ... + e^{-2j\mathrm{i}\varphi} = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin\varphi}.$$

•3 (Клебш, Гордан). Тензорное произведение представлений $\pi_{j_1}$ и $\pi_{j_2}$ разлагается в прямую сумму неприводимых:

$$\pi_{j_1} \otimes \pi_{j_2} = \bigoplus_{\substack{j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant (j_1+j_2) \\ (j_1+j_2)-j \in \mathbb{Z}}} \pi_j .$$

В частности $(\pi_0 \otimes \pi_j) = \pi_j, \left(\pi_{1/2} \otimes \pi_j\right) = \pi_{j+1/2} + \pi_{j-1/2}($ при $j > 0), (\pi_1 \otimes \pi_j) = \pi_{j+1} + \pi_j + \pi_{j-1}($ при $j > 1/2)$.

Доказательство. Удобнее всего производить вычисления с характерами. Например:
$\chi_{1/2}(\varphi) \cdot \chi_j(\varphi) = e^{(2j+1)\mathrm{i}\varphi} + 2e^{(2j-1)\mathrm{i}\varphi} + ... + 2e^{(-2j+1)\mathrm{i}\varphi} + e^{(-2j-1)\mathrm{i}\varphi} = \chi_{j+1/2}(\varphi) + \chi_{j-1/2}(\varphi)$
Аналогично доказывается и общая формула (2).

Это разложение означает, что в пространстве $\pi_j \otimes \pi_{j'}$ есть два базиса. Один это базис это тензорные произведения базисов в $\pi_{j_1}$ и $\pi_{j_2}$ : $v_{j_1,m_1} \otimes v_{j_2,m_2}$ (здесь $v_{j,m}$ это тоже самое, что мы обозначали $v_{\lambda,m}$ на прошлой лекции, базис $v_{j,m}$ мы будем считать ортонормированным). Другой базис $v_{j,m}$ возникает из разложение в прямую сумму неприводимых, здесь $j$ должно принадлежать региону суммирования в правой части формулы (2). Коэффициенты разложения одного базиса по другому

$$v_{j,m} = \sum C_{j,m}^{j_1,m_1,j_2,m_2} v_{j_1,m_1} \otimes v_{j_2,m_2}$$

называются 3 j символами Вигнера (также иногда называются коэффициентам Клебша-Гордана).

Из условия что $iJ_3$ действует одинаково на левую и правую часть следует, что коэффициенты ненулевые только при $m = m_1 + m_2$.

Теперь запишем соотношения ортогональности для характеров. По аналогии с конечными группами и группой $SO(2)$ скалярное произведение должно выглядеть как

$$\langle \phi(g), \psi(g) \rangle = \frac{1}{\operatorname{vol} G} \int_G \phi(g)\overline{\psi(g)} dg = \frac{1}{\operatorname{vol} G} \int_{\text{conj.cl.}} \phi(h)\overline{\psi(h)} \operatorname{vol} C_h dh$$

Здесь второй интеграл берется по классам сопряженности, $C_h$ обозначает класс сопряженности элемента $h$. Мера интегрирования $dg$ должна быть правильно выбрана, мы не будем это обсуждать подробно, а ограничимся случаем $G = SU(2)$.

Напомним, что общий элемент из этой группы $G = SU(2)$ имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} a_0 + \mathrm{i}a_3 & a_2 + \mathrm{i}a_1 \\ -a_2 + \mathrm{i}a_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \text{ где } a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Множество таких наборов $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ отождествляется с точками трехмерной сферы. Тогда можно ожидать, что мера $dg$ это просто стандартная мера на трехмерной сфере.

Класс сопряженности матрицы из $SU(2)$ зависит только от ее собственных значений, обозначим их $e^{\mathrm{i}\varphi}$ и $e^{-\mathrm{i}\varphi}$. След такой матрицы равен $2\cos\varphi$, с другой стороны в обозначения выше он равен $2a_0$. Точки класс сопряженности соответствующий данному $a_0$ параметризуются наборами $(a_1, a_2, a_3)$ такими, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 - a_0^2 = \sin^2\varphi$. Таким образом класс сопряженности соответствующий $\varphi$ - это двумерная сфера радиуса $|\sin\varphi|$, ее объем (т.е. в данном случае площадь поверхности) пропорционален $\sin^2\varphi$.

Эту меру можно найти и более явным вычислением. Напомним, что мы интегрируем только функции постоянные на классам сопряженности, в нашем случае это означает, что функции зависят только от $a_0$. Преобразуем интеграл для произвольной такой функции

$F(a_0)$:

$$\int_{\mathbb{R}^4} F(a_0)\,\delta\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1\right) da_0da_1da_2da_3 \sim$$
$$\int_{\mathbb{R}^4} F(a_0)\,\delta\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1\right)\frac{da_0da_1da_2}{2a_3}d\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1\right) \sim$$
$$\int_{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1} F(a_0)\,\frac{da_0da_1da_2}{\sqrt{1-a_0^2-a_1^2-a_2^2}}.$$

Здесь означает пропорциональность, общий множитель мы подберем потом. Теперь возьмем интеграл по $a_1, a_2$:

$$\int_{a_1^2+a_2^2\le r^2}\frac{1}{\sqrt{r^2-a_1^2-a_2^2}}da_1da_2 = 2\pi r$$

где мы использовали обозначение $r^2 = 1 - a_0^2$. Тогда исходный интеграл сводится к

$$\int_{-1}^{1} F(a_0)\sqrt{1-a_0^2}da_0 = \int_0^{\pi} F(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi \sim \int_0^{2\pi} F(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$$

То есть мы опять получили меру $\sin^2\varphi d\varphi$ для интегрирования по классам сопряженности. Надо еще найти общий множитель перед интегралом. Он подбирается из условия, что интеграл от единичной функции равен 1. Так как $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \pi$, то этот множитель равен $1/\pi$.

Соотношения ортогональности характеров $\chi_j$ и $\chi_l$ выглядят так

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\chi_j(\varphi)\overline{\chi_l(\varphi)}\sin^2\varphi d\varphi = \delta_{j,l}$$

Их легко проверить из явной формулы (1) для $\chi_j(\varphi)$.

Можно написать также соотношения полноты

$$\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{k/2}(\alpha)\overline{\chi_{k/2}(\beta)} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha}\left(\delta_{2\pi}(\alpha-\beta)-\delta_{2\pi}(\alpha+\beta)\right)$$

где мы использовали формулу суммирования Пуассона. Здесь $\delta_{2\pi}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(\alpha$ - $2\pi k)$ дельта функция на пространстве $2\pi$ периодических функций, а $\delta(\alpha-\beta)-\delta(\alpha+\beta)$ это дельта функция в на пространстве $2\pi$ периодических нечетных функций.

### 2.1.12 Представления более общих групп Ли

#### Представления более общих групп Ли

До сих пор мы говорили только о представлениях трех групп Ли $SO(2), SU(2)$ и $SO(3)$. Сегодня мы будем говорить про другие группы Ли и соответствующие им алгебры Ли.

Во первых, вспомним, что мы знаем еще одну трехмерную группу Ли: $SL(2,\mathbb{R})$. Но если ограничиться комплексными представлениями и не обсуждать вопросы унитарности, то ее теория представлений не даст нам ничего нового, так как рассматривая комбинации с комплексными коэффициентами можно получить из элементов $\mathfrak{su}(2)$ элементы $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и наоборот. На самом деле, мы уже брали такие комбинации когда строили конечномерные представления $\mathfrak{su}(2)$. Мы там брали элементы $J_+, J_-, \mathrm{i}J_3$, их коммутационные соотношения имеют вид

$$[\mathrm{i}J_3, J_+] = J_+, \quad [\mathrm{i}J_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = -2\mathrm{i}J_3.$$

Тогда после замены $2\mathrm{i}J_3 \leftrightarrow h, \mathrm{i}J_+ \leftrightarrow f, \mathrm{i}J_- \leftrightarrow e$, мы получим коммутационные соотношения 3.

Комплексификацией вещественной алгебры Ли g называется алгебра Ли с такими же структурными константами, но уже рассматриваемая как векторное пространство над комплексными числами. Предыдущие рассуждения показывали, что комплексификации алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ изоморфны. Формулой комплексификацию алгебры Ли можно написать как $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Основные примеры это

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &= \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \\ \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &= \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}), \\ \mathfrak{su}(n,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &= \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Нетривиальным тут является последний пример, он следует из того, что любая матрица $X$ представима в виде $\frac{1}{2}(X - X^*) + \frac{1}{2}(X + X^*)$, где первое слагаемое является антиэрмитовым $\frac{1}{2}(X - X^*) \in \mathfrak{su}(n)$, а второй эрмитовы $\frac{1}{2}(X + X^*) \in \mathrm{i}\mathfrak{su}(n)$.

Другой пример, где важны подобные рассуждения - это ортогональные группы и алгебры Ли. Напомним, что они определяются по скалярному произведению, если оно имеет сигнатуру $(n, m)$, то соответствующие группа и алгебра Ли обозначаются $O(n, m)$ и $\mathfrak{so}(n, m)$ соответственно. Так как с комплексными коэффициентами все сигнатуры эквивалентны, то и комплексификации этих алгебр изоморфны:

$$\mathfrak{so}(n,m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{so}(n+m,\mathbb{C})$$

Рассмотрим случай четырехмерного пространства. Ясно, что изменение знака у скалярного произведения меняет сигнатуру, но не меняет ни группу Ли ни алгебру Ли, поэтому $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(4,0) \simeq \mathfrak{so}(0,4)$ и $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{so}(1,3)$. Таким образом, есть три ортогональных алгебры Ли $\mathfrak{so}(4), \mathfrak{so}(3,1), \mathfrak{so}(2,2)$. У каждой из них есть другое описание

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(4) &\simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \\ \mathfrak{so}(3,1) &\simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \\ \mathfrak{so}(2,2) &\simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Формулу (8) мы показали выше, в решении задачи из лекции 9. Формула 10) тоже ожидаема, так как мы знаем, что комплексификации $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ совпадают.

Прокомментируем формулу (9). Стоящая в правой части алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ рассматривается как вещественная алгебра Ли. Как у вещественной алгебры Ли у нее есть базис $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$. Можно брать и другой базис, например $e, f, h, \mathrm{i}e, \mathrm{i}f, \mathrm{i}h$. Изоморфизм (9) говорит, что можно так выбрать базис в алгебре $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, что получатся структурные константы такие же как у алгебры $\mathfrak{so}(3,1)$, доказательство этого вынесено в задачи ниже.

Группа $O(3,1)$ называется группой Лоренца и имеет исключительное значение в физике.

Изоморфизмы (8), (9), 10 полезны для изучения представлений. Напомним, что представления прямого произведения групп строятся при помощи внешнего тензорного произведения $\bigotimes$. Аналогично строятся представления прямой суммы двух алгебр Ли. Например представления алгебры $\mathfrak{so}(4)$ строятся как тензорные произведения представлений алгебр $\mathfrak{su}(2)$, неприводимые представления имеют вид $\pi_j \bigotimes \pi_{j'}$. В частности, есть два двумерных представления $\pi_{1/2} \bigotimes \pi_0$ и $\pi_0 \bigotimes \pi_{1/2}$. Так как комплексификации у алгебр $\mathfrak{so}(3,1)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$ такие же, то у этих алгебр также есть по два двумерных представления. Конечно, вопрос интегрируются ли эти представления до представлений группы, например группы Лоренца $O(3,1)$ требует дополнительного изучения.

Упомянем общий результат о классификации групп Ли. Мы ограничиваемся компактными группа Ли, т.е. такими, что множество их элементов является замкнутым и ограниченным подмножеством в $\mathbb{R}^{N^2}$ (множестве матриц $N \times N$). Группы $SU(N)$ и $SO(N)$ являются компактными, тогда как группы $SL(N,\mathbb{R})$ и $SO(N,M)$ при $N, M > 0$ не являются компактными.

Группа Ли называется простой если она не имеет связных нормальных подгрупп. Условие простоты полезно для классификации, чтобы сразу избавится от случаев вроде прямого и полупрямого произведения.

**Классификация Картана-Киллинга.** Пусть $G$ связная компактная простая группа Ли. Тогда с точностью до факторизации по конечной подгруппе $G$ изоморфна одной из следующих групп $U(1), SU(n), SO(n), Sp(n), E_6, E_7,\ E_8, F_4, G_2$.

Здесь $Sp(n)$ - это компактная симплектическая группа, $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ - это, так называемые, исключительные группы.

Неприводимые представления компактных групп все описаны. Чтобы не обращать внимания на факторизацию по конечной подгруппе мы будем далее говорить про представления соответствующих алгебр Ли и ограничимся случаем уже известных нам алгебр $\mathfrak{su}(N)$ и $\mathfrak{so}(n)$.

Обозначим через $V$ стандартное $N$-мерное представление алгебры $\mathfrak{s}(N)$.

Теорема 2. Для любого конечномерного неприводимого представления $W$ алгебры $\mathfrak{s}(N)$ найдется $k$ такое, что $W \subset V^{\otimes k}$.

Для алгебры $\mathfrak{s}(2)$ это означает, что любое представление получается перемножением представлений вида $\pi_{1/2}$, это следует из формулы Клебша-Гордона. Также, на прошлой лекции мы показывали что все неприводимые представления $\mathfrak{su}(2)$ получаются как симметрические тензорные степени $V$.

Посмотрим пример группы $SU(3)$. В тензорном произведении $V \otimes V$ есть подпространства $S^2V$ и $\Lambda^2V$. Первое из них 6-мерно, второе 3-мерно. Найдем его характер. Базисом в $\Lambda^2V$ являются тензоры вида

$$e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, \quad e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2, \quad e_3 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_3.$$

Любая матрица в $SU(3)$ сопряжена диагональной, поэтому характер достаточно находить на таких матрицах. Запараметризуем диагональные матрицы в виде

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

ясно, что это параметризация общей диагональной унитарной матрицы с определителем 1. Тогда

$$\chi_V(g) = e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2},$$
$$\chi_{\Lambda^2V}(g) = e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} + e^{i\varphi_2}.$$

Видим, что характеры получились разными. Т.е. у группы $SU(3)$ есть два разных трехмерных представления, их различие связано с различием между кварком и антикварком в физике. Легко видеть, что $\chi_{\Lambda^2V}(g) = \overline{\chi_V(g)}$, т.е. представление $\Lambda^2V$ является двойственным к представлению $V$.

Шестимерное представление $S^2V$ является неприводимым.

Рассмотрим третью тензорную степень $V \otimes V \otimes V$. Пространство кососимметрических тензоров $\Lambda^3V$ теперь одномерно и является тривиальным представлением. Пространство симметрических тензоров $S^3V$ является 10-мерным. Можно доказать, что оно является неприводимым представлением. Так как $V \otimes V \otimes V$ 27-мерно, то еще остается $27 - 10 - 1 =$ 16-мерная часть.

На самом деле эта 16-мерная часть является суммой двух неприводимых 8мерных. Это 8-мерное представлением мы знаем - это присоединенное представление. Его можно также найти как подпредставление внутри $V \otimes \Lambda^2V$.

Подводя итог: мы описали как строить 1-мерное, два 3-мерных, 6-мерное, 8мерное, 10-мерное неприводимые представления группы $SU(3)$. Конечно, это только начало большого списка. Тот факт, что элементарные частицы объединяются в группы такого размера послужил указанием наличия $SU(3)$ симметрии в теории поля (в частности, в современной в Стандартной модели).

(!?!?!??!?!?!??!)

У алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ тоже есть стандартное $n$-мерное представление $V$. Опять же можно брать тензорные произведения $V$ с собой, но, в отличии от предыдущего случая, так получатся не все представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$.

Пример. Алгебра $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$. Тогда $V \simeq \pi_1$, в его тензорных степенях встречаются только представления вида $\pi_k$, при $k \in \mathbb{Z}$. То есть не встречаются представления с полуцелым спином.

Пример. Алгебра $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Тогда можно показать (см. задачи), что $V \simeq \pi_{1/2} \bigotimes \pi_{1/2}$, в его тензорных степенях не встречаются например представления $\pi_{1/2} \bigotimes \pi_0, \pi_0 \bigotimes \pi_{1/2}$

Чтобы построить недостающие представления $\mathfrak{so}(n)$ нужна новая конструкция.

Определение 1. Пусть задано векторное пространство $V$ с базисом $e_1, ..., e_n$ и невырожденным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Алгеброй Клиффорда Cl построенной по $V$ называется ассоциативная алгебра с 1, образующими $\gamma_1, ..., \gamma_n$ и соотношениями

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = (e_1, e_j)$$

В частности, если соответствующие векторы $e_i, e_j$ ортогональны, то $\gamma$-образующие антикоммутируют $\gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i$. Замечание. Алгебра Клиффорда не зависит от выбора базиса $e_1, ..., e_n$. Вообще, есть линейное отображение $\gamma : V \to \mathrm{Cl}$ которое переводит любой вектор $v = \sum a_i e_i$ в $\gamma(v) = \sum a_i\gamma_i$. Тогда

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = (v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(V)$ получается квадратичным комбинациями $\gamma$-образующих. Чтобы строить представления алгебры Клиффорда (алгебры $\gamma$-образующих) удобно взять четномерное пространство $n = 2N$ с сигнатурой $(N, N)$. Матрицу Грамма удобно взять в блочном виде $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, $E$ единичная матрица размера $n \times n$.

Теперь построим соответствующее представление алгебры Клиффорда. Рассмотрим переменные $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ и потребуем, чтобы они активкоммутировали: $\xi_a\xi_b +\ \xi_b\xi_a = 0$. В частности, из соотношения следует, что $\xi_a^2 = 0$. Рассмотрим пространство $S$ - пространство многочленов от переменных $\xi_a$. Поскольку переменные $\xi_a$ антикоммутируют, можно назвать пространство $S$ пространством супермногочленов. Естественным базисом в пространстве $S$ являются вектора $\xi_{a_1}\xi_{a_2}\cdots\xi_{a_k}$, $a_1 < a_2 < ... < a_k$. Размерность пространства $S$ равна числу подмножеств $N$ элементного множества, то есть $2^N$. Для случая $N = 2$ базис имеет вид

$$1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2.$$

Введем еще действие на $S$ операторов дифференцирования $\xi_a^* = \frac{\partial}{\partial\xi_a}$. Более точно, если мы дифференцируем $\frac{\partial}{\partial\xi_a}$ моном в котором нет $\xi_a$, то мы получаем ноль, а если моном в котором есть $\xi_a$, то мы должны сначала поставить $\xi_a$ на первое место, а потом его убрать. Это значит дифференцирования $\xi_a^*$ между собой антикоммутируют, а с операторами умножения на $\xi_b$ они антикоммутируют при $a \neq b$. Также легко видеть, что $\xi_a\xi_a^* + \xi_a^*\xi_a = 1$. Итого коммутационные соотношения тогда имеют вид:

$$\xi_a^*\xi_b^* + \xi_b^*\xi_a^* = 0, \quad \xi_a\xi_b^* + \xi_b^*\xi_a = \delta_{a,b}$$

Таким образом операторы $\xi_a, \xi_b^*$ удовлетворяют соотношениям алгебры Клиффорда построенной по матрице Грамма $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Теперь мы из них построим представления ортогональной алгебры Ли.

•3. Операторы $\xi_a\xi_b$ при $a < b, \xi_a^*\xi_b^*$, при $a < b$ и $\frac{1}{2}(\xi_a^*\xi_b - \xi_b\xi_a^*)$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(N, N)$.

Мы не будем это доказывать, похожее (но чуть более простое) утверждение про связь между алгеброй Клиффорда и ортогональной алгеброй Ли вынесено в задачу ниже. Посчитаем только размерность полученной алгебры: $\frac{N(N-1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} + N^2 = \frac{2N(2N-1)}{2} = \dim \mathfrak{so}(N, N)$.

Так комплексификации алгебр $\mathfrak{so}(N, N)$ и $\mathfrak{so}(2N)$ совпадают, пространство $S$ получает структуру представления алгебры $\mathfrak{so}(2N)$. Более того, как представление алгебры $\mathfrak{so}(2N)$ пространство $S$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ состоящих из векторов с четным и нечетным числом операторов $\xi$ соответственно. Оба эти подпространства $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ имеют размерность $2^{N-1}$ и называются спинорными представлениями алгебры $\mathfrak{so}(2N)$.

Пример. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{s}(4)$. Упомянутые выше спинорные представления $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ являются двумерными. С другой стороны мы знаем, что $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ и все ее неприводимые представления строятся как тензорные произведения представлений левой и правой $\mathfrak{su}(2)$. В действительности $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ изоморфны представлениям $\pi_{1/2} \bigotimes \pi_0$ и $\pi_0 \bigotimes \pi_{1/2}$.

### 2.1.13 О спине и спинорах (?)

(важная тема квантмеха и теорпола, схожее в записи по алгебре написано, но там больше. Допишу, там много конструкций.)

### 2.1.14 Сложения групп и разложение Клебша-Гордона

(годные про это указания тут напишу)

#### О разложении Клебша-Гордона (???)

(?? это что ли из Тахтаджаяна???)

Когда $l$ - полуцелое число, т.е. $l \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и $m = -l, -l+1, ..., l-1, l$, формулы (3.10) - (3.12) все еще определяют неприводимое представление $\rho_l$ старшего веса алгебры Ли эо(3) размерности $2l+1$, и любое неприводимое $n$-мерное представление $\mathfrak{so}(3)$ изоморфно представлению $\rho_l cl = \frac{n-1}{2}$. Для полуцелых $l$ представления $\rho_l$ не интегрируемы: они порождают двузначные представления SO(3), так называемые спинорные представления. Однако рассматриваемые как представления алгебры Ли $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3), \rho_l$ соответствуют неприводимым унитарным представлениям группы Ли SU(2). Из теории представлений SU(2) следует, что при $l, l' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

$$V_l \otimes V_{l'} = \bigoplus_{j=|l-l'|}^{l+l'} V_j$$

- это так называемое разложение Клебша-Гордона. В физике оно соответствует сложению угловых моментов.

Регулярное представление $R$ группы SO(3) в $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3\boldsymbol{x})$ не является неприводимым. Имеем

$$\mathscr{H} = L^2\left(S^2, d\boldsymbol{n}\right) \otimes L^2\left(\mathbb{R}_{>0}, r^2 dr\right),$$

$d\boldsymbol{n}$ - мера на $S^2$, индуцированная мерой Лебега на $\mathbb{R}^3$. Группа SO(3) действует вращениями на первом сомножителе тензорного произведения (3.14), тогда как она действует на второй сомножитель как тождественный оператор. Таким образом, задача разложения регулярного представления $R$ сводится к нахождению SO(3)-инвариантных подпространств гильбертова пространства $L^2\left(S^2, d\boldsymbol{n}\right)$. Итог - разложение в ортогональную сумму

$$L^2\left(S^2, d\boldsymbol{n}\right) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathscr{D}_l,$$

$\mathscr{D}_l \simeq V_l$. При этом изоморфизме ортонормированный базис $Y_{lm}$ в $\mathscr{D}_l$, соответствующий базису $e_{lm}$ в $V_l$, дается нормированными сферическими функциями

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\vartheta), \quad m = -l, ..., l,$$

$P_l^m(x)$ - нормированные присоединенные полиномы Лежандра,

Самосопряженный оператор $\boldsymbol{M}^2$ в гильбертовом пространстве $L^2\left(S^2, d\boldsymbol{n}\right)$ имеет чисто точечный спектр, состоящий из собственных значений $\hbar^2 l(l+1)$ кратностей $2l+1, l = 0, 1, 2, ...$, и разложение (3.15) дает разложение по его собственным функциям: для любого $\psi \in L^2\left(S^2, d\boldsymbol{n}\right)$

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} Y_{lm}, \quad \text{где} \quad C_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(\vartheta, \varphi) \overline{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

## 2.2 Properties of typical groups

### 2.2.1 On $SU(2)$

**Main formulas**

### 2.2.2 On $SO(3)$

**Теория представлений** SO(3)

(?????????????????????? нужно почитать алгебру, чтобы понять то, что ниже Тахтаджаян написал.)

Группы вращений SO(3) - группа ортогональных матриц $3 \times 3$ с определителем 1.

SO(3) - компактная группа Ли,

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{RP}^3$$

как гладкое многообразие.

$$\mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\},$$

SU(2) - группа Ли унитарных матриц $2 \times 2$ с определителем 1.

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ группы SO(3) - трехмерная алгебра Ли кососимметрических матриц $3 \times 3$ с базисом

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $X_1, X_2, X_3$ порождают соответственно однопараметрические подгруппы SO(3), состоящие из вращений вокруг координатных осей в $\mathbb{R}^3$.

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2$$

Чтобы установить связь между квантовыми операторами углового момента и теорией представлений SO(3), рассмотрим регулярное представление $R$ группы SO(3) в $\mathscr{H} = L^2\left(\mathbb{R}^3, d^3\boldsymbol{x}\right)$, определенное формулой

$$(R(g)\psi)(\boldsymbol{x}) = \psi\left(g^{-1}\boldsymbol{x}\right), \quad g \in \mathrm{SO}(3), \psi \in \mathscr{H}$$

$$R\left(e^{u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3}\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}(u_1M_1+u_2M_2+u_3M_3)}$$

Все неприводимые унитарные представления $R_l$ группы Ли SO(3) конечномерны и параметризуются неотрицательными целыми числами $l \geqslant 0$. Соответствующее неприводимое представление $\rho_l = dR_l$ алгебры Ли so(3) в $2l{+}1$-мерном комплексном векторном пространстве $V_l$ можно явно описать с помощью эрмитовых операторов $T_j = i\rho_l\left(X_j\right)$, $j = 1,2,3$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[T_1, T_2] = iT_3, \quad [T_3, T_1] = iT_2, \quad [T_2, T_3] = iT_1.$$

В векторном пространстве $V_l$ есть ортонормированный базис $\{e_{lm}\}_{m=-l}^{m=l}$:

$$\begin{aligned}
\left(T_1 - iT_2\right)e_{lm} &= -\sqrt{(l+m)(l-m+1)}e_{lm-1},\\
\left(T_1 + iT_2\right)e_{lm} &= -\sqrt{(l-m)(l+m+1)}e_{lm+1},\\
T_3e_{lm} &= me_{lm}.
\end{aligned}$$

В частности, $\left(T_1 + iT_2\right)e_{ll} = 0$, так что $V_l$ - модуль со старшим весом. Представление $\rho_l$ неприводимо, и по лемме Шура (?????)

$$\boldsymbol{T}^2 = l(l+1)I_l$$

$I_l$ - тождественный оператор в $V_l$. Это можно также прямо проверить, построив $\boldsymbol{T}^2$.

### 2.2.3 On Poincare group

### 2.2.4 On $SU(3)$

#### Main formulas

Переход к 8-параметрической группе SU(3) можно сделать непосредственно от 3параметрической группы SU(2), заменив 2-мерные унитарные унимодулярные матрицы U на 3мерные, а к соответствуюшей алгебре - заменив матрицы Паули $\sigma_{\mathrm{k}}, \mathrm{k} = 1,2,3$ на матрицы ГеллМанна $\lambda_\alpha, \alpha = 1, \ldots, 8$:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j\right] = i f_{ijk} \frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{k}},$$

$\mathrm{f}_{123} = 1, \mathrm{f}_{147} = 1/2, \mathrm{f}_{156} = -1/2, \mathrm{f}_{246} = 1/2, \mathrm{f}_{257} = 1/2, \mathrm{f}_{346} = 1/2, \mathrm{f}_{367} = -1/2, \mathrm{f}_{458} = \sqrt{3}/2, \mathrm{f}_{678} = \sqrt{3}/2$

**О применениях в физике частиц (!??!??!)**

(хз, напишу потом, важное указание.)

### 2.2.5 On $U(n)$ and $SU(n)$

We denote a typical member of $SU(n)$ by $U_0$, where

$$U_0 = e^{iH_0} \quad \mathrm{tr}\,(H_0) = 0 \quad \det\,(U_0) = 1$$

## 2.3 Typical applications of group theory

### 2.3.1 On goup theory for quantum mechanics (???)

(maybe I'll enlarge this section later)

**On methods for Klebsh-Gordan coefficients and summation of moments** (?? уже было, посмотрим)

# Part II
# Fundamentals of Group Theory

## 3 Дискретная теория групп

### 3.1 Представления конечных групп

много своих оперделений и теорем, и вообще я не знаком с этой теорией сейчас.

просто на этом на самом деле приходится еще как засесть.

так как нам знакомы операторы линейные и мы умеем с ними работать, а в группах имеются разные структуру, зададимся вопросом, нельзя ли групповую структуру перенести на язык операторов и ими описывать структуру группы.

так приходим к представлениям.

**Определение 3.1.** *представление - отображение группы $G$ в группу линейных операторов на некотором линейном пространстве $V$. причем выполнены такие же свойства как у гомеоморфизмы. (заставляет задуматься, почему имено такое?) (выписать) поэтому говорят, что представление - гомеоморфизм в группу линейных операторов.*

так как линейный оператор взаимно однозначен с квадратной матрицей (кстати, почему?), то мы в качестве представления сопоставляем каждому элементу группы - матрицу $n \times n$.

таким образом, используя представления, мы изучаем группу через сопоставленные ей матрицы.

(дальше нужно к герштейну идти)

приходим к подпредставлению.

и к приводимым - не приводимым.

и рассматриваются инвариантные подпространства.

#### 3.1.1 Ассоциативная алгебра

хз, это одна из последних глав винберга, я до этого не доходил еще.

#### 3.1.2 характеры

и тут тоже л.7 берштейна, у меня никакой структуры нет.

## 4 Теория групп по Вавилову

### 4.1 Группы

#### 4.1.1 Определение группы

#### 4.1.2 Первые примеры абелевых групп

#### 4.1.3 Первые примеры неабелевых групп

Предшествующие примеры дают совершенно превратное представление о том, что такое группа - группы, фигурирующие во всех этих примерах, абелевы. В действительности, группа гораздо больше похожа не на множество чисел, а на множество взаимно однозначных преобразований чего-то, сохраняющих, быть может, какую-то дополнительную структуру.

Следующий пример архетипичен, как мы вскоре увидим, каждая группа есть множество преобразований.

- Симметрическая группа. Пусть $G$ - множество всех взаимно однозначных отображений множества $X$ на себя. Тогда $G$ является группой относительно композиции, называемой симметрической группой множества $X$ и обозначаемой $S_X$ или $S(X)$ ('symmetric group'). В самом деле, как мы знаем, композиция отображений ассоциативна; композиция двух биекция снова является биекцией; тождественное отображение является биекцией и служит нейтральным элементом композиции и, наконец, любая биекция обратима, причем обратное отображение также является биекцией. В §7 мы подробно рассмотрим этот пример в случае, когда $X$ конечно. Заметим, что в случае $|X| \geq 3$ эта группа некоммутативна. В частности, при $n = 3$ получаем группу треугольника $S_3$ порядка 6 - самую маленькую неабелеву группу.

- Группы преобразований. Специализируя этот пример, т.е. рассматривая не все биекции $X$ на себя, а только те, которые сохраняют имеющуюся на $X$ структуру (например, алгебраическую, геометрическую, топологическую, или какую-то их комбинацию), можно получить множество новых примеров групп. Эти примеры рассмотрены в §7.

- Группа кватернионов. Рассмотрим группу $Q$, состоящую из 8 элементов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$; причем $+1 = 1$ действительно действует как единица группы, знаки подчиняются обычному правилу (т.е., например, $(-i)(-k) = ik$), квадраты всех отличных от $\pm 1$ элементов равны $-1$, а попарно различные $i, j, k$ умножаются как орты $\mathbb{R}^3$ относительно векторного умножения: $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i, ki = -ik = j$. Так определенное умножение ассоциативно (можно проверить это и непосредственно, но вскоре мы узнаем гораздо более красивое доказательство, использующее матричные представления), а все элементы обратимы, например, $i^{-1} = -i$ и, соответственно, $(-i)^{-1} = i$. Группа $Q$ обычно называется группой кватернионов ('quaternion group', 'Quaternionengruppe'), хотя правильнее называть ее группой кватернионных единиц. Эта группа была использована Гамильтоном в 1842 году при построении тела кватернионов $\mathbb{H}$.

- Полная линейная группа. Пусть $K$ - поле, например, $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Тогда множество

$$\mathrm{GL}(n, K) = \{g \in M(n, K) \mid \det(g) \neq 0\}$$

всех невырожденных матриц порядка $n$ является группой относительно умножения, называемой полной линейной группой степени $n$ над $K$. Обозначение $\mathrm{GL}(n, K)$ является сокращением английского General Linear group. В §9 мы рассмотрим эту группу и некоторые связанные с ней группы в частном случае $n = 2$. Много дальнейших примеров матричных групп встретится нам в Главе III, а также во втором и третьем семестрах.

- Группа Мебиуса. Рассмотрим группу дробно-линейных преобразований сферы Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ('расширенной комплексной плоскости'). Она состоит из всех преобразований вида: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$. Ясно, что композиция двух дробно-линейных преобразований имева является дробоо-линейным преобразованием, а обратное преобразование группой Мебиуса [32] (или группой конформных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$). Различные связанные с ней группы, ее варианты и обобщения играют громадную роль во многих разделах анализа, теории чисел и геометрии. Задача. Преобразование $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, где $a, b, c, d$ такие же, как выше, называется антиконформным. Докажите, что конформные и антиконформные преобразования образуют группу. Некоторые авторы называют группой Мебиуса именно эту группу.

- Группа $ax+b$. Пусть $K$ - некоторое поле, например, $K = \mathbb{Q}$ или $K = \mathbb{R}$. Определим на множестве $K^* \times K$ умножение, полагая $(a, b)(c, d) = (ac, ad+b)$. Это умножение превращает $K^* \times K$ в группу (проверьте!), которую (алгебраические) геометры называют группой $ax + b$. В этой группе $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1}b)$. В случае $K = \mathbb{R}$ это в точности группа аффинных преобразований прямой.

- Аффинная группа. Предыдущий пример легко обобщить на случай произвольной размерности. А именно, пусть, как и выше, $K$ - некоторое поле. Рассмотрим пары $(g, u)$, где $g \in \mathrm{GL}(n, K)$ - обратимая матрица, а $u \in K^n-$ столбец высоты $n$. Определим на множестве $\mathrm{GL}(n, K) \times K^n$ умножение, полагая $(g, u)(h, v) = (gh, gv + u)$. Получающаяся так группа называется аффинной группой степени $n$ над $K$ и обозначается $\mathrm{Aff}(n, K)$. Аффинное преобразование $(g, u)$ действует на пространстве $V = K^n$ по следующей формуле $(g, u)v = gv{+}u$ - проверьте, что это на самом деле действие; иными словами, что выполняется тождество внешней ассоциативности $((g, u)(h, v))w = (g, u)((h, v)w)$. Физики, химики и кристаллографы вместо $(g, u)$ обычно пишут $\{g \mid u\}$ и называют $\{g \mid u\}$ символом Зейтца [33]. При этом матрица $g$ называется линейной частью (Linearanteil) преобразования $\{g \mid u\}$, а вектор $u$ - его трансляционной частью (Translationsanteil).

- Группа Гейзенберга. Пусть снова $K$ - некоторое поле, ${}^nK$ множество строк длины $n$, а $K^n$ множество столбцов высоты $n$. Определим на множестве ${}^nK \times K^n \times K$ умножение формулой $(u, v, a)(x, y, b) = (u + x, v + y, a + b + uy)$. Это умножение превращает ${}^nK \times K^n \times K$ в группу (проверьте!), называемую группой Гейзенберга [34], которая естественно возникает при рассмотрении коммутационных соотношений в квантовой теории. - Группа Рубика. Пусть теперь $\Gamma$ - группа внутренних вращений кубика Рубика. В Главе X мы сможем описать строение этой группы (для этого необходимо знание еще одной важнейшей теоретико-групповой конструкции сплетения). Из этого описания, в частности, будет вытекать, что порядок группы Рубика равен

$$\frac{1}{2} 2^{11} 12! 3^7 8! = 43252003274489856000,$$

что является совсем небольшим числом по стандартам современной теории конечных групп. М.Э.Ларсен [35,36] вычислил порядок группы внутренних вращений игрушки, известной как месть Рубика (Rubik's revenge), представляющей собой куб $4 \times 4 \times 4$. Этот порядок равен

$$\frac{3^7 8! 24!^2}{24^7} = 7401196841564901869874093974498574336000000000.$$

Автор оставляет читателю в качестве несложного упражнения по теории групп провести аналогичное вычисление для куба $5 \times 5 \times 5$.

### 4.1.4 Простейшие конструкции над группами

### 4.1.5 Группы симметрий

### 4.1.6 Конечные группы симметрий сферы

### 4.1.7 De divina proportione: икосианы, {3, 3, 5} и 5, 3, 3, $W(H_4)$

### 4.1.8 Группы автоморфизмов

### 4.1.9 Группы матриц

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые группы матриц степени $n = 2$. В дальнейшем в книгах III, IV и IIbis мы вернемся ко многим из этих примеров в более общем контексте.
1. Группа GL $(2, K)$. Пусть $K$ - некоторое поле, например, $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Введем определитель матрицы $x \in M(2, K)$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Как мы узнаем в книге IV, определитель является гомоморфизмом, т. е. для любых двух матриц $\det(xy) = \det(x)\det(y)$. Упражнение. Убедитесь в этом непосредственно для

$n = 2$. Проверьте, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- Тем самым, полная линейная группа степени 2 над $K$ может быть определена как

$$\mathrm{GL}(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Это определение обобщается на матрицы над коммутативными кольцами, однако в этом случае условия $\det(x) \neq 0$ недостаточно, нужно требовать, чтобы $\det(x)$ был обратимым элементом кольца $R$. Для произвольных колец с 1 группа $\mathrm{GL}(n, R)$ вообще не может быть охарактеризована в терминах определителя и определяется непосредственно как группа обратимых элементов матричного кольца $M(n, R)$.

- Специальная линейная группа состоит из всех матриц с определителем 1. Таким образом,

$$\mathrm{SL}(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

В случае $K = \mathbb{R}$ группа $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ состоит из линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентированный объем.

- Часто приходится рассматривать группу преобразований $\mathbb{R}^n$, сохраняющих объем, но меняюших ориентацию:

$$\mathrm{SL}^{\pm}(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = \pm 1 \right\}.$$

2. Некоторые важнейшие подгруппы. Вот еще несколько примеров матричных групп (проверьте, что в каждом из этих примеров произведение двух матриц указанного вида, и обратная к такой матрице снова имеют такой же вид!). - Группа диагональных матриц

$$D(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K^* \right\}.$$

- Аффинная группа

$$\mathrm{Aff}(1, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K^*, b \in K \right\}.$$

Убедитесь, что эта группа изоморфна группе $ax + b$, построенной в §1. - Группа верхних треугольных матриц

$$B(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K^*, b \in K \right\}.$$

- Группа нижних треугольных матриц

$$B^-(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K^*, c \in K \right\}.$$

### 4.1.10 Группы движений

### 4.1.11 Группы в алгебре

### 4.1.12 Группы в топологии

### 4.1.13 Квазигруппы и латинские квадраты

## 4.2 Подгруппы и смежные классы

### 4.2.1 Подгруппы

### 4.2.2 Централизаторы и нормализаторы

### 4.2.3 Подгруппа, порожденная подмножеством

### 4.2.4 Решетка подгрупп

### 4.2.5 Циклические группы и их подгруппы

### 4.2.6 Системы образующих

### 4.2.7 Смежные классы

### 4.2.8 Индекс, системы представителей

### 4.2.9 Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа. Если $H \leq G, mo|G| = |H||G : H|$.

Доказательство. Как всегда, правильный способ доказательства равенства двух кардинальных чисел состоит в установлении биекции между некоторыми множествами. В самом деле, пусть $X$ - любая система представителей левых смежных классов. Тогда $|G : H| = |X|$. Мы утверждаем, что отображение $H \times X \longrightarrow G, (h, x) \mapsto hx$ представляет собой биекцию. В самом деле, $G = \cup Hx, x \in X$, так что это отображение сюръективно. С другой стороны, если для некоторых $h, g \in H, x, y \in X$ имеет место равенство $hx = gy$, то $Hx = Hy$, и, значит, по определению трансверсали $x = y$. Сокращая равенство $hx = gx$ на $x$ справа, получаем $h = g$. Но это и значит, что $|G| = |H \times X| = |H||X| = |H||G : H|$.

Этот результат особенно важен для конечных групп, где из него вытекает важнейшее арифметическое ограничение на подгруппы.

Следствие 1. Пусть $G$ - конечная группа, $H \leq G$. Тогда порядок $G$ делится на порядок $H$.

Комментарий. Некоторые авторы называют теоремой Лагранжа именно это следствие, то же утверждение, которое мы называем теоремой Лагранжа, в этом случае называется теоремой об индексе (Indexsatz). Такая точка зрения имеет основание, так как сам Лагранж, конечно, явно формулировал именно это следствие [161], причем только для $G = S_n$. Для произвольных конечных групп теорему Лагранжа доказал Галуа. В частности, применяя это следствие к циклическим подгруппам, мы видим, что порядок $(g)$ любого элемента конечной группы делит порядок $|G|$ этой группы.

Следствие 2 (теорема Ферма). Пусть $G$ - конечная группа, $g \in$ G. Тоеда $g^{|G|} =$ е.

Мы будем использовать классический частный случай этой теоремы. Следствие 3. Если $x$ и р взаимно просты, то $p \mid x^{p-1} - 1$. 2. Контрпример Руффини. Пусть $m$ делитель порядка группы $G$. Имеет ли место "обращение теоремы Лагранжа", т. е., иными словами, верно ли, что в $G$ существует подгруппа $H$ порядка $m$? В 1799 году Паоло Руффини перечислил все подгруппы симметрической группы $S_5$.В частности, он показал, что в ней нет подгрупп порядков 15,30 и 40. Разумеется, Руффини формулировал этот результат в терминах индексов подгрупп, а не их порядков: не существует функций 5 переменных, которые при всевозможных перестановках этих переменных принимали бы ровно 8,4 или 3 значения.

Задача. Докажите, что у группы $A_4$ нет подгруппы порядка 6. Решение (T.-L.Shen, [338], стр.48). Если $H \leq A_4$ - подгруппа порядка 6, то она имеет индекс 2 в $A_4$ и, следовательно, $g^2 \in H$ для всех $g \in A_4$. Однако, если $g$ – 3-цикл, то $g = g^4 = (g^2)^2$. Таким образом, $H$ должна содержать по крайней мере 8 элементов. Задача. Докажите, что $A_4$ - единственная подгруппа порядка 12 в $S_4$.

Указание. Мы это уже где-то видели. Пусть $H \leq S_4, |H| = 12$. Тогда квадрат любого элемента из $S_4$ лежит в $H$. 3. Мультипликативность индекса. Теорема Лагранжа допускает следующее естественное обобщение, называемое общей теоремой об индексе (allgemeiner Indexsatz). Теорема. Если $F \leq H \leq G$, то $|G : F| = |G : H||H : F|$. Доказательство. План доказательства этой теоремы точно такой же, как в теореме Лагранжа. А именно, пусть $X$ - система представителей левых смежных классов $H$ по $F$, а $Y$ - система представителей левых смежных классов $G$ по $H$. Мы утверждаем, что $XY$ является системой представителей левых смежных классов $GF$, а отображение $X \times Y \longrightarrow XY, (x, y) \mapsto xy$, устанавливает биекцию прямого произведения множеств $X$ и $Y$ с их произведением по Минковскому. Тем самым,

$$|G : F| = |XY| = |X \times Y| = |X||Y| = |H : F||G : H|,$$

что и доказывает теорему. Проверим теперь высказанные в предыдущем абзаце утверждения. По условию $G = \bigcup Hy, y \in Y$, и $H = \bigcup Fx, x \in X$. Подставляя выражение для $H$ из второй формулы в первую и пользуясь ассоциативностью, получаем, что $G = \bigcup F(xy), (x, y) \in X \times Y$. Поэтому нам осталось лишь доказать, что если $Fx_1y_1 = Fx_2y_2$ для некоторых $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$, то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. В самом деле, пусть $Fx_1y_1 = Fx_2y_2$. Так как $x_1, x_2 \in X \subseteq H$, это означает, что $Hy_1 \cap Hy_2 \neq \varnothing$. По теореме пункта 2 тогда $Hy_1 = Hy_2$, и, значит, $y_1 = y_2 = y$ по определению трансверсали. Сокращая равенство $Fx_1y_1 = Fx_2y_2$ на $y$ справа, получаем $Fx_1 = Fx_2$, так что, снова по определению трансверсали, $x_1 = x_2$, что и требовалось доказать. Теорема Лагранжа получается как частный случай этой теоремы в случае $F = 1$.

### 4.2.10 Теорема Пуанкаре

1. Индекс пересечения. Сейчас мы выведем из мультипликативности индекса важное следствие. Разумеется $|G : F \cap H|$ здесь нужно понимать как $|G : (F \cap H)|$. Теорема. Если $F, H \leq G$, то $|G : F \cap H| \leq |G : F| \cdot |G : H|$. Это утверждение моментально вытекает из теоремы об индексе и следуюшей леммы. Лемма. Если $F, H \leq G$, то $|F : F \cap H| \leq |G : H|$. В самом деле, $|G : F \cap H| = |G : F||F : F \cap H| \leq |G : F||G : H|$. Таким образом, нам остается лишь доказать лемму. Доказательство леммы. Пусть $X$ - система представителей левых смежных классов $F$ по $F \cap H$. Нам достаточно показать, что для любых $x, y \in X$ из равенства $Hx = Hy$ вытекает $x = y$. В самом деле, пусть $Hx = Hy$. Это означает, что найдутся такие $h, g \in H$, что $hx = gy$, так что $xy^{-1} = h^{-1}g \in H$. Однако по самому определению $x, y \in X \subseteq F$, так что в действительности $xy^{-1} \in F \cap H$, и, окончательно, $x = y$. Для конечных групп мы будем десятки раз пользоваться этой теоремой в следующей форме.

Следствие. Если подаруппы $F, H \leq G$, таковы, что $|G : F|, |$ $G$: $H$ $| < \infty$, и $\gcd(|G : F|, |G : H|) = 1$, то i) $|G : F \cap H| = |G : F| \cdot |G : H|$, ii) если, кроме того, группа $G$ конечна, то $FH = G$. Доказательство. По теореме об индексе

$$|G : F \cap H| = |G : H||H : F \cap H| = |G : F||F : F \cap H|,$$

так что $|G : F \cap H|$ делится на $|G : H|$ и $|G : F|$. Но тогда в силу их взаимной простоты $|G : F \cap H|$ делится на их произведение и, значит, по крайней мере, $|G :$

$F \cap H| \geq |G : F| \cdot |G : H|$. Теперь ii) получается с использованием формулы произведения. 2. Теорема Пуанкаре. Сформулируем важнейшее следствие доказанного в предыдущем пункте неравенства, впервые отмеченное в 1887 году Анри Пуанкаре в связи с теорией автоморфных функций.

Теорема Пуанкаре. Если $H_1, ..., H_n$ - подаруппы группы $G$, имеющие в ней конечный индекс, то их пересечение $H_1 \cap ... \cap H_n$ тоже подеруппа конечного индекса 6 G.

Сам Пуанкаре формулировал эту теорему чуть иначе. Две подгруппы $F, H$ группы $G$ называются соизмеримыми, если их пересечение имеет в каждой из них конечный индекс $|F : F \cap H|, |H : F \cap H| < \infty$. Теперь мы можем сформулировать теорему Пуанкаре следующим образом.

Следствие 1. Любые две подеруппы, имеющие конечный индекс в группе $G$, соизмеримы. Отметим еще два полезных следствия теоремы Пуанкаре. Следствие 2. Отношение соизмеримости транзитивно. Доказательство. Пусть $A, B, C$ - три подгруппы в группе $G$, причем $A$ соизмерима с $B$, а $B$ соизмерима с $C$. В частности, $\mid B$: $A \cap B||B :, B \cap C \mid < \infty$. Из теоремы Пуанкаре вытекает, что

$$|B : A \cap B \cap C| = |B : (A \cap B) \cap (B \cap C)| < \infty.$$

Тогда тем более

$$|A \cap B : A \cap B \cap C|, |B \cap C : A \cap B \cap C| < \infty.$$

Теперь по теореме об индексе получаем, что

$$|A : A \cap B \cap C| = |A : A \cap B||A \cap B : A \cap B \cap C| < \infty,$$
$$|C : A \cap B \cap C| = |A : A \cap B\|A \cap B : A \cap B \cap C| < \infty,$$

так что уже подгруппа $A \cap B \cap C$ имеет конечный индекс как в $A$, так и в $C$. Тем более, то же верно для $A \cap C$. Так как рефлексивность и симметричность соизмеримости очевидны, отношение соизмеримости является отношением эквивалентности.

Пусть $F, H \leq G$ - две соизмеримые подгруппы. Положим $|F : H| =\mid F$: $F \cap H|/|H : F \cap H \mid$. По определению $|F : H| \in \mathbb{Q}_+$. Задача. Докажите, что - для любой подгруппы $K \leq F \cap H$ такой, что $|F \cap H : K| < \infty$ имеем $|F : H| = |F : K|/|H : K|$; - для любых трех попарно соизмеримых подгрупп $F, H, K$ имеем $|F : H| \mid H$: $K| = |F : K \mid$, в частности, $|F : H||H : F| = 1$; - для любого $g \in G$ имеем $|F : H| - |gFg^{-1} : gHg^{-1}|$.

Следствие 3. Любая подгруппа $H \leq G$ конечного индекса содержит нормальный делитель $F \leq G, F \leq H$, конечного индекса.

Доказательство. Пусть $|G : H| = n$ и $g_1, ..., g_n-$ трансверсаль к $H$ в $G$. Тогда все подгруппы $H^{g_i}$ имеют индекс $n$ в $G$. Тем самым, по теореме Пуанкаре подгруппа $F = H^{g_1} \cap ... \cap H^{g_n} \trianglelefteq G$ имеет там конечный индекс.

Для решения следующей задачи полезно понимать связь между классом сопряженности элемента и централизатором этого элемента. Задача. Пусть $H \trianglelefteq G-$ конечная нормальная подгруппа в $G$. Докажите, что тогда существует нормальная подгруппа $F \trianglelefteq G$ конечного индекса, поэлементно коммутируюшая с $H$. Решение. Возьмем элемент $h \in H$. Так как его сопряженный класс $h^G \leq H$ конечен, индекс $|G : C_G(h)|$ конечен. По теореме Пуанкаре подгруппа $\cap C_G(h)$, где пересечение берется по всем $h \in H$, также имеет конечный индекс в $G$. Эта подгруппа состоит из элементов, поэлементно коммутирующих с $H$. По следствию 3 любая подгруппа конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса.

### 4.2.11 Виртуальные группы

### 4.2.12 Двойные смежные классы

## 4.3 Нормальные делители и фактор-группы

### 4.3.1 Нормальные подгруппы

### 4.3.2 Не каждая подгруппа нормальна

### 4.3.3 Классы сопряженных элементов

### 4.3.4 Классы сопряженных элементов в конечных группах

### 4.3.5 Порождение нормальных подгрупп

### 4.3.6 Фактор-группы

### 4.3.7 Примеры нормальных подгрупп и фактор-групп в линейных группах

### 4.3.8 Группы гомологий дифференциальных групп

### 4.3.9 Расширения групп

### 4.3.10 Точечные группы, st instalment: сингонии и кристаллографические классы

В §? мы классифицировали все точечные группы, т.е. все конечные подгруппы $O(3,\mathbb{R})$ или, что то же самое, все конечные подгруппы в $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, с точностью до сопряженно*сти* в $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$. Как мы убедились, конечные подгруппы в $O(3,\mathbb{R})$, устроены чрезвычайно просто. Единственная реальная сложность при использовании этих групп состоит в несогласованност обозначений между различными книгами. Двумя наиболее часто используемыми системами обозначений точечных групп, являются система Шенфлиса и так называемая международная система (IUCr, система Германа-Могена). При этом геометры, химики и большинство физиков отдают предпочтение системе Шенфлиса, но кристаллографы и специалисты по физике твердого тела пользуются международной системой. Перечислим

элемент симметрии:
поворотная ось порядка $n$
зеркальная ось порядка $n$
вертикальное зеркало
горизонтальное зеркало
точка инверсии

Для того, чтобы облегчить задачу начинающему, во многих старых работах по геометрии и комбинаторной теории групп используется система, которую мы называем C & M (потому что наиболее известная книга, где она встречается, это [CM]).

| точечная группа: | Система Шенфлиса: | IUCr: | система C & M |
|---|---|---|---|
| $C_n$ | $C_n$ | $n$ | $[n]^+$ |
| $D_n$ | $D_n$ | $n22$ | $[2,n]^+$ |
| $T^+$ | $T$ | 23 | $[3,3]^+$ |
| $O^+$ | $O$ или $W$ | 432 | $[3,4]^+$ |
| $I^+$ | $Y$ | – | $[3,5]^+$ |
| $C_n \times C_2$ | $C_{nh}$ | $n/m$ | $[2,n^+]$ |
| $D_n \times C_2$ | $D_{nh}$ | $n/mmm$ | $[2,n]$ |
| $T^+ \times C_2$ | $T_h$ | $n$ | $[3^+,4]$ |
| $O$ | $O_h$ или $W_h$ | $m3m2/m$ | $[3,4]$ |
| $I$ | $Y_h$ | – | $[3,5]$ |
| $C_{2n}C_n$ | $S_{2n}$ | $\overline{2n}$ | – |
| $D_nC_n$ | $C_{nv}$ | $nmm$ | $[n]$ |
| $D_{2n}D_n$ | $D_{nd}$ | $\overline{2nm2}$ | $[2^+,2n]$ |
| $T$ | $T_d$ | $\overline{4}3m$ | $[3,3]$ |

Теперь мы будем интересоваться не всеми конечными подгруппами в $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, а только теми из них, которые оставляют на месте некоторую решетку $L = \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_n$ в $V$. Иными словами, это значит, что нас интересуют конечные подгруппы, сопряженные с некоторой подгруппой в $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$. Легко доказывается следующий результат:

Лемма. Группа, стабилизирующая некоторую решетку, может содержать только повороты порядков 1,2,3,4 и 6.

Назовем конечную подгруппу в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ кристаллографической точечной группой, если она сопряжена с некоторой подгруппой в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, или, что то же самое, если она содержит только поворотные оси порядков 1, 2, 3, 4 и 6. Классы сопряженности кристаллографически точечных групп в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ называются кристаллографическими классами (Kristallklasse). Ясно, что для $n = 2$ имеется ровно 10 кристаллографических классов [133], а именно, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$. Сейчас мы перечислим все 32 кристаллографических класса для $n = 3$. Как мы уже упоминали, впервые это было сделано Гесселем в 1830 году, но его работа в то время осталась незамеченной, так что этот результат передоказывали Аксель Вильгельмович Гадолин [134] (в 1869 году) и Леонард Зонке [135] (в 1879 году), а потом Федоров, Пьер Кюри, Миннигероде, Шенфлис, Вульф,..

Группа $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, являющаяся полной группой симметрии некоторой решетки, называется подгруппой Браве. Всякая максимальная конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ является подгруппой Браве, но обратное, вообще говоря, не имеет места. Наименьшая подгруппа Браве, содержащая кристаллографическую точечную группу $G$, рассматриваемая точностью до сопряженности в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, называется голоэдрией (или, если быть совсем точным, геометрической голоэдрией) группы $G$. Говорят, что две группы $H$ и $G$ относятся к одной и той же сингонии (alias, кристаллографической системе, Kristallsystem), если их голоэдрии совпадают. Кристаллографический класс, обладающий максимальной возможной симметрией (т.е. класс, совпадающий со своей собственной голоэдрией) называется голоэдрическим классом.

При $n = 3$ существует 7 сингоний, которые имеют традиционные кристаллографические названия [136]: триклинная (кристаллы, не имеющие ни осей, ни плоскостей симметрии), моноклинная (кристаллы, имеющие одну двойную ось, или одну плоскость симметрии), ромбическая (кристаллы, имеющие три взаимно перпендикулярные двойные оси, иногда ромбическая сингония называется еще орторомбической), тригональная (кристаллы, имеющие одну тройную ось), тетрагональная (кристаллы, имеющие одну четверную ось - т.е. ось 4-го порядка), гексагональная (кристаллы, имеющие одну ось 6-го порядка) и кубическая (кристаллы, имеющие 4 тройные и 3 четверные оси).

Теорема. При $n = 3$ имеется ровно 32 кристаллографических класса, которые следующим образом разбиваются по сингониям:

| сингония: | голоэдрия: | кристаллографический класс: |
|---|---|---|
| триклинная | $C_i$ | $C_1 \times C_2, C_1$ |
| моноклинная | $C_{2h}$ | $C_2 \times C_2, C_2, C_2C_1$ |
| ромбическая | $D_{2h}$ | $D_2 \times C_2, D_2, D_2C_2$ |
| тригональная | $D_{3d}$ | $D_3 \times C_2, D_3, D_3C_3, C_3 \times C_2, C_3$ |
| тетрагональная | $D_{4h}$ | $D_4 \times C_2, D_4, D_4C_4, D_4D_2, C_4 \times C_2, C_4, C_4C_2$ |
| гексагональная | $D_{6h}$ | $D_6 \times C_2, D_6, D_6C_6, D_6D_3, C_6 \times C_2, C_6, C_6C_3$ |
| кубическая | $O_h$ | $O, O^+, T, T^+ \times C_2, T$ |

Каждый из 32-х кристаллографических классов тоже имеет традиционное кристаллографическое название [137]. Скажем, класс $C_1$ называется моноэдрическим, класс $C_1 \times C_2-$ пинакоидальным, класс $C_2-$ сфеноидальным, класс $C_2C_2$ - доматическим, класс $C_2 \times C_2-$ призматическим и т.д. вплоть до тритетраэдрического класса $T^+$, дидокаэдрического класса $T^+ \times C_2$, триоктаэдрического класса $O^+$, гексатетраэдрического класса $T$ и, наконец, гексаоктаэдрического класса $O$.

### 4.3.11 Точечные группы, nd instalment: типы Браве и арифметические классы

Мы продолжаем интересоваться кристаллографическими точечными группами, т.е. конечными подгруппами в $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$. Однако теперь нас интересуют классы сопряженности кристаллографических точечных групп не в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, а в самой группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Эти классы называются арифметическими классами. Имеется ровно 13 класса при $n = 2$ и 72 класса при $n = 3$ и 710 классов при $n = 4$.

Аналогом сингонии для арифметических классов является понятие типа Браве. Наименьшая подгруппа Браве, содержащая кристаллографическую точечную группу $G$, рассматриваемая с точностью до сопряженности в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, называется арифметической голоэдрией группы $G$. Говорят, что две группы $H$ и $G$ относятся к одному и тому же типу Браве, если их арифметические голоэдрии совпадают. При $n = 2$ имеется 5 типов Браве, при $n = 3-$ 14, а при $n = 4-$ уже 64.

### 4.3.12 n-мерная кристаллография, теоремы Бибербаха

Подгруппа $G \leq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ группы движений эвклидова пространства $V = \mathbb{R}^n$ называется кристаллографической, если она дискретна, а фактор по ней $V/G$ компактен. Подгруппа $G \leq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ группы движений эвклидова пространства является федоровской, если, кроме того, в $G$ существует $n$-мерная подгруппа трансляций.

Когда Федоров принес свою работу Чебышеву, тот даже не стал ее смотреть и сказал буквально следующее: 'это не может сегодня интересовать математиков'. Ирония истории состоит в том, что после того, как была обнаружена связь теории решеток с алгебраической

теорией чисел и теорией квадратичных форм изучение федоровских групп их аналогиов и обобщений стало одним из основных направлений для детей, внуков, правнуков и праправнуков Чебышева: Коркина, Золотарева, Маркова, Делоне, Фаддеева, Венкова, ..

Первая теорема Бибербаха [138]. Все кристаллографические группы являются федоровскими. Точнее, все параллельные переносы, содержащиеся в кристаллографической группе $G$ образуют нормальную подәруппу $H \trianglelefteq G$ конечного индекса в $G$.

Вторая теорема Бибербаха. Две кристаллографические аруппы в том и только том случае изоморфны как абстрактные аруппы, когда они либо сопряжены в $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$, либо энантиоморфны.

Вопрос о конечности числа классов кристаллографических групп в $n$-мерном эвклидовом пространстве составлял первую половину 18-й проблемы Гильберта [139] и представлялся самому Гильберту весьма трудным. Однако Бибербах положительно решил его уже в 1910-1912 годах.

Третья теорема Бибербаха. Для каждого n существует конечное число классов изоморфизма кристаллографических подгрупп в группе $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

На русском языке доказательство теорем Бибербаха и Жордана можно найти, например, в книге [Wo], с.122-128.

В 1948 году Ганс Цассенхауз показал, как классифицировать $n$-мерные федоровские группы, зная конечные подгруппы в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$. Все федоровские группы в размерности 4 были фактически классифицированы в 1971 году в работах Вондрачека, Нойбюзера и Бюлова.

### 4.3.13 Федоровские группы, 2st instalment: одномерная кристаллография

### 4.3.14 Федоровские группы, 2nd instalment: двумерная кристаллография

### 4.3.15 Федоровские группы, 3rd instalment: трехмерная кристаллография

(Вавилов не написал, видно не до этого абсолютно всем)

## 4.4 Гомоморфизмы групп

### 4.4.1 Гомоморизмы

### 4.4.2 Первые примеры гомоморизмов

### 4.4.3 Гомоморфизмы, связанные со структурой группы

### 4.4.4 Образ и ядро гомоморфизма

### 4.4.5 Теорема о гомоморфизме

Сейчас мы покажем, что факторизация отображений согласована со структурой группы. Следующая теорема является одним из наиболее типичных и характерных результатов общей алгебры.

Теорема о гомоморфизме. Пусть $\varphi : H \longrightarrow G$-гомоморфизм групп. Тогда

$$\mathrm{Im}(\varphi) \cong H/\operatorname{Ker}(\varphi).$$

Напоминание. Вспомним, что с каждым отображением $\varphi : H \longrightarrow G$ связано ядро $N(\varphi)$ отображения $\varphi$, т.е. разбиение $H$ на слои отображения $\varphi$. Эти слои являются классами эквивалентности $\sim = \sim_\varphi$ определяемой условием $x \sim y \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$.

Покажем, прежде всего, что в случае, когда $\varphi$ является гомоморфизмом, слои являются в точности смежными классами по $\operatorname{Ker}(\varphi)$. Кстати, это объясняет, почему мы называем ядром гомоморфизма слой содержащий 1: в отличие от произвольных отображений для гомоморфизмов задание одного слоя однозначно определяет все остальные классы. В самом деле, если $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $\varphi\left(xy^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = 1$ так что $xy^{-1} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Но это и значит, что $x\operatorname{Ker}(\varphi) = y\operatorname{Ker}(\varphi)$( вспомним, что ядро является нормальным делителем, так что безразлично, говорить о левых смежных классах или о правых). Обратно, если $x\operatorname{Ker}(\varphi) = y\operatorname{Ker}(\varphi)$, то $y = xh$ для некоторого $h \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, так что $\varphi(y) = \varphi(xh) = \varphi(x)\varphi(h) = \varphi(x)$.

Доказательство. Мы можем применить к этой ситуации теорему описанное выше соображение и заключить, что сопоставление $\bar{x} = x + \operatorname{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(x)$ корректно определяет инъективное отображение $\bar{\varphi} : H/\operatorname{Ker}(\varphi) \longrightarrow G$, образ которого совпадает с $\operatorname{Im}(\varphi)$. Для завершения доказательства теоремы нам остается лишь проверить, что $\bar{\varphi}$ гомоморфизм. В самом деле, пользуясь определением произведения классов, определением $\bar{\varphi}$ и тем, что $\varphi$ - гомоморфизм, получаем

$$\bar{\varphi}(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \bar{\varphi}(\overline{xy}) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \bar{\varphi}(\bar{x})\bar{\varphi}(\bar{y}),$$

что и завершает доказательство. Следствие. Если $\varphi : H \longrightarrow G$ эпиморфизм, то $G \cong H/\operatorname{Ker}(\varphi)$. Теорема. Пусть $f : G \longrightarrow G'$ - гомоморфизм групп, а нормальные подгруппы $H \trianglelefteq G, H' \trianglelefteq G'$ таковыl, что $f(H) \leq H'$. Тогда $f$ индуцирует гомоморфизм $\bar{f} : G/H \longrightarrow G'/H', \bar{f}(xH) = f(x)H'$.

Доказательство. Прежде всего, необходимо проверить корректность этого определения. Для этого заметим, что если $xH = yH$, то по условию на $f$ имеем $f(x)^{-1}f(y) = f\left(x^{-1}y\right) \in H'$, так что $f(x)H' = f(y)H'$. Осталось убедиться в том, что $\bar{f}$ гомоморфизм. В самом деле,

$$\bar{f}(xH \cdot yH) = \bar{f}(xyH) = f(xy)H' = f(x)f(y)H' =$$
$$\left(f(x)H'\right)\left(f(y)H'\right) = \bar{f}(xH)\bar{f}(yH).$$

Следствие. Если в условиях теоремы $H = f^{-1}\left(H'\right)$, то гомоморфизм $\bar{f}$: $G/H \longrightarrow G'/H'$ инъективен. Если, кроме того, $f$ сюръективен, то $\bar{f}$ изоморфизм.

Фактически некоторые примеры применения этой теоремы содержались в §3, когда мы обсуждали примеры фактор-групп. Вот еще один типичный пример: $\operatorname{Inn}(G) = G/C(G)$.

### 4.4.6 Теоремы об изоморфизме

В этом параграфе мы докажем несколько важнейших следствий теоремы о гомоморфизме, иллюстрирующих ее использование.

1. Noetherscher Isomorphiesatz. Сейчас мы докажем важнейший результат, обычно называемый в учебной литературе первой теоремой об изоморфизме, впрочем, профессионалы чаще ссылаются на него как теорему Нетер об изоморфизме [165].

Прежде всего заметим, что произведение по Минковскому $FH$ произвольной подгруппы $F \leq G$ на нормальную подгруппу $H \trianglelefteq G$ является подгруппой в $G$. Этот факт уже обсуждался в §?, приведем другое доказательство. А именно, пусть $\pi : G \longrightarrow G/H$ - каноническая проекция. Тогда $FH = \pi^{-1}(\pi(F)) = \cup fH$, $f \in F$. Как образ, так и прообраз подгруппы при гомоморфизме являются подгруппами.

Теорема (Noetherscher Isomorphiesatz). Пусть $G$ - еруппа, $H \trianglelefteq G-$ нормальная подеруппа в $G, F \leq G$ - произвольная подеруппа. Тогда $H \cap F \trianglelefteq F$ и имеет место изоморфизм

$$F/F \cap H = FH/H.$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : F \longrightarrow FH \longrightarrow FH/H, f \mapsto fH$, являющийся композицией вложения и канонической проекции. Так как любой правый смежный класс $FH$ по $H$ представляется в виде $(fh)H = fH$ для некоторых $f \in F, h \in H$, то $\varphi$ сюръективен. Ясно, что $f \in F$ в том и только том случае лежит в $\operatorname{Ker}(\varphi)$, когда $f \in H$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\varphi) = F \cap H$ и для завершения доказательства осталось лишь сослаться на теорему о гомоморфизме. Задача. Пусть $f : G \longrightarrow G'$ - гомоморфизм групп, $H \leq G$. Покажите, что

$$|G : H| = |\operatorname{Ker}(f) : \operatorname{Ker}(f \mid H)| \cdot |\operatorname{Im}(f) : \operatorname{Im}(f \mid H)|.$$

Указание. Если группа $G$ конечна, то это просто теорема о гомоморфизме + теорема Лагранжа. В общем случае придется рассмотреть группу $F = H\operatorname{Ker}(f)$ и воспользоваться теоремой Нетер. 2. Вторая теорема об изоморфизме. Пусть $F \trianglelefteq G$. Из теоремы о гомоморфизме вытекает, что сопоставление $H \mapsto H/F$ определяет изоморфизм решетки

$L(G, F)$ промежуточных подгрупп $H, F \leq H \leq G$, с решеткой $L(G/F, 1)$ всех подгрупп в фактор-группе $G/F$. Оказывается, при этом соответствии нормальным подгруппам отвечают нормальные подгруппы. Лемма. Пусть $F \leq H \leq G$, причем $F \trianglelefteq G$. Тогда $H \trianglelefteq G$ в том и только том случае, когда $H/F \trianglelefteq G/F$.

Доказательство. Возьмем произвольные элементы $gF \in G/F$ и $hF \in H/F$, где $g \in G$ и $h \in F$, соответственно. Так как $F$ нормальна в $G$, то

$$(gF)^{-1}(hF)(gF) = \left(g^{-1}hg\right) F$$

Ясно, что этот класс в том и только том случае попадает в $H/F$, когда $g^{-1}hg \in H$. Следуюшая теорема иногда называется теоремой фон Дика [166]. Теорема. Пусть $F, H \trianglelefteq G$ - нормальные подеруппы в $G$, причем $F \leq H$. Тогда имеет место канонический изоморфизм

$$(G/F)/(H/F) \cong G/H$$

Доказательство. Обозначим через $\pi : G \longrightarrow G/H$ каноническую проекцию. Так как $F \leq H = \operatorname{Ker}(\pi)$, то $\pi$ индукцирует гомоморфизм $\pi' : G/F \longrightarrow G/H$, $gF \mapsto gH$. Ядро этого гомоморфизма равно $\operatorname{Ker}(\pi)/F = H/F$. Осталось применить терему о гомоморфизме. 3. Третья теорема об изоморфизме. Следующий результат описывает некоторые фактор-группы прямого произведения. Теорема. Пусть $H_1 \trianglelefteq G_1 u H_2 \trianglelefteq G_2$. Тогда $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ и имеет место канонический изоморфизм

$$G_1 \times G_2/H_1 \times H_2 \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2.$$

Доказательство. То, что $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ - очевидно (операции в прямом произведении покомпонентные!) Зададим теперь отображение $\pi = \pi_1 \times \pi_2$: $G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1/H_1 \times G_2/H_2$, где $\pi_i : G_i \longrightarrow G_i/H_i$ - каноническая проекция на фактор-группу. Иными словами, мы полагаем $\pi(g_1, g_2) = (g_1H_1, g_2H_2)$. Прямое произведение гомоморфизмов является гомоморфизмом, причем, так как $g_1$ и $g_2$ независимы, $\pi$ сюръективен. Вычислим $\operatorname{Ker}(\pi)$. Равенство $\pi(g_1, g_2) = (1, 1)$, означает в точности, что $g_1 \in H_1$ и $g_2 \in H_2$. Тем самым, $\operatorname{Ker}(\pi) = H_1 \times H_2$. Осталось сослаться на теорему о гомоморфизме.

### 4.4.7 Другие темы

**Характеристические подгруппы**

**Характеристически простые группы**

**Группы автоморфизмов**

**Строение групп автоморфизмов**

**Матричные гомоморфизмы**

**Эндоморфизмы аддитивной группы поля**

## 4.5 Симметрическая группа

### 4.5.1 Перестановки, симметрическая группа

### 4.5.2 Циклы

### 4.5.3 Разложение перестановки на независимые циклы

### 4.5.4 Классы сопряженности симметрической группы

### 4.5.5 Порождение Sn фундаментальными транспозициями

### 4.5.6 Знак перестановки, st instalment: декремент

### 4.5.7 Знак перестановки, nd instalment: транспозиции

### 4.5.8 Знак перестановки, rd instalment: инверсии

### 4.5.9 Знакопеременная группа

### 4.5.10 Транзитивность и кратная транзитивность

### 4.5.11 Простота знакопеременной группы

### 4.5.12 Mathematica перестановок

В системе Mathematica имплементировано несколько стандартных функций, связанных с перестановками. Кроме того, много дополнительных функций подгружаются командами «DiscreteMath'Permutations' «DiscreteMath'Combinatorica' Перечислим некоторые наиболее полезные функции. Permutations $[l]$ генерирует все перестановки списка $l$. Например, Permutations [Range [n] ] генерирует все элементы симметрической группы $S_n$ степени $n$ в лексикографическом порядке, в сокращенной записи.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Reverse - перестановка | $1$ | $2$ | ... | $n-1$ |
| RotateLeft, RotateRight | $n$ | $n-1$ | ... | $2$ |

ски сдвигает элементы списка $l$ на одну позицию вправо, а RotateLeft $[l]-$ на одну позицию влево. Аналогично, RotateRight $[l, n]$ циклически сдвигает элементы списка $l$ на $n$ позиций вправо, а RotateLeft $[l, n]$ - на $n$ позиций влево.

Permute $[x, y]$ переставляет список $x$ в соответствии с перестановкой $y$. При этом получается сокращенная запись произведения $xy$, так что фактически это

и есть способ вычисления произведения перестановок. Совершенно удивительно, что эта функция не имплементирована в ядре. Однако поскольку в ядре есть умножение матриц, то нетрудно определить и умножение перестановок, для этого достаточно построить гомоморфизм $S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(n, K)$ pi $[x\_]$ := Table[If$[i == x[[j]], 1, 0], \{i$, Length $[x]\}, \{j$, Length $[x]\}]$ Этот гомоморфизм устанавливает биекцию между $S_n$ и множеством всех матриц перестановки, причем обратное отображение определяется посредством ip [x_]:=Flatten [Table [Position [Transpose $[x][[i]], 1], \{i$, Length $[x]\}]]$ Теперь мы можем вычислить произведение $xy$ перестановок $x$ и $y$ при помощи переноса структуры ip $[\mathrm{pi}[x] \cdot \mathrm{pi}[y]]$. InversePermutation

$[x]$– перестановка обратная к $x$. тест PermutationGroupQ $[g]$ возвращает True, если список перестановок $g$ образует группу.

RandomPermutation[n] порождает (псевдо)случайную перестановку длины $n$. тест PermutationQ [x] возвращает True, если $x$ является перестановкой, и False в противном случае.

MinimumChangePermutations $[x]$ порождает все перестановки списка $x$ таким образом, что любые два соседних элемента отличаются на одну транспозицию. RankPermutation $[x]$ показывает позицию перестановки $x \in S_n$ в лексикографическом списке всех перестановок $n$ символов (заметим, что нумерация начинается с 1, так что, например, RankPermutation $[\{4,3,2,1\}] = 23$.

NextPermutation $[x]$ порождает перестановку, следующую за $x$ в лексикографическом порядке. тест DerangementQ $[x]$ возвращает True, если перестановка является беспорядком. Напомним, что перестановка $\pi \in S_n$ называется беспорядком, если у нее нет неподвижных точек, т. е. если $\pi(i) \neq i$ для всех $i \in \underline{n}$.

Number0fDerangements $[n]$ вычисляет количество $D_n$ беспорядков на $n$ символах. Приведем для примера несколько первых значений $D_n : D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9,\ D_5 = 44, D_6 = 265, D_7 = 1854, D_8 = 14833, D_9 = 133496, D_{10} = 1334961$

## 4.6 Действия групп

### 4.6.1 Действие группы на множестве

В этом параграфе мы приведем основные определения, связанные с действиями групп. Специфика групповых действий состоит в том, что элементы группы осуществляют обратимые преобразования множества $X$. 1. Действие группы. Начнем с основного определения. Определение. Пусть $G$ - группа, а $X$ - множество. Говорят, ито $G$ действует на $X$ слева, и пишут $G \curvearrowright X$, если задано отображение $\mathrm{act} : G \times X \longrightarrow X, \quad (g,x) \mapsto gx$, такое, что выполняются свойства 1) внешняя ассоциативность: $(gh)x = g(hx)$ дяя всех $g, h \in G$, $x \in X$; 2) унитальность: $ex = x$. При этом $X$ называется $G$-множеством или, точнее, левым $G$ множеством.

Про элемент $gx$ говорят, что он получается из $x$ применением элемента $g$ или что он является образом $x$ под действием $g$. Иногда для действия группы $G$ на $X$ используются и другие системы записи, например, образ $x$ под действием $g$ обозначается через $g + x, g \circ x, g \cdot x,\ g \bullet x, g(x), {}^g x$ или как нибудь еще, но чаще всего мы будем использовать обычную мультипликативную запись.

Заметим, что для каждого элемента группы отображение $\theta_g : X \longrightarrow X, x \mapsto gx$, осуществляет биекиию множества $X$ на себя. Из аксиом 1) и 2) сразу вытекает, что 3) $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$ для любого $g \in G$. В самом деле, $\theta_g \theta_{g^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} = \theta_1 = \mathrm{id}_X$. Аналогично определяется правое действие $X \times G \longrightarrow X$ группы $G$ на множестве $X$, которое обозначается $X \curvearrowleft G$. При этом внешняя ассоциативность приобретает вид $x(gh) = (xg)h$. Таким образом, различие состоит в том, что при левом действии первым действует второй множитель, а при правом действии первым действует первый множитель. Результат применения $g$ к $x$ при правом действии часто записывается еще как $x^g$, при этом внешняя ассоциативность выражается обычной формулой $x^{gh} = (x^g)^h$.

Для любой группы $G$ и любого множества $X$ отображение $G \times X \longrightarrow X, (g,x) \mapsto x$ определяет действие $G$ на $X$, которое называется тривиальным.

2. Связь правых и левых действий. Обратимость всех элементов позволяет установить более простую связь правых и левых действий в случае групп, чем это имело место в случае моноидов. Дело в том, что отображение inv: $G \longrightarrow G, g \mapsto g^{-1}$, является антиавтоморфизмом группы $G$ на себя, т. е. для любых элементов $f, g \in G$ выполняется равенство $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$. Тем самым любое правое $G$-множество $X$ естественно превращается

в левое $G$-множество посредством формулы $gx = xg^{-1}$. Аналогично, каждое левое $G$-множество превращается в правое $G$-множество посредством формулы $xg = g^{-1}x$. Таким образом, в дальнейшем мы можем не теряя общности говорить лишь о левых $G$-множествах имея в виду, что при помощи этой конструкции все определения и результаты автоматически переносятся и на правые действия. 3. Действия групп с дополнительной структурой. В случае, когда $G$ и $X$ несут одну и ту же дополнительную структуру, обычно требуют, чтобы действие было морфизмом этой структуры. Вот несколько типичных примеров. - Непрерывное действие: $G$ - топологическая группа, $X$ — топологическое пространство, act - непрерывное отображение.

### 4.6.2 Действие группы трансляциями и сопряжениями

### 4.6.3 Теорема Кэли

В этом параграфе мы покажем, что каждая группа может рассматриваться как подгруппа группы перестановок. 1. Теорема Кэли. В главе 1 мы рассматривали таблицу Кэли конечной квазигруппы $G$. В 1854 году Кэли заметил, что все строки этой таблицы получаются перестановкой $G$, и, таким образом, $G$ отобраЖается в некоторое подмножество групшы $S_G$. В действительности, для квазигруппы все строки таблицы Кэли различны, так что $G$ вк.ладываеmcя в $S_G$. Если $G$ не является группой, это вложение, конечно, не может быть гомоморфизмом, т. е. не сохраняет произведения. Однако, как доказал Жордан, если $G$ - группа, это действительно так, причем не обязательно даже предполагать, что $G$ конечна. Сопоставим каждому элементу $g \in G$ левую трансляцию $L_g : G \longrightarrow G$, заданную левыщ умножением на $g, L_g(x) = gx$ (исторически от немецкого linke, но сейчас, конечно, все думают, что от английского left). Теорема Кэли. Отображение $L : G \longrightarrow S_G, g \mapsto L_g$, является мономорфизмом $G$ в симметрическую группу $S_G$.

Доказательство. Покажем, прежде всего, что $L_g \in S_G$. В самом деле, $L_g$ - инъекция: $L_g(x) = L_g(y)$ означает, что $gx = gy$ и, значит, сокращая на $g$ слева, $x = y$. С другой стороны, $L_g$ сюръекция, так как, для любого $y \in G$ уравнение $gx = L_g(x) = y$ имеет в $G$ решение $x = g^{-1}y$.

Проверим теперь, что, $L : g \mapsto L_g$ осуществляет инъекиию $G$ в $S_G \cong S_n$. В самом деле, пусть $L_h = L_g$ для каких-то $h, g \in G$. Тогда, в частности, $h = L_h(e) = L_g(e) = g$.

Нам остается лишь убедиться в том, что это отображение является гомоморфизмом. То, что это действительно так, демонстрируется следующей выкладкой:

$$L_{gh}(x) = (gh)(x) = g(hx) = L_g(L_h(x)) = (L_g \circ L_h)(x),$$

где $g, h, x \in G$. Заметим, что именно здесь использована ассоциативность умножения в $G$. 2. Левое регулярное представление. Построенное в теореме Кэли отображение $L : G \longrightarrow S_G, g \mapsto L_g$, называется левым регулярным представлением группы $G$. Вообще пермутационным представлением (alias, представлением перестановками) группы $G$ называется любой гомоморфизм $G$ в симметрическую группу $S_X$ перестановок некоторого множества $X$. Пермутационное представление $\pi : G \longrightarrow S_X$ называется точным, если ого является мономорфизмом, т. е. если $\mathrm{Ker}(\pi) = 1$. В этой терминологии теорема Кэли утверждает, что $g \mapsto L_g$ задает точное пермутационное представление $G$.

Следствие. Любая конечная группа $G$ порядка $n$ изоморфно вкладывается в симметрическую еруппу $S_n$.

Задача. Покажите, что группа кватернионов не вкладывается в группу $S_7$, постройте ее вложение в группу $S_8$. Замечание. Многие авторы называют сдвигами то, что мы называем трансляциями, однако мы, по принятой в теории алгебраических групп и групп Ли традиции, тщательно различаем трансляции и сдвиги. А именно, трансляция (translation) - это преобразование самой группы, а сдвиг (shift) - это индуцированное трансляцией преобразование функций на группе. Ясно, что это совсем не одно и то же. Куда сдвигается график функции $x \mapsto f(x)$, если заменить $x$ на $x+1$? 3. Правое регулярное представление. Возникает искушение определить правое регулярное представление группы $G$, сопоставив каждому $g \in G$ соответствующую правую трансляцию $R_g : G \longrightarrow G$, заданную правым умножением на $g$, $R_g(x) = xg$ (от немецкого recht, но при большом желании можно считать, что от английского right).

Точно так же, как в теореме Кэли мы можем доказать, что отображение $R : G \longrightarrow S_G, g \mapsto R_g$, будет вложением. Но будет ли оно гомоморфизмом, т. е. верно, ли, что $R_{gh} = R_g R_h$? Посмотрим, чему равно $R_{gh}(x)$:

$$R_{gh}(x) = x(gh) = (xg)h = R_h(xg) = R_h\left(R_g(x)\right) = \left(R_h \circ R_g\right)(x).$$

Таким образом, $R_{gh} = R_h R_g$, т. е. $R$ является антигомоморфизмом (см.?, пример 2.2). Но ведь мы знаем, как изготовить из антигомоморфизма гомоморфизм: каждая группа антиизоморфна самой себе при помощи inv: $g \mapsto g^{-1}$, а композиция двух антигомоморфизмов является гомоморфизмом. Это подсказывает следуюшее определение. Назовем правым регулярным представлением группы $G$ мономорфизм $R^{-} : G \longrightarrow S_G, g \mapsto R_{g^{-1}}$ 4. Конечные группы с циклическими силовскими 2-подгруппами. Вот одно из типичных применений теоремы Кэли.

Задача. Пусть $G$ - конечная группа порядка $n = 2^l m$, где $l \geq 1, m \geq 3$ нечетно. Предположим, что в $G$ есть элемент порядка $2^l$. Тогда $G$ не может быть простой. Решение. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : G \longrightarrow S_G \longrightarrow \{\pm 1\}$, где $\varphi = \operatorname{sgn} \circ L$. Положим $H = \operatorname{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G$. Пусть $o(x) = 2^l$. Тогда $L_x \in S_G$ состоит из $m$ циклов длины $2^l$ и, поэтому, $\operatorname{sgn}\left(L_x\right) = -1$. Тем самым, $x \notin H$ и, значит, $H \neq G$. С другой стороны, все элементы нечетного порядка лежат в $H$, так что $H \neq 1$.

Знаменитая теорема Томпсона-Фейта утверждает, что порядок неабелевой конечной простой группы делится на 2.

Задача. Докажите, что порядок неабелевой конечной простой группы делится на 4.

### 4.6.4 Орбиты и стабилизаторы

### 4.6.5 Главные однородные пространства

### 4.6.6 Действие на смежных классах

### 4.6.7 Классификация однородных пространств

### 4.6.8 Основные конструкции над G-множествами

### 4.6.9 Произведение, копроизведение и расслоенное произведение

### 4.6.10 Действие на отображениях G-множеств

### 4.6.11 Каскады и потоки

## 4.7 Линейные группы

### 4.7.1 Полная линейная группа

1. Полная линейная группа. Пусть $R$ - ассоциативное, но, вообще говоря, не обязательно коммутативное кольцо с 1. Мультипликативная группа полного матричного кольца $M(n, R)^*$ обозначается через $G = \mathrm{GL}(n, R)$ и называется полной линейной группой степени $n$ над $R$. Обозначение GL как раз и является сокращением от английского General Lienar Group. Таким образом, по определению группа $\mathrm{GL}(n, R)$ состоит из всех двусторонне обратимых квадратных матриц степени $n$ с коэффициентами из $R$. Как и в главах, посвященных

линейной алгебре, мы обозначаем матрицу, обратную к матрице $g = (g_{ij}) \in G$, через $g^{-1} = \left(g'_{ij}\right)$.

В наиболее важном частном случае, когда кольцо $R$ коммутативно, определен мультипликативный гомоморфизм $\det : M(n,R) \longrightarrow R$. При этом матрица $y \in M(n,R)$ в том и только том случае обрагима, когда ее оиределитель $\det(x)$ обратим в кольце $R$. В этом случае полную линейную группу можно определить следующим образом:

$$\mathrm{GL}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \det(x) \in R^*\}\,.$$

В частности, над коммутативным кольцом односторонняя обратимость матриц совпадает с двусторонней обратимостью. 2. Полная линейная группа модуля. Вообще, пусть $V$ - любой $R$-модуль. Группа $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{End}(V)^*$ (двусторонне) обратимых линейных операторов на $V$ называется полной линейной группой модуля $V$. С этой точки зрения группу $\mathrm{GL}(n,R)$ становится изоморфной группе автоморфизмов свободного модуля ранга $n$, после того, как мы выберем в этом модуле базис.

А именно, $\mathrm{GL}(n,R)$ можно отождествить с группой $\mathrm{GL}\left(R^n\right)$ автоморфизмов свободного правого $R$-модуля $R^n$. А именно, $g \in \mathrm{GL}(n,R)$ действует на $R^n$ умножением слева: $u \mapsto gu$. При этом обратимость $g$ гарантирует, что умножение на $g$ является автоморфизмом, а не просто эндоморфизмом модуля $R^n$. Точно так же группа $\mathrm{GL}(n,R)$ действует справа на свободном левом $R$ модуле ${}^nR$ как группа автоморфизмов $\mathrm{GL}\left({}^nR\right)$ посредством $v \mapsto vg$ для $g \in \mathrm{GL}(n,R)$ и $v \in^n R$. 3. Проективная линейная группа. Пусть $A = \mathrm{Cent}(R)$ центр кольца $R$. Тогда матрица $\lambda e, \lambda \in A^*$ называется скалярной. Задача. Докажите, что центр $C(n,R)$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,R)$ совпадает с множеством всех скалярных преобразований. Указание. Для этого полезно знать достаточный запас обратимых матриц. Вернитесь к этой задаче после чтения §?

Класс матрицы $g \in \mathrm{GL}(n,R)$ в фактор-группе $\mathrm{GL}(n,R)/C(n,R)$ группы $\mathrm{GL}(n,R)$ по центру обычно обозначается через $[g]$. При этом в случае, когда в обозначении $g$ использованы круглые скобки, в обозначении для $[g]$ они опускаются, так что вместо $[(g_{ij})]$ пишут просто $[g_{ij}]$. По определению, $[hg] = [h][g]$, $[g^{-1}] = [g]^{-1}$ и $[\lambda g] = [g]$ для любого $\lambda \in \mathrm{Cent}(R)$. В случае, когда $R = K$ поле, фактор-группа $\mathrm{GL}(n,K)/C(n,K)$ обозначается $\mathrm{PGL}(n,K)$ и называется проективной специальной линейной группой степени $n$ над $K$. Обозначение PGL является сокращением от Projective General Linear Group. Предостережение. Некоторые наивные писатели, не знакомые с первыми группами когомологий, беззастенчиво называют $\mathrm{GL}(n,R)/C(n,R)$ проективной линейной группой и в случае колец, но это безнадежно неверно!!! В действительности, даже для коммутативных колец группа $\mathrm{PGL}(n,R)$, которую естественно понимать, как группу автоморфизмов проективного пространства, почти всегда заметно больше, чем просто фактор-группа $\mathrm{GL}(n,R)$ по центру!

Дело в том, что эпиморфизмы алгебраических групп как правило не сюръективны на точках. 4. Специальная линейная группа. Пусть снова $R$ коммутативно. В этом случае в группе $\mathrm{GL}(n,R)$ можно выделить в терминах определителя исключительно важную группу

$$\mathrm{SL}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \det(x) = 1\}$$

состоящую из всех матриц с определителем 1. Группа $\mathrm{SL}(n,R)$ называется специальной линейной группой степени $n$ над $R$. Обозначение SL является сокращением от Special Linear Group. В случае, когда $R = \mathbb{R}$ - поле вещественных чисел, группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ естественно истолковывается геометрически как подгруппа в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, состоящая из преобразований, сохраняющих ориентированный объем.

Кроме $\mathrm{SL}(n,R)$ встречается, хотя и заметно реже, другие группы, определенные в терминах значений определителя, скажем

$$\mathrm{SL}^{\pm}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \det(x) = \pm 1\}.$$

В случае $R = \mathbb{R}$ группа группа $\mathrm{SL}^{\pm}(n, \mathbb{R})$ истолковывается как подгруппа в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, состоящая из преобразований, сохраняющих объем (но не ориентацию!). В этом случае часто рассматривается и группа

$$\mathrm{GL}^{+}(n, \mathbb{R}) = \{x \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(x) > 0\}$$

линейных преобразований, сохраняющих ориентацию (но не объем!) 5. Проективная специальная линейная группа. Центр $\mathrm{SC}(n, R)$ специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n, R)$ совпадает с пересечением $C(n, R) \cap \mathrm{SL}(n, R)$. Он состоит из всех скалярных матриц $\lambda$, где $\lambda \in R$ таково, что $\lambda^n = 1$. В случае, когда $R = K$ - поле, фактор-группа $\mathrm{SL}(n, K)/\mathrm{SC}(n, K)$ часто обозначается через $\mathrm{PSL}(n, K)$ и называется проективной специальной линейной группой. Обозначение PSL является сокращением от Projective Special Linear Group.

### 4.7.2 Линейные группы над конечным полем

1. Линейные группы над конечными полями. Если $q = p^m, p \in \mathbb{P}$, примарное число, то существует единственное конечное поле $K = \mathbb{F}_q$ из $q$ элементов. Мы используем обычные сокращения $\mathrm{GL}(n, K) = \mathrm{GL}(n, q), C(n, K) = C(n, q), \mathrm{PGL}(n, K) = \mathrm{PGL}(n, q), \mathrm{SL}(n, K) = \mathrm{SL}(n, q)$, etc.

Теорема. Порядок полной линейной группыl $\mathrm{GL}(n, q)$ степени $n$ над полем $\mathbb{F}_q$ равен

$$|\mathrm{GL}(n, q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots \left(q^n - q^{n-1}\right).$$

Доказательство. В книге V мы обсуждаем основной принцип линейной алгебры над полем, состоящий в том, что любой подмодуль свободного модуля дополняем, так что, в частности, любой линейно независимый список векторов может быть дополнен до базиса. $\star$ В частности, над полем любой ненулевой столбец может быть первым столбцом обратимой матрицы. Над конечным полем $\mathbb{F}_1$ имеется $q^n - 1$ возможностей выбрать ненулевой столбец высоты $n$. $\star$ Аналогично, вторым столбцом обратимой матрицы над полем может быть любой столбец, линейно независимый от первого, т.е. любой столбец не лежащий на фиксированной прямой. Таким образом, независимо от выбора первого столбца над $\mathbb{F}_q$ имеется $q^n - q$ возможностей выбрать второй столбец. $\star$ Точно так же, третьим столбцом обратимой матрицы над полем может быть любой столбец, линейно независимый от первого и второго, т.е. любой столбец не лежащий на фиксированной плоскости. Таким образом, независимо от выбора первого и второго столбцов над $\mathbb{F}_q$ имеется $q^n - q^2$ возможностей выбрать третий столбец.

### 4.7.3 Некоторые важнейшие подгруппы

### 4.7.4 Блочные подгруппы

### 4.7.5 Элементарные трансвекции

### 4.7.6 Псевдоотражения

### 4.7.7 Матрицы перестановки

### 4.7.8 Трансвекции

### 4.7.9 Соотношения между элементарными трансвекциями

### 4.7.10 Корневые полупростые элементы

### 4.7.11 Гомоморфизм редукции

В этом параграфе мы связываем с каждым идеалом $R$ нормальные подгруппы в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n, R)$. 1. Главная конгруэнц-подгруппа. Пусть $I$ - идеал кольца $R$.

Рассмотрим каноническую проекцию $\rho_I : R \longrightarrow R/I$, посылающую элемент $\lambda \in R$ в элемент $\bar\lambda = \lambda(\mathrm{mod} I) = \lambda + I$. Эта проекция определяет гомоморфизм редукции

$$\rho_I : \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R/I),$$

(редукция по модулю $I$) такой, что образ матрицы $x = (x_{ij})$ равен $\bar x = (\bar x_{ij})$. Стоит упомянуть, что $\rho_I$ не обязательно сюрьективен (скажем, $\rho_I : R^* \longrightarrow (R/I)^*$ вообще говоря, не сюръективен). Ядро гомоморфизма редукции $\rho_I$ называется главной конгруэнц-подгруппой в $\mathrm{GL}(n, R)$ уровня $I$ и обозначается $\mathrm{GL}(n, R, I)$. По определению

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R/I).$$

Две матрицы $x = (x_{ij})$ и $y = (y_{ij})$ называются сравнимыми по модулю $I$, если $x_{ij} \equiv y_{ij}($ mod $I)$ для всех $1 \le i, j \le n$. Как и для скаляров, сравнимость по модулю $I$ обозначается через $x \equiv y(\mathrm{mod} I)$. Главная конгруэнц-подгруппа $\mathrm{GL}(n, R, I)$ состоит из всех матриц $x \in GL(n, R)$ сравнимых с $e$ по модулю $I$:

$$\mathrm{GL}(n, R, I) = \{x \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x \equiv e \pmod I\}.$$

Так как ядро любого гомоморфизма является нормальной подгруппой, это показывает, что в группе $\mathrm{GL}(n, R)$ может быть довольно много нормальных подгрупп, по крайней мере, если в кольце $R$ много идеалов. 2. Полная конгруэнц-подгруппа. С каждым идеалом связана еще одна естественная нормальная подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$. А именно, рассмотрим центр $C(n, R/I)$ группы $\mathrm{GL}(n, R/I)$. Тогда полный прообраз группы $C(n, R/I)$ относительно гомоморфизма редукции $\rho_I$ обозначается через $C(n, R, I)$ и называется полной конгруэнц-подгруппой уровня $I$:

$$C(n, R, I) = \rho_I^{-1}(C(n, R/I))$$

Так как $C(n, R)$ является ядром канонической проекции $\pi_R : \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n, R)$, это значит, что $C(n, R, I)$ является ядром $\pi_{R/I} \circ \rho_I$:

$$1 \longrightarrow C(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n, R/I).$$

Тем самым, $C(n, R, I)$ тоже является нормальной подгруппой в $\mathrm{GL}(n, R)$. Комментарий. Обратите внимание, что в одном важном аспекте использование обозначения $C(n, R, I)$ отличается от $\mathrm{GL}(n, R, I)$ ! А именно, группа $C(n, R)$ совпадает с $C(n, R, 0)$, а не с $C(n, R, R)$, как можно было бы ожидать, зная, что $\mathrm{GL}(n, R, R)$ совпадает с $\mathrm{GL}(n, R)$. Мы надеемся, что это не вызовет никаких серьезных недоразумений. Хайман Басс обозначал группу $C(n, R, I)$ через $\mathrm{GL}'(n, R, I)$, в то время как в книге Хана и О'Миры используется обозначение $\mathrm{GL}^{\sim}(n, R, I)$. Однако обозначение $C(n, R, I)$ является общепринятым в русской литературе и кажется нам более суггестивным.

По определению

$$C(n, R, I) = \{x \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x \equiv \lambda e \pmod I, \bar\lambda \in \mathrm{Cent}(R/I)\},$$

так что

$$[\mathrm{GL}(n, R), C(n, R, I)] \le \mathrm{GL}(n, R, I).$$

3. Конгруэнц-подгруппы в специальных линейных группах. Если кольцо $R$ коммутативно, то можно ввести аналоги главной и полной конгруэнцподгрупп в специальной линейной группе $\mathrm{SL}(n, R)$. А именно, главная конгруэнц-подгруппа $\mathrm{SL}(n, R, I)$ это ядро гомоморфизма резукции

$$\rho_I : \mathrm{SL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{SL}(n, R/I).$$

Полная конгруэнц-подгруппа $\mathrm{SC}(n, R, I)$ это прообраз центра $\mathrm{SC}(n, R/I)$ группы $\mathrm{SL}(n, R/I)$ по отношению к $\rho_I$. Таким образом,

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{SL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{SL}(n, R/I),$$
$$1 \longrightarrow \mathrm{SC}(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{SL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{PSL}(n, R/I).$$

Замечание. Стоит заметить, что главные конгруэнц-подгруппы не зависят от выбора ассоциативного (коммутативного в случае специальной линейной группы) кольца с 1, содержащего $I$ в качестве идеала. Таким образом, в принципе, мы могли бы использовать обозначения $\mathrm{GL}(n, I)$ и $\mathrm{SL}(n, I)$ вместо $\mathrm{GL}(n, R, I)$ и $\mathrm{SL}(n, R, I)$, и рассматривать эти группы как полную и специальную линейные группы над кольцом $I$ без 1, соответственно. В то же время полные конгруэнцподгруппы, $C(n, R, I)$ и $\mathrm{SC}(n, R, I)$, вообще говоря, зависят от выбора кольца $R$!

#### 4.7.12 Элементарная группа

#### 4.7.13 Нормальность элементарной группы

#### 4.7.14 О других темах (???)

**Группа Стейнберга??**

**Конгруэнц-подгруппы**

**Относительная элементарная группа**

**Нормальные подгруппы GL(n,R)**

**Теорема Жордана-Диксона**

**Определитель Дьедонне**

**Автоморфизмы GL(n,R)**

**Разложение Брюа**

**Разложение Гаусса**

**Параболические подгруппы**

**Неприводимые линейные группы**

**Примитивные линейные группы**

**Классические группы???**

**Теорема Клиффорда**

**Теорема Маклафлина**

### 4.8 Абелевы группы

#### 4.8.1 Свободные абелевы группы

#### 4.8.2 Подгруппа кручения

#### 4.8.3 Примарное разложение

#### 4.8.4 Разложение на циклические слагаемые

#### 4.8.5 Подгруппы свободной группы

### 4.9 Конечные группы

#### 4.9.1 Центр p-группы, существование элемента порядка p, нормализаторное условие

#### 4.9.2 Принцип инволюций

#### 4.9.3 Количество подгрупп p-группы

#### 4.9.4 Решения уравнения x n = e, теоремы Коши и Фробениуса

#### 4.9.5 Теоремы Силова

#### 4.9.6 Доказательство Виландта

#### 4.9.7 Нормализатор силовской подгруппы

#### 4.9.8 Силовские подгруппы в Sn

#### 4.9.9 Группы порядка pq, метациклические группы

#### 4.9.10 Группы порядка $p^3$, экстраспециальные группы



#### 4.9.11 Теорема Диксона

придающих точный количественный смысл этому утверждению. Теорема Шура. *Если $|G : C(G)| < \infty$, то $|[G,G]| < \infty$.* Доказательство Орнштейна. ([Ro], стр.114) Пусть $g_1, ..., g_n$ - представители смежных классов $G$ по $C(G)$. Представим элементы $x, y \in G$, в виде $x = g_i a, y = g_j b$, где $a, b \in C(G)$. Тогда $[x,y] = [g_i a, g_j b] = [g_i, g_j]$. Тем самым, всего имеется не более $n^2$ коммутаторов.

Ясно, что каждый элемент $g \in [G,G]$ можно записать в виде $h_1, ...h_m$, где $h_i$ коммутатор. Среди всех записей $g$ в таком виде выберем такую, для которой $m$ наименьшее возможное. Сейчас мы покажем, что $m < n^3$. Прежде всего, индукцией по $r$ убедимся в том, что для любых $x, y \in G$ имеем $[x,y]^r = (xy)^r \left(x^{-1}y^{-1}\right)^r u$, где $u$ - произведение $r-1$ коммутатора. Для $r = 1$ это очевидно. Для индукционного шага заметим, что $xy = yx\,[x^{-1}, y^{-1}]$. Таким образом, для $r > 1$ имеем

$$
\begin{gathered}
[x,y]^{r+1} = xyx^{-1}y^{-1}[x,y]^r = xy\left(x^{-1}y^{-1}\right)(xy)^r\left(x^{-1}y^{-1}\right)^r u = \\
xy(xy)^r\left(x^{-1}y^{-1}\right)^r\left(x^{-1}y^{-1}\right)hu = (xy)^{r+1}\left(x^{-1}y^{-1}\right)^{r+1} hu
\end{gathered}
$$

для некоторого коммутатора $h$, что и утверждалось. Вспомним, что из $|G : C(G)| = n$ следует, что $z^n \in C(G)$ для любого $z \in G$. Тем самым, из $yx = x^{-1}(xy)x$, вытекает, что $(yx)^n = x^{-1}(xy)^n x = (xy)^n$. Но это значит, что $\left(x^{-1}y^{-1}\right)^n = \left((yx)^{-1}\right)^n = \left((yx)^n\right)^{-1} = \left((xy)^n\right)^{-1}$. В силу доказанного в предыдущем абзаце, $[x,y]^n$ является произведением $n-1$ коммутаторов. С другой стороны, $xyx = \left(xyx^{-1}\right)x^2$, так что два вхождения $x$ можно собрать вместе, заменив $y$ на его сопряженный. Выразим $g \in [G,G]$ как произведение $g = h_1...h_m$ коммутаторов. Если $m \geq n^3$, то какой-то из коммутаторов появляется $> n$ раз. По последнему замечанию все такие множители можно собрать вместе (при этом остальные клммутаторы заменяются на сопряженные к ним, по прежнему являющиеся коммутаторами), что не меняет количества коммутаторов. Но тогда $m$ можно понизить, противоречие. Это значит, что $m < n^3$.

Задача. Докажите, что если $\mathrm{Aut}(G)$ конечна, то $[G,G]$ конечен.

### 4.10.10 Нильпотентность и разрешимость: синопсис

### 4.10.11 Нильпотентные группы

Определим нижний центральный ряд группы $G$ по индукции следующим образом. Положим $C_0(G) = G$ и $C_n(G) = [C_{n-1}(G), G]$ для $n \geq 1$. Таким образом,

$$
\begin{aligned}
C_1(G) &= [G,G], \\
C_2(G) &= [[G,G],G], \\
C_3(G) &= [[[G,G],G],G],
\end{aligned}
$$

и т.д. Из определения сразу вытекает, что

$$G = C_0(G) \geq C_1(G) \geq C_2(G) \geq ... \geq C_n(G) \geq ...,$$

Задача. Убедитесь, что этот ряд действительно является центральным рядом в обычном смысле, т.е. фактор-группа $C_{n-1}(G)/C_n(G)$ лежит в центре группы $G/C_n(G)$ или, что то же самое, $[G, C_{n-1}(G)] \leq C_n(G)$.

Нижний центральный ряд (lower central ceries) известен также под алиасом убывающий центральный ряд (descending central ceries). Очень часто эпитет нижний/убываюший здесь опускается и говорят просто о центральном ряде par excellence. При этом совсем оголтелые групповики-фетишисты [210] советского периода настолько обстоятельно знали по-английски, что истолковывали central ceries как ряд централов. Вскоре мы определим верхний центральный ряд $C^n(G)$ (возрастающий центральный ряд, ряд гиперцентров) и тогда станет ясно, почему построенный выше ряд естественно называть нижним [211].

Задача. Докажите, что члены нижнего центрального ряда являются вполне характеристическими подгруппами. Задача. Докажите, что

$$[C_m(G), C_n(G)] \leq C_{m+n}(G).$$

Указание. Воспользуйтесь леммой о трех подгруппах.

### 4.10.12 Конечные нильпотентные группы

### 4.10.13 Другие темы

**Подгруппа Фиттинга**

**Разрешимые группы**

**Теорема Колчина–Мальцева**

**Сверхразрешимые группы**

**Локально нильпотентные группы**

**Локально разрешимые группы**

**Теорема Жордана-Гельдера**

## 4.11 Основные конструкции над группами

### 4.11.1 Внутренние прямые произведения

### 4.11.2 Почти прямое произведение

В теории бесконечных групп (особенно групп с дополнительными структурами, таких как топологические группы, алгебраические группы, группы Ли), условие $H \cap F = 1$ в определении прямого произведения обычно оказывается слишком ограничительным. Для того, чтобы применять топологические соображения как правило достаточно того, чтобы любой элемент из $G$ имел конечное число представлений вида $g = hf, h \in H, f \in F$, а не единственное такое представление. Это оправдывает следующее определение.

Определение. Говорят, что группа $G$ является почти прямым произведением своих подгрупп $H, F \leq G$, если выполняются три следующих условия: D1. $\langle H, F\rangle = G$ D2. $|H \cap F| < \infty$; D3. $H, F \trianglelefteq G$. Примеры. $G = \mathrm{GL}(n, K), H = \mathrm{SL}(n, K), F = C(G) = K^*e-$ группа скалярных матриц. Тогда все эти условия выполнены, $H \cap F \cong \mu_n-$ группа корней $n$-й степени из 1 в поле $K$.

### 4.11.3 Центральное произведения

В этом параграфе мы обсудим еще одно ослабление условия 2 в определении прямого произведения. Центральное произведение. Определение. Говорят, что группа $G$ является центральным произведением своих подэрупп $H, F \leq G$, если выполняются три следующих условия: D1. $\langle H, F\rangle = G$; D2. $[H, F] = 1$; D3. $H, F \trianglelefteq G$. В этом случае обычно пишут $G = H \circ F$. Как мы знаем, $[H, F] \subseteq H \cap F$, так что если $H \cap F = 1$, то $[H, F] = 1$. Тем самым, прямое произведение является частным случаем центрального. Легко видеть, что из условия $[H, F] = 1$ вытекает, что $H \cap F = C(H) \cap C(F) \leq C(G)$. В случае $G = H \circ F$ каждый элемент представляется в виде произведения $g = hf$, но такое представление не единственно, для любого $x \in H \cap F$ его можно переписать в виде $g = (hx)(x^{-1}f)$. Тензорное произведение линейных групп. Например, $\mathrm{SO}(4, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \circ \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \circ \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$

### 4.11.4 Ограниченные прямые произведения

### 4.11.5 Слабые прямые произведения/прямые суммы

### 4.11.6 Подпрямые произведения

### 4.11.7 Полупрямые произведения

Конструкция прямого произведения весьма ограничительна, так как в ней подгруппы $H$ и $F$ поэлементно коммутируют. Имеется много важных примеров групп, которые очень похожи на прямые произведения по отношению к двум своим подгруппам, но в которых эти подгруппы не коммутируют. Рассмотрим, например, группу собственных движений эвклидова пространства. Каждое такое движение представляется в виде композиции трансляции и вращения, причем единственным образом. Однако трансляции и вращения не коммутируют. Сейчас мы детально обсудим это обобщение, которое является одной из важнейших конструкций позволяющих собирать неабелевы группы из абелевых кусков. 1. Полупрямое произведение. Следующее определение почти совпадает с определением внутреннего прямого произведения. Однако условие 3 здесь ослаблено так, что симметрия между $H$ и $F$ нарушается и их функции в этой конструкции различны.

Определение. Говорят, что группа $G$ является полупрямым произведением своих нормального делителя $H$ и дополнительной подгруппы $F \leq G$, если выполняются три следующих условия: SD1. $\langle H, F\rangle = G$; SD2. $H \cap F = 1$; SD3. $H \trianglelefteq G$. Чтобы обозначить, что $G$ является полупрямым произведением нормального делителя $H$ и дополнительной подгруппы $F$, используется специальный знак threetimes, существующий в двух модификациях: $\lambda$ и \ rightthreetimes. А именно, в этом случае пишут $G = H \lambda F$ или $G = F < H$. Обратите внимание, что ножка всегда направлена в сторону нормального делителя.

По-прежнему, из условий 1 и 3 следует, что $\langle H, F\rangle = HF = FH$, так что любой элемент $g \in G$ представляется как в виде $g = hf$, так и в виде $g = h'f'$, причем из условия 2 вытекает, что как то, так и другое представления единственны. Однако, в отличие от прямого произведения, мы можем гарантировать лишь, что $[H, F] \leq H$, так что коммутативности здесь, вообще говоря, нет. Тем не менее, множитель из $F$ определен однозначно. В самом деле, ясно, что $g = hf = f\left(f^{-1} hf\right) = fh^f$, тем самым $f' = f, h' = h^f$.

#### 4.11.8 Аффинная группа

#### 4.11.9 Другое

**Расширения групп, расщепляющиеся и нерасщепляющиеся расширения**

**Теорема Шура–Цассенхауза**

**Факторизации и скрюченное произведение**

**Индуктивный предел**

**Проективный предел**

**Сплетение**

**Сплетение и экспоненцирование групп перестановок**

**Сплетение групп перестановок и линейных групп**

**Тензорное произведение абелевых групп**

**Тензорное произведение линейных групп**

### 4.12 Свободные конструкции

#### 4.12.1 Определение свободных групп

#### 4.12.2 Конструкция свободного моноида

#### 4.12.3 Конструкция свободной группы

#### 4.12.4 Классы сопряженных элементов свободной группы

#### 4.12.5 Теорема Нильсена–Шрайера

#### 4.12.6 Коммутант свободной группы

#### 4.12.7 Теорема Нильсена об автоморфизмах свободной группы

#### 4.12.8 Свободное произведение групп

#### 4.12.9 Примеры свободных произведений

#### 4.12.10 Геометрические модели свободных произведений

#### 4.12.11 Свободные подгруппы группы монотонных отображений

#### 4.12.12 Амальгамированное произведение

#### 4.12.13 HNN-расширение

#### 4.12.14 Группы с одним соотношением

#### 4.12.15 Теорема о свободе

### 4.13 Образующие и соотношения

#### 4.13.1 Задание групп образующими и соотношениями

#### 4.13.2 Проблемы Дэна

#### 4.13.3 Алгоритм Коксетера–Тодда

#### 4.13.4 Задание симметрической группы

#### 4.13.5 Задание октаэдральной группы

#### 4.13.6 Группы Коксетера



#### 4.13.7 Группы кос

Определение 1. Группой называется множество $G$ с бинарной операцией умножение $G \times G \to G$ если выполнены следующие аксиомы:

1. (Ассоциативность) $\forall a, b, c \in G, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
2. (Существование единицы) $\exists e \in G : \forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$
3. (Обратный элемент) $\forall a \in G, \exists b$ такой что $a \cdot b = e$. (Такой элемент называется обратным и обозначается $a^{-1}$).

Замечание. Из аксиом группы следует, что а) единичный элемент единственный, б) обратный элемент удовлетворяет также свойству $a^{-1} \cdot a = e$.

**Примеры групп**

1 Группа целых чисел $\mathbb{Z}$ операцией сложения. Аналогично группа вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел с операцией сложения.

Все ненулевые вещественные (или комплексные) числа с операцией умножения.

2 Группа матриц $n \times n$ с действительными коэффициентами и ненулевым определителем. Обозначение $GL(n, \mathbb{R})$. Аналогично $GL(n, \mathbb{C})$.

3. Циклическая группа из $n$ элементов $C_n = \{e, r, ..., r^{n-1}\}$, где $r^n = e$. Элементы группы можно представлять как повороты на угол $\frac{2\pi k}{n}$ вокруг начала координат. 4. Группа перестановок $S_n$.

Определение 2. Перестановкой $n$ элементов (или подстановкой из $n$ элементов) называется биекция $n$-элементного множества на себя. Множество всех перестановок множества $\{1, 2, ..., n\}$ обозначается $S_n$.

Произведение перестановок определяется как композиция биекций. То есть обозначение $\alpha\beta$ означает, что сначала действует $\beta$, а потом $\alpha$.

**Упражнение 1.** Перемножьте перестановки $\alpha = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix}$ и $\beta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$.

**Упражнение 2.** Вычислите $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,2\,1\,3 \end{pmatrix}^{100}$

Через $(i_1, i_2, ..., i_n)$ обозначается цикл который переводит $i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, ..., i_n \mapsto i_1$.

Предложение 1. Любая перестановка разбивается в произведение непересекающихся циклов.

Например, для написанной выше перестановки мы имеем

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,2\,1\,3 \end{pmatrix} = (1, 4)(2, 5, 3).$$

Определение 3. Порлдком элемента $g \in G$ называют наименьшее натуральное $n$ такое, что $g^n = e$. Если такого $n$ не существует, то говорят что порядок равен бесконечности.

Количеством элементов в группе называется порлдком группы. Обозначение: $|G|$.

Предложение 2. Если перестановка равна произведению независимых циклов длины $d_1, ..., d_k$, то ее порядок равен НОК $(d_1, d_2, ..., d_k)$

Упражнение 3. Найдите порядки всех элементов в группе $C_6$.

Теорема 3. Если $|G| < \infty$, то любой элемент $g \in G$ имеет конечный порядок не превышающий $|G|$.

Доказательство: Рассмотрим элементы $e, g, g^2, ...g^{|G|}$. Так как всего в группе $|G|$ элементов, значит найдутся $0 \leqslant i < j \leqslant |G|$ такие, что $g^i = g^j$. Значит, $g^{j-i} = e$.

Определение 4. Транспозицией называется цикл длины 2. Обозначение:

$$(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & ... & a & ... & b & ... & n \\ 1 & ... & b & ... & a & ... & n \end{pmatrix}$$

Упражнение 4. Что получится если перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$ умножить на транспозицию $(a, b)$ а) слева, б) справа?

Предложение 4. а) Любая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций. б) Любая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций соседних элементов $(i, i+1)$ (такие транспозиции называются элементарными).

Определение 5. Множество элементов $\{s_1, s_2 ...\} \in G$ называется образующими группы $G$, если любой элемент $g \in G$ может быть представлен в виде $g = s_{i_1}^{\pm 1} \cdot ... \cdot s_{i_l}^{\pm 1}$. Здесь среди индексов $i_1, ..., i_l$ могут быть одинаковые. Множество образующих может быть как конечным так и бесконечным.

Пример.а) Возьмем $G = \mathbb{Q}_{>0}-$ положительные рациональные числа, с операцией умножения. Тогда простые числа $2, 3, 5, ...$ являются образующими группы $\mathbb{Q} > 0$. б) Как следует из предыдущего предложения в качестве образующих группы $S_n$ можно взять элементарные транспозиции $s_i = (i, i+1)$, где $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

в) Циклическая группа $C_n$ порождена всего одной образующей $r$.

Представление элемента группы в виде произведения образующих не единственно. Например для $S_n$ всегда можно вставить произведение $(i, i+1)(i, i+1) = e$. Или воспользоваться соотношением

$$(1, 3) = (1, 2)(2, 3)(1, 2) = (2, 3)(1, 2)(2, 3).$$

Однако, хотя само разложение не однозначно, оказывается, что четность числа сомножителей всегда будет одна и та же.

Определение 6. Инверсией (беспорядком) перестановки $\sigma$ называется такая пара чисел $i, j$, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Количество инверсий обозначается $|\sigma|$. Перестановка называется четной, если число инверсий четное, в противном случае перестановка называется нечетной.

Предложение 5. Умножение на элементарную транспозицию либо увеличивает либо уменьшает число беспорядков на 1.

Теорема 6. Пусть $\sigma$ разложено в произведение элементарных транспозиций $\tau_1 \tau_2 ... \tau_k$. Тогда $k$ больше либо равно $|\sigma|$. Кроме того $k \equiv |\sigma| (\mathrm{mod} 2)$

Предложение 7. Произведение четных перестановок - четное.

Произведение нечетной и четной перестановок - нечетное.

Произведение нечетных перестановок - четное.

Определение 7. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если $\forall a, b \in H$ $a \cdot b \in H$ и $a^{-1} \in H$.

Так как аксиомы группы выполняются в $G$, то они выполняются и в $H$, т.е. любая подгруппа является группой.

Предложение 8. Четные перестановки образуют подгруппу в группе $S_n$ (эта подгруппа обычно называется $A_n$). Нечетные перестановки подгруппу не образуют.

### 5.0.6 2 b Абелевы группы. Действие группы на множестве

Определение 1. Группа называется коммутативной (или абелевой), если дополнительно выполнена аксиома: $\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a$.

Операцию в коммутативных группах обычно называют сложением и обозначают " +". Соответственно меняется и другая терминология: единицу группы обозначают 0, обратный элемент называют противоположным $-a$ и т.д.

### Примеры коммутативных групп

0 Циклические группы: бесконечного порядка $\mathbb{Z}$ и конечные $C_n$.

1 Группа всех остатков по модулю $n$ с операцией сложения. Обозначается $\mathbb{Z}_n$.

2 Группа всех остатков по модулю $n$ взаимно простых с $n$ с операцией умножения. Обозначается $\mathbb{Z}_n^*$.

Абстрактную группу можно задавать таблицей умножения. Ниже приведены таблицы умножения для групп $C_4, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5^*$. Через $r$ мы обозначаем образующую группы $C_4$.

| | | $e$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_4$ | $e$ | $e$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ |
| | $r$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $e$ |
| | $r^2$ | $r^2$ | $r^3$ | $e$ | $r$ |
| | $r^3$ | $r^3$ | $e$ | $r$ | $r^2$ |

| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_4$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 | |

| | 1 | 2 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 4 |

Предложение 1. В таблице умножения группы в каждой строчке встречаются все элементы группы по одному разу. Аналогично про столбцы.

Определение 2. Две группы $G$ и $H$ называются изоморфными, если существует биекция $\varphi : G \to H$ такая, что $\forall a, b \in G, \varphi(a \cdot Gb) = \varphi(a) \cdot H\varphi(b)$.

При изоморфизме групп таблицы умножения переходят друг в друга.

Предложение 2. Группа $\mathbb{Z}_n$ изоморфна $C_n$. Доказательство. При изоморфизме остаток $k, 0 \leqslant k < n$ переходит в поворот на угол $\frac{2\pi k}{n}$.

Предложение 3. Группа $G$ из $n$ элементов изоморфна $C_n$ тогда и только тогда, когда в ней есть элемент $g$ порядка $n$.

Доказательство. В одну сторону предложение очевидно, нужно доказывать только что если элемент $g$ имеет порядок $n$, то $G \simeq C_n$. Но в этом случае все элементы $e, g, ..., g^{n-1}$ различны, а так как $|G| = n$, то любой элемент $G$ имеет вид $g^k$, где $0 \leqslant k < n$. Тогда изоморфизм строится так: элемент $r^k \in C_n$ переходит в $g^k \in G$.

Предложение 4. Группа $\mathbb{Z}_5^*$ изоморфна группе $C_4$. Доказательство. При изоморфизме 1,2, 4, 3 (остатки по модулю 5) переходят в повороты на углы $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. То, что это изоморфизм, видно из таблицы умножения.

Другой способ: воспользоваться предыдущим предложением и заметить, что элемент $2 \in \mathbb{Z}_5^*$ имеет порядок 4.

Определение 3. Прямым произведением групп $G$ и $H$ называется множество пар $G \times H = \{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}$ с операцией $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$. Предложение 5. Группа $\mathbb{Z}_8^*$ изоморфна группе $C_2 \times C_2$. Доказательство. см. таблицы умножения.

$\mathbb{Z}_8^*$

| | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 3 | 3 | 1 | 7 | 5 |
| 5 | 5 | 7 | 1 | 3 |
| 7 | 7 | 5 | 3 | 1 |

$$C_2 \times C_2$$

| | $(e,e)$ | $(e,r)$ | $(r,e)$ | $(r,r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(e,e)$ | $(e,e)$ | $(e,r)$ | $(r,e)$ | $(r,r)$ |
| $(e,r)$ | $(e,r)$ | $(e,e)$ | $(r,r)$ | $(r,e)$ |
| $(r,e)$ | $(r,e)$ | $(r,r)$ | $(e,e)$ | $(e,r)$ |
| $(r,r)$ | $(r,r)$ | $(r,e)$ | $(e,r)$ | $(e,e)$ |

Предложение 6. Группы $C_2 \times C_2$ и $C_4$ не изоморфны. Доказательство. В группе $C_2 \times C_2$ любой элемент в квадрате равен 1, а в группе $C_4$ нет.

Теорема 7. Любая абелева группа с конечным числом образующих изоморфна произведению циклических групп $G \simeq \mathbb{Z}^n \times C_{n_1} \times ... \times C_{n_l}$.

В формулировке теоремы $\mathbb{Z}^n$ - это произведение $n$ групп изоморфных $\mathbb{Z}-$ бесконечная абелева группа. Теорема в частности утверждает, что любая конечная абелева группа изоморфна произведению конечных циклических групп $G \simeq C_{n_1} \times\ ... \times C_{n_l}$. При этом порядок группы $G$ равен $|G| = n_1 \cdot ... \cdot n_l$.

Пользуясь этой теоремой, можно перечислить абелевы группы данного порядка. Ясно, что существует ровно одна абелева группа порядка 1, так же для групп порядка 2 и порядка 3. Выше мы уже видели, что существует две неизоморфныее абелевы группы порядка 4: $C_2 \times C_2$ и $C_4$. Для порядка 5 абелева группа одна: $C_5$, для порядка 6 есть уже два кандидата $C_2 \times C_3$ и $C_6$, но на самом деле они изоморфны.

Предложение 8. Группы $C_2 \times C_3$ и $C_6$ изоморфны. Доказательство. В группе $C_2 \times C_3$ есть элемент $(r,r)$ порядка 6.

Можно доказать общее утверждение

Предложение 9. Группы $C_m \times C_n$ и $C_{mn}$ изоморфны если и только если $m$ и $n$ взаимно просты. Доказательство Если $m$ и $n$ взаимно просты, то элемент $(r, r) \in C_m \times C_n$ имеет порядок $mn$, значит группа $C_m \times C_n$ изоморфна циклической.

В другую сторону, если $m$ и $n$ не взаимно просты, то НОК$(m, n) < mn$. Ясно, что любой элемент группы $C_m \times C_n$ равен 1 в степени НОК$(m, n)$, т.е. в этой группе нет элемента порядка $mn$.

Часто в физике группы возникают как группы симметрий какой-то физической задачи в пространстве. Среди движений пространства можно выделить трансляции и движения сохраняющие некоторую точку, которую удобно считать началом координат. Также движения разделяются на движения сохраняющие ориентацию (они также называются собственными) и несохраняющие ориентацию. Все движения пространства описаны:

а) Движения плоскости, сохраняющие начало координат: повороты $R_\alpha$ вокруг начала координат на угол $\alpha$ (сохраняют ориентацию) и симметрии $S_l$ относительно прямых $l$, проходящих через начало координат (меняют ориентацию).

б) Движения трехмерного пространства, сохраняющие начало координат: повороты $R_{l,\alpha}$ вокруг осей, проходящих через начало координат (сохраняют ориентацию) и зеркальные поворотЬ $S_{\pi,\alpha}$ - композиции симметрии относительно плоскости $\pi$ и поворота вокруг перпендикулярно ей оси на угол $\alpha$, плоскость и ось пересекаются в начале координат, зеркальные повороты меняются ориентацию.

Конечные группы возникают как подгруппы группы симметрий.

Пример а) Группа симметрий на плоскости правильного многоугольника $D_n$. Эта группа часто называется диэдральной группой. Состоит из $n$ поворотов и $n$ осевых симметрий. Всего $2n$ элементов.

б) Группа симметрий правильного многогранника т.е. группа движений трехмерного пространства переводящих правильный многогранник в себя.

Определение 4. Действие группЬ $G$ на множестве $X$ - это отображение $\rho : G \times X \to X$ такое, что: а) $\forall g, h \in G, x \in X, \rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$; б) $\forall x \in X, \rho(e, x) = x$.

Для упрощения обозначений обычно действие группы записывается как умножение слева $\rho(g, x) = gx$. Тогда первое свойство - это просто ассоциативность, а второе это свойство единичного элемента.

Пример Группа $S_n$ действует на множестве $\{1, 2, ..., n\}$ переставляя его элементы.

Определение 5. Пусть группа $G$ действует на множестве $X$. Орбитой элемента $x \in X$ называется множество $Gx = \{y \in X \mid \exists g \in G, y = gx\}$. Множество всех орбит обозначается $X/G$.

Стабилизатором элемента $x \in X$ называется множество $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$.

**Примеры**

1. Группа $S_n$ действует на множествен $\{1, 2, ..., n\}$. Тогда орбита любой точки $i$ совпадет со всем множеством $\{1, 2, ..., n\}$, а стабилизатор будет изоморфен $S_{n-1}$. 2. Группа $C_n$ действует на $\mathbb{R}^2$ поворотами на угол $2\pi/n$. Тогда орбитой точки будут вершины правильного $n$-угольника. Множество орбит можно отождествить с точками угла $2\pi/n$ в котором стороны угла между собой склеены. Таким образом, множество орбит - это конус.

Предложение 10. Для любой точки $x \in X$ стабилизатор $G_x$ является подгруппой в $G$.

Предложение 11. Любые две орбиты $Gx$ и $Gy$ или не пересекаются или совпадают.

Можно ввести отношение $x \sim y$ если $x \in Gy$ и проверить, что оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. То есть является отношением эквивалентности.

Теорема 12. Пусть $G$ - конечная группа. Для любой точки $x \in X$ верно $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

**Примеры.**

1. Группа $C_n$ действует на $\mathbb{R}^2$ поворотами. Тогда орбита любой точки из $\mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$ состоит из $n$ точек, а стабилизатор тривиален. Для начала координат орбита состоит только из одной точки, но стабилизатор состоит из всей группы, т.е. из $n$ элементов. В любом случае произведение длины орбиты на порядок стабилизатора равен $n$.

2 Группа $G = D_n$ симметрий правильного $n$-угольника, множество $X-$ множество вершин правильного $n$-угольника. Тогда если $A$ - произвольная вершина, то орбита $GA$ это все $X$, стабилизатор $G_A$ - это группа состоящая из тождественного преобразования и симметрии относительно оси проходящей через $A$ и начало координат. Теорема 10 дает равенство: $|D_n| = n \cdot 2$.

3 Группа $G$ симметрий куба $ABCDA_1B_1C_1D_1, X = \{A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1\}$ − множество вершин куба. Тогда орбита $GA$ состоит из всех 8 вершин куба. А стабилизатор $G_A$ состоит из 6 преобразований сохраняющих $A$: тождественное, два поворота вокруг оси $AC_1$, симметрии относительно плоскостей $ABC_1, ADC_1, AA_1C_1$. Тогда $|G| = 6 \cdot 8 = 48$. Через $G_+$обозначим подгруппу собственных движений куба, ее порядок равен 24.

### 5.0.7 3 b Теорема Лагранжа, классы сопряженности, нормальные подгруппы, полупрямое произведение.

Теорема 1. Пусть $G$ - конечная группа. Для любой точки $x \in X$ верно $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

Доказательство. Пусть $|Gx| = a, |G_x| = b$. Обозначим элементы орбиты $Gx = \{g_1x, g_2x, ..., g_ax\}$, где $g_1, ..., g_a$ - элементы $G$, можно считать, что $g_1 = e$. Занумерум также элементы стаблизатора $G_x = \{h_1, h_2...h_b\}$, опять же можно считать, что $h_1 = e$. Тогда любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = g_ih_j$.

Действительно, так как $gx \in Gx$ значит $gx = g_ix$, тем самым мы однозначно определили $g_i$. После этого $h_j = g_i^{-1}g$.

Значит, $|G| = a \cdot b = |Gx| \cdot |G_x|$.

Определение 1. Группа $G$ действует на себе умножением слева по формуле $(g, x) \mapsto gx$.

Полезно ограничить это действие на подгруппу $H \subset G$, то есть рассмотреть действие $H$ на $G$ по формуле $(h, x) \mapsto hx$. Орбиты для этого действия - множества $Hg$ - называются правыми классами смежности.

Так как $hx = x$ означает, что $h = e$, то стабилизатор любой точки тривиален, значит все орбиты состоят из $|H|$ элементов. Следовательно $|G| = |H| \cdot |G/H|$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 2 (Лагранж). Пусть $G$ - конечная группа, $H-$ подгруппа. Тогда $|H|$ делит порядок $|G|$.

Предложение 3 (Следствие). Пусть $G$ - конечная группа. Тогда для любого элемента $g \in G$ порядок $g$ делит $|G|$. В частности $g^{|G|} = e$

Доказательство. Пусть порядок $g$ равен $d$. Тогда элементы $e, g, g^2, ..., g^{d-1}$ образуют подгруппу, порядок этой подгруппы равен $d$. По теореме Лагранжа получаем, что $d$ делит $|G|$, что и требовалось доказать. Также $g^{|G|} = \left(g^d\right)^{|G|/d} = e$.

Предложение 4 (Малая теорема Ферма). Если $p-$ простое число, $a \in \mathbb{Z}$, и НОД $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} - 1$ делится на $p$.

Доказательство Возьмем $G = \mathbb{Z}_p^*$, тогда заменив $a$ на его остаток по модулю $p$ имеем $a^{p-1} = 1$ в группе $\mathbb{Z}_p^*$, значит $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod} p)$.

Предложение 5 (Теорема Эйлера). Обозначим $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$. Тогда если НОД $(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на $n$

Доказывается аналогично прошлому пункту.

Помимо действия умножения слева можно определить действие справа.

Определение 2. Группа $G$ действует на себе умножением справа по формуле $(g,x)\mapsto xg^{-1}$. Определение 3. Группа $G$ действует на себе сопряжениями по формуле $(g,x)\mapsto gxg^{-1}$.

Орбиты для действия группы на себе сопряжениями называются классами сопряженности.

Надо проверить корректность определения, т.е. что получается действительно действие:

$$g_1g_2(x)g_2^{-1}g_1^{-1}=g_1g_2(x)\left(g_1g_2\right)^{-1}, \text{ так как } \left(g_1g_2\right)^{-1}=g_2^{-1}g_1^{-1}.$$

Замечание. Сопряжение является автоморфизмом (изоморфизмом с собой) группы так как

$$gxyg^{-1}=gxg^{-1}gyg^{-1}$$

**Примеры**

1. Если группа $G$ коммутативная, то каждый класс сопряженности состоит из одного элемента.

2. В группе $S_3$ есть три класса сопряженности: $e$; $\quad(1,2),(1,3),(2,3)$; $\quad(1,2,3),(1,3,2)$.

Предложение 6. Пусть $\sigma=\left(i_1,i_2,...,i_k\right)\left(j_1,j_2,...,j_l\right)...$ и $\alpha$ произвольная перестановка. Тогда $\alpha\sigma\alpha^{-1}=\left(\alpha\left(i_1\right),\alpha\left(i_2\right),...,\alpha\left(i_k\right)\right)\left(\alpha\left(j_1\right),\alpha\left(j_2\right),...,\alpha\left(j_l\right)\right)...$

Предложение 7 (Следствие). Две перестановки сопряжены в группе $S_n$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую циклическую структуру, т.е. их разложения в произведения независимых циклов для любого $k$ содержат одинаковое число циклов длины $k$.

3. Пусть $G$ - группа движений $\mathbb{R}^3$, $S_\pi$ симметрия относительно плоскости $\pi$, $g-$ некоторое движение. Тогда $gS_\pi g^{-1}=S_{g(\pi)}$ является симметрией относительно плоскости $g(\pi)$.

Пусть $R_{l,\varphi}$ - поворот вокруг оси $l$ на угол $\varphi$, $g$ - некоторое движение. Тогда $gR_{l,\varphi}g^{-1}=R_{g(l),\varphi}$ является поворотом поворот вокруг оси $g(l)$ на угол $\varphi$.

Вообще, сопряжение движения посредством $g$ означает ортогональную замену базиса (и, возможно, смену начала координат) в $\mathbb{R}^3$, поэтому движение будет переходить в движение такого же типа, но геометрические данные изменяются посредством $g$.

4. Пусть $G$ - группа матриц $GL(n,C)$. Тогда две матрицы $A,B$ сопряжены если и только если у них одинаковые жордановы нормальны формы.

По аналогии с векторными пространствами естественно хотеть ввести структуру умножения на классах смежности. Для этого надо чтобы $g_1H\cdot g_2H=g_1g_2H$. Т.е. для любых $h_1,h_2\in H$ существует $h\in H$ такой $g_1h_1g_2h_2=g_1g_2h$. Значит $g_2^{-1}h_1g_2=hh_2^{-1}$. Т.е. нужно чтобы $g\mathrm{Hg}^{-1}\subset H$.

Определение 4. Подгруппа $N\subset G$ называется нормальной (иногда говорят инвариантной) если для любого $g\in G$ верно $gNg^{-1}=N$. Это иногда записывают $N\triangleleft G$. Свойства. 1. Если $N\triangleleft G$, то $N$ является объединением каких-то классов сопряженности.

2. Если $N\triangleleft G$, то левые и правые смежные классы совпадают $gN=Ng$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $gn\in gN$ левого класса смежности. Тогда $gn=gng^{-1}g\in Ng$ так как $gng^{-1}\in N$ всилу нормальности $N$.

Оба этих свойства можно было взять в качестве определения нормальной подгруппы.

**Примеры**

0. Если группа $G$ коммутативная, то любая подгруппа является нормальной.

1. Пусть $G = S_3$. По теореме Лагранжа подгруппы могут быть только из $1, 2, 3$ или $6$ элементов. Подгруппа из одного элемента это $\{e\}$, она всегда нормальна, подгруппа из 6 элементов это вся $G$, она тоже нормальная. Подгруппа из двух элементов может состоять только из $e$ и какая-то транспозиция, такая подгруппа не является нормальной так как сопряжением мы можем перевести транспозицию в любую другую. Подгруппа из трех элементов это только $\{e, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$, она нормальная, так как состоит из полных классов сопряженности.

2. Пусть $G = A \times B$. Тогда подгруппы $\{(a, e)\} \simeq A$ и $\{(e, b)\} \simeq B$ являются нормальными.

Предложение 8. Если $N \triangleleft G$, то смежные классы по $N$ образуют группу. Эта группа называется факторгруппой и обозначается $G/N$.

Операция умножения вводится по формуле

$$g_1N \cdot g_2N = g_1g_2N$$

надо проверять корректность определения, и она следует из нормальности $N$, как было показано выше.

**Примеры**

1. Пусть группа $G = \mathbb{Z}$. Подгруппы имеют вид $H = n\mathbb{Z}$. Смежные классы имеют вид $a + n\mathbb{Z}$, т.е. состоят из чисел которые дают один остаток при делении на $n$. Складываются эти множества так же как и соответствующие остатки, поэтому факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ изоморфна $\mathbb{Z}_n$.

2. Пусть $G = V$ векторное пространство, $H = U$ векторное подпространство. Тогда факторгруппа $V/U$ называется факторпространством, элементам являются множетсва вида $v + U$, геометрически можно о них думать о плоскостях (размерности $\dim U$) параллельных $U$. Сложение определено по формуле $(v_1 + U) + (v_2 + U) = v_1 + v_2 + U$. есть также операция умножения на скаляр.

Если на $V$ есть скалярное произведение, то факторпространство можно отождествить с ортогональным дополнением к $U$ в $V$.

3. Пусть $G = A \times B$. Тогда классы смежности $G$ по подгруппе $\{(a, e)\} \simeq A$ имеют вид $(A, y)$, где $y \in B$, их произведение сводится к умножение второй координаты. Значит $G/A \simeq B$. 4. На плоскости рассмотрим решетку из параллелограммов общего вида (т.е. решетка не разбивается ни на прямоугольники ни на ромбы). Пусть $G$ - группа движений переводящих эту решетку в себя.

Движения получаются двух видов: трансляции относительно векторов решетки и центральные симметрии относительно точек половинной решетки (т.е. вершин параллелограммов, середин сторон параллелограммов и центров параллелограммов). Группа трансляций (обозначим ее $T$) порождена сдвигами на порождающие вектора решетки (обозначим их $e_1, e_2$) и изоморфна $\mathbb{Z}^2$, общий элемент ее выглядит как

$$t_{n_1,n_2} : x \mapsto x + n_1e_1 + n_2e_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

Общая центральная симметрия сохраняющая решетку имеет вид

$$s_{m_1,m_2} : x \mapsto -x + m_1e_1 + m_2e_2, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Подгруппа $T$ является нормальной. Это видно из вычисления:

$$s_{m_1,m_2}t_{n_1,n_2}s_{m_1,m_2}(x) = s_{m_1,m_2}t_{n_1,n_2}\left(-x + m_1e_1 + m_2e_2\right) =$$
$$= s_{m_1,m_2}\left(-x + \left(n_1 + m_1\right)e_1 + \left(n_2 + m_2\right)e_2\right) = x - n_1e_1 - n_2e_2 = t_{-n_1,-n_2}(x)$$

В группе $G$ есть ровно два смежных класса по $T$ - это сама $T$ и все центральные симметрии. Поэтому фактор группа $G/T$ состоит из двух элементов, значит изоморфна $C_2$.

Эту группу $C_2$ можно явно указать внутри $G$. Например рассмотрим подгруппу $G_0 = \{e, s_{0,0}\}$ движений сохраняющих начало координат. Однако она не будет нормальной. Поэтому $G$ не изоморфно произведению $G_0$ и $T$. Но на самом деле она изоморфна полупрямому произведению.

Определение 5. Пусть даны две группы $A, B$ и гомоморфизм $\phi$ из группы $A$ в группу автоморфизмов $B$. Т.е. для любого элемента $a \in A$ есть биекция $\phi_a : B \to B$ такая, что

$$\phi_a\left(b_1b_2\right) = \phi_a\left(b_1\right)\phi_a\left(b_2\right), \quad \text{и} \quad \phi_{a_1}\left(\phi_{a_2}(b)\right) = \phi_{a_1a_2}(b)$$

для любых $a, a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2, b \in B$. Полупрямым произведением $A \ltimes B$ называется группа элементами которой являются всевозможные пары $\{(a, b)\} \in A \times B$ с умножением

$$\left(a_1, b_1\right) \cdot \left(a_2, b_2\right) = \Big(a_1a_2, \phi_{a_2^{-1}}\left(b_1\right)b_2\Big)$$

Замечание. В полупрямом произведении $A \ltimes B$ есть подгруппы изоморфные $A$ и $B$, но только подгруппа изоморфная $B$ является нормальной. Смысл отображения $\phi_a-$ это сопряжение $B$ посредством элемента $a \in A$.

Замечание. Условия на $\phi_a$ можно сформулировать, как то, что группа $A$ действует на группе $B$ автоморфизмами.

**Примеры**

1. Пусть $\phi_a(b) = b$, для любых $a \in A, b \in B$. Тогда полупрямое произведение $A \ltimes B$ изоморфно прямому произведению $A \times B$

2. Группа $G$ симметрий общей параллелограмной решетки изоморфна полупрямому произведению $G_0 \ltimes T$. Группа $G_0$ действует на $T$ следующим образом $\phi_e\left(t_{n_1,n_2}\right) = t_{n_1,n_2}, \phi_{s_0}\left(t_{n_1,n_2}\right) = t_{-n_1,-n_2}$.

### 5.0.8 4 b Разные конструкции

В начале лекции дадим еще некоторое число новых понятий, а потом, по ходу разберем несколько задач из домашнего задания.

Определение 1. Даны две группы $G, H$. Отображение $\varphi : G \to H$ называется гомоморфизмом групп, если $\forall a, b \in G, \varphi\left(a \cdot_G b\right) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$.

Предложение 1. При любом гомоморфизме а) $\varphi(e) = e$; б) $\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$;

Определение 2. Пусть дан гомоморфизм групп $\varphi : G \to H$. Ядром гомоморфизма (обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$) называется $\{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$. Образом гомоморфизма (обозначается $\operatorname{Im}(\varphi)$ называется $\{h \in H \mid \exists g \in G\varphi(g) = h\}$.

Предложение 2. а). $\operatorname{Ker}\varphi$ является нормальной подгруппой в $G$. б) $\operatorname{Im}\varphi$ является подгруппой в $H$.

Предложение 3. $\varphi\left(g_1\right) = \varphi\left(g_2\right) \Leftrightarrow g_1 \in g_2 \operatorname{Ker}\varphi$. В частности гомоморфизм $\varphi$ инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.

**Примеры**

1. Отображение взятия остатка по модулю $n$ из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_n$ является гомоморфизмом. Ядро - это подгруппа $n\mathbb{Z}$.

2. Отображение четности определяет гомоморфизм из группы перестановок $S_n$ в группу $C_2$. Ядро - это подгруппа четных перестановок, она обозначается $A_n$.

3. Вычисление определителя задает гомоморфизм из группы матриц $GL(N, \mathbb{C})$ в группу $\mathbb{C}^*$. Ядро это матрицы с определителем 1, эта группа обозначается $SL(N, \mathbb{C})$. 4. Действия группы $G$ на множестве $\{1, 2, ..., n\}$ находятся в биекции с гомоморфизмами $G \to S_n$.

Теорема 4 (Теорема о гомоморфизме). Пусть $\varphi : G \to H$ гомоморфизм групп. Тогда $G/\operatorname{Ker}(\varphi) \simeq \operatorname{Im}(\varphi)$.

Краткое доказательство. Изоморфизм устроен так: каждому элементу $h = \varphi(g) \in \operatorname{Im}\varphi$ ставится в соответствии класс $g \operatorname{Ker}\varphi$. Корректность следует из доказанных выше свойств, свойство гомоморфизма проверяется напрямую.

Предложение 5 (Следствие). Если группа $G$ конечна, то $|G| = |\operatorname{Ker}\varphi|. \ |\operatorname{Im}\varphi|$.

Теорема 6 (Теорема Кэли). Любая конечная группа изоморфна подгруппе в симметрической группе $S_n$ для какого-то $n$.

Краткое доказательство Пусть $n = |G|$. Группа $G$ действует на себе умножением слева. Значит, по примеру выше есть гомоморфизм $G \to S_n$, элемент $g \in G$ переходит в перестановку $\begin{pmatrix} x_1 x_2 & ... & x_n \\ gx_1 & gx_2 & ... & gx_n \end{pmatrix}$.

Разберем несколько задач из прошлого домашнего задания и дадим нужный для них контекст.

Задача 2. а) Пусть $G$ - группа движений сохраняющих правильный тетраэдр. Докажите, что действие $G$ на множестве вершин тетраэдра задает изоморфизм $G$ и $S_4$. Опишите геометрически (как вращения, симметрии или зеркальные повороты) все перестановки. Найдите классы сопряженности.

б) Пусть $G_0$ это подгруппа собственных движений сохраняющих правильный тетраэдр. Является ли она нормальной? Найдите классы сопряженности в $G_0$.

Краткое решение. а). Действие группы $G$ на множестве вершин задает гомоморфизм в группу $S_4$. То, что это изоморфизм, следует из того, что любое преобразование однозначно задается перестановкой вершин и любая перестановка вершин получается из движении трехмерного пространства. Геометрическая интерпретация указана в следующей таблице:

| Геометрическая интерпретация. | Циклический тип. |
|---|---|
| Тождественное преобразование, | $e$, |
| Отражение относительно плоскости проходящей через ребро и центр противоположного ребра, | Цикл длины $2(1, 2)$. |
| Поворот вокруг оси проходящей через вершину на угол $2\pi/3$ или $4\pi/3$. | Цикл длины $3(1, 2, 3)$. |
| Зеркальный поворот относительно плоскости проходящей черех середины 4 ребер и на угол $\pi/2$. | Цикл длины $4(1, 2, 3, 4)$. |
| Поворот вокруг оси проходящей через середины противоположных граней на угол $\pi$. | Произведение двух независи- Мых циклов длины $2(1, 2)(3, 4)$. |

На прошлой лекции было доказано, что класс сопряженности в группе $S_n$ определяется циклической структурой, т.е. всего будет 5 классов сопряженности. Геометрически это тоже понятно, при сопряжении отражение переходит в отражение, вращение вокруг оси переходит в поворот на тот же угол и т.д. Повороты на углы $2\pi/3$ или $4\pi/3$ сопряжены посредством несобственного преобразования.

б). Как видно из таблицы выше собственным движениям соответствуют четные перестановки (причем все), значит группа $G_0 \simeq A_4$. Она состоит из полных классов сопряженности в $S_4$ поэтому она нормальна.

Ясно, что если элементы не были сопряжены в $S_4$, то они и не будут сопряжены в $A_4$. Однако обратное неверно и класс состоящий из тройных циклов распадается на два: повороты на угол $2\pi/3$ и повороты на угол $4pi/3$, один в другой не переводится посредством сопряжения собственным движением.

Это же можно увидеть и алгебраически. А именно, покажем, что тройные циклы $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$ не сопряжены в $A_4$. Действительно, так как $\alpha(1,2,3)\alpha^{-1} =$

$(\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3))$, то в качестве $\alpha$ могут выступать $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & & 4 \end{pmatrix}$

которые все являются нечетными.

Задача 3. а) Через $D_{nh}$ обозначим группу симметрий прямоугольной призмы с основанием правильный $n$ угольник. Найдите порядок группы $D_{nh}$.

Другое описание группы $D_{nh}$ - группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный многоугольник с n сторонами в плоскости.

б) Изоморфны ли группы $D_{3h}$ и $D_6$? Доказательство. Внутри $D_{nh}$ есть подгруппа $D_n$ движений переводящих верхнее основание в себя. И есть подгруппа $C_2$ состоящая из тождественного преобразования и отражения переставляющего верхнее и нижнее основания (плоскость проходит через середины вертикальных ребер). Легко видеть, что любой элемент $D_{nh}$ представим в виде произведения элемента из $D_n$ и $C_2$. Теперь, чтобы доказать изоморфизм достаточно применить следующее предложение.

Предложение 7. Пусть группа $G$ содержит две подгруппы $A, B$, такие, что $A, B$ коммутируют (для любых $a \in A, b \in B, ab = ba$), $A \cap B = \{e\}, G = A \cdot B$ (т.е. $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B : g = ab$). Тогда $G \simeq A \times B$.

Доказательство. Построим гомоморфизм из $A \times B$ в $G$, который переводит пару $(a, b)$ в их произведение. То, что это гомоморфизм следует из того подгруппы $A, B$ коммутируют. Далее, из того $A \cap B = \{e\}$ следует, что это инъекция, а из $G = A \cdot B$ то, что это сюрьекция. Значит это изоморфизм.

Докажем теперь, что $D_6 \simeq D_3 \times C_2$. Три вершины шестиугольника стоящие через один образуют правильный треугольник. Подгруппа группы $D_6$ переводящая этот треугольник в себя изоморфна $D_3$. Подгруппа $D_6$ состоящая из тождественного преобразования и центральной симметрии изоморфна $C_2$. Эти две подгруппы коммутируют, не пересекаются, и любой элемент $D_6$ может быть записан как их произведение. Значит, по предложению выше $D_6 \simeq D_3 \times C_2 \simeq D_{3h}$.

Определение 3. Центром группы $G$ называется множество $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G, xg = gx\}$.

Легко видеть что $Z(G)$ является подгруппой. В задаче выше в разложении $D_6 \simeq D_3 \times C_2$ элементы $C_2$ должны лежать в центре, поэтому в качестве порождающей $C_2$ можно взять центральную симметрию, но нельзя брать никакую осевую симметрию.

Упомянем еще такую тему как задание группы образующими и соотношениями. Мы не будем давать аккуратного определения, а ограничимся одним примером.

Предложение 8. Группа $D_n$ порождается одним поворотом на угол $2\pi/n$ который мы обозначим $r$ и одним отражением, которое мы обозначим $s$. Соотношения имеют вид $r^n = s^2 = \text{rsrs} = e$.

Доказательство. Во первых, легко видеть, что любое вращение из $D_n$ иеет вид $r^b, 0 \leq b \leq n-1$, а любое отражение может быть получено как композиция $s$ и вращения. Из этого следует, что группа $D_n$ порождена $s, r$.

Во вторых, эти соотношения выполнены в группе $D_n$. Единственное, что не сразу очевидно, это rsrs =e, это происходит из того, что $rs$ является несобственным преобразованием, а, значит, отражением.

Наконец, проверим, что другие соотношения налагать не надо. Любой элемент группы порожденной $r, s$ может быть записан в виде $s^{a_1} r^{b_1} \cdots s^{a_k} r^{b_k}$, где $a_i \in \mathbb{Z}$. Пользуясь соотношением $rs = sr^{-1}$ мы можем пронести $s$ влево и переписать слово в виде $s^a r^b$, где $a = 0, 1, b = 0, ..., n-1$. Значит группа с данными образующими и соотношениями содержит не более $2n$ элементов. С другой стороны, она содержит не менее $2n$ элементов так как из нее есть сюрьективный гомоморфизм в $D_n$. Задача 4. а) Пусть $G$ - группа симметрий прямоугольной (но не квадратной) решетки на плоскости, $T$ - подгруппа состоящая из трансляций. Докажите, что $T$ является нормальной подгруппой в $G$. Найдите факторгруппу $G/T$. Представьте $G$ в виде полупрямого произведения.

б)* Найдите классы сопряженности в $G$.

Доказательство. Любое аффинное преобразование можно записать в виде $x \mapsto Ax + v$. Так как начало координат должно переходить в точку решетки, то вектор $v$ - это вектор решетки. Кроме того, так как горизонтальные прямые решетки должны перейти в горизотнтальные прямые и тоже про вертикальные, то матрица $A$ - диагональная. Так как $A$ к тому же ортогональная, то всего есть 4 варианта преобразований в $G$: (i): $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (ii): $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, (iii): $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (iv): $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Геометрически, преобразования типа (i) - это трансляции, преобразования типа (ii) - это скользящие симметрии относительно горизонтальных осей, преобразования типа (iii) - это скользящие симметрии отражения относительно вертикальных осей, преобразования типа (iv) - это центральные симметрии.

Подгруппа $T$ сотстоит из преобразований типа (1). Построим гомоморфизм из группы $G$ в группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

который переводит аффинное преобразование в соответствующую ему матрицу $A$. Легко проверить, что это действительно гомоморфизм.

Ядром этого гоморфизма является группа трансляций $T$, значит, она являтеся нормальной. По теореме о гомоморфизме $G/T$ изоморфно образу, то есть группе состоящей из матрищ (1), эта группа изоморфна $C_2 \times C_2$. Значит $G/T \simeq C_2 \times C_2$.

Обозначим через $G_0$ подгруппу $G$ сохраняющую начало координат (т.е. линейных преобразований в формуле выше). Отметим, что подгруппы $G_0$ и $T$ не коммутируют. Например

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, нельзя сказать, что $G$ является произведением $G_0$ и $T$. Но $G$ является полупрямым произведением $G \simeq G_0 \ltimes T$, это можно увидеть как напрямую, так и из следующего общего предложения. Предложение 9. Пусть группа $G$ содержит две подгруппы $A, B$ такие, что $A \cap B = \{e\}, A \cdot B = G, B \triangleleft G$. Тогда $G$ является полупрямым произведением $A$ и $B$.

Доказательство. Определим $\phi_a(b) = aba^{-1}$. Легко проверить, что сопоставление $a \mapsto \phi_a$ удовлетворяет условиям

$$\phi_a\left(b_1 b_2\right)=\phi_a\left(b_1\right) \phi_a\left(b_2\right), \quad \text{и} \quad \phi_{a_1}\left(\phi_{a_2}(b)\right)=\phi_{a_1 a_2}(b).$$

Поэтому мы можем определить полупрямое произведение $G=A \ltimes B$. Гомоморфизм $\varphi: A \ltimes B \rightarrow G$ строится по формуле $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Инъективность и сюръективность этого отображения следует из того, что $A \cap B=\{e\}, A \cdot B=G$. То, что это действительно гомоморфизм проверяется напрямую

$$\begin{aligned}\varphi\left(\left(a_1, b_1\right)\right) \cdot \varphi\left(\left(a_2, b_2\right)\right)=a_1 b_1 a_2 b_2=a_1 a_2\left(a_2^{-1} b_1 a_2\right) b_2=a_1 a_2 \phi_{a_1^{-1}}\left(b_1\right) b_2= \\ =\varphi\left(\left(a_1 a_2, \phi_{a_1^{-1}}\left(b_1\right) b_2\right)\right)=\varphi\left(\left(a_1, b_1\right) \cdot\left(a_2, b_2\right)\right)\end{aligned}$$

Предложение 10. Если $G=A \ltimes B$, то $G / B \simeq A$.

Доказательство. Построим гомоморфизм из $G$ в $A$ по формуле $(a, b) \mapsto a$. Его ядро есть $B$, образ изоморфен $A$, по теореме о гомоморфизме получаем нужное.

Замечание. Аналогичное задаче утверждение верно и дле всей группы движений - она изоморфна полупрямому произведению ортогональной группы и группы трансляций $O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$. Также для любой сигнатуры, например группа Пуанкаре есть полупрямое произведение группы Лоренца и группы трансляций $O(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$.

### 5.0.9 5 b Представления групп

**Некоторые решения задач из лекции 4.**

Задача 3. а) Найдите классы сопряженности в группе $D_n$.

б) Найдите коммутант группы $D_n$.

Указание: используйте, то что любой элемент $D_n$ может быть записан в виде $r^b$ или $s r^b u$ соотношения на $r$, s найденнье на лекиии

в)* Представьте группу $D_n$ в виде нетривиального полупрямого произведения.

Ответ. а) Если $n$ нечетно, то все симметрии $s r^b$ образуют один класс сопряженности. Если $n$ четно, то симметрии распадаются на два класса сопряженности: $s r^{2 a}$ и $s r^{2 a-1}$. Повороты $r^a$ и $r^b$ сопряжены только если $a=b$ или $a=n-b$.

б) Если $n$ нечетно, то коммутант - это группа всех поворотов $r^a$. Если $n$ четно, то коммутант это группа всех четных поворотов $r^{2 a}$.

в) $D_n \simeq C_2 \ltimes C_n$

Задача 4. Пусть $G$ - группа движений сохраняющих куб, $G_0-$ подгруппа собственных движений.

а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из $G_0$ в $S_4$ используя действие $G$ на множестве диагоналей куба. Является ли он изоморфизмом?

б) Найдите классы сопряженности в группе $G_0$. Опишите эти классы геометрически (как вращения, симметрии или зеркальные повороты).

в) Опишите $G$ как произведение (прямое или полупрямое). Сколько существует классов сопряженности в $G$?

Решение. Пункты а,б аналогичны задаче из прошлого задания, доказывается, что $G_0 \simeq S_4$, классы сопряженности $S_4$ мы знаем, их 5 штук. Внутри всей $G$ есть подгруппа $C_2$ порожденная центральной симметрией. Любой элемент из $G$ является либо собственным движением либо произведением собственного движения и центральной симметрии. Поэтому $G \simeq C_2 \times G_0$. Для описания классов сопряженности применим предложение.

Предложение 1. Классы сопряженности произведения групп $G \times H$ являют собой произведения классов сопряженности группы $G$ и группы $H$.

Доказательство. Достаточно заметить, что элементы $\left(g_1, h_1\right),\left(g_2, h_2\right) \in G \times H$ сопряжены тогда и только тогда когда элементы $g_1, g_2 \in G$ сопряжены и элементы $h_1, h_2 \in H$ сопряжены.

Т.е. в нашей задаче группа $G$ имеет $2 \cdot 5 = 10$ классов сопряженности.

Замечание. Для полупрямого произведение аналогичное предложение неверно. Примером является прошлая задача - хотя $D_n \simeq C_2 \ltimes C_n$, количество классов сопряженности в $D_n$ не равно $2n$.

## Представления групп.

Определение 1. Пусть $G$ - конечная группа, $V$ - конечномерное комплексное векторное пространство. Гомоморфизм групп $\rho : G \to GL(V)$ называется (конеч- номерным, комплексным) представлением группы $G$. Пространство $V$ называется пространством представления. Размерность $\dim V$ называется размерностью представления.

Если в пространстве $V$ выбран базис $e_1, e_2, ..., e_n$, то можно считать, что представление задает гомоморфизм $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$. В частности, одномерные представления - это тоже самое, что и гомоморфизмы из $G$ в $\mathbb{C}^*$.

Часто допускают вольность речи и говорят что $V$ и есть представления, имея в виду, что $\rho$ или ясен из контекста или не важен. Также, нередко $\rho$ опускают в формулах, т.е. вместо $\rho(g)v$ пишут $gv$.

Определение 2. Пусть дана группа $G$ и два ее векторных представления $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ и $\rho_2 : G \to Gl(V_2)$. Изоморфизмом представлений называется изоморфизм векторных пространств $\varphi : V_1 \to V_2$ коммутирующий с действием группы:

$$\varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)\varphi(v)$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\
V_1 \arrow[r, "\varphi"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

В терминах матриц это означает, что для любого $g$ матрицы $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ сопряжены: $\rho_2(g) = \varphi\rho_1(g)\varphi^{-1}$.

## Примеры

1 (Перестановочное представление) Пусть группа $G$ действует на множестве $X$, $|X| = n$. Тогда есть представление группы $G$ в векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ с базисом $e_x$, где $x \in X$. Действие группы задается формулой $\rho(g)e_x = e_{gx}$.

2 Частным случаем прошлого примера является представление группы $S_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$. Группа действует перестановкой базисных векторов.

Пусть $n = 3$. Тогда это перестановочное представление $S_3$ задается матрицами:

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1,3,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 (Регулярное представление) Этот пример тоже является частным случаем первого примера. А именно, можно рассмотреть действие группы на себе умножениями слева.

Более явно - пусть $|G| = n$, тогда рассмотрим пространство $V = \mathbb{C}^n$ с базисом $e_x$ занумерованным элементами $x \in G$. Группа действует на $V$ по формуле $ge_x = e_{gx}$.

Определение 3. Подпространство $U \subset V$ называется подпредставлением (другой термин - инвариантное подпространство), если оно является $G$ инвариантным, т.е. для если любых $g \in G, u \in U$ выполняется $\rho(g)u \in U$. Пример. Расмотрим перестановочное представление $S_3$. Оно имеет два нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и $V$) подпредставления

$$U_1 = \left\{\sum x_i e_i \mid x_1 = x_2 = x_3\right\}, \quad U_2 = \left\{\sum x_i e_i \mid \sum x_i = 0\right\},$$

Все пространство $\mathbb{C}^3$ разлагается в прямую сумму подпространств $U_1$ и $U_2$. Если выбрать в $\mathbb{C}^3$ базис, согласованный с этим разложением (например $e_1+e_2+e_3, e_1- e_2, e_1-e_3$, то матрицы, соответствующие операторам $\rho(g)$ будут блочными.

В общем случае, если есть подпредставление $U \subset V$, то выберем базис в $V$ дополняющий базис в пространстве $U$. Тогда матрицы операторов $\rho(g)$ будут иметь блочный вид $\rho(g) = \begin{pmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & D(g) \end{pmatrix}$. Условие того, что $\rho$ задает представление записывается как $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ или в терминах матриц

$$\begin{cases} A(g_1 g_2) = A(g_1) A(g_2) \\ B(g_1 g_2) = A(g_1) B(g_2) + B(g_1) D(g_2) \\ D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \end{cases}$$

Первое уравнение означает, что сопоставление $g \mapsto A(g)$ задает представление группы $g$, пространством этого представления является $U$. По третьему уравнению сопоставление $g \mapsto D(g)$ также задает представление группы $G$, пространством этого представления является фактор пространство V/U.

В примере выше можно выбрать базис так, что в блочной форме блок $B$ равен нулю. Это приводит к следующему определению.

Определение 4 (Прямая сумма представлений). Пусть дана группа $G$ и два ее векторных представления $V_1, \rho_1$ и $V_2, \rho_2$. Тогда пространство $V = V_1 \oplus V_2$ также имеет структуру представления группы $G$, в котором $g$ переходит в оператор заданный блочной матрицей $\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$.

Например, выше для трехмерного представления группы $S_3$ мы построили $U_1$ и $U_2$ такие, что $\mathbb{C}^3 \simeq U_1 \oplus U_2$. Естественно спросить - всегда ли можно занулить блок $B$? Иными словами, для любого ли инвариантного подпространства $U_1 \subset V$ можно найти подпространство $U_2 \subset V$ которое является дополнительнм к $U_1$ (то есть $U_1 \cap U_2 = 0, U_1 \oplus U_2 = V$) и инвариантным относительно действия группы $G$. Вообще говоря, ответ отрицательный, как показывает следующий пример.

Рассмотрим следующее двумерное представление группы $Z$, в котором $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда подпространство, натянутое на первый базисный вектор $e_1$ является инвариантным, но никакого дополнительного к нему инвариантного подпространства нет.

Однако верна следующая теорема

Теорема 2. Пусть $G$ конечная группа, $V$ ее представление, $U_1 \subset V$ инвариантное подпространство. Тогда существует дополнительное инвариантное подпространство $U_2 \subset V$.

Доказательство. Изложим доказательство двумя способами.

Первый способ. Сделаем треугольную замену базиса при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где

$$S = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A(g) B\left(g^{-1}\right).$$

Тогда при сопряжении такой матрицей матрицы $\rho(h)$ становятся блочно-диагональными.

Второй способ. Доказательство основано на очень важной идее усреднения. Первым примером такой идеи является усреднение в представлении. А именно, для любого представления $V$ конечной группы $G$ и любого вектора $v \in V$

$$\rho(h)\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) v\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) v.$$

То есть, стартуя с произвольного вектора $v \in V$ при помощи усреднения по группе мы построили вектор инвариантный относительно группы.

Теперь вернемся к нашей теореме. Чтобы построить инвариантное дополнение к $U_1 \subset V$ мы построим проектор $P$ на $U_1$, инвариантный относительно действия группы. Тогда в качестве $U_2$ можно будет взять ядро $P$. Для того, чтобы построить такой $P$, возьмем сначала $P_0-$ какой-то проектор на $U_1$, напомним, что эти слова означают, что $P_0^2 = P_0, \operatorname{Im} P_0 = U_1$. Тогда $P$ определяется при помощи усреднения:

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P_0 \rho\left(g^{-1}\right).$$

Тогда легко проверить, что $P-$ проектор на $U_1$ и $\rho(h) P = P \rho(h)$. Значит $U_2 = \operatorname{Ker} P$ является инвариантным дополнением к $U_1$.

Естественно хотеть выбрать в качестве $U_2$ ортогональное дополнение к $U_1$. На самом деле так можно сделать при удачном выборе скалярного произведения, мы обсудим это на следующей лекции.

Определение 5. Представление $V$ называется неприводимым, если у него нет подпредставлений отличных от 0 и $V$.

Ясно, что любое одномерное представление неприводимо. Другим примером неприводимого представления является $U_2$, можно проверить, что в нем нет одномерных инвариантных подпространств.

Теорема 3 (Машке). Любое конечномерное комплексное представление $V$ конечной группы $G$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

Теорема легко следует из теоремы 2. Если $V$ неприводимо, то все уже доказано. Если нет, то найдем подпредставление $U_1 \subset V$ тогда ему есть дополнительное $U_2$. Если они оба неприводимы, то $V = U_1 \oplus U_2$, если нет, то будем их разлагать дальше пока не приведем все $V$ к сумме неприводимых.

## Примеры

1. Пусть $G = C_n$ циклическая группа, как обычно обозначим ее образующую через $r$. Любое представление $C_n$ задается образом $\rho(r)$, который должен удовлетворять условию $\rho(r)^n = E$. Отсюда следует, что матрица $\rho(r)$ диагонализируема и ее собственные значения равны $\sqrt[n]{1}$.

Так как различных комплексных $\sqrt[n]{1}$ существует $n$, то у группы $C_n$ есть $n$ различных неприводимых представления Обозначим эти представления $R_j, 0 \leq j \leq n-1$, в представлении $R_j$ элемент $r^m$ переходит в $\exp\left(\frac{2pi}{n} mj\right)$.

Любое представление $C_n$ разлагается в сумму представлений $R_j$. Точнее, если оператор $\rho(r)$ имеет $a_0$ собственных значений равных $1, a_1$ собственных значений равных $e^{\frac{2\pi i}{n}}, ..., a_{n-1}$ собственных значений равных $e^{\frac{2\pi i}{n}(n-1)}$, то $R = R_0^{\oplus a_0} \oplus R_1^{\oplus a_1} \oplus ... R_{n-1}^{\oplus a_{n-1}}$.

2. Пусть $G = S_3$, найдем все ее одномерные представления. Любая транспозиция имеет порядок 2, значит должна переходить либо в 1, либо в -1. Так как тройной цикл имеет порядок 3, то он должен перейти в $\sqrt[3]{1}$, но он равен произведению транспозиций. Значит, единственная возможность, если тройные циклы перейдут в 1. Тогда все транспозиции должны перейти в одно и то же. Если они все переходят в 1, то это тривиальное представление. Если все переходят в -1, то это знаковое представление.

Предложение 4. В любом одномерном представлении $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$ коммутант $[G, G]$ лежит в ядре.

Доказательство. Коммутант порождается элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$. Так как $\mathbb{C}^*$ абелева, то

$$\varphi\left(xyx^{-1}y^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi\left(x^{-1}\right)\varphi\left(y^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi\left(x^{-1}\right)\varphi(y)\varphi\left(y^{-1}\right) = e,$$

а, значит и весь коммутант, лежит в ядре.

Определение 6. Пусть дано представление $\rho : G \to GL(V)$. Характером представления называется функция $\chi_V(g) = \operatorname{Tr}(\rho(g))$, где Tr - это след матрицы.

Предложение 5. Характеры изоморфных представлений совпадают.

Доказательство Изоморфизм представлений в терминах матриц означает $\rho_1(g) = \phi\rho_2(g)\phi^{-1}$, т.е. матрицы $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ сопряжены, значит, их следа равны.

### 5.0.10 6 b Унитарность. Характеры представлений.

#### Основная теория

В квантовой механике обычно встречаются унитарные пространства, т.е. пространства $V$, в которых есть скалярное произведение $(x \mid y), x, y \in V$ удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}(x|y) = \overline{(y|x)}\\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2|y) = \overline{\alpha_1}\,(x_1|y) + \overline{\alpha_2}\,(x_2|y)\\ (x|\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1\,(x|y_1) + \alpha_2\,(x|y_2)\end{gathered}$$

Обычно скалярное произведение предполагается положительно определенным, т.е.

$$(x \mid x) > 0, \forall x \neq 0.$$

Скаляное произведение можно задавать через матрицу произведений базисных векторов (матрицу Грамма) $S_{ij} = (e_i \mid e_j)$. Эта матрица должна быть эрмитовой $S^* = S$. При замене базиса $e_i' = A_{ij}e_j$ матрица $S$ преобразуется $S \mapsto A^*SA$, где матрица $A^*$ получается из $A$ транспонированием и комплексным сопряжением. В ортонормированным базисе матрица Грамма равна единичной.

Оператор называется унитарным, если он сохраняет форму. Это означает, что $(Ax \mid Ay) = (x \mid y)$, для любых $x, y \in A$. В базисе это равносильно матричному уравнению $S = A^*SA$. Обычно это уравнение пишется в ортонормированном базисе, тогда оно выглядит $A^*A = E$, матрицы удовлетворяющие этому условию называется унитарными.

Предложение 1. Любое комплексное представление $\rho : G \to GL(V)$ конечной группы $G$ является унитаризуемым, т.е. в каком-то базисе все матрицы представления являются унитарными.

Доказательство. Надо доказать, что операторы $\rho(g)$ сохраняют некоторое положительно определенное скалярное произведение. Тогда в базисе в котором его матрица Грамма является единичной все матрицы $\rho(g)$ будут унитарными. Доказательство основано на усреднении по группе.

А именно, введем какое-то эрмитово скалярное произведение $(x \mid y)$ и усредним его по группе

$$(x \mid y)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(h)x \mid \rho(h)y).$$

В базисе, в котором матрица $(x \mid y)$ была единичной, матрица $(x \mid y)^G$ имеет вид

$$S = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(h)^* \rho(h).$$

Это скалярное произведение является положительно определенным, как сумма положительно определенных скалярных произведений. Теперь легко проверить, что это скалярное произведение является $G$ инвариантным, на матричным языке это вычисление:

$$\rho(g)^* S \rho(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(g)^* \rho(h)^* \rho(h) \rho(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{h} \in G} \rho(\tilde{h})^* \rho(\tilde{h}) = S$$

где $\tilde{h} = hg$.

Пример. Условие, что группа $G$ конечная является существенным, как показывает следующий пример. Рассмотрим двумерное представление группы $G = \mathbb{Z}$, $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда, для любого $n \neq 0$ матрица $\rho(n)$ не является диагонализуемой (оба корня характеристического многочлена равны 1, но матрица не единичная). Значит матрица для любого $n \neq 0$ матрица $\rho(n)$ не может быть сделана унитарной.

Предложение 2. Пусть $V$ - представление конечной группы $G$, $(x \mid y) - G$ инвариантное скалярное произведение, $U_1 \subset V - G$-инвариантное подпространство. Тогда, его ортогональное дополнение $U_2 = U_1^{\perp}$ также является $G$ инвариантным пространством.

Доказательство. Для любого вектора $x \in U_2$ надо проверить, что $\rho(g)x \in U_2$. Для этого надо проверить, что для любого $y \in U_1$ верно, что $(\rho(g)x \mid y) = 0$. Это следует из вычисления

$$(\rho(g)x \mid y) = \left(x, \rho\left(g^{-1}\right) y\right) = 0,$$

где мы воспользовались $G$-инвариантностью скалярного произведения и пространства $U_1$.

Тем самым мы дали другое доказательство теоремы из прошлой лекции о том, что у любого подпредставления есть дополнительное подпредставление. Напомним, что их той теоремы следовало, что любое представление разлагается в прямую сумму неприводимых.

Напомним определение характера $\chi_V(g) = \operatorname{Tr}(\rho(g))$.

Предложение 3. а) $\chi_V(e) = \dim(V)$.

б) Характер прямой суммы представлений равен сумме характеров

$$\chi_{V_1 \oplus V_2}(g) = \chi_{V_1}(g) + \chi_{V_2}(g).$$

в) Для любого представления $V$ конечной группы $G$

$$\chi_V\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_V(g)}$$

Доказательство. а) Так как $\rho$ это гомоморфизм групп, то $\rho(e)$ - это единичная матрица размера $\dim V$, значит, ее след равен $\dim V$.

б) Очевидно из определения прямой суммы представлений.

в) Матрица $\rho(g)$ может быть сделана унитарной. Тогда $\rho(g)^{-1} = \rho(g)^*$, значит $\mathrm{Tr}\left(\rho\left(g^{-1}\right)\right) = \overline{\mathrm{Tr}(\rho(g))}$. Приведем еще пару конструкций которые позволяют строить новые представления из уже имеющихся.

Определение 1. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ представление группы $G$, тогда можно определить действие группы на двойственном пространстве $V^*$– пространстве линейных функционалов на $V$ - по формуле

$$\rho^*(g)\varphi(x) = \varphi\left(\rho\left(g^{-1}\right)x\right), \quad \forall\varphi \in V^*, x \in V.$$

Заметим, что появление $g^{-1}$ связано с тем, что мы хотим получить левое, а не правое действие. На языке матриц, двойственное представление задается отображением $g \mapsto \left(\rho(g)^t\right)^{-1}$, легко проверить, что это гомомрфизм групп. Для унитарных матриц это тоже самое, что комплексное сопряжение $\left(\rho(g)^t\right)^{-1} = \overline{\rho(g)}$. Характеры двойственных представлений комплексно сопряжены $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$.

Определение 2. Пусть $V, U$ векторные пространства. Тензорным произведением $V \otimes U$ векторных пространств называется пространство порожденное векторами $v\otimes u$ с соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda(v \otimes u) = \lambda v \otimes u = v \otimes \lambda u \\ (v_1 + v_2) \otimes u = v_1 \otimes u + v_2 \otimes u \\ v \otimes (u_1 + u_2) = v \otimes u_1 + v \otimes u_2. \end{aligned}$$

Если выбрать базисы $V = \langle e_1, ..., e_n\rangle, U = \langle f_1, ..., f_m\rangle$, то базисом в тензорном произведении $V \otimes U$ будут вектора $e_i \otimes f_j$. В самом деле, если $v = \sum a^i e_i, u = \sum b^j f_j$, то

$$v \otimes u = \left(\sum a^i e_i\right) \otimes u = \sum a^i e_i \otimes u = \sum a^i b^j e_i \otimes f_j.$$

В частности, мы видим, что $\dim(V \otimes U) = \dim V \cdot \dim U$.

Тензоры вида $v\otimes u$ называются разложимыми. Не любой тензор является разложимым, например $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ не разложим, см упражнение ниже.

Определение 3. Пусть $A : V \to V$ и $B : U \to U$ два линейных оператора. Их тензорным произведением называется оператор $A\otimes B : V\otimes U \to V\otimes U$, определенный на разложимых тензорах по формуле $(A \otimes B)(v \otimes u) = Av \otimes Bu$.

Пример. Пусть $\dim V = \dim U = 2$, матрицы $A, B$ диагональны: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $A \otimes B$ имеет вид:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_2 \end{pmatrix}$$

В общем случае, если операторы заданы матрицами $Ae_i = \sum a_i^{i'} e_{i'}$ и $Bf_j = \sum b_i^{j'} f_{j'}$, то матрица $A \otimes B$ равна $A \otimes B\,(e_i \otimes f_j) = \sum a_i^{i'} j_j^{j'} e_{i'} \otimes f_{j'}$.

Предложение 4. $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}\, A \cdot \mathrm{Tr}\, B$

Определение 4. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ и $\rho' : G \to GL(U)$ два представления одной группы $G$. Их тензорным произведением $\rho \otimes \rho'$ называется представление группы $G$ в пространстве $V \otimes U$ определенное по формуле $g \mapsto (\rho(g) \otimes \rho'(g))$.

Предложение 5. $\chi_{V\otimes U}(g) = \chi_V(g) \cdot \chi_U(g)$

Пусть дана группа $G$. Обозначим характеры ее неприводимых представлений $\chi^{(1)}, ..., \chi^{(k)}$, пусть их размерности равны $d_1, ..., d_k$. Обозначим через $C_1, C_2, ..., C_l$ классы сопряженности в группе $G$, через $h_i$ обозначим представителей этих классов $h_i \in C_i$.

Рассмотрим пространство $\Theta$ состоящее из функций на группе, инвариантных на классах сопряженности. По задаче из прошлого задания характеры всех представлений лежат в пространстве $\Theta$. Другой пример - это функции $\gamma_i$ равные 1 на классе $C_i$ и нулю на других классах. Таких функций $l$ штук $\gamma_1, ..., \gamma_l$, они образуют базис в пространстве $\Theta$.

Введем эрмитово скалярное произведение на пространстве $\Theta$:

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{l} |C_i| \cdot \overline{\phi\left(h_i\right)} \psi\left(h_i\right).$$

Последнее равенство следует, из того, что функции $\phi, \psi$ постоянны на классах сопряженности. Из этой формулы очевидно, что $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{i,j} \frac{|C_i|}{|G|}$, т.е. $\gamma_i$ образуют ортогональный базис в пространстве $\Theta$.

Теорема 6 (Соотношение ортогональности характеров). $\left\langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \right\rangle = \delta_{i,j}$.

Теорема 7 (Полнота). Характеры неприводимых представлений ортонормированный базис в пространстве $\Theta$.

В частности из свойства полноты следует, что число неприводимых представлений группы равно числу классов сопряженных элементов.

Алгоритм разложения на неприводимые. Пусть при разложении пространства $V$ на неприводимые пространство $V_1$ встречается $a_1$ раз, пространство $V_2$ встречается $a_2$ раз и т.д. Тогда $\chi = \sum a_i \chi^{(i)}$ и кратности $a_i$ могут быть найдены по формуле $a_i = \left\langle \chi^{(i)}, \chi \right\rangle$.

Заметим еще, что $\langle \chi, \chi \rangle = \sum a_i^2$, поэтому из условия $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ следует, что одно из $a_i$ равно 1, а остальные равны 0, то есть представление $V$ является неприводимым.

Характеры неприводимых представлений удобно записывать в виде таблицы где в столбцах стоят представители классов сопряженности, а в строках характеры неприводимых. Эта таблица называется таблицей характеров. Пример Таблица характеров для группы $S_3$ имеет вид:

| | $e$ | $(1,2)^3$ | $(1,2,3)^2$ |
|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi^{(3)}$ | 2 | 0 | -1 |
| $\chi_{\mathbb{C}^3}$ | 3 | 1 | 0 |
| $\chi_{\text{reg}}$ | 6 | 0 | 0 |

В столбцах верхним индексом написано количество элементов в соответствующем классе. По строкам, в первой строке стоит тривиальное представление, во второй знаковое, в третьей двумерное построенное на прошлой лекции, далее для полноты картины приведены еще два приводимых представления - перестановочное и регулярное. Характер $\chi^{(3)}$ легче всего найти вычитанием характера тривиального представления из характера перестановочного представления $\chi_{\mathbb{C}^3}$.

Предложение 8. Характер регулярного представления группы $G$ равен

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{при } g = e \\ 0, & \text{при } g \neq e \end{cases}.$$

Предложение 9. Скалярное произведение $\left\langle \chi_{\text{reg}}, \chi^{(i)} \right\rangle = d_i$. Следствие. $\chi_{\text{reg}} = d_1 \chi^{(1)} + d_2 \chi^{(2)} + \cdots + d_k \chi^{(k)}$. Следствие. $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2$. Пример. $|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

Пример. Пусть группа $G = S_4$. В ней есть 5 классов сопряженности, значит должно быть 5 непривидимых представлений. Мы знаем два одномерных - тривиальное и знаковое. Сумма квадратов размерностей трех остальных должна быть равна 22 - единственная возможность $22 = 3^2 + 3^2 + 2^2$. Характеры этих представлений частично были в прошлом домашнем задании, частично будут в этом.

Пример. Пусть группа $G$ абелева. Тогда у нее $|G|$ классов сопряженности, значит, $|G|$ неприводимых представлений. Сумма квадратов их размерностей также должна равняться $|G|$ - единственная возможность для этого, это все представления являются одномерными. Мы это видели на прошлой лекции на примере группы $C_k$.

Для произвольной, возможно неабелевой группы $G$ мы знаем, что коммутант $[G, G]$ лежит в ядре любого одномерного представления. Значит, любое одномерное представление $G$ является представлением фактора по коммутанту $G/[G, G]$. По задаче из прошлого задания этот фактор является абелевой группой, значит количество его представлений (т.е. одномерных представлений группы $G$) равно $|G/[G, G]|$.

### 5.0.11 7 b Разные конструкции. Группа $SO(2)$

#### Основная теория

Некоторые решения задач из лекции 6.

Задача 2. Найдите все неприводимые представления группы $D_7$, составьте таблицу характеров. Для каждого неприводимого представления задайте его указав матрицы соответствующие образующим группы $D_7$

Решение. В группе $D_7$ всего 5 классов сопряженности, значит, должно быть 5 неприводимых представлений. Сумма квадратов их размерностей должна быть равна 14, значит, это два одномерных и одно двумерное представления. В одномерных представлениях коммутант $D_7$, т.е. $C_7$, должен переходить в 1. Таким образом, одномерное представление задается образом отражения $s$. Так как $s^2 = e$, то образ $s$ равен 1 или -1. Первое из этих представлений - это тривиальное представление, второе - это знаковое, в котором движения сохраняющие ориентацию переходят в 1, а меняющие ориентацию в -1.

Двумерные представлению задаются образами $s, r$:

$$r \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2k\pi/7) & -\sin(2k\pi/7) \\ \sin(2k\pi/7) & \cos(2k\pi/7) \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $1 \leq k \leq 3$. То, что это действительно представления следует из того, что будут выполнятся соотношения у группе $D_7 : r^7 = s^2 = (rs)^2 = e$. Таблица характеров имеет:

| | $e$ | $r^{\pm 1}$ | $r^{\pm 2}$ | $r^{\pm 2}$ | $sr^b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| $\chi^{(3)}$ | 2 | $2\cos(2\pi/7)$ | $2\cos(4\pi/7)$ | $2\cos(6\pi/7)$ | 0 |
| $\chi^{(3)}$ | 2 | $2\cos(4\pi/7)$ | $2\cos(6\pi/7)$ | $2\cos(2\pi/7)$ | 0 |
| $\chi^{(3)}$ | 2 | $2\cos(6\pi/7)$ | $2\cos(2\pi/7)$ | $2\cos(4\pi/7)$ | 0 |

Можно еще для полноты картины проверить соотношения ортогональности для характеров. Если выразить косинусы через экспоненты, то проверка сводится к тождеству

$$1 + \epsilon + ... + \epsilon^6 = \frac{\epsilon^7 - 1}{\epsilon - 1} = 0$$

где $\epsilon = \exp(2\pi/7)$.

Замечание. Аналогично описываются неприводимые представления $D_n$ при любом нечетном $n$.

Задача 4 (Второе соотношение ортогональности для характеров). Докажите, что для любых двух классов сопряженности $C_i, C_j$, где $1 \leqslant i, j \leqslant k$ верно:

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\chi^{(\alpha)}\left(h_i\right)\overline{\chi^{(\alpha)}\left(h_j\right)}=\delta_{i,j}\frac{|G|}{|C_i|}$$

Указание: используйте, то что матрица характеров является матрицей переход от одного ортонормированного базиса $\chi^{(i)}, \kappa$ другому ортогональному базису $\gamma_i$, поэтому после некоторого домножения столбцов должна стать унитарной, а значит ее столбци будут попарно ортогональньь.

Доказательство. Реализуем план из указания при помощи прямого вычисления. Напомним, что через $\gamma_i$ мы обозначаем функции равные 1 на классе сопряженности $C_i$ и нулю иначе. Тогда $\gamma_i$ можно разложить по базису $\chi^{(\alpha)}$ и коэффициенты разложения будут равны

$$\left\langle\chi^{(\alpha)},\gamma_i\right\rangle=\frac{|C_i|}{|G|}\chi^{(\alpha)}\left(h_i\right),\quad \gamma_i=\sum_{\alpha}\frac{|C_i|}{|G|}\chi^{(\alpha)}\left(h_i\right)\chi^{(\alpha)}$$

Найдем скалярные произведения $\gamma_i$. С одной стороны, прямо по определению имеем $\langle\gamma_i,\gamma_j\rangle=\delta_{i,j}\left|C_i\right|/|G|$. С другой стороны из разложения по характерам неприводимых следует, что

$$\langle\gamma_i,\gamma_j\rangle=\sum_{\alpha}\chi^{(\alpha)}\left(h_i\right)\overline{\chi^{(\alpha)}\left(h_j\right)}$$

Отсюда и следует утверждение задачи.

Замечание. Это доказательство использовало свойство полноты - то, что характеры образуют ортонормированный базис. Поэтому это соотношение ортогональности иногда называют соотношением полноты.

Разные конструкции. Группа $SO(2)$

Обсудим еще две конструкции из теории представлений.

Определение 1. Пусть $\rho: G\to GL(V)$ и $\rho': G'\to GL\left(V'\right)$ два представления. Их тензорным произведением $\rho\otimes\rho'$ называется представление группы $G\times G'$ в пространстве $V\otimes V'$ определенное по формуле $(g,g')\mapsto\left(\rho(g)\otimes\rho'\left(g'\right)\right)$.

Не надо путать с тензорным произведением представлений $\otimes$ которое было на прошлой лекции - там мы по двум представлениям группы $G$ строили опять представление группы $G$, а тут по представлениям двух разных групп $G, G'$ строим представление их произведения $G\times G'$.

Пример. Пусть $G=G'=C_2$. Представления $\rho=\rho'$ заданы матрицами $e\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\sigma\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Тогда представление $\rho\otimes\rho'$ задается матрицами:

$$(e,e)\mapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},(e,\sigma)\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},(\sigma,e)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},(\sigma,\sigma)\mapsto\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Легко видеть, что это получилось регулярное представление группы $C_2\times C_2$. Так как $\operatorname{Tr}(A\otimes B)=\operatorname{Tr}A\cdot\operatorname{Tr}B$, то $\chi_{\rho\bigotimes\rho'}\left(g,g'\right)=\chi_\rho(g)\chi_{\rho'}\left(g'\right)$. Найдем скалярное произведение:

$$\left\langle\chi_{\rho_1\bowtie\rho_1'},\chi_{\rho_2\bowtie\rho_2'}\right\rangle=\frac{1}{|G\times G'|}\sum_{g\in G,g'\in G'}\chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_1'}\left(g'\right)\overline{\chi_{\rho_2}(g)\chi_{\rho_2'}\left(g'\right)}=$$

$$=\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\rho_1}(g)\overline{\chi_{\rho_2}(g)}\right)\left(\frac{1}{|G'|}\sum_{g'\in G'}\chi_{\rho_1'}\left(g'\right)\overline{\chi_{\rho_2'}\left(g'\right)}\right)=\left\langle\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_2}\right\rangle\left\langle\chi_{\rho_1'},\chi_{\rho_2'}\right\rangle$$

Теорема 1. а) Если $\rho$ и $\rho'$ неприводимые представления групп $G$ и $G'$, то $\rho \bigotimes \rho'-$ неприводимое представление группы $G \times G'$. б) Все неприводимые представления группы $G \times G'$ получаются таким способом.

Доказательство. а) Из формулы (2) следует, что $\left\langle \chi_{\rho \bigotimes \rho'}, \chi_{\rho \bigotimes \rho'} \right\rangle = 1$. Как мы показывали на прошлой лекции из этого следует неприводимость представления $\rho \bigotimes \rho'$.

б) Пусть $k$ (соответственно $k'$) - число классов сопряженности группы $G$ (соответственно $G'$). Мы знаем, что число классов сопряженности (а, значит, и число неприводимых представлений) группы $G \times G'$ равно $k \cdot k'$. Если $(\rho_1, \rho'_1)$ и $(\rho_2, \rho'_2)$ разные пары неприводимых представлений, то из формулы (2) следует, что характеры $\chi_{\rho_1 \trianglerighteq \rho'_1}$ и $\chi_{\rho_2 \trianglerighteq \rho'_2}$ ортогональны. Таким образом беря тензорные произведения неприводимых представлений $G, G'$ мы получим $k \cdot k'$ различных неприводимых представлений $G \times G'$, что и требовалось доказать.

Определение 2. Пусть заданы $H-$ подгруппа в $G$ и представление $\rho : G \to GL(V)$. Тогда $\rho$ задает представление группы $H$ в пространстве $V$, оно называется ограничением представления $\rho$ на подгруппу $H$.

Пример. Рассмотрим подгруппы $A_3 \subset S_3$, ясно что $A_3 \simeq C_3$. Таблица характеров $S_3$ приведена на рисунке слева.

При ограничении на $C_3$ представления $\chi_1$ и $\chi_2$ совпадут, а представление $\chi_3$ окажется приводимым: $\chi_3 = \tilde{\chi}_4 + \tilde{\chi}_{2\pi i}$. Соответствующая таблица характеров $C_3$ приведена на рисунке справа, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

| | $e$ | $(1,2)^3$ | $(1,2,3)^2$ |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | 0 | -1 |

| | $e$ | $(1,2,3)$ | $(1,3,2)$ |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | -1 | -1 |
| $\tilde{\chi}_4$ | 1 | $\epsilon$ | $\epsilon^2$ |
| $\tilde{\chi}_5$ | 1 | $\epsilon^2$ | $\epsilon$ |

Обсудим теперь представления абелевых групп. Пусть $G = C_N$. Все неприводимые представления одномерны, и мы их уже обсуждали ранее, таблица характеров имеет вид:

| | $e$ | $r$ | $r^2$ | ... | $r^N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_0$ | 1 | 1 | 1 | ... | 1 |
| $R_1$ | 1 | $\epsilon$ | $\epsilon^2$ | ... | $\epsilon^{N-1}$ |
| $R_2$ | 1 | $\epsilon^2$ | $\epsilon^4$ | ... | $\epsilon^{2N-2}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $R_{N-1}$ | 1 | $\epsilon^{N-1}$ | $\epsilon^{2N-2}$ | ... | $\epsilon^1$ |

где $\epsilon = \exp(2\pi i/N)$. Можно сказать, что представление $R_j$ переводит $r^p$ в $\epsilon^{pj}$.

Можно проверить соотношения ортогональности, например между характерами представлений $R_j$ и $R_k$. Проверка сводится к тождеству

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{\chi^{(j)}\left(r^n\right)}\chi^{(k)}\left(r^n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}(k-j)\right)^n = \delta_{k,j}$$

Последнее равенство очевидно при $j = k$ так как мы складываем одни единицы, а при $j \neq k$ следует из формулы суммы геометрической прогрессии (подобно тождеству (1) выше).

Заметим кстати, что из этой проверки видно зачем нужно комплексное сопряжение в формуле для скалярного произведения, иначе не получится ортонормированности.

Аналогично можно проверить соотношение полноты (второе соотношение ортогональности), оно записывается таким образом

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\chi^{(j)}\left(r^{n}\right)\overline{\chi^{(j)}\left(r^{m}\right)}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n-m)\right)^{j}=\delta_{n,m}$$

Пространство $\Theta$ - это пространство всех функций на группе, так как группа абелева. То есть для любого $n=0,\ldots N-1$ у нас есть число $f\left(r^{n}\right)$. Удобно не ограничиваться конечным набором значений $n$, а рассматривать все целые $n$, наложив условие периодичности, то есть $\Theta=\{f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{C}\mid f(x+N)=f(x)\}$.

Пользуясь полнотой можно написать

$$f(n)=\sum_{m=0}^{N-1}f(m)\delta_{n,m}=\sum_{m=0}^{N-1}f(m)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\chi^{(j)}\left(r^{n}\right)\overline{\chi^{(j)}\left(r^{m}\right)}=\sum c_{j}e^{\frac{2\pi i}{N}nj}$$

где $c_{j}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)\overline{\chi^{(j)}\left(r^{m}\right)}$. Такие формулы для разложения называются дискретным преобразованием Фурье. Мы к ним пришли рассматривая теорию представлений группы $C_{N}$.

Если $G$ не циклическая, а произведение циклических $G\simeq C_{n_1}\times C_{n_2}$, то ее представления строятся по предложению выше $R_{j_1,j_2}=R_{j_1}\bigotimes R_{j_2}$; в таком представлении общий элемент $\left(r^{m_1},r^{m_2}\right)\in G$ переходит в $\exp\left(\frac{2\pi i}{n_1}m_1j_1+\frac{2\pi i}{n_2}m_2j_2\right)$. Рассмотрим теперь первый пример бесконечной (непрерывной группы). Через $SO(2)$ мы обозначим группу ортогональных преобразований плоскости с определителем 1 (O от слова Orthogonal, $S$ от слова Special). Геометрически элементы группы $SO(2)$ - это повороты на углы $0\leq\alpha<2\pi$, матрица имеет вид

$$R(\alpha)=\left(\begin{array}{cc}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{array}\right)$$

Сопоставление $\alpha\mapsto R(\alpha)$ задает изоморфизм между группами $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и группой $SO(2)$.

Есть еще одно описание этой же группы. А именно, обозначим через $U(n)$ множество унитарных матриц размера $n\times n(U$ от слова Unitary ). Тогда $U(1)$ состоит из комплексных чисел по модулю равных 1, их можно записать в виде $\exp(2\pi i\alpha)$. Ясно, что это та же самая группа.

Будем искать представления группы $U(1)$. То есть мы хотим найти набор матриц $T(\alpha)$ таких, что $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)T(\beta)$ и $T(2\pi)=1$. При этом мы будем рассматривать только гладкие представления, то есть такие, что все матричные элементы $T(\alpha)$ будут гладкими функциями от $\alpha$.

Взяв производную равенства $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)T(\beta)$ по $\beta$ при $\beta=0$ получаем дифференциальное уравнение

$$T'(\alpha)=T(\alpha)T'(0)$$

Это линейное дифференциально уравнение, его общее решение имеет вид $T(\alpha)=C\exp(\alpha A)$, где $A=T'(0),C$ константа интегрирования. Из условий $T(0)=T(2\pi)=1$ следует, что $C=1$ и матрица $A$ диагональная с собственными значениями вида $ik,k\in\mathbb{Z}$. Представление таким образом, разлагается в прямую сумму одномерных, соответствующих собственным векторам матрицы $A$.

Таким образом неприводимые представления параметризуются собственными значениями $ik$ матрицы $A$, характер соответствующего представления равен:

$$\chi^{(k)}(\alpha) = \exp(ik\alpha).$$

Проверим соотношения ортогональности для характеров. Сумму по элементам группы естественно заменить интегралом $\int_0^{2\pi} d\alpha, |G|$ заменяется на интеграл 1 (объем группы), то есть на $2\pi$. Соотношения ортогональности принимают вид

$$\left\langle \chi^{(k)}, \chi^{(j)} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\alpha(k-j)) d\alpha = \delta_{j,k}.$$

Соотношение полноты тогда принимает вид

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi^{(k)}(\alpha)\overline{\chi^{(k)}(\beta)} = \delta_{2\pi}(\alpha - \beta)$$

где $\delta_{2\pi}(\alpha)$ это дельта функция на окружности, т.е. такая обобщенная функция, что $\int_0^{2\pi} f(\beta)\delta_{2\pi}(\beta-\alpha)d\beta = f(\alpha)$, для любой $2\pi$ периодической функции $f$. Соотношение полноты можно переписать явно

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\alpha} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\alpha - 2n\pi) = 2\pi\delta_{2\pi}(\alpha)$$

Это формула верна и называется формулой суммирования Пуассона. Здесь $\delta(x)$ это дельта функция Дирака.1

Пространство $\Theta$ функций на группе можно отождествить с пространством периодических функций $\Theta = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(x+2\pi) = f(x)$. Используя формулу полноты или теоремы из математического анализа, получаем, что $f(z)$ принимает вид

$$f(\alpha) = \int_0^{2\pi} f(\beta)\delta_{2\pi}(\beta-\alpha)d\beta = \int_0^{2\pi} f(\beta)\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha k}e^{-i\beta k}d\beta = \sum c_k e^{i\alpha k}$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\beta)\overline{\chi^{(k)}(\beta)}d\beta$. То есть функция $f$ разлагается в ряд Фурье.

### 5.0.12 8 b Группы Ли, алгебры Ли.

**Некоторые решения задач из лекции 6.**

Задача 3. Найдите таблицу характеров группы $S_4$. Проверьте соотношения ортогональности между характерами. Разложите тензорные произведения трехмерных на неприводимые.

Решение. Так как классов сопряженности 5, то всего неприводимых представлений 5. Мы уже знаем два одномерных представления: $\rho_1$ - тривиальное, $\rho_2$ знаковое. Также у нас есть геометрическая конструкция двух трехмерных представлений: $\rho_3$ происходит из геометрического действия $S_4$ симметриями тетраэдра, $\rho_4$ происходит из из геометрического действия $S_4$ вращениями куба.

Характеры $\rho_3$ и $\rho_4$ находятся следующим образом. Матрица поворота вокруг оси на угол $\alpha$ может быть приведена к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, поэтому ее след равен $1 + 2\cos\alpha$. Аналогично, матрица зеркального поворота на угол $\alpha$ приводится к виду $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и ее след равен $-1 + 2\cos\alpha$

Представление $\rho_3$ можно еще описать аналогично примеру с $S_3$. А именно, это представление можно реализовать как подпредставление четырехмерного перестановочного представления $S_4$ в пространстве $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Его характер находится вычитанием из характера перестановочного представления характера тривиального представления. Представление $\rho_4$ после этого можно найти как тензорное произведение $\rho_4 = \rho_3 \otimes \rho_1$.

Из того что сумма квадратов размерностей равна 24 следует, что нужно двумерное представление, обозначим его $\rho_5$. Его характер можно найти из соотношений ортогональности. Другой способ - воспользоваться разложением регулярного представления и написать $2\chi^{(5)} = \chi_{\text{reg}} - \chi^{(1)} - \chi^{(2)} - 3\chi^{(3)} - 3\chi^{(4)}$.

Явно построить это двумерное представление можно при помощи гомоморфизма $S_4 \to S_3$ и последующего двумерного представления $S_3$.

| | $e$ | $(1,2)^6$ | $(1,2,3)^8$ | $(1,2,3,4)^6$ | $(1,2)(3,4)^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi^{(3)}$ | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| $\chi^{(4)}$ | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| $\chi^{(5)}$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |

**Группы Ли, алгебры Ли.**

Обсудим еще раз группу $SO(2)$ на которой мы закончили прошлую лекцию. Она состоит из элементов вида $g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Матрицы $g(\alpha)$ удовлетворяют соотношению

$$g(\alpha+\beta) = g(\alpha)g(\beta).$$

Можно сказать, что группа $SO(2)$ задана в своем двумерном представлении. Если продифференцировать последнее равенство по $\beta$ и положить $\beta = 0$, то получаем

$$g'(\alpha) = g(\alpha)g'(0) = g(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это равенство (дифференциальное уравнение) можно проверить и непосредственно, используя $g'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$. Единственным решение этого уравнения удовлетворяющим начальному условию $g(0) = E$ является матричная экспонента

$$g(\alpha) = \exp\left(\alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Опять же, последнее равенство легко проверить непосредственно:

$$\exp\left(\alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^2}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^3}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \frac{\alpha^4}{24}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ... = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ определяет группу $SO(2)-$ любой элемент является экспонентой это этой матрицы. Она называется инфинитезимальным генератором группы $SO(2)$. На прошлой лекции мы описывали представления группы $SO(2)$ основываясь на образе этой матрицы - для любого представления $g(\alpha) \mapsto T(\alpha)$ мы имеем соотношение $T(\alpha) = \exp(T'(0))$. При этом матрица $T'(0)$ должна удовлетворять соотношению $\exp(2\pi T'(0)) = E$. Поэтому ее собственные значения должны быть равны $ik_1, ..., ik_N$, где $k_1, ..., k_N \in \mathbb{Z}$.

Далее мы (кроме некоторых отступлений) будем заниматься непрерывным группами (другой термин группы Ли). Все группы которые мы будем рассматривать будут матричными, то есть заданными как подгруппы в $GL(n,\mathbb{R})$ или $GL(n,\mathbb{C})$. Элементы группы должны быть представлены как функции $g\left(\alpha_1,...,\alpha_d\right)$ от какого-то набора вещественных параметров $\alpha_1,...,\alpha_d$. Требуется, чтобы матричные элементы как функции от $\alpha_1,...,\alpha_d$ были гладкими. Также требуется, чтобы функции $\gamma_i\left(\alpha_1,...,\alpha_d,\beta_1,...,\beta_d\right)$ определенные при помощи умножения в группе

$$g\left(\alpha_1,...,\alpha_d\right)g\left(\beta_1,...,\beta_d\right)=g\left(\gamma_1,...,\gamma_d\right)$$

были гладкими. Аналогично, требуется, чтобы функции $\delta_i\left(\alpha_1,...,\alpha_d\right)$ определенные при помощи операции взятия обратного элемента в группе

$$g\left(\alpha_1,...,\alpha_d\right)^{-1}=g\left(\delta_1,...,\delta_d\right)$$

были гладкими.

Первым примером группы Ли является группа $SO(2)$ которую мы обсуждали ранее.

Выше мы не уточняли какому множеству принадлежат параметры $\alpha_1,...,\alpha_d-$ правильно думать, что они принадлежат некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^d$ и $g$ осуществляет гладкую биекцию между этим открытым множеством и окрестностью единицы в группе $G$. Число параметров $d$ называется размерностью группы.

**Примеры.**

0. Группа всех невырожденных матриц $GL(n,\mathbb{R})$. В качестве параметров $\alpha_1,...,\alpha_d$ можно взять все матричные элементы. Размерность группы равна $n^2$. Аналогично, группа всех невырожденных комплексных матриц $GL(n,\mathbb{C})$ вдвое большую размерность $2n^2$.

1. Группа матриц с единичным определителем $SL(n,\mathbb{R})$. Она задается одним уравнением $\det(g)-1=0$. По теореме о неявной функции можно взять $n^2-1$ матричных элементов и тогда оставшийся выражается через них при помощи гладкой функции. Эти $n^2-1$ элементов и можно взять в качестве локальных параметров, размерность группы равна $n^2-1$. Единственное, что надо проверить, что дифференциал не равен нулю. На более конкретном языке это означает, что есть ненулевая частная производная.

Проверим это сначала для случая $n=2$. Тогда

$$\delta(\det g-1)=g_{11}\delta g_{22}+g_{22}\delta g_{11}-g_{12}\delta g_{21}-g_{21}\delta g_{12}.$$

Мы видим, что $\delta(\det g-1)=0$ только если все матричные элементы $g$ равны нулю, но такая матрица не лежит в $SL(2,\mathbb{R})$.

Для произвольной матрицы $g$ легко видеть, что $\delta\det g=\sum_{i,j}G^{ij}\delta g_{ij}$, где $G^{ij}$ алгебраическое дополнение к матричному элементу $g_{ij}$. Так как $\det g=1$, то одно из этих дополнений не равно 0, значит дифференциал невырожден.

В частности в точке $g=E$, мы имеем

$$\delta\det g=\delta g_{11}+\cdots+\delta g_{nn}=\operatorname{Tr}\delta g.$$

То есть мы получили, что частные производные по координатам $g_{ii}$ не равны нулю, в качестве локальных координат можно взять все координаты кроме любой из них. 2. Через $O(n)$ обозначается группа всех ортогональных матриц, через $SO(n)$ подгруппа, состоящая из ортогональных матриц с определителем 1. Ортогональные матрицы задаются уравнением $gg^t = E$. Так как матрица $XX^t$– симметрична, то уравнение $gg^t = E$, являет собой $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений на матричные элементы матрицы $g$ которых всего $n^2$. По теореме о неявной функции матрицы из $SO(n)$ могут локально быть выражены через $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ параметров. Но для того чтобы применить теорему о неявной функции надо проверить, что дифференциалы этих уравнений линейно независимы.

Рассмотрим малое приращение $g = E + t\delta g + o(t)$. Подставим это в уравнение на $g$ мы получаем, что в первом порядке $\delta g + \delta g^t = 0$. Это система линейных уравнений на $\delta g$, ее решения это кососимметричные матрицы которые образуют пространство размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит ранг системы равен $\frac{n(n+1)}{2}$, совпадает с количеством уравнений, что и требовалось показать.

3. Группа унитарных матриц $U(n)$. У нее есть подгруппа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем 1. О них речь в задаче ниже.

Рассмотрим все возможные гладкие кривые $g(t)$, где $g(0) = E$. При малых $t$ эта кривая имеет вид $g(t) = E + At + o(t)$, где $A = g'(0)$. Множество таких $A$ называется касательным пространство к $G$ в точке $E$, обозначает $T_EG$.

Заметим, что $T_EG$ является векторным пространством. Действительно, если есть две кривые $g_1(t) = E + A_1t + o(t)$ и $g_2(t) = E + A_2t + o(t)$, то их произведение имеет вид $g_1(t)g_2(t) = E + (A_1 + A_2)\, t + o(t)$. Значит, если $A_1, A_2 \in T_EG$, то $A_1 + A_2 \in T_EG$. Кроме того, если рескалироть параметр $t$, то есть взять кривую $g_3(t) = g_1(\lambda t) = 1 + \lambda A_1 t + o(t)$, то мы получаем, что если $A_1 \in T_EG$, то $\lambda A_1 \in T_EG$.

Укажем, что это за векторные пространства для примеров выше. В случае группы $G = SO(2)$ порождено матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В случае группы $G = SL(n, \mathbb{R})$ мы нашли, что матрица $A$ должна удовлетворять условию $\operatorname{Tr} A = 0$. В случае $G = SO(n, \mathbb{R})$ матрица $A$ удовлетворяет условию $A = -A^t$.

Замечание. Аналогично можно определить касательное пространство к любой точке $g \in G$ (подобно тому как есть касательное пространство к сфере в любой ее точке). Это касательное пространство обозначается $T_gG$, оно всегда будет векторным пространством, для этого структура группы на самом деле не нужна. Но для следующих свойств $T_EG$ структура группы уже является необходимой.

Рассмотрим гладкую кривую $g(t) = E + At + o(t)$. Тогда для любого $h \in G$ кривая $\tilde{g}(t) = hg(t)h^{-1} = E + hAh^{-1}t + o(t)$ тоже является гладкой и $\tilde{g}(0) = E$. То есть, мы доказать, что если $A_1 \in T_EG$ и $h \in G$, то элемент $hAh^{-1} \in T_EG$. Значит, пространство $T_EG$ имеет структуру представления группы $G$. Такое представление есть для любой группы Ли $G$, оно называется присоединениым представлением.

Пусть теперь элемент $h$ также зависит от параметра, другими словами, рассмотрим кривую $h(s) = E + Bs + o(s)$. Тогда, для любого $s, h(s)Ah(s)^{-1} \in T_EG$. Вычисляя мы получаем

$$h(s)Ah(s)^{-1} = (E + Bs + o(s))A(E - Bs + o(s)) = A + (BA - AB)s + o(s).$$

Дифференцируя по $s$ мы получаем, что $BA - AB \in T_EG$. Это выражение называется коммутатором матриц $B, A$ и обозначается $[B, A]$. Резюмируя, мы получили, что векторное пространство $T_EG$ является замкнутым относительно действия группы $G$ сопряжениями и взятия коммутатора.

Определение 1. Алгеброй Ли называется векторное пространство $\mathfrak{g}$ снабженное билинейное операцией $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ удовлетворяющей следующим двум аксиомам:

Антикоммутативность $[x, y] = -[y, x]$
Тождество Якоби $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

Легко проверить, что коммутатор матриц $[A, B] = AB - BA$ удовлетворяет антикоммутативности и тождеству Якоби.

**Примеры.**

1. Касательное пространство к единице к любой группе Ли $G$ является алгеброй Ли. Обычно обозначается Lie$G$ или маленькой готической буквой g. Для матричных групп:

а) Алгебра Ли группы всех невырожденных матриц $GL(n)$ размера $n \times n$ обозначается $\mathfrak{gl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n \times n$

б) Алгебра Ли группы всех матриц с определителем $1SL(n)$ обозначается $\mathfrak{sl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n \times n$ с нулевым следом.

в) Алгебра Ли группы всех ортогональных матриц $O(n)$ обозначается $\mathfrak{so}(n)$. Состоит из всех кососимметричных матриц размера $n \times n$.

2. Вектора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Коммутатор - векторное произведение.

Замечание. Тождество Якоби введенное можно еще переписать в виде:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x.z]]$$

что означает, что оператор $[x, \cdot]$ является дифференцированием, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница.

3. Пространство функций от переменных $q_i$ и $p_i$ со скобкой Пуассона:

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

4. Одномерная алгебра Ли $\dim \mathfrak{g} = 1$. Можно считать, что порождается одним элементом $x$. Тогда, $[x, x] = -[x, x]$, значит $2[x, x] = 0, [x, x] = 0$.

Определение 2. Алгебра Ли называется коммутативной (абелевой) если для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ верно, что $[x, y] = 0$.

Ясно, что есть коммутативная алгебра любой размерности.

**Двумерные алгебры Ли** $\dim \mathfrak{g} = 2$.

Можно считать, что $\mathfrak{g}$ порождается двумя элементами $x, y$. Так как $[x, x] = [y, y] = 0$ и $[x, y] = -[y, x]$, то единственный коммутатор который надо описать это $[x, y]$. Если коммутатор $[x, y] = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативная. Иначе коммутатор $[x, y] \neq 0$ можно взять в качестве одного из базисных элементов, скажем $y$. Тогда коммутатор $[x, y]$ пропорционален $y$ и перенормировав $x$ можно сделать $[x, y] = y$. Получилась такая новая алгебра $\mathfrak{g} = \langle x, y \rangle$ и единственный ненулевой коммутатор имеет вид $[x, y] = y$. Эту алгебру можно реализовать как подалгебру в алгебре матриц $2 \times 2$ : $x = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание. Пусть $I_1, I_2, ..., I_l$ базис в алгебре Ли. Тогда коммутатор базисных элементов снова разлагается по базису $[I_i, I_j] = \sum_k c_{ij}^k I_k$. Числа $c_{ij}^k$ называются структурными константами. По аналогии с тем, что конечная группа описывается таблицей умножения, алгебра Ли описывается своими структурными константами. Определение 3. Линейное отображение $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется изоморфизмом алгебр Ли, если оно является изоморфизмом векторных пространств и $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]), \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Эквивалентно, можно сказать, что две алгебры Ли являются изоморфными, если у них есть базисы в которых совпадают структурные константы.

Выше мы показали, что любая двумерная алгебра Ли изоморфна или коммутативной алгебре или алгебре с коммутатором $[x, y] = y$. 6. Описать трехмерные алгебры Ли уже не так просто. Отметим, что помимо коммутативных алгебр выше были еще три примера трехмерных алгебр: $\mathbb{R}^3, \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Среди них есть изоморфные, см задачи ниже.

### 5.0.13 9 b Симметрические тензоры. Группы Ли $SO(3), SU(2)$.

#### Основная теория

Определение 1. Рассмотрим векторное пространство $V$ с базисом $e_1, ..., e_N$. Тензор $a = a^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ называется симметричным если его коэффициенты $a^{i_1 \cdots i_k}$ симметричны относительно перестановки индексов. Пространство симметричных тензоров обозначается $S^k V$.

Здесь и далее по повторяющимся индексам сверху и снизу предполагается суммирование.

Определение 2. Тензор $a = a^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ называется кососимметричным если его коэффициенты $a^{i_1 \cdots i_k}$ умножаются на знак $(-1)^{|\sigma|}$ при перестановке индексов $\sigma \in S_k$. Пространство кососимметричных тензоров обозначается $\Lambda^k V$.

Более инвариантно можно сказать, что симметричные тензоры это тензоры который при перестановке сомножителей переходят в себя, а кососимметричные тензоры -это тензоры которые при перестановке сомножителей умножаются на знак. В пространствах $S^k V$ и $\Lambda^k V$ несложно указать базис, в простейшем примере $k = 2$ этот базис имеет вид

$$S^2 V = \langle e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \mid 1 \le i \le j \le N \rangle, \quad \Lambda^2 V = \langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \mid 1 \le i < j \le N \rangle.$$

Для произвольного $k$ базис можно выбрать в виде

$$\begin{array}{rll} S^k V = \langle & e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} + \text{ sym. terms} & |1 \le i_1 \le ... \le i_k \le N \rangle, \\ \Lambda^k V = \langle & e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} + \text{ asym. terms} & |1 \le i_1 < ... < i_k \le N \rangle. \end{array}$$

Предложение 1. Размерности пространств симметрических и кососимметрических тензоров равны:

$$\dim S^k V = \left( \begin{array}{c} N + k - 1 \\ k \end{array} \right) = \frac{N(N+1)...(N+k-1)}{k!} = \frac{N^{\uparrow k}}{k!},$$
$$\dim \Lambda^k V = \left( \begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) = \frac{N(N-1)...(N-k+1)}{k!} = \frac{N^{\downarrow k}}{k!}.$$

Предложение 2. $V \otimes V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$, далее появляются еще слагаемые $V^{\otimes k} = S^k V \oplus \Lambda^k V \oplus ...$

Для любого линейного преобразования $A$ оператор $A^{\otimes k} : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ сохраняет подпространства $S^k V$ и $\Lambda^k V$. В частности, если $V$ является представлением группы $G$, то $S^k V$ и $\Lambda^k V$ также являются представлениями группы $G$.

Предложение 3. Для любого оператора $A : V \to V$ верно

$$\operatorname{Tr} S^2 A = \frac{1}{2} \left( (\operatorname{Tr} \mathrm{A})^2 + \operatorname{Tr} \mathrm{A}^2 \right), \quad \operatorname{Tr} \Lambda^2 A = \frac{1}{2} \left( (\operatorname{Tr} \mathrm{A})^2 - \operatorname{Tr} \mathrm{A}^2 \right).$$

Из этой формулы находятся характеры представлений $S^2\rho$ и $\Lambda^2\rho$:

$$\chi_{S^2\rho}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho\left(g^2\right)\right), \quad \chi_{\Lambda^2\rho}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho\left(g^2\right)\right).$$

Теперь обсудим несколько примеров групп Ли.

SO(3) Группа $SO(3)$ состоит из матриц $R$ удовлетворяющих $R^tR = E, \det R = 1$. В терминах матричных элементов

$$R_{ki}R_{kj} = \delta_{ij}, \quad \epsilon_{pqr}R_{1p}R_{2q}R_{3r} = 1$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и $\epsilon$ символ равен нулю если индексы повторяются и знаку перестановки иначе. Второе соотношение можно переписать в более общей форме

$$\epsilon_{pqr}R_{ip}R_{jq}R_{kr} = \epsilon_{ijk}$$

Свернув с $R_{ks}$ получаем

$$\epsilon_{ijk}R_{ks} = \epsilon_{pqs}R_{ip}R_{jq}$$

Мы проверяли на прошлой лекции, что группа $SO(3)$ трехмерная. Это означает, что все эти соотношения можно локально разрешить и выразить все матричные элементы через какие-то три, эти три являются локальными координатами на группе. Более геометрически элементы группы $SO(3)$ описываются при помощи углов Эйлера, их опять же три и они тоже являются локальными координатами.

Нам будет удобно ввести координаты на группе $SO(3)$ еще одним способом. Любой элемент $SO(3)$ является вращением относительно некоторой оси на некоторый угол $\alpha$. Через $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ мы обозначим направляющий вектор этой оси. Отнормируем вектор $\vec{n}$ так, что $|\vec{n}| = 1$. То есть мы считаем, что любой элемент $SO(3)$ параметризуется точкой двумерной сферы $\vec{n}$ и углом $\alpha$.

Произвольный вектор $\vec{x}$ разлагается в сумму

$$\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp$$

где $\vec{x}_\parallel = (\vec{x}, \vec{n})\vec{n}$ параллелен $\vec{n}, x_\perp$ ортогонален $\vec{n}$. Вращение действует на эти векторы по формуле

$$\vec{x}_\parallel \mapsto x_\parallel, \quad \vec{x}_\perp \mapsto \cos\alpha\vec{x}_\perp + \sin\alpha\left[\vec{n}, \vec{x}_\perp\right].$$

Здесь $[\cdot, \cdot]$ обозначает векторное произведение. Тогда для вектора $\vec{x}$ мы имеем

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \sin\alpha[\vec{n}, \vec{x}] + (1 - \cos\alpha)((\vec{x}, \vec{n})\vec{n} - \vec{x}).$$

Вычислим теперь это в матричном языке. Оператор векторного умножения на $\vec{n}$ имеет матрицу $N$, матрица оператора $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, \vec{n})\vec{n} - \vec{x}$ равна $N_2$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_1n_2 & n_2^2 - 1 & n_2n_3 \\ n_1n_3 & n_2n_3 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что $N_2 = N^2$. Поэтому матрица поворота на угол $\alpha$ относительно оси натянутой на $\vec{n}$ имеет вид

$$R = E + \sin\alpha N + (1 - \cos\alpha)N^2.$$

Вектор $\vec{n}$ имел единичную длину, поэтому матрица $N$ имеет свойство $N^3 = -N$. Используя разложение в ряд экспоненты мы получаем, что

$$R = \exp(\alpha N)$$

Матрица $\alpha N$ является произвольной кососимметричной матрицей 3×3, т.е. произвольным элементом алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Это является иллюстрацией к следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $G$ группа Ли и $A \in T_E G$ элемент ее алгебры Ли. Тогда $\exp A \in G$.

Для случая группы $SO(2)$ это утверждение уже видели раньше.

Отметим, что вообще говоря неверно, что любой элемент группы Ли является экспонентой от элемента алгебры Ли. Но для элементов близких к $E$ это верно, с другой стороны верно, что окрестность $E$ порождает связную компоненту единицы группы $G$, в этом смысле алгебра Ли в большой мере определяют группу Ли.

Для групп $SO(N)$ при $N > 3$ уже сложно описать все элементы геометрически. С алгеброй Ли можно работать точно также, образующими являются элементарные кососимметрически матрицы $J_{ab} = E_{ab} - E_{ba}, 1 \le a < b \le N$, которые есть разность двух матричных единиц. В примере группы $SO(3)$ эти матрицы соответствуют единичным базисным векторам

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутаторы в этом базисе имеют вид $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J_c$ из этого следует, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ изоморфна $\mathbb{R}^3$. Матрица $N$ использованная выше по этому базису разлагается просто как $N = n_1 J_1 + n_2 J_2 + n_3 J_3$.

Есть еще одно обобщение, а именно можно рассмотреть группу $SO(n,m))$ преобразований сохраняющих скалярное произведение с сигнатурой $(n,m)$. Более формально $SO(n,m) = \{g \mid gSg^t = S\}$, где $S$ матрица Грамма формы. В частности $SO(3,1)$ называется группой Лоренца. **U**(2) Группа $U(2)$ состоит матриц $g$ таких, что $gg^* = E$. Запишем эти соотношения явно:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1, a\bar{c} + b\bar{d} = 0, c\bar{c} + d\bar{d} = 1$$

Решая эти уравнения получаем, что $c = -\lambda\bar{b}, d = \lambda\bar{a}$, где $|a|^2 + |b^2| = 1, |\lambda| = 1$. То есть элемент группы $U(2)$ задается точкой трехмерной сферы и еще комплексным числом по модулю равным 1. Группа $U(2)$ четырехмерна, вообще размерность группы $U(N)$ равна $N^2$.

SU(2) Если наложить дополнительное условие $\det g = 1$, то это фиксирует $\lambda = 1$. То есть группа $SU(2)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Разложив по $a, b$ на вещественную и мнимую часть $a = a_0 + \mathrm{i}a_3, b = a_2 + \mathrm{i}a_1$ мы можем переписать произвольный элемент из $SU(2)$ в виде

$$a_0 E + \mathrm{i}a_1\sigma_1 + \mathrm{i}a_2\sigma_2 + \mathrm{i}a_3\sigma_3$$

где $\sigma$ матрицы Паули определяются по формулам

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Набор параметров $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ удовлетворяющие $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ можно воспринимать как точку трехмерной сферы, и это взаимно-однозначное соответствие между трехмерной сферой и $SU(2)$.

Есть еще вариант параметризации при помощи угла $\alpha$ и трехмерного вектора $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. А именно, пусть $a_0 = \cos\alpha, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sin^2\alpha$, тогда введем $n_j$ так, что $a_j = n_j \sin\alpha$. Тогда матрица $g$ равна

$$g = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}).$$

Последняя формула может быть переписана как $\exp(\mathrm{i}\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))$.

Матрицы $\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$ образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{su}_2$. Как легко видеть из определения эта алгебра состоит из косоэрмитовых матриц со следом 0. Если их перенормировать на минус двойку, то есть ввести $I_a = -\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_a, a = 1, 2, 3$, то получим, что $[I_a, I_b] = \epsilon_{abc} I_c$, то есть алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ изоморфна $\mathfrak{so}(3)$. Но группы Ли на самом деле разные, см. задачи.

Предложение 5. а) Алгебра Ли коммутативной группы Ли будет тоже коммутативной.

б) Если группа Ли связна и ее алгебра Ли коммутативна, то и сама группа тоже коммутативна.

Доказательство. а) Напомним, что структура алгебры Ли на касательном пространстве происходила из коммутирования элементов в группе. А именно мы брали две кривые $g(t) = E + At + o(t)$ и $h(s) = E + Bs + o(s)$ и рассматривали коммутатор $h(s)g(t)h(s)^{-1}$. Разлагая его в ряд в первых членах получается $E + h(s)Ah(s)^{-1}$ Теперь оставляя только первый член по $s$ мы получаем $[B, A]$.

Если мы предполагаем, что группа коммутативная, $h(s)g(t)h(s)^{-1} = g(t)$. Оставляя только первый член по $t$ получаем $A = h(s)Ah(s)^{-1}$. Оставляя первый член по $s$ получаем $[B, A] = 0$.

б) Если $[A, B] = 0$, то $\exp(A)$ и $\exp(B)$ коммутируют. Поскольку для связной группы образ экспоненциального отображения порождает всю группу, то мы получаем, что группа коммутативная.

### 5.0.14 10 Представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$

#### Теория

Определение 1. Представлением группы Ли $G$ называется гладкий гомоморфизм $\rho : G \to GL(V)$.

Рассматривая образ любой кривой $g(t) = E + tA + o(t)$ можно найти образ элемента $A \in \operatorname{Lie} G$ как первый член в разложении $\rho(g(t)) = E + d\rho(A) + o(t)$. Это отображение $d\rho$ является линеаризацией отображения $\rho$, в локальных координатах оно задается матрицей которая является матрицей якобина $\rho$.

Линейность отображение $d\rho$ можно увидеть непосредственно, а именно

$\rho(g(t)h(t)) = \rho(E + t(A + B) + o(t)) = E + d\rho(A + B)t + o(t)$,

$\rho(g(t))\rho(h(t)) = (E + td\rho(A) + o(t))(E + td\rho(B) + o(t)) = E + (d\rho(A) + d\rho(B))t + o(t)$,

откуда $d\rho(A + B) = d\rho(A) + d\rho(B)$. Аналогично доказывается и $d\rho(\lambda A) = \lambda d\rho(A)$.

Мы использовали структуру группы на $G$ для простоты изложения, линейность отображения $d\rho$ можно показать и без этого. Но сейчас мы покажем, что отображение $d\rho$ согласовано со структурой алгебры Ли на $\mathfrak{g}$. А именно, так как

$$\begin{aligned}
\rho\left(h(s)g(t)h(s)^{-1}\right) &= \rho\left(E + t\left(h(s)Ah(s)^{-1}\right)\right) = E + d\rho\left(h(s)Ah(s)^{-1}\right)t + o(t), \\
\rho(h(s))\rho(g(t))\rho(h(s))^{-1} &= \rho(h(s))(E + td\rho(A) + o(t))\rho(h(s))^{-1} = \\
&= E + \rho(h(s))d\rho(A)\rho(h(s))^{-1}t + o(t),
\end{aligned}$$

то, из того, что $\rho$ является гомоморфизмом групп следует, что

$$\rho(h(s))d\rho(A)\rho(h(s))^{-1} = d\rho\left(h(s)Ah(s)^{-1}\right),$$

откуда беря первый член по $s$ получаем, что

$$[d\rho(B), d\rho(A)] = d\rho([B, A]).$$

То есть мы доказали следующий факт.

Предложение 1. Отображение $d\rho$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е.

$$[d\rho(A), d\rho(B)] = d\rho([A, B]),$$

$\forall A, B \in \mathfrak{g}$.

Определение 2. Представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм алгебр Ли $\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Предыдущее предложение доказывает, что по представлению группы Ли всегда строится представление алгебры Ли. Один из главных способов изучения представлений групп Ли заключается в том, что сначала изучаются представления соответствующей алгебры Ли, а уже потом изучается вопрос их подъема (интегрирования) до представлений группы Ли.

Замечание. Операцию подъема можно объяснить при помощи экспоненциального отображения. А именно, для любого $A \in \mathfrak{g}$ есть кривая $g(\alpha) = \exp(\alpha A) \in G$, эти элементы удовлетворяют $g(\alpha + \beta) = g(\alpha)g(\beta)$. Тогда в представлении мы имеем, что

$$\rho(g(\alpha + \beta)) = \rho(g(\alpha))\rho(g(\beta)).$$

Дифференцируя это уравнение по $\beta$ и подставляя $\beta = 0$ получаем, что $\frac{d}{d\alpha}\rho(g(\alpha)) = \rho(g(\alpha))d\rho A$. Это дифференциально уравнение имеет единственное решение с начальным условием $\rho(g(0)) = E$, а именно $\rho(g(\alpha)) = \exp(d\rho A)$. То есть мы показали, что

$$\rho(\exp(\alpha A)) = \exp(d\rho A).$$

Пример 1. Рассмотрим одномерную группу $SO(2) \simeq U(1)$. Ее алгебра Ли одномерна, порождена одним элементом $J$, с соотношением $[J, J] = 0$. Чтобы найти $n$-метрное представление это алгебр Ли надо найти матрицу $n \times n$ с таким коммутатором, но это условие ничего не означает, так как любая матрица в коммутаторе с собой равна 0. Мы знаем, что с представлениями группы тут ситуация более тонкая, из того, что $\exp(2\pi J) = 1$ следует дополнительное условие, заключающееся в том, что матрица $iJ$ диагонализуема с целыми собственными числами.

Пример 2. Найдем теперь представления алгебры $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$. Эта алгебра задается образующими $J_1, J_2, J_3$ с соотношениями $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J_c$. Прежде чем строить общую теорию поищем маломерные представления.

У любой алгебры Ли есть тривиальное одномерное представление, в котором все генераторы переходят в 0. У алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ других одномерных представлений нет, так как любой элемент является коммутатором, а в одномерном представлении все коммутаторы равны нулю.

Конечно представления большой размерности можно строить как прямые суммы уже имеющихся. Например, можно взять прямую сумму $n$ тривиальных одномерных, в нем все генераторы переходят в нулевые матрицы размера $n \times n$. Это не очень интересно, далее мы будем искать неприводимые представления.

Мы знаем, что у алгебры $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ есть двумерное представление (где она задана матрицами $\frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_1, \frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_2, \frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_3$. Здесь $\sigma$ матрицы Паули определяются по формулам

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Также есть трехмерное представление, оно задано матрицами

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы докажет, что для любого натурального числа $n$ у алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ существует единственное $n$-мерное неприводимое представление. Рассмотрим для этого дополнительные операторы действующие в представлении:

$$J^2 = -J_1^2 - J_2^2 - J_3^2, \quad J_+ = J_1 + \mathrm{i}J_2, \quad J_- = J_1 - \mathrm{i}J_2$$

Отметим, что все представления у нас над комплексными числами поэтому мы можем рассматривать такие линейные комбинации. Выбор $J_+, J_-$похож на переход к комплексным координатам, как видно из следующего предложения полученные операторы являются собственными относительно коммутатора с $J_3$. Оператор $J^2$ полезно сравнить с квадратом момента импульса.

Предложение 2. Операторы $J^2, J_+.J_-$удовлетворяют соотношениями:

$$[\mathrm{i}J_3, J_+] = J_+, \quad [\mathrm{i}J_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = -2\mathrm{i}J_3,$$
$$[J_a, J^2] = 0, a = 1, 2, 3;$$

Доказательство. Проверим одно соотношение, остальные проверяются аналоГИЧНО

$$[J_1, J^2] = [J_1, -J_2^2 - J_3^2] = -J_1J_2J_2 + J_2J_1J_2 - J_2J_1J_2 + J_2J_2J_1-$$
$$-J_1J_3J_3 + J_3J_1J_3 - J_3J_1J_3 + J_3J_3J_1 = -[J_1, J_2]\, J_2 - J_2\, [J_1, J_2] - [J_1, J_3]\, J_3 - J_3\, [J_1, J_3] =$$
$$= -J_3J_2 - J_2J_3 - (-J_2)\, J_3 - J_3\, (-J_2) = 0.$$

Оператор $J^2$ называется оператором Казимира. Из того, что он коммутирует со всеми генераторами алгебры следует, что он действует константой (постоянной матрицей) в любом конечномерном неприводимом представлении. ??? .1 В одномерном тривиальном представлении это $J^2$ конечно действует нулем, используя формулу (2) находим, что в двумерном представлении $J^2$ действует числом $\frac{3}{4}$, используя формулу (3) находим, что в трехмерном представлении $J^2$ действует числом 2.

Пусть $V$ - какое-то неприводимое представление алгебры $\mathfrak{so}(3)$. Так как операторы $J^2$ и $iJ_3$ коммутируют, то их можно одновременно диагонализовать. $2^2$ Обозначим через $v_{\lambda,m}$ базис из их собственных векторов:

$$J^2 v_{\lambda,m} = \lambda v_{\lambda,m}, \quad \mathrm{i}J_3 v_{\lambda,m} = m v_{\lambda,m}$$

Предложение 3. $J_+ v_{\lambda,m}$ является собственным для операторов $J, J_3$ с собственными значениями $\lambda$ и $m+1$ соответственно, т.е. $J_+ v_{\lambda,m}$ пропорционален $v_{\lambda,m+1}$. Аналогично $J_- v_{\lambda,m}$ пропорционален $v_{\lambda,m-1}$.

[01] На самом деле мы здесь воспользовались так называемой леммой Шура, которая гласит, что любой оператор $A$ который коммутирует с операторами $\rho(g)$ в неприводимом представлении групп $G$ является константой. Доказывается она так - рассматривается любой собственный вектор $v$ оператора $A$ с собственным значением $\lambda$, тогда вектора вида $\rho(g)v$ порождают все векторное пространство (из неприводимости), с другой стороны они будут все собственными для оператора $A$ с собственным значением $\lambda$, откуда следует, что $A = \lambda$.

[2] Как уже выше было сказано $J^2$ действует просто числом. Теоретически могло оказаться, что оператор i $J_3$ действует с нетривиальными жордановыми блоками, но как будет видно из следующего предложения собственные вектора оператора i $J_3$ образуют подпредставление алгебры $\mathfrak{s}(2)$. Это подпредставление должно совпасть со всем пространством, так как мы сейчас рассматриваем неприводимое представление. Значит в представлении есть базис из векторов собственных относительно i $J_3$(. и $J^2$).

Доказательство. Используя выведенные выше соотношения имеем:

$$J^2\left(J_+ v_{\lambda,m}\right) = J_+\left(J^2 v_{\lambda,m}\right) = \lambda J_+ v_{\lambda,m}$$
$$iJ_3\left(J_+ v_{\lambda,m}\right) = J_+\left(iJ_3 v_{\lambda,m}\right) + \left[iJ_3, J_+\right] v_{\lambda,m} = (m+1) J_+ v_{\lambda,m}$$

Вычисления с $J_-$полностью аналогичны.

Таким образом, начиная с одного собственного вектора $v_{\lambda,m}$ можно построить целую цепочку собственных векторов применяя $J_+$и $J_-$. Так как пространство представления $V$ является конечномерным, в цепочке найдутся крайние вектора $v_{\lambda,m_{\max}}, v_{\lambda,m_{\min}}$ такие, что $J_+ v_{\lambda,m_{\max}} = 0$ и $J_- v_{\lambda,m_{\min}} = 0$.

Вычислим теперь $J^2$:

$$\lambda v_{\lambda,m_{\max}} = J^2 v_{\lambda,m_{\max}} = \left(-J_3^2 - J_1^2 - J_2^2\right) v_{\lambda,m_{\max}} = \left(-J_3^2 - \frac{J_+J_- + J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} =$$
$$= \left(-J_3^2 - \frac{2J_-J_+ + [J_+, J_-]}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} =$$
$$= \left(-J_3^2 + iJ_3 - \frac{2J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} = \left(m_{\max}^2 + m_{\max}\right) v_{\lambda,m_{\max}}$$

Аналогично $\lambda v_{\lambda,m_{\min}} = J^2 v_{\lambda,m_{\min}} = \left(m_{\min}^2 - m_{\min}\right) v_{\lambda,m_{\max}}$. Обозначим теперь $j = m_{\max}$, тогда $\lambda = j^2 + j$, и на $m_{\min}$ мы получаем квадратное уравнение с корням $j+1$ и $-j$. Первый корень не подходит, так как $m_{\max} - m_{\min} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ так как один вектор получается из другого операторами $J_-$. Второй корень может подойти если $2j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Эквивалентно $j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...\right\}$.

Будем обозначать через $\pi_j$ представление $\mathfrak{su}(2)$ в котором $j = m_{\max}$. Оно имеет базис из векторов $v_{\lambda,j}, v_{\lambda,j-1}, ..., v_{\lambda,-j}$. Следовательно $\dim \pi_j = 2j+1$.

В базисе $v_{\lambda,j}, v_{\lambda,j-1}, ..., v_{\lambda,-j}$ матрица оператора $\mathrm{i}J_3$ имеет диагональный вид. оператора $J_+$все ненулевые элементы стоят над диагональю, у оператора $J_-$все ненулевые элементы стоят под диагональю.

$$J_+ \mapsto \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j-2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -j+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -j \end{pmatrix},$$

...

Матричные элементы $a_m, b_m$ зависят от нормировки собственных векторов $v_{\lambda,m}$. Часто изучают унитарные представления групп Ли, в которых элементам группы соответствуют операторы из унитарной группы $U(N)$, а элементам алгебры Ли соответствуют элементы из алгебры Ли $\mathfrak{u}(N)$. Тогда разные собственные вектора являются ортогональными и можно сделать вектора $v_{\lambda,m}$ ортонормированным базисом.

Тогда оператор $J_a^* = -J_a$, откуда $J_+^* = -J_-$, т.е. $\overline{a_m} = -b_{m+1}$. Можно найти точное значение $|a_m|$, см. задачу ниже.

Заметим, что все представление $\pi_j$ порождено из вектора $v_\lambda$ действием оператора $J_-$. По аналогии с квантово-механической задачей о гармоническом осцилляторе его можно называть оператором рождения, а оператор $J_+$оператором уничтожения. Но, в отличии от гармонического осциллятора, где нарождать состояния можно до бесконечности, представления $\pi_j$ конечномерны.

Перейдем теперь от представления алгебры Ли к представлению группы. Начнем с группы $SO(3)$. На прошлой лекции мы показали, что любой элемент этой группы имеет вид $\exp\left(\alpha \sum n_a J_a\right)$, где $\sum n_a^2 = 1$. Легко написать формулу для $\exp\left(\alpha J_3\right)$:

$$e^{\alpha J_3} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-i\alpha j} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha(j-1)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha(j-2)} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & e^{it(j-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & e^{i\alpha j} \end{pmatrix}$$

С другой стороны, в группе $SO(3)$ верно $\exp 2\pi J_3 = E$ (так как геометрически $\alpha$ это угол поворота и поворот на угол $2\pi$ это тождественное преобразование). А по формуле (5) получаем, что в представлении $\pi_j$ элементу $e^{2\pi J_3}$ соответствует единичный только если $j$ - целое. А для полуцелых $j$ получается, что единичному элементу соответствует неединичный элемент, что невозможно. Для группы $SU(2)$ ситуация другая. Любой элемент это экспонента $\exp\left(\alpha \mathrm{i} \sum n_a \sigma_a\right)$, но элементу $J_3$ соответствует матрица $\frac{-\mathrm{i}}{2}\sigma_3$. Поэтому, в группе $SU(2)$ верно $\exp 4\pi J_3 = E$, но из формулы (5) следует, что в представлении $\pi_j$ элементу $e^{4\pi J_3}$ всегда соответствует единичная матрица, так что противоречия не получается.

Предложение 4. а) Для целых $j$ представление $\pi_j$ интегрируется до представления группы $SO(3)$. При полуцелых $j$ однозначного представления группы $SO(3)$ не существует.

б) Для любого $j$ представление $\pi_j$ интегрируется до представления группы $SU(2)$.

Замечание. Это предложение является свидетельством того, что группы Ли $SU(2)$ и $SO(3)$ не изоморфны, в отличии от соответствующих алгебр Ли.

Замечание. Строго говоря, выше мы доказали что при полуцелых $j$ нет представления группы $SO(3)$, но не доказывали существования представления при целых $j$. Мы это выведем из другой конструкции представлений $\pi_j$ на следующей лекции.

Перейдем к характерам представлений и тензорным произведениям. Характер вводится стандартной формулой $\chi(g) = \operatorname{Tr}\rho(g)$. В группе $SU(2)$ любая матрица сопряжена матрице $\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} = \exp\left(\mathrm{i}\varphi\sigma_3\right)$. Поэтому характер достаточно вычислять на таких диагональных матрицах: $\chi(\varphi) = \operatorname{Tr}\rho\left(\exp\left(\mathrm{i}\varphi\sigma_3\right)\right)$.

Предложение 5. Характеры неприводимых представлений $\pi_j$ группы $SU(2)$ равны

$$\chi_j(\varphi) = e^{2j\mathrm{i}\varphi} + e^{2(j-1)\mathrm{i}\varphi} + ... + e^{-2j\mathrm{i}\varphi} = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Доказательство. Следует из формулы (5).

Рассмотри тензорное произведение двух представлений. Оно задается той же формулой, что раньше. Как и раньше, характер тензорное произведения равен произведению характеров. Чтобы понять что такое тензорное произведение на уровне алгебр Ли, надо опять взять кривую $g(t)$. Тогда

$$\rho_1(g(t)) \otimes \rho_2(g(t)) = E \otimes E + \left(d\rho_1(A) \otimes E + E \otimes d\rho_2(A)\right) t + o(t)$$

Определение 3. Пусть $\xi_1, \xi_2$ два представления алгебры Ли g. Их тензорным произведением $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ называется представление заданное формулой:

$$\xi(x) = \xi_1(x) \otimes 1 + 1 \otimes \xi_2(x), \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Предыдущее вычисление показывает, что если представления $\xi_1, \xi_2$ происходят (являются дифференциалами) представлений группы, то понятия тензорного произведения представлений группы и тензорного произведения представлений алгебры Ли между собой согласованы.

### 5.0.15 11 Представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$

Теорема 1 (Без доказательства). Если $G \subset SO(3)$ и $|G| < \infty$, то $G$ изоморфна одной из следующий групп: $C_n, D_n, A_4, S_4, A_5$.

Для поиска представлений иногда может помочь следующая теорема.

Теорема 2 (Без доказательства). Размерность неприводимого представления делит порядок группы $|G|$.

**Представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$**

На прошлой лекции мы строили представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ и от них переходили к представлениям групп Ли $SU(2)$ и $SO(3)$. Сейчас мы обсудим как можно строить представления стартуя с группы.

Группа $SO(3)$ задана своим трехмерным представлением $V = \mathbb{R}^3$. Напомним, что матрицы $R$ в нем удовлетворяю уравнениям

$$R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}, \quad \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}R_{kr} = \epsilon_{pqr}.$$

Из этих уравнений сверткой получается

$$\epsilon_{pqr}R_{rk} = \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}.$$

Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V$. Элементы в нем можно писать как тензоры $t = t_{ij}e_i \otimes e_j$. Группа $SO(3)$ действует по формуле

$$(R \otimes R)t = t'_{pq}e_p \otimes e_q, \quad t'_{pq} = R_{pi}R_{qj}t_{ij}.$$

Мы знаем, что тензорное произведение можно разложить в прямую сумму $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2V$. Начнем с кососимметрических тензоров. Имеем $\dim \Lambda^2V = 3$. Это можно еще объяснить сказав, что у кососимметричного тензора есть только три нетривиальные компоненты $t_{12}, t_{13}, t_{23}$. Обозначим базис в $\Lambda^2V$ как $e'_i = \epsilon_{ijk}e_j \otimes e_k$. Тогда имеем

$$Re'_i = R \otimes R\,(\epsilon_{ijk}e_j \otimes e_k) = R_{qj}R_{rk}\epsilon_{ijk}e_q \otimes e_r = \epsilon_{pqr}R_{pi}e_q \otimes e_r = R_{pi}e'_p.$$

Получили, что группа $SO(3)$ действует на $\Lambda^2V$ в базисе $e'_i$ той же формулой, что и на $V$ в базисе $e_i$. Значит эти представления изоморфны.

Можно это увидеть и на уровне характеров. Характеры постоянен на классах сопряженности, классы сопряженности в $SO(3)$ задаются углом поворота. Тогда, если $R(\alpha)$ какой-то поворот на этот угол, то

$$\begin{aligned}
\chi_V(R(\alpha)) &= 1 + 2\cos\alpha \\
\chi_{\Lambda^2V}(R(\alpha)) &= \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 - \chi_V\left(R(\alpha)^2\right)}{2} = 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos(2\alpha) = 1 + 2\cos\alpha \\
\chi_{S^2V}(R(\alpha)) &= \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 + \chi_V\left(R(\alpha)^2\right)}{2} = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

Мы видим, что характеры $\chi_V$ и $\chi_{\Lambda^2V}$ равны, это является подтверждением того, что эти представления изоморфны.

Теперь посмотрим на симметрические тензоры $S^2V$. Это пространство шестимерно, независимые компоненты - это $t_{11}, t_{12}, t_{22}, t_{13}, t_{23}, t_{33}$. Его характер мы нашли выше, правда формула пока не очень внятная.

Удобно перейти от косинусов к экспонентам от мнимых аргументов. Тогда

$$\chi_V(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha}$$
$$\chi_{S^2V}(R(\alpha)) = e^{-2\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 2 + e^{\mathrm{i}\alpha} + +e^{2\mathrm{i}\alpha}$$

На самом деле представление $S^2V$ не является неприводимым. В нем есть тривиальное подпредставление натянутое на вектор

$$\delta = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$$

Можно это записать в тензорных обозначениях

$$t_{ij} = \delta_{ij}, \quad R_{pi}R_{qj}\delta_{ij} = \delta_{pq}$$

Вторым представлением будет ортогональное дополнение, оно соответственно будет пятимерным. Чтобы говорить о таком дополнении надо ввести эрмитово скалярное произведение, но это, в данном случае, просто, базис $e_1, e_2, e_3$ является ортонормированным и скалярное произведение на тензоры переносится по формуле $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle$. Тогда ортогональное дополнение к $\delta$ задается уравнением

$$t_{11} + t_{22} + t_{33} = 0.$$

Если отождествить симметричные тензоры $t_{ij}$ с симметричными матрицами, то последнее условие превратится в условие бесследовости матрицы.

Обозначим получившееся пятимерное представление как $\mathrm{S}_2$. Тогда его характер находится из характера $S^2V$:

$$\chi_{\mathrm{S}_2}(R(\alpha)) = e^{-2\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{2\mathrm{i}\alpha}$$

Если обозначить $\mathrm{S}_1$ представление $V$ и $\mathrm{S}_0$ тривиальное представление, то имеем их характеры

$$\chi_{\mathrm{S}_1}(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha}, \quad \chi_{\mathrm{S}_0}(R(\alpha)) = 1.$$

Из этих примеров можно предположить схему для любого целого $n$ есть представление $\mathrm{S}_n$ размерности $2n+1$, с характером

$$\chi_{\mathrm{S}_n}(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}n\alpha} + ... + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha} + ... + e^{\mathrm{i}n\alpha}.$$

По формулам для характеров видно, что это представления $\pi_n$ которые были на прошлой лекции. Как строить следующие $\mathrm{S}_n$? Надо брать большие тензорные степени. Возьмем треть степень $V \otimes V \otimes V$. Там есть подпространства $S^3V$ и $\Lambda^3V$. Размерность $\Lambda^3V$ равна 1, единственная нетривиальная компонента это $t_{123}$. Представление будет тривиальным

$$t_{ijk} = \epsilon_{ijk}, \quad (R \otimes R \otimes R)\epsilon_{ijk} = R_{pi}R_{qj}R_{rk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{pqr}.$$

Симметрические тензоры $S^3V$ образуют 10 мерное пространство. По аналогии с прошлыми случаями надо ожидать, что $S^3V$ является приводимым и там внутри найдется 7 -мерное подпредставление $\mathrm{S}_3$. Это представлением можно выделить условием бесследовости, т.е. что свертка с $\delta_{ij}(SO(3)$ инвариантный тензор) равна нулю

$$\delta_{ij}t_{ijk} = 0.$$

Так как индекс $k$ является свободным, то это 3 линейных уравнения в 10-мерном пространстве, они задают 7-мерное подпредставление. И так далее, представление $\mathrm{S}_n$ можно построить как пространство тензоров ранга $n$ которые являются симметричными и бесследовыми (зануляются при свертке с $\delta_{ij}$).

Есть другой способ явно реализовать эти представления $\mathrm{S}_n$ как гармонические полиномы степени $n$. Подробности даны в задаче ниже.

Рассмотрим теперь группу $SU(2)$. Она задана своим двумерным представлением, назовем пространство представления $V]^1$ Будем брать его тензорные степени, а в них симметричные тензоры. Зафиксируем ортонормированный базис $e_+, e_-$в пространстве $V$ в котором матрицы i $J_3, J_+, J_=$имеют вид

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пространство $S^2V$. Базисом в нем являются вектора

$$e_+ \otimes e_+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \right), \quad e_- \otimes e_-.$$

Коэффициент во втором векторе подобран, чтобы базис был ортонормированным. Пользуясь формулой действия алгебры Ли в тензорном произведении находим формулы для действия генераторов i $J_3, J_+, J_=$в этом базисе

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что получилось представление изоморфное $\pi_1$ построенное на прошлой лекции: структура матриц такая же.

Рассмотрим пространство $S^3V$. Базисом в нем являются вектора

$$e_+ \otimes e_+ \otimes e_+, \frac{1}{\sqrt{3}} \left( e_+ \otimes e_+ \otimes e_- + e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+ \right),$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_- \otimes e_+ \right), \quad e_- \otimes e_- \otimes e_-.$$

Пользуясь формулой действия алгебры Ли в тензорном произведении находим формулы для действия генераторов i$J_3, J_+, J_=$в этом базисе

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Получилось представление $\pi_{3/2}$, построенное на прошлой лекции.

Очевидно, что это вычисление работает и в общем случае, представление $S^nV$ неприводимо и изоморфно $\pi_{n/2}$. В частности мы доказали, что все эти представления интегрируются до представления группы $SU(2)$.

Перейдем к характерам представлений и тензорным произведениям. Напомним, что в группе $SU(2)$ любая матрица сопряжена матрице $\exp\left(i\varphi\sigma_3\right)$ и характер можно писать в виде $\chi(\varphi) = \operatorname{Tr}\rho\left(\exp\left(i\varphi\sigma_3\right)\right)$. Характеры представлений мы нашли на прошлой лекции:

$$\chi_j(\varphi) = e^{2j\mathrm{i}\varphi} + e^{2(j-1)\mathrm{i}\varphi} + ... + e^{-2j\mathrm{i}\varphi} = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin\varphi}.$$

[01] Выше мы называли $V$ трехмерное представление $SO(3)$, но этот конфликт обозначений не должен привести к недоразумениям.

Предложение 3 (Клебш, Гордан). Тензорное произведение представлений $\pi_{j_1}$ и $\pi_{j_2}$ разлагается в прямую сумму неприводимых:

$$\pi_{j_1} \otimes \pi_{j_2} = \bigoplus_{\substack{j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant (j_1+j_2) \\ (j_1+j_2)-j \in \mathbb{Z}}} \pi_j .$$

В частности $(\pi_0 \otimes \pi_j) = \pi_j, \left(\pi_{1/2} \otimes \pi_j\right) = \pi_{j+1/2} + \pi_{j-1/2}($ при $j > 0), (\pi_1 \otimes \pi_j) = \pi_{j+1} + \pi_j + \pi_{j-1}($ при $j > 1/2)$.

Доказательство. Удобнее всего производить вычисления с характерами. Например: $\chi_{1/2}(\varphi) \cdot \chi_j(\varphi) = e^{(2j+1)\mathrm{i}\varphi} + 2e^{(2j-1)\mathrm{i}\varphi} + \ldots + 2e^{(-2j+1)\mathrm{i}\varphi} + e^{(-2j-1)\mathrm{i}\varphi} = \chi_{j+1/2}(\varphi) + \chi_{j-1/2}(\varphi)$

Аналогично доказывается и общая формула (2).

Это разложение означает, что в пространстве $\pi_j \otimes \pi_{j'}$ есть два базиса. Один это базис это тензорные произведения базисов в $\pi_{j_1}$ и $\pi_{j_2} : v_{j_1,m_1} \otimes v_{j_2,m_2}$ (здесь $v_{j,m}$ это тоже самое, что мы обозначали $v_{\lambda,m}$ на прошлой лекции, базис $v_{j,m}$ мы будем считать ортонормированным). Другой базис $v_{j,m}$ возникает из разложение в прямую сумму неприводимых, здесь $j$ должно принадлежать региону суммирования в правой части формулы (2). Коэффициенты разложения одного базиса по другому

$$v_{j,m} = \sum C_{j,m}^{j_1,m_1,j_2,m_2} v_{j_1,m_1} \otimes v_{j_2,m_2}$$

называются 3 j символами Вигнера (также иногда называются коэффициентам КлебшаГордана). Из условия что $iJ_3$ действует одинаково на левую и правую часть следует, что коэффициенты ненулевые только при $m = m_1 + m_2$.

Теперь запишем соотношения ортогональности для характеров. По аналогии с конечными группами и группой $SO(2)$ скалярное произведение должно выглядеть как

$$\langle \phi(g), \psi(g) \rangle = \frac{1}{\operatorname{vol} G} \int_G \phi(g)\overline{\psi(g)} dg = \frac{1}{\operatorname{vol} G} \int_{\text{conj.cl.}} \phi(h)\overline{\psi(h)} \operatorname{vol} C_h dh$$

Здесь второй интеграл берется по классам сопряженности, $C_h$ обозначает класс сопряженности элемента $h$. Мера интегрирования $dg$ должна быть правильно выбрана, мы не будем это обсуждать подробно, а ограничимся случаем $G = SU(2)$.

Напомним, что общий элемент из этой группы $G = SU(2)$ имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} a_0 + \mathrm{i}a_3 & a_2 + \mathrm{i}a_1 \\ -a_2 + \mathrm{i}a_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \text{ где } a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Множество таких наборов $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ отождествляется с точками трехмерной сферы. Тогда можно ожидать, что мера $dg$ это просто стандартная мера на трехмерной сфрере.

Класс сопряженности матрицы из $SU(2)$ зависит только от ее собственных значений, обозначим их $e^{\mathrm{i}\varphi}$ и $e^{-\mathrm{i}\varphi}$. След такой матрицы равен $2\cos\varphi$, с другой стороны в обозначения выше он равен $2a_0$. Точки класс сопряженности соответствующий данному $a_0$ параметризуются наборами $(a_1, a_2, a_3)$ такими, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 - a_0^2 = \sin^2\varphi$. Таким образом класс сопряженности соответствующий $\varphi-$ это двумерная сфера радиуса $|\sin\varphi|$, ее объем (т.е. в данном случае площадь поверхности) пропорционален $\sin^2\varphi$.

Эту меру можно найти и более явным вычислением. Напомним, что мы интегрируем только функции постоянные на классам сопряженности, в нашем случае это означает, что функции зависят только от $a_0$. Преобразуем интеграл для произволь- ной такой функции $F(a_0)$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4} F\left(a_0\right) \delta\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1\right) da_0 da_1 da_2 da_3 \sim \\
&\int_{\mathbb{R}^4} F\left(a_0\right) \delta\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1\right) \frac{da_0 da_1 da_2}{2a_3} d\left(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1\right) \sim \\
&\int_{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1} F\left(a_0\right) \frac{da_0 da_1 da_2}{\sqrt{1-a_0^2-a_1^2-a_2^2}}.
\end{aligned}
$$

Здесь означает пропорциональность, общий множитель мы подберем потом. Теперь возьмем интеграл по $a_1, a_2$:

$$
\int_{a_1^2+a_2^2 \leq r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2-a_1^2-a_2^2}} da_1 da_2 = 2\pi r
$$

где мы использовали обозначение $r^2 = 1 - a_0^2$. Тогда исходный интеграл сводится к

$$
\int_{-1}^{1} F\left(a_0\right) \sqrt{1-a_0^2} da_0 = \int_0^{\pi} F(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi \sim \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi
$$

То есть мы опять получили меру $\sin^2 \varphi d\varphi$ для интегрирования по классам сопряженности. Надо еще найти общий множитель перед интегралом. Он подбирается из условия, что интеграл от единичной функции равен 1. Так как $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$, то этот множитель равен $1/\pi$.

Соотношения ортогональности характеров $\chi_j$ и $\chi_l$ выглядят так

$$
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_j(\varphi) \overline{\chi_l(\varphi)} \sin^2 \varphi d\varphi = \delta_{j,l}
$$

Их легко проверить из явной формулы (1) для $\chi_j(\varphi)$.

Можно написать также соотношения полноты

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{k/2}(\alpha) \overline{\chi_{k/2}(\beta)} = \frac{\pi}{2\sin^2 \alpha} \left(\delta_{2\pi}(\alpha-\beta) - \delta_{2\pi}(\alpha+\beta)\right)
$$

где мы использовали формулу суммирования Пуассона. Здесь $\delta_{2\pi}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\alpha - 2\pi k)$ дельта функция на пространстве $2\pi$ периодических функций, а $\delta(\alpha-\beta) - \delta(\alpha+\beta)$ это дельта функция в на пространстве $2\pi$ периодических нечетных функций.

### 5.0.16 12 Представления более общих групп Ли

#### Представления более общих групп Ли

До сих пор мы говорили только о представлениях трех групп Ли $SO(2), SU(2)$ и $SO(3)$. Сегодня мы будем говорить про другие группы Ли и соответствующие им алгебры Ли.

Во первых, вспомним, что мы знаем еще одну трехмерную группу Ли: $SL(2,\mathbb{R})$. Но если ограничиться комплексными представлениями и не обсуждать вопросы унитарности, то ее теория представлений не даст нам ничего нового, так как рассматривая комбинации с комплексными коэффициентами можно получить из элементов $\mathfrak{su}(2)$ элементы $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и наоборот. На самом деле, мы уже брали такие комбинации когда строили конечномерные представления $\mathfrak{su}(2)$. Мы там брали элементы $J_+, J_-, \mathrm{i}J_3$, их коммутационные соотношения имеют вид

$$
[\mathrm{i}J_3, J_+] = J_+, \quad [\mathrm{i}J_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = -2\mathrm{i}J_3.
$$

Тогда после замены $2\mathrm{i}J_3 \leftrightarrow h, \mathrm{i}J_+ \leftrightarrow f, \mathrm{i}J_- \leftrightarrow e$, мы получим коммутационные соотношения 3.

Комплексификацией вещественной алгебры Ли g называется алгебра Ли с такими же структурными константами, но уже рассматриваемая как векторное пространство над комплексными числами. Предыдущие рассуждения показывали, что комплексификации алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ изоморфны. Формулой комплексификацию алгебры Ли можно написать как $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Основные примеры это

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{su}(n,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}).$$

Нетривиальным тут является последний пример, он следует из того, что любая матрица $X$ представима в виде $\frac{1}{2}(X - X^*) + \frac{1}{2}(X + X^*)$, где первое слагаемое является антиэрмитовым $\frac{1}{2}(X - X^*) \in \mathfrak{su}(n)$, а второй эрмитовы $\frac{1}{2}(X + X^*) \in \mathrm{i}\mathfrak{su}(n)$.

Другой пример, где важны подобные рассуждения - это ортогональные группы и алгебры Ли. Напомним, что они определяются по скалярному произведению, если оно имеет сигнатуру $(n,m)$, то соответствующие группа и алгебра Ли обозначаются $O(n,m)$ и $\mathfrak{so}(n,m)$ соответственно. Так как с комплексными коэффициентами все сигнатуры эквивалентны, то и комплексификации этих алгебр изоморфны:

$$\mathfrak{so}(n,m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{so}(n+m,\mathbb{C})$$

Рассмотрим случай четырехмерного пространства. Ясно, что изменение знака у скалярного произведения меняет сигнатуру, но не меняет ни группу Ли ни алгебру Ли, поэтому $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(4,0) \simeq \mathfrak{so}(0,4)$ и $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{so}(1,3)$. Таким образом, есть три ортогональных алгебры Ли $\mathfrak{so}(4), \mathfrak{so}(3,1), \mathfrak{so}(2,2)$. У каждой из них есть другое описание

$$\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$$
$$\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$$
$$\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$$

Формулу (8) мы показали выше, в решении задачи из лекции 9. Формула 10) тоже ожидаема, так как мы знаем, что комплексификации $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ совпадают.

Прокомментируем формулу (9). Стоящая в правой части алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ рассматривается как вещественная алгебра Ли. Как у вещественной алгебры Ли у нее есть базис $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$. Можно брать и другой базис, например $e, f, h, \mathrm{i}e, \mathrm{i}f, \mathrm{i}h$. Изоморфизм (9) говорит, что можно так выбрать базис в алгебре $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, что получатся структурные константы такие же как у алгебры $\mathfrak{so}(3,1)$, доказательство этого вынесено в задачи ниже.

Группа $O(3,1)$ называется группой Лоренца и имеет исключительное значение в физике.

Изоморфизмы (8), (9), 10 полезны для изучения представлений. Напомним, что представления прямого произведения групп строятся при помощи внешнего тензорного произведения $\bigotimes$. Аналогично строятся представления прямой суммы двух алгебр Ли. Например представления алгебры $\mathfrak{so}(4)$ строятся как тензорные произведения представлений алгебр $\mathfrak{su}(2)$, неприводимые представления имеют вид $\pi_j \bigotimes \pi_{j'}$. В частности, есть два двумерных представления $\pi_{1/2} \bigotimes \pi_0$ и $\pi_0 \bigotimes \pi_{1/2}$. Так как комплексификации у алгебр $\mathfrak{so}(3,1)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$ такие же, то у этих алгебр также есть по два двумерных представления. Конечно, вопрос интегрируются ли эти представления до представлений группы, например группы Лоренца $O(3,1)$ требует дополнительного изучения.

Упомянем общий результат о классификации групп Ли. Мы ограничиваемся компактными группа Ли, т.е. такими, что множество их элементов является замкнутым и ограниченным подмножеством в $\mathbb{R}^{N^2}$ (множестве матриц $N \times N$). Группы $SU(N)$ и $SO(N)$ являются компактными, тогда как группы $SL(N,\mathbb{R})$ и $SO(N,M)$ при $N, M > 0$ не являются компактными.

Группа Ли называется простой если она не имеет связных нормальных подгрупп. Условие простоты полезно для классификации, чтобы сразу избавится от случаев вроде прямого и полупрямого произведения.

Теорема 1 (Классификация Картана-Киллинга). Пусть $G$ связная компактная простая группа Ли. Тогда с точностью до факторизации по конечной подгруппе $G$ изоморфна одной из следующих групп $U(1), SU(n), SO(n), Sp(n), E_6, E_7,\ E_8, F_4, G_2$.

Здесь $Sp(n)$ - это компактная симплектическая группа, $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2-$ это, так называемые, исключительные группы.

Неприводимые представления компактных групп все описаны. Чтобы не обращать внимания на факторизацию по конечной подгруппе мы будем далее говорить про представления соответствующих алгебр Ли и ограничимся случаем уже известных нам алгебр $\mathfrak{su}(N)$ и $\mathfrak{so}(n)$.

Обозначим через $V$ стандартное $N$-мерное представление алгебры $\mathfrak{s}(N)$.

Теорема 2. Для любого конечномерного неприводимого представления $W$ алгебры $\mathfrak{s}(N)$ найдется $k$ такое, что $W \subset V^{\otimes k}$.

Для алгебры $\mathfrak{s}(2)$ это означает, что любое представление получается перемножением представлений вида $\pi_{1/2}$, это следует из формулы Клебша-Гордона. Также, на прошлой лекции мы показывали что все неприводимые представления $\mathfrak{su}(2)$ получаются как симметрические тензорные степени $V$.

Посмотрим пример группы $SU(3)$. В тензорном произведении $V \otimes V$ есть подпространства $S^2V$ и $\Lambda^2 V$. Первое из них 6-мерно, второе 3-мерно. Найдем его характер. Базисом в $\Lambda^2 V$ являются тензоры вида

$$e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, \quad e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2, \quad e_3 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_3.$$

Любая матрица в $SU(3)$ сопряжена диагональной, поэтому характер достаточно находить на таких матрицах. Запараметризуем диагональные матрицы в виде

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

ясно, что это параметризация общей диагональной унитарной матрицы с определителем 1. Тогда

$$\chi_V(g) = e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2},$$
$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} + e^{i\varphi_2}.$$

Видим, что характеры получились разными. Т.е. у группы $SU(3)$ есть два разных трехмерных представления, их различие связано с различием между кварком и антикварком в физике. Легко видеть, что $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \overline{\chi_V(g)}$, т.е. представление $\Lambda^2 V$ является двойственным к представлению $V$.

Шестимерное представление $S^2V$ является неприводимым.

Рассмотрим третью тензорную степень $V \otimes V \otimes V$. Пространство кососимметрических тензоров $\Lambda^3 V$ теперь одномерно и является тривиальным представлением. Пространство симметрических тензоров $S^3 V$ является 10-мерным. Можно доказать, что оно является неприводимым представлением. Так как $V \otimes V \otimes V$ 27-мерно, то еще остается $27 - 10 - 1 =$ 16-мерная часть.

На самом деле эта 16-мерная часть является суммой двух неприводимых 8мерных. Это 8-мерное представлением мы знаем - это присоединенное представление. Его можно также найти как подпредставление внутри $V \otimes \Lambda^2 V$.

Подводя итог: мы описали как строить 1-мерное, два 3-мерных, 6-мерное, 8мерное, 10-мерное неприводимые представления группы $SU(3)$. Конечно, это только начало большого списка. Тот факт, что элементарные частицы объединяются в группы такого размера послужил указанием наличия $SU(3)$ симметрии в теории поля (в частности, в современной в Стандартной модели).

У алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ тоже есть стандартное $n$-мерное представление $V$. Опять же можно брать тензорные произведения $V$ с собой, но, в отличии от предыдущего случая, так получатся не все представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$.

Пример. Алгебра $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$. Тогда $V \simeq \pi_1$, в его тензорных степенях встречаются только представления вида $\pi_k$, при $k \in \mathbb{Z}$. То есть не встречаются представления с полуцелым спином.

Пример. Алгебра $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Тогда можно показать (см. задачи), что $V \simeq \pi_{1/2} \bigotimes \pi_{1/2}$, в его тензорных степенях не встречаются например представления $\pi_{1/2} \bigotimes \pi_0, \pi_0 \bigotimes \pi_{1/2}$

Чтобы построить недостающие представления $\mathfrak{so}(n)$ нужна новая конструкция.

Определение 1. Пусть задано векторное пространство $V$ с базисом $e_1, ..., e_n$ и невырожденным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Алгеброй Клиффорда Cl построенной по $V$ называется ассоциативная алгебра с 1, образующими $\gamma_1, ..., \gamma_n$ и соотношениями

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = (e_1, e_j)$$

В частности, если соответствующие векторы $e_i, e_j$ ортогональны, то $\gamma$-образующие антикоммутируют $\gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i$. Замечание. Алгебра Клиффорда не зависит от выбора базиса $e_1, ..., e_n$. Вообще, есть линейное отображение $\gamma : V \to \mathrm{Cl}$ которое переводит любой вектор $v = \sum a_i e_i$ в $\gamma(v) = \sum a_i\gamma_i$. Тогда

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = (v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(V)$ получается квадратичным комбинациями $\gamma$-образующих. Чтобы строить представления алгебры Клиффорда (алгебры $\gamma$-образующих) удобно взять четномерное пространство $n = 2N$ с сигнатурой $(N, N)$. Матрицу Грамма удобно взять в блочном виде $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где $E$ единичная матрица размера $n \times n$.

Теперь построим соответствующее представление алгебры Клиффорда. Рассмотрим переменные $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ и потребуем, чтобы они актикоммутировали: $\xi_a\xi_b + \xi_b\xi_a = 0$. В частности, из соотношения следует, что $\xi_a^2 = 0$. Рассмотрим пространство $S$ - пространство многочленов от переменных $\xi_a$. Поскольку переменные $\xi_a$ антикоммутируют, можно назвать пространство $S$ пространством супермногочленов. Естественным базисом в пространстве $S$ являются вектора $\xi_{a_1}\xi_{a_2}\cdots\xi_{a_k}$, где $a_1 < a_2 < ... < a_k$. Размерность пространства $S$ равна числу подмножеств $N$ элементного множества, то есть $2^N$. Для случая $N = 2$ базис имеет вид

$$1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2.$$

Введем еще действие на $S$ операторов дифференцирования $\xi_a^* = \frac{\partial}{\partial\xi_a}$. Более точно, если мы дифференцируем $\frac{\partial}{\partial\xi_a}$ моном в котором нет $\xi_a$, то мы получаем ноль, а если моном в котором есть $\xi_a$, то мы должны сначала поставить $\xi_a$ на первое место, а потом его убрать. Это значит дифференцирования $\xi_a^*$ между собой антикоммутируют, а с операторами умножения на $\xi_b$ они антикоммутируют при $a \neq b$. Также легко видеть, что $\xi_a\xi_a^* + \xi_a^*\xi_a = 1$. Итого коммутационные соотношения тогда имеют вид:

$$\xi_a^*\xi_b^* + \xi_b^*\xi_a^* = 0, \quad \xi_a\xi_b^* + \xi_b^*\xi_a = \delta_{a,b}$$

Таким образом операторы $\xi_a, \xi_b^*$ удовлетворяют соотношениям алгебры Клиффорда построенной по матрице Грамма $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Теперь мы из них построим представления ортогональной алгебры Ли.

Предложение 3. Операторы $\xi_a\xi_b$ при $a < b, \xi_a^*\xi_b^*$, при $a < b$ и $\frac{1}{2}\left(\xi_a^*\xi_b - \xi_b\xi_a^*\right)$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(N, N)$.

Мы не будем это доказывать, похожее (но чуть более простое) утверждение про связь между алгеброй Клиффорда и ортогональной алгеброй Ли вынесено в задачу ниже. Посчитаем только размерность полученной алгебры: $\frac{N(N-1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} + N^2 = \frac{2N(2N-1)}{2} = \dim \mathfrak{so}(N, N)$.

Так комплексификации алгебр $\mathfrak{so}(N, N)$ и $\mathfrak{so}(2N)$ совпадают, пространство $S$ получает структуру представления алгебры $\mathfrak{so}(2N)$. Более того, как представление алгебры $\mathfrak{so}(2N)$ пространство $S$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ состоящих из векторов с четным и нечетным числом операторов $\xi$ соответственно. Оба эти подпространства $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ имеют размерность $2^{N-1}$ и называются спинорными представлениями алгебры $\mathfrak{so}(2N)$.

Пример. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{s}(4)$. Упомянутые выше спинорные представления $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ являются двумерными. С другой стороны мы знаем, что $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ и все ее неприводимые представления строятся как тензорные произведения представлений левой и правой $\mathfrak{su}(2)$. В действительности $S_{\text{even}}$ и $S_{\text{odd}}$ изоморфны представлениям $\pi_{1/2} \bigotimes \pi_0$ и $\pi_0 \bigotimes \pi_{1/2}$.

# 6 Представления групп

### 6.0.1 примеры представлений групп

$SO(3)$

**Пример**

**Пример 6.1.** *найдем представление группы $SO(3)$.*

*одно из представлений известно*

*а вообще они из экспоненты элемента алгебры находятся...*

*вот формула*

$$e^{\alpha J_3} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-i\alpha j} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha(j-1)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha(j-2)} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & e^{it(j-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & e^{i\alpha j} \end{pmatrix}$$

*и я не шарю короче.*

*у берштейна переучивать нужно.*

*(и это делается стартуя с алгебры.)*

*Но также и делается, стартуя с группы.*

*(тоже лекция берштейна, но уже 11я)*

*(тут тупо формулы, которые когда-то я впишу в способ построения представления)*

$$R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}, \quad \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}R_{kr} = \epsilon_{pqr}$$

$$\epsilon_{pqr}R_{rk} = \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}$$

$$(R \otimes R)t = t'_{pq} e_p \otimes e_q, \quad t'_{pq} = R_{pi} R_{qj} t_{ij}$$

$$Re'_i = R \otimes R \left(\epsilon_{ijk} e_j \otimes e_k\right) = R_{qj} R_{rk} \epsilon_{ijk} e_q \otimes e_r = \epsilon_{pqr} R_{pi} e_q \otimes e_r = R_{pi} e'_p$$

*Можно это увидеть и на уровне характеров. Характеры постоянен на классах сопряженности, классы сопряженности в SO(3) задаются углом поворота. Тогда, если $R(\alpha)$ какой-то поворот на этот угол, то*

$$\chi_V(R(\alpha)) = 1 + 2\cos\alpha$$

$$\chi_{\Lambda^2 V}(R(\alpha)) = \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 - \chi_V\left(R(\alpha)^2\right))}{2} = 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos(2\alpha) = 1 + 2\cos\alpha$$

$$\chi_{S^2 V}(R(\alpha)) = \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 + \chi_V\left(R(\alpha)^2\right))}{2} = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos(2\alpha) \quad (1)$$

$$\chi_V(R(\alpha)) = e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha}$$
$$\chi_{S^2 V}(R(\alpha)) = e^{-2i\alpha} + e^{-i\alpha} + 2 + e^{i\alpha} + +e^{2i\alpha}$$

$SU(2)$

**Пример**

**Пример 6.2.** *Рассмотрим теперь группу $SU(2)$*

*(что известно про нее???)*

$$iJ_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Рассмотрим пространство S2V. Базисом в нем являются вектора*

$$e_+ \otimes e_+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+\right), \quad e_- \otimes e_-$$

$$iJ_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

## 6.1 алгебры Ли

### 6.1.1 примеры алгебр и их свойств

**Пример**

**Пример 6.3.**

$$\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3) \quad (2)$$

*Proof.* докажем изоморфность

(???) □

*известно, что у этих алгебр есть три образующих $J_1, J_2, J_3$ с соотношениями $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J_c$*

*они нужны в (????) описаниях поворотов двумерного пространства, где генераторы реализуются матрицами Паули, или трехмерного, где также есть особенный вид генераторов.*

### 6.1.2 представление алгебры Ли данных групп

Представлением группы Ли G называется гладкий гомоморфизм $\rho : G \to GL(V)$.

В образе любой кривой элементов группы $g(t) = E + tA + o(t)$ образ элемента алгебры этой группы $A \in \operatorname{Lie} G$ как первый член в разложении $\rho(g(t)) = E + d\rho(A) + o(t)$.

Таким образом, отображение $d\rho$, являющееся линеаризацией отображения $\rho$, задает элемент алгебры Ли этой группы.

пара слов про свойства отображения $d\rho$.

Отображение $d\rho$ линейно, то есть $d\rho(A + B) = d\rho(A) + d\rho(B)$, $d\rho(\lambda A) = \lambda d\rho(A)$ действительно:

$$\rho(g(t)h(t)) = \rho(E + t(A + B)) = E + d\rho(A + B)t + o(t)$$
$$\rho(g(t))\rho(h(t)) = (E + td\rho(A) + o(t))(E + td\rho(B) + o(t)) = E + (d\rho(A) + d\rho(B))t + o(t)$$

также отображение $d\rho$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е.

$$[d\rho(A), d\rho(B)] = d\rho([A, B]) \qquad \forall A, B \in g$$

Действительно, чтобы это увидеть, распишем свойство гомоморфизма $\rho$: $\rho\left(h(s)g(t)h^{-1}(s)\right) = \rho(h(s))\rho(g(t))\rho^{-1}(h(s))$. Распишем подробнее:

$$\rho\left(h(s)g(t)h(s)^{-1}\right) = \rho\left(E + t\left(h(s)Ah(s)^{-1}\right)\right) = E + d\rho\left(h(s)Ah(s)^{-1}\right)t + o(t)$$

$$\rho(h(s))\rho(g(t))\rho(h(s))^{-1} = \rho(h(s))(E + td\rho(A) + o(t))\rho(h(s))^{-1} = \\ = E + \rho(h(s))d\rho(A)\rho(h(s))^{-1}t + o(t) \quad (3)$$

Таким образом, из того, что $\rho$ гомоморфизм, следует, что

$$\rho(h(s))d\rho(A)\rho(h(s))^{-1} = d\rho\left(h(s)Ah(s)^{-1}\right) \quad (4)$$

Чтобы дойти до $d\rho$, нужно просто разложить каждый сомножитель до первого члена:

$$(1 + d\rho(B))d\rho(A)(1 - d\rho(B)) = d\rho((1 + B)A(1 - B)) \quad (5)$$

Таким образом,

$$[d\rho(A), d\rho(B)] = d\rho([A, B]) \qquad \forall A, B \in g,$$

то есть $d\rho$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Таким образом мы научились из группы переходить в алгебру.

У алгебры есть представления.

Представлением алгебры Ли $g$ называется гомоморфизм алгебр Ли $\xi : g \to gl(V)$.

Видим, что по представлению группы Ли всегда строится представление алгебры Ли. (?? как)

Таким образом, представления групп Ли часто изучаются с помощью представления соответствующей алгебры Ли, и далее их экспоненциально отображают в представления группы Ли.

А именно, для любого $A \in g$ есть кривая $g(t) = \exp(tA) \in G$, эти элементы удовлетворяют $g(s + t) = g(s)g(t)$.

Тогда для элементов представления получается соотношение $\rho(g(s+t)) = \rho(g(s))\rho(g(t))$.

дифференцируя по t получаем диффур с начальным условием, (подробнее напишу) решение которого экспонента:

$$\rho(\exp(\alpha A)) = \exp(d\rho A) \quad (6)$$

Теперь мы познакомились со связями групп и алгебр Ли.

### Переход от представления алгебры Ли к представлению группы

(хз)

### простейшие конструкции более сложных представлений

конструкции такие: тензорное произведение, (???)
(зачем тензорное произведение?)
Поэтому если $\xi_1, \xi_2$ два представления алгебры ли $\mathfrak{g}$, их тензорным произведением $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ называется представление, заданное формулой:

$$\xi(x) = \xi_1(x) \otimes 1 + 1 \otimes \xi_2(x), \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

(и что с этого?)

## 6.1.3 примеры представлений алгебр

запишем в порядке используемости и покажем, зачем они нужны.

### Пример

**Пример 6.4.** *Найдем представление алгебры* $\mathfrak{su}(2)$
*а также покажем методы работы с этой алгеброй.*
*основные методы состоят в введении дополнительных операторов* $J, J_+, J_-$ *и нахождении чего-то с ними (??)*
*уже известна его реализации в виде операторов вращений плоскости, образующие которых выражаются через матрицы Паули* $\frac{-i}{2}\sigma_1, \frac{-i}{2}\sigma_2, \frac{-i}{2}\sigma_3$*(как конкретно это используется??)*
*или в качестве вращений трехмерного пространства, где образующие имеют вид:*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Подумаем теперь про многомерное пространство.*
*Докажем, что какая бы ни была размерность пространства, в нем у алгебры Ли* $\mathfrak{su}(2)$ *существует единственное представление*
*Рассмотрим для этого дополнительные операторы действующие в представлении:*

$$J^2 = -J_1^2 - J_2^2 - J_3^2, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2$$

*Между такими операторами имеются соотношения:*

$$[iJ_3, J_+] = J_+, \quad [iJ_3, J_-] = -J_-; \quad [J_+, J_-] = -2iJ_3; \quad \left[J_a, J^2\right] = 0, a = 1, 2, 3$$

*Proof.* это легко проверить (пока не делал это)
какие-то тут методы работы с коммутатором, потом освою их.

$$\begin{gathered}[J_1, J^2] = [J_1, -J_2^2 - J_3^2] = -J_1J_2J_2 + J_2J_1J_2 - J_2J_1J_2 + J_2J_2J_1 - \\ -J_1J_3J_3 + J_3J_1J_3 - J_3J_1J_3 + J_3J_3J_1 = -[J_1, J_2]\,J_2 - J_2\,[J_1, J_2] - [J_1, J_3]\,J_3 - J_3\,[J_1, J_3] = \\ = -J_3J_2 - J_2J_3 - (-J_2)\,J_3 - J_3\,(-J_2) = 0\end{gathered}$$

остальные - хз.

□

*дальше там у берштейна утверждения про операторы подъема и про операторы опускания.*

*потом предложение про собственные векторы.*

*что-то тут короче идет.*

$$\lambda v_{\lambda,m_{\max}} = J^2 v_{\lambda,m_{\max}} = \left(-J_3^2 - J_1^2 - J_2^2\right) v_{\lambda,m_{\max}} = \left(-J_3^2 - \tfrac{J_+J_- + J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} =$$
$$= \left(-J_3^2 - \tfrac{2J_-J_+ + [J_+,J_-]}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} =$$
$$= \left(-J_3^2 + iJ_3 - \tfrac{2J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{\max}} = \left(m_{\max}^2 + m_{\max}\right) v_{\lambda,m_{\max}}$$

$$iJ_3 \mapsto \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j-2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -j+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -j \end{pmatrix}$$

$$J_+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a_{j-1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{j-2} & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{-j} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ b_j & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & b_{j-1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & b_{1-j} & 0 \end{pmatrix}$$

## 6.2 построение представлений

# 7 группы ли

**мотивация заниматься группами Ли**

**теория**

теперь делаем то, что нам на самом деле нужно. вообще можно было бы сразу с этого раздела начать, зная только определение группы.

итак, мы рассматриваем разные множества $G$, элементы которого образуют группу. уже рассмотрены конечные группы. (сделать там аналогичное введение)

**Определение 7.1.** *Если $G$ несчетно и на нем определены открытые множества (является топологическим пространством), то соответствующая группа - непрерывная.*

среди непрерывных групп нам придется работать с группами ли.

**Определение 7.2.** *Группа Ли - группа, каждый элемент которой является непрерывно дифференцируемой функцией набора параметров $\theta^a, a = 1, 2 \ldots N$, причем выбирается так, что $g(\theta)|_{\theta^a=0} = e$*

(когда пойму - допишу пояснения)

каждая группа ли может иметь различные представления, в каждом из которых матрицы, сопоставляющиеся элементам разные, но *есть свойства, которые не зависят от представлений* и они формулируются в терминах алгебры ли.

пользуясь свойствами группы Ли, мы заключаем, что каждый оператор представления также будет функциями $N$ параметров.

и при этих параметрах равными 0 операторы единичные.

и дальше делается гениальная запись:

$$D_R(\theta) = \mathbf{1} + i\theta^a T_{R_a}$$

что тут значит i????

$$-i\frac{\partial D_R(\theta)}{\partial \theta^a} \equiv T_{R_a}$$

и определяются $T_{R_a}$ - генераторы группы в представлении $R$. пока как-то искусственно получается, вот ввели все это, а почему именно это генератор в смысле обычного определения? пока считаем, что это разные вещи.

но в общем, мы пришли к генераторам.

и дальше если их записать через коммутационные соотношения

$$[T, T_2] = icT_3$$

то $c$ - вводятся как *структурные константы.*

(доказательство, что они инвариант группы)

Ура, мы пришли к нашим инвариантам группы, через несколько шагов мы их нашли, вот они, структурные константы!!!

а с генераторами мы смотрели коммутационные соотношения, а ведь это как раз скобка ли - операция умножения в алгебре ли. в общем, мы итак знали, что это алгебра ли по оперделению.

**Определение 7.3.** *алгебра ли - линейное пространство)нужно вписать, что мы от л.п. и отталкиваемся все время) с операцией множения - скобкой ли. с ее свойствами*

*дистрибутивность*

*линейность*

*тождество Якоби*

(почему определение алгебры так сильно похоже на определение группы и вообще, выписать это все в определения???)

а тут алгебра не просто Ли, а еще и ассоциированная с группой этой.

(пояснение, что алгебра ли, это вообще алгебра? что это от группы вообще независимый объект.)

и дальше мы вводим еще операторы казимира, (как???) и основные леммы - лемма шура и все такое. и вот, сияющий раздел.

компоненты связности?

## 7.1 представления групп ли.

по идее перед всем этим нужно ввести нужную нам сводку определений из всего выше.

### Пример

**Пример 7.1.** *представление группы SU(2)*

## 7.2 примеры матричных групп

Пример 6.1. Группа $\mathrm{O}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ состоит из вещественных ортогональных матриц $O^{-1} = O^T$. Покажем, что ее алгебра $\mathrm{AO}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ состоит из антисимметричных матриц $X^T = -X$. Для этого найдем экспоненту

$$(\exp Xt)^T = \exp X^T t = \exp(-Xt) = (\exp Xt)^{-1}$$

Размерность пространства антисимметричных матриц равна количеству элементов над нулевой главной диагональю $\dim \mathrm{AO(n,\mathbb{R})} = n(n-1)/2$ и совпадает с размерностью группы. Для удобства некоторые матричные группы Ли и их алгебры собраны в таблице 6.1 (стр. 45). Пример 6.2. Группа $\mathrm{O(n,\mathbb{R})}$ состоит из ортогональных матриц. Из алгебры известен общий вид ортогонального оператора

В некотором базисе ортогональная матрица состоит из единичной размера $m_+$, минус единичной размера $m_-$ и $l$ блоков $2 \times 2$, так что $m_+ + m_- + 2l = n$. Единичная

матрица описывает координаты, которые не преобразуются. Матрица с - 1 на главной диагонали описывает координаты, которые меняют знак (отражения). Блоки 2×2 описывают повороты на угол $\theta_i$ в плоскостях.

Перейдем к подгруппе унимодулярных матриц $\mathrm{SO(n,\mathbb{R})} < \mathrm{O(n,\mathbb{R})}$. Чтобы определитель был равен $+1$, $m_-$ должно быть четным числом. Тогда второй блок можно представить как совокупность минус единичных матриц $2 \times 2$, а каждую матрицу $-E_2$ записать как поворот на угол $\pi$ :

$$-E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

В четномерном пространстве инверсия сводится к поворотам на угол $\pi$. Мы только отбросили матрицы с определителем -1 (несобственные вращения), поэтому размерность группы останется такой же, как была в предыдущем примере. Группа Ли $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ не является связной, а условие унимодулярности просто выделяет одну связную компоненту из двух.

Алгебра $\mathrm{AO}(n,\mathbb{R})$ останется той же, что и $\mathrm{AO}(n,\mathbb{R})$. Для каждого вращения в плоскости генератор будет содержать нули всюду, кроме блока $i = 1, ..., l$ :

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$$

Мы выразили ненулевой блок генератора через матрииу Паули. Такое представление удобно, потому что эти матрицы:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

обладают простыми свойствами:

$$\sigma_i\sigma_j = ie_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}$$

По экспоненциальной формуле (6.1) мы восстановим только собственные вращения, а матрицы с нечетным числом отражений восстановить не сможем, потому что они не принадлежат никакой однопараметрической подгруппе.

Пример 6.3. Группу SO(3) можно параметризовать как поворот на угол $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ вокруг координатных осей (5.1). Дифференцируя по $\alpha_1$, согласно определению (5.2), восстановим первый генератор

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знак минус у генератора $I_2$ получился в нижней строке в соответствии с замечанием 5.1. Прямым вычислением находим коммутаторы генераторов

$$I_1I_2 - I_2I_1 = I_3, \quad I_2I_3 - I_3I_2 = I_1, \quad I_3I_1 - I_1I_3 = I_2$$

**таблица характеристик типичных групп**

$$\begin{gathered}\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \\ \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \\ \mathrm{U}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \\ \mathrm{SU}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \\ \mathrm{O}(\mathrm{n}, \mathbb{R}) \\ \mathrm{SO}(\mathrm{n}, \mathbb{R})\end{gathered}$$

и там размерность групп:

$$\begin{gathered}2n^2 \\ 2n^2-2 \\ n^2 \\ n^2-1 \\ \frac{n(n-1)}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2}\end{gathered}$$

**а дальше снова примеры**

а значит найдены и структурные константы алгебры Ли:

$$[I_i, I_j] = e_{ijk} I_k$$

Кстати, мы доказали, что алгебры вращений и трехмерного пространства с векторным произведением изоморфны:

$$\mathrm{ASO}(3) \approx \mathbb{R}_x^3$$

По алгебре восстанавливается элемент группы

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2 + I_3\alpha_3) = \exp(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha})$$

Пример 6.4. Группа $\mathrm{U}(\mathrm{n}, \mathbb{C})-$ это унитарные комплексные матрицы $U^{-1} = U^{\dagger}$. Алгебра $\mathrm{AU}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ состоит из антиэрмитовых матриц $X^{\dagger} = -X$. Покажем это, вычислив экспоненту

$$(\exp Xt)^{\dagger} = \exp X^{\dagger} t = \exp(-Xt) = (\exp Xt)^{-1}$$

На диагонали антиэрмитовой матрицы стоят чисто мнимые числа, а над диагональю - комплексные, значит размерность алгебры равна $n + 2n(n-1)/2 = n^2$. Группа связная, поэтому восстанавливается по алгебре. Если мы захотим перейти к группе унимодулярных матриц SU(n, C), то размерность уменьшится на единицу. Канонический вид унитарной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\phi_n} \end{pmatrix}$$

### 7.2.1 Группа $\mathrm{U}(\mathrm{n}, \mathbb{C})-$

Группа $\mathrm{U}(\mathrm{n}, \mathbb{C})-$ это унитарные комплексные матрицы $U^{-1} = U^{\dagger}$ Алгебра $\mathrm{AU}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ состоит из антиэрмитовых матриц $X^{\dagger} = -X$. Покажем это, вычислив экспоненту

$$(\exp Xt)^{\dagger} = \exp X^{\dagger} t = \exp(-Xt) = (\exp Xt)^{-1}$$

На диагонали антиэрмитовой матрицы стоят чисто мнимые числа, а над диагональю - комплексные, значит размерность алгебры равна $n + 2n(n-1)/2 = n^2$. Группа связная, поэтому восстанавливается по алгебре. Если мы захотим перейти к группе унимодулярных матриц $\mathrm{SU}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$, то размерность уменьшится на единицу. Канонический вид унитарной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\phi_n} \end{pmatrix}$$

где фазы $\phi_i$ - действительны. Поэтому для равенства единице определителя придется добавить одно условие

$$\sum_i \phi_i = 2\pi N, \quad N = 0, 1, 2, ...$$

Алгебра ASU(n, C) состоит из антиэрмитовых бесследовых матриц, как следует из формулы

$$\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A$$

Поэтому размерность алгебры также $n^2 - 1$. Для диагональной матрицы $A$ формула очевидно выполняется. Если матрица $A$ приводится к диагональному виду $\Lambda$, то есть $A = T\Lambda T^{-1}$, то в каждом слагаемом ряда Тейлора внутренние $T$ и $T^{-1}$ сокращаются, а внешние выносятся

$$\det \exp T\Lambda T^{-1} = \det \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} T\Lambda T^{-1} = \det \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T\Lambda^n T^{-1}$$
$$= \det \left[ T(\exp \Lambda) T^{-1} \right] = \det \exp \Lambda = \exp \operatorname{tr} \Lambda$$

В общем случае, когда матрица $A$ сводится к прямой сумме жордановых клеток, доказательство формулы (6.6) приведено в сборнике задач [2].

## 7.3 классические конструкции для конкретных групп

В теории групп есть утверждения, которые используются чаще других про типичные группы.

Приведем их тут отдельно, применяя теорию, которая была ранее.

(чтобы потом только утверждать, не занимаясь доказательствами)

### 7.3.1 гомоморфизм SU(2) - SO(3)

После того, как мы доказали изоморфизм (6.8) алгебр Ли, можно было бы осторожно предположить, что совпадают и группы Ли, указанные в заголовке. Мы построим гомоморфизм унитарной группы в ортогональную и убедимся, что группы не совпадают. Сначала рассмотрим эрмитову матрицу вида

$$H = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

Эта матрица получилась как скалярное произведение $H = \mathbf{r} \cdot \sigma$, где $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, а $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)-$ вектор, составленный из матриц Паули. Если теперь преобразовать матрицу $H$ с помощью унитарной матрицы $U \in \mathrm{SU}(2)$:

$$H' = UHU^\dagger, \quad H' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$$

мы получим новую матрицу $H'$ с параметрами $x', y', z'$, но определитель будет тем же самым в силу унитарности $U$:

$$-\det H = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = -\det H'$$

Даже не выписывая явно преобразования $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$, можно понять, что оно линейное:

# Part III
# Problems

## 8 Задачи

(порешаю потом)

#### 8.0.1 Задачи на дискретную теорию групп

(мб потом увеличу раздел)

#### 8.0.2 Задачи на SU(2)

### 8.1 Other problems

#### 8.1.1 Бр1 по ходу лекции упражнения

Б1-л.у.1 Перемножьте перестановки $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Б1-л.у.2 Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{100}$

Упражнение 3. Найдите порядки всех элементов в группе $C_6$.

Упражнение 4. Что получится если перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$ умножить на транспозицию $(a, b)$ а) слева, б) справа?

#### 8.1.2 В1 Домашнее задание

Упражнение 1. а) Пусть $\alpha = (1, 3, 5)(2, 4, 7), \beta = (1, 4, 7)(2, 3, 5, 6)$ (перестановки даны в разложении по непересекающимся циклам). Найдите произведение $\alpha\beta$.

б) Найдите порядок перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Brsht-**

2. а) Докажите, что любая транспозиция (не только элементарная) является нечетной перестановкой. Указание: найдите число инверсий.

б) Пусть перестановка разложена в произведение транспозиций. Тогда ее четность равна четности количества этих транспозиций.

в) Перестановка $\sigma$ является циклом длины $d$. Разложите ее в произведение транспозиций. Найдите четность $\sigma$.

**Brsht-**

3. Поставим каждой перестановке $\sigma$ в соответствие матрицу $n \times n R(\sigma)$, так что $R(\sigma)_{ij} = 1$ если $j = \sigma(i)$ и нулю иначе. Найдите собственные значения матрицы $R(\sigma)$ (дайте ответ в терминах циклического типа перестановки $\sigma$).

**Brsht-**

4($*$). Каких перестановок в $S_n$ больше - четных или нечетных?

### 8.1.3 B2 Домашнее задание

Упражнение 1. а) Докажите, что группа $Z_{10}^*$ изоморфна $C_4$.

б) Верно ли, что группа $Z_{15}^*$ циклическая?

Упражнение 2. а) Пусть $G$ - группа симметрий куба, $X$ - множество ребер. Найдите стабилизатор произвольного ребра. Изоморфен ли он какой-то известной вам группе? б) Пусть $X$ - множество граней. Найдите стабилизатор произвольной грани. Изоморфен ли он какой-то известной вам группе?

Упражнение 3. Группа $S_3$ действует на себе сопряжениями $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$. Найдите стабилизатор каждого элемента. Найдите орбиты для этого действия.

**Brsht-**

4. Найдите (с точностью до изоморфизма) все абелевы группы порядка 54 .

**Brsht-**

5. Докажите предложение 10: любой точки $x \in X$ стабилизатор $G_x$ является подгруппой в $G$.

### 8.1.4 B3 Домашнее задание

Упражнение 1. Проверьте корректность определения полупрямого произведения (то есть, проверьте, что формула действительно задает группу).

**Brsht-**

2. а) Пусть $G$ - группа движений сохраняющих правильный тетраэдр. Докажите, что действие $G$ на множестве вершин тетраэдра задает изоморфизм $G$ и $S_4$. Опишите геометрически (как вращения, симметрии или зеркальные повороты) все перестановки. Найдите классы сопряженности.

б) Пусть $G_0$ это подгруппа собственных движений сохраняющих правильный тетраэдр. Является ли она нормальной? Найдите классы сопряженности в $G_0$.

**Brsht-**

3. а) Через $D_{nh}$ обозначим группу симметрий прямоугольной призмы с основанием правильный $n$ угольник. Найдите порядок группы $D_{nh}$.

Другое описание группы $D_{nh}$ - группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный п-угольник лежащий в плоскости XOY.

б) Можно ли представить $D_{3h}$ в виде произведения (прямого или полупрямого?). Изоморфны ли группы $D_{3h}$ и $D_6$?

**Brsht-**

4. а) Пусть $G$ - группа симметрий прямоугольной (но не квадратной) решетки на плоскости, $T$ - подгруппа состоящая из трансляций. Докажите, что $T$ является нормальной подгруппой в $G$. Найдите факторгруппу $G/T$. Представьте $G$ в виде полупрямого произведения.

б)* Найдите классы сопряженности в $G$.

### 8.1.5 B4 Домашнее задание

**Brsht-**

1. Постройте сюръективный гомоморфизм из группы $S_4$ в группу $S_3$. Найдите его ядро.

Указание: воспользуйтесь действием $S_4$ на пространстве многочленов от четырех переменных переставлял переменные. Точнее воспользуйтесь орбитой многочлена $P = x_1x_2 + x_3x_4\partial$ такого действия.

**Brsht-**

2. Через $\mathbb{C}^*$ обозначим группу ненулевых комплексных чисел с операцией множения, через $\mathbb{R}_+$обозначим подгруппу положительных вещественных чисел. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+$.

Указание: представъте $\mathbb{C}^*$ в виде произведения $\mathbb{R}_+$и другой подгруппь.

Определение 4. Подгруппа порожденная элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$ называется коммутантом группы $G$. Выражение $xyx^{-1}y^{-1}$ называется коммутатором элементов $x, y$. Коммутант группы $G$ обозначается $[G, G]$.

**Brsht-**

3. а) Найдите классы сопряженности в группе $D_n$.

б) Найдите коммутант группы $D_n$.

Указание: используйте, то что любой әлемент $D_n$ может быть записан в виде $r^b$ или sr$^b u$ соотношения на $r, s$ найденные на лекции

в)* Представьте группу $D_n$ в виде нетривиального полупрямого произведения.

**Brsht-**

4. Пусть $G$ - группа движений сохраняющих куб, $G_0$− подгруппа собственных движений.

а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из $G_0$ в $S_4$ используя действие $G$ на множестве диагоналей куба. Является ли он изоморфизмом?

б) Найдите классы сопряженности в группе $G_0$. Опишите эти классы геометрически как (как вращения, симметрии или зеркальные повороты).

в) Опишите $G$ как произведение (прямое или полупрямое) Сколько существует классов сопряженности в $G$?

**Некоторые решения задач из лекции 4.**

**Brsht-**

3. а) Найдите классы сопряженности в группе $D_n$.

б) Найдите коммутант группы $D_n$.

Указание: используйте, то что любой элемент $D_n$ может быть записан в виде $r^b$ или $sr^b u$ соотношения на $r$, s найденнье на лекиии

в)* Представьте группу $D_n$ в виде нетривиального полупрямого произведения.

Ответ. а) Если $n$ нечетно, то все симметрии $sr^b$ образуют один класс сопряженности. Если $n$ четно, то симметрии распадаются на два класса сопряженности: $sr^{2a}$ и $sr^{2a-1}$. Повороты $r^a$ и $r^b$ сопряжены только если $a = b$ или $a = n - b$.

б) Если $n$ нечетно, то коммутант - это группа всех поворотов $r^a$. Если $n$ четно, то коммутант это группа всех четных поворотов $r^{2a}$.

в) $D_n \simeq C_2 \ltimes C_n$

**Brsht-**

4. Пусть $G$ - группа движений сохраняющих куб, $G_0$ — подгруппа собственных движений.

а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из $G_0$ в $S_4$ используя действие $G$ на множестве диагоналей куба. Является ли он изоморфизмом?

б) Найдите классы сопряженности в группе $G_0$. Опишите эти классы геометрически (как вращения, симметрии или зеркальные повороты).

в) Опишите $G$ как произведение (прямое или полупрямое). Сколько существует классов сопряженности в $G$?

Решение. Пункты а,б аналогичны задаче из прошлого задания, доказывается, что $G_0 \simeq S_4$, классы сопряженности $S_4$ мы знаем, их 5 штук. Внутри всей $G$ есть подгруппа $C_2$ порожденная центральной симметрией. Любой элемент из $G$ является либо собственным движением либо произведением собственного движения и центральной симметрии. Поэтому $G \simeq C_2 \times G_0$. Для описания классов сопряженности применим предложение.

Предложение 1. Классы сопряженности произведения групп $G \times H$ являют собой произведения классов сопряженности группы $G$ и группы $H$.

Доказательство. Достаточно заметить, что элементы $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ сопряжены тогда и только тогда когда элементы $g_1, g_2 \in G$ сопряжены и элементы $h_1, h_2 \in H$ сопряжены.

Т.е. в нашей задаче группа $G$ имеет $2 \cdot 5 = 10$ классов сопряженности.

Замечание. Для полупрямого произведение аналогичное предложение неверно. Примером является прошлая задача - хотя $D_n \simeq C_2 \ltimes C_n$, количество классов сопряженности в $D_n$ не равно $2n$.

### 8.1.6 B5

Упражнение 1. а) Регулярное представление $C_3$ задается матрицами

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите инвариантные подпространства в этом представлении. Разложите их в сумму представлений $R_j$, описанных на лекции.

б) Найдите матрицу перехода $\varphi$ которая приводит регулярное представление $C_3$ К сумме одномерных.

**Brsht-**

2. а) Докажите, что характеры сопряженных элементов равны.

б) Задайте представление $U_2$ (из примера на лекции) матрицами. Например можно воспользоваться базисом $e_1 - e_2, e_1 - e_3$.

в) Найдите характеры тривиального, перестановочного и регулярного представлений $S_3$. Найдите характер представления $U_2$.

**Brsht-**

3. а) Пусть $R_\alpha$ - вращение трехмерного пространства относительно некоторой оси на угол $\alpha$. Найдите след матрицы $R_\alpha$.

Пусть $S_\alpha$ - зеркальный поворот - композиция вращения трехмерного пространства относительно некоторой оси на угол $\alpha$ и отражения относительно плоскости перпендикулярной этой оси. Найдите след матрицы $S_\alpha$.

б) Мы знаем, что $S_4$ изоморфна группе симметрий тетраэдра, поэтому каждому элементу $S_4$ можно сопоставить матрицу $3\times 3$. Это дает трехмерное представление $\rho_3 : S_4 \to GL(3)$. Найдите характер $\rho_3$.

в) Мы знаем, что $S_4$ изоморфна группе вращений куба, поэтому каждому элементу $S_4$ можно сопоставить матрицу $3 \times 3$. Это дает трехмерное представление $\rho_4 : S_4 \to GL(3)$. Найдите характер $\rho_4$.

**Brsht-**

4. а) Докажите, что для любой группы $G$ коммутант является нормальной подгруппой.

б)* Докажите, что фактор по коммутанту является коммутативной группой.

**Brsht-**

5. а) Найдите все одномерные представления группы $S_n$.

б)* Докажите, что коммутант $S_n$ это $A_n$.

Указание: докажите, что любой тройной цикл лежит в коммутанте, а, далее, докажите, что тройные чиклы порождают $A_n$.

**Brsht-**

6. * а) Проверьте, что для матриц $A(g), B(g), C(g)$ и матрицы $S$, введенной в доказательстве Теоремы 2, выполнено свойство

$$\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(h) & B(h) \\ 0 & D(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(h) & 0 \\ 0 & D(h) \end{pmatrix}$$

для любого $h \in G$. Указание: воспользуйтесь соотношениями на матрици $A, B, C$. Также надо будет делать замену переменной в сумме.

б) Проверьте, что формула для $S$ получается конструкцией усредения из второго способа в доказательстве Теоремы 2, примененной к проектору $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

### 8.1.7 B6

Упражнение 1. а) Докажите, что вектор $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ не является разложимым (т.е. не существует $v, u$ таких, что $v \otimes u = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$.

б) Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Напишите матрицу $A \otimes B$. Проверьте, что $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}\, A \cdot \mathrm{Tr}\, B$.

**Brsht-**

2. а) Найдите все одномерные неприводимые представления группы $D_7$. б) Найдите все неприводимые представления группы $D_7$, составьте таблицу характеров. Для каждого неприводимого представления задайте его указав матрицы соответствующие образующим группы $D_7$.

**Brsht-**

3. Найдите таблицу характеров группы $S_4$. Проверьте соотношения ортогональности между характерами. Для любых двух неприводимых трехмерных представлений $V_1, V_2$ группы $S_4$ (возможно изоморфных) разложите тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$ на неприводимые.

*Указание: размерности неприводимых представлений мы нашли на лекиии, одномерные мы знаем. Трехмерные можно искать геометрически как в задании к прошлой лекиии. Можно также получать недостающие представления разлагая какие-то известные вам представления на неприводимые: использовать перестановочные представления, регулярное представление, тензорные произведения представлений. Также можно использовать соотношения ортогональностu.*

**Brsht-**

4 (Второе соотношение ортогональности для характеров). Докажите, что для любых двух классов сопряженности $C_i, C_j$, где $1 \leqslant i, j \leqslant k$ верно:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \chi^{(\alpha)}\left(h_i\right) \overline{\chi^{(\alpha)}\left(h_j\right)} = \delta_{i,j} \frac{|G|}{|C_i|}$$

Указание: используйте, то что матрица характеров является матрицей переход от одного ортонормированного базиса $\chi^{(i)}, x$ другому ортогональному базису $\gamma_i$, поэтому после некоторого домножения столбиов должна стать унитарной, а значит ее столбцы будут попарно ортогональны.

### 8.1.8 B7 Домашнее задание

Упражнение 1.$*$ Пусть $A$ - матрица состоящая из одного жорданова блока размера $n \times n, n > 1$ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажите, что матрица $\exp(\alpha A)$ не будет диагональной при любом $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$. Докажите, что при $\lambda \neq 0$ матрица $A^k$ не будет диагональной при любом любых $k \in \mathbb{N}$.

**Brsht-**

2. а) Напишите таблицу характеров группы $D_6$.

б) Скольку существует неприводимых двумерных представлений у группы движений призмы $D_{6h}$? Найдите их характеры.

[1] Обычно формулу суммирования Пуассона пишут в виде

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

для любой достаточно гладкой и убывающей на бесконечности функции $f, \hat{f}$ обозначает преобразование Фурье. Теперь заметим, что это равенство можно написать для обобщенных функций, обобщенная функция $\delta(x-n)$ примененная к $f$ дает $f(n)$, применение функции $\delta(x-k)$ к $\hat{f}$ равносильно умножению на $e^{2\pi ikx}$. Итого имеем равенство обобщенных функций (мы тут делаем замену переменной)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx}$$

У нас функции периодические, поэтому слева стоит просто одна $\delta$ функция.

**Brsht-**

3. Найдите матрицу характеров неприводимых представлений группы $A_4$. Опишите разложение ограничений неприводимых представлений $S_4$ на $A_4$. Указание: помимо ограничения представлений $S_4$, используйте умение описывать одномерные представления.

**Brsht-**

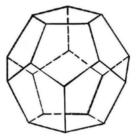
4. а) Докажите, что порядок группы вращений додекаэдра $G_0$ равен 60.

б) Найдите порядки элементов этой группы, опишите эти вращения геометрически.

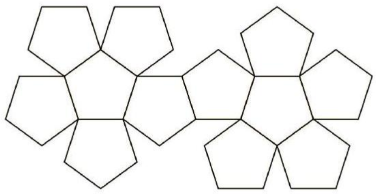
в) Докажите, что $G_0$ изоморфна группе четных перестановок $A_5$.

Указание: разбейте вериины додекаэдра на 5 тетраэдров, так чтобы группа $G_0$ действовала на этом множестве из 5 элементов.

г) Докажите, что группа всех симметрий додекаэдра $G$ изоморфна одной из групп $S_5$ или $C_2 \times A_5$. д) Докажите, что группы $S_5$ и $C_2 \times A_5$ не изоморфны.



Додекаэдр



Развертка

**Brsht-**

5. Разложите пятимерное перестановочное (мономиальное) представление группы $S_5$ в прямую сумму двух неприводимых.

Указание: разложение устроено аналогично разложению перестановочного представления для группы $S_3$. Неприводимость можно доказывать или посчитав скалярный квадрат характера или по определению. Во втором способе можно взять произвольный вектор $x = \sum x_i e_i, \sum x_i = 0$ и действуя на него $S_5$ и беря линейнве комбиначии получить все вектора вида $e_1 - e_j$ m.e. получить базис подпредставления.

**Brsht-**

6. * а) Найдите классы сопряженности в группе $A_5$. Указание: удобно использовать геометрическое описание как вращения додекаэдра.

б) Найдите три различных неприводимых представления группы $A_5$.

в) Найдите таблицу характеров $A_5$.

### 8.1.9 B8

Упражнение 1 . Группа $U(1)$ действует на матрицах $2 \times 2$ по формуле

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

Рассматривая $a, b, c, d$ как координаты в четырехмерном пространстве мы получаем четырехмерное представление $U(1)$. Найдите его характер, разлож ите его на неприводимые.

**Brsht-**

2. Найдите число (вещественных) уравнений задающих группу унитарных матриц $U(n)$. Найдите касательно пространство $T_E U(n)$. Проверьте, что полученное множество матриц замкнуто относительно коммутатора.

**Brsht-**

3. а) Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ изоморфна алгебре векторов $\mathbb{R}^3$. б) Обозначим через $SU(2)$ группу унитарных матриц с определителем 1, через $\mathfrak{su}(2)$ ее алгебру Ли. Докажите, что $\mathfrak{su}(2)$ тоже изоморфна $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. в)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не изоморфна $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Указание: а) Выберите удачный базис в $\mathfrak{so}(3)$ и проверьте совпадение структурных констант.

**Brsht-**

4. в)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не изоморфна $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

Доказательство. Алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ состоит из матриц $2\times 2$ с нулевым следом. Естественным базисом в ней являются матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутаторы в этом базисе равны

$$[h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f, \quad [e,f] = h.$$

Но в алгебре Ли $\mathbb{R}^3$ (изоморфной $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$) не может быть чтобы векторное произведение двух ненулевых векторов было пропорционально третьему. А для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ так получается. Значит, они не изоморфны.

### 8.1.10 B9 Домашнее задание

Упражнение 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Задайте матрицами $S^2A, \Lambda^2 A$, найдите их след.

Упражнение 2. Используя ряды для экспоненты, синуса и косинуса, проверьте, что любой элемент группы $SU(2)$ имеет вид $\exp(\mathrm{i}\alpha(\vec{n},\vec{\sigma}))$.

**Brsht-**

3. а) Напишите матрицу обратную для матрицы $g$ заданной формулой (1). Как изменились параметры $\vec{n}$ и $\alpha$?

б) Напишите формулу (матрицу для $3\times 3$) присоединенного действия матрицы $g = \exp(\mathrm{i}\alpha\sigma_3)$, проверьте, что получилось ортогональное преобразование

(в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ удобно взять базис $\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$).

в) Покажите, что общему $g$ заданному формулой (1) в присоединенном представлении будет соответствовать ортогональное преобразование.

г) Является ли полученный гомоморфизм из группы $SU(2)$ в группу $SO(3)$ сюръективным, какое у него ядро?

**Brsht-9.4.**

а) Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(n)$. Она имеет естественный базис $J_{ab} = E_{ab} - E_{ba}$, где $E_{ab}$ это матрица у которых 1 стоит на месте $(a, b)$, а в остальные местах стоит 0. Разложите коммутатор $[J_{ab}, J_{cd}]$ по этому базису.

б)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

Указание: выразите через $J_{ab}$ другие образующие $J_1, J_2, J_3$ и $J_1', J_2', J_3'$ так, что каждая тройка удовлетворяет соотношениям $\mathfrak{so}(3), a\,[J, J'] = 0$.

**Решение а)** Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(n)$. Она имеет естественный базис $J_{ik} = E_{ik} - E_{ki}$, где $E_{ik}$ это матрица у которых 1 стоит на месте $(i, k)$, а в остальных местах стоит 0. Разложите коммутатор $[J_{ab}, J_{cd}]$ по этому базису.

**Решение б)** Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$. Указание: выразите через $J_{ab}$ другие образующие $J_1, J_2, J_3 u J_1', J_2', J_3'$ так, что каждая тройка удовлетворяет соотношениям $\mathfrak{so}(3)$, а $[J, J'] = 0$.

Решение. а) Сначала напишем коммутатор матричных единиц

$$[E_{ab}, E_{cd}] = \delta_{bc} E_{ad} - \delta_{ad} E_{cb}$$

Отсюда следует, что

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{bc} J_{ad} + \delta_{ad} J_{bc} + \delta_{ac} J_{db} + \delta_{bd} J_{ca}$$

Заметим, что при перестановке $a$ и $b$ левая часть меняет знак (так как $J_{ab} = -J_{ba}$). Можно проверить, что этим свойством обладает и правая часть. Эта симметрия, вместе с аналогичным свойством при перестановке $c, d$, фиксирует знаки слагаемых в правой части.

б) Введем элементы

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(J_{12} + J_{34}\right), \quad J_2 = \frac{1}{2}\left(J_{14} + J_{23}\right) J_3 = \frac{1}{2}\left(J_{13} + J_{42}\right),$$
$$J_1' = \frac{1}{2}\left(J_{12} - J_{34}\right), \quad J_2' = \frac{1}{2}\left(-J_{14} + J_{23}\right) J_3' = \frac{1}{2}\left(J_{13} - J_{42}\right).$$

Тогда легко видеть, что $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J_c, [J_a', J_b'] = \epsilon_{abc} J_c'$ и $[J_a, J_b'] = 0$.

**Некоторые решения задач из лекции 9.**

**Brsht-**

3. а) Напишите матрицу обратную для матрицы $g$ заданной формулой

$$g = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}).$$

Как изменились параметры $\vec{n}$ и $\alpha$?

б) Напишите формулу (матрицу для $3 \times 3$) присоединенного действия матрицы $g = \exp(i\alpha\sigma_3)$, проверьте, что получилось ортогональное преобразование

(в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ удобно взять базис $\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$).

в) Покажите, что общему $g$ заданному формулой (1) в присоединенном представлении будет соответствовать ортогональное преобразование.

г) Является ли полученный гомоморфизм из группы $SU(2)$ в группу $SO(3)$ сюръективным, какое у него ядро?

Решение. б) Напомним вид $\sigma$ матриц

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$g = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad g\left(\mathrm{i}\sigma_3\right) g^{-1} = \mathrm{i}\sigma_3$$

$$g\left(\mathrm{i}\sigma_1\right) g^{-1} = g \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{2\mathrm{i}\alpha} \\ \mathrm{i}e^{-2\mathrm{i}\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \cos(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_1 - \sin(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_2$$

$$g\left(\mathrm{i}\sigma_2\right) g^{-1} = g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2\mathrm{i}\alpha} \\ -e^{-2\mathrm{i}\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \sin(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_1 + \cos(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_2.$$

Т.е. действие $\exp\left(\mathrm{i}\alpha\sigma_3\right)$ является поворотом на угол $2\alpha$ относительно оси натянутой на $i\sigma_3$.

в) Прямым вычислением можно показать, что сопряжение элементом $g$ вида (1) дает поворот вокруг оси $\vec{n}$ на угол $2\alpha$. Из этого следует, что получилось ортогональное преобразование.

Приведем другой способ доказать ортогональность, который не требует вычислений. А именно, нам надо доказать что присоединенное представление группы $SU(2)$ сохраняет некоторое положительно определенное скалярное произведение. Определим скалярное произведение на пространстве алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ по формуле $(A, B) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(AB)$. Тогда, легко видеть что в базисе из матриц $\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$ эти скалярные произведения имеют вид $(\mathrm{i}\sigma_a, \mathrm{i}\sigma_b) = \delta_{ab}$, то есть получилось положительно определенное скалярное произведение. Теперь проверим, что оно является инвариантным

$$\left(gAg^{-1}, gBg^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(gAg^{-1}gBg^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(gABg^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(AB) = (A, B)$$

Значит присоединенное действие $SU(2)$ сохраняет положительно определенное скалярное произведение, т.е. образ лежит в $SO(3)$.

Еще один (близкий) способ, это построить на алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ не скалярное произведение, а квадратичную форму $A \mapsto \det A$. Далее можно показать, что присоединенное представление сохраняет эту форму, и условие, того что группа сохраняет квадратичную форму эквивалентно тому, что группа сохраняет скалярное произведение.

г) Сюрьективность следует из того, что сопряжение элементом $g$ вида (1) дает поворот вокруг оси $\vec{n}$ на угол $2\alpha$ и все элементы группы $SO(3)$ имеют такой вид.

Можно показать сюръективность не проводя вычисления для общего $g$, а воспользоваться тем, что действие элементов $\exp\left(i\alpha\sigma_a\right)$ будут поворотами относительно соответствующих осей и такие повороты порождают группу $SO(3)$.

Ядро - это элементы $g \in SU(2)$ такие, что $g\sigma_a g^{-1} = \sigma_a$ для любого $a = 1, 2, 3$. Легко видеть, что этим условиям удовлетворяю только скалярные матрицы, таких в $SU(2)$ две: $E$ и $-E$. Они образуют подгруппу из двух элементов изоморфную $C_2$.

Замечание. Из этой задачи и теоремы о гомоморфизме следует, что $SO(3) \simeq SU(2)/C_2$. У групп $SO(3)$ и $SU(2)$ изоморфные алгебры Ли, но как группы они различны, отличаются на фактор по дискретной подгруппе. Мы уже знаем, что $SU(2)$ можно отождествить с трехмерной сферой, тогда $SO(3)$ отождествится с трехмерным проективным пространством.

### 8.1.11 B10 Домашнее задание

**Brsht-**

1. а) Докажите, что $J_+J_- = -J^2 - J_3^2 - \mathrm{i}J_3$.

б) Найдите значение $a_m$ в предположении, что базис $v_{\lambda,m}$ ортонормированный (уравнения фиксируют только $|a_m|$, можно еще домножить вектора ортонормированного базиса на фазу чтобы $a_m^2$ стало вещественным).

**Brsht-**

2. Найдите разложение тензорного произведения $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$ на неприводимые представления $SU(2)$.

Указание: напишите характер и представъте его в виде суммы характеров $\pi_j$

**Brsht-**

3. Докажите, что представление $\pi_j$ в котором действие генераторов $\mathrm{i}J_3, J_+, J_-$задано формулами (4) является неприводимым.

Указание: докажите, сначала, что в любом инвариантном подпространстве должен содержатвся старший вектор $v_{\lambda,j}$.

### 8.1.12 B11 Домашнее задание

Упражнение 1. а) Разложите тензорное произведение $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$ на неприводимые. б) Найдите кратность вхождения тривиального представления в $\pi_{1/2}^{\otimes 101}$.

**Brsht-**

2. Обозначим через $\mathbb{C}\left[x_1, x_2, x_3\right]_n$ пространство однородных многочленов степени $n$ от трех переменных $x_1, x_2, x_3$. Группа $SO(3)$ действует на пространстве $\mathbb{C}\left[x_1, x_2, x_3\right]_n$ по формуле

$$P\left(x_1, x_2, x_3\right) \rightarrow P\left(\left(x_1, x_2, x_3\right) g\right)$$

Пусть $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ оператор Лапласа (здесь $\partial_i = \partial / \partial_{x_i}$). Пусть $H_n$ пространство гармонических функций степени $n$, т.е. ядро оператора $\Delta : \mathbb{C}\left[x_1, x_2, x_3\right]_n \rightarrow \mathbb{C}\left[x_1, x_2, x_3\right]_{n-2}$.

а) Найдите размерности и базис пространств $H_0, H_1, H_2, H_3$.

б) Докажите, что оператор $\Delta$ являются инвариантным относительно действия группы $SO(3)$. Выведите из этого, что пространства $H_n$ являются инвариантными подпространствами относительно группы $SO(3)$.

в) Докажите, что отображение

$$t_{i_1 \ldots i_n} \rightarrow P(x) = t_{i_1 \ldots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

осуществляет изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в $S^n \mathbb{C}^3$ и пространством гармонических полиномов степени $n$.

г)* Найдите размерность пространства $\mathbb{C}\left[x_1, x_2, x_3\right]_n$. Докажите, что $\Delta$ является сюръективным отображением. Найдите размерность $H_n$.

**Brsht-**

3. Рассмотрим тензорное произведение $\pi_1 \otimes \pi_{1/2}$ представлений $\mathfrak{su}(2)$.

а) Задайте операторы $J_+, J_-, \mathrm{i}J_3$ матрицами в базисе из разложимых тензоров.

б) Найдите инвариантные подпространства (в терминах базиса разложимых векторов).

в)* Найдите $3j$ символы (в обозначениях лекции речь идет о случае $j_1 = 1, j_2 = 1/2$, можно ограничиться случаем $m = 1$).

**Brsht-**

4. * Группа $S_4$ вложена группу $SO(3)$ как группа вращений куба. Тогда любое неприводимое представление группы $SO(3)\pi_n$ (выше оно еще обозначалось $\mathrm{S}_n$) можно ограничить на $S_4$.

а) Разложите это ограничение $\pi_2$ на неприводимые представления $S_4$.

б) То же, для произвольного $\pi_n, n \in \mathbb{Z}$.

### 8.1.13 B12 Домашнее задание

**Brsht-**

1. а) Найдите характер (на матрицах вида (11)) тензорного произведения представлений $V \otimes \Lambda^2 V$.

б) Найдите характер (на матрицах вида (11)) присоединенного представления $SU(3)$. Покажите, что характер $V \otimes \Lambda^2 V$ есть сумма характеров присоединенного и тривиального одномерного.

в)* Укажите явно это тривиальное подпредставление внутри $V \otimes \Lambda^2 V$.

**Brsht-**

2. а) Найдите базис в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,1)$, найдите структурные константы в этом базисе.

б) Докажите, что алгебры $\mathfrak{so}(3,1)$ и $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ изоморфны (здесь $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ рассматриваемая как вещественная 6-мерная алгебра Ли).

в)* Задайте два двумерных представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(3,1)$ явно (т.е. укажите в какие матрицы переходят базисные элементы).

**Brsht-**

3. Пусть $V$ векторное пространство с положительно определенным скалярным произведением, $e_1, ..., e_N$ ортонормированный базис. Через $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N$ обозначим соответствующие образующие, которые удовлетворяют соотношениям (12) которые в данном случае имеют вид $\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = \delta_{a,b}$. Проверьте, что элементы $J_{ab} = \gamma_a\gamma_b, a \neq b$ удовлетворяют соотношениям (4) алгебры Ли $\mathfrak{so}(N)$.

**Brsht-**

4. а) Пусть $V$ - четырехмерное представление алгебры $\mathfrak{so}(4)$. Используя изоморфизм $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ посчитайте характер $V$. Достаточно его считать на матрицах вида $\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi_2} \end{pmatrix}$. Свяжите это представление с $\pi_{j_1} \otimes \pi_{j_2}$.

б)* Найдите характеры спинорных представлений. Свяжите эти представления с $\pi_{j_1} \otimes \pi_{j_2}$.

# Part IV
# —— Special Constructions and Applications in a Nutshell ——

## 9 Special properties and methods of groups in a nutshell

### 9.1 Особы и методы теории групп по Вавилову в двух словах

(тут многое будет, но позже. мб в 1й части тоже добавятся мелочи от этого.)

### 9.2 О других особых конструкциях

(тут многое будет, но позже.)

#### 9.2.1 О группе Гротендика (???)

(пока не актуально, когда-то мб очень не скоро дойду.)

**расширения** рассмотрим совокупность конечных групп Г. Если $\Gamma_1$ - нормальный делитель в ней, то факторгруппа по нему - тоже группа.

и по этому материалу может строится новая группа $\mathfrak{g}$

выделим из множества групп подмножество [Г] - групп изоморфных Г, тода так как $\mathfrak{g}$ коммутативна, то она определяется соотношениями (потом напишу какими, я все равно не очень понимаю)

и в итоге видим, что элемент $\mathfrak{g}$ - это класс эквивалентностей вида

$$n_1 \cdot [\Gamma_1] + n_2 \cdot [\Gamma_2] + \dots$$

группа Гротендика - коммутативная группа и порождается классами эквивалентности *объектов категории* соотношениями [A] =[B]+[C], где там B - подобъект, C - соответсвующий факторобъект.

прикольно, что здесь мы открыли себе дорогу в K-теорию, разве что нужно добавить еще теорию категорий (и не вылететь из вуза с этими занятиями), говорят, что там такой же метод, только работают с векторными расслоениями над гладкими многообразиями.

(есть задачи на изоморфность, но это все потом.)

## 10 Special applications in a nutshell

#### 10.0.1 О группах в кристаллографии

(просто тут очень много всего, так что скорее всего хватит материала на такой раздел.)

## Part V
# Другие темы теории групп

## 11 Другие конструкции

(мб потом отдельную часть сделаю, пока об этом тут пишу)

## 12 Типичные группы

### 12.1 Часто встречающиеся группы

#### 12.1.1 SL(n, R)

#### 12.1.2 SL(n, C)

#### 12.1.3 SO(p, q)

### 12.2 Реже встречающиеся группы

#### 12.2.1 Sp(p, q)

#### 12.2.2 SU(p, q)

#### 12.2.3 $SO^*(2n)$

## 13 Приложения теории групп в математике (????)

### 13.1 Группы и теория гомотопий

по михайлову буду собирать разные интересные факты
(????)
(по катанаеву тоже многое взято)

#### 13.1.1 Гомотопии и фундаментальная группа

**Теория**

(??? я забыл уже, откуда это)

Все многообразия локально устроены одинаково так же как и евклидовы пространства. Однако их глобальная структура может существенно отличаться. Описание глобальной структуры многообразий является сложной задачей, и для ее решения применяются различные методы. Например, на каждом многообразии можно задать некоторую алгебраическую структуру, которая является топологическим инвариантом, т.е. сохраняется при диффеоморфизмах. В настоящем разделе мы опишем один из простейших топологических инвариантов - фундаментальную группу. Этот инвариант довольно груб и не различает все топологически различные многообразия. Однако он полезен в приложениях, т.к. если фундаментальная группа двух многообразий различна, то можно с уверенностью сказать, что данные многообразия недиффеоморфны.

Важным методом алгебраического анализа глобальной структуры многообразий является нахождение фундаментальной группы многообразия, которая строится на основе понятия *пути* или кривой. Определение кривой в евклидовом пространстве (1.9) дословно переносится на произвольное многообразие $\mathbb{M}$ размерности $n$.

Определение. Путем $\gamma$ называется кусочно дифференцируемое отображение единичного отрезка [0,1] $\in \mathbb{R}$ в $\mathbb{M}$

$$\gamma : \quad [0,1] \ni \quad t \mapsto x(t) \quad \in \mathbb{M}$$

где $t-$ вещественный параметр вдоль кривой. Говорят, что путь соединяет начало пути $x(0)$ и его конец, $x(1)$. Если начало и конец пути совпадают, $x(0) = x(1)$, то путь называют замкнутвы. Замкнутый путь называют также петлей. Мы будем также писать

$$\gamma = x(t)$$

В координатах отображение (10.1) задается набором $n$ кусочно дифференцируемых функций $x(t) = \{x^\alpha(t)\}, \alpha = 1, ..., n$, одной переменной $t \in [0,1]$.

## 13.2 Дифференциальные уравнения

!!!! все на потом, есть куда более актуальные темы, эту я хочу учить. но это просто невозможно. не до нее.

введение основных понятий, которые будут дальше использоваться. см другой раздел.

здесь нужно засесть в гл 8 адлера.

# 14 Приложения теории групп в физике (!!)

(мб увеличу раздел, пока так)

## 14.1 Приложения в теории поля

и тут как раз [?] нам нужен, по сути тут самое важное от этой теории.

и вообще [?] - там прямо сразу вся теория, компоненты связности, что это вообще такое??? нужно над теорией групп работать! и вообще, вся теория поля очень много содержит теории групп, так что следует начать с нее на самом дел.

!! мы часто доказываем, что что-то группа Ли, следует подробно расписать, откуда это берется, и что это такое?

### 14.1.1 О группе Лоренца

(?? у Кострикина про это тоже написано?)

по [?], распишем все ее характеристики.

### 14.1.2 О спиновых матрицах для старших спинов

(вставлю потом из теории поля, пока там э)

#### О произвольном спине (!?!?)

Обсудим произвольный спин.

**Коротко сам алгоритм определения генераторов произвольного спина** Можно делать методом Крамерса, а можно угадыванием.

Заметим, что там могут быть разные вообще матрицы, если брать разные знаки у их элементов! (?? так и должно быть, что много есть спиновых матриц вообще? похоже что.)

**Preparation: $\mathbf{SU}(2), \mathbf{O}(3)$ and all that.** (!!! в теории групп напишу это!!!!!!)

I begin with brief review of some standard material, partly to underscore how elementary are the essential ideas, and partly to establish some notational conventions. It is upon this elementary foundation that we will build.

Let $\mathbb{M}$ be any $2\times 2$ matrix. From $\det(\mathbb{M}-\lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - (\mathrm{Tr}\mathbb{M})\lambda + \det\mathbb{M}$ we by the Cayley-Hamilton theorem have (??? проверю потом)

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{(\mathrm{Tr}\mathbb{M})\mathbb{I} - \mathbb{M}}{\det\mathbb{M}} \quad \text{unless } \mathbb{M} \text{ is singular}$$

which gives for "unimodular" $\mathbb{M}$ ($\det\mathbb{M}=1$)

$$\mathbb{M}^{-1} = (\mathrm{Tr}\mathbb{M})\mathbb{I} - \mathbb{M}$$

Trivially, any $2\times 2$ matrix $\mathbb{M}$ can be written

$$\mathbb{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\mathbb{M})\mathbb{I} + \underbrace{\left\{\mathbb{M} - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\mathbb{M})\mathbb{I}\right\}}_{\text{traceless}}$$

while we have just established that in unimodular cases

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\mathbb{M})\mathbb{I} - \left\{\mathbb{M} - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\mathbb{M})\mathbb{I}\right\}$$

Evidently such a matrix will be unitary if and only if

- $a_0 \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\mathbb{M}$ is real, and
- $\mathbb{A} \equiv \left\{\mathbb{M} - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\mathbb{M})\mathbb{I}\right\}$ is antihermitian: $\mathbb{A}^{\mathrm{t}} = -\mathbb{A}$.

The Pauli matrices $\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ are traceless hermitian, and permit the most general such $\mathbb{A}$-matrix to be notated

$$\mathbb{A} = i\left\{a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right\}$$

We then have

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}$$

and recover unimodularity by imposing upon the real numbers $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ the requirement that

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Such matrices with henceforth be denoted $\mathbb{S}$, to emphasize that they have been Specialized; they provide the natural representation of the special unimodular group $SU(2)$. In terms of the so-called Cayley-Klein parameters [8]

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv a_0 + ia_3 \\ \beta &\equiv a_2 + ia_1 \end{aligned}\right\}$$

we have

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1$$

Note the several points at which the argument has hinged on circumstances special to the 2-dimensional case.

Swifter and more familiar is the line of argument that proceeds from the observation that

$$\mathbb{S} = e^{i\mathbb{H}}$$

is unitary if and only if $\mathbb{H}$ is hermitian, and by $\det \mathbb{S} = e^{\mathrm{Tr}(i\mathbb{H})}$ will be unimodular if and only if $\mathbb{H}$ is also traceless. The most general such $\mathbb{H}$ can in 2-dimensions be written

$$\mathbb{H} = h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + h_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} h_3 & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2 & -h_3 \end{pmatrix}$$

Then

$$\mathbb{H}^2 = \left(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which implies and is implied by the statements

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 &= \mathbb{I} \\ \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 \\ \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 \\ \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 \end{aligned}\right\}$$

Also demonstrably true-but not implicit in the preceding line of argumentare the statements

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3 \\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1 \\ \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2 \end{aligned}\right\}$$

Results now in hand lead us to write

$$\boldsymbol{h} = \theta\boldsymbol{k} \quad : \quad \boldsymbol{k} \text{ a real unit 3-vector}$$

and obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \exp\left[i\theta\left\{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3\right\}\right] \\ &= \cos\theta\cdot\mathbb{I} + i\sin\theta\cdot\left\{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3\right\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta + ik_3\sin\theta & (k_2 + ik_1)\sin\theta \\ -(k_2 - ik_1)\sin\theta & \cos\theta - ik_3\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in which notation the Cayley-Klein parameters (4) become

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos\theta + ik_3\sin\theta \\ \beta &= (k_2 + ik_1)\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

The Cayley-Klein parameters were introduced by Felix Klein in connection with the theory of tops; i.e., as aids to the description of the 3-dimensional rotation group $O(3)$, with which we have now to establish contact. This we will accomplish in two different ways. The more standard approach is to introduce the traceless hermitian matrix

$$\mathbb{X} \equiv x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

and to notice that $\mathbb{X} \longmapsto \mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S}$ sends $\mathbb{X}$ into a matrix which is again traceless hermitian, and which has the same determinant:

$$\det\mathbb{X} = \det\mathbb{X} = -\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

Evidently

$$\mathbb{X} \longmapsto \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S} \equiv \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad \mathbb{S} \in SU(2)$$

and

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad \mathbb{R} \in O(3)$$

say substantially the same thing, but in different ways.

The simplest way to render explicit the $SU(2) \leftrightarrow O(3)$ connection is to work in the neighborhood of the identity; i.e., assume $\theta$ to be small and to retain only terms of first order. Thus

$$\mathbb{S} = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3) + \cdots$$

and $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S}$ becomes

$$\begin{aligned} \mathbb{X} = &\{\mathbb{I} - i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3)\} (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3) \{\mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3)\} \\ =&\mathbb{X} - i\delta\theta \left[(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3), (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)\right] + \cdots \\ =&\mathbb{X} + \delta\mathbb{X} \end{aligned}$$

But by (6)

$$\begin{aligned} [\text{ etc. }] &= (k_1x_2 - k_2x_1)[\sigma_1, \sigma_2] + (k_2x_3 - k_3x_2)[\sigma_2, \sigma_3] + (k_3x_1 - k_1x_3)[\sigma_3, \sigma_1] \\ &= 2i\left\{(k_1x_2 - k_2x_1)\sigma_3 + (k_2x_3 - k_3x_2)\sigma_1 + (k_3x_1 - k_1x_3)\sigma_2\right\} \end{aligned}$$

so we have

$$\delta\mathbb{X} = \delta x_1\sigma_1 + \delta x_2\sigma_2 + \delta x_3\sigma_3 = 2\delta\theta\{\text{ etc. }\}$$

which can be expressed

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = 2\delta\theta \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

More compactly $\delta\boldsymbol{x} = 2\delta\theta \cdot \mathbb{K}\boldsymbol{x}$ with $\mathbb{K} = k_1\mathbb{T}_1 + k_2\mathbb{T}_2 + k_3\mathbb{T}_3$, which entails

$$\mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The real antisymmetric matrices $\mathbb{T}$ are-compare (6.3) -not multiplicatively closed, but are closed under commutation:

$$\left.\begin{aligned} [\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2] &= \mathbb{T}_3 \\ [\mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3] &= \mathbb{T}_1 \\ [\mathbb{T}_3, \mathbb{T}_1] &= \mathbb{T}_2 \end{aligned}\right\}$$

Straightforward iteration leads now to the conclusion that

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \exp\left[i\theta\left\{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3\right\}\right] \\ \mathbb{R} &= \exp\left[2\theta\left\{k_1\mathbb{T}_1 + k_2\mathbb{T}_2 + k_3\mathbb{T}_3\right\}\right] \end{aligned}$$

If $\{x_1, x_2, x_3\}$ refer to a right hand frame, then $\mathbb{R}$ describes a right handed rotation through angle $2\theta$ about the unit vector $\boldsymbol{k}$. Notice that-and how elementary is the analytical origin of the fact that - the association (15) is biunique: reading from (7.1) we see that

$$\mathbb{S} \to -\mathbb{S} \text{ as } \theta \text{ advances from } 0 \text{ to } \pi$$

and that $\mathbb{S}$ returns to its initial value at $\theta = 2\pi$. But from the quadratic structure of $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S}$ we see that $\pm\mathbb{S}$ both yield the same $\mathbb{X}$; i.e., that $\mathbb{R}$ returns to its initial value as $\theta$ advances from 0 to $\pi$, and goes twice around as $\mathbb{S}$ goes once around. One speaks in this connection of the "double-valuedness of the spin representations of the rotation group," and it is partly to place us in position to do so - but mainly to prepare for things to come - that I turn now to an alternative approach to the issue just discussed.

Introduce the

$$\text{2-component spinor } \xi \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(which is by nature just a complex 2-vector) and consider transformations of the form

$$\xi \longmapsto \xi' \equiv \mathbb{S}\xi$$

From the unitarity of $\mathbb{S}$ (unimodularity is in this respect not needed) it follows that

$$\xi'^{\mathrm{t}}\xi' = \xi^{\mathrm{t}}\xi$$

In more explicit notation we have

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

and

$$u'^*u' + v'^*v' = u^*u + v^*v$$

At (8) we acquired descriptions of $\alpha$ and $\beta$ to which we can now assign rotational interpretations in Euclidean 3-space. But how to extract $O(3)$ from (19) without simply hiking backward along the path we have just traveled?

**Kramer's method for recovering O(3). (!?!??!?!?)** In 1930/31 Kramers developed an algebraic approach to the quantum theory of spin/angular momentum which - though clever, and computationally powerful-gained few adherents.

We proceed from this question:

What is the $\begin{pmatrix} uu \\ uv \\ vv \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u'u' \\ u'v' \\ v'v' \end{pmatrix}$ induced by $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$?

Immediately

$$\begin{pmatrix} u'u' \\ u'v' \\ v'v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha u + \beta v)(\alpha u + \beta v) \\ (\alpha u + \beta v)\left(-\beta^* u + \alpha^* v\right) \\ \left(-\beta^* u + \alpha^* v\right)\left(-\beta^* u + \alpha^* v\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ -\alpha\beta^* & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* & \beta\alpha^* \\ (\beta^*)^2 & -2\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uu \\ uv \\ vv \end{pmatrix}$$

which we agree to abbreviate

$$\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$$

where $\mathbb{Q}$ is intended to suggest "quadratic."

At an early point in his argument Kramers develops an interest in null 3 -vectors $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$. Such a vector, if we are to avoid triviality, must necessarily be complex. He writes

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+i\boldsymbol{c} \quad : \quad \text{require } b^2=c^2 \text{ and } \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

Since $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$ entails $a_3=\pm i\sqrt{(a_1+ia_2)(a_1-ia_2)}$ it becomes fairly natural to introduce complex variables

$$u\equiv\sqrt{a_1-ia_2}$$
$$v\equiv i\sqrt{a_1+ia_2}$$

Then

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{2}(u^2-v^2) \\ a_2=i\frac{1}{2}(u^2+v^2) \\ a_3\equiv -iuv \end{array}\right\}$$

The $\boldsymbol{a}(u,v)$ thus defined has the property that

$$\boldsymbol{a}(u,v)=\boldsymbol{a}(-u,-v)$$

We conclude that, as $(u,v)$ ranges over complex 2 -space, $\boldsymbol{a}(u,v)$ ranges twice over the set of null 3 -vectors, of which $a_1,a_2,a_3$ provides a parameterized description.

Thus prepared, we ask: What is the $\boldsymbol{a}\longmapsto\boldsymbol{a}'$ that results when $\mathbb{S}$ acts by $\xi\longmapsto\xi\equiv\mathbb{S}\xi$ on the parameter space? We saw that

$$\boldsymbol{\zeta}\longmapsto\boldsymbol{\zeta}=\mathbb{Q}\boldsymbol{\zeta}$$

while at (23) we obtained

$$\boldsymbol{a}=\mathbb{C}\boldsymbol{\zeta} \text{ with } \quad \mathbb{C}\equiv\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\ i&0&i\\ 0&-2&0\end{pmatrix}$$

So we have

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\longmapsto\boldsymbol{a}=&\mathbb{R}\boldsymbol{a}\\ \mathbb{R}\equiv&\,\mathbb{C}\mathbb{Q}\mathbb{C}^{-1}\end{aligned}$$

Mathematica is quick to inform us that, while $\mathbb{R}$ is a bit of a mess, it is a mess with the property that every element is manifestly conjugation-invariant (meaning real). And, moreover, that $\mathbb{R}^{\top}\mathbb{R}=\mathbb{I}$. In short,

$$\mathbb{R} \text{ is a real rotation matrix, an element of } O(3)$$

To sharpen that statement we again (in the tradition of Sophus Lie) retreat to the neighborhood of the identity and work in first order; from (8) we have

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1+ik_3\delta\theta \\ \beta=(k_2+ik_1)\,\delta\theta\end{array}\right\}$$

Substitute into $\mathbb{Q}$, abandon terms of second order and obtain

$$\mathbb{Q}=\mathbb{I}+\begin{pmatrix}2ik_3&2(k_2+ik_1)&0\\ -(k_2-ik_1)&0&(k_2+ik_1)\\ 0&-2(k_2-ik_1)&-2ik_3\end{pmatrix}\delta\theta+\cdots$$

whence (by calculation which I have entrusted to Mathematica)

$$\mathbb{R} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Note!}}}{\mathbb{I} -} \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & +k_1 \\ +k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & +k_2 & 0 \end{pmatrix} 2\delta\theta + \cdots$$

This describes a doubled-angle rotation about $\boldsymbol{k}$ which is, however, retrograde.

The preceding argument has served-redundantly, but by different means to establish

$$SU(2) \longleftrightarrow O(3)$$

The main point of the discussion lies, however, elsewhere. We now back up to $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$ and head off in a new direction.

(то есть я удалю кучу теории раньше, потому что она не по теме!)

**Spin matrices by Kramer's method.** For reasons that will soon acquire a high degree of naturalness, we agree at this point in place of (17) to write

$$\xi\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix} \longmapsto \xi\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix} \equiv \mathbb{S}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

and to adopt this abbreviation of $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$:

$$\zeta(1) \longmapsto \zeta(1) \equiv \mathbb{Q}(1)\zeta(1)$$

Mathematica informs us that the $3 \times 3$ matrix $\mathbb{Q}(1)$ is unimodular

$$\det \mathbb{Q}(1) = 1$$

but not unitary... nor do we expect it to be: the invariance of $u^*u + v^*v$ implies that not of $(uu)^*(uu) + (uv)^*(uv) + (vv)^*(vv)$ but of

$$\begin{aligned}(u^*u + v^*v)^2 &= (uu)^*(uu) + 2(uv)^*(uv) + (vv)^*(vv) \\ &= \zeta^{\text{t}}(1)\mathbb{G}(1)\zeta(1) \\ \mathbb{G}(1) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Define

$$\xi(1) \equiv \sqrt{\mathbb{G}}\zeta(1) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Then the left side of

$$\xi^{\text{t}}(1)\xi(1) = (u^*u + v^*v)^2 = \left[\xi^{\text{t}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xi\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]^2$$

is invariant under under the induced transformation

$$\begin{aligned}\xi(1) \longmapsto \xi'(1) \equiv& \mathbb{S}(1)\xi(1) \\ &\mathbb{S}(1) \equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q}(1) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

because the right side is invariant under $\xi\left(\frac{1}{2}\right) \longmapsto \xi\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \mathbb{S}\left(\frac{1}{2}\right)\xi\left(\frac{1}{2}\right)$.

We are not surprised to discover that the $3 \times 3$ matrix

$$\mathbb{S}(1) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\beta^*\alpha & (\alpha^*\alpha - \beta^*\beta) & \sqrt{2}\alpha^*\beta \\ (\beta^*)^2 & -\sqrt{2}\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix}$$

is unitary and unimodular:

$$\mathbb{S}^{\mathrm{t}}(1)\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad \det \mathbb{S}(1) = 1$$

In the infinitesimal case we have

$$\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} + \begin{pmatrix} +2ik_3 + \sqrt{2}\,(k_2 + ik_1) & & 0 \\ -\sqrt{2}\,(k_2 - ik_1)0 & & +\sqrt{2}\,(k_2 + ik_1) \\ 0 - \sqrt{2}\,(k_2 - ik_1) & & -2ik_3 \end{pmatrix} \delta\theta + \cdots$$

which (compare (12)) can be written

$$\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1(1) + k_2\sigma_2(1) + k_3\sigma_3(1)) + \cdots$$

with

$$\sigma_1(1) \equiv \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & +\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2(1) \equiv i \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3(1) \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

The $3 \times 3$ matrices $\sigma_j(1)$ are manifestly traceless hermitian-the generators, evidently, of a representation of $SU(2)$ contained within the 8-parameter group $SU(3)$. They are, unlike the Pauli matrices (see again (6.3)), not closed under multiplication, but are closed under commutation. In the latter respect the precisely mimic the $2 \times 2$ Pauli matrices:

$$\begin{aligned} \left[\sigma_1\left(\tfrac{1}{2}\right), \sigma_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] &= 2i\sigma_3\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ \left[\sigma_2\left(\tfrac{1}{2}\right), \sigma_3\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] &= 2i\sigma_1\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ \left[\sigma_3\left(\tfrac{1}{2}\right), \sigma_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] &= 2i\sigma_2\left(\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned} : \text{similarly} \qquad \left.\begin{aligned} [\sigma_1(1), \sigma_2(1)] &= 2i\sigma_3(1) \\ [\sigma_2(1), \sigma_3(1)] &= 2i\sigma_1(1) \\ [\sigma_3(1), \sigma_1(1)] &= 2i\sigma_2(1) \end{aligned}\right\}$$

There are, however, some notable differences, which will acquire importance:

$$\sigma_1^2\left(\frac{1}{2}\right) + \sigma_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + \sigma_3^2\left(\frac{1}{2}\right) = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2(1) + \sigma_2^2(1) + \sigma_3^2(1) = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We are within sight now of our objective, which is to say: we are in possession of technique sufficient to construct $(2\ell + 1)$-dimensional traceless hermitian triples

$$\{\sigma_1(\ell), \sigma_2(\ell), \sigma_3(\ell)\} \quad : \quad \ell = \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$$

with properties that represent natural extensions of those just encountered. But before looking to the details, I digress to assemble the...

**Bare bones of the quantum theory of angular momentum.** Classical mechanics engenders interest in the construction $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$; i.e., in

$$\begin{aligned} L_1 &= x_2p_3 - x_3p_2 \\ L_2 &= x_3p_1 - x_1p_3 \\ L_3 &= x_1p_2 - x_2p_1 \end{aligned}$$

The primitive Poisson bracket relations

$$[x_m, x_n] = [p_m, p_n] = 0 \quad \text{and} \quad [x_m, p_n] = \delta_{mn}$$

are readily found to entail

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= L_3 \\ [L_2, L_3] &= L_1 \\ [L_3, L_1] &= L_2 \end{aligned}$$

and

$$\left[L_1, L^2\right] = \left[L_2, L^2\right] = \left[L_3, L^2\right] = 0$$

where $L^2 \equiv \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

In quantum theory those classical observables become hermitian operators $\mathrm{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ and $\mathbf{L}^2 \equiv \mathrm{L}_1^2 + \mathrm{L}_2^2 + \mathrm{L}_3^2$ and Dirac's principle $[x_m, p_n] = \delta_{mn} \longrightarrow [\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_n] = i\hbar\mathbf{l}$ gives rise to commutation relations that mimic the preceding Poisson bracket relations:

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] &= i\hbar\mathbf{L}_3 \\ [\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3] &= i\hbar\mathbf{L}_1 \\ [\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_1] &= i\hbar\mathbf{L}_2 \end{aligned}\right\}$$

The function-theoretic approach to the subject [16] proceeds from

$$x \to \boldsymbol{x}\cdot \quad \text{and} \quad \mathbf{p} \to \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}$$

and leads (one works actually in spherical coordinates) to the theory of spherical harmonics

$$Y_\ell^m(\boldsymbol{x}) \quad : \quad \left\{\begin{aligned} &\ell = 0, 1, 2, ... \\ &m = -\ell, -(\ell-1), ..., -1, 0, +1, ..., +(\ell-1), +\ell \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{L}^2 Y_\ell^m &= \ell(\ell+1) \cdot Y_\ell^m \\ \mathrm{L}_3 Y_\ell^m &= m\hbar \cdot Y_\ell^m \end{aligned}\right\}$$

But the subject admits also of algebraic development, and that approach, while it serves to reproduce the function-theoretic results just summarized, leads also to a physically important algebraic extension

$$\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} ...$$

of the preceding theory.

One makes a notational adjustment

$$\mathrm{L} \to \mathrm{J}$$

to emphasize that one is talking now about an expanded subject (fusion of the "theory of orbital angular momentum" and a "theory of intrinsic spin") and introduces non-hermitian "ladder operators"

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{J}_+ = \mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2\\ \mathbf{J}_- = \mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2\end{array}\right\}$$

One finds the $\ell^{\text{th}}$ eigenspace of $\mathbf{J}^2$ to be $(2\ell+1)$-dimensional, and uses $\boldsymbol{J}_3$ to resolve the degeneracy. Let the normalized simultaneous eigenvectors of $\mathrm{J}^2$ and $\mathbf{J}_3$ be denoted $\mid \ell, m)$:

$$\left.\begin{array}{rl}\mathrm{J}^2 \mid \ell, m) & = \ell(\ell+1)\hbar^2 \cdot \mid \ell, m)\\ \mathbf{J}_3 \mid \ell, m) & = m\hbar \cdot \mid \ell, m)\\ m \mid \ell', m') & = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\end{array}\right\}$$

One finds that

$$\left.\begin{array}{lcl}\mathbf{J}_+ \mid \ell, m) \sim \mid \ell, m+1) & : & m<\ell\\ \mathbf{J}_+ \mid \ell, m) = 0 & : & m=\ell\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lcl}\mathbf{J}_- \mid \ell, m) \sim \mid \ell, m-1) & : & m>-\ell\\ \mathbf{J}_+ \mid \ell, m) = 0 & : & m=-\ell\end{array}\right\}$$

and that one has to introduce ugly renormalization factors $\frac{1}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)}}$ to turn the $\sim$ 's into $=$ 's.

My plan is not to make active use of this standard material, but to show that the results we achieve by other means exemplify it. We note in that connection that if matrices $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ satisfy commutation relations of the form (38), then the matrices

$$\mathbb{J}_n \equiv \frac{1}{2}\hbar\sigma_n \quad : \quad n = 1, 2, 3$$

bear the physical dimensionality of $\hbar$ (i.e., of angular momentum) and satisfy (41); such matrices are called "angular momentum matrices" (more pointedly: spin matrices).

To reduce notational clutter we agree at this point to adopt units in which $\hbar$ is numerically equal to unity. Simple dimensional analysis would serve to restore all missing $\hbar$-factors.

Look now to particulars of the case $\ell = \frac{1}{2}$. We have

$$\mathbb{J}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

whence

$$\mathbb{J}^2 \equiv \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + \mathbb{J}_3^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

All 2-vectors are eigenvectors of $\mathbb{J}^2$. To resolve that universal degeneracy we select $\mathbb{J}_3$ which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\left.\begin{array}{l}\text{eigenvalue } +\tfrac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } \mid \tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}) \equiv \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\ \text{eigenvalue } -\tfrac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } \mid \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \equiv \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

17 The commutators of the generators $\mathbb{T}_n$ of O(3) were found at (14) to mimic the Poisson bracket relations $[L_1, L_2] = L_3$, etc. But if, in the spirit of the preceding discussion, we construct $\mathbb{J}_n \equiv i\hbar\mathbb{T}_n$ we obtain $[\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2] = -i\hbar\mathbb{J}_3$, etc. which have reverse chirality. $\mathbb{J}_1$ and $\mathbb{J}_2$ have spectra identical to that of $\mathbb{J}_3$, but distinct sets of eigenvectors. The ladder operators (45) become non-hermitian ladder matrices

$$\mathbb{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

By inspection we have

$$\begin{aligned} \text{action of } \mathbb{J}_+ : & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{action of } \mathbb{J}_- : & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

which are illustrative of (47). Note the absence in this case of normalization factors; i.e., that the $\sim$ 's have become equalities.

**Case Spin** 1 A better glimpse of the situation-in-general is provided by the case $\ell = 1$. Reading from (37) we have

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{J}_1(1) &\equiv \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & +\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_2(1) &\equiv i\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_3(1) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

whence

$$\mathbb{J}^2 \equiv \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + \mathbb{J}_3^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$2 = 1(1+1)$$

All 3 -vectors are eigenvectors of $\mathbb{J}^2$. To resolve that universal degeneracy we select $\mathbb{J}_3$ which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\left.\begin{aligned} &\text{eigenvalue } +1 \text{ with normalized eigenvector } \mid 1,+1) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\text{eigenvalue } 0 \text{ with normalized eigenvector } \mid 1,0) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\text{eigenvalue } -1 \text{ with normalized eigenvector } \mid 1,-1) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

The ladder matrices become

$$\mathbb{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

which by quick calculation give

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_+ \mid 1,-1) &= \sqrt{2} \mid 1, \quad 0) \\
\mathbb{J}_+ \mid 1, \quad 0) &= \sqrt{2} \mid 1,+1) \\
\mathbb{J}_+ \mid 1,+1) &= 0 \\
\mathbb{J}_- \mid 1,+1) &= \sqrt{2} \mid 1, \quad 0) \\
\mathbb{J}_- \mid 1, \quad 0) &= \sqrt{2} \mid 1,-1) \\
\mathbb{J}_- \mid 1,-1) &= 0
\end{aligned}$$

Normalization now is necessary, and the factor

$$N_\pm(\ell, m) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}}$$

advertised at (48) does in fact do the job, since

$$\begin{aligned}
N_+(1,-1) &= 1/\sqrt{2} \\
N_+(1,0) &= 1/\sqrt{2} \\
N_-(1,+1) &= 1/\sqrt{2} \\
N_-(1,0) &= 1/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

**Case Spin 3/2.** We look now to the case $\ell = \frac{3}{2}$, which was of special interest to Penrose or in QFT, and is of special interest therefore also to us. The simplest extension of the argument that gave $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$ now gives

$$\begin{pmatrix} u^p r u^p r u^p r \\ u^p r u^p r v^p r \\ u^p r v^p r v^p r \\ v^p r v^p r v^p r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2\beta & 3\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ -\alpha^2\beta^* & \alpha^2\alpha^* - 2\alpha\beta\beta^* & 2\alpha\alpha^*\beta - \beta^2\beta^* & \alpha^*\beta^2 \\ \alpha\left(\beta^*\right)^2 & -2\alpha\alpha^*\beta^* + \beta\left(\beta^*\right)^2 & \alpha\left(\alpha^*\right)^2 - 2\alpha^*\beta\beta^* & \left(\alpha^*\right)^2\beta \\ -\left(\beta^*\right)^3 & 3\alpha^*\left(\beta^*\right)^2 & -3\left(\alpha^*\right)^2\beta^* & \left(\alpha^*\right)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uuu \\ uuv \\ uvv \\ vvv \end{pmatrix}$$

which we agree to abbreviate

$$\zeta^p r \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} \zeta \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Write

$$\begin{aligned}
(u^*u + v^*v)^3 &= (uuu)^* \quad (uuu) + 3(uuv)^*(uuv) + 3(uvv)^*(uvv) + (vvv)^*(vvv) \\
&= \zeta^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{G}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} \zeta \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
\mathbb{G}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Define

$$\xi \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} \equiv \sqrt{\mathbb{G}}\zeta \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Then the left side of

$$\xi^{\mathrm{t}}\left(\frac{3}{2}\right)\xi\left(\frac{3}{2}\right) = (u^*u + v^*v)^3 = \left[\xi^{\mathrm{t}}\left(\frac{1}{2}\right)\xi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3$$

is invariant under under the induced transformation

$$\xi\left(\frac{3}{2}\right) \longmapsto \xi'\left(\frac{3}{2}\right) \equiv \mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right)\xi\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right) \equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q}\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}}$$

Mathematica informs us - now not at all to our surprise - that the $4 \times 4$ matrix

$$\mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \sqrt{3}\alpha^2\beta & \sqrt{3}\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ -\sqrt{3}\alpha^2\beta^* & \alpha^2\alpha^* - 2\alpha\beta\beta^* & 2\alpha\alpha^*\beta - \beta^2\beta^* & \sqrt{3}\alpha^*\beta^2 \\ \sqrt{3}\alpha\left(\beta^*\right)^2 & -2\alpha\alpha^*\beta^* + \beta\left(\beta^*\right)^2 & \alpha\left(\alpha^*\right)^2 - 2\alpha^*\beta\beta^* & \sqrt{3}\left(\alpha^*\right)^2\beta \\ -\left(\beta^*\right)^3 & \sqrt{3}\alpha^*\left(\beta^*\right)^2 & -\sqrt{3}\left(\alpha^*\right)^2\beta^* & \left(\alpha^*\right)^3 \end{pmatrix}$$

is unitary and unimodular:

$$\mathbb{S}^{\mathrm{t}}\left(\frac{3}{2}\right)\mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right) = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad \det\mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

Drawing again upon $\left.\begin{array}{l}\alpha = 1 + ik_3\delta\theta \\ \beta = (k_2 + ik_1)\,\delta\theta\end{array}\right\}$ we in leading order have

$$\mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \sqrt{3}\beta & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}\beta^* & \alpha^2\alpha^* & 2\beta & 0 \\ 0 & -2\beta^* & \alpha\left(\alpha^*\right)^2 & \sqrt{3}\beta \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\beta^* & \left(\alpha^*\right)^3 \end{pmatrix} + \cdots$$

which becomes

$$\mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right) = \mathbb{I} + i\delta\theta\cdot\left(k_1\sigma_1\left(\frac{3}{2}\right) + k_2\sigma_2\left(\frac{3}{2}\right) + k_3\sigma_3\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \cdots$$

with

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1\left(\tfrac{3}{2}\right) \equiv \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & +2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & +\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2\left(\tfrac{3}{2}\right) \equiv i\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3\left(\tfrac{3}{2}\right) \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

By quick computation we verify that

$$\begin{aligned} \left[\sigma_1\left(\tfrac{3}{2}\right), \sigma_2\left(\tfrac{3}{2}\right)\right] &= 2i\sigma_3\left(\tfrac{3}{2}\right) \\ \left[\sigma_2\left(\tfrac{3}{2}\right), \sigma_3\left(\tfrac{3}{2}\right)\right] &= 2i\sigma_1\left(\tfrac{3}{2}\right) \\ \left[\sigma_3\left(\tfrac{3}{2}\right), \sigma_1\left(\tfrac{3}{2}\right)\right] &= 2i\sigma_2\left(\tfrac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

and find that (compare (39))

$$\sigma_1^2\left(\frac{3}{2}\right)+\sigma_2^2\left(\frac{3}{2}\right)+\sigma_3^2\left(\frac{3}{2}\right)=15\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Thus are we led by $(49:\hbar=1)$ to the spin matrices

$$\mathbb{J}_1\left(\frac{3}{2}\right)\equiv\frac{1}{2}\quad\begin{pmatrix}0&+\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&+2&0\\0&2&0&+\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J}_2\left(\frac{3}{2}\right)\equiv i\frac{1}{2}\quad\begin{pmatrix}0&-\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&-2&0\\0&2&0&-\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J}_3\left(\frac{3}{2}\right)\equiv\quad\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

which give $\mathbb{J}^2\left(\frac{3}{2}\right)\equiv\mathbb{J}_1^2\left(\frac{3}{2}\right)+\mathbb{J}_2^2\left(\frac{3}{2}\right)+\mathbb{J}_3^2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, here $\frac{15}{4}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)$.

All 4 -vectors are eigenvectors of $\mathbb{J}^2\left(\frac{3}{2}\right)$. To resolve that universal degeneracy we select $\mathbb{J}_3\left(\frac{3}{2}\right)$ which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\text{eigenvalue }\ +\tfrac{3}{2}\text{ with normalized eigenvector }\ |\,\tfrac{3}{2},+\tfrac{3}{2})\equiv\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvalue }\ +\tfrac{1}{2}\text{ with normalized eigenvector }\ |\,\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2})\equiv\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvalue }\ -\tfrac{1}{2}\text{ with normalized eigenvector }\ |\,\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2})\equiv\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvalue }\ -\tfrac{3}{2}\text{ with normalized eigenvector }\ |\,\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2})\equiv\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\mathbb{J}_1\left(\frac{3}{2}\right)$ and $\mathbb{J}_2\left(\frac{3}{2}\right)$ have spectra identical to that of $\mathbb{J}_3\left(\frac{3}{2}\right)$, but distinct sets of eigenvectors. The ladder operators (45) become non-hermitian ladder matrices

$$\mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_-\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

By inspection we have

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right) \mid \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = \sqrt{3} \mid \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) & \text{with} \quad N\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = 1/\sqrt{3} \\ \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right) \mid \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = 2 \mid \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}) & \text{with} \quad N\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 1/2 \\ \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right) \mid \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}) = \sqrt{3} \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}) & \text{with} \quad N\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right) = 1/\sqrt{3} \\ \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right) \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}) = 0 & \end{array}\right\}$$

and similar equations describing the step-down action of $\mathbb{J}_-\left(\frac{3}{2}\right)$. Matrices identical to (60.1) and (60.5) appear on p. 203 of Schiff and p. 345 of Powell & Crasemann. [7]

**Case Spin 2.** Let's use Kramer's method to find matrices for spin 2. We start with considering

$$\zeta(2) \equiv \begin{pmatrix} uuuu \\ uuuv \\ uuvv \\ uvvv \\ vvvv \end{pmatrix}$$

and obtain $\zeta'(2) = \mathbb{Q}(2)\zeta(2)$ where $\mathbb{Q}(2)$ is a $5 \times 5$ mess. From

$$(u^*u + v^*v)^4 = \zeta^{\mathrm{t}}(2)\mathbb{G}(2)\zeta(2)$$

$$\mathbb{G}(2) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(вычислениям верю, потом проделаю.) we are led to write

$$\xi(2) \equiv \sqrt{\mathbb{G}}\zeta(2) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

giving

$$\xi(2) \longmapsto \xi'(2) \equiv \mathbb{S}(2)\xi(2)$$

$$\mathbb{S}(2) \equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q}(2) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}}$$

where $\mathbb{S}(2)$ is again a patterned mess (Mathematica assures us that $\mathbb{S}(2)$ is unitary and unimodular) which, however, simplifies markedly in leading order:

$$\mathbb{S}(2)=\begin{pmatrix}\alpha^4 & 2\beta & 0 & 0 & 0\\ -2\beta^* & \alpha^3\alpha^* & \sqrt{6}\beta & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{6}\beta^* & \alpha^2\left(\alpha^*\right)^2 & \sqrt{6}\beta & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{6}\beta^* & \alpha\left(\alpha^*\right)^3 & 2\beta\\ 0 & 0 & 0 & -2\beta^* & \left(\alpha^*\right)^4\end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\mathbb{I}+i\begin{pmatrix}4k_3 & 2\left(k_1-ik_2\right) & 0 & 0 & 0\\ 2\left(k_1+ik_2\right) & 2k_3 & \sqrt{6}\left(k_1-ik_2\right) & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{6}\left(k_1+ik_2\right) & 0 & \sqrt{6}\left(k_1-ik_2\right) & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\left(k_1+ik_2\right) & -2k_3 & 2\left(k_1-ik_2\right)\\ 0 & 0 & 0 & 2\left(k_1+ik_2\right) & -4k_3\end{pmatrix}+\cdots$$

From it we extract

$$\mathbb{J}_1(2)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & +2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & +\sqrt{6} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{6} & 0 & +\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & +2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix},\ \mathbb{J}_2(2)=\tfrac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix},\ \mathbb{J}_3(2)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

And $\mathbb{J}_1^2(2)+\mathbb{J}_2^2(2)+\mathbb{J}_3^2(2)=6\mathbb{I}$, where $6=2(2+1)$.

The ladder matrices become

$$\mathbb{J}_+(2)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\mathbb{J}_-(2)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

in which connection we notice that

$$\begin{array}{ll} N_+(2,+2)=\infty & N_-(2,+2)=1/2\\ N_+(2,+1)=1/2 & N_-(2,+1)=1/\sqrt{6}\\ N_+(2,0)=1/\sqrt{6} & N_-(2,0)=1/\sqrt{6}\\ N_+(2,-1)=1/\sqrt{6} & N_-(2,-1)=1/2\\ N_+(2,-2)=1/2 & N_-(2,-2)=\infty\end{array}$$

(??? проверю потом, если не будет лень.)

**Extrapolation to the general case with guessing method.** The method just reviewed, as it relates to the case $\ell=2$, can in principle be extended to arbitrary $\ell$, but the labor increases as $\ell^2$. The results in hand are, however, so highly patterned and so simple that one can readily guess the design of $\{\mathbb{J}_1(\ell),\mathbb{J}_2(\ell),\mathbb{J}_3(\ell)\}$, and then busy oneself demonstrating that one's guess is actually correct.

**Case Spin $\frac{5}{2}$** I illustrate how one might proceed in the case $\ell=\frac{5}{2}$. We expect in any event to have

$$\mathbb{J}_3\left(\frac{5}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

where (as henceforth) the omitted matrix elements are 0's. And we guess that $\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right)$ and $\mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right)$ are of the designs

$$\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & +a & & & & \\ a & 0 & +b & & & \\ & b & 0 & +c & & \\ & & c & 0 & +d & \\ & & & d & 0 & +e \\ & & & & e & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right)=i\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -a & & & & \\ a & 0 & -b & & & \\ & b & 0 & -c & & \\ & & c & 0 & -d & \\ & & & d & 0 & -e \\ & & & & e & 0 \end{pmatrix}$$

To achieve $\mathbb{J}_1\mathbb{J}_2-\mathbb{J}_2\mathbb{J}_1=i_3$ we ask Mathematica to solve the equations

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\left(a^2\right)=+\tfrac{5}{2}\\ \tfrac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)=+\tfrac{3}{2}\\ \tfrac{1}{2}\left(c^2-b^2\right)=+\tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{2}\left(d^2-c^2\right)=-\tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{2}\left(e^2-d^2\right)=-\tfrac{3}{2}\\ \tfrac{1}{2}\left(-e^2\right)=-\tfrac{5}{2} \end{gathered}$$

and are informed that

$$\begin{aligned} a&=\pm\sqrt{5}\\ b&=\pm\sqrt{8}\\ c&=\pm\sqrt{9}\\ d&=\pm\sqrt{8}\\ e&=\pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

where the signs are independently specifiable. Take all signs to be positive (any of the $2^5-1=31$ alternative sign assignments would, however, work just as well) and obtain

$$\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{5} & & & & \\ \sqrt{5} & 0 & +\sqrt{8} & & & \\ & \sqrt{8} & 0 & +\sqrt{9} & & \\ & & \sqrt{9} & 0 & +\sqrt{8} & \\ & & & \sqrt{8} & 0 & +\sqrt{5} \\ & & & & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right)=i\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} & & & & \\ \sqrt{5} & 0 & -\sqrt{8} & & & \\ & \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{9} & & \\ & & \sqrt{9} & 0 & -\sqrt{8} & \\ & & & \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{5} \\ & & & & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

The commutation relations check out, and we have

$$\mathbb{J}_1^2\left(\frac{5}{2}\right)+\mathbb{J}_2^2\left(\frac{5}{2}\right)+\mathbb{J}_3^2\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{35}{4}\mathbb{I}$$

$$\frac{35}{4}=\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)$$

We observe that for $N_{\pm}(\ell, m) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}}$

$$\begin{array}{ll}
N_+\left(\frac{5}{2},+\frac{5}{2}\right)=\infty & N_+\left(\frac{5}{2},+\frac{5}{2}\right)=1/\sqrt{5} \\
N_+\left(\frac{5}{2},+\frac{3}{2}\right)=1/\sqrt{5} & N_+\left(\frac{5}{2},+\frac{3}{2}\right)=1/\sqrt{8} \\
N_+\left(\frac{5}{2},+\frac{1}{2}\right)=1/\sqrt{8} & N_+\left(\frac{5}{2},+\frac{1}{2}\right)=1/\sqrt{9} \\
N_+\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)=1/\sqrt{9} & N_+\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)=1/\sqrt{8} \\
N_+\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)=1/\sqrt{8} & N_+\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)=1/\sqrt{5} \\
N_+\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)=1/\sqrt{5} & N_+\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)=\infty
\end{array}$$

**General case** In the general case we would
$(i)$ compute the numbers

$$1/N_+(\ell, m) \quad : \quad m=-\ell, ..., +(\ell-1)$$

(ii) insert them into off-diagonal positions in the now obvious way to construct $\mathbb{J}_1(\ell)$ and $\mathbb{J}_2(\ell)$, $(iii)$ adjoin

$$\mathbb{J}_3=\begin{pmatrix} \ell & & & & \\ & (\ell-1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(\ell-1) & \\ & & & & -\ell \end{pmatrix}$$

and be done.

## 14.2 Приложения в квантовой механике

(постараюсь, чтобы и в теории было про это много параграфов!)

## 14.3 Приложения в физике частиц

## 14.4 Другие приложения в математической физике

### 14.4.1 Теория групп в теории струн

(надеюсь, такого малого раздела хватит, пока такая заготовка)

# Part VI
# Adds

## A Введение

### A.1 Другая мотивация изучать теорию групп или ее разделы

теория групп - фундаментальный раздел математики, который используется много в теоретической физике

и во многих (????) других разделах математики. (мб)

в обще, вроде нужен, пока не четко понимаю, где конкретно и что без нее было бы?

#### мотивация заниматься представлениями

(мб потом увеличу раздел)

### A.2 Мышление профессионала в теории групп

#### A.2.1 Взгляд физика на теорию групп

##### Не все в физике это теория групп

Хаос - не она.

(?? почему Вигнер и Вайнберг перувеличивали значимость групп? интересно подробно написать)

##### Больше энергетический масштаб - больше симметрий (???)

(?? тоже непонимаю пока, почему это конкретно так?)

#### A.2.2 Как не уйти в тупик, изучая теорию групп?

(в прочем, это же мб ко многим предметам по математике относится, так что мб потом в организационные записи перенесу, но тут пока это, потому что пока думаю, что это актуально.)

##### Математики в своем культе не особо круты, даже если в рамках своего культа понимают глубоко некоторые темы теории групп

Вспоминаю такую тусовку, общая философия про математику настолько разрослась, что если кто-то ей не следует, то он будет чувствовать себя тупым. Это - тупая и жалкая манипуляция. Поэтому и забивай на таких “преподавателей”, я не думаю, что они чего-то стоят как личности, ну а как профессионалы - пусть сидят и делают свои исследования в науке, ради бога. А вот допускать, чтобы они говорили, кому как учиться - это очень глупая идея.

### A.3 Обзор теории групп

что вообще в нем происходит?

### A.3.1 обзор теоретических подходов

#### дискретная теория групп

тупые задачи на определения.
где они применяются?

#### теория групп ли (?)

#### теория представлений (?)

### A.3.2 обзор приложений

#### квантовая механика

#### квантовая теория поля

:
...
...

#### стандартная модель

### A.3.3 Мышление профессионалов в теории групп

#### если хочешь применять в физике, забей на дискретную теорию групп

возьми тупо определения и забей, всё.
ибо в физике другие разделы теории групп нужны.

### A.3.4 Описание записи

#### описание записи в целом

повествование начинается по [?] и с самых начал. у берштейша не достаточные лекции для понимания, поэтому позже все будет дополнено нормальными книгами.

а в особенности нужно добавить жизнь в это, например квантовую механику и связь с природой. потому что в изложении берштейна природа просто убита.

первая глава - просто алгебра и определения, она в общем говоря вообще не нужна, просто с этого все время идет начало, да и много задачек не физических на это есть.

на самом деле после достаточно простого начала мы быстро выходим в первой главе на замысловатые и общие определение, что здесь наверное и самое важное. основа тут - 3я и 4я лекция берштейна, там как раз все теоремы и связи обсуждаются. собственно, за эти 4 лекции планировалось и дать все основы конечных групп.

дальше начинаются представления. здесь ничего не применяется из прошлых пунктов. вводятся новые операции и какие-то новые оперделения и задачи.

в общем, глава про группы ли - самая важная глава, так что до этого - только введение было.

#### первая часть

#### вторая часть

#### приложения

какие вообще приложения я разбирал?

### A.3.5 Об истории теории групп

**появление теории групп**

## A.4 Литература

### A.4.1 Основная литература

#### Основная обучающая литература

(??? пока не знаю, какую книгу можно считать основной)

Э. Б. Винберг Курс Алгебры Глава 4

С физтеха рекомендуют, пока особо не смотрел, потом посмотрю.

#### Основная литература о приложениям к физике

[?] Тахтаджян Л. А. Квантовая механика для математиков

Много групповых конструкций обсуждено в контексте квантовой механики, точно она очень полезная.

Cornwell J. F. Group theory in physics

Большая книга про разные приложения и детали. пока что не дорос до неё, ибо обычную теорию собрать бы.

[1] Катанаев М. О. Геометрические методы в математической физике

много как теории, так и приложений

### A.4.2 Дополнительная литература

#### Другая обучающая

И. А. Чубаров Основы алгебры и теории представлений

С физтеха рекомендуют, пока особо не смотрел, потом посмотрю.

[?] Берштейн Лекции по теории групп 2020

Неплохие лекции, но их часто не достаточно, чтобы понять происходящее, так что они - просто дополнение обычным книгам. Плюсы - что объема в разы меньше, чем в книгах.

Д. А. Шапиро Конспект лекций по математическим методам физики. Часть 2 (Представления групп и их применение в физике. Функции Грина)

С физтеха рекомендуют, пока особо не смотрел, потом посмотрю.

Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теоретическая физика. Том 3 Квантовая механика гл. XII

С физтеха рекомендуют, пока особо не смотрел, потом посмотрю.

М. Хамермеш Теория групп и ее применения к физическим проблемам Часть 1

С физтеха рекомендуют, пока особо не смотрел, потом посмотрю.

Ж. П. Серр Линейные представления конечных групп Часть 1

С физтеха рекомендуют, пока особо не смотрел, потом посмотрю.

Э. Б. Винберг Линейные представления конечных групп Часть 1

С физтеха рекомендуют, пока особо не смотрел, потом посмотрю.

Н. Вавилов Конкретная Теория Групп I. Основные Понятия

Самая интересная книга, с которой скорее всего и буду делать запись.

Н. Вавилов Конкретная Теория Групп first draught

Много других глав, которые в бОльшей книге выше не написаны, так что тоже приходится смотреть.

[2] Кострикин, АИ Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры

много основных концепций раскрыто, так что по нему и изучать буду. вообще, в большей степени это в алгебре находится.

А.П. ИСАЕВ В.А. РУБАКОВ ТЕОРИЯ ГРУПП И СИММЕТРИЙ

Книга, в которой обсуждается многое, что я знаю, но и наверняка многого есть, что я не знаю. Пока не до нее, нет смысла даже касаться ее.

#### Профессиональная литература по теории групп и вообще алгебре

Jurgen Fuchs, Christoph Schweigert Symmetries, Lie Algebras and Representations A Graduate Course for Physicists

Большая профессиональная книга, где куча всего есть, многое непонятно написано, так что циклиться на ней не вижу смысла. В КУ Левене преподают по ней, авторы особыми достижениями в науке не обладают. Так что иногда пару разделов почитать можно, но больше не вижу смысла тратить время на книгу. Не математик я, чтобы про это думать. Да, еще ее в открытом доступе нет, так что нужно просить кого-то ее прислать, но так или иначе, если не будешь знать, что такая книга есть - ничего не потеряешь.

#### Другие книги о приложениях теории групп

#### Статья про групповые конструкции (??)

(я еще не настолько математик, чтобы сейчас их читать.)

#### литература с дополнениями и интересными деталями

Лекции курса Р.С. Авдеева и А.И. Буфетова «Спиноры»
[?] И. Л. Бухбиндер Релятивистская Симметрия
приложение теории групп к теории поля, интересно и важно.
[?] кириллов "что такое число?"

#### алгебраическая литература, на которую опирается теория групп

[?] Винберг Алгебра

## A.5 Головоломки теории групп на разные случаи в жизни

сбалансирую и наберу потом по интересности

# References

[1] Катанаев, МО: *Геометрические методы в математической физике*. arXiv preprint arXiv:1311.0733, 2016.

[2] Кострикин, АИ: *Введение в алгебру. Часть iii. Основные структуры*. 2001.