Partial Differential Equations

Yury Holubeu *

11 февраля 2024 г.

Запись не предназначена для распространения.

Приводятся методы и задачи уравнений математической физики, основы функционального анализа, указываются приложения. Problems are here.

Цели: 1) Тренируюсь по конспектам Карлова, а также по методичке Колесниковой, смотрю курс Лебедева! Выгружу скорее всего теории еще много.

2) Много буду делать добавлений, доучивая физику.

Содержание

*yura.winter@gmail.com

1 Предисловие

1.1 Основная мотивация

Часто физические задачи начинаются с/сводятся к уравнению в частных производных, и тогда все упирается в то, выучены эти методы или нет

(это основная мотивация. пока других основных не знаю. Другие мотивации в конце. Распишу потом.)

Стыдно не понимать основные уравнения математической физики, при этом заниматься теоретической физикой

Всегда тогда будет неуверенность, а вдруг математики давно уже решили этот вопрос? Будет непонятно как математики решают те же задачи, которые ставятся в физике?

(раскрою мысль, так и есть.)

Задачи УМФ алгоритмичны и уже исследованы, так что не сложно их изучать

Тоже это важно понимать, потому что если бы так не было - было бы на самом деле очень проблемно решать задачи. А так - предмет состоит в том, что просто говорят, как задачи решаются, ты берешь и решаешь. Вот так все просто, если не впадать в состояния, когда не усваивается информация.

Часть I

—— Typical PDE in a Nutshell ——

2 Решение типичных задач УМФ

2.1 О типичных уравнениях

2.1.1 Способы решения типичных уравнений

(тут решение основных задач, пока см. матботан, там дальше буду практиковаться.)

Краевая задача для уравнений Лапласа и Пуассона на R^2

Краевая задача для уравнений Лапласа и Пуассона на плоскости одна из самых легких и должна решаться минут за 10-15.

Решение задачи Коши в R^2 через метод характеристик

Сделаем замену переменных с целью сведения уравнения к каноническому виду. Формулы, которые надо помнить:

$$\underline{a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}} + F\left(u_x, u_y, u, x, y\right) = 0,$$

где подчёркнута квадратичная часть. Для такого уравнения уравнение характеристик выглядит следующим образом:

$$a(x,y)dy^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0.$$

Это - дифференциальное уравнение. С помощью первых интегралов этого уравнения можно сделать замену переменных в (3) такую, которая приведёт квадратичную часть к каноническому виду. В этом и заключается суть метода характеристик. В задаче на контрольной встречается исключительно гиперболический тип, а потому после замены должны занулиться коэффициенты перед чистыми производными, а остаться только перед смешанной.

Далее находим первые интегралы.

Далее делаем замену, переходим к ним.

(тут формулы переходов в производных)

Подставляем,

(?? что должно обнулиться тут?)

(а дальше вообще не дошел.)

Решение смешанной задачи в круге через функции Бесселя

(выпишу из Карлова, мб 1 страница на это будет указаний)

Решение задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности в R^3

(выпишу из Карлова, мб 1 страница на это будет указаний)

Смешанная задача на отрезке. Метод Фурье

(выпишу из Карлова, мб 1 страница на это будет указаний)

Проверка решений

Код Wolfram для проверки (!?!?!?) (могу максимально часто его использовать!!! соберу, чтобы прямо так сразу и использовать!!!)

2.1.2 Об уравнении Шредингера

О типичных способах решения

(пропишу хороший обзор потом, пока не понял особо)

О частных случаях уравнения Шредингера и применениях

(тут коротко про атом водорода)

2.1.3 Об волновом уравнении

вкратце теория волнового уравнения

метод Фурье для волнового уравнения

О формуле Кирхгофа

Рассмотрим уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle u = f$, где функции $u = u(\mathbf{x}, t)$ и $f = f(\mathbf{x}, t)$ определены на $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, а $\triangle$ -оператор Лапласа. Это уравнение определяет распространение бегущей волны в n-мерной однородной среде со скоростью a в моменты времени $t > 0$. Для того, чтобы решение было однозначным, необходимо определить начальные условия. Начальные условия определяют состояние пространства (или, говорят, «начальное возмущение») в момент времени $t = 0$:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(\bar{x}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(\bar{x})$$

Тогда обобщённая формула Кирхгофа даёт решение этой задачи в трёхмерном случае:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S \varphi_0(\mathbf{y}) d^2 S_n\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S \varphi_1(\mathbf{y}) d^2 S_n + \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leqslant at} \frac{f\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{a}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}$$

где поверхностные интегралы берутся по сфере $S : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = at$. Сам Кирхгоф рассматривал только трёхмерный случай. Простой вывод решения основной задачи использует преобразование Фурье.

О методе отражений

????

усложненные уравнения, очень похожие на волновое

какие есть?

обзор применений

2.1.4 Об уравнении диффузии (ака теплопроводности)

(что-то написано, пока не смотрел особо, потому что общая структура еще не так продумана. но очень скоро посмотрю!!!)

Суть уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \qquad \text{(Diffusion eq.)}$$

Это уравнение описывает, например, эволюцию плотности числа частиц, вариаций температуры или статистические свойства случайных блужданий.

Произведём Фурье-преобразование:

$$\tilde{u}(t, \boldsymbol{q}) = \int dy_1 \dots dy_d \exp(-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{y}) u(t, \boldsymbol{y})$$

Тогда уравнение (1.69) приводит к уравнению $\partial\tilde{u}/\partial t = -q^2\tilde{u}$ для Фурье-компоненты, которое имеет очевидное решение $\tilde{u}(t, \boldsymbol{q}) = \exp(-q^2 t)\,\tilde{u}(0, \boldsymbol{q})$. Подставляя это выражение в интеграл Фурье

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{dq_1 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}) \tilde{U}(t, \boldsymbol{q})$$

обратный к соотношению (1.70), и беря интегралы по $\boldsymbol{q}$, находим

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{4t}\right] u(0, \boldsymbol{y})$$

Соотношение (1.72) в принципе решает задачу Коши, которая заключается в нахождении решения данного дифференциального уравнения по начальному значению функции.

(все?)

(???) аналог представления го в Фурье-представлении задается уравнением

Задача Найти аналог представления го в Фурье-представлении задается уравнением

$$\partial\tilde{u}/\partial t = -|q|\tilde{u}$$

Если начальное поле $u(0, x)$ локализовано вблизи начала координат, то есть если $u(0, \boldsymbol{x})$ достаточно бы стро спадает при росте $|x|$, то решение $u(t, x)$ обладает универ сальной асимптотикой на больших временах.

(??)

$\mathrm{H_T}$ Обы $t \gg l^2$, где l -длина, на которой локализовано поле $u(0, \boldsymbol{x})$. Это означает, что интеграл (1.72) набирает ся в области $|\boldsymbol{y}| \lesssim$ l. При этом условии можно пренебречь $\boldsymbol{y}$ mpu $t \gg l^2$

$$u(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\boldsymbol{x}^2/(4t)\right]$$

$$A = \int dy_1 \dots dy_d u(0, \boldsymbol{y})$$

Отметим, что приближение (1.73) соот вет ствует подстанов ке $u(0, \boldsymbol{y}) \to A\delta(\boldsymbol{y})$. Если для локализованного вблизи начала координат поля $u(0, \boldsymbol{x})$ интеграл $A(1.74)$ равен нулю, то асимптотика $u(t, \boldsymbol{x})$ на больших временах будет уже иной. Раскладывая экспоненту в (1.72) по $\boldsymbol{y}$, мы находи и следующий ведущий член разложения при $A = 0$

$$u(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left[-\boldsymbol{x}^2/(4t)\right]$$

$$\boldsymbol{B} = 2\pi \int dy_1 \dots dy_d \boldsymbol{y} u(0, \boldsymbol{y})$$

Выражения являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

уравнение диффузии с правой частью

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right) u = \phi$$

$$u(\tau, \boldsymbol{x}) = \int dt d^d y G(\tau - t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \phi(t, \boldsymbol{y})$$

Учитывая однородность задачи по времени и пространству, мы сразу подставили функцию Грина, которая зависит только от разностей времен и координат. Функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$\left(\partial_t - \nabla_x^2\right) G(t, \boldsymbol{x}) = \delta(t)\delta(\boldsymbol{x})$$

Мы уже фактически нашли решение этого уравнения, так как при $t > 0$ оно описывает свободную эволюцию, которое соответствует начальному условию $G(+0, \boldsymbol{x}) = \delta(x)$. Подставляя это начальное условие в (1.72), находим

$$G(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

Заметим, что соотношение (1.72) может быть переписано в виде

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int d^d y G(t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) u(0, \boldsymbol{y})$$

Справедливо также

$$u(t + \tau, \boldsymbol{z}) = \int d^d x G(\tau, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}) u(t, \boldsymbol{x})$$

Сравнивая это с прямы м применением (1.81) к $u(t + \tau, z)$, находим

$$G(t + \tau, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}) = \int d^d x G(t, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}) G(\tau, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

Это соотношение построено только на (1.81) и справедливо для любых функций Грина уравнений с первой производной по времени.

До сих пор мы рассматривали решение уравнения диффузии в неограниченном простран стве. Вообще говоря, можно решать его в ограниченной области пространства. В этом случае уравнение должно быть дополнено условиями на границе этой области. В качестве иллюстрации рассмотрим полупространство $x_1 > 0$. Если поле $u = 0$ при $x_1 = 0$, то задача решается при помощи функции Грина

$$G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \ldots}{4t}\right],$$

что в полупространстве $x_1 > 0$ выражение (1.82) удовлетворяет уравнению (1.79), а также обращает ся в ноль при $x_1 = 0$. Отметим, что при решении задачи с граничным условием, которое заключается в равенстве при $x_1 = 0$ производной от u в направлении, перпендикулярном плоскости $x_1 = 0$, следует использовать функцию Грина, которая отличает ся от (1.82) знаком при втором члене.

2.1.5 Фундаментальные решения линейных дифференциальны операторов (!!!)

(!!! вот на это нужно порешать задачи! ч. 11 Владимирова)

Суть по Владимирову

Обобщеньм решением в области $G \subset R^n$ линейного дифференциального уравнения

$$L(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

где $a_\alpha(x) \in C^\infty(R^n)$, $f \in \mathscr{D}'$, называется всякая обобщенная функция u, удовлетворяющая этому уравнению в G в обобщенном смысле, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{D}$, носитель которой содержится в G, имеет место равенство

$$(u, L^*(x, D)\varphi) = (f, \varphi),$$

где $L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$. Обобщенная функция u принадлежит классу $C^P(G)$, если в области G она совпадает с функцией $u_0(x)$ класса $C^P(G)$, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{D}, \operatorname{supp} \varphi \in G$, имеет место равенство

$$(u, \varphi) = \int u_0(x)\varphi(x)dx.$$

Пусть $f \in C(G) \cap \mathscr{D}'$. Для того чтобы обобщенная функция u удовлетворяла уравнению $(*)$ в области G в классическом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $C^m(G)$ и удовлетворяла этому уравнению в обобщенном смысле в области G. ференциального оператора

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами $a_\alpha(x) = a_\alpha$ называется обобщенная функция $\mathscr{E}$, удовлетворяющая в R^n уравнениюо

$$L(D)\mathscr{E} = \delta(x).$$

У всякого линейного дифференциального оператора $L(D)$ существует фундаментальное решение медленного роста и это решение удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$L(-i\xi)F|\mathscr{E}| = 1.$$

Пусть $f \in \mathscr{D}'$ такова, что свертка $\mathscr{E} * f$ существует в $\mathscr{D}'$. Тогда

$$u = \mathscr{E}_* * f$$

есть решение уравнения $L(D)u = f$. Это решение единственно в классе тех обобщенных функций u, для которых существует свертка с $\mathscr{E}$.

2.1.6 Об интегральных уравнениях

Интегральные уравнения по Владимирову

$$g(t) = \int_a^b K(t, s) f(s) \mathrm{d}s \qquad \text{(Fredholm eq. of first kind)}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x) \qquad \text{(Fredholm eq. of second kind)}$$

тут $\varphi(x)$ неизвестной функция, $G \subset R^n$ - область, $\mathscr{K}(x, y)$ - т.н. ядро и $f(x)$ т.н. свободный индекс известны, λ - комплексный параметр.

Однородное интегральное уравнение это уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy$$

а союзным к нему называется интегральное уравнение

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathscr{K}^*(x,y)\psi(y)dy$$

здесь $\mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}}(y,x)$ - эрмитово сопряженное ядро к ядру $\mathscr{K}(x,y)$.

Линейное, однородное, союзное интегральные уравнения иногда записывают в операторной форме

$$\varphi = \lambda K\varphi + f, \quad \varphi = \lambda K\varphi, \quad \psi = \bar{\lambda}K^*\psi,$$

где интегральные операторы K и K^* определяются ядрами $\mathscr{K}(x,y)$ и $\mathscr{K}^*(x,y)$ соответственно, т. е.

$$Kg = \int_G \mathscr{K}(x,y)g(y)dy, \quad K^*g = \int_G \mathscr{K}^*(x,y)g(y)dy.$$

Если при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$ однородное интегральное уравнение (2) имеет ненулевые решения из $L_2(G)$, то число λ_0 называется характеристическим числом ядра $\mathscr{K}(x,y)$ (интегрального уравнения (2)), а соответствующие решения уравнения (2) - собственными функциями ядра $\mathscr{X}(x,y)$.

Рангом (кратностью) характеристического числа λ_0 называется максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих этому числу λ_0.

(выше - сокращу. тут - как решать, это самое важное!!!)

2.1.7 Уравнения Лапласа и Пуассона

(4 часа - и прописал бы! страницы 3 на эти указания, мб меньше)

В круге

В кольце

В шаре

Как найти частное решение, если свободный член $f(r,\varphi) = ar^n \cos m\varphi$ **или** $f(r,\varphi) = ar^n \sin m\varphi$**,** $(n+2)^2 \neq m^2$?

(суть от Колесниковой впишу)

Как найти частное решение, если свободный член $f(r,\varphi) = ar^n \cos m\varphi$ **или** $f(r,\varphi) = ar^n \sin m\varphi$, $(n+2)^2 = m^2$?

(суть от Колесниковой впишу)

2.1.8 Задача Коши

Решение задача Коши в общем случае (??)

Классическая задача Коши для волнового уравнения - это задача о нахождении функции $u(x,t)$ класса $C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t)$$

и начальным условиям
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$
Если выполняются условия $f \in C^1(t \geq 0), \quad u_0 \in C^2(R^1), \quad u_1 \in C^1(R^1), \quad n = 1$; $f \in C^2(t \geq 0), \quad u_0 \in C^3(R^n), \quad u_1 \in C^2(R^n), \quad n = 2, 3$, то решение задачи Коши (3), (4) существует, единственно и выражается:

1) при $n = 1$ формулой Даламбера
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

2) при $n = 2$ Формулой Пуассона
$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_{0|\xi-x|<a(t-\tau)}^{t} \int_{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi-x|^2}} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi-x|^2}}$$

3) при $n = 3$ формулой Кирхгофа
$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\xi-x|<at} \frac{1}{|\xi-x|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi-x|}{a}\right) d\xi +$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2 a^2 t}\int_{|\xi-x|=at} u_1(\xi)dS + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=at} u_0(\xi)dS\right].$$

О применениях формулы Пуассона (??)

(?? им на самом деле можно решать задачи или это просто большая формула и не больше?)

О применениях формулы Кирхгофа (??)

(?? им на самом деле можно решать задачи или это просто большая формула и не больше?)

Задача Коши по Колесниковой (!?!!!!)

(еще тут пара методов есть, добавлю скоро!)

3. Если в задаче $\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = a^2\Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m \end{array}\right.$ или задаче (7) начальные условия таковы, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что
$$\Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0$$
то решение задачи можно искать в виде $u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-2}(x)$.

4. • Если u_0 или u_1 являются произведением некоторой гармонической функции на некоторую функцию от других независимых переменных, т. е.
$$u_0(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_k)\, g(x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad \Delta f = 0$$

(например, $u_0(x,y,z) = (x^2 - y^2)\, e^{-z^2}$), то решение можно искать в виде

$$u\left(t, x_1, \ldots, x_n\right) = f\left(x_1, \ldots, x_k\right) h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right),$$
$$h|_{t=0} = g\left(x_{k+1}, \ldots, x_n\right),$$

если это, например, уравнение теплопроводности. Если это задача 5 , то

$$h|_{t=0} = g\left(x_{k+1}, \ldots, x_n\right), \quad h_t|_{t=0} = 0$$

5. • Довольно часто встречается выражение вида

$$u_0 = x \sin(ax + by + cz).$$

Вычислим $\Delta u_0 : \Delta u_0 = 2a\cos(ax + by + cz) - (a^2 + b^2 + c^2)\, x \sin(ax + by + cz)$.
Значит, решение можно искать в виде

$$u = g(t)\cos(ax + by + cz) + f(t) x \sin(ax + by + cz),$$

удовлетворяющем начальным условиям $f(0) = 0, g(0) = 1$, если это, например, задача 7.

2.1.9 О смешанных задачах

(?? через бесселя решается??)

О смешанных задач в круге

О смешанных задач в секторе

2.1.10 О задаче Штурма-Лиувилля

Постановка задачи

(пока хз)

О решении задачи (???)

2.2 О типичных методах решений задач

(мб уменьшу раздел, пока так.)

2.2.1 О методе Фурье на отрезке (?)

(2 часа тренировок - и додумаю!)

Суть

Рассматривается метод разделения переменных Фурье на отрезке для уравнений гиперболического (например, волновое уравнение) и параболического (например, уравнение теплопроводности) типов. Для отыскания собственных функций и собственных значений задачи возникает оператор $L_1^* = = a^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)$. Рассматриваются два случая: оператор $-L_1^*$ является оператором Штурма-Лиувилля и оператор $-L_1^*$ не является оператором Штурма-Лиувилля.

О случаях применения (??)

2.2.2 О методе Фурье на круге (?)

2.2.3 О методе функции Грина (??)

(потом освоюсь)

Суть

2.2.4 О классификации уравнений и приведении к каноническому виду

1. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка в окрестности точки в случае двух переменных.

[2] – 17-23 или [1] – 47-52.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория 2.1. Канонический вид:
а) $u_{xx} - u_{yy}$ для волнового уравнения ($a0$);
б) u_{xx} для уравнеияя теплопроводиости;
в) $u_{xx} + u_{yy}$ для уравнения Пуассона.

Определенне 1. Вид квазилинейного уравнеиия второго порядка с двумя независимыми переменными, в котором главная часть имеет один из вышеперечисленных видов, называется канопическим.

Возникает вопрос о приведенин произвольното (квази)линейного уравиения второго порялка к каноническому виду в некоторой окрестности задаяной точки (x_0, y_0)

Основное угверждение данного параграфа состоит в том, что для случая двух переменных это приведение почти всегда можно сделать (смысл слова "почти"будет раскрыт ниже).

2.2. Уравненне характернстик. Рассмотрим общий вид квазилинейного уравнения второго порядка в $\mathbf{R}^2$:

$$A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy}(x,y) + C(x,y)u_w(x,u) + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

Метод приведения к каноническому виду естественно нскать, опираясь на опыт работы с простейшими уравнеинямя. Например, рассмотрим уравненне с главной частью вида $v_{\xi\eta}(\xi,\eta)$, в простейщем случае:

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0, (\xi,\eta) \in R^2$$

Его общее решение представляется в виде суммы двух произвольных дважды непрерывно дифференцируемых функций:

$$\langle(\xi,\eta) = I(\xi) + J(\eta)$$

Именно к виду $v_{\varepsilon\eta}(\xi,\eta)$ и пюстараемся привести главную часть уравиеиия (2.1). Сделаем невырожденную замену переменых:

$$\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y);$$

$$\xi \in C^2(U), \eta \in C^2(U), \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{ а } U,$$

где U малая окрестность точкя (x_0, y_0). В этом параграфе мы будем считать, что функини $A.B.C$ и принадлежат классу $C^2(U)$, причем $A \neq 0$ в U.

Введем обозначение $\langle(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$. Здесь $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$ обратная замена (сущеспвует, поскольку исходная замеиа является невырождеяиой).

О технике дифференцирования. Правило дифференцирования сложной функция дает

$$\frac{\partial}{\partial x}\bullet=\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet+\eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet;$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\bullet=\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet+\eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet .$$

Днфференцируя повторно, заметим, что в случае линейиой связи между (ξ,η) и (x,y) правила перемножения миогочленов и дифференцирования совпадают: выполняются коммутативиость операторов днфференцирования между собой и с константами, ассоциативность и дистрнбугивность (производная суммы равна сумме производных). По этой причиие для нахождения главной части уравнения относительио \(ξ,η) достаточно формально возвести в квадрат выражения (2.3*) и (2.3**) (диффереицирование коэффициентов ξ_x,ξ_y,η_x и η_y даст только множители при производных первого порядка):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bullet=\xi_x^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet+2\xi_x\eta_x\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial\eta}\bullet+\eta_x^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet+(\ldots)\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet+(\ldots)\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet;$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\bullet=\xi_y^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet+2\xi_y\eta_y\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial\eta}\bullet+\eta_y^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet+(\ldots)\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet+(\ldots)\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet;$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\bullet=\xi_x\xi_y\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet+\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial\eta}\bullet+\eta_x\eta_y\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet+$$
$$+(\ldots)\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet+(\ldots)\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet .$$

Следовательио, в результате пронзведениой замены (2.2) уравнение (2.1) примет следующий вид:

$$a(\xi,\eta)v_{\xi}+2b(\xi,\eta)v_{\varepsilon\eta}+c(\xi,\eta)v_{\eta\eta}+\Phi\left(\xi,\eta,v,v_{\xi},v_{11}\right)=0$$

где

$$a=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2,$$
$$b=A\xi_x\eta_x+B\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+C_y\eta_y,$$
$$c=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2;$$
$$\Phi\left(\xi,\eta,v,v_z,v_\eta\right)=F\left(x,y,u_1u_x,u_y\right)+(\ldots)v_z+(\ldots)v_\eta$$

(конкретный вид функции здесь нам не интересен, так как важна только главная часть уравнения).

Согласно высказанной выше идее потребуем, чтобы $a=0$ и $c=0$ в U:

$$A(x,y)\xi_x^2(x,y)+2B(x,y)\xi_x(x,y)\xi_y(x,y)+C(x,y)\xi_y^2(x,y)=0,$$
$$A(x,y)\eta_x^2(x,y)+2B(x,y)\eta_x(x,y)\eta_y(x,y)+C(x,y)\eta_y^2(x,y)=0.$$

Таким образом, надо найти в классе $C^2(U)$ два решения $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ уравнения

$$A(x,y)f_x^2(x,y)+2B(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y)+C(x,y)f_y^2(x,y)=0,$$

для которых якобиан $\begin{vmatrix}(f_1)_x & (f_1)_y\\ (f_2)_x & (f_2)_y\end{vmatrix}\neq 0$ в U. Тогда, сделав замеиу $\xi=f_1(x,\xi),\eta=f_2(x,\xi)$, мы получим уравнение

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\tilde{\Phi}\left(\xi,\eta,v,v_{\xi},v_{\eta}\right)$$

где $\tilde{\Phi}=-\Phi/2b$.

Замечапие 2. Еспи $a(x,y)=0$ и $\alpha(x,y)=0$ в U, то ни в какой точке окрестности U коэффициент $b(x,y)$ ие равен нулю, так как иначе бы получили, что в результате невырожденной замены уравнение второго порядка перешло в уравнение первого порядка

Как описать иовые координаты? Нужно найти зависимость между переменными $\boldsymbol{x}$ н $\boldsymbol{y}$ вдоль координатных линий $\xi=\text{cons}\ \eta=\text{const}$

Определение 2. Уравнение (2.4) называется уравнением характеристик для уравнения (2.1). Характеристиками уравнения (2.1)

называются линии уровия решения $f(x,y)$ уравнеияя (2.4), то есть кривые, задаваемые равенством $f(x,y)=\text{const}$.

Вдоль характеристики поляый дяфференциал решения $f(x,y)$ уравиения (2.4) равен нулю:

$$df=f_x dx+f_y dy=0,$$

откуда получаем, что $f(x,y)=\text{const}$ вдоль рсшений уравнеияя

$$A(x,y)(dy)^2-2B(x,y)dxdy+C(x,y)(dx)^2=0.$$

Замечание 3. Уравненяе (2.6) также называют уравнением характеристик. Мнемоическое правило записи этого уравнения следующее: взять главную часть уравнения (2.1) и заменить в ней производные по одной переменой на дифференциалы другой переменной, при этом изменив знак иа противоположный при смешанной производной, и все это приравнять нулю.

Если $f_x\neq 0$ в окрестности U (или в некоторой меньшей окрестности), то уравнение (2.6) можно переписать в следующем виде:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-28\frac{dy}{dx}+C=0.$$

Это квадратное уравиеиие относительюо $\frac{dy}{dx}$ с днскряминантом $D=4B^2-4AC$. Возможны следующие варианты: 1) существует окрестность V точки (x_0,y_0) (VU), в которой а) $D>0$, 6) DO, в) $D<0$; 2) $D\left(x_0,y_0\right)=0$ и в любой окрестности точки (x_0,y_0) лискриминант D отличен от тождествеяиого нуля. Рассмотрим каждый случай в отдельности

1.а) $D>0$. Тогда существуют два корня квадратного уравнения (2.7):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y)-\sqrt{\frac{1}{4}D(x,y)}}{A(x,y)},\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y)+\sqrt{\frac{1}{4}D(x,y)}}{A(x,y)}.$$

В правых частях стоят функции из класса $C^2(V)$. Из курса дифференциальных уравнений известно, что для таких уравнений существуют первые интегралы $f_1(x,y)=\text{const}$ и $f_2(x,y)=\text{const}$ из того же класса, и, следовательно, существует замена перемениых $\xi=f_1(x.\xi),\eta=f_2(x,\xi)$, причем

$$\left|\begin{array}{cc}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{array}\right|=\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\sqrt{D}}{A}\neq 0 \text{ в } V.$$

Это и есть искомая замека, переводящая уравнение (2.1) в уравнение (2.5) в окрестиости V. Для приведения уравнеиия (2.5) к каноническому виду

$$w_{\text{au}}-w_{\beta\beta}=H\left(\alpha,\beta,w,w_\alpha,w_0\right)$$

достаточно иоложнть $w(\alpha,\beta)=\langle(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$, то есть перейти к новым переменным $\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}$ и $\beta=\frac{\xi-\eta}{2}$.

Замечание 4. Вид уравнення (2.5) иногда называют первым каноническия, а уравнения (2.8) - вторым каноническим.

1.б) D 0. Аналогично случаюо 1.а мы можем найти функции f_1 и f_2, но только в зтом случае они будут линейно зависимы, поскольку $D0$. Сделаем замену переменных $\xi = f_1(x, \xi), \eta = \eta(x, \xi)$, где функция (x, y) выбирается пронзвольным образом из соображений невырождели юсти замены. Тогда уравиение (2.1) перейдет в уравнение

$$2b(\xi, \eta) v_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta) v_{\eta\eta} + \Phi\left(\xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta}\right) = 0$$

Заметим, что функции A и C одного (для огределеиности неотрицательного) знака, так как $AC = B^2 \geq 0$. Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} b &= A\xi_x\eta_x + B\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + C\xi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x \pm \sqrt{C}\eta_y\right). \end{aligned}$$

Здесь знаки "+" или "$-$"выбираются в зависимости от знака коэффициента $B(B = \pm\sqrt{AC})$. В силу уравнения характеристик (2.4) первый сомножитель в последнем выражении для b равно нулю:

$$\left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

Итак, $\boldsymbol{b} = 0$, и мы получили уравиение кановического вида:

$$v_{\eta\eta} = -\Phi / c$$

1.в) $D < 0$. Как и в случае 1.а квадратное уравнение (2.7) имеет два различных корня, но уже комплексных:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B(x, y) - i\sqrt{\frac{1}{4}|D(x, y)|}}{A(x, y)} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{B(x, y) + i\sqrt{\frac{1}{4}|D(x, y)|}}{A(x, y)}.$$

Тогда функции $\xi = f_1(x, y)$ и $\eta = f_2(x, y)$ можно выбрать так, что они будут комплексно-сопряженными, и в новых, уже действительных, координатах

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \beta = \frac{\xi - \eta}{2i}$$

уравнение (2.1) примет канонический внд

$$w_{\mathrm{a}\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} = H\left(\alpha, \beta, w, w_{\alpha}, w_{\beta}\right).$$

2) Если $D\left(x_0, y_0\right) = 0$ и в любой окрестиссти токiки $\left(x_0, y_0\right)$ есль точка, в которой $D0$, то уравнение (2.1) можно привести к каноническому виду только в точке $\left(x_0, y_0\right)$ (см. §3).

Пример 1. Уравнение Трикоми: $u_{xx} + xu_y = 0$.

Для $x > 0$ в соответствии с 1.в оно приводится к каноническому виду $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0, \quad \eta < 0$ для $x < 0$ $u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(u_{\xi} - u_{\eta}\right) = 0, \xi > \eta$. При $x = 0$ уравнение Трикоми уже имеет канонический вид, но ни в какой окрестности точки с нулевой абсциссой оно не может быть приведено к каноническому виду.

2.2.5 О вариационных методах

Суть

О случаях применимости (???)

2.2.6 Метод решения обобщенных задач

Алгоритм решения от Константинова (???)

(то, чему нас учили, тут чисто суть этого)

О том, когда нужно использовать строгие методы (????)

(самый актуальный вопрос, который пока я не ответил)

2.2.7 О простейших струнах

(Колесникову прочту - пропишу, дело максимум 3 часов)

О способах решения

Задача о колебании полубесконечной струны имеет вид:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), x \geqslant 0 \\ (\alpha u + \beta u_x)|_{x=0} = \varphi(t), t \geqslant 0 \end{cases}$$

(??? что за последнее условие???) Как решается задача?

• Сначала находится частное решение заданного уравнения и выписывается его общее решение:

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) + u_{\text{частн}}\,.$$

2 • Теперь решается задача Коши.

Так как начальные условия заданы на струне, т.е. при $x \geqslant 0$, то и функции $f(x), g(x)$ находятся для $x \geqslant 0$. А так как затем решение выписывается для $f(x+at) + g(x-at)$, то найденное решение имеет место в области, где $x + at \geqslant 0, x - at \geqslant 0, x \geqslant 0, t > 0$. Эту область обозначим D_1. При этом оказывается, что $x + at \geqslant 0$ для всей первой четверти, где надо найти решение задачи, а потому $f(x+at)$ определилось во всей заданной области. Осталось определить $g(x-at)$ для $x - at \leqslant 0, t > 0, x > 0$.

3 • Решаем краевую задачу. Это решение имеет место в области $D_2 : x + at \geqslant 0, x-$ $-at \leqslant 0, x \geqslant 0, t \geqslant 0$.

4 • Решения в областях и записываются разными формулами - осталось «сшить» их. На самом деле, «сшивать» надо только $g(x-at)$, т. к. $f(x+at)$ - одно.

(??? что-то с четвертями я еще не додумал, додумаю! почему там в одной и другой четверти решения получаются???)

(тут указание на метод Даламбера, им тоже можно решать.)

Как найти частное решение? (!??!? там пара задач есть и деталей, еще раз посмотрю!! от действия даламбертиана на правую часть зависит вид анзаца частного решения! 15 мин додумать!)

Оператор $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ называется волновым оператором, или оператором Даламбера.

• Если в уравнении $u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t)$ выполнено условие

$$\Box f(x,t) = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta f(x,t) = b f(x,t), \quad b \neq 0,$$

т. е. свободный член является собственным вектором волнового оператора, то частное решение можно искать в виде

$$u_{\text{частн}} = c f(x,t).$$

2 • Если в уравнении $u_{tt} = a^2\Delta u + g(x,t)$ свободный член имеет вид

$$g(x,t) = \varphi_0(t)\psi_0(x)$$

где $\Delta\psi_0(x) = \lambda\psi_0(x)$, т. е. $\psi_0(x)$ - собственная функция оператора Лапласа (в данном случае одномерного), то част- ное решение можно искать в виде $u_{\text{частн}} = f(t)\psi_0(x)$, где $f(t)$ - искомая функция.

• Действительно, после подстановки в уравнение и сокращения на $\psi_0(x)$ получим

$$f''(t) = a^2\lambda f(t) + \varphi_0(t).$$

Характеристики - это линии так называемого слабого разрыва, т.е. при переходе через них могут «рваться» производные. Поэтому решение не всегда достаточно гладкое во всей первой четверти - можем получить в том или ином смысле обобщённое решение.

Полубесконечная струна с закреплённым или свободным концом

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Задача о своб. колебаниях∞струны

решается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi.$$

Если функции, задающие начальные условия, являются нечётными, т. е. $u_0(x) = -u_0(-x), u_1(x) = -u_1(-x)$, то решение $u(x,t)$ - тоже нечётная функция, и

$$u(x,t)|_{x=0} = \frac{u_0(at) + u_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} u_1(\xi)d\xi = 0.$$

Если же $u_0(x) = u_0(-x), u_1(x) = u_1(-x)$ - чётные, то аналогично показывается, что $u(x,t)$ - чётная функция и

$$u_x(x,t)|_{x=0} = \frac{u_0'(at) + u_0'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(u_1(at) - u_1(-at)\right) = 0.$$

Закон отражения от закреплённого (свободного) конца

(тут пара абзацев про особенности, не вникал пока)

Минимальная теория

2. Задача Коши для уравнения колебания струны. Представление решения. Принцип Дюамеля. Формула Даламбера. Теорема существования и единственности классического решения.

[2] -39-42, 60-62 или [1] – 43-45.

2.2.8 О других методах

Литература:

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. "Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[2] Уроев В.М. Уравнения математической физики. Москва: ИФ Яуза, 1998.

[3] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва: БИНОМ, 2005.

3. Начально-краевая задача для уравнения колебания струны на полуоси. Условия согласования начальных и граничных данных. [2] - 70-73, [1]-61,63.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

4. Смешанная задача для волнового уравнения в R^n. Закон сохранения энергии (без доказательства). Априорная оценка решения. Единственность классического решения. [1] - 348-353.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

5. Понятие о корректной постановке задачи математической физики (по Адамару). Пример Адамара некорректно поставленной задачи Коши (для уравнения Лапласа). Корректность смешанной задачи для волнового уравнения в области из априорной оценки решения. [2] - 66,69, [1] - 61,63.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

6. Задача Коши для волнового уравнения в R^3 и в R^2. Принцип Дюамеля. Метод спуска. Формула Пуассона. Распространение волн в случае двух и трёх пространственных переменных. [2] - 64-65 и 47-50, 57-62 или [3] -203-207.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

7. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для уравнения колебания струны на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных. [2] - 79-86.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

8. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Представление решения формулой Пуассона. Принцип Дюамеля. [3] 186-189 (для f=0) и [2] - 121.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

9. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области. [2] - 94-96, 98-99.

Суть (???) (скоро выпишу)

Минимальная теория

13. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения с постоянными коэффициентами, его применение для решения задачи Коши.

[2] – 229-232.

14. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Фундаментальное решение оператора Лапласа. [2] – 224-226, 232-235.

16. Формула представления решения уравнения Пуассона. Потенциалы, их физический смысл и их свойства

(без доказательства). [2] – 243-245, [1] – 282-287.

17. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Интеграл Пуассона в R3.

[2] – 257-258, 261-266.

18. Теорема о среднем для гармонических функций. Принцип максимума для гармонических функций в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области.

[2] – 251-254.

19. Определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Теорема существования и единственности обобщенного решения краевой задачи для уравнения Пуассона в ограниченной области.

[3] – 131-133, 136-138.

20. Метод Фурье решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и во внешности круга. Внешние краевые задачи, условия на бесконечности. Метод Фурье решения краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре и вне шара. Сферические функции. [2] – 178-181, 270-282.

3 Об основах УМФ

(тут менее используемое)

3.1 О других типичных задачах

(тоже типичные задачи в рамках бакалавриата, но менее встречающиеся. Для совсем особенных тем 2я 1я часть, помню.)

3.1.1 О простейших матричных уравнениях

3.1.2 О методе потенциалов (??)

(есть и не до него)

3.2 О функане и матане для УМФ

3.2.1 О задачах про операторы

О получении других операторов (???)

О поиске обратного оператора (??!?!?!?!?!?!?)

О применениях обратного оператора (укажу потом, нпр в Ш-Л он нужен)

О спектре оператора

(есть вообще еще задачи на поиск спектра)

Определение спектра интегрального самосопряженного оператора (хз, от конста таких много задач)

О симметричных и самосопряженных операторах (??)

(самое начало конста)

Суть самосопряженности и сопряженности (???) (тут основная мысль, которую я так и не уловил.)

Определение самосопряженного оператора

Определение симметрического оператора

Отличие самосопряженного и симметрического оператора

(отдельно пишу)

О поиске сопряженного

О доказательстве самосопряженности (таких много задач)

О

О

О

О

3.2.2 О свойствах операторов

Обзор определений

(тут вроде бы место, где я все выводы даю со ссылками)

опр: симметричный: $D(A) \in D(A^+)$

самосопряженность: $D(A) = D(A^+)$

короче, для с/с оператора нужно проверять непрерывность по f (для области определения)

суть в том, что должны быть области определения везде, а не только свойства.

как перейти к сопряженному оператору?

и короче рабоатем мы с $\bar{A}$, я хз, почему.

В задачах $5.31, 5.33 - 5.35$ ядро $\mathscr{K}(x,y)$ интегрального уравнения (1) является эрмитовьм, т. е. совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром:

$$\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}(y,x)}.$$

В частности, если эрмитово ядро является вещественным, то оно симметрично, т. е. $\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}(y,x)$.

Эрмитово непрерывное ядро $\mathscr{K}(x,y) \not\equiv 0$ обладает следующими свойствами:

1) множество характеристических чисел этого ядра не пусто, расположено на действительной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;

2) система собственных функций $\{\varphi_k\}$ может быть выбрана ортонормальной:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}.$$

15. Симметричный оператор в гильбертовом пространстве, свойства его собственных чисел и собственных функций. Формулы Грина и симметричность оператора Лапласа в L2(G) с граничными условиями трех видов. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Лапласа с граничными условиями

(без доказательства). [1] – 244-249, 251.

Основные свойства интеграла Лебега (??)

а) Если функция $f(x)$ измерима в $Q u |f(x)| \le g(x)$, где $g(x) \in \in L_1(Q)$, то $f \in L_1(Q)$. В частности, измеримая ограниченная функция в ограниченной области Q принадлежит $L_1(Q)$.

Теорема Лебега. Если последовательность измеримых в Q функций $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится x функции $f(x)$ п.в. в Q $u\, |f_n(x)| \le g(x)$, для $g \in L_1(Q)$, то $f \in L_1(Q)$ и $\int_Q f_n(x)dx \longrightarrow \int_Q f dx$ при $n \longrightarrow \infty$.

Теорема Фубини. Если $f(x,y) \in L_1(Q \times P), x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q, y = (y_1, \ldots, y_m) \in P$, где Q и P - некоторые области из R^n и R^m соответственно, то

$$\int_Q f(x,y)dx \in L_1(P), \quad \int_P f(x,y)dy \in L_1(Q)$$

и

$$\int_{Q\times P} f(x,y)dxdy = \int_Q dx \int_P f(x,y)dy = \int_P dy \int_Q f(x,y)dx.$$

Если $f(x,y)$ измерима в $Q \times P$, для п.в. $x \in Q$ функция $|f(x,y)| \in \in L_1(P)$ и $\int_P |f(x,y)|dy \in L_1(Q)$, то $f(x,y) \in L_1(Q \times P)$.

(!?! это же в 1й части матана, но подробнее!!)

3.2.3 О конструкциях гармонического анализа

10. Дельта - образная последовательность. Формула Пуассона для решения уравнения теплопроводности с непрерывной начальной функцией.

[1] – 114-115, [2] – 193, 103-110, 113-114.

12. Преобразование Фурье и его свойства. Фундаментальное решение оператора с постоянными коэффициентами помогает найти частное решение уравнения.

[2] – 200-201, 204-205, 207-208, 222-224.

3.2.4 О функциональных пространствах

11. Пространства Шварца S и S'. Свертка функций, ее свойства. [2] – 201-203, 205-207.

Гильбертовы пространства дифференцируемых функций по Владимирову

Пусть Q - некоторая ограниченная область пространства R^n с гладкой границей Г. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс (см. обозначения).

Обобщенная производная (о.п.) порядка α функции f из $L_{1,\,\mathrm{loc}}(Q)$ - это функция $f^{(\alpha)} \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(Q)$, у которой для любой финитной в Q функции $g \in C^{|\alpha|}(\bar{Q})$ имеет место равенство

$$\int_Q f D^\alpha g dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f^{(\alpha)} g dx.$$

Если функция $f \in C^{|\alpha|}(Q)$, то о.п. $f^{(\alpha)}(x)$ существует и $f^{(\alpha)}(x) == D^\alpha f(x)$ п.в. Поэтому в дальнейшем о.п. порядка α функции $f(x)$ будет обозначаться через $D^\alpha f$.

Множество функций (будем считать их вещественными) $f \in L_2(Q)$, имеющих все о. п. до порядка k включительно, принадлежащие $L_2(Q)$, называется простраяством Соболева $H^k(Q).H^k(Q)$ - гильбертово пространство. Скалярное произведение в нем можно задать формулой

$$(f, g) = \int_Q \left(\sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha f D^\alpha g \right) dx$$

а соответствующую согласованную с ним норму -

$$\|f\|_{H^\mu(Q)} = \left[\int_Q \left(\sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha f|^2 \right) dx \right]^{1/2}.$$

При $k = 0$ пространство $H^k(Q)$ совпадает с $L_2(Q)\,(H^0(Q) = \, = L_2(Q))$. Если граница Г достаточно гладкая, то пространство $H^k(Q)$ есть пополнение множества $C^k(\bar{Q})$ по норме $(2')$.

Пусть $f \in H^1(Q), f_k, k = 1, 2, \ldots$ - последовательность функций из $C^1(\bar{Q})$, сходящаяся в норме $H^1(Q)$ к $f(x)$. Для любой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности S (состоящей из конечного числа кусков, каждый из которых однозначно проектируется на какую-нибудь координатную плоскость), лежащей в $\bar{Q}$, существует такая постоянная $c > 0$, не зависящая от $f(x)$ и $f_k(x), k = 1, 2, \ldots$, что

$$\int_S |f_k - f_m|^2 \, ds \le c \, \|f_k - f_m\|^2_{H^1(Q)}.$$

Из этого неравенства и полноты пространства $L_2(S)$ вытекает, что последовательность следов функций $f_k(x)$ на S сходится в норме $L_2(S)$ к некоторой функции $g \in L_2(S)$. Функция $g(x)$ не зависит от выбора последовательности, приближающей функцию $f(x)$, и называется следом $f|_S$ функции $f(x)$ на поверхности $S \in \bar{Q}$.

Множество функций на $H^1(Q)$, след которых на границе Γ равен нулю п. в. на Γ, обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Его можно получить пополнением по норме ($2'$) при $k = 1$ множества функций, имеющих непрерывные частные производные в Q первого порядка и обращающихся в нуль на Γ.

Для функции $f \in L_1(Q)$ свертка $f_h(x) = \int_Q \omega_h(|x-y|)f(y)dy$, где $\omega_h(|x-y|)$ - ядро усреднения (см. обозначения), называется средней функцией дая f.

Пусть $x_i = \varphi_i(y), i = 1, \dots, n, y = (y_1, \dots, y_n) - k$ раз непрерывно дифференцируемое в $\bar{Q}$ взаимно однозначное отображение области Q на область Q' с якобианом, отличным от нуля в $\bar{Q}$. Тогда, если $f \in \in H^k(Q)$, то

$$F(y) = f(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) \in H^k(Q').$$

Два скалярных произведения $(u,v)_{\mathrm{I}}$ и $(u,v)_{\mathrm{II}}$ в гильбертовом пространстве и соответствующие им нормы $\|u\|_{\mathrm{I} \text{ и}} \|$ и $\|_{\mathrm{II}}$ называются эквивалентными, если существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для любого $u \in H$ справедливы неравенства $c_1\|u\|_I \leq$ $\leq \|u\|_{\mathrm{II}} \leq c_2\|u\|_{\mathrm{I}}$.

3.2.5 О свойствах обобщенных функций (!?!)

(про это много задач есть)

По Владимирову

Обозначим через $\mathscr{D}' \equiv \mathscr{D}'(R^n)$ совокупность всех линейньг непрерывнь функционалов на пространстве основных функций $\mathscr{D}$. Всякий функционал $f \in \mathscr{D}'$ назовем обобщенной функиией (из пространства D').

Обозначим через $\mathscr{S}' \equiv \mathscr{S}'(R^n)$ совокупность всех линейньг непрерывных функционалов на пространстве основных функций $\mathscr{S}$. Всякий функционал $f \in \mathscr{S}'$ назовем обобщенной функчией медленного роста (из пространства $\mathscr{S}'$).

Значение функционала f на основной функции φ обозначим через (f, φ). Чтобы указать аргумент основныхх функций, иногда вместо f и (f, φ) будем писать $f(x)$ и $(f(x), \varphi(x))$.

Последовательность $\{f_k\}$ обобщенньг функций из $\mathscr{D}'$ называется сходячееися обобщеняой фунхиии f (из $\mathscr{D}'$), если $(f_k, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi)$, $k \longrightarrow \infty$ для любой φ из $\mathscr{D}$. В частности, ряд из обобщенных функций $u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots$ называется сходяцимся в $\mathscr{D}'\kappa$ обобщенкой функиuи f, если для любой $\varphi \in \mathscr{D}$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k, \varphi)$ сходится к (f, φ). Сходимость последовательности и ряда в $\mathscr{S}$ определяется аналогично. Говорят, что обобщенная функция f равна нуло в областu G, если $(f, \varphi) = 0$ для всех φ из $\mathscr{D}$ с носителем в G. Обобщенные функции f_1 и f_2 называются равкьлми в области G, если их разность $f_1 - f_2$ равна нулю в G; f_1 и f_2 называются равньцми, если $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$.

Носителем обобщенной функции f называется множество всех таких точек, ни в какой окрестности которых f не обращается в нуль. Носитель f обозначается через $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp}\ f-$ ограниченное множество, то f называется финитной обобщенной функцией.

Регулярной обобщенной функцией из $\mathscr{D}'(R^n)$ называется всякий функционал вида

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^n),$$

где f - локально интегрируемая в R^n функция. Если $f(x)$ - функция медленного роста в R^n, т. е.

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m} dx < \infty$$

при некотором $m \geq 0$, то она определяет р е г у л я р н у ю обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$ (медленного роста).

Всякая обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется сингулярной.

Примером сингулярной обобщенной функции является δ-функция Дирака, определяемая правилом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^n\right).$$

Обобщением δ-функции является поверхностная δ-функция. Пусть S - кусочно гладкая поверхность и $\mu(x)$ - непрерывная функция на ней. Обобщенную функцию $\mu\delta_S$, действующую по формуле

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(x) dS_x, \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^n\right),$$

назовем простьим слоем. В частности, если S есть плоскость $t=0$ в $R^{n+1}(x,t)$, то $\mu\delta_{(t=0)}(x,t)$ обозначим $\mu(x)\delta(t)$, так что

$$(\mu(x)\delta(t), \varphi) = \int_{R^n} \mu(x)\varphi(x,0) dx.$$

При $n=1$ простой слой $\delta_{S_R}(x)$ на сфере S_R обозначим через $\delta(R-|x|)$, так что $(\delta(R-|x|), \varphi) = \varphi(R) + \varphi(-R)$.

Произведением f из $\mathscr{D}'\left(R^n\right)$ и функции $\alpha(x) \in C^\infty\left(R^n\right)$ называется обобщенная функция αf, действующая по формуле $(\alpha f, \varphi) = = (f, \alpha\varphi), \varphi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$.

Пусть $f(x) \in \mathscr{D}'\left(R^n\right), A$ - неособое линейное преобразование и $b-$ вектор в R^n. Обобщенную функцию $f(Ay+b)$ определим формулой

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi\left[A^{-1}(x-b)\right]}{|\det A|}\right), \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^n\right).$$

При $A=I$ имеем сдвиг обобщенной функции f на вектор $-b$: Например,

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b)).$$
$$-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$$

- сдвиг $\delta(x)$ на вектор x_0. При $A=-I, b=0$ имеем отражение

$$(f(-x), \varphi) = (f, \varphi(-x)).$$

О дифференцировании обобщенных функций (?)

(на это задачи есть, так что проработаю!)

Производной обобщенной функции f из $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ называется функционал f', определяемый формулой $(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \varphi \in \mathscr{D}(R^1)$. Каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка и $f^{(m)}, m \geq 1$, есть функционал, действующий по формуле

$$\left(f^{(m)}, \varphi\right) = (-1)^m \left(f, \varphi^{(m)}\right).$$

В случае $n>1$ формула (*), определяющая производную $D^\alpha f$, принимает вид

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^n\right).$$

Пусть S - кусочно гладкая двусторонняя поверхность, $\boldsymbol{n}$ - нормаль к S и $\nu(x)$ - непрерывная функция на S. Обобщенную функцию $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu \delta_S\right)$, действующую по формуле

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu \delta_S\right), \varphi\right)=\int_S \nu(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} d S, \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$$

плоскость $t=0$ в пространстве R^{n+1} переменных $(x, t)=\left(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n, t\right)$, то $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu \delta_{(t=0)}(x, t)\right)$ обозначим через $-\nu(x) \delta^{\prime}(t)$, так что

$$\left(-\nu(x) \delta^{\prime}(t), \varphi\right)=\int_{R^n} \nu(x) \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} d x.$$

Пусть локально интегрируемая в R^n функция $f(x)$ такова, что ее классическая производная порядка $\alpha=\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ - кусочно непрерывная функция в R^n. Регулярную обобщенную функцию, определяемую этой производной, обозначим через $\left\{D^\alpha f(x)\right\}$ (в отличие от обобщенной производной $D^\alpha f(x)$).

Прямое произведение обобщенных функций

Прямое произведением обобщенных функций $f(x) \in \mathscr{D}^{\prime}\left(R^n\right)$ и $g(y) \in \mathscr{D}^{\prime}\left(R^m\right)$ называется обобщенная функция $f(x) \cdot g(y)$ из $\mathscr{D}^{\prime}\left(R^{n+m}\right)$, определяемая формулой

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y))=(f(x),(g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^{n+m}\right).$$

Прямое произведение коммутативно, т. е. $f(x) \cdot g(y)=g(y) \cdot f(x)$ и ассоциативно, т. е.

$$[f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z)=f(x) \cdot[g(y) \cdot h(z)].$$

Если $f \in \mathscr{S}^{\prime}\left(R^n\right)$ и $g \in \mathscr{S}^{\prime}\left(R^m\right)$, то $f(x) \cdot g(y)$ определяется по формуле (1), где $\varphi \in \mathscr{S}\left(R^{m+n}\right)$, и принадлежит $\mathscr{S}^{\prime}\left(R^{m+n}\right)$. Производная прямого произведения обладает свойством

$$D_x^\alpha(f(x) \cdot g(y))=D^\alpha f(x) \cdot g(y) ; \quad D_y^\alpha(f(x) \cdot g(y))=f(x) \cdot D^\alpha g(y). \text{ (2)}$$

Если $\mu(x) \in \mathscr{D}^{\prime}\left(R^n\right)$ и $\nu(x) \in \mathscr{D}^{\prime}\left(R^n\right)$, то обобщенные функции $\mu(x) \cdot \delta(t)$ и $-\nu(x) \cdot \delta^{\prime}(t)$ называются простым и двойным слоем на поверхности $t=0$ слоткостящи $\mu(x)$ и $\nu(x)$ соответственно. В случае непрерывных плотностей эти определения слоев совпадают с определениями, приведенными в §6 и §7, т. е. $\mu(x) \cdot \delta(t)=\mu(x) \delta(t)$ и $-\nu(x) \cdot \delta^{\prime}(t)=-\nu(x) \delta^{\prime}(t)$

Обобщенную функцию $\delta(a t-|x|), a>0$, из $\mathscr{D}^{\prime}\left(R^2\right)$ определим равенством

$$\delta(a t-|x|)=\theta(t) \delta(a t+x)+\theta(t) \delta(a t-x),$$

где обобщенные функции $\theta(t) \delta(a t+x)$ и $\theta(t) \delta(a t-x)$ есть результаты линейных замен переменных $t^{\prime}=t, \xi=a t \pm x$ в $\theta\left(t^{\prime}\right) \cdot \delta(\xi)$, т. е.

$$\begin{aligned}
& (\theta(t) \delta(a t+x), \varphi)=\int_0^{\infty} \varphi\left(-a t^{\prime}, t^{\prime}\right) d t^{\prime} \\
& (\theta(t) \delta(a t-x), \varphi)=\int_0^{\infty} \varphi\left(a t^{\prime}, t^{\prime}\right) d t^{\prime}
\end{aligned}$$

О том, почему нельзя делать проще (!??!?)

(очень типичный вопрос, так что пропишу тут)

Свертка обобщенных функций

Сверткой локально интегрируемых в R^n функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что функция

$$h(x) = \int |f(y)g(x-y)|dy$$

также локально интегрируема в R^n, называется функция

$$(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy = (g*f)(x).$$

Последовательность $\{\eta_k(x)\}$ функций из $\mathscr{D}(R^n)$ называется сходячееисяя к 1 в R^n, если она обладает свойствами: а) для любого шара U_R найдется такой номер N, что $\eta_k(x)=1$ при всех $x \in U_R$ и $k \geq N$; б) функции $\{\eta_k\}$ равномерно ограничены в R^n вместе со всеми производными, т. е.

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leq C_\alpha, \quad x \in R^n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

- любое.

Пусть $\{\eta_k(x;y)\}$ - любая последовательность функций из $\mathscr{D}\left(R^{2n}\right)$,

сходящаяся к 1 в R^{2n}. Пусть обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathscr{D}'(R^n)$ таковы, что для любой $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ числовая последовательность $(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x;y)\varphi(x+y))$ имеет предел при $k \longrightarrow \infty$ и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\eta_k\}$. Этот предел обозначим через

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)).$$

Сверткой $f*g$ называется функционал

$$(f*g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x;y)\varphi(x+y)),$$

где $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$.

Свертка коммутативна, т. е. $f*g = g*f$.

Дифференцирование свертки.

Если свертка $f*g$ существует, то существуют и свертки $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$, причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha(f*g) = f * D^\alpha g.$$

Свертка инвариантна относительно сдвига, т. е.

$$f(x+h)*g(x) = (f*g)(x+h), \quad h \in R^n.$$

Достаточные условия существования свертки.

I. Если f - произвольная, а g - финитная обобщенные функции в $\mathscr{D}'$, то $f*g$ сушествует в $\mathscr{D}'$ и представляется в виде

$$(f*g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

где η - любая основная функция, равная 1 в окрестности supp g.

II. Обозначим через $\mathscr{D}'_+$ множество обобщенных функций из $\mathscr{D}'(R^1)$, обращающихся в нуль при $x<0$.

Если $f, g \in \mathscr{D}'_+$, то их свертка принадлежит $\mathscr{D}'_+$ и выражается формулой

$$(f*g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)),$$

где

$$\eta_k(t) = \begin{cases} 1, t \geq -\varepsilon_k, \\ 0, \quad t < -2\varepsilon_k, \end{cases} \quad \eta_k \in C^\infty\left(R^1\right), \quad k = 1, 2.$$

таким образом, множество $\mathscr{D}'_+$ образует сверточную алгебру.

Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

(важно написать нормально, чтобы подход этот был эффективный для обобщенных функций)

Операция преобразования Фурье $F[\varphi]$ на функциях φ из $\mathscr{S}$ определяется формулой

$$F[\varphi](\xi)=\int e^{i(\xi,x)}\varphi(x)dx.$$

Преобразоваяце Фурье $F[f]$ произвольной обобщенной функций f из $\mathscr{S}'\left(R^n\right)$ определим формулой

$$(F[f],\varphi)=(f,F[\varphi]).$$

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-x)],\quad f\in\mathscr{S}'$$

(обратное преобразование Фурье), является обратным для оператора F, т. е. $F^{-1}[F[f]]=f, F\left[F^{-1}[f]\right]=f, f\in\mathscr{S}'$.

Справедливы следующие формулы ($f,g\in\mathscr{S}'$):

$$\begin{aligned}
D^\alpha F[f]&=F\left[(ix)^\alpha f\right]\\
F\left[D^\alpha f\right]&=(-i\xi)^\alpha F[f]\\
F\left[f\left(x-x_0\right)\right]&=e^{i\left(x_0,\xi\right)}F[f]\\
F[f]\left(\xi+\xi_0\right)]&=F\left[f(x)e^{i\left(x,\xi_0\right)}\right](\xi)\\
F[f(cx)]&=\frac{1}{|c|^n}F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right),\quad c\neq 0\\
F[f(x)\cdot g(y)]&=F[f](\xi)\cdot F[g](\eta),\\
F[f*g]&=F[f]F[g]\quad (f \text{ или } g \text{ финитна}).
\end{aligned}$$

Преобразование Фурье F_x по переменной x обобщенной функции $f(x,y)\in\mathscr{S}'\left(R^{n+m}\right)$, где $x\in R^n, y\in R^m$, определим формулой

О применениях (??)

(где это нужно? задачи на это есть, да, но где еще?)

Преобразование Лапласа обобщенных функций

Обозначим через $\mathscr{D}_+'(a)$ совокупность обобщенных функций $f(t)$ из $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$, обращающихся в нуль при $t<0$ и таких, что $f(t)e^{-\sigma t}\in\mathscr{S}'$ при всех $\sigma>a$.

Преобразование Лапласа $\mathscr{F}(p)$ обобщенной функции f из $\mathscr{D}_+'(a)$ определяется равенством

$$\mathscr{F}(p)=F\left[f(t)e^{-\sigma t}\right](-\omega),\quad \sigma>a.$$

При этом f называют оригияалом, $\mathscr{F}-$ изображеянем и этот факт записывают так: $f(t)\longleftrightarrow\mathscr{F}(p),\quad \sigma>a$; здесь $p=\sigma+i\omega$. Функция $\mathscr{F}(p)$ аналитична в полуплоскости $\sigma>a$ и удовлетворяет следующему условию роста: для любых $\varepsilon>0$ и $\sigma_0>a$ существуют такие числа $\mathrm{c}_\varepsilon\left(\sigma_0\right)\geq 0$ и $m=m\left(\sigma_0\right)\geq 0$, что

$$|\mathscr{F}(p)|\leq \mathrm{c}_\varepsilon\left(\sigma_0\right)e^{\varepsilon\sigma}(1+|p|)^m,\quad \sigma>\sigma_0.$$

Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
(-t)^m f(t) &\longleftrightarrow \mathscr{F}^{(m)}(p), && \sigma a, m=0,1,\ldots \\
f^{(m)}(t) &\longleftrightarrow p^m \mathscr{F}(p), && \sigma > a, m=0,1,\ldots \\
f(t)e^{\lambda t} &\longleftrightarrow \mathscr{F}(p-\lambda), && \sigma > a+\operatorname{Re}(\lambda) \\
f(kt) &\longleftrightarrow \frac{1}{k}\mathscr{F}\left(\frac{p}{k}\right), && \sigma > ka, k>0 \\
f(t-\tau) &\longleftrightarrow e^{-\tau p}\mathscr{F}(p), && \sigma > a; \\
f_{(m)}(t) &\longleftrightarrow \frac{\mathscr{F}(p)}{p^m}, && \sigma > a, m=0,1,\ldots
\end{aligned}$$

где $f_{(m)}$ - m-я первообразная f из $\mathscr{D}'_+(a)$; если

$$\begin{gathered}
(f*g)(t) \longleftrightarrow \mathscr{F}(p)\mathscr{G}(p), \sigma > a, \\
g(t) \longleftrightarrow \mathscr{G}(p), \quad \sigma > a; \\
f(t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{d}{dt}-a\right)^{m+2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\mathscr{F}(p)e^{pt}}{(p-a)^{m+2}}dp
\end{gathered}$$

- формуяа обращения для преобразования Лапласа, интеграл не зависит от $\sigma > \sigma_0 > a, m=m(\sigma_0)$.

Типичные преобразования Фурье

(соберу под рукой)

3.2.6 Другое

Для интегральных уравнений от Владимирова

Обозначим через $\mathscr{D}' \equiv \mathscr{D}'(R^n)$ совокупность всех линейныг непрерывных функционалов на пространстве основных функций $\mathscr{D}$. Всякий функционал $f \in \mathscr{D}'$ назовем обобщенной Функчией (из пространства D')

Обозначим через $\mathscr{S}' \equiv \mathscr{S}'(R^n)$ совокупность всех линейньгх непрерывных функционалов на пространстве основных функций $\mathscr{S}$. Всякий функционал $f \in \mathscr{S}'$ назовем обобщенной фунжчией медленного роста (из пространства $\mathscr{S}'$).

Значение функционала f на основной функции φ обозначим через (f,φ). Чтобы указать аргумент основных функций, иногда вместо f и (f,φ) будем писать $f(x)$ и $(f(x),\varphi(x))$.

Последовательность $\{f_k\}$ обобщенных функций из $\mathscr{D}'$ называется сходящейся к обобщенной функиии f (из $\mathscr{D}'$), если $(f_k,\varphi) \longrightarrow (f,\varphi)$, $k \longrightarrow \infty$ для любой φ из $\mathscr{D}$. В частности, ряд из обобщенных функций $u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots$ называется сходячинся в $\mathscr{D}'$ к обобщенной функции f, если для любой $\varphi \in \mathscr{D}$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k,\varphi)$ сходится к (f,φ). Сходимость последовательности и ряда в $\mathscr{S}$ определяется аналогично. Говорят, что обобщенная функщия f равна нулю в области G, если $(f,\varphi)=0$ для всех φ из $\mathscr{D}$ с носителем в G.

Обобщенные функции f_1 и f_2 называются равными в области G, если их разность f_1-f_2 равна нулю в G; f_1 и f_2 называются равьими, если $(f_1,\varphi)=(f_2,\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$.

Носителем обобщенной функции f называется множество всех таких точек, ни в какой окрестности которых f не обращается в нуль.

3.3 О некоторых спецфункциях

3.3.1 О сферических функциях

(самые основные их свойства)

3.3.2 О функциях Бесселя

(самые основные их свойства)

3.3.3 О других функциях

(самые основные их свойства)

3.3.4 О начальных условиях и постановке задач математической физики

Один из самых полезных навыков - навык составлять задачи.

лагранжев формализм ???

Функциональный анализ наполняет математическую физику во многом, так что без его обсуждения никуда.

Часть II

Типичные методы для классических уравнений

(пока просто параллельно буду двигать и аналогичные структуры)

4 Методы для задач по Колесниковой

4.1 Методы для задач по Колесниковой

(вот это постепенно и буду прорабатывать.)

4.1.1 Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью

Сформулированы условия, позволяющие по матрице коэффициентов при старших производных заданного уравнения определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду. Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{k=1,m=1}^{k=n,m=n} a_{km}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + f(x,u,\nabla u) = 0.$$

Уравнения делятся на три типа. Каждый тип имеет свой так называемый канонический вид и описывает свой класс физических процессов.

Тип уравнения вида $\sum_{k=1,m=1}^{k=n,m=n} a_{km}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + f(x,u,\nabla u) = 0, a_{km} = a_{mk}$, при $n > 2$ определяется в каждой точке отдельно.

Говорят, что уравнение имеет канонический вид в точке x_0, если все $a_{mk} = 0, k \neq m$, т. е. уравнение имеет вид $\sum_{k=1}^{k=n} a_k(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x_0, u, \nabla u) = 0$.

Так как физические процессы, описываемые уравнениями разных типов, различны, то, как только описана модель процесса, желательно знать тип получившегося уравнения.

Если уравнение приведено к каноническому виду, то тип определяется следующим образом.

• Если все коэффициенты отличны от 0 и одного знака, то уравнение принадлежит к эллиптическому типу, например, уравнение Пуассона:

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x)$$

2 • Если все коэффициенты отличны от 0, но, по крайней мере, два разного знака, то уравнение принадлежит к гиперболическому типу, например, волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x,t).$$

3 • Если хотя бы один коэффициент равен 0 , уравнение принадлежит к параболическому типу, например, уравнение теплопроводности (уравнение диффузии):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,t).$$

Уравнение приводится к каноническому виду практически

$$k = n, m = n$$

так же, как квадратичная форма $\sum_{k=1,m=1} a_{km}(x_0)\, x_k x_m$ - это не самая простая работа.

Можно ли определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду?

Так как при невырожденных линейных преобразованиях сохраняется ранг матрицы и количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов, то можно определить тип уравнения, не приводя его к каноническому виду.

• Если определитель матрицы $\|a_{km}\|$ отличен от 0 в точке, то

а) уравнение эллиптического типа, если матрица или положительно определена, или отрицательно определена;

б) уравнение гиперболического типа, если матрица не положительно определена и не отрицательно определена.

2 • Если определитель матрицы a_{km} равен 0 в точке, то уравнение является уравнением параболического типа.

4.2 Задача о колебании полубесконечной струны

Пример 1.

Решите задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + 90\cos(2x+9t), x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = 8\cos 3x - 5\cos 2x,\ u_t|_{t=0} = 0, x \geqslant 0, \\ u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t, t \geqslant 0. \end{cases}$$

Частное решение $u_{\text{частн}} = c\cos(2x+9t)$, а также $\Box\cos(2x+9t) = -45\cos(2x+9t)$ (в даламбере $a = 9$ из условия), поэтому

$$-c \cdot 45\cos(2x+9t) = 90\cos(2x+9t) \qquad c = -2$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t) - 2\cos(2x+9t).$$

Первый способ (без перехода к однородному уравнению и без применения формулы Даламбера) I. Решим задачу Коши. Подставим в 1ю строчку начальных условий:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) - 2\cos 2x = 8\cos 3x - 5\cos 2x, x \geqslant 0, \\ f'(x) - g'(x) + 6\sin 2x = 0, x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) + 3\cos 2x = 8\cos 3x, \\ f(x) - g(x) - 3\cos 2x = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 4\cos 3x + \frac{C}{2}, x \geqslant 0 \\ g(x) = 4\cos 3x - 3\cos 2x - \frac{C}{2}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

Функции найдены только для неотрицательных значений аргумента, а отсюда непосредственно следует, что функции $f(x+3t), g(x-3t)$ тоже найдены для неотрицательных значений аргумента (?????), т. е.

$$f(x+3t) = 4\cos 3(x+3t) + \frac{C}{2}, \quad x + 3t \geqslant 0$$

$$g(x-3t) = 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t) - \frac{C}{2}, \quad x - 3t \geqslant 0$$

Итак, найдены $f(x+3t), g(x-3t)$ для $x - 3t \geqslant 0, x + 3t \geqslant 0$ — это внутри угла AOB.

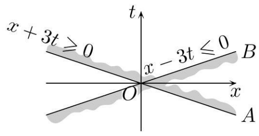


Рис. 1

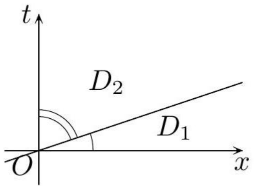


Рис. 2

Но мы ищем решения для $t \geqslant 0, x \geqslant 0$. Очевидно, что $f(x+3t)$ определилось во всей интересующей нас области, а $g(x-3t)$ только внутри угла D_1. Решение, естественно, определилось тоже только внутри угла D_1 - оно определилось толъко начальными условиями Коши:

$$u(x,t)_{D_1} = 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t) + 4\cos 3(x+3t) - 2\cos(2x+9t),$$

$$x-3t \geqslant 0, \quad x+3t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

II. Теперь воспользуемся второй строчкой краевого условия:

$$u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t, \quad t \geqslant 0.$$

Подставим условие в формулу решения $u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t) - 2\cos(2x+9t)$:

$$u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t$$

$$18t - 2\sin 9t = f'(3t) + g'(-3t) + 4\sin 9t$$

Видно, что аргумент у f неотрицателен, а функции f и g для неотрицательных значений аргумента определены из условий Коши. Аргумент у g неположителен - функция не известна, обозначим её g_1. Подставим известную функцию f:

$$18t - 2\sin 9t = -12\sin 9t + g_1'(-3t) + 4\sin 9t$$

$$g_1'(-3t) = 18t + 6\sin 9t$$

$$g_1'(\xi) = -6\xi - 6\sin 3\xi, \quad -3t = \xi, \quad \xi \leqslant 0$$

$$g_1(\xi) = -3\xi^2 + 2\cos 3\xi + B, \quad \xi \leqslant 0.$$

Решение примет вид

$$u(x,t)_{D_2} = 4\cos 3(x+3t) - 3(x-3t)^2 + 2\cos 3(x-3t) - 2\cos(2x+9t) + B + \frac{C}{2},$$

$$x-3t \leqslant 0, \quad x+3t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

III. (??? потом додумаю сшивку!!!)

Теперь «сошьём» решения по характеристике $x = 3t$ (т. к. $f(x+3t)$ одна и та же, то «сшить» надо только $g(x-3t)$ и $g_1(x-3t)$ при $x=3t$, т. е. $g(0)$ и $g_1(0)$):

$$u(x,t)_{D_1}|_{x=3t} = u(x,t)_{D_2}|_{x=3t} \Leftrightarrow B + \frac{C}{2} + 2 = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{C}{2} - 1.$$

Ответ. $u(x,t) = -2\cos(2x+9t) + 4\cos 3(x+3t) + \left[\begin{array}{l} 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t), x-3t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0 \\ 2\cos 3(x-3t) - 3(x-3t)^2 - 1, x-3t < 0, \quad x \geqslant 0 \end{array} \right.$

П р и м е ч а н и е. Полученное решение задачи дважды непрерывно дифференцируемо внутри D_1 и D_2, непрерывно по построению во всей первой четверти. Остался вопрос - является ли оно непрерывно дифференцируемым во всей четверти? Понятно, что надо проверить равенство первых и вторых производных $g(\xi)$ и $g_1(\xi)$ в 0:

$$\begin{cases} g'(\xi) = -12\sin 3\xi + 6\sin 2\xi, \quad g''(\xi) = -36\cos 3\xi + 12\cos 2\xi \\ g_1'(\xi) = -6\xi - 6\sin 3\xi, \quad g_1''(\xi) = -6 - 18\cos 3\xi \end{cases}$$

Видно, что первые и вторые производные одинаковы в 0 решение классическое.

На самом деле, характеристики - это линии так называемого слабого разрыва, т.е. при переходе через них могут «рваться» производные. Поэтому решение не всегда достаточно гладкое во всей первой четверти - можем получить в том или ином смысле обобщённое решение.

Второй способ (с переходом к однородному уравнению и применением формулы Даламбера) Конечно, можно применить формулу Даламбера сразу к исходной задаче, но никто этого не делает, потому что придётся вычислять двойной интеграл. Поэтому находим частное решение, делаем «сдвиг», а затем применяем формулу Даламбера уже к однородному уравнению:

$$v = u + 2\cos(2x + 9t).$$

Новая задача примет вид

$$\begin{cases} v_{tt} = 9v_{xx}, x > 0, t > 0, \\ v\big|_{t=0} = 8\cos 3x - 3\cos 2x, \quad v_t\big|_{t=0} = -18\sin 2x, x \geqslant 0, \\ v_x\big|_{x=0} = 18t - 6\sin 9t, t \geqslant 0 \end{cases}$$

2 • Теперь, чтобы воспользоваться формулой Даламбера, надо знать, что решение задачи Коши в точке зависит от начальных условий на основании характеристического треугольника, т.е. на AB (см. рис. 3).

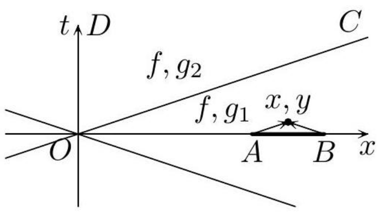


Рис. 3

Поэтому из рис. 3 видно, что формула Даламбера работает только внутри угла BOC, т.е. для $x - -3t \geqslant 0, x \geqslant 0, t \geqslant 0$.

Итак,

$$v(x,t)_{D_1} = \frac{1}{2}(8\cos 3(x+3t) - 3\cos 2(x+3t) + 8\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t)) +$$
$$+ \frac{3}{2}(\cos 2(x+3t) - \cos 2(x-3t)) =$$
$$= 4\cos 3(x+3t) + 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t)$$

Решение найдено лишь в части первой четверти. Теперь воспользуемся краевым условием.

3 • Внутри угла COD стоит другая задача - задача типа Гурса: известны значения $v(x,t)$ на одной из характеристик и v_x на прямой, лежащей внутри угла характеристик. Решим эту задачу:

$$\left\{\begin{array}{l} v(x,t)=f(x+3t)+g(x-3t), t>0, x>0, \\ v(x,t)_{D_1}|_{x-3t=0}=4\cos 3(6t)+1, \\ v_x|_{x=0}=18t-6\sin 9t, t\geqslant 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(6t)+g(0)=4\cos 3(6t)+1, t\geqslant 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0)+g(0)\equiv v(0,0)=5, \\ f'(3t)+g'(-3t)=18t-6\sin 9t, t\geqslant 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\xi)=1+4\cos 3\xi-g(0), \xi\geqslant 0, \\ g'(-\xi)=6\xi-6\sin 3\xi+12\sin 3\xi, \xi\geqslant 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\xi)=1+4\cos 3(\xi)-g(0), \xi\geqslant 0, \\ g(\xi)=-3\xi^2+2\cos 3\xi+B, \xi\leqslant 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

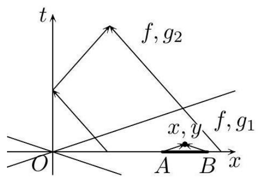
$$\begin{array}{l} \Rightarrow v(x,t)_{D_2}= \\ =1+4\cos 3(x+3t)-g(0)-3(x-3t)^2+2\cos 3(x-3t)+B, \\ x+3t\geqslant 0, \quad x-3t\leqslant 0. \\ v(0,0)_{D_2}=1+4-g(0)+2+B=5 \Longleftrightarrow -g(0)+B=-2. \end{array}$$

Получим, что

$$\begin{array}{l} u(x,t)_{D_2}= \\ =-2\cos(2x+9t)+4\cos 3(x+3t)+2\cos 3(x-3t)-3(x-3t)^2-1, \\ \quad x-3t\geqslant 0, \quad x+3t\geqslant 0, \quad x\geqslant 0, \quad t\geqslant 0. \end{array}$$

«Сшиватъ» решения по характеристике не надо!

В области D_1 решением является сумма «прямой» и «обратной» волн, а в области D_2 сумма «обратной» и отражённой от конца (см. рис. 4).



Ответ.

$$u(x,y)=-2\cos(2x+9t)+4\cos 3(x+3t)+\left[\begin{array}{l} 4\cos 3(x-3t)-3\cos 2(x-3t), x-3t\geqslant 0, x\geqslant 0, t\geqslant 0; \\ 2\cos 3(x-3t)-3(x-3t)^2-1, x-3t\leqslant 0, x\geqslant 0, t\geqslant 0. \end{array}\right.$$

Пример 2.

Найдите частное решение уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+e^{x-at}$$

Решение Заметим, что $\Box e^{x-at}=0$. Если будем искать решение в виде $u_{\text{частн}}=cf(x,t)$, то получим $ca^2e^{x-at}=ca^2e^{x-at}+e^{x-at}\varnothing$.

Поэтому воспользуемся вторым способом:

$$u_{\text{частн}}=f(t)e^x \Rightarrow f''(t)e^x=a^2f(t)e^x+e^xe^{-at}$$
$$f''(t)=a^2f(t)+e^{-at}.$$

Как мы видим, для искомой функции $f(t)$ имеет место резонанс:

$$f_{\text{частн}} = bte^{-at} \Rightarrow -2abe^{-at} + a^2bte^{-at} = a^2bte^{-at} + e^{-at}$$
$$b = -\frac{1}{2a} \Rightarrow u_{\text{частн}} = \left(C_1e^{at} + C_2e^{-at} - \frac{1}{2a}te^{-at}\right)e^x.$$

В качестве частного можно взять, например, $u_{\text{частн}} = -\frac{1}{2a}te^{x-at}$.
Ответ. $u_{\text{частн}} = -\frac{1}{2a}te^{x-at}$.

Пример 3.

Найдите частное решение уравнения

$$9u_{tt} = u_{xx} + t\sin\frac{x}{3} + x\sin\frac{t}{3}.$$

Решение • Так как

$$\left(9\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t\sin\frac{x}{3} = \frac{1}{9}t\sin\frac{x}{3}$$
$$\left(9\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)x\sin\frac{t}{3} = -x\sin\frac{t}{3}$$

то

$$u_{\text{частн}} = at\sin\frac{x}{3} + bx\sin\frac{t}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{9}at\sin\frac{x}{3} - bx\sin\frac{t}{3} = t\sin\frac{x}{3} + x\sin\frac{t}{3}a = 9, \quad b = -1$$

Ответ: $u_{\text{частн}}(x,t) = 9t\sin\frac{x}{3} - x\sin\frac{t}{3}$.

4.2.1 Полубесконечная струна с закреплённым или свободным концом

Решение задачи о свободных колебаниях бесконечной струны, т.е. решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

даётся формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi.$$

Заметим, что если функции, задающие начальные условия, являются нечётными, т. е. $u_0(x) = -u_0(-x), u_1(x) = -u_1(-x)$, то, во-первых,

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi$$
$$u(-x,t) = \frac{u_0(-x+at) + u_0(-x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at} u_1(\xi)d\xi =$$
$$= \frac{-u_0(x-at) - u_0(x+at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at} u_1(-\xi)d\xi =$$
$$= -\frac{u_0(x-at) + u_0(x+at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi = -u(x,t)$$

т. е. решение $u(x,t)$ - тоже нечётная функция, а во-вторых,

$$u(x,t)|_{x=0} = \frac{u_0(at)+u_0(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} u_1(\xi)d\xi = 0.$$

Если же $u_0(x) = u_0(-x), u_1(x) = u_1(-x)$ - чётные, то аналогично показывается, что $u(x,t)$ - чётная функция и

$$u_x(x,t)|_{x=0} = \frac{u_0'(at)+u_0'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(u_1(at) - u_1(-at)\right) = 0.$$

Эти факты дают основание записать решение задачи о колебании полубесконечной струны с закреплённым или свободным концом формулой Даламбера.

Пусть задана смешанная задача на полуоси.

Решение в общем виде (??? додумаю!)

Для типичной задачи вида

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \geqslant 0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Продолжим начальные условия нечётным образом на отрицательную полуось, т. е. положим

$$v_0(x) = \begin{cases} u_0(x), x \geqslant 0, \\ -u_0(-x), x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad v_1(x) = \begin{cases} u_1(x), x \geqslant 0, \\ -u_1(-x), x \leqslant 0. \end{cases}$$

Запишем решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = v_0(x), \, u_t|_{t=0} = v_1(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

формулой Даламбера

$$u(x,t) = \frac{v_0(x+at)+v_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_1(\xi)d\xi.$$

Тогда, в силу приведённых выше рассуждений, это решение является решением смешанной задачи 2 (см. примеры 4,9).

4.2.2 Закон отражения от закреплённого (свободного) конца

Функции $f(x+3t), g(x-3t)$ для $x - 3t \geqslant 0, x + 3t \geqslant 0$ определяются из начальных условий Коши, а $g(x-3t)$ для $x - -3t \leqslant 0$ из краевого условия и условий Коши.

В частности, если конец закреплён, т. е.

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \quad \text{то} \quad f(at) + g(-at) = 0,$$

мы получаем закон отражения от закреплённого конца

$$g(x-at) = -f(-x+at), \quad x - at \leqslant 0.$$

Если конец свободен, то закон отражения другой: $f'(at)+g'(-at) = 0 f(at)-g(-at) = C$, т. е.

$$g(x-at) = f(at-x) + C, \quad x - at \leqslant 0,$$

Пример 4.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x \sin x, \quad x \geqslant 0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

• Продолжим начальные условия нечётным образом, полагая $v_0 = x|x|, v_1 = x|\sin x|$. Тогда решение задачи даётся формулой (учитывая, что во всей первой четверти $x+at \geqslant 0$):

$$u(x,t) = \frac{(x+at)^2 + (x-at)|x-at|}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \xi|\sin\xi|d\xi.$$

П р и м е ч а н и е. К сожалению, далеко не всегда можно так просто записать нечётное продолжение. Поэтому, хоть в принципе такое возможно, часто проще решить задачу «в лоб» рассмотренными первым или вторым способами.

4.3 Задача Коши в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Будем рассматривать следующие задачи Коши: для волнового уравнения

Задача 3. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$ где $m = 2$ или $m = 3$, и для уравнения теплопроводности $\in \mathbb{N}$.

Задача 4. $\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$ где $m \in \mathbb{N}$

Сначала рассмотрим методы, которые подходят для обеих задач. Тогда останется лишь один метод решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности, который не годится для волнового уравнения.

4.3.1 Несколько способов нахождения частного решения неоднородного уравнения

a) Если в уравнении $u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t)$ выполнено условие $f(x,t) = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - a^2\Delta f(x,t) = bf(x,t)$, т. е. свободный член является собственным вектором волнового оператора (или оператора теплопроводности $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - a^2 f(x,t) = bf(x,t)\Big)$, то частное решение можно искать в виде

$$u_{\text{частн}} = cf(x,t), \quad c \neq 0.$$

Если же $f(x,t)$ является решением однородного волнового уравнения, то надо смотреть отдельно (см. пример 2).

b) Если в уравнении $u_{tt} = a^2 u + f(x,t)$ свободный член имеет вид

$$f(x,t) = \varphi_0(t)\psi(x), \qquad \text{где} \qquad \Delta\psi(x) = \lambda\psi(x),$$

т. е. $\psi(x)$ - собственная функция оператора Лапласа, то частное решение можно искать в виде $u_{\text{частн}} = \varphi(t)\psi(x)$ (см. с. 9).

c) Если в задачах 1 или $2 f(x,t) \equiv g(x)$, т. е. не зависит от t и $\exists n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\Delta^n g = 0, \quad \Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0,$$

то решение задач удобно искать в виде многочлена, расположенного по неотрицательным степеням t с неизвестными коэффициентами, зависящим от x, и удовлетворяющего начальным условиям, т. е. в виде

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-1}(x)$$

где m мы не конкретизируем, т. к. оно автоматически определится в процессе решения задачи. Осталось удовлетворить уравнению. Подставим формулу в уравнение

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-1}(x),$$

$$\varphi_1(x) + \frac{t}{1!}\varphi_2(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_4(x) + \ldots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\varphi_{m-1}(x) =$$

$$= a^2\left(\Delta u_0(x) + t\Delta u_1(x) + \frac{t^2}{2!}\Delta\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\Delta\varphi_2(x) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{t^m}{m!}\Delta\varphi_{m-1}(x)\right) + g(x)\varphi_1(x) = a^2\Delta u_0(x) + g(x),$$

$$\varphi_2(x) = a^2\Delta u_1(x),$$

$$\varphi_3(x) = a^2\Delta\varphi_1(x) = a^2\Delta\left(a^2\Delta u_0(x) + g(x)\right) =$$

$$= a^4\Delta^2 u_0(x) + a^2\Delta g(x),$$

$$\varphi_4(x) = a^2\Delta\varphi_2(x) = a^4\Delta^2 u_1(x),$$

Видно, что начиная с некоторого k все φ_i будут равны 0.

Если в задачах 3,4 начальные условия $u_0(x), u_1(x)$ не удовлетворяют условиям этого пункта, то частное решение удобно искать в виде $u(x,t) = \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-1}(x)$, т. е. удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Так как общего решения однородного волнового уравнения или однородного уравнения теплопроводности в случае $x \in \mathbb{R}^n$, $m > 1$, не существует, то после нахождения частного решения необходимо сделать сдвиг: $v(x,t) = u(x,t) - u_{\text{частн}}(x,t)$, чтобы уравнение стало однородным.

4.3.2 Некоторые способы решения задач Коши для однородного уравнения

Будем рассматривать задачи Коши для однородного волнового уравнения

Задача 5. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = 0, x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$

Задача 6. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$ где $m = 2, 3$, и однородного уравнения теплопроводности

Задача 7. $\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$ где $m \in \mathbb{N}$.

1. Если

$$\Delta u_0 = \lambda u_0 \quad \text{или} \quad \Delta u_1 = \lambda u_1$$

то решения задач $5 - 7$ ищется в виде произведения искомой функции $f(t)$ на собственную функцию оператора Лапласа (u_0 или u_1 соответственно), удовлетворяющего начальным условиям, т.е.

$$u(x,t) = f(t)u_0(x), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0;$$

$$u(x,t) = f(t)u_1(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1;$$

$$u(x,t) = f(t)u_0(x), \quad f(0) = 1$$

2 • Если

$$u_0 = \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z) \quad \text{или} \quad u_1 = \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

то решения задач (5) - (7) находим в виде

$$u = f(t, \alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Обозначим $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Тогда задачи станут одномерными и примут вид

$$\begin{cases} f_{tt} = a^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = u_0(\xi), \\ f_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} f_{tt} = a^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = 0, \\ f_t\big|_{t=0} = u_1(\xi); \end{cases}$$
$$\begin{cases} f_{t} = a^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) f_{\xi\xi}, \\ f_{t=0} = u_0(\xi). \end{cases}$$

Решение задач (5^*) – (6^*) легко записать с помощью формулы Даламбера. Решение задачи (7^*) можно получить с помощью формулы Пуассона или как-то по-другому, если это возможно.

3. Если в задаче $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x),\, u_t\big|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ или задаче (7) начальные условия таковы, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\Delta^n u_0 = 0, \quad \Delta^n u_1 = 0$$

то решение задачи можно искать в виде $u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-2}(x)$.

4. • Если u_0 или u_1 являются произведением некоторой гармонической функции на некоторую функцию от других независимых переменных, т. е.

$$u_0\left(x_1, \ldots, x_n\right) = f\left(x_1, \ldots, x_k\right) g\left(x_{k+1}, \ldots, x_n\right), \quad \Delta f = 0$$

(например, $u_0(x,y,z) = \left(x^2 - y^2\right) e^{-z^2}$), то решение можно искать в виде

$$u\left(t, x_1, \ldots, x_n\right) = f\left(x_1, \ldots, x_k\right) h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right),$$
$$h\big|_{t=0} = g\left(x_{k+1}, \ldots, x_n\right),$$

если это, например, уравнение теплопроводности. Если это задача 5 , то

$$h\big|_{t=0} = g\left(x_{k+1}, \ldots, x_n\right), \quad h_t\big|_{t=0} = 0$$

Обоснование (?????). • Подставим

$$u\left(t, x_1, \ldots, x_n\right) = f\left(x_1, \ldots, x_k\right) h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right),$$

например, в уравнение задачи 7:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{t=0} = f\left(x_1, \ldots, x_k\right) g\left(x_{k+1}, \ldots, x_n\right), \quad u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$
$$a^2\Delta\left(f\left(x_1, \ldots, x_k\right) h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right)\right) =$$
$$= a^2\left(h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right)\Delta f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) +$$
$$+ f\left(x_1, \ldots, x_k\right)\Delta h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right))$$
$$h_{tt}\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) = a^2\Delta h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} h_{tt}\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) = a^2\Delta h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right), \\ h\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right)\big|_{t=0} = g\left(x_{k+1}, \ldots, x_n\right), \\ h_t\left(t, x_{k+1}, \ldots, x_n\right)\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

5. • Довольно часто встречается выражение вида

$$u_0 = x\sin(ax+by+cz).$$

Вычислим $\Delta u_0 : \Delta u_0 = 2a\cos(ax+by+cz) - (a^2+b^2+c^2)\,x\sin(ax+by+cz)$.

Значит, решение можно искать в виде

$$u = g(t)\cos(ax+by+cz) + f(t)x\sin(ax+by+cz),$$

удовлетворяющем начальным условиям $f(0)=0, g(0)=1$, если это, например, задача 7.

Обоснование (?????): • Подставим выражение в уравнение и начальные условия:

$$\begin{aligned}
&u = f(t)x\sin(ax+by+cz) + g(t)\cos(ax+by+cz)\\
&f(0)=1, \quad g(0)=0,\\
&f'(t)x\sin(ax+by+cz) + g'(t)\cos(ax+by+cz) =\\
&= -g(t)\left(a^2+b^2+c^2\right)\cos(ax+by+cz)+\\
&\quad\Rightarrow \begin{cases} f'(t)+f(t)\,(a^2+b^2+c^2)=0, f(0)=1,\\ g'(t)+g(t)\,(a^2+b^2+c^2)=2af(t), g(0)=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Получили две задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 5.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + (x^2+y^2)\sin t, t>0, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\ u|_{t=0} = (2x-y+2z)\sin(2x-y+2z)^2\\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

Решение (!?!!!!! это крутая типичная задача, отработаю ее!!!)

• Найдём частное решение уравнения $u_{tt}=\Delta u + x^2\sin t$. Так как $(\sin t)'' = -\sin t$, то $u_{\text{частн}} = f(x)\sin t \Rightarrow$: $-f(x) = f''(x)+x^2$

$f''(x)+f(x) = -x^2$

$f(x) = C_1\sin x + C_2\cos x + 2 - x^2$.

В качестве частного решения можно взять $u_{\text{частн}} = (2-x^2)\sin t$. Аналогично получится частное решение $u_{\text{частн}} = (2-y^2)\sin t$ для уравнения $u_{tt} = u + y^2\sin t$.

Тогда $v = u - (4-x^2-y^2)\sin t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} = v, t>0, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\ v|_{t=0} = (2x-y+2z)\sin(2x-y+2z)^2\\ v_t|_{t=0} = x^2+y^2-4\end{cases}$$

Решение будем искать в виде суммы решений $v = w(x,y,z,t) + f(x,y,t)$ двух задач:

1. $\left\{\begin{array}{l} w_{tt} = \Delta w, t > 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ w\big|_{t=0} = (2x - y + 2z)\sin(2x - y + 2z)^2, \Rightarrow w(x,y,z,t) = \\ w_t\big|_{t=0} = 0 \end{array}\right.$

$= g(2x - y + 2z, t)$. Обозначим $2x - y + 2z = \xi$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} g_{tt} = 9g_{\xi\xi}, t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ g\big|_{t=0} = \xi \sin \xi^2, \\ g_t\big|_{t=0} = 0 \end{array}\right.$$

$$g(\xi, t) = \frac{(\xi + 3t)\sin(\xi + 3t)^2 + (\xi - 3t)\sin(\xi - 3t)^2}{2}.$$

2. $\left\{\begin{array}{l} f_{tt} = \Delta f, t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ f\big|_{t=0} = 0, \\ f_t\big|_{t=0} = x^2 + y^2 - 4. \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y,t) =$

$$= 0 + t\left(x^2 + y^2 - 4\right) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x,y) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x,y) + \frac{t^4}{4!}\varphi_3(x,y) + \ldots +$$

$$+ \varphi_1(x,y) + t\varphi_2(x,y) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x,y) + \ldots =$$

$$= t(4) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x,y) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x,y) + \ldots$$

$$\varphi_1(x,y) = 0, \quad \varphi_2(x,y) = 4,$$

$$\varphi_3(x,y) = \varphi_1(x,y) = 0, \quad \varphi_4(x,y) = \varphi_2(x,y) = 0$$

$$f(x,y,t) = t\left(x^2 + y^2 - 4\right) + \frac{4t^3}{3!} = t\left(x^2 + y^2 - 4\right) + \frac{2t^3}{3}.$$

Ответ:

$$u(x,y,t) = \left(4 - x^2 - y^2\right)\sin t + t\left(x^2 + y^2 - 4\right) + \frac{2t^3}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left((2x - y + 2z + 3t)\sin(2x - y + 2z + 3t)^2 + (2x - y + 2z - 3t)\sin(2x - y + 2z - 3t)^2\right).$$

Пример 6.

$\left\{\begin{array}{l} u_t = \Delta u, t > 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u\big|_{t=0} = xyz\cos x. \end{array}\right.$

• В этом примере

$$(\Delta yzx\cos x) = -2yz\sin x - yzx\cos x.$$

Поэтому решение можно искать в виде

$$u = f(t)yz\sin x + g(t)yzx\cos x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

Тогда

$f'(t)yz\sin x + g'(t)yzx\cos x =$

$$= -f(t)yz\sin x - g(t)(2yz\sin x + yzx\cos x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} g'(t) + g(t) = 0, g(0) = 1 g(t) = e^{-t} \\ f'(t) + f(t) = -2g(t) = -2e^{-t}, f(0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = Ce^{-t} - 2te^{-t}, \quad f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = -2te^{-t}.$$

Отсюда следует
Ответ. $u(x,y,z,t) = e^{-t}yzx\cos x - 2te^{-t}yz\sin x$.

Пример 7.

$$\begin{cases} 2u_t = 7u + \frac{\sin x \operatorname{ch} z}{\sqrt{t+4}}, t > 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z. \end{cases}$$

• Произведение обычного синуса (или косинуса) на гиперболический синус (или косинус) является гармонической функцией

$$\Delta \sin x \operatorname{ch} z = 0.$$

Поэтому ищем частное решение в виде

$$u_{\text{частн.}} = f(t)\sin x \operatorname{ch} z, \quad f(0) = 0:$$

$$2f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+4}} \Rightarrow f(t) = \sqrt{t+4} + C,$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{t+4} - 2 \Rightarrow u_{\text{частн.}} = (\sqrt{t+4} - 2)\sin x \operatorname{ch} z.$$

Теперь делаем сдвиг:

$$v = u - u_{\text{частн}} \Rightarrow \begin{cases} 2v_t = 7\Delta v, t > 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ v|_{t=0} = (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z \end{cases}$$

Интересно, что $\Delta^2(x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z \equiv 0$ (проверьте!). Поэтому решение ищем в виде

$$\begin{aligned} v &= (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z + t\varphi_1(x,y,z) + \\ &+ \frac{t^2}{2!}\varphi_2(x,y,z) + \frac{t^3}{3!}\varphi_3(x,y,z) + \ldots \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\left(\varphi_1(x,y,z) + t\varphi_2(x,y,z) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x,y,z) + \ldots\right) = \\ &= 7(2\cos x \operatorname{ch} z + 2\sin x \operatorname{sh} z) + t\varphi_1(x,y,z) + \\ &\qquad + \frac{t^2}{2!}\varphi_2(x,y,z) + \frac{t^3}{3!}\varphi_3(x,y,z) + \ldots \end{aligned}$$

$2\varphi_1(x,y,z) = 14(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z)$,

$$2\varphi_2(x,y,z) = 7\Delta\varphi_1(x,y,z) = 0$$
$$2\varphi_3(x,y,z) = \Delta\varphi_2(x,y,z) = 0$$

$v = (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z + 7t(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z) \Rightarrow$
Ответ. $u = (\sqrt{t+4} - 2)\sin x \operatorname{ch} z + (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z + 7t(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z)$.

Пример 8.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, t > 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = \left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right)e^{-z^2}, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

• Так как $\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right) \equiv 0$, то решение находим в виде $u = f(t,z)\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right)$, $f(t,z)|_{t=0} = e^{-z^2}$, $f_t(t,z)|_{t=0} = 0$.

Подставив в уравнение и начальные условия, получаем задачу:

$$\begin{cases} f_{tt}(t,z) = f_{zz}(t,z), \\ f(t,z)\big|_{t=0} = e^{-z^2},\ f^t(t,z)\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$f(t,z) = \frac{e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) \frac{\left(e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}\right)}{2}.$$

$$\text{Ответ. } u = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) \frac{\left(e^{-(z+t)^2} + e^{-(z-t)^2}\right)}{2}.(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

Пример 9.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)\left(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3, \\ u_t\big|_{t=0} = \cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

• Это довольно важный и интересный пример. Решается он с помощью перехода к сферическим координатам и последующей заменой переменных, которая сведёт задачу Коши в R^3 к одномерной смешанной задаче на полуоси $r > 0$. Перейдём к сферическим координатам, и, поскольку начальные условия зависят только от расстояния, то и решение будем искать в виде $u(r,t)$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right), t > 0, r \geqslant 0 \\ u\big|_{t=0} = r^2 \operatorname{sh}^3 r \\ u_t\big|_{t=0} = \cos r \end{cases}$$

Но уравнение мы решать не умеем. Поэтому сделаем замену переменных: $\varphi(r,t) = ru(r,t)u(r,t) = \frac{\varphi(r,t)}{r}$, из которой следует, что $\varphi(r,t)\big|_{r=0} = 0$. Подставляем в условия задачи:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = a^2\varphi_{rr}, t > 0, r \geqslant 0 \\ \varphi\big|_{t=0} = r^3(\operatorname{sh} r)^3, r \geqslant 0 \\ \varphi_t\big|_{t=0} = r\cos r, r \geqslant 0 \\ \varphi\big|_{r=0} = 0, t \geqslant 0 \end{cases}$$

Получилась задача о колебании полубесконечной струны с закреплённым концом. Решение можно получить с помощью формулы Даламбера, если продолжим начальные условия на отрицательную полуось нечётным образом.

В нашем случае $r\cos r$ - уже нечётная функция, а новое $\varphi\big|_{t=0}$ можно записать в виде $\varphi\big|_{t=0} = r^3\left|\operatorname{sh}^3 r\right|$ - получим задачу Коши на всей оси:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = a^2\varphi_{rr}, t > 0, r \in R \\ \varphi\big|_{t=0} = r^3\left|\operatorname{sh}^3 r\right|, r \in R \\ \varphi_t\big|_{t=0} = r\cos r, r \in R \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$u(r,t) = \frac{(r+at)^3\left|\operatorname{sh}^3(r+t)\right| + (r-at)^3\left|\operatorname{sh}^3(r-at)\right|}{2r} + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} \xi\cos\xi d\xi.$$

Так как во всей интересующей нас области $r + at \geqslant 0$, то можно записать

Ответ:

$$u(r,t) = \frac{(r+at)^3 \operatorname{sh}^3(r+at) + (r-at)^3 \left|\operatorname{sh}^3(r-at)\right|}{2r} +$$
$$+ \frac{1}{2ar}((r+at)\sin(r+at) - (r-at)\sin(r-at) - 2\sin r \sin at).$$

Пример 10.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u\big|_{t=0} = (y+z)\operatorname{arctg}(y-z), \\ u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

• Этот пример отличается от предыдущих тем, что мы сделаем замену независимых переменных: $\xi = y+z, \eta = y-z \Rightarrow \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$ и задача примет вид

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u, \\ u\big|_{t=0} = \xi \operatorname{arctg} \eta \\ u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\text{ т. к. } \Delta\xi = 0) u = \xi f(\eta, t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f_{tt}(\eta,t) = 2f_{\eta\eta}(\eta,t), \\ f\big|_{t=0} = \operatorname{arctg}\eta, \\ f_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$f(\eta,t) = \frac{\operatorname{arctg}(\eta - \sqrt{2}t) + \operatorname{arctg}(\eta + \sqrt{2}t)}{2}.$$

Ответ. $u(y,z,t) = (y+z)\cdot\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(y-z-\sqrt{2}t) + \operatorname{arctg}(y- -z+\sqrt{2}t))$.

4.4 Метод Фурье на отрезке

4.4.1 Метод Фурье на отрезке, когда оператор $-L_1^*$ - оператор Штурма-Лиувилля

Будем рассматривать следующие задачи на отрезке:

Задача 8.

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = L_1 u + f(x,t), t > 0, a < x < b, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)\big|_{x=a} = \varphi_1(t), \quad (c_2 u + d_2 u_x)\big|_{x=b} = \varphi_2(t), t \geqslant 0, \end{cases}$$

или уравнения теплопроводности:

Задача 9.

$$\begin{cases} u_t + \alpha u = L_1 u + f(x,t), t > 0, a < x < b, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 u + d_1 u_x)\big|_{x=a} = \varphi_1(t), (c_2 u + d_2 u_x)\big|_{x=b} = \varphi_2(t), t \geqslant 0, \end{cases}$$

где оператор $L_1 \equiv a^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x} + c(x), \alpha, \beta, c_i, d_i \in \mathbb{R}$.

Но сначала рассмотрим задачи с соответствующими однородными уравнениями и однородными краевыми условиями:

Задача 8*.

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha u_t+\beta u=L_1u, t>0, a<x<b \\ u|_{t=0}=u_0(x),\, u_t|_{t=0}=u_1(x), a\leqslant x\leqslant b \\ (c_1u+d_1u_x)|_{x=a}=0,\, (c_2u+d_2u_x)|_{x=b}=0, t\geqslant 0 \end{cases}$$

или уравнения теплопроводности:

Задача 9*.

$$\begin{cases} u_t+\alpha u=L_1u, t>0, a<x<b, \\ u|_{t=0}=u_0(x), a\leqslant x\leqslant b; \\ (c_1u+d_1u_x)|_{x=a}=0,\, (c_2u+d_2u_x)|_{x=b}=0, t\geqslant 0. \end{cases}$$

В обеих задачах, что важно, уравнения и краевые условия - однородные. Такие задачи принято решать методом разделения переменных Фурье.

I. Для этого проведём разделение переменных в однородном уравнении и однородных краевых условиях. Это является ключевым моментом при применении метода Фурье. В нашем случае после разделения переменных получатся обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. В других задачах, например, в том же уравнении теплопроводности или волновом, но в пространстве большей размерности, получаются более сложные уравнения.

Ищем решение уравнения, например, задачи 9* в виде $u(x,t)=T(t)X(x)$.

Подставим $u(x,t)=T(t)X(x)$ в уравнение:

$$T'(t)X(x)+\alpha T(t)X(x)=T(t)L_1^*X(x)$$
$$\frac{T'(t)}{T(t)}+\alpha=\frac{L_1^*X(x)}{X(x)}=\mathrm{const}=\nu,$$

где оператор $L_1^*=a^2(x)\frac{d^2}{dx^2}+b(x)\frac{d}{dx}+c(x)$ - оператор уже с обыкновенными производными.

Теперь разделим переменные в однородных краевых условиях:

$$c_1T(t)X(a)+d_1T(t)X'(a)=0c_1X(a)+d_1X'(a)=0,$$
$$c_2T(t)X(b)+d_2T(t)X'(b)=0c_2X(b)+d_2X'(b)=0.$$

Для $X(x)$ возникла краевая задача

$$\begin{cases} L_1^*X(x)=\nu X(x), a<x<b \\ c_1X(a)+d_1X'(a)=0 \\ c_2X(b)+d_2X'(b)=0 \end{cases}$$

Решение всей задачи 9* теперь зависит от решения этой краевой задачи. А краевая задача, как известно, не всегда имеет нетривиальное решение - всё зависит от оператора L_1^*.

Оператор $-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad})+q(x), p(x)>0, q(x)\geqslant 0$, называется оператором Штурма-Лиувилля.

В одномерном случае он принимает вид

$$L\equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)$$

Если $L_1^*=-L$, то условия задачи примут вид

$$\begin{cases} LX(x) = -\nu X(x), a < x < b \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Такая задача называется задачей Штурма-Лиувилля.

Любое нетривиальное решение этой задачи называется собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, а те ($-\nu$), при которых таковые существуют, называются собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля.

В теории курса доказывается, что если $p(x) \in C^1[a;b], p(x) \geqslant p_0 > 0, q(x) \in C[a;b], q(x) \geqslant 0$, то собственных значений счётное множество, они неотрицательны, т.е. $-\nu = \lambda^2$, каждому собственному значению соответствует одна собственная функция, а собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны, т.е. $\int_a^b X_k(x) X_n(x) dx = 0, k \neq n$, и представляют собой полную ортогональную в $L_2[a,b]$ систему.

Очень часто в наших задачах $p(x) \equiv 1, q(x) \equiv 0$, и тогда $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, а $L_1^* \equiv \frac{d^2}{dx^2}$.

В этом случае задача примет вид

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x), a < x < b \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Особенность этих задач на метод Фурье состоит в том, что если в каждом из классических краевых условий отличен от 0 лишь один коэффициент, то свойства получающихся собственных функций известны из математического анализа 2 -го курса.

Пример 11. Решите задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), x \in (0;\pi) \\ X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

• Так как теория не всем известна, а задача простая, то решим её при всех возможных значениях параметра μ:

2 • $\mu = 0 : X(x) = C_1 x + C_2$.

$$X'(0) = 0C_1 = 0, X'(\pi) = 0C_1 = 0 \Rightarrow X_0(x) = 1$$

• $\mu < 0 \Leftrightarrow \mu = -\lambda^2 < 0$: $X(x) = X(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \operatorname{sh} \lambda x$.

$$X'(0) = 0C_2 = 0, X'(\pi) = - C_1 \lambda \operatorname{sh} \lambda\pi = 0$$
$$C_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

3 • $\mu > 0 \mu = \lambda^2 > 0 : X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$.

$$X'(0) = 0C_2 = 0, X'(\pi) = -C_1 \lambda \sin \lambda\pi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow X_k(x) = \cos kx, k \in \mathbb{N}$$

Свойства полученной системы собственных функций хорошо известны из математического анализа 2 -го курса: система $\{\cos kx\}, k = 0, 1, 2, \ldots$ ортогональна и полна в $L_2[0;\pi]$.

Ответ. $\{\cos kx\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Итак, найдены собственные функции $X_k(x)$ и собственные значения λ_k^2. Теперь находим $T_k(t) : \frac{T_k'(t)}{T_k(t)} + \alpha = \mu_k = -\lambda_k^2 \; T_k'(t) + (\alpha + \lambda_k^2) T_k(t) = 0$ и получаем множество решений уравнения задачи $u_k(x,t) = T_k(t) X_k(x)$, удовлетворяющих краевым условиям. Осталось удовлетворить начальным условиям.

II. Теперь уже ищем решение всей задачи в виде формального ряда

$$u(x,t) = \sum_{k}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$$

Подставим начальные условия:

$$u(x,t)|_{t=0} = \sum_{k}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = u_0(x)$$

Возникла необходимость разложить $u_0(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи: $u_0(x) = \sum_k^\infty a_k X_k(x)$. Вот здесь-то и потребовались свойства $u_0(x)$ и собственных функций. Так как наша система ортогональна и полна в $L_2[a;b]$, то всякую $u_0(x) \in L_2[a;b]$ можно разложить в ряд Фурье, где $a_n = \frac{\int_a^b u_0(x) X_n(x) dx}{\int_a^b X_n^2(x) dx}$.

Тогда $\sum_k^\infty T_k(0) X_k(x) = u_0(x) = \sum_k^\infty a_k X_k(x) T_k(0) = a_k$. Получили для $T_k(t)$ задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k'(t) + \alpha T_k(t) = -\lambda_k^2 T_k(t) \\ T_k(0) = a_k \end{cases}$$

которые, как известно, имеют единственное решение.

Формальное решение $u(x,t) = \sum_k^\infty T_k(t) X_k(x)$ найдено, т. к. найдены все $X_k(x), T_k(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Обратите внимание на то, что задача Штурма-Лиувилля соответствует оператору L_1 и не зависит от того, что стоит слева в наших уравнениях задач $8^*, 9^*$.

4.4.2 Случай неоднородного уравнения и неоднородных краевых условий (??)

4.4.3 Рассмотрим теперь задачи 8 и 9.

Теперь решение задач состоит из трех этапов.

I. Находим функцию $w_0(x,t)$, которая удовлетворяет заданным краевым условиям.

Общих правил для нахождения $w_0(x,t)$ не существует. Поэтому рассмотрим несколько примеров. Например,

а) $u|_{x=a} = \varphi_1(t)$, $u_x|_{x=b} = \varphi_2(t)$. Тогда в качестве $w_0(x,t)$ можно взять функцию $w_0(x,t) = \varphi_1(t) + (x-a)\varphi_2(t)$, а можно и любую другую - лишь бы она удовлетворяла заданным краевым условиям.

б) $u_x|_{x=a} = \varphi_1(t)$, $u_x|_{x=b} = \varphi_2(t) \Rightarrow w_0(x,t) = \frac{(x-b)^2}{2(a-b)}\varphi_1(t) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\varphi_2(t)$.

в) $u|_{x=a} = \varphi_1(t)$, $u|_{x=b} = \varphi_2(t)$. Тогда в роли $w_0(x,t)$ можно взять функцию

$$w_0(x,t) = \frac{(x-b)}{a-b}\varphi_1(t) + \frac{(x-a)}{b-a}\varphi_2(t)$$

и т. д.

Теперь необходимо сделать сдвиг, чтобы свести к задаче с однородными краевыми условиями:

$$v(x,t) = u(x,t) - w_0(x,t) u(x,t) = v(x,t) + w_0(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} + \alpha v_t + \beta v = L_1 v + g(x,t), t > 0, a < x < b, \\ v|_{t=0} = u_0(x) - w_0(x,t)|_{t=0}, \quad v_t|_{t=0} = u_1(x) - w_{0t}(x,t)|_{t=0}, \\ a \leqslant x \leqslant b; \\ (c_1 v + d_1 v_x)|_{x=a} = 0, (c_2 v + d_2 v_x)|_{x=b} = 0, t \geqslant 0. \end{cases}$$

Видно, что изменился, вообще говоря, свободный член $g(x,t) \equiv -w_{0tt} - \alpha w_{0t} - \beta w_0 + L_1 w_0 + f(x,t)$ и начальные условия. Переобозначим их для удобства и получим задачу

$$\begin{cases} v_{tt} + \alpha v_t + \beta v = L_1 v(x,t) + g(x,t), t > 0, a < x < b, \\ v|_{t=0} = v_0(x),\, v_t|_{t=0} = v_1(x), a \leqslant x \leqslant b \\ (c_1 v + d_1 v_x)|_{x=a} = 0,\, (c_2 v + d_2 v_x)|_{x=b} = 0, t \geqslant 0 \end{cases}$$

II. Теперь найдём собственные функции задачи.

Для этого разделим переменные в соответствующем однородном уравнении и однородных краевых условиях. Пусть $v = T(t)X(x)$. Подставляем в соответствующее однородное уравнение и однородные краевые условия:

$$T''(t)X(x) + \alpha T'(t)X(x) + \beta T(t)X(x) = T(t)L_1^* X(x)$$
$$\frac{T''(t) + \alpha T'(t)}{T(t)} + \beta = \frac{L_1^* X(x)}{X(x)} = \text{ const } = \mu,$$
$$c_1 T(t)X(a) + d_1 T(t)X'(a) = 0 c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0,$$
$$c_2 T(t)X(b) + d_2 T(t)X'(b) = 0 c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0.$$

Если $-L_1^* \equiv L$ - оператор Штурма-Лиувилля, то получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} LX(x) = \lambda^2 X(x) \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

(Теперь, в отличие от задач 8* и 9*, уравнение для T решать не будем, т. к. делили переменные в «чужом» однородном уравнении.)

Общего аналитического решения такой задачи не существует. Поэтому в наших заданиях чаще всего встречается «решабельный» вариант, где $L \equiv -\frac{d^2}{dx^2}$, т. е. задача имеет вид

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x) \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Решаем задачу для $\lambda = 0$ и $\lambda^2 > 0$, находим $X_n(x)$.

III. Теперь ищем решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от t:

$$v(x,t) = \sum_k^{\infty} T_k(t) X_k(x)$$

Подставляем в уравнение

$$\sum_k^{\infty} T_k''(t)X_k(x) + \alpha \sum_k^{\infty} T_k'(t)X_k(x) + \beta \sum_k^{\infty} T_k(t)X_k(x) =$$
$$= -\sum_k^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2 X_k(x) + g(x,t)$$

Придётся разложить $g(x,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям: $g(x,t) = \sum_k^{\infty} a_k(t)X_k(x), a_n(t)$ $\frac{\int_a^b g(x,t)X_n(x)dx}{\int_a^b X_n^2(x)dx}$.

Подставим ряд вместо $g(x,t)$ и приравняем коэффициенты при линейно независимых X_k:

$$T_k''(t) + \alpha T_k'(t) + \left(\beta + \lambda_k^2\right) T_k(t) = a_k(t).$$

Выходим на начальные условия, которые тоже приходится разлагать в ряд Фурье по собственным функциям задачи:

$$\sum_k^{\infty} T_k(0) X_k(x) = v_0(x) = \sum_k^{\infty} b_k X_k(x) T_k(0) = b_k,$$
$$\sum_k^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = v_1(x) = \sum_k^{\infty} c_k X_k(x) T_k'(0) = c_k.$$

Решаем задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \alpha T_k'(t) + \left(\beta + \lambda_k^2\right) T_k(t) = a_k(t) \\ T_k(0) = b_k \\ T_k'(0) = c_k \end{cases}$$

и записываем ответ.

Пример 12.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u - \frac{t\left(3x^2+2\right)}{\pi} + x\cos t, t > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u\big|_{t=0} = \cos 2x,\, u_t\big|_{t=0} = \frac{x^2}{\pi}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ u_x\big|_{x=0} = 0,\, u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = t, t \geqslant 0. \end{cases}$$

• I. В качестве функции $w_0(x,t)$ возьмём, например, функцию $w_0(x,t) = \frac{x^2 t}{\pi}$, удовлетворяющую краевым условиям. Теперь делаем сдвиг

$$v = u - \frac{x^2 t}{\pi} u = v + \frac{x^2 t}{\pi} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} - 3v = v_{xx} + x\cos t, t > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ v\big|_{t=0} = \cos 2x,\, v_t\big|_{t=0} = 0, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ v_x\big|_{x=0} = 0,\, v_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, t \geqslant 0. \end{cases}$$

и переходим ко второму пункту.

II. Делим переменные в соответствующем однородном уравнении и однородных краевых условиях:

$$v_{tt} - 3v = v_{xx}, \quad v_x\big|_{x=0} = 0, \quad v_x\big|_{x=\pi} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow XT'' - 3XT = X''T \frac{T''}{T} - 3 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$
$$X'(0)T(t) = X'\left(\frac{\pi}{2}\right) T(t) = 0 X'(0) = X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Решаем возникшую классическую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\lambda = 0 : X(x) = Ax + B \Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow X_0 = 1,$$
$$\lambda^2 > 0 : X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\lambda A \sin\lambda\frac{\pi}{2} = 0\lambda\frac{\pi}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$X_k(x) = \cos 2kx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Система найденных собственных функций $\{\cos 2kx\}, k \in \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ортогональна и полна в $L_2\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

III. Теперь ищем решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от t:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos 2kx.$$

Помним, что свободный член и начальные условия (в данном случае $u_0(x) = X_1(x)$) надо разложить в ряды Фурье по собственным функциям задачи:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_0 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx} = \frac{\pi}{4}, \quad a_m = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2mx dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2mx dx} = \frac{((-1)^m - 1)}{\pi m^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)\cos 2kx - 3\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos 2kx =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} 4T_k(t)k^2\cos 2kx + \cos t\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos 2kx$$
$$T_k''(t) + \left(4k^2 - 3\right)T_k(t) = a_k\cos t,$$
$$v|_{t=0} = \cos 2x \Rightarrow T_1(0) = 1, \quad k = 0, 2, 3, \ldots$$
$$v_t|_{t=0} = 0 \Rightarrow T_k'(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Получились задачи Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 - 3)\,T_k(t) = a_k\cos t \\ T_1(0) = 1, T_k(0) = 0, k = 0, 2, 3, \ldots \\ T_k'(0) = 0, k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Что особенное ждёт нас при решении задач Коши?

• Надо обратить внимание на коэффициент при T_k. Может оказаться, что при некоторых значениях k он может быть положительным, при других отрицательным или нулевым, и решения при этом будут выражаться разными формулами.

• При некоторых значениях k может быть резонанс.

• Началъные условия могут быть разными для разных T_k.

В нашем случае

$$k=0:\begin{cases} T_0''(t)-3T_0(t)=a_0\cos t,\\ T_0(0)=0,\\ T_0'(0)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} T_0(t)=A_0\operatorname{ch}\sqrt{3}t+B_0\operatorname{sh}\sqrt{3}t-\frac{a_0}{4}\cos t,\\ T_0(0)=0,\\ T_0'(0)=0,\end{cases}$$

$$T_0(t)=\frac{a_0}{4}(\operatorname{ch}\sqrt{3}t-\cos t).$$

$$k=1:\begin{cases} T_1''(t)+T_1(t)=a_1\cos t,\\ T_1(0)=1,\\ T_1'(0)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1(t)=A_1\cos t+B_1\sin t+\frac{a_1}{2}t\sin t,\\ T_1(0)=1,\\ T_1'(0)=0,\end{cases}$$

$$T_1(t)=\cos t+\frac{a_1}{2}t\sin t$$

• здесь резонанс (частное решение ищется в виде $t(a\cos t+b\sin t)$).

$$k\geqslant 2:\begin{cases} T_k''(t)+(4k^2-3)\,T_k(t)=a_k\cos t,\\ T_k(t)=0,\\ T_k'(t)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} T_k(t)=A_k\cos t\sqrt{4k^2-3}+B_k\sin t\sqrt{4k^2-3}+\\ T_k(t)=0,\\ T_k'(t)=0,\end{cases}$$

$$T_k(t)=\frac{a_k\cos t}{(4k^2-3)-1},$$

$$\left.\cos t-\cos\sqrt{4k^2-3}\right).$$

Записываем Ответ.

$$u(x,t)=\frac{x^2t}{\pi}+\frac{\pi}{16}(\operatorname{ch}\sqrt{3}t-\cos t)+3\left(\cos t-\frac{t\sin t}{\pi}\right)\cos 2x+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi\left((4k^2-3)-1\right)k^2}\left(\cos t-\cos t\sqrt{4k^2-3}\right)\cos 2kx$$

П р и м е ч а н и е. Решение искалось в виде формального ряда, вопрос о почленном дифференцировании которого оставался открытым. Теперь, когда получен конкретный ряд, можно выяснить, является ли он дважды почленно дифференцируемым, а значит, классическим решением, или не является, а значит, будет обобщённым решением.

Как видно в нашем случае, решение является классическим, т. к. ряд можно почленно дифференцировать два раза.

Пример 13.

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, t>0, 0<x<l\\ u|_{t=0}=u_0(x), 0\leqslant x\leqslant l\\ (u_x-hu)|_{x=0}=0,\ (u_x+hu)|_{x=l}=0, t\geqslant 0, h>0.\end{cases}$$

Пример отличается от предыдущего тем, что в краевых условиях оба коэффициента отличны от 0 , а потому собственные значения явно не определяются, а задаются трансцендентным уравнением, а ортогональность собственных функций не так очевидна - приходится обратиться к теории.

II. Так как в задаче уравнение и краевые условия - однородные, то можно приступать сразу ко второму пункту ищем решение уравнения в виде $T(t)X(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$
$$T(t)X'(0) - hT(t)X(0) = 0X'(0) - hX(0) = 0,$$
$$T(t)X'(l) + hT(t)X(l) = 0X'(l) + hX(l) = 0, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2.$$

Решаем классическую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\lambda = 0, \quad X = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} A - hB = 0, \\ A + h(Al + B) = 0 \end{cases} X(x) \equiv 0,$$
$$\lambda^2 > 0, \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} B\lambda - hA = 0, \\ -A\lambda\sin\lambda l + B\lambda\cos\lambda l + Ah\cos\lambda l + Bh\sin\lambda l = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} B\lambda - hA = 0, \\ (B\lambda + Ah)\cos\lambda l + (Bh - A\lambda)\sin\lambda l = 0 \\ \operatorname{ctg}\lambda l = \dfrac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}. \end{cases}$$

Обозначим, для удобства, $\lambda_n l = \mu_n \lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$, тогда μ_n - положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\mu_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{hl} - \frac{hl}{\mu_n}\right)$, $n \in \in \mathbb{N}$ (т. к. левая и правая части уравнения нечётные функции), и $X_n(x) = \mu_n \cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l} \Rightarrow T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}$.

В задаче собственные числа удовлетворяют довольно сложному уравнению. Поэтому воспользуемся следующими из теории свойствами собственных значений (их счётное множество) и собственных функций (система ортогональна и полна) задачи Штурма-Лиувилля. Поэтому

$$u_0(x) = \sum_1^\infty a_n \left(\mu_n \cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)$$
$$a_k = \frac{\int_0^l u_0(x)\left(\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + hl\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx}{\int_0^l \left(\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + hl\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)^2 dx} =$$
$$= \frac{\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\left(\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + hl\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx}{\left((\mu_k)^2 + (hl)^2 + 2hl\right)}.$$

Подставим ряд в начальные условия:

$$\sum_1^\infty C_n\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) =$$
$$= u_0(x) = \sum_1^\infty a_n\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l} + hl\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) C_n = a_n.$$

Решаем задачи Коши: $T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}, T_n(0) = a_n \Rightarrow \Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t} \Rightarrow$

Ответ. $\sum_1^\infty \frac{\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\left(\mu_k \cos\frac{\mu_k x}{l} + hl \sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx}{\left((\mu_k)^2 + (hl)^2 + 2hl\right)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}\left(\mu_n \cos\frac{\mu_n x}{l} + hl \sin\frac{\mu_n x}{l}\right)$.

4.4.4 Что делать, если оператор $-L_1^*$ не является оператором Штурма-Лиувилля?

Если $-L_1^*$ не является оператором Штурма-Лиувилля, то умножением обеих частей уравнения на некоторую функцию $g(x), g(x) > 0$ всегда можно привести левую часть уравнения к виду

$$LX(x) : \begin{cases} g(x)L_1^* X(x) \equiv LX(x) = \lambda^2 g(x)X(x) \\ c_1 X(a) + d_1 X'(a) = 0 \\ c_2 X(b) + d_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что при этом решение задачи останется прежним (потому что всё было однородным). Но! Изменилась правая часть уравнения. Что это даёт? Оказывается, изменились свойства собственных функций. Собственных значений по-прежнему счётное множество, система собственных функций остаётся полной, но теперь они не просто ортогональны, а ортогональны уже «с весом» $g(x)$, т. е. $\int_a^b g(x)X_k(x)X_n(x)dx = 0, k \neq n$.

Пример 14.

$$\begin{cases} u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x + f(x,t), t > 0, 0 < x < \pi; \\ u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = x, 0 < x < \pi \\ u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = \pi t, t > 0 \end{cases}$$

В этом примере оператор в уравнении на собственные функции не является оператором Штурма-Лиувилля!

Решаем задачу по пунктам.

• I. Подбираем функцию, удовлетворяющую краевым условиям: $w_0 = xt$. Делаем сдвиг: $v = u - xtu = v + xt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} - 7v_t = v_{xx} + 2v_x + f(x,t), t > 0, 0 < x < \pi \\ v|_{t=0} = 0,\, v_t|_{t=0} = 0, 0 < x < \pi \\ v|_{x=0} = 0,\, v|_{x=\pi} = 0, t > 0 \end{cases}$$

II. Найдём собственные функции задачи. Делим, как всегда, переменные в соответствующем однородном уравнении:

$T''(t)X(x) - 7T'(t)X(x) = X''(x)T + 2T(t)X'(x)$

$$\frac{T''(t) - 7T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \text{ const},$$
$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0X(0) = X(\pi) = 0.$$

Получилась задача Штурма-Лиувилля с незнакомым оператором, поэтому решаем задачу

$$\begin{cases} -X''(x) - 2X'(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

для всех λ.

$\lambda = 0 : X_0''(x) + 2X_0'(x) = 0$

$X_0(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 e^{-2\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0(x) = 0,$

$\lambda = -\mu^2 < 0 : X_\mu''(x) + 2X_\mu'(x) - \mu^2 X_\mu(x) = 0$

$X_\mu(x) = e^{-x}\left(A_\mu e^{x\sqrt{1+\mu^2}} + B_\mu e^{-x\sqrt{1+\mu^2}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} A_\mu + B_\mu = 0, \\ A_\mu e^{\pi\sqrt{1+\mu^2}} + B_\mu e^{-\pi\sqrt{1+\mu^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_\mu(x) = 0,$

$\lambda = \mu^2 > 0 : X_\mu''(x) + 2X_\mu'(x) + \mu^2 X_\mu(x) = 0 \Rightarrow X_\mu(x) = e^{\nu x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu = -1 \pm \sqrt{1-\mu^2} \Rightarrow$

1) $1 - \mu^2 > 0 : X_\mu(x) = e^{-x}\left(A_\mu e^{x\sqrt{1-\mu^2}} + B_\mu e^{-x\sqrt{1-\mu^2}}\right)$

$X_\mu(x) = 0.$

$= e^{-x}\left(A_\mu \sin\left(x\sqrt{\mu^2-1}\right) + B_\mu \cos\left(x\sqrt{\mu^2-1}\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} X_\mu(0) = 0 B_\mu = 0, \\ X_\mu(\pi) = 0 A_\mu \sin\left(\pi\sqrt{\mu^2-1}\right) = 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \pi\sqrt{\mu^2-1} = \pi k \mu_k^2 = 1 + k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Итак, $X_k(x) = e^{-x}\sin kx$. Для нас это незнакомая система. Каковы её свойства?

Вот здесь уже придётся свести нашу задачу к классической задаче Штурма-Лиувилля, у которой свойства известны.

Умножим обе части уравнения на $g(x) = e^{2x}$: $-e^{2x}X''(x) - 2e^{2x}X'(x) = \lambda e^{2x}X(x)$

$$-\left(e^{2x}X'(x)\right)' = \lambda e^{2x}X(x).$$

Слева стоит оператор Штурма-Лиувилля, справа появился множитель $g(x) = e^{2x}$, а это означает, что система собственных функций этой задачи ортогональна «с весом» e^{2x}, т. е. $\int_0^\pi e^{2x}X_m(x)X_n(x)dx = 0, n \neq m$, или в нашем случае, $\int_0^\pi e^{2x}\left(e^{-x}\sin kx\right)\left(e^{-x}\sin mx\right)dx = \int_0^\pi \sin kx \sin mx dx = \frac{\pi}{2}\delta_{km}$, и полна в $L_2[0;\pi]$.

III. Дальше задачу решать можно по обычной схеме, разложив свободный член в ряд Фурье:

$f(x,t) = \sum_1^\infty a_k(t)e^{-x}\sin kx \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n(t) = \frac{\int_0^\pi e^{2x}f(x,t)e^{-x}\sin nx dx}{\int_0^\pi e^{2x}(e^{-x}\sin nx)^2 dx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x,t)e^x \sin nx dx.$

Пример 15. Решить пример 14, если $f(x,t) \equiv e^{-x}\sin 3x$.

$$\begin{cases} v_{tt} - 7v_t = v_{xx} + 2v_x - e^{-x}\sin 3x, t > 0, 0 < x < \pi \\ v|_{t=0} = 0,\ v_t|_{t=0} = 0, 0 < x < \pi \\ v|_{x=0} = 0,\ v|_{x=\pi} = 0, t > 0 \end{cases}$$

• Так как $e^{-x}\sin 3x$ - собственная функция, то решение задачи можно искать в виде

$$v = f(t)e^{-x}\sin 3x, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

Краевые условия выполнены - осталось удовлетворить уравнению и начальным условиям.

Подставим в уравнение:

$$f''(t)e^{-x}\sin 3x - 7f'(t)e^{-x}\sin 3x =$$
$$= f(t)\left(-6e^{-x}\cos 3x - 8e^{-x}\sin 3x\right) +$$
$$+2\left(-e^{-x}\sin 3x + 3e^{-x}\cos 3x\right) f(t) - e^{-x}\sin 3x$$
$$f''(t) - 7f'(t) + 10f(t) = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{2t} - \frac{1}{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(t,x) = \left(\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{5t} - \frac{1}{10}\right) e^{-x}\sin 3x$$

Ответ. $v(x,t) = \left(\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{5t} - \frac{1}{10}\right) e^{-x}\sin 3x$.

4.5 Метод Фурье на круге. Функции Бесселя

В этом параграфе собственные функции задач - это собственные функции оператора Лапласа в круге при условии, что $u|_{r=r_0} = 0$. Они имеют вид

$\nu_{nk} = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$,

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где в свою очередь $A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

$J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -\left(rR_n(r)\right)' + \frac{n^2}{r}R_n(r) = \lambda^2 rR_n(r), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2, \\ R_n\left(r_0\right) = 0, \quad |R_n(0)| < \infty, \end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$ - положительные корни уравнения Бесселя порядка n: $J_n\left(\mu_k\right) = 0, k \in \mathbb{N}$.

Так как справа в уравнении Штурма-Лиувилля стоит не $\lambda^2 R_n(r)$, а $\lambda^2 rR_n(r)$, то собственные функции, соответствующие разным k (при фиксированном n), не просто ортогональны, а ортогональны с весом $r : \int_0^{r_0} rR_n^kR_n^n dr = 0, k \neq m$.

Решение задач можно искать в виде

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t)v_{nk}(r, \varphi)$$

Собственные функции задач удовлетворяют уравнению $\Delta v_{nk} = -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2 v_{nk}$.

Сформулируем задачу о колебании круглой мембраны, закреплённой по краю.

Задача 11*.

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2\Delta u + f(t,x,y), \sqrt{x^2+y^2} < r_0, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x,y), u_t|_{t=0} = u_1(x,y), \sqrt{x^2+y^2} \leqslant r_0 \\ u|_{\sqrt{x^2+y^2}=r_0} = 0 \end{cases}$$

Так как задача поставлена в круге, перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Так как точка (r,φ) и $(r,\varphi+2\pi k)$ - одна и та же точка нашей мембраны, то решение должно удовлетворять условию $u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi+2\pi)$. Как известно, такая замена переменных даже локально не всюду является взаимно однозначной - якобиан в точке $r=0$ равен 0.

Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

уравнение имеет особенность в точке $r=0$. Поэтому можно ожидать некоторых особенностей решения задачи в этой точке.

В примере 9 мы уже столкнулись с тем, что переход от декартовых координат к криволинейным (сферическим) изменил задачу — перевел задачу Коши в $\mathbb{R}^3$ в одномерную задачу о колебании полубесконечной струны.

Итак, сделаем замену переменных.

Задача 11.**

$$\begin{cases} u_{tt} + bu_t + cu = a^2\Delta u + f(t,r,\varphi) \\ \quad r < r_0, t > 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi+2\pi), \\ u|_{t=0} = u_0(r,\varphi),\, u_t|_{t=0} = u_1(r,\varphi), r \leqslant r_0 \\ u|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

• I. Первый пункт схемы решения по методу Фурье выполнен - краевые условия однородные. Приступаем сразу ко второму.

II. Делим переменные в соответствующем однородном уравнении и однородных краевых условиях.

Отделим пространственные переменные от времени:

$$\begin{aligned} &u(r,\varphi,t) = T(t)v(r,\varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T''(t)v(r,\varphi) + bT'(t)v(r,\varphi) + cT(t)v(r,\varphi) = a^2T(t)\Delta v(r,\varphi) \Leftrightarrow \\ &\frac{T''(t)}{a^2T(t)} + b\frac{T'(t)}{a^2T(t)} + \frac{c}{a^2} = \frac{\Delta v(r,\varphi)}{v(r,\varphi)} = \text{ const } = \mu, \\ &u|_{r=r_0} = 0T(t)v\left(r_0,\varphi\right) = 0v\left(r_0,\varphi\right) = 0, \\ &T(t)v(r,\varphi+2\pi) = T(t)v(r,\varphi)v(r,\varphi+2\pi) = v(r,\varphi). \end{aligned}$$

Для уравнения $\Delta v(r,\varphi) = \mu v(r,\varphi)$ получилась краевая задача Штурма-Лиувилля.

Здесь мы должны поверить, что задача

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v, x \in D \\ v|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

имеет положительные собственные значения $\mu = \lambda^2 > 0$.

Продолжим деление переменных

$$v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

т. к. уравнение и краевые условия по-прежнему однородны.

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{R(r)}\left(R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2}\Phi''(\varphi)=-\lambda^2 \\
\frac{1}{R(r)}\left(r^2R''(r)+rR'(r)\right)+\lambda^2r^2=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\nu, \\
R\left(r_0\right)\Phi(\varphi)=0R\left(r_0\right)=0, \\
R(r)\Phi(\varphi)=R(r)\Phi(\varphi+2\pi)\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).
\end{gathered}
$$

Получились две задачи Штурма-Лиувилля.

Первая задача, $\begin{cases} -\Phi''(\varphi)=\nu\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi), \end{cases}$ с незнакомым нам краевым условием периодичности решения, и вторая, для $R(r)$, более сложная и незнакомая:

$$
\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\lambda^2r^2-\nu\right)R(r)=0, r<r_0, \\ R\left(r_0\right)=0. \end{cases}
$$

Первую систему легко решить:

$$
\begin{gathered}
\nu=0:\Phi(\varphi)=C_1\varphi+C_2\Rightarrow\Phi_0(\varphi)=1, \\
\nu>0\nu=\mu^2>0:\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)
\end{gathered}
$$

$A\cos\mu\varphi+B\sin\mu\varphi=A\cos\mu(\varphi+2\pi)+B\sin\mu(\varphi+2\pi)$

$$
\begin{gathered}
(-A\sin\mu(\varphi+\pi)+B\cos\mu(\varphi+\pi))\sin\mu\pi=0\Rightarrow\mu=n, \\
n=\pm1,\pm2,\ldots \\
\nu<0\nu=-\mu^2<0:\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)
\end{gathered}
$$

$A\operatorname{ch}\mu\varphi+B\operatorname{sh}\mu\varphi=A\operatorname{ch}\mu(\varphi+2\pi)+B\operatorname{sh}\mu(\varphi+2\pi)\varnothing.$

Отсюда следует, что собственные значения $\nu=n^2$ неотрицательны, причём $n=0$ соответствует одна собственная функция $\Phi_0(\varphi)=1$, а любому $n\geqslant1$ соответствуют две собственные функции: $\cos n\varphi,\sin n\varphi,\mu=n,n\in\mathbb{N}$. Иногда пишут так:

$$
\begin{cases} \Phi_n(\varphi)=\cos n\varphi, n=0,1,2,\ldots \\ \Phi_m(\varphi)=\sin|m|\varphi, m=-1,-2,\ldots \end{cases}
$$

Итак,

$$
\begin{gathered}
\begin{cases} -\Phi''(\varphi)=n^2\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\Phi_0(\varphi)=1,\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\mu=n,n\in\mathbb{N}
\end{gathered}
$$

$\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\},\quad n\in\mathbb{N}.$

Теперь займёмся второй задачей. Перепишем её подругому:

$$
\begin{cases} -r^2R_n''(r)-rR_n'(r)+n^2R_n(r)=\lambda^2r^2R_n(r), r<r_0, \\ R_n\left(r_0\right)=0. \end{cases}
$$

Получились краевые задачи для $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и неизвестных λ.

Стоящий слева оператор не является оператором ШтурмаЛиувилля. Сделаем его таковым, разделив обе части на r:

$-rR_n''(r)-R_n'(r)+n^2\frac{R_n(r)}{r}=\lambda^2rR_n(r)$

$$
-\left(rR_n'(r)\right)'+\frac{n^2}{r}R_n(r)=\lambda^2rR_n(r)
$$

Это новая для нас задача Штурма-Лиувилля (производные «свернулись» в одночлен) на собственные функции, но только с одним однородным краевым условием $R_n(r_0) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(rR_n'(r)\right)' + \frac{n^2}{r}R_n(r) = \lambda^2 rR_n(r), \quad r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0. \end{array} \right.$$

Однако заметим, что оператор Штурма-Лиувилля не является классическим - условие $p(r) \geqslant p_0 > 0$ не выполнено, потому что $p(r) = 0$ при $r = 0$.

Отступление*. Рассмотрим однородное уравнение Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

• В классическом случае $p(x) \geqslant p_0 > 0, q(x) \geqslant 0, p(x) \in \in C^1[a;b], q(x) \in C[a;b]$. Но не всегда это выполнено - бывает, что $p(x) = 0$ в одном или обоих концах отрезка.

Как это влияет на решения?

Выпишем вронскиан фундаментальной системы решений:

$$\left| \begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{array} \right| = Ce^{-\int \frac{p'(x)}{p(x)}} = Ce^{-\ln|p(x)|} = \frac{C*}{p(x)}.$$

Отсюда следует, что если $p(x)$ в какой-нибудь точке обращается в 0 , то не существует двух линейно-независимых решений $y(x) \in C^1[a;b]$.

Поэтому задача, если имеет, то только одно решение, ограниченное вместе с производной в окрестности точки, в которой $p(x) = 0$.

Нас интересует решение уравнения 2 -го порядка на отрезке $[0;r_0]$ - оно, по крайней мере, ограничено вместе с производной.

Для наших задач достаточно вынести условие ограниченности при $r = 0$ в условие исходной задачи 11**, и оно является второй частью однородного условия на границе при на- хождении собственных функций задачи. Окончательно задача примет следующий вид.

Задача 10.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + bu_t + cu = a^2\Delta u + f(t,r,\varphi), r < r_0, t > 0 \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi + 2\pi), \\ u|_{t=0} = u_0(r,\varphi),\, u_t|_{t=0} = u_1(r,\varphi), r \leqslant r_0, \\ u|_{r=r_0} = 0,\, |u||_{r=0} < \infty \end{array} \right.$$

Наша задача Штурма-Лиувилля теперь имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(rR_n'(r)\right)' + \frac{n^2}{r}R_n(r) = \lambda^2 rR_n(r), r < r_0, \\ R_n(r_0) = 0, |R_n(0)| < \infty. \end{array} \right.$$

Итак, свойства $R_n(r)$ при фиксированном n и различных λ стали понятны: $R_n^{\lambda_m}(r)$ и $R_n^{\lambda_k}(r)$ ортогональны с «весом r: $\int_0^{r_0} rR_n^{\lambda_k}R_n^{\lambda_m}dr = 0, \lambda_k \neq \lambda_m$ и представляют полную в $L_2[0;r_0]$ систему.

Осталось решить эту задачу.

Сделаем замену переменных (у нас $\lambda^2 > 0$): $\lambda r = x \Rightarrow \frac{d}{dr} = \lambda\frac{d}{dx}, R_n(r) = \tilde{R}_n(x)$ и перепишем уравнение по-другому. Тогда уравнение примет вид уравнения Бесселя порядка n:

$$x^2\tilde{R}_n''(x) + x\tilde{R}_n'(x) + \left(x^2 - n^2\right)\tilde{R}_n(x) = 0.$$

Так как $p(0) = 0$, то, в силу отступления*, может существовать только одно ограниченное вместе с производной в окрестности 0 решение. Такое решение существует, и оно называется функцией Бесселя порядка n:

$$R_n(r) = \tilde{R}_n(\lambda r) = J_n(\lambda r).$$

Подставим краевое условие:

$$R_n\left(r_0\right) = \tilde{R}_n\left(\lambda r_0\right) = 0 J_n\left(\lambda r_0\right) = 0$$
$$\lambda r_0 = \mu_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}, \quad k = 1, 2, \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_n^k(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь $\mu_k^{(n)}$ - положительный корень функции Бесселя $J_n(x) : J_n\left(\mu_k^{(n)}\right) = 0, \mu_k^{(n)} > 0, k \in \mathbb{N}$.

При этом при любом фиксированном n система собственных функций $J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)$ полна в $L_2\left[0; r_0\right]$ и ортогональна с «весом» $r : \int_0^{r_0} r J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) J_n\left(\frac{\mu_l^{(n)}}{r_0} r\right) dr = 0, k \neq l$.

Отсюда следует: для решения всей задачи необходимо запомнить, что

$$\begin{aligned}
&\Delta v_{nk} = -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2 v_{nk} = \\
&= \Delta\left(I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\right) = \\
&= -\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2\left(I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\right), \\
&n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

III. Находим решение задачи в виде ряда по всем собственным функциям с коэффициентами, зависящими от t:

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi)$$

Если уравнение неоднородное, то при фиксированном t разлагаем $f(t, r, \varphi)$ в ряд Фурье по системе собственных функций $f(t, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t) v_{nk}(r, \varphi)$. То же придётся сделать и с начальными условиями:

$$u_0(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{nk} v_{nk}(r, \varphi), \quad u_1(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{nk} v_{nk}(r, \varphi)$$

Это можно сделать последовательно.

Сначала можно разложить при фиксированных значениях t и r функцию $f(t, r, \varphi)$ в знакомый ряд по тригонометрической системе:

$$f(t,r,\varphi)=\sum_{0=0}^{\infty}a_n(t,r)\cos n\varphi+\sum_{1}^{\infty}b_n(t,r)\sin n\varphi$$

а затем каждый коэффициент по системе функций Бесселя.

Например,

$$a_n(t,r)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}(t)I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)c_{nk}(t)\frac{\int_0^{r_0}ra_n(t,r)I_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)dr}{\int_0^{r_0}rI_n^2\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)dr}.$$

К сожалению, кроме написания формул, мы ничего вычислить не можем - так их и оставляем.

Подставляем полученные ряды в уравнение и начальные условия:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T''_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi)+b\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T'_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi)+\\ +c\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi)=\\ =-a^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_{nk}(t)\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2v_{nk}(r,\varphi)+\\ +\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi),\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_{nk}(0)v_{nk}(r,\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_{nk}v_{nk}(r,\varphi)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}T'_{nk}(0)v_{nk}(r,\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_{nk}v_{nk}(r,\varphi).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}T''_{nk}(t)+bT'_{nk}(t)+cT_{nk}(t)=-a^2\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2T_{nk}(t)+f_{nk}(t),\\ T_{nk}(0)=g_{nk},\quad T'_{nk}(0)=h_{nk}.\end{cases}$$

Получили задачи Коши для уравнений относительно $T_{nk}(t)$, которые имеют единственные решения.

Выкладки здесь громоздкие - поэтому в наших задачах чаще всего попадаются такие свободные члены и начальные условия, где можно ограничиться одномерными рядами по функциям Бесселя.

Пример 16.

$$\begin{cases}u_t=5\Delta u-3u+J_3\left(\frac{1}{4}\mu_2^{(3)}r\right)\cos 3\varphi+f(r)\sin 2\varphi\\ u|_{t=0}=f(r)\cos 3\varphi,\quad r<4,t>0,u=u(r,\varphi,t),\\ u(t,r,\varphi)=u(t,r,\varphi+2\pi),\\ u|_{r=4}=0,|u(0)|<\infty,\end{cases}$$

где $f(r)$ - гладкая на $[0;4]$ функция, $\mu_2^{(3)}$ - положительный нуль функции Бесселя $J_3,\Delta u=u_{xx}+u_{yy},x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$.

• Так как в уравнение и начальные условия входят только $\sin 2\varphi, \cos 3\varphi$, то решение задачи можно сразу искать в виде суммы двух рядов $u(t,r,\varphi) = \sum_1^\infty T_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4} r\right)\cos 3\varphi + \sum_1^\infty Q_k(t) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4} r\right)\sin 2\varphi$, а можно отдельно решить две задачи.

Пример 16*.

$$\begin{cases} u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4} r\right)\cos 3\varphi, \\ \quad r < 4, t > 0, u = u(t,r,\varphi), \\ u\big|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi + 2\pi), \\ u\big|_{r=4} = 0, |u(0)| < \infty \end{cases}$$

Пример 16**.

$$\begin{cases} u_t = 5\Delta u - 3u + f(r)\sin 2\varphi, r < 4, t > 0, u = u(t,r,\varphi), \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u(t,r,\varphi) = u(t,r,\varphi + 2\pi), \\ u\big|_{r=4} = 0, |u(0)| < \infty. \end{cases}$$

Решение первой задачи - Пример 16*.

Ищем решение в виде $u(t,r,\varphi) = \sum_1^\infty T_k(t) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4} r\right)\cos 3\varphi$. Подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при линейно-независимых множителях:

$$\begin{cases} T_k'(t) = -T_k(t)\left(5\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right), k \neq 2, \\ T_2'(t) = -T_2(t)\left(5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right) + 1. \end{cases}$$

Теперь подставляем $t = 0 : T_k(0) = a_k$, где

$$f(r) = \sum_{k=1}^\infty a_k J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4} r\right) \Rightarrow a_k = \frac{\int_0^4 r f(r) J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4} r\right) dr}{\int_0^4 r J_3^2\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4} r\right) dr}$$

Решаем задачи Коши:

$$T_k(t) = a_k e^{-\left(5\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right)t}, k \neq 2$$

$$T_2(t) = \frac{1}{5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2 + 3}\left(1 - e^{-\left(5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right)t}\right) + a_2 e^{-\left(5\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{4}\right)^2 + 3\right)t}$$

Решение второй задачи - Пример 16**.

Разложим свободный член в ряд Фурье:

$$f(r) = \sum_1^\infty b_k J_2\left(\frac{1}{4}\mu_k^{(2)} r\right), \text{ где } b_k = \frac{\int_0^4 r f(r) J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4} r\right) dr}{\int_0^4 r J_2^2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4} r\right) dr}$$

Получим решение задачи в виде ряда

$$u(t,r,\varphi)=\sum_{1}^{\infty}Q_k(t)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right)\sin 2\varphi$$

После подстановки в уравнение и начальное условие получим

$$Q_k'(t)=-\,Q_k(t)\left(5\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2+3\right)+b_k,\quad Q_k(0)=0$$

$$Q_k(t)=\frac{b_k}{\left(5\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2+3\right)}\left(1-e^{-\left(5\frac{\mu_k^{(2)}}{4}\right)^2+3\Big)t}\right).$$

Ответ. $u(r,\varphi,t)=\sum_1^\infty T_k(t)J_3\left(\frac{\mu_k^{(3)}}{4}r\right)\cos 3\varphi+\sum_1^\infty Q_k(t)J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{4}r\right)\sin 2\varphi$, где все входящие сюда выражения определены выше.

4.6 Эллиптические уравнения

В отличие от смешанных задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, для эллиптических уравнений ставится только краевая задача:

$$\begin{cases}\Delta u=f(x),x\in D,\\ \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x\in\partial D}=u_0(x),\end{cases}$$

где n - внешняя нормаль к границе области D.

При этом, если $\beta=0$, задача называется задачей Дирихле, если $\alpha=0$, задача называется задачей Неймана, если $\alpha\beta\neq 0$, задача называется смешанной задачей.

Задачи будут решаться в полярных или сферических координатах. Заданные краевые условия произвольные, неоднородные. Однородные краевые условия для нахождения собственных функций возникают из-за того, что области имеют специальный вид, а потому решение должно иметь период 2π, а в случае $\mathbb{R}^3$ прибавляются условия $\theta=0,\theta=\pi$ (уравнение Лапласа в новых координатах при этом имеет особенность).

4.6.1 Уравнение Лапласа в $\mathbb{R}^2$

Задачи будем решать внутри круга, вне круга или внутри кольца. В отличие от задач гиперболического и параболического типа, рассмотренных в предыдущем параграфе, краевые условия неоднородные.

Решение будем искать в полярных координатах.

А тогда, как и в предыдущих задачах на круглой мембране, опять необходимо, чтобы $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$.

Будем решать следующие задачи.

Задача 11. $\begin{cases}\Delta u=f(r,\varphi),r<R_0\\ (\alpha u+\beta u_r)|_{r=R_0}=u_0(\varphi),\\ u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi).\end{cases}$

Задача 12. $\begin{cases}\Delta u=f(r,\varphi),R_1<r<R_2,\\ (\alpha_1 u+\beta_1 u_r)|_{r=R_1}=u_0(\varphi),\\ (\alpha_2 u+\beta_2 u_r)|_{r=R_1}=u_1(\varphi),\\ u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi).\end{cases}$

Задача 13. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi), r > R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi), \\ u(r,\varphi+2\pi) = u(r,\varphi). \end{cases}$

I. При решении неоднородного уравнения Пуассона прежде всего находим частное решение $w_0(r,\varphi), w_0(r,\varphi+2\pi) = w_0(r,\varphi)$, затем делаем сдвиг $v = u - w_0(r,\varphi)$, сводя уравнение Пуассона к уравнению Лапласа. При этом могут измениться неоднородные краевые условия. Например, в задаче 11:

$$v = u - w_0 u = v + w_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, r < R_0; \\ (\alpha v + \beta v_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi) - (\alpha w_0 + \beta w_{0r})|_{r=R_0} = v_0(\varphi), \\ v(r,\varphi+2\pi) = v(r,\varphi). \end{cases}$$

II. Теперь уравнение однородное, остальные условия, кроме краевого, тоже однородные - приступаем ко второму пункту метода Фурье - можем делить переменные.

Будем искать решение уравнения $\Delta v \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ в виде $u = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставим в уравнение и однородное условие

$$\Phi(\varphi) r \left(rR'(r)\right)' + R(r)\Phi''(\varphi) = 0$$
$$\frac{r\left(rR'(r)\right)'}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \text{ const } = \mu^2,$$
$$R(r)\Phi(\varphi + 2\pi k) = R(r)\Phi(\varphi)\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Мы сразу написали, что const $= \mu^2$, т. к. $-\Phi''(\varphi)$ - одномерный оператор Штурма-Лиувилля. Получилась знакомая задача (см. с. 47):

$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$

$\Phi_0(\varphi) = 1, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$

С $\Phi(\varphi)$ определились. Так как мы делили переменные в «родном» уравнении, а не в соответствующем, то решим уравнение и для R:

$$\frac{r\left(rR'(r)\right)'}{R(r)} = n^2 r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ (т. к. это уравнение Эйлера) } \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad R_n(r) = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует, что мы получили решения уравнения Лапласа в виде

$$v_0(r,\varphi) = R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad n = 0,$$
$$v_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right),$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

III. Теперь, в зависимости от того, какую из трёх задач решаем, будем искать решение в виде формального ряда, удовлетворяющего соответствующим условиям при $r = 0$ или $r = \infty$.

• Если задача внутри круга, то

$$u(r,\varphi) = C_0 + \sum_{1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

2 • Если задача вне круга, то

$$u(r,\varphi)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)+C_0$$

3 • Если задача в кольце, то

$$u(r,\varphi)=C_0+D_0\ln r+\sum_{1}^{\infty}\left(C_nr^n\ +\frac{D_n}{r^n}\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{1}^{\infty}\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^n}\right)\sin n\varphi$$

4.6.2 Как найти частное решение, если свободный член $f(r,\varphi)=ar^n\cos m\varphi$ или $f(r,\varphi)=ar^n\sin m\varphi$, $(n+2)^2\neq m^2$?

• В этом случае решение можно искать в виде $u_{\text{частн}}\ =br^{n+2}\cos m\varphi$, т. е. увеличив степень r на 2. Подставляем в уравнение $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=ar^n\cos m\varphi$:

$$b(n+2)(n+1)r^n\cos m\varphi{+}b(n+2)r^n\cos m\varphi-bm^2r^n\cos m\varphi=$$
$$=ar^n\cos m\varphi b=\frac{a}{(n+2)^2-m^2}.$$

Видно, что так можно делать, если $(n+2)^2\neq m^2$.

4.6.3 Как найти частное решение, если свободный член $f(r,\varphi)=ar^n\cos m\varphi$ или $f(r,\varphi)=ar^n\sin m\varphi$, $(n+2)^2=m^2$?

• В этом случае $r^{n+2}\cos(n+2)\varphi$ является решением уравнения Лапласа. Решение ищется в виде $u_{\text{частн}}\ =\varphi(r)\cos m\varphi$ (см. пример 18).

Пример 17. $\begin{cases}\Delta u=y^2, r<2,\\ u|_{r=2}=\sin\varphi+\frac{4}{3}\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos 2\varphi.\end{cases}$

• Ищем частное решение в виде

$$u_{\text{частн}}\ =ar^4+br^4\cos 2\varphi\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12ar^2+4ar^2+12br^2\cos 2\varphi+4br^2\cos 2\varphi-4br^4\cos 2\varphi=$$
$$=\frac{r^2}{2}-\frac{r^2\cos 2\varphi}{2}\Rightarrow u_{\text{частн}}\ =\frac{r^4}{32}-\frac{r^4}{24}\cos 2\varphi$$

Делаем сдвиг:

$v=u-\frac{r^4}{32}+\frac{r^4}{24}\cos 2\varphi\Rightarrow\begin{cases}\Delta v=0, r<2,\\ v|_{r=2}=-\frac{1}{2}+\sin\varphi+\frac{4}{3}\cos\varphi.\end{cases}$

Так как это задача Дирихле на круге, то решение находится «устно»:

$$v=-\frac{1}{2}+\left(\frac{r}{2}\right)\sin\varphi+\frac{4}{3}\left(\frac{r}{2}\right)\cos\varphi$$

Ответ. $u=\frac{r^4}{32}-\frac{r^4}{24}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}+\frac{r}{2}\sin\varphi+\frac{2r}{3}\cos\varphi.$

Пример 18. $\begin{cases}\Delta u=\frac{\cos 3\varphi}{r^5}, r>2,\\ u|_{r=2}=\sin 2\varphi+\cos\varphi.\end{cases}$

• В этом примере, если увеличить степень на 2 , то $\frac{\cos 3\varphi}{r^3}$ является решением уравнения Лапласа. Поэтому частное решение надо искать в общем виде:

$$u_{\text{частн}} = f(r)\cos 3\varphi \Rightarrow r^2 f''(r) + rf'(r) - 9f(r) = r^{-3},$$
$$f_{\text{однор}}(r) = Ar^3 + \frac{B}{r^3}.$$

Видно, что имеет место резонанс:

$$\begin{aligned} &f_{\text{частн}} = br^{-3}\ln r \Rightarrow \\ &\Rightarrow 12br^{-3}\ln r - 7br^{-3} - 3br^{-3}\ln r + br^{-3} - 9br^{-3}\ln r = r^{-3} \\ &b = -\frac{1}{6} \Rightarrow f_{\text{частн}} = -\frac{\ln r}{6r^3}. \end{aligned}$$

В качестве частного решения можно взять $-\frac{\ln r}{6r^3}\cos 3\varphi$.
Делаем сдвиг:

$$v = u + \frac{\ln r}{6r^3}\cos 3\varphi u = v - \frac{\ln r}{6r^3}\cos 3\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, r > 2, \\ v|_{r=2} = \sin 2\varphi + \cos\varphi + \frac{\ln 2}{48}\cos 3\varphi. \end{cases}$$

Полученная задача Дирихле решается устно:

$$v = \left(\frac{2}{r}\right)\cos\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^2 \sin 2\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^3 \frac{\ln 2}{48}\cos 3\varphi$$

Ответ. $u = \frac{2\cos\varphi}{r} + \frac{4\sin 2\varphi}{r^2} + \frac{(\ln 2 - \ln r)\cos 3\varphi}{6r^3}$.

Пример 19. $\begin{cases} \Delta u = 12\left(x^2 - y^2\right), 1 < r < 2, \\ u_r|_{r=1} = -6\cos 2\varphi + 16\sin 4\varphi, \\ u_r|_{r=2} = 28\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi. \end{cases}$

• Заметим, что $12\left(x^2 - y^2\right) = 12r^2\cos 2\varphi$. Поэтому ищем частное решение и делаем сдвиг:

$$u_{\text{частн}} = r^4\cos 2\varphi \Rightarrow v = u - r^4\cos 2\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v_r|_{r=1} = -10\cos 2\varphi + 16\sin 4\varphi \\ v_r|_{r=2} = -4\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi \end{cases}$$

Теперь ищем решение задачи:

$$v = \cos 2\varphi\left(ar^2 + \frac{b}{r^2}\right) + \sin 4\varphi\left(cr^4 + \frac{d}{r^4}\right) + C.$$

Подставляем в краевые условия:

$$\begin{cases} -10\cos 2\varphi + 16\sin 4\varphi = \\ \quad = \cos 2\varphi(2a - 2b) + \sin 4\varphi(4c - 4d) \\ -4\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi = \\ \quad = \cos 2\varphi\left(4a - \frac{2b}{8}\right) + \sin 4\varphi\left(32c - \frac{4d}{32}\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = -\frac{11}{15}, b = 4\frac{64}{15}, \\ c = 0, d = -4. \end{cases}$$

$+C$.
Ответ. $u(r,\varphi) = r^4\cos 2\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{15}\left(-11r^2 + \frac{64}{r^2}\right) - \frac{4}{r^4}\sin 4\varphi +$

П р и м е ч а н и е. Обратите внимание на то, что при решении задачи Неймана мы не определили число C. Это правильно, потому что решение задачи Неймана для уравнения Лапласа определено с точностью до произвольной постоянной.

4.7 Метод Фурье с применением сферических функций

4.7.1 7.1. Схема решения

Теперь будем решать краевые задачи для внутренности шара, внешности шара и шарового слоя.

Задача 14.

$$\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi,\theta), r < R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi,\theta), \\ u(r,\varphi+2\pi,\theta) = u(r,\varphi,\theta). \end{cases}$$

Задача 15. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi,\theta), r > R_0, \\ (\alpha u + \beta u_r)|_{r=R_0} = u_0(\varphi,\theta), \\ u(r,\varphi+2\pi,\theta) = u(r,\varphi,\theta). \end{cases}$

Задача 16. $\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi,\theta), R_1 < r < R_2, \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_r)|_{r=R_1} = u_0(\varphi,\theta), \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_r)|_{r=R_2} = u_1(\varphi,\theta), \\ u(r,\varphi+2\pi,\theta) = u(r,\varphi,\theta). \end{cases}$

I. Как всегда при решении уравнения Пуассона сначала находим частное решение и сводим с помощью сдвига к решению уравнения Лапласа.

II. Поэтому сразу начнём со второго пункта: будем решать уравнение Лапласа - ищем решение в виде $u(r,\varphi,\theta) = R(r)V(\varphi,\theta)$:

$$V(\varphi,\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) +$$
$$+\frac{R(r)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{R(r)}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2} = 0$$
$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) =$$
$$= -\frac{1}{V(\varphi,\theta)}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right) = \lambda.$$

Оператор $-\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$ называется оператором Бельтрами. Найдём собственные функции и собст- венные значения задачи

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right) = \lambda V(\varphi,\theta), \\ V(\varphi+2\pi,\theta) = V(\varphi,\theta). \end{cases}$$

Опять разделим переменные: $V(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)\Theta(\theta) \Rightarrow \Rightarrow -\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\left(\sin\theta\cdot\Theta'(\theta)\right)' - \lambda\sin^2\theta = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu^2.$

Появилась знакомая задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \mu^2 = k^2 \Rightarrow \Phi_0(\varphi) = 1, \Phi_k(\varphi) = A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi, k\in\mathbb{N},$$

и незнакомое уравнение

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + k^2\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta} = \lambda\Theta(\theta)$$

Сделаем замену переменных: $\xi = \cos\theta, \xi \in [-1;1]$. Уравнение примет вид уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)+\frac{k^2}{1-\xi^2}\Theta(\xi)=\lambda\Theta(\xi)$$

у которого, на первый взгляд, нет никаких краевых условий. Заметим, что при решении наших задач $\theta \in [0;\pi]$, т. е. есть $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, или в новых переменных $\xi = 1$ и $\xi = -1$. При этом в этих точках $p(\xi) = 0$. Это, в силу отступления на с. 48 означает, что может существовать не более одного решения, ограниченного вместе с производной на отрезке $[-1;1]$.

Условие ограниченности на отрезке $[-1;1]$ играет роль однородных краевых условий для задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)+\frac{k_0^2}{1-\xi^2}\Theta(\xi)=\lambda\Theta(\xi), \xi\in[-1;1] \\ |\Theta(\xi)|<\infty, \xi\in[-1;1] \end{cases}$$

Рассмотрим сначала задачу при $k = 0$:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)=\lambda\Theta(\xi) \\ |\Theta(\xi)|<\infty, \xi\in[-1;1] \end{cases}$$

Полученное уравнение называется уравнением Лежандра, который доказал, что ограниченное на отрезке $\xi \in [-1;1]$ решение существует, если $\lambda = n(n+1), n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и оно выражается формулой

$$\Theta_n(\xi)=P_n(\xi)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(\xi^2-1\right)^n, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

где $P_n(\xi)$ называется полиномом Лежандра (другого, линейно независимого с этим и ограниченного вместе с первой производной решения на отрезке нет). Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $[-1;1] : \int_{-1}^{1}\Theta_n(\xi)\Theta_m(\xi)d\xi = 0, n \neq m$, и представляют полную в $L_2[-1;1]$ систему.

Итак,

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)=n(n+1)\Theta(\xi), \\ |\Theta(\xi)|<\infty, \xi\in[-1;1], \end{cases}$$

$$\Theta_n(\xi)=P_n(\xi)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(\xi^2-1\right)^n, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Тогда решением задачи

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi}\right)+\frac{k_0^2}{1-\xi^2}\Theta(\xi)=n(n+1)\Theta(\xi), \\ |\Theta(\xi)|<\infty, \quad \xi\in[-1;1] \end{cases}$$

при каждом фиксированном значении k_0 являются так называемые присоединённые полиномы Лежандра:

$$\Theta_n^{k_0}(\theta)=P_n^{k_0}(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{\frac{k_0}{2}}\frac{d^{k_0}}{d\xi^k}P_n(\xi)$$
$$P_n^{k_0}(\xi)=\sin^{k_0}\theta\cdot P_n^{(k_0)}(\cos\theta), \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad k_0\leqslant n.$$

Система $\left\{P_n^{k_0}(\theta)\right\}, n \geqslant k_0, n = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$ ортогональна на отрезке $[-1;1]$: $\int_{-1}^{1} P_n^{k_0}(\xi) P_m^{k_0}(\xi) d\xi = 0, n \neq m$ (производные одного порядка у полиномов разных степеней) и является полной в $L_2[-1;1]$.

Видно, что каждому фиксированному n соответствует $2k+ +1$ собственных функций оператора Бельтрами:

$$Y_n^0(\varphi,\theta) = P_n^{(0)}(\cos\theta) \equiv P_n(\cos\theta)$$

$$Y_n^k(\varphi,\theta) = \left[\begin{array}{l} \sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi, k = 0,1,2,\dots,n \\ \sin^{|k|}\theta P_n^{(|k|)}(\cos\theta)\sin|k|\varphi, k = -1,-2,\dots,-n, \end{array}\right.$$

каждая из которых называется сферической функиией. Их алгебраическая сумма $\sum_{k=-n}^{n} a_{nk} Y_n^k(\varphi,$ тоже является сферической функцией. Она обозначается Y_n, называется сферической функцией порядка n, и, как собственная функция оператора Бельтрами, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right) = \\ &= n(n+1)Y_n(\varphi,\theta), \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ &Y_n(\varphi,\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_{nk} Y_n^k(\varphi,\theta) \end{aligned}$$

Заметим, что порядок функции определяется степенъю полинома Лежандра (независимо от порядка производной в присоединённом полиноме).

Система $\left\{Y_n^k(\varphi,\theta)\right\}$ ортогональна на поверхности единичной сферы и полна на ней в $L_2(S_1)$.

Так как деление переменных происходило в однородном уравнении, то придётся найти и $R(r)$:

$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) = \lambda = n(n+1)$

$\Leftrightarrow r^2R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0 \Rightarrow R_n(r) = C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}$.

Функция

$\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)\sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)\left(c_k\cos k\varphi + d_k\sin k\varphi\right), n \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ k \leqslant n$

удовлетворяет уравнению Лапласа и называется шаровой функцией.

III. Теперь ищем решение задачи в виде формальных рядов, где каждое слагаемое является решением уравнения Лапласа: а) внутри шара в виде ряда

$$u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n Y_n(\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=-n}^{n} a_{nk} Y_n^k(\varphi,\theta), \quad r < R$$

б) вне шара в виде

$$u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{r^{n+1}} Y_n(\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k=-n}^{n} a_{nk} Y_n^k(\varphi,\theta), r > R$$

и

в) внутри шарового слоя в виде

$$u(r,\varphi,\theta) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)\sum_{k=0}^{n}\sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)\left(C_k\cos k\varphi + D_k\sin k\varphi\right),$$
$$R_1 < r < R_2.$$

Осталось удовлетворить краевым условиям. Для этого придётся разложить их в ряды Фурье по сферическим функциям.

Пример 20. Задача Дирихле в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < r_0, \\ u|_{r=r_0} = u_0(\varphi,\theta) \\ u(r,\varphi+2\pi,\theta) = u(r,\varphi,\theta) \end{cases}$$

• Пусть краевое условие разложено в ряд по сферическим функциям: $u_0(\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n Y_n(\varphi,\theta)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r_0^n Y_n(\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n Y_n(\varphi,\theta)$$
$$\Leftrightarrow \alpha_n r_0^n = \beta_n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{\beta_n}{r_0^n} \Rightarrow u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^n Y_n(\varphi,\theta).$$

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^n Y_n(\varphi,\theta)$.

В явном виде мы ничего не получим, кроме формул (как и для функций Бесселя), так как при разложении по сферическим функциям приходится раскладывать по присоединённым полиномам.

В принципе это можно сделать так.

Сначала можно разложить, например, $u_0(\varphi,\theta)$ в ряд по обычной тригонометрической системе: $u_0(\varphi,\theta) = \frac{a_0(\theta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(\theta)\cos k\varphi + b_k(\theta)\sin k\varphi\right)$, а затем коэффициенты по системе присоединенных полиномов:

$$a_k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} c_{kn}P_n^k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} c_{kn}\sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)$$

где

$$c_{km} = \frac{\int_0^{\pi} a_k(\theta)\sin^k\theta P_m^{(k)}(\cos\theta)d\theta}{\int_0^{\pi}\left(\sin^k\theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\right)^2 d\theta}$$

Аналогично,

$$b_k(r,\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} d_{kn}P_n^k(\theta) = \sum_{n=k}^{\infty} d_{kn}P\sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)$$

Поэтому, чтобы избежать этой громоздкости, в наших задачах краевые условия являются конечными суммами сферических функций.

4.7.2 7.2. Как у конкретной сферической функции определить её порядок?

При решении задач часто по сферической функции, присутствующей в краевом условии, необходимо определить соответствующую шаровую. Как?

$$\text{Пример 21.}\ \begin{cases} \Delta u = 0, r > R \\ u_0(\varphi,\theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\cos^2\theta\sin\theta, \\ u(r,\varphi,\theta) = u(r,\varphi+2\pi,\theta) \\ \lim_{r\to\infty} u = 0 \end{cases}$$

• Т. к. в выражении $u_0(\varphi,\theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\cos^2\theta\sin\theta$ присутствует $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, то $k = 1$, и речь пойдёт о функции $Y_?^1$, для которой уже присутствует необходимый множитель $\sin\theta$. Осталось выяснить, первая производная какого полинома Лежандра равна $\cos^2\theta$. Ясно, это связано с многочленом 3 -й степени:

$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right) \Rightarrow P_3'(\cos\theta) = \frac{15\cos^2\theta}{2} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$$\cos^2\theta = \frac{2P_3'(\cos\theta)}{15} + \frac{P_1'(\cos\theta)}{10}.$$

Видно, что первая производная содержит не только $\cos^2\theta$, но и константу. Поэтому пришлось поискать ещё полином Лежандра, первая производная которого равна константе, это полином первой степени. Поэтому

$$u_0(\varphi,\theta) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2P_3^{(1)}}{15} + \frac{1}{10}\right)\sin\theta =$$

$$= \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2P_3^{(1)}}{15}\right)\sin\theta + \frac{1}{10}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_1^{(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{2}{15}\left(\frac{R}{r}\right)^4\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_3^{(1)}(\cos\theta) +$$

$$+ \frac{1}{10}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_1^{(1)}(\cos\theta).$$

Ответ. $u = \frac{2}{15}\left(\frac{R}{r}\right)^4\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_3^{(1)}(\cos\theta) + \frac{1}{10}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\theta P_1^{(1)}(\cos\theta)$.

Пример 22. $\begin{cases} \Delta u = 20, r < \sqrt{3}, \\ u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi, \\ u(r,\varphi,\theta) = u(r,\varphi+2\pi,\theta). \end{cases}$

• Найдём сначала частное решение уравнения и сделаем сдвиг:

$u_{\text{частн.}} = ar^2 \Rightarrow 2a + 4a = 20$

$$a = \frac{10}{3} \Rightarrow u_{\text{частн.}} = \frac{10r^2}{3} \Rightarrow v = u - \frac{10r^2}{3}.$$

Перепишем задачу в новых переменных:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, r < \sqrt{3} \\ v|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi - 10 \end{cases}$$

Теперь преобразуем краевое условие к сумме сферических функций:

$$15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi - 10 =$$
$$= 5 + 15\left(2\cos^2\theta - 1\right) - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi =$$
$$= -10 + 30\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}P_1^1\sin\varphi =$$
$$= 20P_2 - \sqrt{3}P_1^1\sin\varphi$$

Теперь запишем решение в шаровых функциях:

$$u(r,\varphi,\theta) = \frac{10r^2}{3} + 20P_2\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)P_1^1\sin\varphi =$$
$$= r^2\left(\frac{10}{3} + \frac{20}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right) - r\sin\theta\sin\varphi =$$
$$= 10r^2\cos^2\theta - r\sin\theta\sin\varphi$$

Ответ. $u = 10r^2\cos^2\theta - r\sin\theta\sin\varphi$.

Пример 23.

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^4}, r > 2, \\ (u - u_r)|_{r=2} = \sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right), u(\infty) = 0 \end{cases}$$

• Найдём сначала частное решение уравнения:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = \frac{1}{r^4},$$
$$u_{\text{частн}} = \frac{a}{r^2} \Rightarrow a(6-4) = 1a = \frac{1}{2} \Rightarrow v = u - \frac{1}{2r^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, r > 2, \\ (v - v_r)|_{r=2} = \sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \frac{1}{4}, v(\infty) = 0. \end{cases}$$

Теперь преобразуем краевое условие к сумме сферических функций:
$\sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \frac{1}{4} = \sin\theta\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\cdot\frac{2}{3}P_2^{(1)}(\cos\theta) - \frac{1}{4}P_0 \Rightarrow \Rightarrow v(r,\varphi,\theta) = \frac{a}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta) + \frac{b}{r^3}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta) + \frac{d}{r} \Rightarrow \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\cdot\frac{1}{3}P_2^{(1)}(\cos\theta) - \frac{1}{4}P_0 = \frac{a}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta) + \frac{b}{8}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta) + \frac{d}{2} - {}$
$- \left(-\frac{2a}{8}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta) - -\frac{3b}{16}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta) - \frac{d}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{a}{2}, \\ \frac{1}{6} = \frac{5b}{16}, \\ \frac{3d}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{8}{15}, \\ d = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)P_1^{(1)}(\cos\theta) + \frac{8}{15r^3}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta) - \frac{1}{3r} = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r} + \frac{1}{r^2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\sin\theta + \frac{8}{5r^3}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)\cdot\sin\theta\cos\theta.$

Ответ. $u = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r} + \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \frac{8}{5r^3}\sin\theta\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$.

5 Функция Грина

(я предполагаю, что это имеет много нюансов и приложений, так что вынес отдельной частью)

(из Левитова Шитова добавлю методы, пока их не шарю ещё.)

5.1 для линейного оператора

??

5.1.1 Функция Грина по Константинову (??)

(в планах было почитать его методичку, мб когда-то дойду [**?**])

5.2 Вычисление функции Грина линейного оператора с помошью преобразования Фурье

Теория

(не уверен, что это следует читать, ибо это от конста ???)

Увидим, как преобразование Фурье обобщённых функций можно использовать для решения задачи поиска функции Грина дифференциального оператора L_x вида (2.3.4). Пусть $g(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ функция Грина оператора L_x, т. е. имеет место равенство

$$L_x g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k D_x^{\alpha_k} g(x) = \delta(x)$$

Так как преобразование Фурье осуществляет взаимно однозначное преобразование пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то вычисление обобщённой функции $g(x)$ равносильно вычислению её преобразования Фурье $\mathcal{F}[g](y)$

Применяя равенству (3.5.1) преобразование Фурье, получаем равносильное соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{F}\left[D_x^{\alpha_k} g(x)\right](y) = \mathcal{F}[\delta(x)](y) = 1$$

В силу утверждения 3.4.2 имеем:

$$\mathcal{F}\left[D_x^{\alpha_k} g(x)\right](y) = (-i)^{|\alpha_k|} y^{\alpha_k} \mathcal{F}[g](y)$$

Следовательно, равенство (3.5.1) равносильно уравнению

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k (-i)^{|\alpha_k|} y^{\alpha_k}\right) \mathcal{F}[g](y) = 1$$

Полученный в уравнении (3.5.2) многочлен обозначим

$$P_L(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k (-i)^{|\alpha_k|} y^{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k (-iy)^{\alpha_k}, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

Равенство (3.5.2) перепишем в виде:

$$P_L(y) \mathcal{F}[g](y) = 1$$

Таким образом, вычисление преобразования Фурье функции Грина оператора L_x сводится к решению на первый взгляд несложного уравнения $P_L(y)\mathcal{F}[g](y) = 1$.

Однако эта кажущаяся простота обманчива. Может не получиться решить это уравнение простым делением на Многочлен $P_L(y)$, если функция $\frac{1}{P_L(y)}$ не принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Заметим, что уравнение

$$P_L(y) h(y) = 1, \quad h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$$

может иметь не одно решение, а функция Грина оператора L_x, вообще говоря, неединственна (см. пример 2.5.13). Например, если многочлен P_L имеет нуль в точке $y_0 \in \mathbb{R}^m$, то для функции $\delta(y-y_0)$ получаем

$$P_L(y)\delta(y-y_0)=0$$

так как для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в этом случае имеем:

$$\langle P_L(y)\delta(y-y_0), \varphi(y)\rangle = \langle \delta(y-y_0), P_L(y)\varphi(y)\rangle = P_L(y_0)\varphi(y_0)=0$$

Если при этом обобщённая функция $h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ -решение уравнения (3.5.5), то для любого числа $a \in \mathbb{C}$ обобщённая ϕ ункция $h(y)+a\delta(y-y_0)$ также является его решением:

$$\begin{gathered} P_L(y)\left(h(y)+a\delta(y-y_0)\right)= \\ =P_L(y)h(y)+aP_L(y)\delta(y-y_0)=P_L(y)h(y)=1 \end{gathered}$$

Такая ситуация возникает в случае, когда соответствующее однородНОе урåНеНие

$$P_L(y)h(y)=0, \quad h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$$

имеет нетривиальное решение. Покажем, что любое решение $h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ уравнения (3.5.5) порождает функцию Грина оператора L_x по формуле

$$g(x)=\mathcal{F}^{-1}[h(y)](x)=\frac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}[h(-y)](x)$$

Действительно, имеем:
(???)
что и требовалось.

Техническая Лемма

Рассмотрим несколько примеров вычисления функции Грина, но сначала докажем одну необходимую техническую Лемму.

3.5.1.

Пусть функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Для произвольных $x_0 \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим $P_n(x)$ многочлен Тейлора $(n-1)-$ого порядка функции φ по степеням $(x-x_0)$. Тогда функция

$$\xi(x)=\begin{cases} \frac{\varphi(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}, & x=x_0 \end{cases}$$

является бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}$.

Доказательство. (плевать на него.)

□

Дифференциальный оператор id/dx

Рассмотрим одномерный случай $m=1$. Пусть дифференциальный оператор

$$L_x=i\frac{d}{dx}$$

Соответствующий ему многочлен

$$P_L(y)=i(-iy)=y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Получаем уравнение:

$$P_L(y)h(y)=yh(y)=1, \quad h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

Функция $\frac{1}{y} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Покажем, что функция $\frac{1}{y} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольную неотрицательную финитную функцию $\varphi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, такую, что $\varphi(0) > 0$. Тогда существует число $a > 0$, такое, что при $|y| < a$ Выполнено неравенство $\varphi(y) > \frac{\varphi(0)}{2}$.

Получаем неравенства:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy \geqslant \int_0^a \frac{\varphi(y)}{y} dy \geqslant \int_0^a \frac{\varphi(0)}{2y} dy = +\infty$$
$$\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(y)}{y} dy \leqslant \int_{-a}^0 \frac{\varphi(y)}{y} dy \leqslant \int_{-a}^0 \frac{\varphi(0)}{2y} dy = -\infty$$

(????) находятся, и поэтому по определению расходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy$. Это и доказывает соотношение $\frac{1}{y} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Итак, рассматриваемое уравнение (3.5.8) не решается простым делением на y.

Тем не менее, решения этого уравнения существуют, и их много!

Прежде всего вспомним, что $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$ (см. пример 2.1.34). Следовательно,

$$L_x(-i\theta(x)) = \frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$$

т.е. $-i\theta(x)$ -функция Грина рассматриваемого оператора L_x. Следовательно, справедливо равенство:

$$P_L(y)\mathcal{F}[-i\theta(x)](y) = y\mathcal{F}[-i\theta(x)](y) = 1$$

где обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{y} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ введена в определении 2.1.23. Отсюда

$$\mathcal{F}[-i\theta(x)](y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} - \pi i\delta(y)$$

Следовательно, получаем:

$$y\mathcal{P}\frac{1}{y} - \pi i y\delta(y) = 1$$

Так как в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ имеет место равенство $y\delta(y) = 0$, То В частности находим

$$y\mathcal{P}\frac{1}{y} = 1$$

Таким образом, обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{y}$ в этом примере является своеобразным аналогом деления на y, дающим частное решение уравнения (3.5.8).

Вспоминая, что $y\delta(y) = 0$, получаем, что для любого числа $a \in \mathbb{C}$ обобщённая функция

$$h(y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} + a\delta(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

является решением уравнения $P_L(y)h(y) = 1$. Заметим, что функция Грина рассматриваемого оператора L_x неединственна, так как фунКЦия медленного роста - тождественная константа - оператором L_x обнуляется. Поэтому для любого числа $b \in \mathbb{C}$ функция $-i\theta(x)+b$ является функция Грина оператора L_x. Так как $\mathcal{F}[1](y) = 2\pi\delta(y)$ (см. пример 3.1.8), то получаем только что найденный в (3.5.9) набор функций - решений уравнения (3.5.8):

$$h(y) = \mathcal{F}[-i\theta(x) + b](y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} - \pi i\delta(y) + 2\pi b\delta(y) = \mathcal{P}\frac{1}{y} + a\delta(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

Для числа $a = 2\pi b - \pi i$ Покажем, что формула (3.5.9) определяет все решения уравнения (3.5.8). Пусть $h_1(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и $h_2(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ -Два его решения. Тогда функция $h_1(y) - h_2(y) = h(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ удовлетворяет однородному уравнению

$$yh(y) = 0$$

т.е. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\langle yh(y), \varphi(y) \rangle = 0$$

Для любой функции $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, такой, что $0 \notin \operatorname{supp} \psi$, имеет место вложение

$$\frac{\psi(y)}{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Тогда получаем:

$$\langle h(y), \psi(y) \rangle = \left\langle yh(y), \frac{\psi(y)}{y} \right\rangle = 0$$

Tenepb paccmorpum произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Зафиксируем cpesky $\eta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда функция $\psi(y) = (1 - \eta_1(y))\, \varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\psi(y) = 0$ при $|y| < 1$. Следовательно, $0 \notin \operatorname{supp} \psi$. Тогда получаем, что

$$\langle h(y), \varphi(y) \rangle = \langle h(y), \eta_1(y)\varphi(y) \rangle + \langle h(y), \psi(y) \rangle = \langle h(y), \eta_1(y)\varphi(y) \rangle$$

Далее, определим функцию

$$\xi(y) = \begin{cases} \eta_1(y) \left(\frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{y} \right), & y \neq 0 \\ \varphi'(0), & y = 0 \end{cases}$$

В силу леммы 3.5.1 имеем вложение $\xi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, причём $\eta_1(y)\varphi(y) = y\xi(y) + \eta_1(y)\varphi(0)$. С.ледовательно, находим:

$$\begin{gathered} \langle h(y), \varphi(y) \rangle = \langle h(y), y\xi(y) + \eta_1(y)\varphi(0) \rangle = \\ = \langle yh(y), \xi(y) \rangle + \langle h(y)\eta_1(y) \rangle\, \varphi(0) = \langle h(y)\eta_1(y) \rangle\, \varphi(0) \end{gathered}$$

Обозначив $a = \langle h(y), \eta_1(y) \rangle \in \mathbb{C}$, получаем:

$$\langle h(y), \varphi(y) \rangle = a\varphi(0) = \langle a\delta(y), \varphi(y) \rangle$$

Таким образом, $h(y) = a\delta(y)$ для подходящего числа $a \in \mathbb{C}$.

Множество этих обобщённых функций даёт общее решение уравнения $yh(y) = 0$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Теперь, взяв $h_2(y) = \mathcal{P}\frac{1}{y}$ -решение уравнения (3.5.8), получим, что любое другое его решение имеет вид

$$h_1(y) = h_2(y) + h(y) = \mathcal{P}\frac{1}{u} + a\delta(y)$$

т.е. все ок.

конец, ура

дальше теория конста

мда

снова примеры и хз что еще

мда

5.3 Методы функции Грина для приложений

(отдельно разовью!)

5.3.1 Функция грина в теории поля

??? вроде что-то было

5.3.2 Функция грина в КТП

(вообще, для КТП отдельно выделю тоже методы, потому что это крайне важное требование для хорошей записи по УМФ)

6 классические линейные уравнения

6.1 Уравнение Шредингера

(?? чет не понимаю, чего пишу его тут, а не в диффурах?? ладно, потом перекину мб, пока тут. мб в диффурах одномерное напишу, тут - многомерное, потому что тут дифференцирование по многим переменным будет.)

мотивация и обзор применений

УШ нужно в квантовой механике.
(?)

вид уравнения Шредингера

оно имеет вид

6.1.1 корректность постановки задачи и существование решения

грамотная постановка задачи Шредингера (????)

Известно, что решение существует, если волновая функция лежит в области определения гамильтаниана.
хз

эволюция без выполнения УШ (????)

идея почти утеряна, мб потом досмотрю
а если она не будет лежать? что, не будет эволюциониорвать? то УШ не будет выполняться, в то же время эволюция будет существовать.
так как у нас первичный оператор эволюции, U_t, его
$D(U_t) = \{f \in H | \sum_n |r_n|^2 |e^{-iE_n t/n}| \|e_n\|^2 < +\infty\} = H$
так что эволюция будет идти, а УШ будет не выполнено.

6.1.2 решение УШ

обзор подходов и решений

Есть несколько различных подходов, обсудим их.

типичное решение

Метод решения следующий.

Рассматриваем оператор Шредингера

$$L = -i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$

Чтобы найти решение уравнения

$$L\psi(t,x) = func \cdot \psi(t,x), \quad \psi(t,x) \in S'\left(\mathbb{R}^2\right)$$

Необходимо найти функцию Грина. Позже конкретно посмотрим пример. Итак, функция грина для этого оператора известна, и равна:

Ее же мы покажем, как найти в следующем разделе

решение через континуальный интеграл

6.1.3 Типичные частные случаи уравнения Шредингера

(по идее задачи на УШ аналигичны тому, что тут разберем)

Уравнение Шредингера в кулоновском поле

(коломинов??)

В общем случае задача не имеет аналитического решения. Однако для ряда важных случаев это оказывается возможным.

Изучим уравнение Шредингера частицы в притягивающем Кулоновском потенциале:

$$\left(\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{r} + E\right)\psi = 0$$

здесь E - энергия состояния, а r - расстояние до притягивающего центра.

Поищем связные состояния, которым соответствуют отрицательные уровни энергии.

Волновая функция может быть записана в виде произведения радиальной функции $R(r)$ и угловой функции, зависящей от азимутального и полярного углов, другими словами, переменные разделяются.

Уравнение на радиальную функцию имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + 2E\right)R(r) = 0$$

где l - орбитальное квантовое число (целое неотрицательное). Вводя функцию $\Phi = r^{1+l}R(r)$, мы получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + E\right)\Phi = 0$$

(дальше укажу, что дальше. да, пока структура слабая, но тут развилка случаев, что поделать?)

УШ в случае $l=0$ Тогда:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}+E\right)\Phi=0$$

(???)

Применим преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp}\left[\left(p^2/2+E\right)\tilde{\Phi}\right]=\tilde{\Phi}$$

Нас будут интересовать связанные состояния, соответствующие отрицательной энергии.

Подставляя $E=-\alpha^2/2, \alpha>0$, и решая полученное уравнение для $\tilde{\Phi}$ находим

$$\tilde{\Phi}\propto\frac{1}{p^2-\alpha^2}\left(\frac{p-\alpha}{p+\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

Выражение (1.66) имеет сингулярность при $p=\alpha$, то есть контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа (4.27) должен идти справа от этой точки. Это означает, что при больших r функция $\Phi(r)$ ведет себя пропорционально $\exp(\alpha r)$. Это поведение не соответствует связанны м состояниям. Исключением является случай $\alpha=1/n(n$ -целое число), тогда особенность при $p=\alpha$ исчезает. Именно эти значения соответствуют связанным состояниям частицы с энергией $E=-1/\left(2n^2\right)$:

$$\tilde{\Phi}\propto\frac{(p-1/n)^{n-1}}{(p+1/n)^{n+1}}$$

Чтобы вычислить $\Phi(r)$, необходимо произвести обратное преобразование Лапласа $\tilde{\Phi}(p)$.

Для функции (1.67) соответ ствующий интеграл сведется к вычет у в точке $p=-1/n$. Таким образом,

Φ будет пропорциональна $\exp(-r/n)$ с полиномиальным множителем, который возникает в силу того, что полюс (1.67) является кратным.

Например, для основного состояния, то есть при $n=1$, мы находим $\tilde{\Phi}\propto(p+1)^{-2}$. Таким образом интегрирование в обратном преобразовании Лапласа сводится к взятию вычета в точке $p=-1$. Вычисляя этот вычет, находим $\Phi\propto r\exp(-r)$, то есть $R\propto\exp(-r)$

(напишу тут итоговую формулу, пока что её не вижу, нужно доучить это.)

Случай произвольного l Переходим теперь к случаю произвольного l. Умножим уравнение (1.64) на r и сделаем преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp}\left[\left(p^2/2+E\right)\tilde{\Phi}\right]=\tilde{\Phi}-pl\tilde{\Phi}$$

При выводе последнего члена мы при интегрировании по частям учли, что $\Phi(0)=0$ в силу определения $\Phi=r^{1+l}R$.

Решая полученное уравнение, находим прямое обобщение (1.66)

$$\tilde{\Phi}\propto\frac{1}{\left(p^2-\alpha^2\right)^{l+1}}\left(\frac{p-\alpha}{p+\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

где, как и выше, $E=-\alpha^2/2$. Связанным состояниям соответ ств уют $\alpha=1/n$. Итак

$$\tilde{\Phi}\propto\frac{(p-1/n)^{n-l-1}}{(p+1/n)^{n+l+1}}$$

что являет ся прямы обобщением (1.67). Поскольку полюс в точке $p = -1/n$, который определяет значение Φ, являет ся крат ным, то, как и для случая нулевого орбитатьного квантового числа l, функция Φ будет пропорциональна $\exp(-r/n)$ с полиномиальным множителем. Таки м образом, воспользовавшись преобразованием Лапласа, мы воспроизвели основные результаты, касающиеся задачи об атоме водорода.

Уравнение Шредингера с подвижным δ-потенциалом по Константинову (????)

(?? почему не в каталоге задача?? перекину туда потом.)

(пока так и не понял, стоит так делать или нет???? мб вставлю в следующую часть, ибо по факту это не классическая УМФ)

Рассмотрим уравнение

$$L\psi(t,x) = \delta(t-x)\theta(t)\psi(t,x), \quad \psi(t,x) \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right)$$

с краевым условием $\psi(t,t) = w(t), t > 0$, где функция $w \in \mathbb{L}_2\left(\mathbb{R}_+\right)$, и начальным условием $\psi(0,x) = 0$. Действие обобщённой функции $\delta(t-x)\theta(t)\psi(t,x)$ на пробную $\varphi(t,x) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$ имеет вид:

$$\langle \delta(t-x)\theta(t)\psi(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \int_0^{+\infty} w(t)\varphi(t,t)dt$$

Решение этого уравнения даёт свёртка источника $\delta(t-x)\theta(t)\psi(t,x) = \delta(t-x)\theta(t)w(t)$ с найденной выше функцией Грина $g(t,x)$ оператора L, то есть

$$\psi(t,x) = (\delta(t-x)\theta(t)w(t)) * g(t,x)$$

Для любых $\varphi(t,x) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$ и 1 -срезки $\eta(t,x) \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^2\right)$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\langle (\delta(t-x)\theta(t)w(t)) * g(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \\
&\qquad = \lim_{R\to+\infty} \left\langle \delta(t-x)\theta(t)w(t), \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{x}{R}\right) \langle g(\tau,y), \varphi(t+\tau, x+y)\rangle \right\rangle = \\
&\qquad = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} dt w(t)\eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} dy \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{y^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau, t+y) = \\
&\qquad = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} dt w(t)\eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau, \zeta)
\end{aligned}$$

В силу вложения $\varphi(t,x) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$, существует $C > 0$, такое, что

$$|\varphi(\xi,\zeta)| \le \frac{C}{\left(1+\xi^2\right)^2\left(1+\zeta^2\right)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

Следовательно, для любого $t > 0$ получаем

$$\begin{aligned}
&\left| w(t)\eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau,\zeta)\right| \le \\
&\qquad \le \frac{MC}{\sqrt{4\pi}} |w(t)| \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\left(1+(t+\tau)^2\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \le \\
&\qquad \le \frac{MC}{\sqrt{4\pi}} \frac{|w(t)|}{(1+t^2)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}(1+\tau)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}}_{=C_1} = \\
&\qquad = \frac{MCC_1}{\sqrt{4\pi}} \frac{|w(t)|}{(1+t^2)}
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|w(t)|}{(1+t^2)} dt \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} |w(t)|^2 dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}} < +\infty$$

то есть функция $\frac{|w(t)|}{(1+t^2)}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\begin{aligned}
&\langle (\delta(t-x)\theta(t)w(t)) * g(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \\
&\qquad = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} dt w(t) \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau,\zeta) = \\
&\qquad = \int_0^{+\infty} dt w(t) \lim_{R\to+\infty} \eta\left(\frac{t}{R}, \frac{t}{R}\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau,\zeta) = \\
&\qquad = \int_0^{+\infty} dt w(t) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau,\zeta) = \\
&\qquad = \int_0^{+\infty} dt w(t) \int_t^{+\infty} d\xi \int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(\xi-t)}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4(\xi-t)}} \varphi(\xi,\zeta) = \\
&\qquad = \int_0^{+\infty} d\xi \int_{\mathbb{R}} d\zeta \varphi(\xi,\zeta) \int_0^{\xi} dt w(t) \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{(\zeta-t)^2}{4(\xi-t)}}}{\sqrt{4\pi(\xi-t)}} =
\end{aligned}$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$\psi(t,x) = ie^{i\frac{\pi}{4}} \theta(t) \int_0^t \frac{w(\tau) e^{-i\frac{(x-\tau)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} d\tau$$

(???? норм решение вообще или нет???)

6.1.4 Другое про уравнение Шредингера

Качественное описание решения (!?!??!)

(пока что качественно плохо очень чувствую, какова динамика, которая описывается УШ???? потом мб помоделирую, посмотрю.)

О численных методах решения УШ (??)

(наверное, указать на это - будет хорошей добавкой.)

6.2 эллиптические уравнения

6.3 гиперболические уравнения

6.4 линейное уравнение первого порядка

линейное уравнение первого порядка по Колоколову

Рассмотрим простейший пример уравнения, которое описывает релаксацию системы к равновесию:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = \phi$$

где $x(t)$ - переменная, описывающая отклонение системы от равновесия, γ=const>0 - кинетический коэффициент, а величина $\phi(t)$ представляет внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия.

Уравнение типа возникает в том случае, когда инерционными свой ствами си стемы можно пренебречь.

Например, такое уравнение возникает при описании движения частицы в сильно вязкой среде.

Решение линейного уравнения (1.1) можно записать, как интеграл

$$x(t)=\int dsG(t-s)\phi(s)$$

Здесь $G(t)$ - так называемая функция Грина, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt}+\gamma G=\delta(t)$$

то есть уравнению (1.1) с правой частью $\phi=\delta(t)$.

Это утверждение проверяется непосредственно: при меняя к правой части (1.2) оператор $d/dt+\gamma$ и пользуясь затем соотношением (1.3), мы находим, что $x(t)$ является решением уравнения (1.1).

Однако функция Грина $G(t)$ определена уравнением (1.3) неоднозначно, поскольку его решен ие определено с точностью до решения однородного (то есть с нулевой правой частью) уравнения (1.1). Для того, чтобы однозначно определить функцию Грин а $G(t)$, необходимо привлечь принцип причинности. Из соотношения (1.2) следует, что $G(t)=0$ при $t<0$, поскольку си стема может реагировать только на воздействие, и мевшее место в прошлом, но не в будущем.

Принцип причинности уже однозначно фиксирует функцию Грина. В силу того, что $G(t)=0$ при $t<0$, выражение (1.2) можно переписать в следующем виде

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} dsG(t-s)\phi(s)$$

Здесь подразумевает ся, что ϕ действует на си стему на ни.

Найдем явное выражение для функции Грина $G(t)$, которая определяет ся уравнением (1.3). Поскольку $\delta(t)$ ляет ся решением однородного уравнения (1.1), то есть $G(t)=A\exp(-\gamma t)$, где A -некоторая кон станта. Y читывая, что $G(t)=0$ при $t<0$, мы заключаем, что при $t=0$ функция $G(t)$ и сп ытывает скачок A.В силу урas -нения и соотнош ен ия (4.10) этот скачок Должен быть равен единице. Таки м образом, $A=1$, и мы нахо- Ди м окон чательно

$$G(t)=\theta(t)\exp(-\gamma t)$$

где $\theta(t)$ -функция Хэви сай да, равная нулю при $t<0$ и равная едини це при $t>0$. Подставляя это выражение в соотношен ие (1.4), мы находи м

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} ds\exp[-\gamma(t-s)]\phi(s)$$

От сюда следует, что си стема постепенно (за время γ^{-1}) забывает о воздей стви и н а нее, которое бы.ло в прошлом. Выражен ие (1.4) или (1.6) подразу мевает, что мы paccmarpuВae задачи, когда состояние си стемы задано в начальный мо мент времени , а далее она эволюциони рует под внешни м воздей ствием. Будем от считы вать время от момента, когда задано начальное состояние. В данном случае н ачальное со стояние характеризует ся начальны м значением переменной x, которое мы обознач аем $x(0)$. Тогда вместо (1.4) решение уравнения перепишется в следую- щем виде

$$x(t) = x(0)G(t) + \int_0^t dsG(t-s)\phi(s)$$

Действительно, выражение (1.7) удовлетворяет исход- ному уравнению и начальному условию, поскольку $G(+0) = 1$

6.4.1 строгая теория

тут все то же самое, только через конста, его все нюансы разные.

6.5 линейное уравнение порядка выше первого

Рассмотри м более сложный при мер, а и менно уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi$$

где ν и меет смы сл собственной частоты колебаний системы. Решение уравнения (1.8) можно запи сать через функцию Грина $G(t)$, в виде (1.2) или (1.4). Функция $G(t)$ удовлетворяет уравнению (1.8) с δ -функцией в правой части:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2\right) G(t) = \delta(t)$$

Най дем решение этого уравнения. Как мы уже установили, в силу причинности $G(t) = 0$ при $t < 0$. В отличие от функции Грина (1.5), решение уравнения (1.9) остается непрерывным при $t = 0$ силу того, что в его левой части стоит вторая производная по t. В этом случае δ -функция производится, если скачок испытывает первая производная от функции, смотри раздел 4.1. Используя соотношение (4.10) легко найти, что скачок первой произво дной в $G(t)$ должен быть равен 1.

Таким образом, мы получаем, что при $t = +0$ имеем $G = 0, G' = 1$. Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего $G(t)$ при $t > 0$, поскольку правая часть уравнения (1.9) в этом случае равна нулю. Задача легко решает ся, и мы находим

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\nu}\sin(\nu t)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер функции Грина.

Выражение (1.4) дает решение уравнения (1.8) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть эти ми условиями являются значения функции и ее производной, x и $\dot{x}$, в начальный момент времени, в качестве которого мы выберем $t = 0$.

Решение задачи Коши для уравнения (1.8) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t dsG(t-s)\phi(s)$$

Это выражение, удовлетворяет уравнению (1.8), а так же начальным условия м, что легко проверить с использованием соотношений $G(+0) = 0, \dot{G}(+0) = 1$ $\ddot{G}(+0) = 0$, следующих из выражения (1.10)

Задача 1.1.2. Найти решение задачи Коши для уравнения (1.8) при нулевых начальных условиях и ф= $\exp(-\alpha t), \alpha > 0$. Найти предел $\nu \to 0$ В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствуюшую функцию Грина. Однако этот способ эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Его можно найти д.ля уравнений вида

$$L(d/dt)x = \phi$$

(1.12) относят ся рассмотренные нами выше уравнения (1.1, 1.8). Решение уравнения (1.12) запи сывает ся в виде (1.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t)$$

и условию $G = 0$ при $t < 0$. Заметим, что если старшая производная в $L(d/dt)$ равна $(d/dt)^n$, то $(d/dt)^m G(0) = 0$ для всех и меющихся в $L(d/dt)$ производных $m < n$. Выше мы нашли явные выражения для функций Грина уравнений (1.1, 1.8). Изложим теперь метод, применимый для уравнения (1.12) общего вида.

Поскольку функция Грина отлична от нуля только при положительных временах, естественно рассмотреть ее преобразование Лапласа, смотри раздел 4.2.2:

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt) G(t)$$

Учитывая, что преобразование Лапласа от δ -функции равно единице, находи м из (1.13) соотношение

$$\int_0^\infty dt \exp(-pt) L(d/dt) G(t) = 1$$

Произведем теперь интегрирование по частя м в производных $(d^n/dt^n)\, G$. Учитывая, что все содержащиеся в $L(d/dt)$ производные от функции Грина $G(t)$ в нуле равны нулю (за исключением старшей), мы приходим к выводу, что при интегрировании по частям внеинтегратьные члены не возникают, и мы находим

$$\tilde{G}(p) = 1/L(p)$$

Таким образом, $\tilde{G}(p)$ имеет полюса, которые определяют ся нулями полинома $L(p)$.

Обратное преобразование Лапласа имеет вид (4.27), то есть

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p)$$

Контур интегрирования в этом выражении показан на рисунке 4.1. При $t < 0$ мы можем смешать контур интегрирования вправо, поскольку e^{pt} при этом стремит ся к нулю. В результате мы заключаем, что при $t < 0$ функция Грина равна нулю, как и должно быть. При $t > 0$ мы можем смещать контур интегрирования влево, поскольку e^{pt} при этом стремится к нулю. При таком смешении мы будем "натыкаться"на полюсы $\tilde{G}(p)$. Далее контур можно "протащить" через полюса, добавив контура, идущие вокруг полюсов. При дальнейшем сдвиге влево мы получаем нулевой вклад в интеграл по прямой, поскольку e^{pt} стремится к нулю. Таким образом, интеграл сводится к сумме контурных интегралов, идущих вокруг полюсов $G(p)$, смотри рисунок 1.1.

Каждый такой интеграл сводится к вычету в полюсе:

$$G(t) = \sum_i \mathrm{res}_i \exp(pt)/L(p)$$

где суммирование идет по полюсам $\tilde{G}(p)$, то есть нуля м $L(p)$

Задача 1.1.3. Найти выражения для функций Грина (1.5, 1.10), исходя из соотношения (1.16)

Для устойчивой системы все полюса выражения (1.14) лежат в левой полуплоскости по p, что соответствует затуханию возмущений в от сутствие внешнего воздействия. Тогда $G(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (1.14) в правой полуплоскости. Вы четы в этих полюсах породят вклад в функцию Грина $G(t)$, расходящийся на больших t, в соответствии с (1.16).

6.6 Матричное уравнение

(??? где вообще оно нужно???)

Теория

Прямы м обобщением скалярного релаксационного уравнения (1.1) является линейное уравнение для векторной величины $\boldsymbol{y}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\chi}$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ - матрица, которая определяет релаксацию системы, а вектор χ представляет внешнее воздействие на систему.

Отметим, что к виду (1.20) приводится дифференциальное уравнение n -го порядка для скалярной переменной x. Для этого достаточно ввести $y_1 = x, y_2 = dx/dt, \ldots, y_n = d^{n-1}x/dt^{n-1}$. После этого $d\boldsymbol{y}/\mathrm{d}t$ выражают ся через компоненты $\boldsymbol{y}$, и сходя из введенных определений и исходное уравнение, приводя к матрице $\hat{\Gamma} n \times n$ весьма специфического вида.

Отметим, что обратное, вообще говоря, неверно: не всякое уравнение вида (1.20) с матрицей $\hat{\Gamma}$ размера $n \times n$ можно свести к уравнению n -го порядка для скалярной величины. В этом смысле уравнение (1.20) является более общим.

Задача 1.1.8.

Свести к виду (1.20) уравнение, введенное в задаче 1. 1.5. Как известно, можно ввести собственные векторы $\boldsymbol{a}_i$ матрицы $\hat{\Gamma}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\hat{\Gamma}\boldsymbol{a}_i = \lambda_i \boldsymbol{a}_i$$

где λ_i - собственные чи сла матрицы $\hat{\Gamma}$. Если собственные чи сла не вырождены, то любой вектор можно разложить по собственны м векторам $\boldsymbol{a}_i$, в частности $\boldsymbol{y} = \sum_i x_i \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{\chi} = \sum_i \phi_i \boldsymbol{a}_i$. Подставляя это предст авление В уравнение (1.20), находи М

$$\frac{dx_i}{dt} + \lambda_i x_i = \phi_i$$

Таки м образом, задача сводится к набору уже рассмотренных нами скалярных уравнений (1.1).

Можно ввести функцию Грина для уравнения (1.20), которая являет ся матрицей $\hat{G}(t)$, через которую выра- жает ся решение этого уравнения

$$\boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} ds \hat{G}(t-s) \boldsymbol{\chi}(s)$$

Функция Грина $\hat{G}(t)$ равна нулю при $t < 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} + \hat{\Gamma}\right) \hat{G}(t) = \delta(t)\hat{1}$$

где $\hat{1}$ - единичная матрица. Можно вы пи сать явное вы- ственных столбцов $\boldsymbol{a}_i$ матрицы Γ надо ввести собственные строки b_i^T, которые удовлетворяют уравнения м $\boldsymbol{b}_i^T \hat{\Gamma} = \lambda_i \boldsymbol{b}_i^T$. Как известно, соб ственные столбцы и стро- Ки можно выбрать ортонормированны ми $\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} - си мвол Кронекера, равный единице, если $i = j$, и нулю, если $i \neq j$. Тогда

(???)

7 классическая задача коши

начинает с простейшей задачи коши - простейшая задача.

7.1 двумерная

7.2 трехмерная

8 линейный дифференциальный оператор

8.1 его теория

пока что хз

8.2 функция Грина линейного дифференциального оператора

8.2.1 Функция Грина для уравнения Шредингера

Поищем функцию $g(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$, которая удовлетворяла бы

$$Lg(t,x) = \delta(t,x)$$

(???? как выглядит тут L????)

готовые ответы

искомой функцией Грина оператора L является

$$g(t,x) = \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-i\frac{x^2}{4t}}$$

причём носитель $g(t,x)$ удовлетворяет вложению в множество $\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$

(? как связно с УШ в квантмехе, там такого использования не помню?)

поиск функции Грина

Поищем функцию $g(t,x) \in S'(\mathbb{R}^2)$, которая удовлетворяла бы

$$Lg(t,x) = \delta(t,x)$$

Применим метод фурье, получим:

$$\mathcal{F}[Lg(t,x)](\tau,y) = 1$$

$$\mathcal{F}[Lg(t,x)](\tau,y) = \left(-i(-i\tau) + (-iy)^2\right)\mathcal{F}\left[g(t,x](\tau,y) = \left(-y^2-\tau\right)\mathcal{F}[g(t,x)](\tau,y) = 1$$

Многочлен $P_L(\tau,y) = -y^2 - \tau$ не отделен от нуля. Поэтому рассмотрим многочлен с малым $\varepsilon > 0$

$$P_L(\tau + i\varepsilon, y) = -y^2 - \tau - i\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Он уже отделен от нуля $|P_L(\tau + i\varepsilon, y)| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, поэтому

$$P_L(\tau + i\varepsilon, y) h_\varepsilon(\tau, y) = 1 \quad \leftrightarrow \quad h_\varepsilon(\tau,y) = \frac{1}{P_L(\tau + i\varepsilon, y)}$$

(тут теория про предел, которую я пропускаю пока что)

Осталось взять обратное преобразование фурье:

$\forall \varphi \in S'\left(\mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}^{-1}\left[h_\varepsilon(\tau,y)\right](t,x), \varphi(t,x)\right\rangle &= \left\langle h_\varepsilon(\tau,y), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(t,x)](\tau,y)\right\rangle = \\
&= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{1}{(-y^2-\tau-i\varepsilon)} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t,x) e^{-it\tau - ixy} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dy \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} d\tau \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \underbrace{\frac{\varphi(t,x) e^{-it\tau - ixy}}{(-y^2-\tau-i\varepsilon)}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{R\to+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} dt dx \varphi(t,x) e^{-ixy} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-it\tau} d\tau}{(-y^2-\tau-i\varepsilon)}
\end{aligned}$$

9 Краевые задачи

Краевые задачи часто встречаются, по сути являются самыми простейшими типичными задачами математической физики.

обзор применений краевых задач

Они нужны в...(?)

в электростатике вот, чтобы считать распределения поля...

(?? потом отдельно поищу приложения)

мб в теории струн нужны задачи про колебания струны?????

обзор различных краевых задач

порешаю - создастся такое понимание, пока что еще не создалось.

9.1 уравнения с оператором Лапласа

9.1.1 основные свойства оператора Лапласа

9.1.2 уравнение Пуассона

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}\left(\mathbb{R}^N\right)$, тогда уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x)$$

решается следующим образом:

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}_N(x-y)f(y)dy$$

где $\mathcal{E}_N(x)$ - это фундаментальное решение оператора Лапласа.

Справедлива следующая теорема:

При условии, что $f(x)\in\mathbb{C}_0^{(2)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ имеем $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (3.1)

доказательство

Прежде всего сделаем замену координат и получим следующее равенство:

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}_N(x-y)f(y)dy=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}_N(y)f(x-y)dy$$

Поэтому

$$\frac{u\left(x+he_i\right)-u(x)}{h}=\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon_N(y)\left[\frac{f\left(x+he_i-y\right)-f(x-y)}{h}\right]dy$$

где $h\neq 0$ и $e_i=(0,\ldots,1\ldots,0)$ в i-й позиции. Однако,

$$\frac{f\left(x+he_i-y\right)-f(x-y)}{h}\to\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$$

равномерно в $\mathbb{R}^N$ при $h\to+0$. Таким образом,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}_N(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)dy,\quad i=\overline{1,N}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}_N(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x-y)dy,\quad i,j=\overline{1,N}$$

причем выражение в правой части (3.4) непрерывно по $x\in\mathbb{R}^N$. Поэтому $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}\left(\mathbb{R}^N\right)$

Шаг 2.

Поскольку фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$ имеет особенность в точке $x=0$, то фиксируем $\varepsilon>0$ и выберем шар $B(0,\varepsilon)$ с центром в точке $x=0$ и радиуса $\varepsilon>0$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств: Прежде всего имеем

$$\begin{aligned}|I_1|\leqslant c_1\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\Delta_x f(x)|\,|\mathcal{E}_N(y)|\,dy\leqslant\\ \leqslant c_2\begin{cases}\varepsilon^2|1-2\ln\varepsilon|, & \text{если}\quad N=2\\ \varepsilon^2, & \text{если}\quad N\geqslant 3\end{cases}\end{aligned}$$

☐ Действительно, рассмотрим два случая $N=2$ и $N\geqslant 3$. Без ограничения общности предположим, что $\varepsilon\in(0,1)$. В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\varepsilon)}|\varepsilon_2(y)|\,dy=\int_0^\varepsilon r|\ln r|dr=-\int_0^\varepsilon r\ln r dr=\\ =\left(-\frac{r^2}{2}\ln r+\frac{r^2}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\varepsilon}=\frac{\varepsilon^2}{4}(1-2\ln\varepsilon)\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай: $N \geqslant 3$.

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dy = \frac{1}{N-2} \int_0^\varepsilon \frac{T^{N-1}}{r^{N-2}} dr = \frac{\varepsilon^2}{2(N-2)}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \Delta_y f(x-y) dy =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)} \left(D_y \mathcal{E}_N(y), D_y f(x-y)\right) dy + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \frac{\partial f}{\partial n_y}(x-y) dS_y^{\text{def}}$$

где n_y - единичный вектор внутренней нормали к $\partial B(0,\varepsilon)$. Прежде всего ясно, что

$$|I_{22}| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D_x f(x)| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)| dS_y \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \begin{cases} \varepsilon |\ln \varepsilon|, & \text{если} \quad N=2 \\ \varepsilon, & \text{если} \quad N \geqslant 3 \end{cases}$$

Действительно, рассмотрим два случая $N=2$ и $N \geqslant 3$. В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_2(y)|\, dS_y = \varepsilon |\ln \varepsilon| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} dS_y = \varepsilon |\ln \varepsilon|$$

Во втором случае справедливо выражение

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dS_y = \frac{\varepsilon^{N-1}}{\omega_N (N-2) \varepsilon^{N-2}} \int_{\partial B(0,1)} dS_y = c_3 \varepsilon. \quad \mathbb{Q}$$

Шаг 3. Интегрируя по частям в выражении для I_{21}, получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} I_{21} &= -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)} \left(D_y \varepsilon_N(y), D_y f(x-y)\right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta_y \varepsilon_N(y) f(x-y) dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} f(x-y) dS_y = \\ &= -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} f(x-y) dS_y, \quad (3.9) \end{aligned}$$

так как фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа вне начала координат. Имеют место следующие равенства:

$$D_y \varepsilon_N(y) = \frac{1}{\omega_N} \frac{y}{|y|^N} \quad \text{и} \quad n_y = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial B(0,\varepsilon).1)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} = (n_y, D_y \varepsilon_N(y)) = -\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial B(0,\varepsilon)$$

Поскольку $\omega_N \varepsilon^{N-1}$ - это площадь поверхности сферы $\partial B(0,\varepsilon)$, то при $\varepsilon \to +0$ имеем

$$I_{21} = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} f(x-y) dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) dS_y \to f(x)$$

при $\varepsilon \to +0$. □ Действительно, имеем

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)] dS_y + f(x)$$

а интеграл

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)] dS_y \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$.$\mathbb{Q}$

Шаг 4. Итак, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (3.5), получим равенство

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

9.1.3 теорема о среднем

Для многих результатов относительно решений уравнения Лапласа большую роль играет теорема о среднем.

(каких?)

суть

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ -открытое множество.

Рассмотрим функцию $u(x)$ гармоническую в области U,

т. е. удовлетворяющую уравнению Лапласа в области U

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U$$

Справедлива следующая теорема о среднем:

Те о ре м а 5.

Если функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U)$ гармоническая в области U,

то для любого шара $B(x,r) \subset U$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int_{B(x,r)} u(y) dy$$

где ω_N -это площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$, а α_N -это объем единичного иара в $\mathbb{R}^N$, причем $\alpha_N = \omega_N / N$

Доказательство

Шаг 1. Положим

$$\varphi(r) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y$$

Сделаем следующую замену переменных в этом интеграле:

$$y = x + rz, \quad |y - x| = r \to |z| = 1, \quad dS_y = r^{N-1} dS_z$$

В силу этой замены переменных из (4.3) получим следующее равенство:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) dS_z$$

Дифференцируя обе части этого равенства по r мы получим следующее равенство:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} \left(D_y u(x+rz), z \right) dS_z$$

поскольку

$$\frac{\partial u(x+rz)}{\partial r}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}z_i, \quad y=x+rz$$

Теперь мы снова сделаем замену переменных $y=x+rz$ и получим

равенство

$$\varphi'(r)=\frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B(0,1)}(D_y u(x+rz),z)\,dS_z= \\ =\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)}\left(D_y u(y),\frac{y-x}{r}\right)dS_y$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$n_y=\frac{y-x}{r}, \quad r=|y-x|\to\left(D_y u(y),\frac{y-x}{r}\right)=(D_y u(y),n_y)=\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}$$

где n_y -это внешняя нормаль в точке $y\in\partial B(x,r)$. Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\varphi'(r)=\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)}\left(D_y u(y),\frac{y-x}{r}\right)dS_y= \\ =\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y=\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{B(x,r)}\Delta_y u(y)dy=0$$

Следовательно, $\varphi(r)$ постоянна и справедливо следующее равенство:

$$\varphi(r)=\lim_{t\to+0}\varphi(t)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\omega_N t^{N-1}}\int_{\partial B(x,t)}u(y)dS_y=u(x)$$

Первое равенство в (4.2) мы доказали.

Шаг 3. Докажем второе равенство. Действительно,

$$\int_{B(x,r)}u(y)dy=\int_0^r\left(\int_{\partial B(x,t)}u(z)dS_z\right)dt= \\ =u(x)\int_0^r\omega_N t^{N-1}dt=\frac{\omega_N}{N}r^N u(x)\to u(x)=\frac{1}{\alpha_N r^N}\int_{B(x,r)}u(y)dy$$

Те о ре м а до к а з а н а Теперь мы можем доказать обратную теорему. Те о ре м а 6. Если $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(U)$ удовлетворяет условию

$$u(x)=\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)dS_y$$

для каждого шара $B(x,r)\subset U$, то $u(x)$ -это гармоническая функ- ция. До к а з а т е л ь с т в о . Если $\Delta u(x)\not\equiv 0$, то существует шар $B(x,r)\subset U$ такой, что либо $\Delta u(x)>0$ либо $\Delta u(x)<0$ внутри $B(x,r)$. Для функции $\varphi(r)$, опре-

деленной равенством (4.3), из доказательства предыдущей теоремы имеем равенство (4.8). Поэтому

$$0=\varphi'(r)=\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{B(x,r)}\Delta_y u(y)dy\gtrless 0$$

что приводит к противоречию. Те о р е м а до к а з а н а

9.2 примеры краевых задач

Обсудим различные краевые задачи и их решения.

9.2.1 Колебание струн

(господи, ну сяду когда-то прорешаю уже эти модели, дело 1 часа, нету просто только на это его.)

главные формулы задачи о струне

функция Лагранжа имеет вид

$$L = T - U = \int_0^a dx \left[\frac{1}{2}\mathfrak{m}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(\partial_x z\right)^2\right],$$

откуда функционал действия

$$S[z(t,x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{V_{[2]}} d_2 x \mathscr{L} = \int_{V_{[2]}} d_2 x \left[\frac{1}{2}\mathfrak{m}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(\partial_x z\right)^2\right]$$

Свободные колебания закреплённой струны - обзор

Рассматриваем случай, когда существуют два направления колебаний: поперечное направление оси X и продольное вдоль оси Z. Работая в плоскости XZ, рассмотрим классическую нерелятивистскую струну, концы которой закреплены в точках (0,0) и $(a, 0)$.

В статической конфигурации струна натянута вдоль оси x между этими двумя точками. В процессе поперечных колебаний координата x каждой точки струны не изменяется со временем, а поперечное смещение точки задаётся её координатой z.

Чтобы описать классическую механику однородной струны, необходимо, как мы увидим, знание двух параметров: её натяжения λ и массы, приходящейся на единицу длины, $\mathfrak{m} = \frac{dm}{dx}$. Полная масса струны равна в этом случае $m = \mathfrak{m}a$.

вывод уравнений движения закрепленной струны

Выведем уравнение движения такой струны в рамках лагражева формализма.

Для этого, необходимо найти её функцию Лагранжа $L = T - U$.

Рассмотрим бесконечно малый отрезок струны от точки x до точки $x + dx$.

Пусть в некоторый момент времени t поперечное смещение струны в точке x равно $z(t, x)$, а в точке $x + dx$, - равно $z(t, x + dx)$.

Тогда кинетическая энергия этого бесконечно малого отрезка равна

$$dT = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\left(\partial_t z\right)^2 dx \equiv \frac{1}{2}\mathfrak{m}\dot{z}^2 dx$$

Тогда полная кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a dx \mathfrak{m}\dot{z}^2$$

Потенциальная энергия струны возникает из той работы, которая долж на быть выполнена для того, чтобы растянуть отрезки.

Рассмотрим беконечно малый кусочек струны, занимающий положение от $(x, 0)$ до $(x + dx, 0)$, когда струна находится в равновесии.

Если кусочек струны мгновенно растягивается от (x, z) до $(x+dx, z+dz)$, то изменение длины ds бесконечно малого отрезка оказывается равным

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} - dx = dx\left[\sqrt{1 + \left(\partial_x z\right)^2} - 1\right]$$

Нужно как-то упростить это выражение, ведь колебания у нас возможны именно малые.

Предположим, что колебания малы, подразумевая под этим то, что в любой момент времени

$$|\partial_x z| \ll 1$$

в любой точке струны.

Это условие гарантирует, что поперечное смещение струны мало по сравнению с длиной струны; длина струны изменяется мало, так что можно говорить о постоянном натяжении λ.

Имея в виду условие малости поперечных колебаний, для изменения длины струны ds имеем

$$ds \approx dx\frac{1}{2}\left(\partial_x z\right)^2$$

(??????) Так как выполненная работа по растягиванию каждого бесконечно малого отрезка струны равна λds, то полная потенциальная энергия струны

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a dx\lambda\left(\partial_x z\right)^2$$

Значит, функция Лагранжа есть

$$L = T - U = \int_0^a dx\left[\frac{1}{2}\mathfrak{m}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(\partial_x z\right)^2\right],$$

откуда действие

$$S[z(t,x)] = \int_{t_0}^{t_1} dtL = \int_{V_{[2]}} d_2x\mathscr{L} = \int_{V_{[2]}} d_2x\left[\frac{1}{2}\mathfrak{m}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(\partial_x z\right)^2\right]$$

где $V_{[2]} = [t_0, t_1] \times [0, a]$.

Как видно из действия (3.5), динамика поперечных колебаний нерелятивистской струны, по существу, являет собой динамику локального поля на $V_{[2]}$;

в качестве поля выступает амплитуда z поперечных колебаний струны в момент времени t.

В связи с этим, уравнение движения для нерелятивистской струны, казалось бы, имеет вид полевых уравнений Эйлера-лагранжа

$$\partial_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_t z} + \partial_x\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_x z} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z} = \mathfrak{m}\ddot{z} - \lambda\partial_x^2 z = 0$$

Однако, следует быть осторожнее, ведь при выводе уравнений Эйлера-Лагранжа на поля накладывались определённые условия на границе $\partial V_{[4]}$ четырёхмерного объёма $V_{[4]} = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^3$: помимо стандартной фиксации начальных и конечных полевых конфигураций предполагалось зануление вариации полей на пространственной бесконечности.

влияние граничных условий на задачу

В нашем случае, когда мы имеем дело с ограниченной струной, необходимо уделить особое внимание граничным условиям.

Для того чтобы это аккуратно сделать, вернёмся к первопринципам и проварьируем действие (3.5):

$$\delta S[z(t,x)] = \int_{V_{[2]}} d_2x\left[\mathfrak{m}\partial_t z\partial_t\delta z - \lambda\partial_x z\partial_x\delta z\right] =$$

$$= \int_0^a dx \mathfrak{m} \partial_t z \delta z \bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \lambda \partial_x z \delta z \bigg|_0^a - \int_{V_{[2]}} d_2 x \left[\mathfrak{m} \partial_t^2 z - \lambda \partial_x^2 z\right] \delta z$$

Первое слагаемое в полученном выражении определяется конфигурацией струны в моменты времени t_0 и t_1.

Мы, как обычно, фиксируем эти конфигурации, то есть по существу полагаем

$$\delta z \left(t_0, x\right) = \delta z \left(t_1, x\right) = 0$$

Это влечёт за собой обращение в нуль первого слагаемого.

Особый интерес представляет собой второе слагаемое, относящееся к движению концов струны $z(t, 0)$ и $z(t, a)$:

$$- \lambda \int_{t_0}^{t_1} dt \partial_x z \delta z \bigg|_0^a = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[-\lambda \partial_x z(t, a) \delta z(t, a) + \lambda \partial_x z(t, 0) \delta z(t, 0)\right]$$

Чтобы получить в качестве уравнения движения формулу (3.6), необходимо граничное условие для каждого из двух слагаемых в последнем выражении.

Пусть $x_\star$ обозначает координату x концевой точки: $x_\star$ может равняться либо нулю, либо a.

Выбор концевой точки означает фиксацию значения $x_\star$.

Мы можем обратить каждое слагаемое в (3.7) в нуль, задав либо граничные условия Дирихле, либо граничные условия Неймана.

Для рассматриваемой струны граничные условия Дирихле задают положения концов струны.

Например, если мы прикрепим каждый конец струны к стенке, мы наложим граничные условия Дирихле

$$z(t, 0) = z(t, a) = 0$$

А если мы прикрепим невесомую петлю к каждому концу струны и позволим петлям скользить по двум стержням без трения, мы наложим граничные условия Неймана.

Для рассматриваемой струны граничные условия Неймана задают значения производной $\partial_x z$ на концах струны.

Так как петли невесомы и скользят по стержням без трения, то производная $\partial_x z$ должна обращаться в нуль в точках $x = 0$ и $x = a$.

Если бы это было не так, то наклон струны к стержню был бы отличен от нуля, и компонента натяжения струны ускоряла бы петли в направлении оси Z.

Так как каждая петля невесома, их ускорение было бы бесконечно большим.

Это невозможно, поэтому мы накладываем граничные условия Неймана

$$\partial_x z(t, 0) = \partial_x z(t, a) = 0$$

Такие граничные условия (условия Неймана), как мы только что поняли, применяются для струн, концевые точки которых могут свободно двигаться в поперечном направлении, т.е. в направлении оси Z.

Рассмотрим концевую точку $x_\star$ и связанное с ней слагаемое в (3.7).

Если мы накладываем граничное условие Дирихле, положение выбранной конечной точки фиксируется во времени, и мы требуем, чтобы вариация $\delta z \left(t, x_\star\right)$ обращалась в нуль.

Из этого следует, что выбранное слагаемое обратится в нуль.

С другой стороны, если мы предполагаем, что концевая точка может свободно перемещаться, то вариация $\delta z \left(t, x_\star\right)$ ничем не ограничена.

Слагаемое исчезает, если наложить условие Неймана: $\partial_x z\,(t, x_\star) = 0$ Граничные условия Дирихле можно переписать в такой форме, что станет явным их некоторое сходство с граничными условиями Неймана.

Если концевые точки струны фиксированы, производные по времени

от координат концевых точек должны обращаться в нуль:

$$\partial_t z\,(t, x_\star) = 0$$

Если записать граничные условия Дирихле в этой форме, мы ещё должны задать значения координат в фиксированных концевых точках. Чтобы лучше понять физическое содержание граничных условий, рассмотрим импульс струны p_z.

У импульса нет других компонент, так как мы предположили, что движение ограничено только направлением вдоль оси Z.

Этот импульс есть просто сумма импульсов каждого бесконечно малого отрезка вдоль струны:

$$p_z = \int_0^a dx \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_t z} = \int_0^a dx \mathfrak{m} \partial_t z$$

Посмотрим, сохраняется ли он:

$$\frac{dp_z}{dt} = \int_0^a dx \mathfrak{m} \partial_t^2 z = \int_0^a dx \lambda \partial_x^2 z = \lambda \partial_x z|_0^a$$

где мы использовали уравнение движения (3.6).

Видно, что в случае граничных условий Неймана импульс сохраняется, но для граничных условий Дирихле импульс в общем случае не сохраняется! Действительно, когда концы струны прикреплены к стенке, эта стенка постоянно действует на струну с определённой силой.

Почему это важно для теории струн? Долгое время струнные теоретики не принимали всерьёз возможность граничных условий Дирихле.

Казалось нефизическим, что импульс струны может перестать сохраняться.

Кроме того, к чему же могли быть прикреплены концы открытой струны? Ответ таков: они прикреплены к D -бранам - новому типу динамических протяжённых объектов.

Если струна прикреплена к D-бране, то общий импульс может сохраняться: импульс, теряемый струной, поглощается D -браной.

Детальный анализ поведения члена, индуцированного варьированием на пространственных границах, является решающим для осознания возможности существования D -бран в теории струн.

Уравнение Даламбера

Как видно из уравнения движения (3.6), свободные колебания струны описываются уравнением

$$\partial_t^2 z - v^2 \partial_x^2 z = (\partial_t - v\partial_x)(\partial_t + v\partial_x) z = 0, \quad v = \sqrt{\frac{\lambda}{\mathfrak{m}}},$$

которое называется уравнением Даламбера.

Найдём структуру общего решения уравнения Даламбера.

Для этого от переменных t и x перейдём к новым переменным $x_\pm$ согласно формуле

$$x_\pm = x \pm vt.$$

Имеются соотношения:

$$x = \frac{1}{2}(x_+ + x_-), \quad vt = \frac{1}{2}(x_+ - x_-),$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_\pm}=\frac{\partial x}{\partial x_\pm}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial x_\pm}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

и уравнение для амплитуды колебаний z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_-\partial x_+}=0$$

что его решение имеет вид

$$z=z_+\left(x_-\right)+z_-\left(x_+\right)$$

где $z_\pm$ -произвольные функции.

Таким образом,

$$z(t,x)=z_+(x-vt)+z_-(x+vt)$$

Пусть, например, $z_-=0$, так что $z(t,x)=z_+(x-vt)$.

Выясним смысл этого решения.

В каждой точке плоскости $x=\mathrm{const}$ амплитуда меняется со временем; в каждый данный момент времени амплитуда различна при разных x.

что $z(t,x)$ имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t, удовлетворяюших соотношениям $t-x/v=\mathrm{const}$, то есть

$$x=\mathrm{const}+vt$$

Это значит, что если в некоторый момент времени $t=0$ в некоторой точке x пространства амплитуда имела определённое значение, то через промежуток времени t то же самое значение амплитуда имеет на

расстоянии vt вдоль оси x от первоначального места.

Мы можем сказать, что все значения $z(t,x)$ распространяются в пространстве вдоль оси x со скоростью, равной скорости v.

Таким образом, $z_+\left(x_-\right)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x.

что $z_-\left(x_+\right)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси x.

Перейдём к нахождению конкретных решений уравнения движения для струны.

Начнём с рассмотрения свободных колебаний закреплённой струны и получим решение уравнения (3.12) при граничных условиях Дирихле: $z(t,0)=z(t,a)=0$ и начальных условиях

$$z(t,x)|_{t=0}=u(x),\quad \partial_t z(t,x)|_{t=0}=w(x)$$

Для этого воспользуемся методом Фурье: будем искать частные решения уравнения (3.12) в виде

$$z(t,x)=\chi(t)\psi(x)$$

Подставляя формулу (3.17) в (3.12), получаем

$$\psi(x)\partial_t^2\chi(t)-v^2\chi(t)\partial_x^2\psi(x)=0$$

или

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial_t^2\chi(t)}{\chi(t)}=\frac{\partial_x^2\psi(x)}{\psi(x)}$$

Левая часть равенства (3.18) зависит только от времени t, а правая только от координаты x; понятно, что равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (3.18) будет постоянной.

Обозначим её через $-\gamma$.

Тогда из (3.18) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\partial_t^2\chi(t) + v^2\gamma\chi(t) = 0$$
$$\partial_x^2\psi(x) + \gamma\psi(x) = 0$$

Чтобы получить нетривиальные решения вида (3.17), удовлетворяющие граничным условиям Дирихле: $z(t,0) = z(t,a) = 0$, необходимо найти нетривиальные решения уравнения (3.19b), удовлетворяющие гра-ничным условиям

$$\psi(x)|_{x=0} = \psi(x)|_{x=a} = 0$$

При $\gamma < 0$ общее решение (3.19 b) даётся формулой

$$\psi(x) = A_1 e^{\sqrt{-\gamma}x} + A_2 e^{-\sqrt{-\gamma}x}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.20), получаем

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A_1 e^{\sqrt{-\gamma}a} + A_2 e^{-\sqrt{-\gamma}a} = 0$$

откуда $A_1 = 0, A_2 = 0$.

Следовательно, решение уравнения (3.19b) тривиально при $\gamma < 0$.

При $\gamma = 0$ общее решение (3.19b) имеет вид

$$\psi(x) = A_1 + A_2 x.$$

Граничные условия дают

$$A_1 = 0, \quad A_1 + A_2 a = 0.$$

Отсюда находим $A_1 = 0, A_2 = 0$ и, следовательно, решение тривиально при $\gamma = 0$.

Наконец, при $\gamma > 0$ общее решение имеет вид

$$\psi(x) = A_1 \cos\sqrt{\gamma}x + A_2 \sin\sqrt{\gamma}x$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.20), получим

$$A_1 = 0, \quad A_1 \cos\sqrt{\gamma}a + A_2 \sin\sqrt{\gamma}a = 0$$

Значит, нетривиальное решение возможно только при собственных значениях

$$\gamma_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Этим собственным значениям отвечают собственные функции

$$\psi_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{a}$$

При $\gamma = \gamma_n$ общее решение уравнения (3.19a) имеет вид

$$\chi_n(t) = \alpha_n \cos\frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin\frac{\pi n v t}{a},$$

где α_n и β_n -произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$z_n(t,x) = \left(\alpha_n \cos\frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin\frac{\pi n v t}{a}\right)\sin\frac{\pi n x}{a}$$

удовлетворяют уравнению движения (3.12) и граничным условиям Дирихле при любых α_n и β_n.

В силу линейности и однородности уравнения Даламбера всякая конечная суперпозиция решений будет также решением.

То же, на самом деле, справедливо и для ряда

$$z(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\alpha_n\cos\frac{\pi nvt}{a}+\beta_n\sin\frac{\pi nvt}{a}\right)\sin\frac{\pi nx}{a}$$

если он сходится.

Остаётся определить коэффициенты α_n и β_n, чтобы удовлетворить начальным условиям (3.16).

Д,ля этого продифференцируем ряд по времени t:

$$\partial_t z=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\pi nv}{a}\left(-\alpha_n\sin\frac{\pi nvt}{a}+\beta_n\cos\frac{\pi nvt}{a}\right)\sin\frac{\pi nx}{a}$$

Полагая в уравнениях (3.23) и (3.24)$t=0$, в силу начальных условий получаем

$$u(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n\sin\frac{\pi nx}{a},\quad w(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\pi nv}{a}\beta_n\sin\frac{\pi nx}{a}$$

Формулы (3.25), представляют собой разложение функций $u(x)$ и $w(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,a)$.

Коэффициенты разложений (3.25) вычисляются по формулам

$$\alpha_n=\frac{2}{a}\int_0^a u(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx,\quad \beta_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^a w(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx$$

последние, как известно, можно легко получить следующим образом: умножим левую и правую части первого уравнения (3.25) на $\sin\frac{\pi n'x}{a}$ и проинтегрируем по x от $x=0$ до $x=a$:

$$\begin{aligned}\int_0^a dxu(x)\sin\frac{\pi n'x}{a}&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n\int_0^a dx\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi n'x}{a}=\\&=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n\int_0^a dx\left[\cos\frac{\pi\left(n'-n\right)x}{a}-\cos\frac{\pi\left(n'+n\right)x}{a}\right]=\\&=\frac{a}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n\left[\frac{\sin\left(n'-n\right)\xi}{n'-n}-\frac{\sin\left(n'+n\right)\xi}{n'+n}\right]\Bigg|_{\xi=0}^{\pi}=\frac{a}{2}\alpha_{n'}\end{aligned}$$

Отсюда следует первое слагаемое формулы (3.26).

Аналогичным образом получается второе равенство.

Вынужденные колебания закреплённой струны

Перейдём теперь к изучению вынужденных колебаний закреплённой струны под действием внешней силы $F(t,x)$, рассчитаной на единицу длины.

Эта задача сводится к решению уравнения

$$\partial_t^2 z-v^2\partial_x^2 z=f(t,x),\quad f(t,x)=F(t,x)/\mathfrak{m}$$

при граничных условиях Дирихле: $z(t,0)=z(t,a)=0$ и начальных условиях

$$z(t,x)|_{t=0}=u(x),\quad \partial_t z(t,x)|_{t=0}=w(x).$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$z(t,x) = z_0(t,x) + \tilde{z}(t,x)$$

где функция $\tilde{z}(t,x)$ -есть решение неоднородного уравнения

$$\partial_t^2 \tilde{z} - v^2 \partial_x^2 \tilde{z} = f(t,x)$$

удовлетворяющего граничным условиям Дирихле

$$\tilde{z}(t,x)|_{x=0} = 0, \quad \tilde{z}(t,x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$\tilde{z}(t,x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \tilde{z}(t,x)|_{t=0} = 0$$

а функция $z_0(t,x)$ -есть решение однородного уравнения

$$\partial_t^2 z_0 - v^2 \partial_x^2 z_0 = 0$$

удовлетворяющего граничным условиям Дирихле

$$z_0(t,x)|_{x=0} = 0, \quad z_0(t,x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$z_0(t,x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z_0(t,x)|_{t=0} = w(x)$$

Решение $\tilde{z}(t,x)$ представляет собой вынужденные колебания струны, то есть такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, когда начальные возмущения отсутствуют.

Решение же $z_0(t,x)$ представляют собой свободные колебания, то есть такие колебания, которые происходят только вследствие начальных возмущений.

Методы нахождения свободных колебаний $z_0(t,x)$ мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе.

Здесь остановимся на нахождении только вынужденных колебаний $\tilde{z}(t,x)$.

Как и в случае свободных колебаний, решение $\tilde{z}(t,x)$ будем искать в виде ряда

$$\tilde{z}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_n(t) \sin\frac{\pi n x}{a}$$

так что соответствующие граничные условия удовлетворяются сами собой.

Подставив ряд (3.31) в уравнение (3.29), получим

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\partial_t^2 \chi_n(t) + \omega_n^2 \chi_n(t)\right] \sin\frac{\pi n x}{a} = f(t,x)$$

где введено обозначение

$$\omega_n = \frac{\pi n v}{a}$$

Производя разложение функции $f(t,x)$ в интервале $(0,a)$ в ряд Фурье по синусам, находим, что

$$f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{a}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{a}\int_0^a dx f(t,x) \sin\frac{\pi n x}{a}.$$

Сравнивая выражения (3.32) и (3.33), получаем дифференциальные уравнения

$$\partial_t^2\chi_n(t) + \omega_n^2\chi_n(t) = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

определяющие функции $\chi_n(t)$.

Чтобы решение $\tilde{z}(t,x)$, определяемое рядом (3.31), удовлетворяло начальным условиям

$$\tilde{z}(t,x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t\tilde{z}(t,x)|_{t=0} = 0,$$

достаточно подчинить функции $\chi_n(t)$ условиям

$$\chi_n(0) = 0, \quad \partial_t\chi_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Решение уравнения (3.35), как известно, определяется свёрткой функции Грина оператора $\partial_t^2 + \omega_n^2$ с функцией $f_n(t)$; причём, как мы покажем ниже, именно запаздывающая функция Грина обеспечивает выполнение соотношений (3.36). Функция Грина оператора $\partial_t^2 + \omega_n^2$ определяется согласно

$$\mathcal{G}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

Действительно, функция (3.37), удовлетворяет условию

$$\left[\partial_t^2 + \omega_n^2\right] \mathcal{G}\left(t - t'\right) = \delta\left(t - t'\right)$$

которое и определяет функцию Грина оператора $\partial_t^2 + \omega_n^2$.

Чтобы взять интеграл (3.37), используем интегральную формулу Коши.

При $t \to +\infty$ фактор $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ экспоненциально стремится к нулю в нижней комплексной полуплоскости ω и контур интегрирования можно замкнуть в нижней полуплоскости по часовой стрелке, а при $t \to -\infty$ фактор $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ экспоненциально стремится к нулю в верхней полуплоскости переменной ω и контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости против часовой стрелки.

Если мы хотим получить решение, отличное от нуля только в будущем (при $t > 0$), то граничные условия необходимо выбрать таким образом, чтобы оба полюса были расположены в точках $\pm\omega_n - \mathrm{i}0$.

Действительно, при таком расположении полюсов при $t < 0$ внутри контура интегрирования нет ни одного полюса и согласно интегральной формуле Коши получаем функцию Грина, тождественно равную нулю в прошлом: Свёртка запаздывающей функции Грина с функцией $f_n(t)$ даёт решение уравнения (3.35) при начальных условиях (3.36):

$$\chi_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin\omega_n(t - \tau) d\tau$$

Действительно, подставляя вместо функции $f_n(\tau)$ её выражение (3.34), получаем

$$\chi_n(t) = \frac{2}{\omega_n a} \int_0^t d\tau \int_0^a dx f(t,x) \sin\omega_n(t-\tau) \sin\frac{\pi n x}{a}$$

причём

$$\chi_n(0) = 0, \quad \partial_t\chi_n(0) = \ldots = 0$$

то есть начальные условия (3.36) выполняются. Зная $\chi_n(t)$, решение задачи о вынужденных колебаниях в соответствии с формулами (3.27) и (3.19), можно записать в виде

$$z(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\alpha_n \cos\frac{\pi n v t}{a} + \beta_n \sin\frac{\pi n v t}{a}\right) \sin\frac{\pi n x}{a} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_n(t) \sin\frac{\pi n x}{a}$$

где
$$\alpha_n = \frac{2}{a}\int_0^a u(x)\sin\frac{\pi n x}{a}dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^a w(x)\sin\frac{\pi n x}{a}dx.$$
В качестве примера рассмотрим колебания струны под действием однородной периодической силы
$$f(t,x) = f_0\sin\Omega t$$
причём, начальные смещения и начальные скорости отсутствуют.

В этом случае, как следует из формулы (3.35), решение выражается рядом
$$z(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_n(t)\sin\frac{\pi\pi x}{a}$$
где коэффициенты $\chi_n(t)$ определяются по формуле (3.34) и оказываются равными
$$\begin{aligned}
\chi_n(t) = &\frac{2f_0}{\omega_n a}\int_0^t d\tau\int_0^a dx\sin\Omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)\sin\frac{\pi n x}{a} = \\
= &\frac{f_0}{\omega_n a}\int_0^t d\tau\left[\cos\left(\Omega\tau - \omega_n(t-\tau)\right) - \cos\left(\Omega\tau + \omega_n(t-\tau)\right)\right]\frac{a}{\pi n}\int_0^{\pi n} d\xi\sin\xi = \\
= &\frac{f_0}{\omega_n a}\left[\frac{\sin\left(\left(\Omega+\omega_n\right)\tau - \omega_n t\right)}{\Omega+\omega_n} - \frac{\sin\left(\left(\Omega-\omega_n\right)\tau + \omega_n t\right)}{\Omega-\omega_n}\right]\Bigg|_{\tau=0}^{t}\frac{a}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \\
= &\frac{2f_0}{\omega_n \pi n}\left[1-(-1)^n\right]\frac{\Omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\Omega t}{\Omega^2-\omega_n^2}
\end{aligned}$$
В приведённьх выкладках предполагалось, что ни одна резонансная частота $\omega_n = \frac{\pi n v}{a}$ не совпадает с частотой внешней силы Ω.

Подставляя выражение для $\chi_n(t)$ в (3.37), получаем
$$z(t,x) = \frac{4f_0 v}{a}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\Omega\sin\omega_{2n-1}t - \omega_{2n-1}\sin\Omega t}{\omega_{2n-1}^2\left(\Omega^2-\omega_{2n-1}^2\right)}\sin\frac{\omega_{2n-1}x}{v}$$
В случае, когда частота внешней силы Ω совпадает с одной из резонансных частот $\omega_{2n'-1}$, то функцию $\chi_n(t)$ легко определяется из (3.38): раскрывая неопределённость $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, получаем
$$\chi_{2n'-1}(t) = \frac{2f_0 v}{\omega_{2n'-1}^2 a}\left[\omega_{2n'-1}^{-1}\sin\omega_{2n'-1}t - t\cos\omega_{2n'-1}t\right]$$
Отсюда смещение $z(t,x)$ в резонансном случае выражается формулой
$$\begin{aligned}
z(t,x) = &\frac{2f_0 v}{\omega_{2n'-1}^2 a}\left[\omega_{2n'-1}^{-1}\sin\omega_{2n'-1}t - t\cos\omega_{2n'-1}t\right] + \\
&+ \frac{4f_0 v}{a}\sum_{n\neq n'}\frac{\omega_{2n'-1}\sin\omega_{2n-1}t - \omega_{2n-1}\sin\omega_{2n'-1}t}{\omega_{2n-1}^2\left(\omega_{2n'-1}^2-\omega_{2n-1}^2\right)}\sin\frac{\omega_{2n-1}x}{v}
\end{aligned}$$
Заметим, что в реальных физических системах решение вида (3.40), содержащее слагаемое с линейно нарастающей во времени амплитудой колебаний, существовать не может из-за наличия диссипации энергии.

Колебания струны с подвижными концами

Рассмотрим вынужденные колебания струны под действием внешней силы

$$\partial_t^2 z - v^2 \partial_x^2 z = f(t, x)$$

когда концы её не закреплены, а двигаются по закону

$$z(t,x)|_{x=0} = x_1(t), \quad z(t,x)|_{x=a} = {}_2(t)$$

при начальных условиях

$$z(t,x)|_{t=0} = u(x), \quad \partial_t z(t,x)|_{t=0} = w(x)$$

К решению этой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (3.42) неоднородны.

Но эта задача легко сводится к задаче с однородныыми граничными условиями. Введём вспомогательную функцию

$$\tilde{z}(t,x) = x_1(t) + [x_2(t) - x_1(t)] \frac{x}{a}$$

Ясно, что

$$\tilde{z}(t,x)|_{x=0} = x_1(t), \quad \tilde{z}(t,x)|_{x=a} = x_2(t)$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$z(t,x) = z_0(t,x) + \tilde{z}(t,x)$$

где $z_0(t,x)$ -новая неизвестная функция. В силу граничных условий (3.42),(3.45) и начальных условий (3.43), функция $z_2(t,x)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$z_0(t,x)|_{x=0} = 0, \quad z_0(t,x)|_{x=a} = 0$$

и начальным условиям

$$\begin{gathered} z_0(t,x)|_{t=0} = u(x) - x_1(0) - [x_2(0) - x_1(0)] \tfrac{x}{a} = u_1(x) \\ \partial_t z_0(t,x)|_{t=0} = w(x) - \dot{x}_1(0) - [\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0)] \tfrac{x}{a} = w_1(x) \end{gathered}$$

Подставляя (3.46) в (3.41), получаем

$$\partial_t^2 z_0 - v^2 \partial_x^2 z_0 + \partial_t^2 \tilde{z} - v^2 \partial_x^2 \tilde{z} = f(t,x)$$

Учитывая определение (3.44) функции $\tilde{z}(t,x)$, получаем уравнение для искомой функции

$$\partial_t^2 z_0 - v^2 \partial_x^2 z_0 = f_1(t,x)$$

где введено обозначение

$$f_1(t,x) = f(t,x) - \ddot{x}_1(0) - [\ddot{x}_2(0) - \ddot{x}_1(0)] \frac{x}{a}$$

В результате мы пришли к задаче с однородными граничными условиями, метод решения которой нам уже известен.

Связь с теорией струн (???)

(мб когда-то открою книгу по теории струн, укажу это, пока не до этого, умф ведь занимаемся.)

9.2.2 Колебание мембран

Простейшее усложнение - мембрана.

Колебания прямоугольной мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую плёнку.

Задача о свободных колебаниях мембраны сводится к решению двумер- ного волнового уравнения

$$\partial_t^2 z - v^2 \Delta z = 0, \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

при граничных условиях

$$z(t,x,y)|_{x=0} = 0, \quad z(t,x,y)|_{x=a_x} = 0, \quad z(t,x,y)|_{y=0} = 0, \quad z(t,x,y)|_{y=a_y} = 0$$

и начальных условиях

$$z(t,x,y)|_{t=0} = u(x,y), \quad \partial_t z(t,x,y)|_{t=0} = w(x,y),$$

где $z(t,x,y)$ -величина смещения мембраны от положения равновесия. Частные решения будем искать в виде

$$z(t,x,y) = \chi(t)\psi(x,y)$$

Они должны удовлетворять граничным условиям (3.52).

Подставляя (3.54) в формулу (3.51), получаем

$$\frac{\partial_t^2 \chi(t)}{v^2 \chi(t)} = \frac{\partial_x^2 \psi(x,y) + \partial_y^2 \psi(x,y)}{\psi(x,y)}$$

что это равенство возможно только в случае, когда обе его части равны константе.

Обозначим её через $-k^2$ и, принимая во внимание граничные условия (3.52), находим

$$\ddot{\chi}(t) + k^2 v^2 \chi(t) = 0, \quad \Delta\psi(x,y) + k^2 \psi(x,y) = 0$$

причём

$$\psi(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \psi(x,y)|_{x=a_x} = 0, \quad \psi(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \psi(x,y)|_{y=a_y} = 0$$

Граничную задачу (3.55) и (3.56) будем решать методом Фурье, полагая

$$\psi(x,y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$$

Подставляя (3.57) в (3.55), получаем

$$-\frac{\partial_x^2 \psi_1(x)}{\psi_1(x)} = k^2 + \frac{\partial_y^2 \psi_2(y)}{\psi_2(y)}$$

Отсюда получаем два уравнения

$$\partial_x^2 \psi_1(x) + k_x^2 \psi_1(x) = 0, \quad \partial_y^2 \psi_2(y) + k_y^2 \psi_2(y) = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Общее решение уравнений (3.58) имеет вид

$$\psi_1(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x, \quad \psi_2(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y$$

$_3$(3.56) получаем граничные условия

$$\psi_1(x)|_{x=0} = 0, \quad \psi_1(x)|_{x=a_x} = 0, \quad \psi_2(y)|_{y=0} = 0, \quad \psi_2(y)|_{y=a_y} = 0$$

Откуда ясно, что $A_1 = B_1 = 0$.

Если мы положим $A_2 = B_2 = 1$, то окажется

$$\psi_1(x) = \sin k_x x, \quad \psi_2(y) = \sin k_y y$$

причём должно быть

$$\sin k_x a_x = 0, \quad \sin k_y a_y = 0$$

з последнего выражения следует, что k_x и k_y имеют счётное множество значений:

$$k_n = \frac{\pi n}{a_x}, \quad k_m = \frac{\pi m}{a_y}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Тогда из равенства $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ получаем значения постоянной k^2:

$$k_{nm}^2 = k_n^2 + k_m^2$$

Таким образом, собственным числам (3.62) и (3.63) соответствуют собственные функции

$$\psi_{nm}(x, y) = \sin k_n x \sin k_m y$$

граничной задачи (3.56). Обратимся теперь к уравнению (3.55).

Его общее решение имеет вид

$$\chi_{nm}(t) = \alpha_{nm} \cos v k_{nm} t + \beta_{nm} \sin v k_{nm} t$$

Таким образом, частные решения уравнения (3.51), удовлетворяющие граничным условиям (3.52), имеют вид

$$z_{nm}(t, x, y) = [\alpha_{nm} \cos v k_{nm} t + \beta_{nm} \sin v k_{nm} t] \sin k_n x \sin k_m y$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3.53), составим ряд

$$z(t, x, y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} [\alpha_{nm} \cos v k_{nm} t + \beta_{nm} \sin v k_{nm} t] \sin k_n x \sin k_m y$$

Для выполнения начальных условий необходимо

$$\begin{aligned} z(t, x, y)|_{t=0} &= u(x, y) = \textstyle\sum_{n,m \in \mathbb{N}} \alpha_{nm} \sin k_n x \sin k_m y \\ \partial_t z(t, x, y)|_{t=0} &= w(x, y) = \textstyle\sum_{n,m \in \mathbb{N}} v k_{nm} \beta_{nm} \sin k_n x \sin k_m y \end{aligned}$$

Для определения α_{nm} и β_{nm} умножим обе части уравнений (3.67) на $\sin k_{n'} x \sin k_{m'} y$ и проинтегрируем по x от 0 до a_x и по y от 0 до a_y Принимая во внимание, что

$$\int_0^{a_x} \int_0^{a_y} dx dy \sin k_n x \sin k_m y \sin k_{n'} x \sin k_{m'} y = \frac{a_x a_y}{4} \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{nm} &= \tfrac{4}{a_x a_y} \textstyle\int_0^{a_x} \int_0^{a_y} dx dy u(x, y) \sin k_n x \sin k_m y \\ \beta_{nm} &= \tfrac{4}{v a_x a_y k_{nm}} \textstyle\int_0^{a_x} \int_0^{a_y} dx dy w(x, y) \sin k_n x \sin k_m y \end{aligned}$$

Решение (3.66) можно записать также в виде

$$z(t, x, y) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \sigma_{nm} \sin(v k_{nm} t + \varphi_{nm}) \sin k_n x \sin k_m y$$

Где

$$\sigma_{nm} = \sqrt{\alpha_{nm}^2 + \beta_{nm}^2}, \quad \varphi_{nm} = \arctan \frac{\alpha_{nm}}{\beta_{nm}}$$

Видно, что частота собственного колебания определяется формулой $\omega_{nm} = v k_{nm}$

9.3 краевая задача в гильбертовом пространстве

(тут же и начало первого задания после разбора с операторами)

9.4 метод фурье!

10 Задачи в пространстве $S'(\mathbb{R})$

10.1 линейный дифференциальный оператор в $S'(\mathbb{R})$

вкратце о решениях задач с линейным оператором

Рассмотрим линейный оператор $L = P\left(\frac{d}{dx}\right)$, где

$$P(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_{N-1} z + a_N, \quad z, a_0 \neq, \ldots, a_N \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$$

Требуется найти в $S'(\mathbb{R})$ все решения уравнения

$$Lu(x) = \delta(x), \quad u(x) \in S'(\mathbb{R})$$

После преобразования Фурье оно станет в виде:

$$P(-iy)F[u(x)](y) = 1 \text{ in } \quad S'(\mathbb{R})$$

Видим, что чтобы продвинуться дальше, нужно решить вопрос, что же такое $\frac{1}{P}$? Разложим в простые дроби.

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk}}{(z-\lambda_n)^k}, \quad z \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_m$$

И определим следующие множества:

$$\lambda_0 = \left\{n \in \overline{1, N} : \operatorname{Re} \lambda_n = 0\right\}$$

$$\lambda_+ = \left\{n \in \overline{1, N} : \operatorname{Re} \lambda_n > 0\right\}$$

$$\lambda_- = \left\{n \in \overline{1, N} : \operatorname{Re} \lambda_n < 0\right\}$$

Тогда можно переписать

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(-iy)} &= \sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk}}{(-iy-\lambda_n)^k} + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk}}{(-iy-i\mu_n)^k} = \\ &= \sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{i^k b_{nk}}{(y-i\lambda_n)^k} + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{i^k b_{nk}}{(y+\mu_n)^k} \end{aligned} \tag{10.1}$$

дальше хз

$$v(y) = \sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{i^k b_{nk}}{(y-i\lambda_n)^k} + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} i^k b_{nk} P \frac{1}{(y+\mu_n)^k} \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} u_0(x) = \textstyle\sum_{n \in \lambda_+ \cup \lambda_-} \sum_{k=1}^{r_n} i^k b_{nk} \quad & F^{-1}\left[\tfrac{1}{(y-i\lambda_n)^k}\right](x) + \\ & + \textstyle\sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} i^k b_{nk} F^{-1}\left[P \tfrac{1}{(y+\mu_n)^k}\right](x) \end{aligned} \tag{10.3}$$

10.1.1 итоговые методы

задача

$$Lu(x) = \delta(x), \quad u(x) \in S'(\mathbb{R})$$

решается по формуле

$$\begin{aligned} u(x) = \sum_{n \in \lambda_+} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{x\lambda_n} (-\theta(-x)) + \\ + \sum_{n \in \lambda_- k=1} \sum_{n=1}^{r_n} \frac{b_{nk} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{x\lambda_n} \theta(x) + \\ + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b_{nk} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{x\lambda_n} \underbrace{\frac{\text{sign}(x)}{2}}_{=\theta(x)-\frac{1}{2}} + \\ + \sum_{n \in \lambda_0} \sum_{k=1}^{r_n} c_{nk} x^{k-1} e^{x\lambda_n} \end{aligned} \tag{10.4}$$

10.1.2 примеры простейших задач

Самая простая задача, которую хочется решать имеет вид:

$$Lu(x) = \delta(x), \qquad u(x) \in S'(\mathbb{R}), L = P(\frac{d}{dx}) \tag{10.5}$$

Пример 1. *Решим ее например для $P(z) = (z-1)(z-i)$.*
имеем:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{i}{(1+i)} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-i} \right), \quad z \neq 1, i$$

$$u(x) = \frac{i}{(1+i)} \left(e^x(-\theta(-x)) - e^{ix}\theta(x) \right) + ae^{ix} \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Пример 2. *Второй пример, для $P(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1), \quad z \in \mathbb{C}$*

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right), \quad z \neq 1, -1$$

$$u(x) = \frac{1}{2} \left(e^x(-\theta(-x)) - e^{-x}\theta(x) \right)$$

11 Интегральные уравнения

(второе задание по УМФ)
и пока что здесь не следует мне в принципе находиться и структуру я вообще не понимаю и не думал о ней.

11.1 Теория Фредгольма

(по прикладной математике для инженеров Мышкис)

11.1.1 Уравнения с вырожденными ядрами

11.1.2 Общий случай

11.1.3 Применение бесконечных систем алгебраических уравнений

11.1.4 Применение численного интегрирования

11.1.5 Уравнения с малыми ядрами

11.1.6 возмущения ядра

11.1.7 Характер решений

11.1.8 Уравнения Вольтерра 2го рода

11.1.9 Уравнения со слабой особенностью

11.1.10 Другие темы

(??? тут проблема, что я не особо этим в принципе планирую заниматься, так что пока так будут висеть, нужно будет - увеличу разделы потом.)

Уравнения с вполне непрерывными операторами

12.

Уравнения с положительными ядрами

(456).
3.

Уравнения с симметричны ми ядрами

. .
1.

Аналогия с конечномерными уравнениями

(457). 2.

Разложение ядра по собственным функциям

(458). 3.

Следствия

(460). 4.

Переход от несимметричного ядра к симметричному

(464). 5.

Экстремальное свойство характеристических чисел

(466).
6.

Уравнения с самосопряженными операторами

(469).
4.

Некоторые специальные классы уравнений

.
1.

Уравнения Вольтерра 1-го рода

(472). 2.

Уравнения Фредгольма 1-го рода с симметричным ядром

(475). 3.

Некорректные задачи (!!???)

интересно! не знаю пока.

признаки

примеры

Уравнения Фредгольма 1-го рода, общий случай

Применение производящих функций

(480).
6.

Уравнение Вольтерра с разностным ядром

(484). 7.

Уравнение Фредгольма с разностным ядром на оси

(486). 8.

Уравнение Фредгольма с разностным ядром на полуоси

(492).
.

Сингулярные интегральные уравнения

.
1.

Сингулярные интегралы

.

Формулы обращения

(499).
3.

Непосредственное применение формул обращения

Переход к краевой задаче, простой пример

Обший замкнутый контур

Незамкнутый контур

Приведение к бесконечной системе алгебраических уравнений

Нелинейные интегральные уравнения

Переход к конечным уравнениям

2.

Метод итераций

Метод малого параметра

4.

Применение теории симметричных ядер

(520).
5.

Применение теории неподвижных точек

(521).
6.

Вариационные методы

(524).
7.

Уравнения с параметром

(525). 8.

Разветвление решений

11.2 задача Штурма-Лиувилля

Обсудим подробно задачу Штурма-Лиувилля.

12 Другие методы

12.1 метод характеристик

просто знаю, что он есть

12.2 потенциалы

я хз, что этот раздел тут делает. но в [?] это большой раздел.

12.3 вариационная задача

в главе про механику и диффуры мы научились решать именно их задачи, а тут именно усложненный случай, где

Часть III

Типичные методы для обобщенных уравнений

(потом просто выгружу Константинова теорию и все, пока не так это важно. удалю свои записи давние незрелые.)

13 Типичные обобщенные задачи

13.0.1 Примеры задач про обобщенную задачу Коши для трехмерного волнового уравнения (!??!)

(!!! много в 1ю добавлю!!!)

Теория

В этом пособии для дистанционного занятия мы найдём функцию Грина трехмерного волнового оператора и рассмотрим примеры решения обобщенных задач Коши для трехмерного волнового уравнения. Пусть $a>0, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Будем использовать обозначение

$$\Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Определение 1. Обобщённой задачей Коши для трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt}-a^2\Delta_x u=f(t,x),\quad t\geq 0,\quad x\in\mathbb{R}^3$$

называют задачу, в которой требуется найти решения $u(t,x)\in S'\left(\mathbb{R}^4\right)$ уравнения (1), у которых носители содержатся в полупространстве

$$\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^4: t\geq 0, x\in\mathbb{R}^3\right\}$$

При этом считаем, что и у обобщенной функции $f(t,x)$ носитель также содержится в полупространстве (2).

Оператор, стоящий в левой части уравнения (1), называют оператором

Даламбера. Замечание 1. В случае, когда функции $u_0(x), u_1(x), f(x,t)$ являются функциями медленного роста, классическую задачу Коши для трехмерного

волнового уравнения

$$\begin{aligned}
&u_{tt}-a^2\Delta_x u=f(t,x),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^3,\\
&\left.u\right|_{t=0}=u_0(x)\\
&\left.u_t\right|_{t=0}=u_1(x)
\end{aligned}$$

можно свести к решению обобщенной задачи Коши для трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt}(t,x)=a^2\Delta_x u(t,x)+f(t,x)+\delta'(t)u_0(x)+\delta(t)u_1(x)$$

Доказательство этого утверждения практически дословно совпадает с доказательством, проведенным для одномерного волнового уравнения.

Перейдем теперь к вычислению функции Грина оператора Даламбера в трехмерном случае.

Пример: поиск функции Грина оператора $\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x$

Найти в $S'(\mathbb{R}^4)$ функцию Грина $\mathcal{E}(t,x)$ оператора Даламбера

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x,$$

удовлетворяющую условию $\operatorname{supp}\mathcal{E}(t,x) \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$.

Решение. Функция $\mathcal{E}(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2\Delta_x\mathcal{E} = \delta(t,x)$$

Возьмем преобразование Фурье по x

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F_x[\mathcal{E}] - a^2\left((-i\xi_1)^2 + (-i\xi_2)^2 + (-i\xi_3)^2\right)F_x[\mathcal{E}] = \delta(t)\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}F_x[\mathcal{E}] + a^2|\xi|^2F_x[\mathcal{E}] = \delta(t)\end{gathered}$$

Обозначив $g(t,\xi) = F_x[\mathcal{E}](t,\xi)$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + a^2|\xi|^2 g = \delta(t)$$

При поиске функции Грина одномерного волнового оператора мы выяснили, что при каждом фиксированном ξ уравнение (3) имеет единственное решгение

$$g(t,\xi) = \theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$$

носитель которого входит в множество $t \geq 0$. Докажем, что обобщённая функция $g(t,\xi)$ будет решением уравнения (3) И В $S'(\mathbb{R}^4)$ Для любой основной функции $\varphi(t,\xi) \in S(\mathbb{R}^4)$ справедливы равенства

$$\langle g_{tt}, \varphi\rangle = \langle g, \varphi_{tt}\rangle = \int_{\mathbb{R}^4}\theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\varphi_{tt}dtd\xi$$

В силу абсолютной интегрируемости подынтегральной функции получаем

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}^4}\theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\varphi_{tt}dtd\xi = \int_{\mathbb{R}^3}d\xi\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\varphi_{tt}dt =\\ = \int_{\mathbb{R}^3}d\xi\left(\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\varphi_t\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\cos(a|\xi|t)\varphi_t dt\right) =\\ = \int_{\mathbb{R}^3}d\xi\left(-\cos(a|\xi|t)\varphi|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}a|\xi|\sin(a|\xi|t)\varphi dt\right) =\end{gathered}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}d\xi\left(\varphi(0,\xi) - a^2|\xi|^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\varphi dt\right) = \left\langle\delta(t) - a^2|\xi|^2 g, \varphi\right\rangle$$

Доказано. Теперь для того, чтобы найти функцию Грина, остается вычислить обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{E}(t,x) = F_\xi^{-1}[g](t,x) = F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right](t,x)$$

Ранее при решении задания 1.23 б) была получена формула

$$F_x\left[\frac{\delta(at-|x|)}{|x|}\right](t,\xi) = \frac{4\pi\theta(t)\sin(at|\xi|)}{|\xi|}$$

(см. пособие для дистанционного занятия «О замене переменной в аргументе дельта-функций»).

Также при решении задания 1.23 б) было установлено что для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S\left(\mathbb{R}^4\right)$ выполнено равенство

$$\left\langle \frac{\delta(at-|x|)}{|x|}, \varphi(t,x) \right\rangle = \int_0^{+\infty} dt \int_{|x|=at} \frac{1}{at}\varphi(t,x)dS_x$$

правую часть которого можно переписать в виде

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{|x|=at} \frac{1}{at}\varphi(t,x)dS_x = \left\langle \frac{\theta(t)}{at}\delta_{S_{at}}(x), \varphi(t,x) \right\rangle$$

Поэтому

$$\mathcal{E}(t,x) = F_\xi^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right](t,x) = \frac{\delta(at-|x|)}{4\pi a|x|} = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{Sat}(x)$$

Ответ. $\mathcal{E}(t,x) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$.

Замечание 2. Выведем еше одну полезную и удобную формулу, часто применяемую при решении задач. Для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S\left(\mathbb{R}^4\right)$ выполнено равенство

$$\langle \mathcal{E}(t,x), \varphi(t,x) \rangle = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a}, x\right)}{|x|}dx$$

Действительно,

$$\langle \mathcal{E}(t,x), \varphi(t,x) \rangle = \left\langle \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \varphi(t,x) \right\rangle = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}\int_{|x|=at} \varphi(t,x)dS_x$$

В результате замены переменной $s = at$ во внешнем интеграле получаем

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{4\pi a^2}\textstyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}\int_{|x|=at}\varphi(t,x)dS_x = \tfrac{1}{4\pi a^2}\int_0^{+\infty}\frac{ds}{s}\int_{|x|=s}\varphi\left(\frac{s}{a},x\right)dS_x = \\ &= \tfrac{1}{4\pi a^2}\textstyle\int_0^{+\infty} ds\int_{|x|=s}\frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a},x\right)}{|x|}dS_x = \tfrac{1}{4\pi a^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a},x\right)}{|x|}dx \end{aligned}$$

В последнем равенстве была применена теорема Фубини, т.к. подынтегральная функция является абсолютно интегрируемой. Формула (4) получена. Замечание 3. На лекциях доказано, что для любой обобщенной функции $f \in S'\left(\mathbb{R}^4\right)$, носитель которой содержится в полупространстве

$$\left\{(t,x) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\right\}$$

существует свертка $f * \mathcal{E}$. По свойствам сверток обобщенных функций эта свертка $f * \mathcal{E}$ является обобщенным решением уравнения

$$\Box_a u = f, \quad t \geq 0$$

Замечание 4. Свертка $f * \mathcal{E}$ является единственным решением обобщенной задачи Коши для уравнения (5), поскольку, как мы выяснили при решении задачи 1, соответствующее однородное уравнение не имеет ненулевых решений с носителями в полупространстве $\{(t,x) \in \mathbb{R}^4, t \geq 0\}$.

Замечание 5. При решении обобщенных задач Коши для трехмерного волнового уравнения вычислять функцию Грина оператора Даламбера не требуется, нужно использовать готовую формулу, полученную в задаче 1.

Пример: найти решение обобщенной задачи Коши $u_{tt}-\Delta_x u = \theta(t)\delta(x)+\delta(t)|x| \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$

Решение. Искомое решение будет сверткой правой части уравнения с функцией Грина для оператора Даламбера

$$\begin{gathered} u(t,x) = (\theta(t)\delta(x) + \delta(t)|x|) * \left(\tfrac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right) = \\ = (\theta(t)\delta(x)) * \left(\tfrac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right) + (\delta(t)|x|) * \left(\tfrac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right) \end{gathered}$$

1. Найдем сначала первую свертку. По определению свертки обобщенных функций для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S\left(\mathbb{R}^4\right)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ должно быть выполнено равенство

$$\begin{gathered} \left\langle(\theta(t)\delta(x)) * \left(\tfrac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right), \varphi(t,x)\right\rangle = \\ = \lim_{R\to+\infty}\left\langle\theta(t)\delta(x), \eta_1\left(\tfrac{t}{R}, \tfrac{x}{R}\right)\left\langle\tfrac{1}{4\pi\tau}\delta_{S_\tau}(y), \varphi(t+\tau, x+y)\right\rangle\right\rangle = \\ = \lim_{R\to+\infty}\left\langle\theta(t), \eta_1\left(\tfrac{t}{R}, 0\right)\left\langle\tfrac{1}{4\pi\tau}\delta_{S_\tau}(y), \varphi(t+\tau, y)\right\rangle\right\rangle \end{gathered}$$

Применяя полезную формулу (4) из замечания 2, находим

$$\lim_{R\to+\infty}\left\langle\theta(t), \eta_1\left(\frac{t}{R}, 0\right)\left\langle\frac{1}{4\pi\tau}\delta_{S_T}(y), \varphi(t+\tau, y)\right\rangle\right\rangle =$$

Оценим подынтегральную функцию. Для этого, воспользовавшись ограниченностью 1-срезки и свойствами функции $\varphi(s,z) \in S\left(\mathbb{R}^4\right)$, получаем, что

$$\exists M > 0 \quad \exists A > 0 \text{ такие, что}$$

$$\begin{gathered} \left|\eta_1\left(\tfrac{t}{R}, 0\right)\right| \leq M \\ |\varphi(s,z)| \leq \tfrac{A}{(1+s^2)(1+|z|^4)} \end{gathered}$$

Кроме того, заметим, что подынтегральная функция в формуле (6) может быть отлична от нуля лишь при $t > 0$, поэтому

$$\begin{gathered} \left|\theta(t)\eta_1\left(\tfrac{t}{R}, 0\right)\tfrac{\varphi(t+|y|,y)}{4\pi|y|}\right| \leq \tfrac{M\cdot A}{4\pi|y|(1+(t+|y|)^2)(1+|y|^4)} \leq \\ \leq \tfrac{M\cdot A}{4\pi|y|(1+t^2)(1+|y|^4)} \end{gathered}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (6) можно применять и теорему Фубини, и теорему Лебега об ограниченной сходимости. Таким образом,

$$\begin{gathered} \lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3}\theta(t)\eta_1\left(\tfrac{t}{R}, 0\right)\tfrac{\varphi(t+|y|,y)}{4\pi|y|}dy = \\ = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^4}\theta(t)\eta_1\left(\tfrac{t}{R}, 0\right)\tfrac{\varphi(t+|y|,y)}{4\pi|y|}dtdy = \int_{\mathbb{R}^4}\theta(t)\tfrac{\varphi(t+|y|,y)}{4\pi|y|}dtdy \end{gathered}$$

Сделав во внутреннем интеграле замену переменных

$$\begin{cases} s = t + |y| \\ z = y \end{cases} \qquad |J| = 1$$

Получим

$$\int_{\mathbb{R}^4}\theta(t)\frac{\varphi(t+|y|,y)}{4\pi|y|}dtdy = \int_{\mathbb{R}^4}\theta(s-|z|)\frac{\varphi(s,z)}{4\pi|z|}dsdz = \left\langle\frac{\theta(s-|z|)}{4\pi|z|}, \varphi(s,z)\right\rangle$$

2. Теперь найдем вторую свертку. По определению свертки для любой основной функции $\varphi(t,x) \in S\left(\mathbb{R}^4\right)$ и любой 1-срезки $\eta_1(t,x)$ выполнено равенство

$$\begin{gathered}\left\langle (\delta(t)|x|) * \left(\tfrac{1}{4\pi t}\delta_{S_t}(x)\right), \varphi(t,x)\right\rangle = \\ = \lim_{R\to+\infty}\left\langle \delta(t)|x|, \eta_1\left(\frac{t}{R},\frac{x}{R}\right)\left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\delta_{S_T}(y), \varphi(t+\tau, x+y)\right\rangle\right\rangle = \\ = \lim_{R\to+\infty}\left\langle |x|, \eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\left\langle \frac{1}{4\pi\tau}\delta_{S_\tau}(y), \varphi(\tau, x+y)\right\rangle\right\rangle =\end{gathered}$$

Применяя полезную формулу (4) из замечания 2, находим

$$\begin{gathered}\lim_{R\to+\infty}\left\langle |x|, \eta_1\left(0,\tfrac{x}{R}\right)\left\langle \tfrac{1}{4\pi\tau}\delta_{S_\tau}(y), \varphi(\tau, x+y)\right\rangle\right\rangle = \\ = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} dx|x|\eta_1\left(0,\tfrac{x}{R}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\tfrac{\varphi(|y|,x+y)}{4\pi|y|}dy = \\ = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} dx\int_{\mathbb{R}^3}\tfrac{\varphi(|y|,x+y)}{4\pi|y|}|x|\eta_1\left(0,\tfrac{x}{R}\right)dy\end{gathered}$$

Сделаем оценки, необходимые для применения теоремы Лебега об ограниченной сходимости и теоремы Фубини.

Поскольку $\varphi(s,z) \in S\left(\mathbb{R}^4\right)$, то для любого многочлена $P(s,|z|)$ существует такое число $A > 0$, что для всех $(s,z) \in \mathbb{R}^4$ выполнено неравенство

$$|P(s,|z|)\varphi(s,z)| \leq A$$

Для выбора подходящего многочлена обозначим

$$z = x + y, \quad s = |y|$$

тогда

$$\begin{gathered}\left(1+|x|^6\right)\left(1+|y|^4\right) = \left(1+|z-y|^6\right)\left(1+|y|^4\right) \leq \left(1+(|z|+|y|)^6\right)\left(1+|y|^4\right) = \\ = \left(1+(|z|+s)^6\right)\left(1+s^4\right)\end{gathered}$$

Полагая $P(s,|z|) = \left(1+(|z|+s)^6\right)\left(1+s^4\right)$

получаем оценку

$$|\varphi(s,z)| \leq \frac{A}{\left(1+(|z|+s)^6\right)\left(1+s^4\right)}$$

Следовательно,

$$|\varphi(|y|, x+y)| \leq \frac{A}{\left(1+|x|^6\right)\left(1+|y|^4\right)}$$

С учетом ограниченности 1-срезки

$$\left|\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\right| \leq M$$

Получаем окончательную оценку

$$\left|\frac{\varphi(|y|,x+y)}{4\pi|y|}\right| x \left|\eta_1\left(0,\frac{x}{R}\right)\right| \leq \frac{AM|x|}{4\pi|y|\left(1+|x|^6\right)\left(1+|y|^4\right)}$$

Поскольку полученная оценка не зависит от R и является абсолютно интегрируемой функцией по всем переменным, то к интегралу (7) можно применять и теорему Фубини, и теорему об ограниченной сходимости.

Таким образом,

$$\begin{gathered}\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} dx\int_{\mathbb{R}^3}\tfrac{\varphi(|y|,x+y)}{4\pi|y|}|x|\eta_1\left(0,\tfrac{x}{R}\right)dy = \\ = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\tfrac{\varphi(|y|,x+y)}{4\pi|y|}|x|\eta_1\left(0,\tfrac{x}{R}\right)dxdy = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\tfrac{\varphi(|y|,x+y)}{4\pi|y|}|x|dxdy\end{gathered}$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases} \quad |J| = 1$$

получим

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|y|, x+y)}{4\pi|y|}|x|dxdy = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|v|, u)}{4\pi|v|}|u-v|dudv =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} du \int_{\mathbb{R}^3} \tfrac{\varphi(|v|,u)}{4\pi|v|}|u-v|dv = \int_{\mathbb{R}^3} du \int_0^{+\infty} dt \int_{|v|=t} \tfrac{\varphi(t,u)}{4\pi t}|u-v|dS_v =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^4} dudt \tfrac{\theta(t)}{4\pi t}\varphi(t,u) \int_{|v|=t} |u-v|dS_v$$

Вычислим внутренний интеграл. С этой целью параметризуем сферу $|v| = t$ так, чтобы угол θ был углом между векторами u и v и запишем модуль вектора $|u-v|$ по теореме косинусов

$$|u-v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta}$$

Тогда

$$\int_{|v|=t} |u-v|dS_v = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sqrt{|u|^2 + t^2 - 2|u|t\cos\theta}t^2 \sin\theta d\theta =$$
$$= 2\pi t^2 \frac{\left(|u|^2+t^2-2|u|t\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{3|u|t}\Bigg|_0^{\pi} = \tfrac{2\pi t}{3|u|}\left((|u|+t)^3 - ||u|-t|^3\right)$$

Подставляя полученный результат в формулу (8)

$$\int_{\mathbb{R}^4} dudt \frac{\theta(t)}{4\pi t}\varphi(t,u) \int_{|v|=t} |u-v|dS_v =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} \tfrac{\theta(t)}{4\pi t} \cdot \tfrac{2\pi t}{3|u|}\left((|u|+t)^3 - ||u|-t|^3\right)\varphi(t,u)dudt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\theta(t)}{6|u|}\left((|u|+t)^3 - ||u|-t|^3\right)\varphi(t,u)dudt =$$
$$= \left\langle \frac{\theta(t)}{6|u|}\left((|u|+t)^3 - ||u|-t|^3\right), \varphi(t,u) \right\rangle$$

получаем окончательный ответ в задаче

$$u(t,x) = \frac{\theta(t-|x|)}{4\pi|x|} + \frac{\theta(t)}{6|x|}\left((|x|+t)^3 - ||x|-t|^3\right)$$

Ответ.

$$u(t,x) = \frac{\theta(t-|x|)}{4\pi|x|} + \frac{\theta(t)}{6|x|}\left((|x|+t)^3 - ||x|-t|^3\right)$$

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с обобщенной задачей Коши для трёхмерного волнового уравнения.

14 Операторы

14.1 линейный оператор

по крайней мере известно, что можно на замыкание продолжить.

Теорема 1. *Пусть $L \in H$ - подпространство, $\phi : L \to C$ линейный и непрерывный функционал. Тогда $\exists! \psi : \hat{L} \to C$ линеен и непрерывен и $\psi|_L = \phi$. (процедуру построения ψ называем продолжением функционала на замыкание по непрерывности).*[1]

[1] где она нужна?

14.2 Сопряжённый оператор линейного оператора в гильбертовом пространстве

Область определения сопряжённого оператора. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого.

Сопряженный оператор A^* определяем так, чтобы он был: $(fA, g) = (f, A^*g) \quad \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad \forall g \in \mathrm{D}\left(A^*\right)$

14.3 самосопряженные операторы

как-то это можно доказывать.

$$(Af, g) = (f, A^+g)$$

что-то там с непрерывностью. то есть (Af, g) непрерывно по f.

14.3.1 примеры

рассмотрим $p_1 = i\frac{d}{dx} : D(p) \to L^2[0,1]$, $D(p) = \{f -$ абс непрер| f(0)=f(1)$\}$ докажем, что он самосопряженный.[2]

сперва доказываем симметричность.

делается это через раскрытие скалярного произведения как обычно. лень писать.

окей, получаем, что $(pf, g) = (f, \frac{idg}{dx})$

(pf, g) - непрерывна по f, т.о. $g \in D(A^+)$

т.о. симметричность $D(A) \in D(A^+)$[3]

2) самосопряженность

обратное вложение нужно доказывать.

докажем, что $g \notin D(A) \to g \notin D(A^+)$

пусть $g(1) = g(0) + b, b \neq 0, b \in C$ откажемся от условия (почему?).

в члене за симметричность скрытый ключ к самосопряженности???

нужно доказать, что не будет непрерывности по f.

$$(pf, g) = if(1)\bar{b} + (f, \frac{idg}{dx})$$

(???) нужно найти f такую, что она уходит везде в 0, но не в 1.

при подстановке получаем какую-то разрывность по f.

вроде бы суть в том, что остается член $i\bar{b}$, т.о. приходим к $g \notin D(A) \to g \notin D(A^+)$

(продолбал я док-во., не оч понятно.)

пример симметричного и не самосопряженного.

то есть $D(A) \in$ но не совпадает с $D(A^+)$

что делаем?

[2]потом пересмотрю нормально

[3](не понял вообще рассуждения)

14.3.2 пример не симметричного оператора

$$p_3 = \frac{id}{dx} : D(p_3) \to H$$

да хз, что происходит.

короче, не занулится часть из скалярного произведения. и он не симметричный.

кстати говоря, спектр меньше 0 - дает нам вроде бы хорошие решения.

как доказать с/с не по определению? (звучит круто. что-то в этом есть...)

то есть через симметричный можно построить самосопряженный.

пусть $A : D(A) \to H$ симметричный, пусть его собственные функции $\{e_n\}$ образуют базис в H. тогда оператор $\bar{A} : D(\bar{A}) \to H \quad D(\bar{A})\{f = \sum c_n e_n | \sum_n lambda_n^2 |c_n|^2 \|e_n\|^2 < +\infty\}$

тогда $\forall f \in D(A) \quad \bar{A}f = \sum_n \lambda_n c_n e_n$ самосопряженный!!!

Конструктивное док-во:

пусть $g \in D(A^+) \to\to \forall f \in D(\bar{A})$

$f = \sum c_n e_n$, возьмем частичную сумму $f_N = \sum_{n=0}^N c_n e_n$ и $F_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n c_n e_n$

возьмем $g = F_N$, запишем $(\bar{A}f, F_N)$

короче какое-то тут доказательство есть.

мб нужно норму оценить.

$$|(\hat{A}f, g)| \leqslant C_g \|f\|$$

или что происходит?

берем как f частичные суммы после оператора.

$$|(\hat{A}f, g)| = (\sum_n^N \lambda_n^2 c_n e_n, \sum_n \lambda_n c_n e_n) = \sum_{n=0}^N \lambda_n^2 |c_n|^2 \|e_n\|^2$$

приходим к модулю, дальше появляется какой-то корень. и оценка. да я хз вообще. ряд $\sum_{n=0}^N \lambda_n^2 |c_n|^2 \|e_n\|^2$ сходится.. и потом обратное включение - поэтому с/с.

14.4 задачи на эволюцию операторов

есть какое-то простое уравнение, мы хотим найти функцию[4].

Ищем решения в виде ряда[5]

раскладываем по базису.

коэффициенты фурье зависят от времени.

предположения делаем, что существует $\dot{u}$, предел справа.

дальше получаем кандидаты на решения.

дальше проверяем на решении, что оно само лежит где нужно: $u \in D(A), \exists \dot{u}, u(+0)$

- $u \in D(A)$ - делается оценкой ряда, типа элемент получаем из гильбертова пространства[6]

[4] впишу введение потом

[5] потом поймем, как ряды эти использовать

[6] точно?

- производную пишем по определению, подставляем туда решение. дальше оцениваем сверху не зависящем от Δt[7],

  и тут такие оценки самые большие. нужно сверху оценивать.[8]

- непрерывность в 0: $\lim_{\Delta t \to 0} \|u(t) - v\|^2 =$ и раскладываем по базису, дальше приходим к равенству парсерваля[9]

после проверки утверждаем, что нашли ответ.

14.5 спектральное разложение операторов?

14.5.1 пример поиска спектров

(дальше тоже нужно переписать у кого-то эти записи)
внезапно найдем спектр оператора p_2

$$(p_2 - \lambda I) \exists \text{даже не на всюду плотном}$$

тем самым найдем, какие λ какому спектру принадлежат?
исследуем непрерывный спектр. (при чем тут он?)

$$(p_2 - \lambda I) f = g \to f = (p_2 - \lambda I)^{-1} g$$

(что????)

$$if' - \lambda f = g \quad \text{lts } f = Ce^{-i\lambda x}$$

$$iC'e^{-i\lambda x} = g(x) \to \quad C = -i \int_0^x e^{i\lambda\xi} g(\xi) d\xi \quad f(0) = D = 0$$

$$f = -ie^{-i\lambda x} \int_0^x e^{i\lambda\xi} g(\xi) d\xi = 0$$

условия

$$g(x) \perp e^{i\lambda\xi} g$$

вся компл пл - спектр???

$$(p_2 - \lambda I)^{-1} \exists \forall \lambda \in C$$

дальше самые главные шаги

$M = \{g | g(x) \perp e^{i\lambda\xi} g\}$не всюду плотно, так как нельзя к этому вектору подобраться!

так можно доказывать не всюду плотность! (как?)
спектр только остаточный.
короче, так вот спектр считать показали нам.

[7]?? попрактикуюсь - пойму
[8]нужно задачи нарешать!!!!!!
[9]еще раз написать про него, я забыл

14.5.2 оператор Лапласа

14.5.3 Обобщенное преобразование фурье

Теория

Определим преобразование Фурье обобщённых функций из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Применение преобразования Фурье оказывается довольно эффективным инструментом для вычисления фундаментального решения дифференциального оператора (2.3.4). Тогда, применяя теорему 2.5.11, мы получим способ вычисления обобщённого решения уравнения (2.5.1)

Напомним, что для абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m$ комплексной функции $f(x)$ её преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}[f](y) = \mathcal{F}[f(x)](y) = \int_{x\in\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} f(x)dx, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

где $(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k y_k$ -скалярное произведение векторов $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^m$. Так как комплексная экспонента $e^{i(x,y)}$ по абсолютной величине тождественно равна единице, а функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^m$, то несобственный интеграл в определении $\mathcal{F}[f](y)$ является равномерно сходящимся по $y \in \mathbb{R}^m$ в силу признака Вейерштрасса.

Тогда, в силу непрерывности $e^{i(x,y)}$ по совокупности переменных x и y на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, получаем, что, функция $\mathcal{F}[f](y)$ является непрерывной на $\mathbb{R}^m$ (подробное доказательство этого факта можно найти, например, в теореме 1 из [4, Гл. 17, \$6, С. 168]). При этом, для любого $y \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство:

$$|\mathcal{F}[f](y)| \leqslant \int_{x\in\mathbb{R}^m} |f(x)|dx$$

Следовательно, $\mathcal{F}[f](y)$ является ограниченной на $\mathbb{R}^m$ функцией. Поэтому, $\mathcal{F}[f](y)$ является функцией медленного роста, т.е. порождает регулярный функционал в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Рассматривая абсолютно интегрируемую функцию $f(x)$ как обобщённую, также порождающую в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ регулярный функционал (см. пример 2.1 .8)

Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получаем:

Таким образом, имеет место равенство:

$$\langle \mathcal{F}[f](y), \varphi(y)\rangle = \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi](x)\rangle$$

Теперь, чтобы превратить это равенство в определение преобразования Фурье произвольной обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, нам требуется доказать, что преобразование Фурье является непрерывным отображением пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в себя. Докажем соответствующее

У т в е р ж д е н и е 3.1.1.

Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет место вложение $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. При этом, для любой последовательности $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ выполнено:

$$\varphi_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \varphi \to \mathcal{F}[\varphi_n] \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \mathcal{F}[\varphi]$$

Д ок аза те л ь с т в о. Вложение $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ показано в лемме 2.1.29. Для доказательства непрерывности преобразования Фурье на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, рассмотрим последовательность $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, сходяшууюся в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ к функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Требуется показать, что

$$\mathcal{F}[\varphi_n] \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \mathcal{F}[\varphi] \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

В силу леммы 2.1.4, это означает, что для любых мультииндексов $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ должно выполняться соотношение:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^m} \left(\left|y^\beta\right| \left|D_y^\alpha \mathcal{F}\left[\varphi_n\right](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)\right|\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Имеем равенство:

$$\begin{aligned} y^\beta \left(D_y^\alpha \mathcal{F}\left[\varphi_n\right](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)\right) &= y^\beta \mathcal{F}\left[(ix)^\alpha \left(\varphi_n(x) - \varphi(x)\right)\right](y) = \\ &= i^{|\beta|} \mathcal{F}\left[D_x^\beta \left((ix)^\alpha \left(\varphi_n(x) - \varphi(x)\right)\right)\right](y) \end{aligned}$$

Так как по условию последовательность φ_n сходится в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ к функции φ, то, в частности, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n \geqslant N$ и для всех $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место неравенство:

$$\left|D_x^\beta \left((ix)^\alpha \left(\varphi_n(x) - \varphi(x)\right)\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 + |x|^{2m}}$$

Следовательно, для любых $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $y \in \mathbb{R}^m$ получаем: $\left|y^\beta\right| \left|D_y^\alpha \mathcal{F}\left[\varphi_n\right](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)\right| \leqslant$

$$\leqslant \int_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{\varepsilon dx}{1 + |x|^{2m}} = \varepsilon S_m \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-1} dr}{1 + r^{2m}} = \varepsilon \frac{S_m}{m} \frac{\pi}{2}$$

Где $S_m = \int_{|x|=1} dS$ -площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^m$.

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^m} \left(\left|y^\beta\right| \left|D_y^\alpha \mathcal{F}\left[\varphi_n\right](y) - D_y^\alpha \mathcal{F}[\varphi](y)\right|\right) \leqslant \frac{\pi S_m}{2m} \varepsilon$$

Что и требовалось. В силу утверждения 3.1 .1 получаем, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ отображение

$$\varphi \mapsto \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

является линейным и непрерывным функционалом на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, оно задаёт обобщённую функцию, обозначаемую нами $\mathcal{F}[f](y)$, Действие которой на любую функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ определяется формулой:

$$\langle \mathcal{F}[f](y), \varphi(y) \rangle = \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle$$

Преобразованием Фурье обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ будем называть обобщённую функцию определяется формулой (3.1.1).

Преобразование Фурье от δ-функции

Вычислим преобразование Фурье δ - функции Дирака в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеем:

$$\langle \mathcal{F}[\delta](y), \varphi(y) \rangle = \langle \delta(x), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) dy = \langle 1, \varphi(y) \rangle$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}[\delta](y) = 1$$

То есть преобразованием Фурье δ - функции Дирака в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ является функция медленного роста, тождественно равная единице.

Преобразование фурье от $\delta(x-x_0)$

Пусть задан вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Вычислим преобразование Фурье обобщённой функции $\delta\left(x-x_0\right)$ в $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$. Для Любой функции $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$ имеем:

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\delta\left(x-x_0\right)\right](y), \varphi(y)\right\rangle = \left\langle \delta\left(x-x_0\right), \mathcal{F}[\varphi](x)\right\rangle = \mathcal{F}[\varphi]\left(x_0\right) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x_0,y)}\varphi(y)dy = \left\langle e^{i(x_0,y)}, \varphi(y)\right\rangle$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}\left[\delta\left(x-x_0\right](y) = e^{i(x_0,y)}$$

Преобразование Фурье от $f(x-x_0)$

Пусть заданы вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$. Выразим преобразование Фурье обобщённой функции $f\left(x-x_0\right)$ в $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ через $\mathcal{F}[f(x)](y)$.

Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$ имеем:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left[f\left(x-x_0\right)\right](y), \varphi(y)\right\rangle &= \left\langle f\left(x-x_0\right), \mathcal{F}[\varphi](x)\right\rangle = \\ &= \left\langle f(x), \mathcal{F}[\varphi]\left(x+x_0\right)\right\rangle = \left\langle f(x), \mathcal{F}\left[\varphi(y)e^{i(x_0,y)}\right](x)\right\rangle = \\ &= \left\langle \mathcal{F}[f(x)](y), \varphi(y)e^{i(x_0,y)}\right\rangle \\ &= \left\langle e^{i(x_0,y)}\mathcal{F}[f(x)](y), \varphi(y)\right\rangle\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}\left[f\left(x-x_0\right](y) = e^{i(x_0,y)}\mathcal{F}[f(x)](y)$$

Преобразование Фурье θ-функции

Вычислим преобразование Фурье θ - функции Хевисайда в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Напомним, что θ - функция является функцией медленного роста вида

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, действие θ - функции на любую функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\langle \theta(x), \varphi(x)\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Имеем:

$$\langle \mathcal{F}[\theta](y), \varphi(y)\rangle = \langle \theta(x), \mathcal{F}[\varphi](x)\rangle = \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\varphi(y)dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_0^R dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\varphi(y)dy = \lim_{R\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left(\int_0^R e^{ixy}dx\right)dy =$$
$$= \lim{}_{R\to+\infty-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left(\frac{e^{iRy}-1}{iy}\right)dy =$$
$$= \lim_{R\to+\infty}\left({}^{+\infty}_{-\infty} \varphi(y)\left(\frac{\cos(Ry)-1}{iy}\right)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left(\frac{\sin(Ry)}{y}\right)dy\right)$$

Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left(\frac{\cos(Ry)-1}{iy}\right)dy$, он есть абсолютно сходящийся интеграл и представим интегралом в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\left(\frac{\cos(Ry)-1}{iy}\right)dy=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi(y)\left(\frac{\cos(Ry)-1}{iy}\right)dy+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(y)\left(\frac{\cos(Ry)-1}{iy}\right)dy\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\infty}^{-\varepsilon}\varphi(y)\frac{\cos(Ry)}{iy}dy+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\cos(Ry)}{iy}dy\right)-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(y)}{iy}dy+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{iy}dy\right)=$$
$$=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\cos(Ry)}{iy}dy-\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{iy}dy$$

Заметим, что

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\cos(Ry)}{iy}dy=\int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(y)-\varphi(-y)}{iy}\cos(Ry)dy$$

Так как функция $\varphi(y)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то существует предел

$$\lim_{y\to+0}\frac{\varphi(y)-\varphi(-y)}{iy}=-2i\varphi'(0)$$

а при $y\to\infty$ справедливо соотношение $\varphi(y)=o\left(\frac{1}{y}\right)$. Отсюда получаем

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(-y)}{iy}=o\left(\frac{1}{y^2}\right)\qquad\text{при}\quad y\to+\infty$$

Следовательно, функция $\frac{\varphi(y)-\varphi(-y)}{iy}$ яВЛяется абсолютно интегрируемой на $(0,+\infty)$. Тогда по теореме Римана об осциляции, получаем:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(y)-\varphi(-y)}{iy}\cos(Ry)dy\to0\qquad\text{при}\quad R\to+\infty$$

Поскольку по определению 2.1 .23 имеем равенство

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{iy}dy=-i\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{y},\varphi(y)\right\rangle$$

ТО ПОJIу ЧаеМ:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\left(\frac{\cos(Ry)-1}{iy}\right)dy=\left\langle i\mathcal{P}\frac{1}{y},\varphi(y)\right\rangle$$

Tenepb paccmorphM интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy$$

Для любого $\varepsilon>0$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy=\int_{|y|>\varepsilon}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy+\int_{|y|\leqslant\varepsilon}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy$$

Так как функция $\frac{\varphi(y)}{y}$ является абсолютно интегрируемой на промежутках $(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)$, то, по теореме Римана об осциляции, при $R\to+\infty$ справедливо предельное соотношение

$$\int_{|y|>\varepsilon}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy\to0$$

Следовательно, существует число $R_1(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого $R \geqslant R_1(\varepsilon)$ выполнено неравенство:

$$\int_{|y|>\varepsilon} \varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy \mid \leqslant \varepsilon$$

Далее, имеем:

$$\int_{|y|\leqslant\varepsilon} \varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy = \int_{|y|\leqslant R\varepsilon}\varphi\left(\frac{y}{R}\right)\frac{\sin(y)}{y}dy =$$
$$= \int_{|y|\leqslant R\varepsilon}\left(\varphi\left(\frac{y}{R}\right)-\varphi(0)\right)\frac{\sin(y)}{y}dy + \int_{|y|\leqslant R\varepsilon}\varphi(0)\frac{\sin(y)}{y}dy$$

По теореме Лагранжа, Для любого числа y существует число $\xi(y,R)$ между нулём и числОм $\frac{y}{R}$, такое, что справедливо равенство:

$$\varphi\left(\frac{y}{R}\right)-\varphi(0) = \varphi'(\xi(y,R))\frac{y}{R}$$

Так как функция $\varphi'(x)$ является непрерывной при $x \in \mathbb{R}$ и бесконечно малой при $x \to \infty$,

то она является ограниченной на $\mathbb{R}$. Определим ЧИСЛО

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|$$

Следовательно, справедливо неравенство:

$$\left|\varphi\left(\frac{y}{R}\right)-\varphi(0)\right| \leqslant M\frac{|y|}{R}$$

Получаем оценки:

$$\int_{|y|\leqslant R\varepsilon}\left(\varphi\left(\frac{y}{R}\right)-\varphi(0)\right)\frac{\sin(y)}{y}dy \mid \leqslant \int_{|y|\leqslant R\varepsilon} M\frac{dy}{R} = 2M\varepsilon$$

этому при $R \to +\infty$ имеем:

$$\int_{|y|\leqslant R\varepsilon}\varphi(0)\frac{\sin(y)}{y}dy \to \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(0)\frac{\sin(y)}{y}dy = \pi\varphi(0) = \langle\pi\delta(y),\varphi(y)\rangle$$

Тогда существует число $R_2(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого $R \geqslant R_2(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$\int_{|y|\leqslant R\varepsilon}\varphi(0)\frac{\sin(y)}{y}dy - \pi\varphi(0) \mid \leqslant \varepsilon$$

Следовательно, при всех $R \geqslant R_2(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$\int_{|y|\leqslant\varepsilon}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy - \pi\varphi(0) \mid \leqslant (2M+1)\varepsilon$$

Окончательно, для любого $R \geqslant \max\{R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon)\}$ находим:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy - \pi\varphi(0)\right| \leqslant (2M+2)\varepsilon$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\sin(Ry)}{y}dy = \langle\pi\delta(y),\varphi(y)\rangle$$

Окончательно находим:

$$\langle \mathcal{F}[\theta](y), \varphi(y) \rangle = \left\langle i\mathcal{P}\frac{1}{y}, \varphi(y) \right\rangle + \langle \pi\delta(y), \varphi(y) \rangle$$

Ответ:

$$\mathcal{F}[\theta](y) = i\mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y)$$

свойства преобразований Фурье

Напомним, что обратное преобразование Фурье абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m$ функции $f(x)$ определяется так:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](y) = \mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{x \in \mathbb{R}^m} e^{-i(x,y)} f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

Очевидны равенства:

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(x)](-y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y)$$

Поэтому, в силу утверждения 3.1.1, отображение

$$\varphi(x) \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)](y) = \mathcal{F}[\varphi(-x)](y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

является линейным и непрерывным в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Следовательно, мы можем определить обратное преобразование Фурье обобщённой функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ как линейный и непрерывный функционал вида

$$\varphi \mapsto \left\langle f(y), \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

Этот функционал будем обозначать $\mathcal{F}^{-1}[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Таким образом, Мы имеем равенство

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}[f](x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle f(y), \mathcal{F}^{-1}[\varphi](y) \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

Определение 14.1. *Обратным преобразованием Фурье обобщённой функции* $f(x) \in \mathrm{S}'(\mathbb{R}^m)$ *будем называть обобщённую функцию* $\mathcal{F}^{-1}[f](y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$,

действие которой на любую функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ *определяется формулой* (3.1.2)

Заметим, что для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ имеют место равенства

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(x)](-y)$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеем:

$$\begin{gathered} \langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](y), \varphi(y) \rangle = \langle f(x), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(y)](x) \rangle = \\ = \left\langle f(x), \tfrac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[\varphi(y)](-x) \right\rangle = \left\langle f(-x), \tfrac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[\varphi(y)](x) \right\rangle = \\ = \left\langle \tfrac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y), \varphi(y) \right\rangle \end{gathered}$$

Следовательно, установлено равенство

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}[f(-x)](y)$$

Аналогично, имеем:

$$\begin{gathered}\langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](y), \varphi(y)\rangle = \langle f(x), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(y)](x)\rangle = \\ = \left\langle f(x), \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}[\varphi(-y)](x)\right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}[f(x)](y), \varphi(-y)\right\rangle = \\ = \left\langle \tfrac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}[f(x)](-y), \varphi(y)\right\rangle\end{gathered}$$

Следовательно, установлено равенство

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y) = \frac{1}{(2\pi)^m}\mathcal{F}[f(x)](-y)$$

Как показано в замечании 2.1.31, Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ ВыПОЛНены равенства:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi](y)](x) = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi](y)\right](x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

Следовательно, для любой обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и произвольной основной функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получаем:

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](x)](y), \varphi(y)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}[f](x), \mathcal{F}^{-1}[\varphi](x)\right\rangle = \\ &\quad = \left\langle f(y), \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi](x)\right](y)\right\rangle = \langle f(y), \varphi(y)\rangle = \left\langle \mathcal{F}^{-1}[f](x), \mathcal{F}[\varphi](x)\right\rangle = \\ &\qquad \left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[f](x)\right](y), \varphi(y)\right\rangle = \left\langle f(y), \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi](x)](y)\right\rangle = \langle f(y), \varphi(y)\rangle\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](x)](y) = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[f](x)\right](y) = f(y) \quad \forall f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$$

обобщенное фурье от 1

Вычислим преобразование Фурье обобщённой функции медленного роста, тождественно равной единице на $\mathbb{R}^m$.

Известно, что $\mathcal{F}[\delta](x) = 1$ Следовательно, получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[1](y) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta](x)](y) &= (2\pi)^m \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\delta](x)](-y) = \\ &= (2\pi)^m\delta(-y) = (2\pi)^m\delta(y)\end{aligned}$$

Таким образом, установлено равенство

$$\mathcal{F}[1](y) = (2\pi)^m\delta(y)$$

В физической литературе часто записывамое в символической интегральной форме

$$\int_{x\in\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)}dx = (2\pi)^m\delta(y)$$

Преобразование Фурье от $\left(\frac{1}{x}\right)$

Теперь вычислим преобразование Фурье обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. В силу результата примера 3.1.6, имеем равенство

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} = -i\mathcal{F}[\theta](x) + i\pi\delta(x)$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](y) &= -i\mathcal{F}[\mathcal{F}[\theta](x)](y) + i\pi\mathcal{F}[\delta](y) = \\ &= -2\pi i\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\theta](x)](-y) + \pi i = -2\pi i\theta(-y) + \pi i\end{aligned}$$

Таким образом, установлено равенство

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](y) = \pi i(1-2\theta(-y)) = \pi i \operatorname{sign}(y)$$

Но конечно, преобразование Фурье $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ можно вычислить и $\ll$ В лобж. Для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеем: Заметим, что функция

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \varphi(y)\frac{\sin(xy)}{x}, \quad x \in (0,+\infty), \quad y \in \mathbb{R}$$

не является абсолютно интегрируемой на $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, так как несобственный интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(y)$$

является условно сходящимся (cm. [4]) Следовательно,

Для повторного интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\varphi(y)\frac{\sin(xy)}{x}$$

не применима теорема Фубини, и без специального обоснования поменять в нём порядок интегрирования нельзя. Попытаемся обосновать возможность поменять порядок интегрирования. Заметим, что для любого $R > 0$ функция

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \varphi(y)\frac{\sin(xy)}{x}$$

является абсолютно интегрируемой на множестве $(0,R)\times\mathbb{R}$. Действительно, в силу вложения $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, существует число $C > 0$, такое, ЧТО

$$|y\varphi(y)| \leqslant \frac{C}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Поэтому находим, Что Следовательно, теорему Фубини можно применить к повторному интегралу

$$\int_0^R dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\varphi(y)\frac{\sin(xy)}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^R dx\varphi(y)\frac{\sin(xy)}{x}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\varphi(y)\frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int dy\varphi(y)\frac{\sin(xy)}{x} = \\ &= \lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\varphi(y)\int_0^R dx\frac{\sin(xy)}{x}\end{aligned}$$

Paccmorpum функцию

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

TorДа Для любого $y \neq 0$ имеем

$$\int_0^R \frac{\sin(xy)}{x}dx = \int_0^{Ry} \frac{\sin x}{x}dx = \psi(Ry)$$

П ри этом

$$\lim_{R\to+\infty}\psi(Ry)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(y)\quad\forall y\neq 0$$

Заметим, что функция ψ является непрерывной на $\mathbb{R}$, и имеет при $t\to\pm\infty$ конечные пределы $\pm\frac{\pi}{2}$. Следовательно, она яВЛяется ограниченной на $\mathbb{R}$, то есть существует число $M>0$, такое, что

$$|\psi(t)|\leqslant M\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

Таким образом, для ЛЮбого $R>0$ справедлива оценка

$$|\varphi(y)\psi(Ry)|\leqslant M|\varphi(y)|\quad\forall y\neq 0$$

а функция $M|\varphi(y)|$ яВЛяется абсолнотно интегрируемой на $\mathbb{R}$ в силу ВЛОжения $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем:

$$\begin{gathered}\lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\varphi(y)\int_0^R dx\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\varphi(y)\psi(Ry)=\\=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\varphi(y)\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(y)\end{gathered}$$

Окончательно находим, чТО

$$\left\langle\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](y),\varphi(y)\right\rangle=2i\int_{-\infty}^{+\infty}dy\varphi(y)\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(y)=\langle\pi i\operatorname{sign}(y),\varphi(y)\rangle$$

что и доказывает равенство (3.1.3)

Преобразование Фурье от $\left(\frac{1}{|x|}\right)$

Вычислим в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ преобразование Фурье обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{|x|}$, определённой в (2.1.8).

Для Любой функции $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеем:

$$\begin{gathered}\left\langle\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{|x|}\right](y),\varphi(y)\right\rangle=\left\langle\mathcal{P}\tfrac{1}{|x|},\mathcal{F}[\varphi](x)\right\rangle=\\=\int_{|x|<1}\frac{\mathcal{F}[\varphi](x)-\mathcal{F}[\varphi](0)}{|x|}dx+\int_{|x|>1}\frac{\mathcal{F}[\varphi](x)}{|x|}dx=\\[2ex]=\int_0^1\frac{\mathcal{F}[\varphi](x)+\mathcal{F}[\varphi](-x)-2\mathcal{F}[\varphi](0)}{x}dx+\\+\int_1^{+\infty}\frac{\mathcal{F}[\varphi](x)+\mathcal{F}[\varphi](-x)}{x}dx=\\[2ex]=\int_0^1\frac{dx}{x}\int_{\mathbb{R}}dy\varphi(y)2(\cos(xy)-1)+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}\int_{\mathbb{R}}dy\varphi(y)2\cos(xy)=\\=\int_0^1\frac{dx}{x}\int_0^{+\infty}dy(\varphi(y)+\varphi(-y))2(\cos(xy)-1)+\\+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}\int_0^{+\infty}dy(\varphi(y)+\varphi(-y))2\cos(xy)=\end{gathered}$$

После следующих рассуждений мы продолжим выкладку, которая начнётся равенством в рамке.

Обозначим для краткости $\psi(y)=\varphi(y)+\varphi(-y),\quad y\in\mathbb{R}$

Понятно, что функция $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Так как

$$\frac{\psi(y)(\cos(xy)-1)}{x}\in\mathbb{L}_1(0<x<1,y>0)$$

то, по теореме Фубини,

$$\int_0^1\frac{dx}{x}\int_0^{+\infty}dy\psi(y)(\cos(xy)-1)=\int_0^{+\infty}dy\psi(y)\int_0^1\frac{(\cos(xy)-1)}{x}dx$$

Далее, так как для любого $R > 1$ Выполнено

$$\frac{\psi(y)\cos(xy)}{x} \in \mathbb{L}_1(1 < x < R, y > 0)$$

то, по теореме Фубини, имеем равенства

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} dy \psi(y) 2\cos(xy) = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \int_x^x \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} dy\psi(y) 2\cos(xy) = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{\infty} dy\psi(y) \int_1^R \frac{\cos(xy)}{x}$$

Следовательно, получаем

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\int_0^{+\infty} dy\psi(y) 2 \left(\int_0^1 \frac{(\cos(xy)-1)}{x} dx + \int_1^R \frac{\cos(xy)}{x} dx\right)\right] =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\int_0^{+\infty} dy\psi(y) 2 \left(\int_0^y \frac{(\cos(t)-1)}{t} dt + \int_y^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt\right)\right]$$

После следуюших рассуждений мы продолжим выкладку, Которая начнётся равенством в рамке. Заметим, Что

$$\int_0^y \tfrac{(\cos(t)-1)}{t} dt + \int_y^{Ry} \tfrac{\cos(t)}{t} dt =$$
$$= \int_0^1 \tfrac{(\cos(t)-1)}{t} dt + \int_1^y \tfrac{(\cos(t)-1)}{t} dt + \int_t^R \tfrac{\cos(t)}{t} dt + \int_t^{Ry} \tfrac{\cos(t)}{t} dt =$$
$$= \int_0^1 \tfrac{(\cos(t)-1)}{t} dt - \ln(y) + \int_1^R \tfrac{\cos t}{t} dt + \int_R^{Ry} \tfrac{\cos(t)}{t} dt$$

Поэтому находим:

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} dy\psi(y) 2 \left(\int_0^1 \frac{(\cos(t)-1)}{t} dt - \ln(y) + \right.$$
$$\left. + \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt + \int_R^{Ry} \frac{\cos(t)}{t} dt\right) =$$

После следуюших рассуждений мы продолжим выкладку, Которая начнётся равенством в рамке. Так как существует числовой

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

$$\left|\int_1^R \tfrac{\cos t}{t} dt\right| \leqslant M \quad \forall R \geqslant 1$$

185

$$\left| \begin{matrix} Ry \\ \int_R^{\cos(t)} \\ t \end{matrix} \; dt \leqslant \right| \begin{matrix} Ry \\ \int_R^{dt} \\ t \end{matrix} \; | = | \ln(y) |$$

Гак как функции $\psi(y)$ и $\psi(y)\ln(y)$ абсолютно интегрируемы по $y > 0$ го, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем:

$$= \int_0^{+\infty} dy\psi(y) 2 \lim_{R\to+\infty} \left(\int_0^1 \frac{(\cos(t)-1)}{t} dt - \ln(y) + \right.$$
$$\left. + \int_1^R \frac{\cos t}{t} dt + \int \frac{\cos(t)}{t} dt\right) =$$
$$= \int_0^{+\infty} dy\psi(y) 2 \left(\int_0^1 \tfrac{(\cos(t)-1)}{t} dt - \ln(y) + \int_0^{+\infty} \tfrac{\cos t}{t} dt\right) =$$
$$= \int_0^{+\infty} dy\varphi(y) 2 \left(\int_0^1 \tfrac{(\cos(t)-1)}{t} dt - \ln|y| + \int_1^{+\infty} \tfrac{\cos t}{t} dt\right)$$

Обозначив
$$c=\int_0^1 \frac{(1-\cos(t))}{t}dt-\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$
ПОЛучаем:
$$\left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right](y),\varphi(y)\right\rangle=\int_{\mathbb{R}} dy\varphi(y)(-2c-2\ln|y|)$$
то есть доказано равенство
$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right](y)=-2c-2\ln|y|$$

Преобразование Фурье как действие на Комплексную экспоненту

фантазия конста не угасает
да ну нахрен на это тратить время сейчас. а мб и вообще.

тут про срезку кстати теория тоже полезно знать.

Суперпозиция обобщённой функции и Линейной вектор-функции

Интересным следствием равенства (3.2.2) преобразование Фурье обобщённой функции в терминах её действия на комплексную экспоненту является возможность етественным образом определить суперпозицию обобщённой функции ℓ переменных и линейной функции m переменных, действуюшей в ℓ -мерное пространство ?

Начнём с простой ситуации, когда $\ell=1$

Для произвольной обобщённой функции $f(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ рассмотрим $g(y)=\mathcal{F}^{-1}[f(x)](y)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда для любой $\varphi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в силу равенства (3.2.2) получаем:
$$\begin{aligned}\langle f(x),\varphi(x)\rangle=\langle\mathcal{F}[g(y)](x),\varphi(x))\rangle=&\\&=\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\left\langle g(y),\eta_1\left(\frac{y}{R}\right)e^{i(x,y)}\right\rangle dx\end{aligned}$$

Это равенство позволяет естественным образом определить суперпозицию обобщённой функции одной переменной $f(z)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и скаЛярной линейной функции многих переменных $(a,x)+b$ для вектора
$$\begin{gathered}a\in\mathbb{R}^m, a\neq 0,\ \text{ и числа } b\in\mathbb{R}:\\ \langle f((a,x)+b),\varphi(x)\rangle=\\ =\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\left\langle\mathcal{F}^{-1}[f(z)](y),\eta_1\left(\tfrac{y}{R}\right)e^{i((a,x)+b)y}\right\rangle dx\end{gathered}$$

Покажем, что выражение в правой части равенства (3.3.1) действительно определяет обобщённую функцию из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, которую мы и будем обозначать $f((a,x)+b)$. Обозначив для краткости $g(y)=\mathcal{F}^{-1}[f(z)](y)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, имеем:
$$\begin{gathered}\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\left\langle g(y),\eta_1\left(\tfrac{y}{R}\right)e^{i((a,x)+b)y}\right\rangle dx=\\ =\lim_{R\to+\infty}\left\langle g(y),\eta_1\left(\tfrac{y}{R}\right)\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)e^{i((a,x)+b)y}dx\right\rangle\end{gathered}$$

Так Как справедливо очевидное равенство
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)e^{i((a,x)+b)y}dx=e^{iby}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)e^{i(ay,x)}dx=&\\&=e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

и по лемме 3.2 .1 имеет место предельное соотношение

$$\eta_1\left(\frac{y}{R}\right) e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \overset{S(\mathbb{R})}{\to} e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \quad \text{при} \quad R\to+\infty$$

то получаем:

$$\lim_{R\to+\infty}\left\langle g(y),\eta_1\left(\frac{y}{R}\right)\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)e^{i((a,x)+b)y}dx\right\rangle = \left\langle g(y), e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay)\right\rangle$$

По утверждению 3.1.1, преобразование Фурье является непрерывНым линейным преобразованием пространства $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$. Тогд, в силу неравенства $a\neq 0$, справедливо вложение $\mathcal{F}[\varphi(x)](ay)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, и Для любой последовательности $\varphi_n(x)\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$, сходяшейся к функции $\varphi(x)\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$ в пространстве $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$, имеем:

$$\mathcal{F}\left[\varphi_n(x)\right](ay) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\to} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

Поскольку все производные функции e^{iby} ограничены на $\mathbb{R}$, то отсю- Да следует очевидное соотношение

$$e^{iby}\mathcal{F}\left[\varphi_n(x)\right](ay) \overset{S(\mathbb{R})}{\to} e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

С.ледовательно,

$$\left\langle g(y), e^{iby}\mathcal{F}\left[\varphi_n(x)\right](ay)\right\rangle \to \left\langle g(y), e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay)\right\rangle \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

Таким образом, соотношение

$$\begin{gathered}\langle f((a,x)+b),\varphi(x)\rangle = \\ = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\left\langle\mathcal{F}^{-1}[f(z)](y),\eta_1\left(\tfrac{y}{R}\right)e^{i((a,x)+b)y}\right\rangle dx = \\ = \left\langle\mathcal{F}^{-1}[f(z)](y), e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay)\right\rangle\end{gathered}$$

ОПределяет линейный и непрерывный функционал на простарнстве $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$. Следовательно, доказано вложение $f((a,x)+b)\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ $b\in\mathbb{R}$. Тогда суперпозицией обобщённой функции $f(z)$ с линейной функцией $(a,x)+b, x\in\mathbb{R}^m$, будем называть обобщённую функцию $f((a,x)+b)\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^m\right)$, действие которой на произвольную функцию $\varphi(x)\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$ имеет вид:

$$\langle f((a,x)+b),\varphi(x)\rangle = \left\langle\mathcal{F}^{-1}[f(z)](y), e^{iby}\mathcal{F}[\varphi(x)](ay)\right\rangle$$

Проиллюстрируем это определение на примерах, но сначала ДОКаЖкем одну важную Лемму.

Л е м м а 3.3.2. Пусть функция $F(\xi)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, а функция $\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}$ ограничена при $0<|\xi|<r$.

Тогда существует

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}F(\xi)\frac{\sin(\xi R)}{\xi}d\xi = \pi F(0)$$

Доказательство. Для любого $d\in(0,r)$ имеем:

$$\int_{\mathbb{R}}F(\xi)\frac{\sin\xi R}{\xi}d\xi = \int_{|\xi|<d}F(\xi)\frac{\sin(\xi R)}{\xi}d\xi + \int_{|\xi|\geqslant d}\frac{F(\xi)}{\xi}\sin(\xi R)d\xi$$

Так Kak имеет место очевидное неравенство

$$\int_{|\xi|\geqslant d}\left|\frac{F(\xi)}{\xi}\right|d\xi \leqslant \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}}|F(\xi)|d\xi < +\infty$$

то функция $\frac{F(\xi)}{\xi}$ абсолютно интегрируема на множестве $|\xi| \geqslant d$ Следовательно, по теореме Римана об осциляции, получаем:

$$\int_{|\xi| \geqslant d} \frac{F(\xi)}{\xi} \sin(\xi R) d\xi \to 0 \quad \text{İри} \quad R \to +\infty$$

Далее,

$$\int_{|\xi|<d} F(\xi) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi = \int_{|\xi|<d} \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \sin(\xi R) d\xi + \int_{|\xi|<d} F(0) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi$$

По условию, существует число $C > 0$, такое, что для всех $0 < |\xi| < r$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \right| \leqslant C$$

С.ледовательно,

$$\int_{|\xi|<d} \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi} \sin(\xi R) d\xi \mid \leqslant \int_{|\xi|<d} C d\xi = 2Cd$$

Наконец, при $R \to +\infty$ справедливо соотношение

$$\int_{|\xi|<d} F(0) \frac{\sin(\xi R)}{\xi} d\xi \overset{t=\xi R}{=} \int_{|t|<Rd} F(0) \frac{\sin(t)}{t} dt \to \int_{\mathbb{R}} F(0) \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi F(0)$$

Поэтому, для любого $\varepsilon > 0$ и $d \in (0, r)$ существует число $R(\varepsilon, d) > 0$, такое, что для любого $R > R(\varepsilon, d)$ имеет место неравенство:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(\xi) \frac{\sin \xi R}{\xi} d\xi - \pi F(0) \right| \leqslant \varepsilon + 2Cd$$

Pacсmorpes $d(\varepsilon) = \frac{1}{2} \min \left\{ r, \frac{\varepsilon}{C} \right\} \in (0, r)$, полу чим

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(\xi) \frac{\sin \xi R}{\xi} d\xi - \pi F(0) \right| \leqslant 2\varepsilon \quad \forall R > R(\varepsilon, d(\varepsilon))$$

что и требовалось.

□

действие δ-функцией на вектор-функцию Рассмотрим суперпозицию дельта-функции Дирака одной переменной $\delta(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и скалярной линейной функции $(a, x) + b$ векторной переменной $x \in \mathbb{R}^m$.

Здесь $b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m$ и $a \neq 0$. Тогда для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$,

по определению 3.3.1, имеем:

$$\langle \delta((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \left\langle \mathcal{F}^{-1}[\delta(z)](y), e^{iby} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) \right\rangle$$

$$\langle \delta((a, x) + b), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iby}}{2\pi} \mathcal{F}[\varphi(x)](ay) dy$$

Для любого $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим плоскость

$$S(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (a, x) = t\}$$

Тогда для любой абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m$ функции $h(x)$ имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^m} h(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{|a|} \int_{x\in S(t)} h(x)dS_x$$

Следовательно, преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ в точке ay МОж- но переписать в виде:

$$\mathcal{F}[\varphi(x)](ay) = \int_{\mathbb{R}^m} dx\varphi(x)e^{i(a,x)y} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ity}dt}{|a|} \int_{x\in S(t)} \varphi(x)dS_x$$

197

Получаем:

$$\langle\delta((a,x)+b),\varphi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iby}dy}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ity}dt}{|a|} \int_{x\in S(t)} \varphi(x)dS_x =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{2\pi|a|} \int_{x\in S(t)} \varphi(x)dS_x \int_{-R}^{R} dye^{i(t+b)y} =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x\in S(t)} \frac{\varphi(x)}{\pi|a|}dS_x\right) \frac{\sin(t+b)R}{(t+b)}dt^{\xi=t-b}$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x\in S(\xi-b)} \frac{\varphi(x)}{\pi|a|}dS_x\right) \frac{\sin\xi R}{\xi}dt$$

PaccMorphm функцию

$$F(\xi) = \int_{x\in S(\xi-b)} \frac{\varphi(x)}{\pi|a|}dS_x, \quad \xi\in\mathbb{R}$$

Покажем, что $F(\xi)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Действительно, имеем:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\xi)|d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\pi|a|} \int_{x\in S(\xi-b)} |\varphi(x)|dS_x = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\varphi(x)|}{\pi}dx < +\infty$$

Далее, Для любого $\xi\in\mathbb{R}$ имеет место равенство:

$$\int_{x\in S(\xi-b)} \varphi(x)dS_x^{x=y+\frac{a}{|a|^2}\xi} \int_{y\in S(-b)} \varphi\left(y+\frac{a}{|a|^2}\xi\right)dS_y$$

Тогда для любого $\xi\neq 0$ получаем:

$$\left|\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}\right| \leqslant \int_{x\in S(-b)} \left|\frac{\varphi\left(x+\frac{a}{|a|^2}\xi\right)-\varphi(x)}{\xi}\right| \frac{dS_x}{\pi|a|}$$

По теореме Лагранжа, существует число $t(\xi)$ строго между нулём и ξ, такое, что

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{a}{|a|^2}\xi\right)-\varphi(x)}{\xi} = \left(\nabla\varphi\left(x+\frac{a}{|a|^2}t(\xi)\right), \frac{a}{|a|^2}\right)$$

198

Так как функция $\varphi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то существует число $C>0$, для КОТОрОГО ИМеет место неравенство

$$\left|\left(\nabla\varphi(x),\frac{a}{|a|^2}\right)\right| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{2m}} \leqslant C \quad \forall x\in\mathbb{R}^m$$

Для любого $0<|\xi|\leqslant|a|$ и произвольного $|x|\geqslant 2$ имеем:

$$\frac{a}{|a|^2}t(\xi)\Big|\leq 1 \leqslant \frac{|x|}{2} \to \Big| x+\frac{a}{|a|^2}t(\xi)\ |\geqslant \frac{|x|}{2}$$
$$\left|\left(\nabla\varphi\left(x+\frac{a}{|a|^2}t(\xi)\right), \frac{a}{|a|^2}\right)\right| \leqslant \frac{C}{1+\left(\frac{|x|}{2}\right)^{2m}}$$

Следовательно, Для всех $0<||\xi|\leqslant|a\ |$ получаем оценку:

$$\left|\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}\right| \leqslant \int_{x\in S(-b)} \frac{CdS_x}{\pi|a|} + \int_{x\in S(-b)} \frac{C}{|x|\geqslant 2}\frac{dS_x}{\left(1+\left(\frac{|x|}{2}\right)^{2m}\right)}\frac{|a|}{|a|} = M$$

Значит, функция $\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}$ ограничена при $0<|\xi|\leqslant|a|$. Поэтому, по лемме 3.3.2, получаем:

$$\langle\delta((a,x)+b),\varphi(x)\rangle = \pi F(0) = \int_{x\in S(-b)} \frac{\varphi(x)}{|a|}dS_x$$

Таким образом, по определению 3.3 .1 Вычислено действие суперпозиции δ - функции Дирака одной переменной и скалярной линейной функции многих переменных $(a,x)+b$ на произвольную функцию $\varphi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\langle\delta((a,x)+b),\varphi(x)\rangle \int_{(a,x)+b=0} \frac{\varphi(x)}{|a|}dS_x$$

дальше теория этой хрени всей ??????
и тут дофига теории, которая неизвестно, нужна ли или нет

Часть IV
Problems in PDE

15 Типичные задачи и вопросы

15.1 Общие вопросы

15.1.1 Вопросы на понимание сути предмета

15.1.2 Типичные задачи на проверку знаний

15.1.3 Вопросы на понимание типичных деталей

15.2 Задача Коши

15.2.1 Задачи контрольной Лебедева МФТИ

МФТИ.Лебедев.КР.вар1.1 Волновое уравнение с гладким источником

Найти решение задачи с начальными условиями.

$$\left(\partial_t^2+\omega_0^2\right)\varphi(t)=f_0 e^{-\gamma|t|};\qquad \varphi(t\to-\infty)=0.$$

Исследовать пределы $\gamma\to 0,\infty$.

Решение Решаем через функцию Грина осциллятора, сложность в том, чтобы внимательно посчитать интеграл светки, разделив его на разные случаи и проинтегрировав по частям.

Поскольку функция $\varphi(t)$ убывает на $-\infty$, решение определяется только интегралом с источником (решения однородного уравнения не стремятся к 0 на $-\infty$): $\varphi(t)=\int_{-\infty}^t G(t-s)f(s)ds$, где для осциллятора $G(t)=\theta(t)\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}$, поэтому θ-функция учтена в пределах интегрирования. Вычисления легче всего проводить при разных знаках времен $t>0$ и $t<0$ отдельно.

Для $t<0$ Интегралы с экспонентой и тригонометрией можно брать интегрируя по частям:

$$\varphi(t)=f_0\int_{-\infty}^t\frac{\sin\omega_0(t-s)}{\omega_0}e^{\gamma s}ds\overset{\text{by parts}}{=}\frac{f_0}{\gamma\omega_0}\sin\omega_0(t-s)e^{\gamma s}\Big|_{-\infty}^t+\frac{f_0}{\gamma}\int_{-\infty}^t e^{\gamma s}\cos\omega_0(t-s)ds=$$
$$=\frac{f_0}{\gamma}\int_{-\infty}^t e^{\gamma s}\cos\omega_0(t-s)ds\overset{\text{by parts}}{=}\frac{f_0}{\gamma^2}e^{\gamma s}\cos\omega_0(t-s)\Big|_{-\infty}^t-\frac{f_0\omega_0}{\gamma^2}\int_{-\infty}^t e^{\gamma s}\sin\omega_0(t-s)ds=$$
$$=\frac{f_0}{\gamma^2}e^{\gamma t}-\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\varphi(t).$$

Таким образом, сразу получаем:

$$\varphi(t<0)=\frac{f_0e^{\gamma t}}{\gamma^2+\omega_0^2}.$$

Для $t>0$ интеграл чуть сложнее, его представляем в виде суммы интегралов до 0 и после 0:

$$\varphi(t>0)=f_0\int_{-\infty}^t\frac{\sin\omega_0(t-s)}{\omega_0}e^{\gamma|s|}ds=f_0\int_{-\infty}^0\frac{\sin\omega_0(t-s)}{\omega_0}e^{\gamma s}ds+f_0\int_0^t\frac{\sin\omega_0(t-s)}{\omega_0}e^{-\gamma s}ds=$$
$$=\frac{\gamma\sin\omega_0 t+\omega_0\cos\omega_0 t}{\gamma^2+\omega_0^2}+\frac{\gamma\sin\omega_0 t-\omega_0\cos\omega_0 t+\omega_0 e^{-\gamma t}}{\gamma^2+\omega_0^2}=f_0\frac{2\frac{\gamma}{\omega_0}\sin\omega_0 t+e^{-\gamma t}}{\gamma^2+\omega_0^2}.$$

Здесь первый интеграл был посчитан интегрированием по частям:

$$\int_{-\infty}^0\sin\omega_0(t-s)e^{\gamma s}ds=\frac{1}{\gamma}\sin\omega_0(t-s)e^{\gamma s}\Big|_{-\infty}^0+\frac{\omega_0}{\gamma}\int_{-\infty}^0\cos\omega_0(t-s)e^{\gamma s}ds=$$
$$=\frac{\sin\omega_0 t}{\gamma}+\frac{\omega_0}{\gamma^2}\cos\omega_0(t-s)e^{\gamma s}\Big|_{-\infty}^0-\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\int_{-\infty}^0\sin\omega_0(t-s)e^{\gamma s}ds\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int_{-\infty}^0\sin\omega_0(t-s)e^{\gamma s}ds=\frac{\gamma\sin\omega_0 t+\omega_0\cos\omega_0 t}{\gamma^2+\omega_0^2}.$$

Заметим, что использовать формулу $\varphi(t<0)|_{t=0} = \frac{f_0 e^{\gamma t}}{\gamma^2+\omega_0^2}|_{t=0}$ нельзя, потому что у нас t считается везде фиксированным параметром, а нам нужно, чтобы в пределе интегрирования он был 0, а под интегралом не 0. И второй считаем аналогично:

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-s)e^{-\gamma s}ds = e^{-\gamma t}\int_0^t \sin\omega_0 s e^{\gamma s}ds = \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma}\sin\omega_0 s\cdot e^{\gamma s}\Big|_0^t - \frac{\omega_0}{\gamma}e^{-\gamma t}\int_0^t \cos\omega_0 s\cdot e^{\gamma s}ds =$$
$$= \frac{1}{\gamma}\sin\omega_0 t - \frac{\omega_0}{\gamma^2}e^{-\gamma t}\cos\omega_0 s\cdot e^{\gamma s}\Big|_0^t - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}e^{-\gamma t}\int_0^t \sin\omega_0 s\cdot e^{\gamma s}ds =$$
$$= \frac{1}{\gamma}\sin\omega_0 t + \frac{\omega_0}{\gamma^2}e^{-\gamma t}\left(1-\cos\omega_0 t\cdot e^{\gamma t}\right) - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}e^{-\gamma t}\int_0^t \sin\omega_0 s\cdot e^{\gamma s}ds.$$

Последний интеграл тут равен интегралу левой, что видно парой заменой переменных и пределов интегрирования. Следовательно:

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-s)e^{-\gamma s}ds = \frac{\gamma\sin\omega_0 t - \omega_0\cos\omega_0 t + \omega_0 e^{-\gamma t}}{\gamma^2+\omega_0^2}.$$

Итого ответ:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f_0 e^{\gamma t}}{\gamma^2+\omega_0^2}, & t<0 \\ f_0\frac{2\frac{\gamma}{\omega_0}\sin\omega_0 t + e^{-\gamma t}}{\gamma^2+\omega_0^2}, & t>0 \end{cases}.$$

В пределе $\gamma\to\infty$ оба выражения стремятся к 0. Это логично, т.к. источник конечной силы действует конечное время порядка $1/\gamma$.

В пределе $\gamma\to 0$ источник, наоборот, очень широкий. На не слишком больших временах $|t|\ll 1/\gamma$:

$$\varphi(t)\approx\frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

МФТИ.Лебедев.КР.вар1.2 Причинная функция Грина

Найти причинную функцию Грина оператора:

$$L(\partial_t) = \partial_t^4 + 5\partial_t^2 + 4.$$

Решение через преобразование Лапласа Для поиска причинной функции Грина проще всего перейти к преобразованию Лапласа.

Таким образом:

$$\left(p^4+5p^2+4\right)G(p) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad G(p) = \frac{1}{p^4+5p^2+4}.$$

Совершим обратное преобразование Лапласа:

$$G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}\frac{e^{pt}}{p^4+5p^2+4}\frac{dp}{2\pi i},$$

где p_0 выбирается правее всех особенностей подынтегральной функции. Поскольку:

$$p^4+5p^2+4 = (p^4+p^2)+(4p^2+4) = \left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right),$$

то все особенности подынтегральной функции - полюса первого порядка в точках $\pm i, \pm 2i$, так что по $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{\varphi'(a)}$, где исходная функция имеется в виду вида $f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}$, быстро получаем ответ, замыкая контур влево и используя лемму Жордана:

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{e^{it}}{6i} - \frac{e^{-it}}{6i} - \frac{e^{2it}}{12i} + \frac{e^{-2it}}{12i}, & t>0 \end{cases} = \theta(t)\left[\frac{\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{6}\right].$$

Решение через условие на непрерывность производных (???? пока не понял, почему так можно делать, ну и не важно, потом нужно будет - пойму.)

Нулями характеристического многочлена являются значения $\pm i, \pm 2i$, а потому общее решение однородного уравнения при $t>0$ имеет вид:

$$G(t>0) = A\sin t + B\cos t + C\sin 2t + D\cos 2t.$$

Запишем условия непрерывности 0-2 производных и скачок третьей производной:

$$\begin{cases} G(+0) = 0 = B + D, \\ \dot{G}(+0) = 0 = A + 2C, \\ \ddot{G}(+0) = 0 = -B - 4D, \\ G^{(3)}(+0) = 1 = -A - 8C. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3, \\ B = 0, \\ C = -1/6, \\ D = 0. \end{cases}.$$

А потому ответ имеет вид:

$$G(t) = \theta(t)\left[\frac{\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{6}\right].$$

МФТИ.Лебедев.КР.вар1.3 Волновое уравнение с тета функциями

Найти решение уравнения, полагая $\varphi(t<0)=0$:

$$\left(\partial_t^2 + \omega_0^2\right)\varphi(t) = f_0 \sin\omega t \cdot \theta(t)\theta(T-t).$$

Решение (???? пока не смотрел, как-то не до нее, потом посмотрю, мб за 15 мин полностью и пойму)

Поскольку источник при $t<0$ не действует, то это означает, что при $t<0$ решение может удовлетворять только однородному уравнению. Следовательно это решение однородного уравнения должно быть нулевым по начальному условию. Итого для $t \geq 0$:

$$\varphi(t) = f_0 \int_0^t \frac{\sin\omega_0(t-s)}{\omega_0}\sin\omega s \cdot \theta(T-s) ds.$$

Сначала решим задачу для $\omega = \omega_0$:

Пусть $0<t<T$. В этом случае тета-функция под интегралом никак не влияет на интеграл и мы получаем:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0}\int_0^t \left[\cos\omega_0(t-2s) - \cos\omega_0 t\right] ds = -\frac{f_0}{2\omega_0} t\cos\omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2}\sin\omega_0 t.$$

Пусть $t \geq T$. В этом случае необходимо интеграл обрезать на T:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0}\int_0^T \left[\cos\omega_0(t-2s) - \cos\omega_0 t\right] ds = -\frac{f_0}{2\omega_0} T\cos\omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2}\sin\omega_0 T\cos\omega_0(t-T).$$

Итого ответ: $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ -\frac{f_0}{2\omega_0} t\cos\omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2}\sin\omega_0 t, & 0 \leq t < T \\ -\frac{f_0}{2\omega_0} T\cos\omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0^2}\sin\omega_0 T\cos\omega_0(t-T), & t \geq T \end{cases}$

Теперь предположим, что $\omega \neq \omega_0$:

Пусть $0<t<T$. В этом случае тета-функция под интегралом никак не влияет на интеграл и мы получаем:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0}\int_0^t \left\{\cos\left[\omega_0 t - (\omega_0+\omega)s\right] - \cos\left[\omega_0 t - (\omega_0-\omega)s\right]\right\} ds = \frac{f_0}{2\omega_0}\left[\frac{\sin\omega t + \sin\omega_0 t}{\omega_0+\omega} - \frac{\sin\omega_0 t - \sin\omega t}{\omega_0 - \omega}\right].$$

Пусть $t \geq T$. В этом случае необходимо интеграл обрезать на T:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0}\int_0^T \left\{\cos\left[\omega_0 t - (\omega_0+\omega)s\right] - \cos\left[\omega_0 t - (\omega_0-\omega)s\right]\right\} ds =$$
$$= \frac{f_0}{2\omega_0}\left\{\frac{\sin\omega_0 t + \sin\left[(\omega_0+\omega)T - \omega_0 t)\right]}{\omega_0+\omega} - \frac{\sin\omega_0 t + \sin\left[(\omega_0-\omega)T - \omega_0 t)\right]}{\omega_0-\omega}\right\}.$$

Итого ответ:

$$\varphi(t) = \frac{f_0}{2\omega_0}\begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{\sin\omega t + \sin\omega_0 t}{\omega_0+\omega} - \frac{\sin\omega_0 t - \sin\omega t}{\omega_0-\omega}, & 0 \leq t < T \\ \frac{\sin\omega_0 t + \sin[(\omega_0+\omega)T - \omega_0 t)]}{\omega_0+\omega} - \frac{\sin\omega_0 t + \sin[(\omega_0-\omega)T - \omega_0 t)]}{\omega_0-\omega}, & t \geq T \end{cases}$$

МФТИ.Лебедев.КР.вар1.4 Функция Грина матрицы

Найти запаздывающую функцию Грина уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Решение Дагонализуем матрицу матрицей перехода, которую находим через Жорданову цепь, а дальше экспоненциируем и вставляем в готовую формулу.

(???? тут идея линала важная про Жорданову цепь, впишу в 1ю часть потом ее!!! пока додумать нужно! почему такая экспонента-формула последняя??? почитаю теорию!)

Обозначим

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \equiv -\hat{\Gamma}\mathbf{x}.$$

Поскольку матрица нижнетреугольная, то собственные числа стоят уже на диагонали: $\lambda_{1,3} = 2, \lambda_2 = 1$.

Ищем собственные векторы:

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{13} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Других собственных векторов у λ_{13} нет, а потому ищем Жорданову цепь соответствующую данному собственному числу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом матрица перехода имеет:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$\hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$$-\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для функции Грина ответ имеет вид:

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \exp\left(-\hat{\Gamma}t\right) = \theta(t) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \theta(t) \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}/3 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \\ e^{2t} & te^{2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \theta(t) \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 3te^{2t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

4.2 Второй способ. Вид экспоненты от матрицы диктует вид матрицы функции Грина:

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \left[\hat{A}e^{2t} + \hat{B}te^{2t} + \hat{C}e^{t}\right].$$

При положительных t функция Грина удовлетворяет уравнению (4.1) и граничному условию, получаемого из интегрирования уравнения в окрестности 0. Таким образом:

$$\begin{cases} \hat{G}(+0) = \hat{1}, \\ \frac{d\hat{G}(+0)}{dt} = -\hat{\Gamma}\hat{G}(+0) = -\hat{\Gamma}, \\ \frac{d^2\hat{G}(+0)}{dt^2} = -\hat{\Gamma}\frac{d\hat{G}(+0)}{dt} = \hat{\Gamma}^2. \end{cases}$$

Неизвестными для нас остаются три матрицы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ и мы записали на них три уравнения. Из написанной системы мы быстро определим их вид:

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{C}=\hat{1}, \\ 2\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=-\hat{\Gamma}, \\ 4\hat{A}+4\hat{B}+C=\hat{\Gamma}^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{A}=-\hat{\Gamma}^2-4\hat{\Gamma}-\hat{3}, \\ \hat{B}=\hat{\Gamma}^2+3\hat{\Gamma}+\hat{2}, \\ \hat{C}=\hat{\Gamma}^2+4\hat{\Gamma}+\hat{4}. \end{array}\right.$$

Итого сразу мы получаем ответ:

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \hat{B}=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \hat{C}=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

А потому ответ имеет вид:

$$\hat{G}(t)=\theta(t)\left(\begin{array}{ccc} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 3te^{2t} & 0 & e^{2t} \end{array}\right).$$

МФТИ.Лебедев.КР.вар1.5 Запаздывающая функция Грина

Найти запаздывающую функцию Грина оператора $L\left(\partial_t\right)$

$$L\left(\partial_t\right)=\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n.$$

5.1 Первый способ. (устал, потом досмотрю.)
Перейдем к преобразованию Лапласа от уравнения на функцию Грина:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n G(t)=\delta(t) \Rightarrow G(p)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p^n}$$

При $|p|<1$ такая сумма имеет известное значение (сумма геометрической прогрессии):

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p^n}=1-p.$$

Ясно, что поскольку написанное уравнение однозначно определяет в комплексной плоскости аналитическую функцию $\bar{G}(p)$, которая при малых p совпадает с той, которую ищем мы, то логично совершить аналитическое продолжение по p и положить:

$$G(p)=1-p.$$

Осталось найти обратное преобразование Лапласа ($p_0>0$):

$$G(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}(1-p)e^{pp^t}\frac{dp}{2\pi i}.$$

Обратим внимание, что на бесконечности функция стоящая при экспоненте не обращается в 0, а потому лемму Жордана к этому интегралу применять нельзя. Тем не менее, можно свести ситуацию к корректной, где предэкспоненциальный фактор будет стремиться к 0 при больших p. Достаточно представить интеграл в виде дифференцирования по параметру:

$$G(t)=\frac{d^2}{dt^2}\int_{p_0-i\infty}^{p+i\infty}\frac{1-p}{p^2}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}=\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\left[\operatorname{res}\frac{1-p}{p^2}e^{pt}\right]=\frac{d^2}{dt^2}\{\theta(t)[t-1]\}=\delta(t)-\dot{\delta}(t).$$

5.2 Второй способ. (устал, потом досмотрю.)
Уравнение на функцию Грина:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n G(t)=\delta(t)$$

Из этого следует, что можно записать уравнение на производную $\dot{G}(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \dot{G}(t)=\dot{\delta}(t) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^n G(t)=\dot{\delta}(t)$$

Вычитая из уравнения на функцию Грина уравнение на ее производную остается только сама функция Грина и получается ответ:

$$G(t)=\delta(t)-\dot{\delta}(t)$$

Ремарка: Написанное справедливо только при действии на функции спадающие очень медленно - они должны обладать убывающей последовательностью производных в 0. Тогда формально ряд можно будет обрезать на каком-то большом номере, но на том пространстве, на котором эта функция Грина действует вклад возникающей дельта-функции бесконечного порядка будет мал и потому им можно будет пренебречь.

15.2.2 Задача Коши для уравнения второго порядка гиперболического типа

Карлов-1 Задача Коши из экзаменов

Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно.

$$u=u(x,y),\quad y^4u_{yy}+y^2u_{xy}-2u_{xx}+2y^3\cdot u_y=0,$$

Начальные условия: $u\big|_{y=1}=x^2+5,\quad u_y\big|_{y=1}=2x-6, y>0, 1<x<2.$

Обзор решения (?) (??? абзац про суть решения?)
Напомним, что для $\underline{a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}}+F\left(u_x,u_y,u,x,y\right)=0$, где подчеркнута квадратичная часть, уравнение характеристик имеет вид: $a(x,y)dy^2-2b(x,y)dxdy+c(x,y)dx^2=0$.

1) Поиск характеристик Уравнение характеристик имеет вид:

$$y^4dx^2-y^2dxdy-2dy^2=0.$$

Разделим его на dy^2, приняв, что $\frac{dx}{dy}=x'(y)=x'$

$$y^4\left(x'\right)^2-y^2x'-2=0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно x'. Его дискриминант:

$$D(x,y)=y^4-4y^4(-2)=9y^4,$$

откуда

$$x'=\frac{y^2\pm 3y^2}{2y^4}.$$

Таким образом, получаем два дифференциальных уравнения, каждое из которых даёт по одному первому интегралу:

$$x'=\frac{2}{y^2};\qquad x'=-\frac{1}{y^2}$$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y^2};\quad \frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y^2}.$$

Интегрируя, получаем:

$$x=-\tfrac{2}{y}+C_1;\quad x=\tfrac{1}{y}+C_2$$
$$C_1=x+\tfrac{2}{y};\quad C_2=x-\tfrac{1}{y}$$

Получены два независимых первых интеграла (первый интеграл - это функция, которая сохраняется постоянной вдоль траектории решения данного дифференциального уравнения). Вид первого интеграла может быть разным. Сделаем замену:

$$\begin{cases}\xi=x-\frac{1}{y}\\ \eta=x+\frac{2}{y}\end{cases}.$$

2) Замена переменных. Является самым длинным этапом. Требуется пересчитать производные функции от x и y в производные функции от ξ и η. Вспомним, как меняются частные производные при замене переменных, т.е. как дифференцируется сложная функция:

$$v(\xi(x,y),\eta(x,y)) = u(x,y),$$
$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot 1 = v_\xi + v_\eta,$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{v_\xi}{y^2} - \frac{2v_\eta}{y^2}.$$

Далее нужно посчитать вторые производные, что делается дольше. Рассмотрим приём, как это можно сделать быстрее. В курсе математического анализа используется формула - вид n-го дифференциала функции n переменных:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n = d^n f\left(x_1, \ldots x_n\right).$$

При больших n данное выражение крайне громоздко. До определенного этапа в этой формуле при вычислении дифференциала частные производные рассматриваются как дробь. Соответственно, для нахождения u_{xx} можно возвести в квадрат центральную часть выражения (15), но считая производную по ξ как $\frac{\partial}{d\xi}$, т.е.:

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}\eta_x^2 + v_\xi \cdot \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}.$$

Пользуясь этой формулой, считаем частные производные:

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + v_\xi \cdot 0 + v_\eta \cdot 0 = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = v_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{y^4} - v_{\xi\eta}\frac{4}{y^4} + v_{\eta\eta}\frac{4}{y^4} + v_\xi \cdot \left(-\frac{2}{y^3}\right) + v_\eta \cdot \left(\frac{4}{y^3}\right)$$
$$u_{xy} = v_{\xi\xi}\frac{1}{y^2} + v_{\xi\eta}\left(-\frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) + v_{\eta\eta}\left(-\frac{2}{y^2}\right) + 0 + 0 = v_{\xi\xi}\frac{1}{y^2} + v_{\xi\eta}\left(-\frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) + v_{\eta\eta}\left(-\frac{2}{y^2}\right)$$

(Для u_{xy} надо перемножить по формальному правилу выражения (15) и (16)). Теперь надо подставить эти выражения в исходное уравнение. Этот шаг можно упростить. Запишем все имеющиеся выражения для частных производных, замену и исходное уравнение:

При подстановке в уравнение собираются подобные слагаемые. При подстановке получаются выражения, линейные по производным по ξ, η, т.е. можно посчитать коэффициенты отдельно для каждой производной:

$$\begin{array}{rc}
v_\xi: & y^4\left(-\frac{2}{y^3}\right) + 2y^3 \cdot \frac{1}{y^2} = 0 \\
v_\eta: & y^4 \cdot \left(\frac{4}{y^3}\right) + 2y^3 \cdot \frac{-2}{y^2} = 0 \\
v_{\xi\xi}: & y^4 \cdot \frac{1}{y^4} + y^2 \cdot \frac{1}{y^2} - 2 = 0 \\
v_{\xi\eta}: & y^4 \cdot \left(-\frac{4}{y^4}\right) + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) - 2 \cdot 2 = -9 \\
v_{\eta\eta}: & y^4 \cdot \frac{4}{y^4} + y^2\left(-\frac{2}{y^2}\right) - 2 = 0
\end{array}$$

Выражения (31) и (33) обязаны зануляться, иначе это сигнал, что в предыдущей части решения была допущена ошибка. В то же время выражение (32) обязано не зануляться, поскольку порядок уравнения является инвариантой. Коэффициенты первого порядка (29) и (30) не обязаны зануляться. Таким образом, получаем уравнение в каноническом виде:

$$-9v_{\xi\eta} = 0$$
$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Интегрируем по η и получаем:

$$v_\xi = C(\xi).$$

Интегрируем по ξ:

$$v(\xi,\eta) = \int C(\xi)d\xi + J(\eta),$$

Т.е.

$$v(\xi,\eta) = I(\xi) + J(\eta),$$

где I и J - произвольные функции класса C^2 на $\mathbb{R}$. Общее решение:

$$u(x,y) = I\left(x - \frac{1}{y}\right) + J\left(x + \frac{2}{y}\right),$$

где $I, J \in C^2(\mathbb{R})$ - произвольные функции. Ответов бесконечно много.

3) Ищем решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=1} = x^2 + 5, \quad u_y|_{y=1} = 2x - 6, y > 0, 1 < x < 2.$$

Подставляем общее решение в первое условие:

$$x^2 + 5 = I(x-1) + J(x+2),$$

и во второе (дифференцируя соответствующие функции как сложные):

$$2x - 6 = I'(x-1) \cdot 1 + J'(x+2) \cdot (-2).$$

Имеем два уравнения с двумя неизвестными функциями. Штрихи указаны по тем переменным, от которых эти функции зависят, т.е. $I' = I_\xi, J' = J'_\eta$. Преобразуем (41) и продифференцируем по x:

$$I(x-1) = x^2 + 5 - J(x+2)$$

$$\frac{d}{dx}: \quad I'(x-1) \cdot 1 = 2x - J'(x+2) \cdot 1$$

Подставляем (44) в (42):

$$2x - 6 = 2x - J'(x+2) - 2J'(x+2)$$

$$J'(x+2) = 2$$

Учтём, что $\eta = x + 2$:

$$J'(\eta) = 2, \Rightarrow J(\eta) = 2\eta + C$$

$$I(x+1) = x^2 + 5 - J(x+2) = x^2 + 5 - 2(x+2) - C = x^2 - 2x + 1 - C$$

Окончательно имеем:

$$J(\eta) = 2\eta + C$$

$$I(x-1) = x^2 - 2x + 1 - C = (x-1)^2 - C, \Rightarrow I(\xi) = \xi^2 - C$$

Ответ:

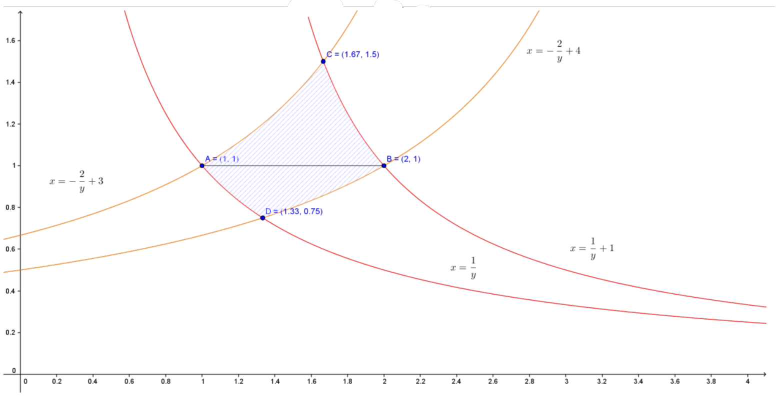
$$u(x,y) = I\left(x - \frac{1}{y}\right) + J\left(x + \frac{2}{y}\right) = \left(x - \frac{1}{y}\right)^2 + 2\left(x + \frac{2}{y}\right)$$

Решение задачи Коши даёт еще одно очко.

4) Область однозначности решения. В контрольной работе нужно предъявить рисунок области. Уравнение решалось при $y > 0, 1 < x < 2$. На графике рисуются характеристики (линии, вдоль которых ξ или $\eta = \mathrm{const}$), проходящие через концы отрезка, т.е. точки с координатами $(1,1)$ и $(2,1)$. Речь идёт о линиях:

$$\begin{cases} C_1 = x - \frac{1}{y} \\ C_2 = x + \frac{2}{y} \end{cases}$$

Если $x = y = 1$, то $C_1 = 0$. Если $x = 2, y = 1$, то $C_1 = 1$. Получаем две линии: $x = \frac{1}{y}$ и $x = \frac{1}{y} + 1$. Если $x = y = 1$, то $C_2 = 3$, Если $x = 2, y = 1$, то $C_2 = 4$. Получаем линии: $x = -\frac{2}{y} + 3, x = -\frac{2}{y} + 4$. Эти 4 линии ограничивают область ("криволинейный прямоугольник"). Необходимо найти точки пересечения линий. Очевидно, что $A(1,1), C(2,1)$. Подсчёты дают координаты оставшихся точек: $B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right), C\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right)$.



Данная область является искомой, поскольку для любой точки в этой области существуют по одной линии из каждого семейства, проходящих через неё. Обе эти линии пересекают отрезок, на котором поставлены начальные условия. Значит, значения функций I и J однозначно определяются из начальных условий. Для любой точки за рамками этой области хотя бы одна (а может, и обе) линия из соответствующих семейств не пересекает заданный отрезок. В этом случае решение не является единственным. Любая другая область, в которой решение определяется однозначно, является частью данной. Последний шаг даёт еще одно очко. Рассмотрим шаг 3) (какие ещё канонические виды могут встретиться после замены).

Пример:

$$v_{\xi\eta} = \xi - \eta.$$

Интегрируем сначала по η:

$$v_\xi = \int (\xi - \eta) d\eta = \xi\eta - \frac{\eta^2}{2} + C(\eta),$$

поскольку ξ - параметр. Интегрируем по ξ:

$$v = \int \left(\xi\eta - \frac{\eta^2}{2} + C(\eta) \right) d\xi = \frac{\xi^2 \eta}{2} - \frac{\xi\eta^2}{2} + \int C(\xi) d\xi + F(\eta),$$

Пример 2:

$$v_{\xi\eta} - 3v_\xi = 0.$$

Обозначаем $v_\xi = f$. Тогда на первом шаге η - переменная, ξ - параметр: $f'(\eta) - 3f(\eta) = 0$. $\frac{df}{d\eta} = 3f$ $\frac{df}{f} = 3d\eta$ или $f = 0$ $\ln|f| = 3\eta + D$ $f(\eta) = e^{3\eta}C$, $C \in \mathbb{R}$. Тогда

$$v_\xi = e^{3\eta} C(\xi).$$

Интегрируем по ξ:

$$v = \int e^{3\eta} \cdot C(\xi) d\xi = e^{3\eta} \int C(\xi) d\xi + F(\eta),$$

или

$$v(\xi, \eta) = e^{3\eta} I(\xi) + F(\eta).$$

Рекомендация: не стоит начинать контрольную с решения этой задачи, поскольку она достаточно трудна и занимает много времени, несмотря на то, что стоит первой.

B-12.1 Доказать единственность

Пусть на интервале (a, b) заданы функции $\varphi \in C^2, \varphi' \neq 0$, $u_0 \in C^2, u_1 \in C^1$. Доказать, что задача Коши

$$u_{xy} = 0, \quad a < x < b, \quad c < y < d;$$
$$u|_{y=\varphi(x)} = u_0(x), \quad u_y|_{y=\varphi(x)} = u_1(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x, y) = u_0(x) + \int_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\varphi'(\xi) d\xi,$$

где $c = \inf \varphi(x), d = \sup \varphi(x), \varphi^{-1}(y)-$ функция, обратная к функции $\varphi(x)$.

B-12.2 Доказать единственность

Пусть на интервале $(-1, 1)$ заданы функции $u_0 \in C^2, u_1 \in C^1$. Доказать, что задача Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 0; \quad u|_{y=0} = u_0(x), \quad u_y|_{y=0} = u_1(x)$$

имеет единственное решение в квадрате $\{|x - y| < 1, |x + y| < 1\}$. Показать, что этот квадрат является наибольшей областью единственности решения поставленной задачи.

B-12.3 Доказать случаи существования

Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \quad -\infty < x, \quad y < \infty;$$
$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad u_y|_{y=0} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда $u_0(x) \in C^2\left(R^1\right)$, а $u_1(x) \equiv \text{const}$. Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x, y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + y\left[u_1(0) - f'(0)\right]$$

где $f(y)$ - любая функция из класса $C^2\left(R^1\right)$.

В-12.4

Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \quad |x| < 1, \quad 0 < y < 1;$$
$$u\big|_{y=x^2} = 0, \quad u_y\big|_{y=x^2} = u_1(x)$$

существует только тогда, когда $u_1(x) \in C(-1,1), xu_1(x) \in C^1(-1,1)$, $u_1(x)$ - четная функция.

Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и $u(x,y) = 2\int_x^{\sqrt{y}} \xi u_1(\xi) d\xi$.

В-12.5

Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xy} = 0, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1;$$
$$u\big|_{y=x^3} = |x|^\alpha, \quad u_x\big|_{y=x^3} = 0$$

существует только тогда, когда $\alpha = 0$ или $\alpha \geq 6$. Показать, что при этом решение поставленной задачи единственно и $u(x,y) = |y|^{\alpha/3}$.

В-12.6

Доказать, что решение задачи Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 6(x+y), \quad -\infty < x, \quad y < \infty$$
$$u\big|_{y=x} = 0, \quad u_x\big|_{y=x} \qquad = u_1(x)$$

существует только тогда, когда $u_1(x) - 3x^2 \equiv \text{const}$. Показать, что при этом решение поставленной задачи не единственно и все решения этой задачи можно представить в виде

$$u(x,y) = x^3 - y^3 + f(x-y) - f(0) + (x-y)\left[u_1(0) - f'(0)\right]$$

где $f(x)$ - любая функция из класса $C^2\left(R^1\right)$.

В задачах 12.7-12.19 требуется найти наибольшую область, в которой поставленная задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.

В-12.7 Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$u_{xy} = 0 \;\; u\big|_{y=x^2} = 0, \quad u_y\big|_{y=x^2} = \sqrt{|x|}, \quad |x| < 1.$

В-12.8 Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$u_{xy} + u_x = 0; \;\; u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_x\big|_{y=x} = 1, \quad |x| < \infty.$

В-12.9 Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0; \;\; u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty.$

В-12.10 Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4; \;\; u\big|_{x=0} = -y, \quad u_x\big|_{x=0} = y - 1, \quad |y| < \infty.$

В-12.11 Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2;$

$$u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = x + \cos x, \quad |x| < \infty.$$

B-12.12 Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

$u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0;$

$$u\big|_{y=3x} = 0, \quad u_y\big|_{y=3x} = e^{-5x^2}, \quad x < 1.$$

B-12.13 Найти наибольшую область с единственным решением и это решение для

1) $xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0;$

$$u\big|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0, \quad x > 0;$$

2) $xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 2x^3;\ u\big|_{y=x} = \sin x, \quad u_x\big|_{y=x} = \cos x, \quad x > 0.$

B-12.14

$xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0;$

$$u\big|_{y=1/x} = x^3, \quad u_x\big|_{y=1/x} = 2x^2, \quad x > 0.$$

B-12.15

$u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0$

$$u\big|_{x=0} = y, \quad u_x\big|_{x=0} = 2, \quad |y| < \infty.$$

B-12.16

1) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0;$

$$u\big|_{x=1} = y, \quad u_x\big|_{x=1} = y, \quad y < 0;$$

2) $u_{xx} - 4x^2u_{yy} - \frac{1}{x}u_x = 0;$

$$u\big|_{x=1} = y^2 + 1, \quad u_x\big|_{x=1} = 4, \quad |y| < \infty.$$

B-12.17

$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0;$

$$u\big|_{y=1} = 0, \quad u_y\big|_{y=1} = \sqrt[4]{x^7}, \quad x > 0.$$

B-12.18

$yu_{xx} + x(2y-1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x + \frac{2x}{1+2y}\left(u_x + 2xu_y\right) = 0;$

$$u\big|_{y=0} = x^2, \quad u_y\big|_{y=0} = 1, \quad x > 0.$$

B-12.19

$yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} - \frac{x+y}{x-y}\left(u_x - u_y\right) = 0;\ u\big|_{y=0} = x^2, \quad u_y\big|_{y=0} = x, \quad x > 0.$

B-12.20 Решить методом Римана задачу Коши

$u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 1, \quad 0 < x, \quad y < 1;$

$$u\big|_{x+y=1} = x, \quad u_x\big|_{x+y=1} = x.$$

B-12.21 Решить методом Римана задачу Коши

$xyu_{xy} + xu_x - yu_y - u = 2y, \quad 0 < x, y < \infty;$

$$u\big|_{xy=1} = 1 - y, \quad u_y\big|_{xy=1} = x - 1.$$

В-12.22 Решить методом Римана задачу Коши

$u_{xy} + \frac{1}{x+y}(u_x + u_y) = 2, \quad 0 < x, y < \infty;$

$$u|_{y=x} = x^2, \quad u_x|_{y=x} = 1 + x.$$

В-12.23 Решить методом Римана задачу Коши

$u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x - \frac{2}{y}u_y = 0, \quad |x - y| < 1, \quad |x + y - 2| < 1;$ $u|_{y=1} = u_0(x), \quad u_y|_{y=1} = u_1(x), \quad u_0 \in C^2(0,2), \quad u_1 \in C^1(0,2).$

В-12.24 Решить методом Римана задачу Коши

$2u_{xy} - e^{-x}u_{yy} = 4x, \quad -\infty < x, \quad y < \infty;$

$$u|_{y=x} = x^5 \cos x, \quad u_y|_{y=x} = x^2 + 1.$$

В-12.25

Пусть функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши $u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$
Доказать, что для любого $T > 0$ существует решение задачи Коши $v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad t < T, \quad x \in R^1; \quad v|_{t=T} = u|_{t=T}, \quad v_t|_{t=T} = u_t|_{t=T}$. Показать, что $u(x,t) \equiv v(x,t)$ при $0 \le t \le T$.

В-12.26

Доказать, что если существует решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

то $u \in C^2(t \ge 0), \quad u_0 \in C^2\left(R^1\right), \quad u_1 \in C^1\left(R^1\right).$

В-12.27

Пусть функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Доказать, что функция $v(x,t) = \int_0^t u(x,\tau)d\tau$ является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v; \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

В-12.28

Пусть функция $u(x,t,t_0)$ при каждом фиксированном $t_0 \ge 0$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \quad u|_{t=t_0} = 0, \quad u_t|_{t=t_0} = f(x, t_0).$$

Доказать, что функция $v(x,t,t_0) = \int_{t_0}^t u(x,t,\tau)d\tau$ является решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + f(x,t); \quad v|_{t=t_0} = 0, \quad v_t|_{t=t_0} = 0.$$

В-12.29

Доказать, что если функции $f(x), u_0(x), u_1(x)-$ гармонические в R^n, а $g(t) \in C^1(t \ge 0)$, то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + g(t)f(x); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

выражается формулой

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau$$

B-12.30

Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если $\quad \Delta^N f = 0, \quad \Delta^N u_0 = 0, \quad \Delta^N u_1 = 0.$

B-12.31

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in R^2;$$

$$u|_{t=0} = f(x_1) + g(x_2), \quad u_t|_{t=0} = F(x_1) + G(x_2)$$

достаточно, чтобы функции $f(x_1)$ и $g(x_2)$ принадлежали классу $C^2\left(R^1\right)$, а функции $F(x_1)$ и $G(x_2)$ - классу $C^1\left(R^1\right)$. Найти это решение.

B-12.32

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = f(x_1)\, g(x_2, x_3), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

достаточно, чтобы функция $g(x_2, x_3)$ была гармонической и $f \in C^2\left(R^1\right)$. Найти это решение.

B-12.33

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = \alpha(|x|), \quad u_t|_{t=0} = \beta(|x|)$$

достаточно, чтобы $\alpha(r) \in C^3(r \geq 0), \beta(r) \in C^2(r \geq 0)$ и $\alpha'(0) = 0$. Найти это решение.

B-12.34

Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt} = \Delta u, \quad x \in R^3;$$

$$u|_{t=0} = \theta(1 - |x|)|x|^\alpha (1 - |x|)^\beta, \quad u_t|_{t=0} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \geq 2$ и $\beta \geq 3$. Найти это решение. Результат этой задачи сравнить с достаточными условиями (5) (с. 137) в случаях $2 < \alpha < 3, \beta \geq 3$ и $\alpha = 2, 2 < \beta < 3$.

B-12.35

Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = \theta(1 - |x|)\left(x^2 - 1\right)^3, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Построить графики функций $u(x,0), u\left(x, \frac{1}{2}\right), u(x,1), u(x,2)$. Решение задач 12.36-12.38 можно находить по формулам (6)-(8), но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 12.27-12.32.

B-12.36

Решить задачи $(n = 1)$:

1) $u_{tt} = u_{xx} + 6; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x;$

2) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x;$

3) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x; \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0;$

4) $u_{tt} = u_{xx} + e^x; \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + \cos x$; 5) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x; \quad u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 1$; 6) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0$; 7) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$

В-12.37

Решить задачи ($n=2$):
1) $u_{tt}=\Delta u+2;\quad u|_{t=0}=x,\quad u_t|_{t=0}=y;$
2) $u_{tt}=\Delta u+6xyt;\quad u|_{t=0}=x^2-y^2,\quad u_{t=0}|_{t=xy};$
3) $u_{tt}=\Delta u+x^3-3xy^2;\quad u|_{t=0}=e^x\cos y,\quad u_t|_{t=0}=e^y\sin x;$
4)$u_{tt}=\Delta u+t\sin y;\quad u|_{t=0}=x^2,\quad u_t|_{t=0}=\sin y$; 5) $u_{tt}=2\Delta u;\quad u|_{t=0}=2x^2-y^2,\quad u_t|_{t=0}=2x^2+y^2;$ 6) $u_{tt}=3\Delta u+x^3+y^3;\quad u|_{t=0}=x^2,\quad u_t|_{t=0}=y^2$; 7) $u_{tt}=\Delta u+e^{3x+4y};\quad u|_{t=0}=e^{3x+4y},\quad u_t|_{t=0}=e^{3x+4y};$ 8) $u_{tt}=a^2\Delta u;\quad u|_{t=0}=\cos(bx+cy),\quad u_t|_{t=0}=\sin(bx+cy)$; 9) $u_{tt}=a^2\Delta u;\quad u|_{t=0}=r^4,\quad u_t|_{t=0}=r^4$; 10) $u_{tt}=a^2\Delta u+r^2e^t;\quad u|_{t=0}=0,\quad u|_{t=0}=0.$

В-12.38

Решить задачи ($n=3$):
1) $u_{tt}=\Delta u+2xyz;\quad u|_{t=0}=x^2+y^2-2z^2,\quad u_t|_{t=0}=1;$
2) $u_{tt}=8\Delta u+t^2x^2;\quad u|_{t=0}=y^2,\quad u_t|_{t=0}=z^2;$
3) $u_{tt}=3\Delta u+6r^2;\quad u|_{t=0}=x^2y^2z^2,\quad u_t|_{t=0}=xyz;$
4)$u_{tt}=\Delta u+6te^{x\sqrt{2}}\sin y\cos z\ \ u|_{t=0}=e^{x+y}\cos z\sqrt{2},\quad u_t|_{t=0}=e^{3y+4z}\sin 5x$; 5) $u_{tt}=a^2\Delta u;\quad u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=r^4$; 6) $u_{tt}=a^2\Delta u+r^2e^t;\quad u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0$; 7) $u_{tt}=a^2\Delta u+\cos x\sin ye^z;\ u|_{t=0}=x^2e^{y+z},\quad u_t|_{t=0}=\sin xe^{y+z}$; 8) $u_{tt}=a^2\Delta u+xe^t\cos(3y+4z);\ u|_{t=0}=xy\cos z,\quad u_t|_{t=0}=yze^x$; 9) $u_{tt}=a^2\Delta u;\quad u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=\cos r.$

В-12.39

Пусть выполнены достаточные условия (5) (с. 137) для существования решения задачи Коши

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2\Delta u;\quad u|_{t=0}=u_0(x),\quad u|_{t=0}=u_1(x)\\&\|x|\geq\delta>0\end{aligned}$$

и пусть при $|x|\geq\delta>0$

$$m|x|^\alpha\leq u_0(x)\leq M|x|^\alpha,\quad m|x|^{\alpha-1}\leq u_1(x)\leq M|x|^{\alpha-1},$$

где $\alpha>0, 0<m<M$. Доказать, что для каждой точки x_0 существуют положительные числа t_0, C_1, C_2 такие, что при всех $t\geq t_0$ выполняется оценка

$$C_1t^\alpha\leq u(x_0,t)\leq C_2t^\alpha.$$

В-12.40

Пусть выполнены достаточные условия (5) (с. 137) для существования решения задачи Коши

$$u_{tt}=a^2\Delta u;\quad u|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t|_{t=0}=u_1(x)$$

и пусть для $\alpha>0$

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{u_0(x)}{|x|^\alpha}=A,\quad \lim_{|x|\to\infty}\frac{u_1(x)}{|x|^{\alpha-1}}=B.$$

Доказать, что $\lim_{t\to+\infty}\frac{u(x,t)}{t^\alpha}=C_n$ и найти $C_n, n=1,2,3$.

В-12.41

Доказать, что если $F(x,t)\in\mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right), F=0$ при $t<0$, то свертка $\mathscr{E}_n*F$ существует в $\mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right)$.

В-12.42

Доказать, что обобщенная задача Коши (9) имеет единственное решение в классе обобщенных функций из $\mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right)$, обрашающихся в нуль при $t<0$.

В-12.43

Доказать:
1) $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ принадлежат классу C^∞ по $t\in(0,\infty)$;
2) $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ удовлетворяют предельным соотношениям при

B-12.44

Решить обобщенную задачу Коши (9) $\left(x \in R^1\right)$ со следуюшими источниками $F(x,t)$:
1) $\delta(t) \cdot \delta(x)$;
2) $\delta\left(t-t_0\right) \cdot \delta\left(x-x_0\right), t_0 \geq 0$
3) $\delta(t) \cdot \delta'(x)$;
4)$\delta'(t) \cdot \delta(x)$; 5) $\delta'\left(t-t_0\right) \cdot \delta(x)$ 6) $\delta(t) \cdot \delta'\left(x_0-x\right)$ 7) $\delta''(t) \cdot \delta(x)$; 8) $\delta(t) \cdot \delta''(x)$; 9) $\delta(t) \cdot \alpha(x)\delta(x)$, где $\alpha(x) \in C$ и $\alpha(0)=0$; 10) $\delta(t) \cdot \beta(x)\delta(x)$, где $\beta(x) \in C$ и $\beta(0)=1$. Ниже при постановке обобщенной задачи Коши будем считать источником функцию вида $F(x,t)=f(x,t)+u_0(x) \cdot \delta'(t)+u_1(x) \cdot \delta(t)$, $f=0$ при $t<0$.

B-12.45

Решить обобщенную задачу Коши со следуюшими источниками $\left(x \in R^1\right)$:
1) $f=\omega(t) \cdot \delta(x)$, где $\omega(t) \in C(t \geq 0), \omega(t)=0$ при $t<0, u_0=\delta(x), u_1=\delta(x)$;
2) $f=\theta(t) \cdot \delta(x)$, $u_0=\delta\left(x-x_0\right), \quad u_1=x\delta(x)$
3) $f=\theta(t)t \cdot \delta(x)$, $u_0=\delta(2-x)$, $u_1=\delta(3-x)$ $a=1$;
4)$f=\theta(t)\sin t \cdot \delta\left(x-x_0\right), \quad u_0=0, \quad u_1=x\delta'(x)$; 5) $f=\theta(t)\cos t \cdot \delta(x), \quad u_0=0, \quad u_1=x^2\delta''(x)$; 6) $f=\theta(t)e^{\alpha t} \cdot \delta(x), \quad u_0=\delta(1-|x|), \quad u_1=0$ 7) $f=\frac{\theta(t)}{\sqrt{t}} \cdot \delta(2-x), \quad u_0=0, \quad u_1=\delta(R-|x|); \quad a=1$; 8) $f=\theta(t)t^2 \cdot \delta(x), \quad u_0=C=\text{const}, \quad u_1=\theta'(R-|x|); \quad a=1$; 9) $f=\theta(t)\ln t \cdot \delta(x), \quad u_0=\frac{1}{1+x^2}\delta(x), \quad u_1=0$; 10) $f=\frac{\theta(t-1)}{1+t^2} \cdot \delta(x), \quad u_0=\theta'(2-|x|), \quad u_1=0; \quad a=1$ 11) $f=0, \quad u_0=0, \quad u_1=\theta''(2-|x|); \quad a=1$; 12) $f=\frac{\theta(t)}{1+t} \cdot \delta(x-1), \quad u_0=0, \quad u_1=\sin x\delta'(x-\pi)$; 13) $f=\theta(at-|x|), \quad u_0=0, \quad u_1=0$; 1
4)$f=\theta(t)(\alpha t+\beta) \cdot x\delta'(x), \quad u_0=0, \quad u_1=x\delta''(x); \quad a=1$.

B-12.46

Доказать, что если $u_1(x)$ - локально интегрируемая функция в R^1, то $V_1^{(0)}(x,t)$ - непрерывная функция в R^2 и выражается формулой

$$V_1^{(0)}(x,t)=\frac{\theta(t)}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi$$

B-12.47

Доказать, что если $u_0(x)$ - локально интегрируемая функция в R^1, то $V_1^{(1)}(x,t)$ - непрерывная функция в R^2 и выражается формулой

$$V_1^{(1)}(x,t)=\frac{\theta(t)}{2}\left[u_0(x+at)+u_0(x-at)\right].$$

Ук а з ани е. Воспользоваться тем, что $V_1^{(1)}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathscr{E}_1 * u_0(x)\right]$ в силу задач 8.35 и 12.46.

B-12.48

Доказать, что если $f(x,t)$ - локально интегрируемая функция в R^2, равная нулю при $t<0$, то потенциал $V_1(x,t)$ принадлежит $C\left(R^2\right)$ и выражается формулой

$$V_1(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

B-12.49

Решить обобщенные задачи:
1) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\theta(x) \cdot \delta'(t)+\theta(x) \cdot \delta(t)$;
2) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\theta(t)(x-1)+x \cdot \delta'(t)+\operatorname{sign}(x) \cdot \delta(t)$;
3) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\theta(t)tx+\frac{\theta(x)}{\sqrt{x}} \cdot \delta(t)$;
4)$u_{tt}=u_{xx}+\frac{\theta(x)}{t+1}+\theta(-x) \cdot \delta(t)$; 5) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t-2)\ln t+|x| \cdot \delta'(t)$; 6) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\theta(t)t^m+\theta(2-|x|) \cdot \delta'(t), \quad m=1,2,\ldots$; 7) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t)e^{x+t}+\theta(x)e^{-x} \cdot \delta(t)$; 8) $u_{tt}=9u_{xx}+\theta(t-\pi)\cos t+\theta(x-3) \cdot \delta'(t)+1(x) \cdot \delta(t)$; 9) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t)\theta(x)$; 10) $u_{tt}=u_{xx}+2\theta(t)\theta(x)x+e^{\alpha x} \cdot \delta(t), \quad \alpha \neq 0$; 11) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t-1)(x+t)+|x| \cdot \delta(t)$; 12) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t-2)t+\theta(x-1)\ln x \cdot \delta'(t)$; 13) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(x)x^m \cdot \delta'(t)+\theta(x)x^m \cdot \delta(t), \quad m=1,2,\ldots$; 1
4)$u_{tt}=u_{xx}+\frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}+\theta(x)\cos x \cdot \delta(t)$; 15) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t)\sqrt{t}x+\theta(-x) \cdot \delta'(t)+\theta(-x)x \cdot \delta(t)$; 16) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(x)e^{-\sqrt{x}} \cdot \delta'(t)+x^2 \cdot \delta(t)$; 17) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t)\sin(x+t)+\sin x \cdot \delta(t)$; 18) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(1-|x|) \cdot \delta(t)$.

В-12.50

Доказать:

1) если $u_0 \in C^2\left(R^1\right)$ и $u_1 \in C^1\left(R^1\right)$, то потенциалы $V_1^{(0)}$ и $V_1^{(1)}$ принадлежат классу $C^2(t \geq 0)$, удовлетворяют при $t>0$ уравнению $\square_a u=0$ и начальным условиям:

$$
\begin{aligned}
& \left.V_1^{(0)}\right|_{t=+0}=0, \quad \left.\left(V_1^{(0)}\right)_t\right|_{t=+0}=u_1(x), \\
& \left.V_1^{(1)}\right|_{t=+0}=u_0(x), \quad \left.\left(V_1^{(1)}\right)_t\right|_{t=+0}=0
\end{aligned}
$$

(У к аз а н и е. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (11) и (12).);

2) если $f \in C^1(t \geq 0)$, то потенциал $V_1 \in C^2\left(R^2\right)$ удовлетворяет при $t>0$ уравнению $\square_a u=f(x, t)$ и начальным условиям

$$
\left.V_1\right|_{t=+0}=0, \quad \left.\left(V_1\right)_t\right|_{t=+0}=0
$$

(Указ а н и е. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (13).).

В-12.51

Пусть в задаче Коши (обобщенной)

$$
u_{tt}=a^2 u_{xx}+u_0(x) \cdot \delta^{\prime}(t)+u_1(x) \cdot \delta(t)
$$

функции $u_0 \in C^2$ и $u_1 \in C^1$ для всех x, кроме $x=x_0$, где u_0, u_1 (или их производные) имеют разрыв первого рода. Показать, что решение этой задачи является классическим всюду в полуплоскости $t>0$, кроме точек, лежащих на характеристиках, проходящих через точку $x=x_0, t=0$ (распад разрыва), для следующих случаев:

1) $u_0=\theta(x) \omega(x)$, где $\omega=C^2\left(R^1\right), \omega(0) \neq 0$ и $u_1=0$;

2) $u_0=0, u_1=\theta\left(x-x_0\right) \omega(x)$, где $\omega \in C^1\left(R^1\right), \omega\left(x_0\right) \neq 0$;

3) $u_0=\theta(x-1), u_1=\theta(x-2)$.

В-12.52 Фронты от волн (????)

Для задачи Коши (9) убедиться в том, что:

1) от источника возмущения

$$
F=u_0(x) \cdot \delta^{\prime}(t)=\theta\left(x_0-|x|\right) f(x) \cdot \delta^{\prime}(t), \quad x_0>0,
$$

$f \in C^2\left(R^1\right)$, возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени $t>0$ передний фронт в точках $x= \pm\left(a t+x_0\right)$ соответственно и в каждый момент времени $t>\frac{x_0}{a}$ задний фронт в точках $x= \pm\left(a t-x_0\right)$ (принцип Гюйгенса);

2) от источника

$$
F=u_1(x) \cdot \delta(t)=\theta\left(x_0-|x|\right) f(x) \cdot \delta(t), \quad x_0>0,
$$

$f \in C^1\left(R^1\right)$, возникают две волны, которые имеют в каждый момент времени $t>0$ передний фронт в точках $x= \pm\left(a t+x_0\right)$ и не имеют

Ук а з ан и е. Воспользоваться формулами (11) и (12).

В-12.53

Решить следующие обобщенные задачи и доказать, что полученные решения являются решениями и классической задачи Коши (3), (4):

1) $u_{tt}=a^2 u_{xx}+\theta(t)(x+t)+e^{\alpha x} \cdot \delta^{\prime}(t)$;

2) $u_{tt}=a^2 u_{xx}+\theta(t) t \ln t+3^x \cdot \delta^{\prime}(t)$;

3) $u_{tt}=a^2 u_{xx}+\theta(t)\left(x^2+t^2\right)+x^m \cdot \delta^{\prime}(t), m=1,2 \ldots$;

4)$u_{tt}=u_{xx}+\theta(t) x^2+\cos x \cdot \delta^{\prime}(t)+\cos x \cdot \delta(t)$; 5) $u_{tt}=a^2 u_{xx}+x^2 \ln |x| \cdot \delta(t)$; 6) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t) \cos (x+t)+2^x \cdot \delta(t)$; 7) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t) \sin t+\frac{1}{1+x^2} \cdot \delta(t)$; 9) $u_{tt}=u_{xx}+\left(\alpha x^2+\beta\right) \cdot \delta^{\prime}(t)+x^{4/3} \cdot \delta(t)$; 10) $u_{tt}=u_{xx}+\ln \left(1+e^x\right) \cdot \delta^{\prime}(t)+e^{-x^2} \cdot \delta(t)$; 11) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t) t^m x+\sin x \cdot \delta^{\prime}(t)+x^m \delta(t), m=1,2, \ldots$; 12) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t) \operatorname{arctg} t+\ln \left(1+x^2\right) \cdot \delta^{\prime}(t)$; 13) $u_{tt}=4 u_{xx}+\theta(t) \cos x+\sqrt{1+x^2} \cdot \delta^{\prime}(t)$; 1

4)$u_{tt}=u_{xx}+\theta(t) x \sin t+x^2 e^{-|x|} \cdot \delta^{\prime}(t)$; 15) $u_{tt}=4 u_{xx}+e^{-x^2} \cdot \delta^{\prime}(t)+e^{-x} \sin x \cdot \delta(t)$; 16) $u_{tt}=u_{xx}+\sin^2 x \cdot \delta^{\prime}(t)+x e^{-|x|} \cdot \delta(t)$; 17) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t) \frac{x}{1+t^2}+\frac{1}{2-\cos x} \cdot \delta^{\prime}(t)$; 18) $u_{tt}=u_{xx}+\theta(t)\left(x e^t+t e^x\right)+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \delta(t)$.

B-12.54

Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения $\left(x \in R^2\right)$:
1) $u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t)$
2) $u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t)t^2 \cdot \delta(x) + |x|^m\delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta\left(x - x^2\right) \cdot \delta(t), m = 1, 2, \ldots;$
3) $u_{tt} = a^2\Delta u + \omega(t) \cdot \delta(x) + e^{|x|}\delta(x) \cdot \delta(t)$, где $\omega \in C(t \geq 0)$ и $\omega = 0$ при $t < 0$;
4)$u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t)(\alpha t + \beta) \cdot \delta(x) + \delta\left(x - x_0\right) \cdot \delta(t)$.

B-12.55

Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения $\left(x \in R^3\right)$:
1) $u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t) \cdot \delta(x) + \delta(x) \cdot \delta'(t) + \delta(x) \cdot \delta(t)$;
2) $u_{tt} = a^2\Delta u + \theta\left(t - t_0\right) \cdot \delta\left(x - x_0\right) + \delta\left(x - x'\right) \cdot \delta(t), t_0 \geq 0$;
3) $u_{tt} = a^2\Delta u + \omega(t) \cdot \delta(x) + |x|^2 \frac{\partial^2\delta(x)}{\partial x_k^2} \cdot \delta'(t) + \frac{\partial\delta(x)}{\partial x_k} \cdot \delta(t), k = 1, 2, 3,$
где $\omega \in C(t \geq 0)$ и $\omega = 0$ при $t < 0$;
4)$u_{tt} = a^2\Delta u + \theta(t)\sin t \cdot \delta(x) + e^{-|x|^2} \frac{\partial\delta(x)}{\partial x_k} \cdot \delta'(t)$.

B-12.56

Доказать, что если $u_1(x)$ - локально интегрируемая функция в $R^n, n = 2, 3$, то $V_n^{(0)}$ - локально интегрируемая функция в R^{n+1} и выражается формулами

$$V_2^{(0)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{|x-\xi|<at} \frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}}$$
$$V_3^{(0)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi)ds.$$

З а м е ч а н и е. Так как $V_n^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathscr{E}_n(x,t) * u_0(x)\right)$, то, заменяя в (14_1) и (14_2) u_1 на u_0 и дифференцируя по t, получим

$$V_2^{(1)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{|x-\xi|<at} \frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}}\right)$$
$$V_3^{(1)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)ds\right).$$

B-12.57

Доказать, что если $f(x,t)-$ локально интегрируемая функция в $R^{n+1}, n = 2, 3$, равная нулю при $t < 0$, то V_2 - непрерывная функция и V_3 - локально интегрируемая функция в R^{n+1} и они выражаются формулами:

$$V_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{|x-\xi|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}},$$
$$V_3(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-\xi|<at} \frac{f(\xi, t - |x-\xi|/a)}{|x-\xi|}d\xi.$$

B-12.58

Доказать:

1) если $u_0 \in C^3\left(R^n\right), u_1 \in C^2\left(R^n\right)$ при $n = 2, 3$, то $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$, $n = 2, 3$, принадлежат классу $C^2(t \geq 0)$, удовлетворяют при $t > 0$ уравнению $\square_a u = 0$ и начальным условиям

$$V_n^{(0)}\Big|_{t=+0} = 0, \qquad \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t}\Big|_{t=+0} = u_1(x),$$
$$V_n^{(1)}\Big|_{t=+0} = u_0(x), \qquad \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0$$

2) если $f \in C^2(t \geq 0)$, то $V_n \in C^2(t \geq 0), n = 2, 3$, удовлетворяет при $t > 0$ уравнению $\square_a u = f(x,t)$ и начальным условиям

$$V|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial V_n}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0.$$

У к а з а н и е. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формул (14) и (15), если в них сделать замену переменных $\xi - x = at\eta$ и $\xi - x = a(t-\tau)\eta$ соответственно.

B-12.59

Решить обобщенную задачу Коши для волнового уравнения $\left(x \in R^2\right)$ и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (3), (4):

1) $f=\theta(t)$, $u_0=C$, $u_1=C$, $C=\text{const}$;
2) $f=\theta(t)|x|^2$, $u_0=|x|^2$, $\quad u_1=|x|^2$;
3) $f=\theta(t)t^2$, $u_0=0$, $\quad u_1=1+|x|^2$;
4)$f=\theta(t)e^{-t}|x|^2$, $\quad u_0=1+|x|^2$, $\quad u_1=0$.

B-12.60 Решить задачу Коши для волнового уравнения $(x \in R^3)$ со следующими данными:

1) $f=\theta(t)|x|^2$, $u_0=0$, $u_1=|x|^2$
2) $f=\theta(t)t^2|x|^2$, $\quad u_0=1$, $u_1=1$
3) $f=\omega(t)$, где $\omega \in C^2(t \geq 0)$ и $\omega=0$ при $t<0$, $\quad u_0=0$, $u_1=\alpha|x|^2+\beta$
4)$f=\theta(t)\ln|x|$, $u_0=0$, $u_1=0$; $a=1$;
5) $f=\theta(t)$ $u_0=\frac{1}{1+|x|^2}$, $\quad u_1=0$
6) $f=0$, $u_0=\sin|x|^2$, $u_1=\operatorname{sh}|x|^2$; $\quad a=1$
7) $f=\theta(t)t$, $u_0=|x|^2$, $\quad u_1=\frac{1}{1+|x|^2}$; 8) $f=\theta(t)e^{-ikt}\omega(x)$, где $\omega \in C^2, u_0=\sqrt{1+|x|^2}, u_1=0; a=1$; 9) $f=\theta(t)e^{-|x|^2}$, $\quad u_0=0$, $\quad u_1=\cos|x|^2$; $\quad a=1$; 10) $f=0$, $\quad u_0=\ln\left(1+|x|^2\right)$, $\quad u_1=e^{-|x|^2}$; $\quad a=1$;
11) $f=0$, $\quad u_0=e^{-|x|^2}$, $\quad u_1=\ln|x|$; $\quad a=1$;
12) $f=\theta(t)\sin t$, $\quad u_0=\cos|x|^2$, $\quad u_1=0$;
13) $f=0$, $\quad u_0=C\theta(R-|x|)$, $\quad u_1=0$;
14)$f=\theta(at-|x|)$, $\quad u_0=0$, $\quad u_1=0$.

Задачи Коши для уравнений 12.61-12.63 формулируются так же, как для волнового уравнения.

B-12.61

Решить обобщенную задачу Коши для уравнения гиперболического типа где $\quad \square_a u=bu_x+\frac{b}{a}u_t+F(x,t)$, $\quad a>0$, $\quad b>0$,

$$F(x,t)=f(x,t)+u_0(x)\cdot\delta'(t)+\left[u_1(x)-\frac{b}{a}u_0(x)\right]\cdot\delta(t)$$

со следующими данными:

1) $f=\theta(t)\cdot\delta(x)$, $\quad u_0=\delta(x)$, $\quad u_1=\delta(x)$;
2) $f=\theta(t)x, u_0=0, u_1=\theta(x); a=b=1$;
3) $f=\theta(t)t, u_0=1, u_1=x; a=b=1$
4) $f=\theta(t)e^t, u_0=e^x, u_1=e^x; b=1$
5) $f=\theta(t)e^x, u_0=\alpha x+\beta, u_1=0$.

B-12.62

Решить обобщенную задачу Коши для уравнения Клейна-Гордона -Фока

$$\square_a u+m^2u=f(x,t)+u_0(x)\cdot\delta'(t)+u_1(x)\cdot\delta(t)$$

со следующими данными:

1) $f=0$, $\quad u_0=\delta(x)$, $\quad u_1=\delta(x)$, $\quad a=m=1$;
2) $f=\omega(t)\cdot\delta(x)$, где $\omega \in C(t \geq 0)$ и $\omega=0$ при $t<0, u_0=0$, $u_1=x; a=m=1$;
3) $f=\theta(t)$, $\quad u_0=1$, $\quad u_1=1$, $\quad a=m=1$;
4)$f=0$, $\quad u_0=\theta(x)$, $\quad u_1=\theta(x)$, $\quad a=m=1$.

B-12.63

Решить обобщенную задачу Коши для телеграфного уравнения

$$\square_a u+2mu_t=f(x,t)+u_0(x)\cdot\delta'(t)+u_1(x)\cdot\delta(t)$$

со следующими данными:

1) $f=0$, $\quad u_0=\delta(x)$, $\quad u_1=\delta(x)$, $\quad a=m=1$;
2) $f=\omega(t)\cdot\delta(x)$, где $\omega \in C(t \geq 0)$ и $\omega=0$ при $t<0, u_0=0$, $u_1=0; a=m=1$;
3) $f=0$, $\quad u_0=1$, $\quad u_1=\theta(x)$, $\quad a=m=1$.

15.2.3 Задача Коши для уравнения теплопроводности (?????)

(чет мне говорили, что нужно разобраться в этом, мб и сяду разбираться когда-то)

Лебедев-1.3.2. решение одномерного диффузионного уравнения для $u(0,x) = \exp\left[-x^2/\left(2l^2\right)\right]$.

Найти решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия: $u(0,x) = \exp\left[-x^2/\left(2l^2\right)\right]$. Сравните ответ с асимптотическим поведением (1.73).

Лебедев-1.3.3.

Найти асимптотическое поведение решений при следующих начальных условий 1) $u(0,x) =$

$$x\exp\left[-x^2/\left(2l^2\right)\right]$$

$$u(0,x) = \exp(-|x|/l);$$

$$u(0,x) = x\exp(-|x|/l);\ 4)\ \ u(0,x) = \left(x^2+l^2\right)^{-1}; 5\Big)$$
$$u(0,x) = x\left(x^2+l^2\right)^{-2}$$

(???)

Лебедев-1.3.4.

Найти асимптотическое поведение на больших временах для одномерного поля $u(t,x)$, динамика которого в Фурье-представлении задается уравнением $\partial\tilde{u}/\partial t = -|q|\tilde{u}$.

B-13.1

Пусть функция $u\left(x,t,t_0\right)$ принадлежит классу C^2 при $x \in R^n, t \geq t_0 \geq 0$. Доказать, что функция $u\left(x,t,t_0\right)$ при каждом $t_0 \geq 0$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \quad \left.u\right|_{t=t_0} = f\left(x,t_0\right)$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v\left(x,t,t_0\right) = \int_{t_0}^{t} u(x,t,\tau)d\tau$$

при каждом $t_0 \geq 0$ является решением задачи Коши

$$v_t = a^2\Delta v + f(x,t), \quad \left.v\right|_{t=t_0} = 0.$$

B-13.2

Пусть $u_k\left(x_k,t\right)$ - решение задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta\boldsymbol{u}, \quad \left.u\right|_{t=0} = f_k\left(x_k\right), \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Доказать, что функция $u(x,t) = \prod_{k=1}^{n} u_k\left(x_k,t\right)$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u, \quad \left.u\right|_{t=0} = \prod_{k=1}^{n} f_k\left(x_k\right).$$

B-13.3

Пусть функция $f(x,t) \in C^2(t \geq 0)$ является гармонической по x при каждом фиксированном $t \geq 0$. Доказать, что функция $u(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \quad \left.u\right|_{t=0} = 0$$

В-13.4

Пусть $u_0 \in C^{\infty}(R^n)$, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \Delta^k u_0(x), \delta > 0$, и все ряды, полученные из него почленным дифференцированием до второго порядка включительно, сходятся равномерно в каждой конечной области. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2^k} t^k}{k!} \Delta^k u_0(x)$$

является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 < t < \frac{\delta}{a^2}; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

Решения задач 13.5-13.8 можно находить по формуле Пуассона, но иногда удобнее применить метод разделения переменных или воспользоваться результатами задач 13.1-13.4.

В-13.5

Решить задачи $(n=1)$:
1) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \quad u|_{t=0} = 2;$
2) $u_t = u_{xx} + 3t^2, \quad u|_{t=0} = \sin x$
3) $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos x;$
4)$u_t = u_{xx} + e^t \sin x, \quad u|_{t=0} = \sin x$; 5) $u_t = u_{xx} + \sin t, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2}$; 6) $4u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = e^{2x-x^2}$; 7) $u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = xe^{-x^2}$; 8) $4u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin x e^{-x^2}$.

В-13.6

Решить задачи $(n=2)$:
1) $u_t = \Delta u + e^t, \quad u|_{t=0} = \cos x \sin y$
2) $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y, \quad u|_{t=0} = 1;$
3) $u_t = \Delta u + \cos t, \quad u|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2};$
4)$8u_t = \Delta u + 1, \quad u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}$; 5) $2u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = \cos xy$.

В-13.7

Решить задачи $(n=3)$:
1) $u_t = 2\Delta u + t\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos y \cos z$
2) $u_t = 3\Delta u + e^t, \quad u|_{t=0} = \sin(x-y-z)$
3) $4u_t = \Delta u + \sin 2z, \qquad u|_{t=0} = \frac{1}{4}\sin 2z + e^{-x^2}\cos 2y;$
4)$u_t = \Delta u + \cos(x-y+z), \quad u|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}$; 5) $u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = \cos(xy)\sin z$.

В-13.8

Решить задачу Коши

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^n$$

для следующих u_0:
1) $u_0 = \cos \sum_{k=1}^n x_k$
2) $u_0 = e^{-|x|^2}$
3) $u_0 = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) e^{-|x|^2};$
4)$u_0 = \left(\sin \sum_{k=1}^n x_k\right) e^{-|x|^2}$; 5) $u_0 = \exp\left\{-\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2\right\}$.

В-13.9

Найти решение обобщенной задачи Коши (5) для следуюЩих F:
1) $\delta(t) \cdot \delta(x)$
2) $\delta(t-t_0) \cdot \delta(x-x_0), \quad t_0 \geq 0$
3) $\delta(t) \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$
4)$\delta'(t) \cdot \delta(x)$ 5) $\delta(t-t_0) \cdot \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_k^2}, \quad t_0 \geq 0$; 6) $\delta'(t) \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$ 7) $\theta(t) \cdot \delta(x)$; 8) $\theta(t-t_0) \cdot \delta(x-x_0), \quad t_0 \geq 0$; 9) $\delta'(t) \cdot \delta(x-x_0)$ 10) $\omega(t) \cdot \delta(x)$, где $\omega \in C(t \geq 0), \omega = 0$ при $t < 0$.

B-13.10

Пусть $f(x,t) \in M$. Показать, что свертка $V = \mathscr{E} * f$:
1) существует в M и представляется формулой

$$V(x,t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\xi d\tau$$

2) удовлетворяет оценке

$$|V(x,t)| \le t \sup_{\substack{\xi \\ 0\le\tau\le t}} |f(\xi,\tau)|, \quad t > 0$$

3) представляет собой единственное в классе M решение (обобщенное) уравнения $V_t = a^2\Delta V + f(x,t)$.

B-13.11

Пусть $u_0(x)$ - ограниченная функция в R^n. Доказать, что свертка $V^{(0)} = \mathscr{E}(x,t) * u_0(x) \cdot \delta(t) = \mathscr{E}(x,t) * u_0(x)$:
1) существует в M и представляется формулой

$$V^{(0)}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right\} d\xi$$

2) удовлетворяет оценке

$$\left|V^{(0)}(x,t)\right| \le \sup_{\xi} |u_0(\xi)|\,, \quad t > 0$$

3) представляет собой единственное в классе M решение (обобщенное) уравнения $V_t^{(0)} = a^2\Delta V^{(0)} + u_0(x) \cdot \delta(t)$.

B-13.12

Доказать, что решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

выражается классической формулой Пуассона

$$u(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right\} d\xi + \\ + \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\xi d\tau$$

если функция f локально интегрируема в R^{n+1} и равна нулю при $t < 0$, функция u_0 локально интегрируема в R^n и оба слагаемых в формуле (9) локально интегрируемы в R^{n+1}.

B-13.13

Доказать:
1) если $f \in C^2(t \ge 0)$ и все ее производные до второго порядка включительно принадлежат классу M, то $V = \mathscr{E} * f \in C^2(t > 0) \cap \cap C^1(t \ge 0)$ удовлетворяет при $t > 0$ уравнению $V_t = a^2\Delta V + f(x,t)$ и начальному условию $V|_{t=+0} = 0$;
2) если $u_0(x)$ - непрерывная и ограниченная функция, то

$$V^{(0)} = \mathscr{E} * u_0 = C^\infty(t > 0) \cap C(t \ge 0)$$

удовлетворяет уравнению $V_t^{(0)} = a^2\Delta V^{(0)}$ и начальному условию $V^{(0)}\big|_{t=+0} = u_0(x)$
3) при выполнении условий 1), 2) функция $u = V + V^{(0)}$, где $V, V^{(0)}$ определяются формулами (6) и (7), есть решение классической задачи Коши (1), (2).
У к а а н и е. Требуемые свойства непосредственно вытекают из формулы (8).

В-13.14

Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta(t)$$

для следующих u_0:
1) $\theta(x)$;
2) $\theta(1-x)$;
3) $\theta(1-|x|)$;
4)$\theta(x)e^{-x}$; 5) $\theta(x)(x+1)$ 6) $\theta(x-1)x$. Показать, что найденные функции $u(x,t)$ при $t>0$ принадлежат классу C^∞ и удовлетворяют уравнению $u_t = u_{xx}$, а при $t \longrightarrow +0$ непрерывны во всех точках непрерывности функции $u_0(x)$ и в этих точках удовлетворяют начальному условию $u|_{t=+0} = u_0(x)$.

В-13.15

Найти решение обобщенной задачи Коши для следующих f:

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

1) $\theta(t-1)e^t$;
2) $\theta(t-\pi)\cos t$
3) $\theta(t-1)x$;
4)$\theta(t-2)e^x$; 5) $\theta(t)\theta(x)$; 6) $\theta(t)\cdot\theta(1-|x|)$. Показать, что найденные функции $u(x,t)$ принадлежат классу $C\left(R^2\right)$, удовлетворяют начальному условию $u|_{t=0} = 0$, а в точках непрерывности функции $f(x,t)$ принадлежат классу C^2.

В-13.16

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности $\left(x \in R^1\right)$ с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениеями классической задачи Коши (1), (2):
1) $f = \theta(t)x, \quad u_0 = x$;
2) $f = \theta(t)x^2, \quad u_0 = x^2$
3) $f = \theta(t)2xt, \quad u_0 = x^3 + x^4, \quad a = 1$;
4)$f = \theta(t)3x^2t^2, \quad u_0 = e^x, \quad a = 1$; 6* 5) $f = \theta(t)\sqrt{t}, \quad u_0 = \operatorname{sh} x$ 6) $f = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}; \quad u_0 = xe^x$;
7) $f = \theta(t)\ln t, \quad u_0 = x\sin x, \quad a = 1$; 8) $f = \theta(t)x\cos x, \quad u_0 = x\cos x, \quad a = 1$; 9) $f = \theta(t)e^x, \quad u_0 = \theta(x)x, \quad a = 1$; 10) $f = \theta(t)xe^x, \quad u_0 = \theta(x)x^2, \quad a = 1$.

В-13.17

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности $\left(x \in R^2\right)$ с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):
1) $f = \theta(t)xye^t, \quad u_0 = x^2 - y^2$;
2) $f = \theta(t)\left(x^2+y^2\right), \quad u_0 = x^2 + y^2$;
3) $f = \theta(t)4xy, \quad u_0 = x^2y^2, \quad a = 1$;
4)$f = \theta(t)e^x\cos y, \quad u_0 = e^{x+y}$; 5) $f = 0, \quad u_0 = x\cos y$; 6) $f = \theta(t)xy, \quad u_0 = \cos y$.

В-13.18

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности $\left(x \in R^3\right)$ с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):
1) $f = \theta(t)xye^z, \quad u_0 = xe^y\cos z$;
2) $f = \theta(t)xy\cos z, \quad u_0 = \left(x^2+y^2\right)\cos z, \quad a = 1$;
3) $f = \theta(t)xyz\cos t, \quad u_0 = xy^2z^3$;
4)$f = \theta(t)\left(x^2 - 2y^2 + z^2\right)e^t, \quad u_0 = x + y^2 + z^3$ 5) $f = \theta(t)\cos t\sin 3x\cos 4ye^{5z}, \quad u_0 = \sin 3x\cos 4ye^{4z}, \quad a = 1$.

В-13.19

Решить обобщенную задачу Коши (8) для уравнения теплопроводности $(x \in R^n)$ с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши (1), (2):
1) $f = \theta(t)|x|^2, \quad u_0 = |x|^2$;
2) $f = \theta(t)\sum_{k=1}^n x_k^3, \quad u_0 = \sum_{k=1}^n x_k^3$;

3) $f=\theta(t)e^t, \quad u_0=\exp\{\sum_{k=1}^n x_k\}$

4)$f=0,\ u_0=\sum_{k=1}^n x_k \exp\{\sum_{k=1}^n x_k\}$ 5) $f=0,\ u_0=(\cos\sum_{k=1}^n x_k)\exp\{\sum_{k=1}^n x_k\}$. Уравнение $u_t-a^2u_{xx}-bu_x-cu=f(x,t)$, где a,b,c - постоянные, заменой $v(y,t)=e^{-ct}u(y-bt,t)$ сводится к уравнению теплопроводности.

B-13.20

Найти решение задачи

$$u_t-a^2u_{xx}-bu_x-cu=f(x,t), \quad u|_{t=0}=u_0(x)$$

со следующими данными:

1) $f=1, \quad u_0=1, \quad c=1;$

2) $f=e^t, \quad u_0=\cos x, \quad a=\mathrm{c}=1, b=0;$

3) $f=e^t, \quad u_0=\cos x, \quad a=\sqrt{2}, c=2, b=0;$

4)$f=t\sin x, \quad u_0=1, \quad a=c=1, \quad b=0$; 5) $f=0, \quad u_0=e^{-x^2}$; 6) $f=w(t)\in C^1(t\geq 0), \quad u_0\in C$ и ограничена.

B-13.21

Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t-a^2u_{xx}-bu_x-cu=f(x,t)+u_0(x)\cdot\delta(t)$$

со следующими данными:

1) $f=\theta(t-1), \quad u_0=\theta(x), \quad c\neq 0;$

2) $f=\theta(t-1), \quad u_0=\theta(1-x), \quad c=0;$

3) $f=\theta(t-1)e^t, \quad u_0=\theta(1-|x|), \quad c\neq 1;$

4)$f=\theta(t-1)e^t, \quad u_0=\theta(x)e^x, \quad c=1$; 5) $f=\theta(t-1)e^x, \quad u_0=x\theta(x), \quad a=2, \quad b=c=-2$; 6) $f=\theta(t)\theta(x), \quad u_0=x$. Исследовать гладкость полученных решений, как и в $13.14, 13.15$.

B-13.22

Решить обобщенную задачу Коши

$$u_t-a^2u_{xx}-bu_x-cu=f(x,t)+u_0(x)\cdot\delta(t)$$

с нижеследующими данными и проверить, что полученные решения являются решениями классической задачи Коши

$$u_t-a^2u_{xx}-bu_x-cu=f(x,t), \quad u|_{t=0}=u_0(x)$$

1) $f=\theta(t)x^2, \quad u_0=x^2, \quad a=b=c=1;$

2) $f=\frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}, \quad u_0=e^x;$

3) $f=\theta(t)te^x, \quad u_0=xe^x, \quad a=2, b=-1, c=-2;$

4)$f=\theta(t)xe^x, \quad u_0=xe^x+\operatorname{sh}x, \quad a=c=1, b=-2$; 5) $f=\theta(t)e^x\cos t\sin x, \quad u_0=e^x\cos x, \quad a=1, b=-2, c=2$; 6) $f=\theta(t)x, \quad u_0=x\sin x, \quad a=b=c=1$.

B-13.23

Пусть $u(x,t)$ - решение задачи Коши

$$u_t=a^2\Delta u, \quad u|_{t=0}=u_0(x),$$

где $u_0\in C\left(R^n\right)$ и $|u_0(x)|\leq Me^{-\delta|x|^2}, \delta\geq 0$. Доказать, что при всех $t\geq 0, x\in R^n$

$$|u(t,x)|\leq M\left(1+4a^2\delta t\right)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\delta|x|^2}{1+4a^2\delta t}\right\}$$

B-13.24

Пусть $u(x,t)$ - решение задачи Коши

$$u_t=a^2\Delta u, \quad u|_{t=0}=u_0(x),$$

где $u_0(x)$ - финитная непрерывная функция. Доказать, что для любых $T>0, \delta<\frac{1}{4a^2T}$ существует $M>0$ такое, что

$$|u(x,t)|\leq Me^{-\delta|x|^2}, \quad x\in R^n, \quad 0\leq t\leq T.$$

B-13.25

Пусть $u_0 \in C(R^n)$ и $|u_0(x)| \le M_\delta e^{\delta|x|^2}$, где $\delta > 0$. Доказать, что при $0 < t < \frac{1}{4a^2\delta}, x \in R^n$, функция

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right\} d\xi$$

принадлежит классу C^∞ и является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 < t < \frac{1}{4a^2\delta}; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

B-13.26

Доказать, что если условие задачи 13.25 выполняется для всех $\delta > 0$, то функция (10) принадлежит классу C^∞ при $t > 0, x \in R^n$ и является решением классической задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

B-13.27

Методом обобщенных функций решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad \text{где} \quad u_0(x) \in C(x \ge 0).$$

15.2.4 Задачи Коши для других уравнений и задача Гурса

B-14.1

Доказать, что если $u_0(x) \in \mathscr{S}(R^n)$, то функция

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-it|y|^2 - i(x,y)} \int_{R^n} u_0(\xi) e^{i(\xi,y)} d\xi dy$$

является решением задачи Коши $u_t = i\Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x)$; $u(x,t) \in C^\infty(t \ge 0); u(x,t) \in \mathscr{S}(R^n)$ при каждом фиксированном $t > 0$; для любых α

B-14.2

Пусть $u(x,t)$ - решение задачи Коши (4). Доказать, что для любого $T > 0$ функция $v(x,t) = u(x, T-t)$ является решением задачи Коши

$$v_t = -i\Delta v, \quad 0 < t < T; \quad v|_{t=T} = u_0(x).$$

B-14.3

Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ - решения задач

$$u_t = iu_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x)$$
$$v_t = -iv_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad v|_{t=T} = v_0(x)$$

причем $u(x,t) \in \mathscr{P}$, а функция $v(x,t)$ находится с помощью формул задач 14.1 и

B-14.2

Доказать, что

$$\int_{R^1} u_0(x) v(x,0) dx = \int_{R^1} u(x,T) v_0(x) dx$$

Ук а з ан и е. В равенстве

$$\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} v(x,t) \varphi_\delta(x) \left[u_t(x,t) - iu_{xx}(x,t)\right] dxdt = 0$$

$$\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} v(x,t) \varphi_\delta(x) \left[u_t(x,t) - iu_{xx}(x,t)\right] dxdt = 0$$

где функция $\varphi_\delta(x)$ та же, что и в задаче 6.5, интегрированием по частям избавиться от производных функции $u(x,t)$ и перейти к пределу при $\delta \longrightarrow \infty$.

B-14.4

Доказать единственность решения задачи Коши (5) в классе $\mathscr{P}$.

Ук а з а н и е. Воспользоваться результатом задачи 14.3. Решение задачи Коши (1) единственно в классе $\mathscr{P}$ (для $n=1$ см. задачу 14.4). В задачах 14.5-14.10 рассматриваются решения только из этого класса, причем существования u_{tt} не требуется.

B-14.5

Пусть $u_0(x) \in C^{n+1}\left(R^n\right), |x|^{n+3}\left|u_0(x)\right| \leq M, |x|^{n+1}\left|D^\alpha u_0(x)\right| \leq \leq M$ для всех $\alpha, |\alpha| \leq n+1$.
Доказать, что решение задачи Коши (
4)сушествует и выражается формулой (3), которую можно записать в виде

$$u(x, t)=\frac{1}{(2 \sqrt{\pi t})^n} \exp \left(-\frac{\pi n i}{4}\right) \int_{R^n} u_0(\xi) \exp \left(\frac{i|x-\xi|^2}{4 t}\right) d \xi$$

B-14.6

Пусть $u_0(x) \in C^\alpha\left(R^1\right), \alpha \geq 2, u_0(x)=0$ при $|x| \geq 1$ и $\left|u_0^{(r)}(x)\right| \leq M, r \leq \alpha$

Доказать, что решение задачи Коши (5) принадлежит классу $C^{\infty}(t>0)$ и

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x, t)\right| \leq C M(1+|x|)^{2+r-\alpha}, \quad r=0,1, \ldots, \alpha-2,$$

для всех $x \in R^1, t \geq 0$.

B-14.7

Пусть $u_0(x) \in C^\alpha\left(R^1\right),\left|u_0^{(r)}(x)\right| \leq C(1+|x|)^\lambda, r \leq \alpha, \alpha \geq 2$, $\lambda<\alpha-5$. И пусть $u_k(x, t)$ - решение задачи Коши

$$u_t=i u_{x x}, \quad\left.u\right|_{t=0}=u_0(x) e(x-k),$$

где функция $e(x)$ та же, что и в задаче 6.4. Доказать, что решение задачи Коши (5) существует, выражается формулой

$$u(x, t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(x, t)$$

и $|u(x, t)| \leq C_1(1+|x|)^{\alpha-2}$ для всех $x \in R^1, t \geq 0$.

Ук аз ан и е. Используя результат задачи 14.6, показать, что

$$\left|u_k(x, t)\right| \leq \frac{C_1(2+|k|)^\lambda}{(1+|x-k|)^{\alpha-2}} \leq \frac{C_1(1+|x|)^{\alpha-2}(2+|k|)^\lambda}{(1+|k|)^{\alpha-2}}$$

B-14.8

Пусть $u_0(x) \in C^1\left(R^1\right)$ и $\int_{R^1}\left|x u_0^{\prime}(x)\right| d x<\infty$. Доказать, что решение задачи Коши (5) существует и выражается формулой

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\left[u_0(+\infty)+u_0(-\infty)\right]+\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi i / 4} \int_{R^1} u_0^{\prime}(\xi) \int_0^{(x-\xi) /(2 \sqrt{t})} e^{i y^2} d y d \xi .$$

B-14.9

Пусть $u_0(x)=e^{i a|x|^2}$, где $a-$ действительное число, $x \in R^n$. Доказать, что при $a \geq 0$ существует решение задачи Коши (4), а при $a<0$ решение существует только при $0 \leq t<-\frac{1}{4 a}$. Найти это решение.

Результат этой задачи сравнить с результатом задачи 14.7 при $n=1$ в случаях $a=0, \pm 1$.

B-14.10

Решить задачи: 1) $u_t=i u_{x x}+t x^3 ; \quad\left.u\right|_{t=0}=x^4$;
2) $u_t=i u_{x x}, 0<t<\frac{1}{4} \quad\left.u\right|_{t=0}=x e^{-i x^2}$;
3) $u_t=i \Delta u+x \cos t-y^2 \sin t ; \quad\left.u\right|_{t=0}=x^2+y^2$;
4)$u_t=i \Delta u+6 x+y^2+i z^3 ; \quad\left.u\right|_{t=0}=i\left(x^3+y^3+z^3\right)$;

B-14.11

Найти решение обобщенной задачи Коши (2) для следующих $F \in \mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right)$:
1) $\delta(t) \cdot \delta(x)$;
2) $\delta(t) \cdot \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_k}$
3) $\theta(t) \cdot \delta\left(x+x_0\right), n=1$;
4)$\theta\left(t-t_0\right) \cdot \delta(x), n=1, t_0 \geq 0$.

B-14.12

Найти решение обобщенной задачи Коши

$$u_t=i u_{xx}+f(x,t)+u_0(x) \cdot \delta(t)$$

при $t>0$ для следующих f и u_0($f=0$ при $t<0$ и задается только для $t>0$):
1) $f=\theta(x), \quad u_0=\theta(x)$;
2) $f=\theta(t-1), \quad u_0=\theta(1-|x|)$;
3) $f=\theta(t-\pi) \sin t, \quad u_0=x^2$;
4)$f=\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u_0=\cos x$; 5) $f=\theta(t-1)\left(e^t-e\right), \quad u_0=x \sin x$. Доказать, что функции $u(x,t)$, найденные в задаче $14.12, 3), 4), 5)$, являются решением классической задачи Коши.
2. Задача Коши для уравнения $u_{tt}=-\Delta^2 u+f(x,t)$.

B-14.13

Пусть $u(x,t) \in C^4(t \geq 0)$. Доказать, что функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt}=-\Delta^2 u; \quad \left.u\right|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_{t=0}=0$$

тогда и только тогда, когда функция

$$w(x,t)=u(x,t)+i \int_0^t \Delta u(x,\tau) d\tau$$

является решением задачи Коши

$$w_t=i \Delta w; \quad \left.w\right|_{t=0}=\varphi(x).$$

B-14.14

Пусть функция $w(x,t) \in C^4(t \geq 0)$ является решением задачи Коши

$$w_t=i \Delta w; \quad \left.w\right|_{t=0}=\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ - действительная функция. Доказать, что функция $u(x,t)=\operatorname{Re} w(x,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt}=-\Delta^2 u; \quad \left.u\right|_{t=0}=\varphi(x), \quad \left.u_t\right|_{t=0}=0.$$

B-14.15

Пусть функция $f(x,t) \in C^4(t \geq 0)$ является бигармонической $\left(\Delta^2 f=0\right)$ при каждом $t \geq 0$. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt}=-\Delta^2 u+f(x,t); \quad \left.u\right|_{t=0}=0, \quad \left.u_t\right|_{t=0}=0.$$

B-14.16

Пусть $u_0(x)$ и $u_1(x)$ - бигармонические функции. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt}=-\Delta^2 u; \quad \left.u\right|_{t=0}=u_0(x), \quad \left.u_t\right|_{t=0}=u_1(x).$$

B-14.17

Пусть функция $w(x,t) \in C^4(t \geq 0)$ является решением задачи Коши $\quad w_t=i \Delta w; \quad \left.w\right|_{t=0}=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - действительная функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt}=-\Delta^2 u; \quad \left.u\right|_{t=0}=0, \quad \left.u_t\right|_{t=0}=\varphi(x).$$

B-14.18

Пусть функция $w(x,t) \in C^4(t \geq 0)$ является решением задачи Коши

$$w_t = i\Delta w; \quad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ - чисто мнимая функция. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = -\Delta^2 u; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

B-14.19

Пусть $u_0(x) \in C^{n+3}(R^n), |x|^{n+5}|u_0(x)| \leq M, |x|^{n+1}|D^\alpha u_0(x)| \leq \leq M, |\alpha| \leq n+3$. Доказать, что решение задачи Коши $u_{tt} = -\Delta^2 u, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0$ существует и выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int u_0(\xi) \cos\left(\frac{|x-\xi|^2}{4t} - \frac{\pi n}{4}\right) d\xi.$$

Ук аз ан и е. Воспользоваться результатами задач 14.5 и 14.14.

B-14.20

Решить задачи:
1) $u_{tt} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6tx^3; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_{t=0}|_{t=0} x^4;$
2) $u_{tt} = -\Delta^2 u + xye^t; \quad u|_{t=0} = x^2y^2, \quad u_t|_{t=0} = 0;$
3) $u_{tt} = -\Delta^2 u + 6x^2y^2z^2; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0;$
4)$u_{tt} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, 0 < t < \frac{1}{4}; \quad u|_{t=0} = \cos x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0.$

B-14.21

Пусть задача Коши (6), (7) поставлена корректно в классе $\mathscr{S}_и$

$$v(\sigma,t) = F[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{ix\sigma}dx$$

где $u(x,t)$ - решение задачи (6), (7). Доказать, что функция $v(\sigma,t)$ при каждом $t \geq 0$ принадлежит классу $\mathscr{S}$ и является решением задачи

$$\frac{dv}{dt} = P(\sigma)v, \quad v|_{t=0} = F[u_0(x)]$$

175

B-14.22

Пусть $u_0(x) \in \mathscr{S}_и$

$$\operatorname{Re} P(\sigma) \leq C < \infty$$

при всех действительныг σ. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma)-ix\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi d\sigma$$

является решением задачи (6), (7), принадлежит классу $C^\infty(t \geq 0)$ и при $|x| \longrightarrow \infty$ убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$ равномерно относительно $t \geq 0$.

B-14.23

Доказать, что условие (A) является необходимым и достаточным для корректности постановки задачи Коши $(6), (7)$ в классе $\mathscr{S}$.

Ук а з а н и е. Для доказательства необходимо показать, что если условие (A) не выполнено, то существует такая функция $u_0(x) \in \mathscr{S}$, для которой решение задачи (8) не принадлежит классу $\mathscr{S}$.

B-14.24

Пусть задача Коши (6), (7) поставлена корректно в классе $\mathscr{S}$. Доказать, что ее решение выражается формулой (9), которую можно записать в виде

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)G(x-\xi,t)d\xi$$
$$G(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tP(\sigma)-ix\sigma}d\sigma.$$

Ук а а н и е. Воспользоваться оценкой $|G(x,t)|\leq Ct^{-1/N}$.

B-14.25

Пусть условие (A) выполнено, $u_0(x)\in C^{N+2}\left(R^1\right)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|u_0^{(k)}(x)\right|dx<\infty,\quad k=0,1,\ldots,N+2.$$

Доказать, что решение задачи (6), (7) существует, выражается формулой (9) (или формулами (10), (11)) и функция $u(x,t)$ ограничена при $t\geq 0$ вместе со своими производными, входящими в уравнение (6).

15.2.5 Задача Коши для уравнения первого порядка

B-14.26

Решить задачи:
1) $u_t+2u_x+3u=0,\quad u|_{t=0}=x^2;$
2) $u_t+2u_x+u=xt,\quad u|_{t=0}=2-x;$
3) $2u_t=u_x+xu,\quad u|_{t=0}=1;$
4)$2u_t=u_x-xu,\quad u|_{t=0}=2xe^{x^2/2}$; 5) $u_t+\left(1+x^2\right)u_x-u=0,\quad u|_{t=0}=\operatorname{arctg}x$; 6) $u_t+\left(1+t^2\right)u_x+u=1,\quad u|_{t=0}=e^{-x}$; 7) $u_t=u_x+\frac{2x}{1+x^2}u\ \ u|_{t=0}=1$ 8) $2tu_t+xu_x-3x^2u=0,\quad u|_{t=1}=5x^2$.

B-14.27

Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy}=0,\quad 0<y<\alpha x,\quad x>0,\quad y>0$$
$$u|_{y=0}=f(x),\quad u|_{y=\alpha x}=g(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x,y)=f(x)+g\left(\frac{y}{\alpha}\right)-f\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $C^2(x>0)\cap C(x\geq 0)$ и $f(0)=g(0)$.

B-14.28

Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy}=0,\quad x>0,\quad y>0,\quad u|_{y=0}=f(x),\quad u|_{x=0}=g(y)$$

имеет единственное решение $u(x,y)=f(x)+g(y)-f(0)$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу

$$C^2(x>0)\cap C(x\geq 0)\quad \text{и}\quad f(0)=g(0).$$

B-14.29

Доказать, что решение задачи Гурса

$$u_{xy}=0,\quad y>\alpha x,\quad x>0,\quad \alpha<0;$$
$$u|_{y=\alpha x}=0,\quad u|_{x=0}=0$$

не единственно. Показать, что множество всех решений этой задачи имеет вид

$$u(x,y)=f(x)-f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

где $f(x)$ - любая функция из класса $C^2\left(R^1\right)$, равная нулю при $x\leq 0$.

В-14.30

Доказать, что задача Гурса

$$u_{xy} = 0, \quad 0 < y < \varphi(x), \quad x > 0;$$
$$u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{y=\varphi(x)} = g(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x,y) = f(x) + g\left(\varphi^{-1}(y)\right) - f\left(\varphi^{-1}(y)\right),$$

если функции $f(x), g(x), \varphi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$, $f(0) = g(0), \varphi(0) = 0, \varphi'(x) > 0, \varphi^{-1}(y)$ - функция, обратная к функции $\varphi(x)$.

В-14.31

Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap \cap C(x \geq 0)$ и $\varphi(0) = \psi(0)$. При каких действительных значениях a задача Гурса 177

$$au_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$
$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = \psi(y)$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

В-14.32

Для каких положительных значений параметра b задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad 0 < t < bx, \quad x > 0$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=bx} = 0$$

имеет только нулевое решение? В задачах 14.33-14.55 требуется найти решение поставленной задачи Гурса и доказать единственность этого решения.

В-14.33

$u_{xy} + u_x = x, \quad x > 0, \quad y > 0 \;\; u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=0} = x^2.$

В-14.34

$u_{xy} + x^2 y u_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0;$

В-14.35

$u_{xy} + u_y = 1, \quad x > 0, \quad y > 0;$ $u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u|_{y=0} = \psi(x),$ где функции $\varphi(x), \psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ и $\varphi(0) = \psi(0)$

В-14.36

$$u_{xy} + xu_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$
$$u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u|_{y=0} = \psi(x),$$

где функции $\varphi(x), \psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ и $\varphi(0) = \psi(0)$

В-14.37

$2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x| \;\; u|_{y=x} = 1, \quad u|_{y=-x} = (x+1)e^x$

В-14.38

$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad -\frac{1}{2}x < y < x, \quad x > 0;$

B-14.39

$u_{xx}+6u_{xy}+5u_{yy}=0, \quad x<y<5x, \quad x>0;\ u|_{y=x}=\varphi(x), \quad u|_{y=5x}=\psi(x)$, где функции $\varphi(x),\psi(x)$ принадлежат классу $C^2(x>0)\cap C(x\geq 0)$ и $\varphi(0)=\psi(0)$.

B-14.40

$u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0, \quad -\frac{1}{4}x^2<y<0, \quad x>0;$

$$u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=-x^2/4}=x^2.$$

B-14.41

$$u_{xy}-e^xu_{yy}=0, \quad y>e^{-x}, \quad x>0;$$
$$u|_{x=0}=y^2, \quad u|_{y=-e^x}=1+x^2.$$

B-14.42

$yu_{xx}+(x-y)u_{xy}-xu_{yy}-u_x+u_y=0, \quad 0<y<x, \quad x>0;\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=x}=4x^4.$

B-14.43

$xu_{xx}+(x-y)u_{xy}-yu_{yy}=0, \quad 0<y<x, \quad x>0;\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=x}=x.$

B-14.44

$y^2u_{xx}+u_{xy}=0, \quad y^3-8<3x<y^3, \quad 0<y<2;$

$$u|_{y=2}=3x+8, \quad u|_{3x=y^3}=2y^3.$$

B-14.45

$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0, \quad y>x, \quad x>1\ u|_{x=1}=1, \quad u|_{y=x}=x.$

B-14.46

$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}+xu_x-yu_y=0, \quad \frac{1}{x}<y<x, \quad x>1;\ u|_{y=x}=x, \quad u|_{y=1/x}=1+\ln x.$

B-14.47

$3x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0, \quad x<y<\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad 0<x<1;\ u|_{x=y}=y, \quad u|_{xy^3=1}=y^2.$

B-14.48

$3x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0, \quad 1<y<x, \quad x>1;\ u|_{y=x}=0, \quad u|_{y=1}=\cos\frac{\pi x}{2}.$

B-14.49

$u_{xx}-2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}-\cos x u_y=0, |y-\cos x|<x, \quad x>0;\ u|_{y=x+\cos x}=\cos x, \quad u|_{y=-x+\cos x}=\cos x.$

B-14.50

$u_{xy}-\frac{1}{x-y}(u_x-u_y)=1, \quad y<-x, \quad x>2;\ u|_{y=-x}=0, \quad u|_{x=2}=2+2y+\frac{1}{2}y^2.$

B-14.51

$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2}{x}u_x=0, \quad y>1+|x|;\ u|_{y=x+1}=1-x, \quad u|_{y=1-x}=1+x.$

B-14.52

$u_{xx}-u_{yy}+\frac{4}{x}u_x+\frac{2}{x^2}u=0, \quad y>x, \quad x>1;\ u|_{y=x}=1, \quad u|_{x=1}=y.$

B-14.53

$u_{xy} = 1, \quad \alpha x < y < \beta x, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < \beta;\ u|_{y=\alpha x} = 0, \quad u|_{y=\beta x} = 0.$

15.2.6 Задача Коши для квазилинейных уравнений

B-14.56

Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

непрерывное для $t \geq 0, |x| + t \neq 0$ и непрерывно дифференцируемое при $t \neq |x|$.

B-14.57

Найти решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad x < 0 \\ \beta & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

где $\alpha, \beta (\geq \alpha)$ - постоянные, непрерывное для $t \geq 0, |x| + t \neq 0$ и непрерывно дифференцируемое вне прямых $t = x/\alpha, t = x/\beta$.

B-14.58

Доказать, что задача Коши для уравнения Бюргерса с начальным условием $\begin{array}{r} u_t + uu_x = a^2 u_x \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{array}$ подстановкой $u = -2a^2 \frac{v_x}{v}$ сводится к задаче Коши

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad v|_{t=0} = \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u_0(\xi) d\xi\right\}.$$

B-14.59

Пусть u - решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \operatorname{sign} x,$$

непрерывное при $t \geq 0, |x| + t \neq 0$ и непрерывно дифференцируемое при $t > 0$. Доказать, что это решение при $\varepsilon \to +0$ стремится к решению задачи 14.56 (теорема Э. Хопфа).

B-14.60

Проверить, что решением уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

является функция

$$u(x,t) = \frac{a}{2\operatorname{ch}^2\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x - x_0 - at)\right]}, \quad a > 0,$$

описывающая «уединенную волну» (солитонное решение). Показать, что это решение с конечной энергией

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx < \infty.$$

B-14.61

Для уравнения Лиувилля
$$u_{tt} - u_{xx} = ge^u, \quad g > 0,$$
проверить следующие утверждения:

1) функция
$$u(x,t) = \ln \frac{\alpha^2\left(1-a^2\right)}{2g\operatorname{ch}^2\left[\frac{\alpha}{2}\left(x-x_0-at\right)\right]}, \quad 0 \le a \le 1$$
является решением при всех x и t

2) функция
$$u(x,t) = \ln \frac{8\varphi'(x+t)\psi'(x-t)}{g[\varphi(x+t)-\psi(x-t)]^2}$$
является решением при любых φ и ψ таких, что $\varphi, \psi \in C^3, \varphi'\psi' > 0$;

3) функция
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t)+u_0(x-t)\right] - \ln\left\{\cos^2\left[\sqrt{\frac{g}{8}}\int_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2}d\xi\right]\right\}$$
является решением задачи Коши с начальными условиями если
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0,$$
$$\left|\sqrt{\frac{g}{8}}\int_{x-t}^{x+t} e^{u_0(\xi)/2}d\xi\right| < \frac{\pi}{2}.$$

B-14.62

Проверить, что для уравнения
$$u_{tt} - u_{xx} = -g\sin u, \quad g > 0$$
функция
$$u(x,t) = 4\operatorname{arctg}\exp\left\{\pm\frac{\sqrt{g}\left(x-x_0-at\right)}{\sqrt{1-a^2}}\right\}, \quad 0 \le a < 1,$$
является решением с конечной энергией
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2+u_x^2\right)dx < \infty$$

B-14.63

Проверить, что решением нелинейного уравнения Шрёдингера

является функция $iu_t + u_{xx} + \nu|u|^2u = 0, \quad \nu > 0,$
$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}}\frac{\exp\left\{i\left[\frac{a}{2}x-\left(\frac{a^2}{4}-\alpha\right)t\right]\right\}}{\operatorname{ch}\left[\sqrt{\alpha}\left(x-x_0-at\right)\right]}, \quad \alpha \ge 0.$$

Примеры от Владимирова в конце

Задача 1.

Найти решение задачи Коши для уравнения
$$y^2u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y}u_y = 0$$
в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее начальным условиям
$$u|_{y=1} = 1-x, \quad u_y|_{y=1} = 3.$$

Решение Сначала найдем общее решение уравнения (1) в полуплоскости $y > 0$. Для этого приведем уравнение (1) к каноническому виду. Характеристическое уравнение $-y^2 dxdy + (dx)^2 = 0$ $x = C, 3x - y^3 = C$ даются общими интегралами. В уравнении (1) нужно сделать замену переменных $\xi = x, \eta = 3x - y^3$. Тогда $u_y = -3y^2 u_\eta, u_{xy} = -3y^2 u_{\xi\eta} - 9y^2 u_{\eta\eta}, u_{yy} = 9y^4 u_{\eta\eta} - 6yu_\eta$ и уравнение (1) приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} = 0$. Интегрируя это уравнение, находим $u = f(\xi) + g(\eta) = f(x) + g\left(3x - y^3\right)$. Теперь воспользуемся начальными условиями (2):

$$f(x) + g(3x - 1) = 1 - x$$
$$-3g'(3x - 1) = 3$$

Решая эту систему, получаем $f(x) = 2x + C, g(x) = -x - C$. Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x, y) = 2x + C + \left(-3x + y^3 - C\right), \text{ т. е. } u(x, y) = y^3 - x.$$

Задача 2.

Найти решение задачи Гурса для уравнения

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0$$

во всей плоскости, удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u|_{y=-x} = 1.$$

Решение Найдем общее решение уравнения (1). Характеристическое уравнение $(dy)^2 - 3dxdy - 4(dx)^2 = 0$ распадается на два уравнения $dy + dx = 0, \quad dy - 4dx = 0,$ для которых $y + x = C$, $y - 4x = C$ являются общими интегралами. Заменой переменных $\xi = y + x, \eta = y - 4x$ уравнение (1) приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} - \frac{1}{5}u_\eta = 0$. Интегрируя это уравнение, находим

$$u = f(\eta)e^{-\xi/5} + g(\xi) = f(y - 4x)e^{-(y+x)/5} + g(y + x).$$

Воспользуемся условиями (2):

$$f(0)e^{-x} + g(5x) = 5x + e^x,$$
$$f(-5x) + g(0) = 1.$$

Решая эту систему, получаем $f(x) = 1 - g(0), g(x) = x + e^{x/5} - -f(0)e^{-x/5}$. Следовательно,

$$u(x, y) = [1 - g(0)]e^{-(x+y)/5} + x + y + e^{(x+y)/5} - f(0)e^{-(x+y)/5}.$$

Учитывая, что из системы (3) при $x = 0$ следует равенство $f(0) + + g(0) = 1$, окончательно находим решение задачи $(1), (2) : u(x, y) = x + y + e^{(x+y)/5}$.

Задача 3.

Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6xt$$

в области $x > 0, t > 0$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = t^3.$$

Решение Общее решение уравнения (1) имеет вид $u(x, t) = f(x + 2t) + g(x - 2t) + xt^3$. Из условий (2) получаем

$$\begin{aligned} &f(x) + g(x) = x^3, && x \geq 0 \\ &f'(x) - g'(x) = 0, && x \geq 0 \\ &f(2t) + g(-2t) = t^3, && t \geq 0 \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений этой системы находим $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C$, $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - C, x \geq 0$. Подставляя найденную функцию $f(x)$ в третье уравнение системы (3), получаем $g(x) = \frac{3}{8}x^3 - C, x \leq 0$. Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 2t)^3 + \frac{1}{2}(x - 2t)^3 + xt^3, & x \geq 2t \\ \frac{1}{2}(x + 2t)^3 + \frac{3}{8}(x - 2t)^3 + xt^3, & x < 2t \end{cases}$$

Задача 4.

Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 2$$

в области $x > 0, t > 0$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = x + x^3, \quad u_t|_{t=0} = -9x^2, \quad (u - u_x)|_{x=0} = t^2 - 1.$$

Р еш е н и е. Общее решение уравнения (1) имеет вид $u(x,t) = = f(x+3t)+g(x-3t)+t^2$. Из условий (2) получаем $f(x)+g(x) = x+x^3, \quad x \geq 0, 3f'(x)-3g'(x) = -9x^2, \quad x \geq 0, f(3t)+g(-3t)-f'(3t)-g'(-3t) = -1, \quad t \geq 0$ Из первых двух уравнений этой системы находим $f(x) = \frac{1}{2}x + C$, $g(x) = \frac{1}{2}x + x^3 - C, x \geq 0$. Подставляя найденную функцию $f(x)$ в третье уравнение системы (3), получаем $g'(x)-g(x) = C+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$, откуда $g(x) = C_1e^x + \frac{1}{2}x - C, x \leq 0$. Из условия непрерывности функции $g(x)$ при $x = 0$ находим $C_1 = 0$, т. е. $g(x) = \frac{1}{2}x - C, x \leq 0$. Следовательно, решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x,t) = \begin{cases} (x-3t)^2 + x + t^2, & x \geq 3t, \\ x + t^2, & x < 3t. \end{cases}$$

15.3 Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

15.3.1 Задачи про задачу Штурма-Лиувилля

B-15.1

Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0,1)$ в следующих случаях:
1) $Ly = -y'', \quad y(0) = y(1) = 0$;
2) $Ly = -y'', \quad y'(0) = y(0), \quad y'(1) + y(1) = 0$;
3) $Ly = -y'', \quad y(0) = hy'(0), \quad h \geq 0, \quad y(1) = 0$;
4)$Ly = -y'' - y, \quad y(0) = y(1) = 0$; 5) $Ly = -y'' - y, \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1)$; 6) $Ly = -y'' + y, \quad y(0) = y(1) = 0$; 7) $Ly = -y'' + y, \quad y'(0) = y'(1) = 0$.

B-15.2

Найти функцию Грина оператора L на интервале $(1,2)$ в следующих случаях:
1) $Ly = -x^2y'' - 2xy', \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$;
2) $Ly = -xy'' - y', \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$;
3) $Ly = -x^3y'' - 3x^2y - xy, \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0$;
4)$Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y, \quad y(1) + y'(1) = 0, \quad y(2) + 3y'(2) = 0$.

B-15.3

Найти функцию Грина оператора L на интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ в следующих случаях:
1) $Ly = -\left(\cos^2 x \cdot y'\right)', \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;
2) $Ly = -\left(\frac{y'}{\cos x}\right)', \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;
3) $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y', \quad y(0) = y'(0), \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

B-15.4

Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0,1)$ в следующих случаях:
1) $Ly = -\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy', \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = 0$;
2) $Ly = -\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy', \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$;
3) $Ly = -\left(3 + x^2\right)y'' - 2xy', \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = 0$;
4)$Ly = -(x+1)^2y'' - 2(x+1)y' + 2y, \quad y(0) = y(1) = 0$; 7) $Ly = -(xy')' + \frac{4}{x}y, \quad y(0) = y(1) = 0$ 8) $Ly = -\frac{1}{x^2}y'' + \frac{2}{x^3}y' - \frac{2}{x^4}y, \quad y'(0) = y(1) = 0$.

B-15.5

Найти функцию Грина оператора L на интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ при условии $|y(0)| < \infty, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ в следующих случаях:
1) $Ly = -\left(\operatorname{tg}^2 x \cdot y'\right)'$; 2) $Ly = -\left(\operatorname{tg} x \cdot y'\right)'$.

В-15.6

Найти функцию Грина оператора L на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в следующих случаях:
1) $Ly = -\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y', \quad y(0) = 0, \quad \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty;$
2) $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y', \quad |y(0)| < \infty, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
3) $Ly = -\sin^2 x \cdot y'' - \sin 2x \cdot y', \quad |y(0)| < \infty, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

В-15.7

Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0,1)$ при условии $|y(0)| < \infty$ в следующих случаях:
1) $Ly = -x^2y'' - 2xy + 6y, \quad y'(1) + 3y(1) = 0;$
2) $Ly = -y'' + \frac{2}{x^2}y, \quad y(1) = 0;$
3) $Ly = -x^2y'' - 2xy' + 2y, \quad y'(1) = 0;$
4)$Ly = -\left(xy'\right)', \quad y(1) = 0;$ 5) $Ly = -xy'' - y', \quad y'(1) + y(1) = 0;$ 6) $Ly = -x^2y'' - 2xy' + 2y, \quad y(1) + y'(1) = 0;$ 7) $Ly = -x^2y'' - 2xy' + 2y, \quad 2y(1) + y'(1) = 0;$ 8) $Ly = -y'' + \frac{a(a-1)}{x^2}y, \quad a > 1, \quad y(1) = 0;$ 9) $Ly = -\left(xy'\right)' + (1+x)y, \quad y(1) = 0.$

В-15.8

Найти функцию Грина оператора $Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y$ на интервале $(1,3)$, если $y(1) + y'(1) = 0, 2y(3) + 3y'(3) = 0.$

В-15.9

Найти функцию Грина оператора L на интервале $(0,1)$ в следующих случаях:
1) $Ly = -\left(e^{-x^2/2}y'\right)' + e^{-x^2/2}y, \quad y(0) = y(1) = 0$
2) $Ly = -e^{x^2}y'' - 2xe^{x^2}y', \quad y(0) = 2y'(0), \quad y(1) = 0;$
3) $Ly = -y'' + \left(1+x^2\right)y, \quad y(0) = y'(1) = 0.$ Указ ани е. Частное решение уравнения $-y'' + \left(1+x^2\right)y = 0$ можно искать в виде $y = e^{z(x)}$.

В-15.10

Найти функцию Грина оператора $Ly = -\left(\sqrt{x}y'\right)' + 3x^{-3/2}y$ на интервале $(0,2)$, если $|y(0)| < \infty, y(2) = 0.$

В-15.11

Найти функцию Грина оператора $Ly = -(x+1)y'' - y'$, если $|y(-1)| < \infty, y(0) = 0$

В-15.12

Найти функцию Грина оператора $Ly = -x^2y'' - xy' + n^2y$, если $|y(0)| < \infty, y(1) = 0.$

В-15.13

Найти функцию Грина оператора $Ly = -\left[\left(x^2-1\right)y'\right]' + 2y$, если $|y(1)| < \infty, y(2) = 0.$

В-15.14

Свести задачу Штурма-Лиувилля интегральному уравнению в следующих случаях:
1) $Ly \equiv -\left(1+e^x\right)y'' - e^xy' = \lambda x^2y, 0 < x < 1, y(0) - 2y'(0) = 0\ y'(1) = 0$
2) $Ly \equiv -\left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y, 0 < x < 1, y'(0) = 0\ y(1) - y'(1) = 0$
3) $Ly \equiv -\sqrt{1+e^{2x}}y'' - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}y' = \lambda xy, 0 < x < 1, y(0) = \sqrt{2}y'(0), y'(1) = 0 = \sqrt{2}y'(0), y'(1) = 0;$
4)$Ly \equiv -\left(1-x^2\right)y'' + 2xy' - 2y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, y'(0) = 0, |y(1)| < \infty$ 5) $Ly \equiv -\cos^4 x \cdot y'' + 4\sin x\cos^3 x \cdot y' = \lambda xy, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 2y(0) - -y'(0) = 0, \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty$ 6) $Ly \equiv -x^2y'' - 2xy' + \left(2\cos^2 x + 1\right)y = \lambda y\cos 2x, 1 < x < 2, y(1) = 0, y'(2) = 0$ 7) $Ly \equiv -y'' = \lambda y, 0 < x < 1, y'(0) = y'(1) = 0.$

В-15.15

Свести интегральному уравнению нахождение решений уравнения $-2xy''-y' = 2\lambda\sqrt{x}y, \quad 0 < x < 1$, при граничных условиях $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot y'\right) = 0, \quad y(1) = 0$.

В-15.16

Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения $-xy'' + y' = \lambda y, 1 < x < 2$, при граничных условиях $y(1) = y'(2) = 0$

В-15.17

Свести к интегральному уравнению нахождение решений каждого из следующих уравнений при указанных граничных условиях: 1) $-\left(1+x^2\right)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(1) = 0$; 2) $-e^x y'' - e^x y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$; 3) $-y'' + \lambda y = f(x), \quad y(0) = hy'(0), \quad h \geq 0, \quad y(1) = 0$;

4)$-xy'' - y' + \lambda xy = 0, \quad |y(0)| < \infty, y(1) = 0$.

В-15.18

С помощью функции Грина решить следующие задачи: 1) $-\frac{xy''}{1+x} - \frac{y'}{(1+x)^2} = f(x), 1 < x < e, y(1) = 0, y(e) - ey'(e) = 0$, где e - основание натуральных логарифмов; 2) $-x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y = f(x), 1 < x < 2, y(1) = 0, y(2) + y'(2) = 0$; 3) $-\frac{x}{1-x}y'' - \frac{1}{(1-x)^2}y' = f(x), -1 < x < 0, 2y(-1) + y'(-1) = 0, |y(0)| < \infty$

4)$-(1+\cos x)y'' + \sin x \cdot y' = f(x), 0 < x < \frac{\pi}{2}, y(0) - 2y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 5) $-y'' + \frac{2}{x^2}y = f(x), 1 < x < 2, 2y(1) = y'(1), y(2) + 2y'(2) = 0$.

В-15.19

Доказать, что краевая задача

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad y'(a) - hy(a) = c_1, \quad y'(b) + Hy(b) = c_2$$

эквивалентна трем задачам Коши:

1) $g' + g^2 = q(x), g(a) = -h$;
2) $Y' - g(x)Y = -f(x), Y(a) = c_1$;
3) $y' + g(x)y = Y(x), y(b) = \frac{c_2 - Y(b)}{H - g(b)}$. Указ ан и е. Факторизовать оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q = -\left(\frac{d}{dx} - g\right)\left(\frac{d}{dx} + g\right).$$

15.3.2 Задачи на Метод разделения переменных для уравнений Лапласа и Пуассона на плоскости

В-16.1

Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = f(\varphi)$, где:

1) $f(\varphi) = \cos^2\varphi$;
2) $f(\varphi) = \sin^3\varphi$;
3) $f(\varphi) = \cos^4\varphi$;
4)$f(\varphi) = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi$.

В-16.2

Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что:

1) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r} = A\cos\varphi$
2) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r} = A\cos 2\varphi$
3) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r} = \sin^3\varphi$.

В-16.3

Найти стационарное распределение температуры $u(r,\varphi)$ внутри бесконечного цилиндра радиуса R, если:

1) на его поверхности поддерживается температура

$$u(r,\varphi)|_{r=r} = A\sin\varphi;$$

2) на одной половине поверхности цилиндра ($0 \le \varphi < \pi$) поддерживается температура $-T_0$, а на другой половине ($-\pi \le \varphi < 0$)– температура T_0.

В-16.4

Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r=1} = f_1(\varphi)$, $u|_{r=2} = f_2(\varphi)$, где:

1) $f_1(\varphi) = u_1 = \text{const}$, $f_2(\varphi) = u_2 = \text{const}$;

2) $f_1(\varphi) = 1 + \cos^2\varphi$, $f_2(\varphi) = \sin^2\varphi$.

В-16.5

Найти решение уравнения $\Delta u = A$ в кольце $R_1 < r < R_2$, если $u|_{r=R_1} = u_1$, $u|_{r=R_2} = u_2$ (A, u_1, u_2 - заданные числа).

В-16.6

Найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -Axy \quad (A = \text{ const })$$

в круге радиуса R с центром в начале координат, если $u|_{r=r} = 0$.

В-16.7

Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $0 < x < a, 0 < y < b$, если на границе этого многоугольника $u(x,y)$ принимает следующие значения:

$$u|_{x=0} = A\sin\tfrac{\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0,$$
$$u|_{y=0} = B\sin\tfrac{\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

В-16.8

Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри прямоугольника $[0 < x < a, 0 < y < b]$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси y, равен v_0, а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

В-16.9

Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $-a < x < a$, $-b < y < b$, две противоположные грани которой ($x = a$ и $x = -a$) имеют потенциал v_0, а две другие ($y = b, y = -b$) заземлены.

В-16.10

Найти стационарное распределение температуры $u(x,y)$ в прямоугольной однородной пластинке $0 < x < a, 0 < y < b$, если ее стороны $x = a$ и $y = b$ покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны ($x = 0, y = 0$) поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной плотностью q.

В-пример.5.

Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа удовлетворяла граничным условиям (3).

Пусть, например, $w = xt$. Тогда $w_{tt} - w_{xx} = 0$, $w|_{t=0} = 0$, $w_t|_{t=0} = x$. Следовательно, функция Тогда $w_{tt} - w_{xx} = 0, w_{t=0} = 0$, $w_t|_{t=0} = x$.

Следовательно, функция $v(x,t) = u(x,t) - xt$ удовлетворяет уравнению

$$v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=1} = 0$$

и однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=1} = 0$$

и нулевым начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения $v_{tt} - v_{xx} = 0$ при условиях (6), (7), положим $v(x,t) = X(x)T(t)$. Приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

Решая эту задачу, находим ее собственные значения $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и соответствующие собственные функции

Решение задачи (5)-(7) ищем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x$$

где $T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0$. Подставляя $v(x,t)$ из (9) в (5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t)\right) \sin \lambda_n x = 2t$$

Для нахождения функций $T_n(t)$ разложим функцию 1 в ряд Фурье по системе функций (8) на интервале $(0,1)$:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x.$$

Так как

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2}, \quad \text{То} \quad a_n = \int_0^1 \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n},$$

и из (11) и (12) получаем

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n}.$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} + A \sin \lambda_n t + B \cos \lambda_n t.$$

Используя условие (10), получаем $B = 0, A = -4/\lambda_n^4$. Подставляя

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} - \frac{4}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n t$$

в формулу (9) и используя (4), находим искомое решение задачи (1) – (3):

(???)

где $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n . xt + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} \left(\lambda_n t - \sin \lambda_n t\right) \sin \lambda_n x$

В-пример.6.

Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения параболического типа

$$u_t - u_{xx} = t(x+1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = 0$$

и граничных условиях $u_x|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t^2$ Р е ше и е. Функция $w = xt^2$ удовлетворяет краевым условиям (3), уравнению $w_t - w_{xx} = 2xt$ и начальному условию $w|_{t=0} = 0$. Поэтому функция $v = u - xt^2$ удовлетворяет уравнению $v_t - v_{xx} = (1-x)t$ и условиям $v|_{t=0} = 0, \quad v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0$. Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения $v_t - v_{xx} = 0$ при условиях (6), положим $v = X(x)T(t)$. Получим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

собственными значениями которой являются числа $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а собственными функциями - функции

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x.$$

Решение задачи (5), (6) ищем в виде

Подставляя $v(x,t)$ из (8) в уравнение (5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t)\right) \cos \lambda_n x = (1-x)t.$$

Разложим функцию $1 - x$ в ряд Фурье по системе функций (7) на интервале $(0, 1)$:

$$1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$$

Так как

$$a_n = 2 \int_0^1 (1-x) \cos \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n^2},$$

то из (9) и (10) находим

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T(t) = \frac{2t}{\lambda_n^2}.$$

Решением уравнения (11) при условии $T_n(0) = 0$ является функция

$$T_n(t) = 2\lambda_n^{-6} \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1\right).$$

Из (4), (8) и (12) находим решение задачи (1)-(3):

$$u = xt^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-6} \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1\right) \cos \lambda_n x,$$

где $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

ФР задача параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right), 0 < t \leq 1, 0 < x < 1$$

$$u(0,x) = (1+x)/\sqrt{5}, 0 \leq x \leq 1$$

$$u(t,0) = 1/\sqrt{5-4t}, 0 < t \leq 1$$

$$ui(t,1) = 2/\sqrt{5-4t}, 0 < t \leq 1$$

(?? про них много теории, которую я ещё не читал. мб отдельный каталог создам?? пока суть в том, что по принципу максимума у нас одно решение, которое легко находится из начальных условий.)

Для зануления начальных условий рассмотрим функцию $v = u - \frac{1+x}{\sqrt{\sqrt{1+1}}} \Rightarrow$

Решение

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2(1+x)}{(5-4t)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{5-4t}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2u\left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\cdot\left(v + \frac{1+x}{\sqrt{5-1t)}}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{5-4t}}\right)^2 + \left(v + \frac{1+x}{\sqrt{s-4t}}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =\right.\right.$$
$$=2\cdot\left(v + \frac{1+x}{\sqrt{5-ut}}\right)\left(\left(\frac{\partial v)^2}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{s-4t}} + \frac{1}{5-4t}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(v^2 + 2v\frac{1+x}{\sqrt{5-4t}} + \frac{(+x)^2}{s-4t} =\right.\right.$$

$$= v^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2v\cdot\left(\frac{\partial v v^2}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{5-4t}} + \frac{2v}{5-4t} + 22vv^2\cdot\frac{1+x}{\sqrt{2x}} + 4\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{\partial x}\frac{1x}{5-4t} + \right.$$
$$+ 2\frac{1+x}{(5-4)^{32}} + y^2 vv\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{5-4t}} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{(1+x)^2}{5-4t}$$
$$\left\{\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2v\frac{\partial r}{\partial x}\frac{(1+x)}{\sqrt{\partial-4t)}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{v^{-1}(1+x)^2}{s-4t}\right), 0 < t \le 1, 0 < x < 1\right.$$
$$vt = 0, 0 \le x \le 1$$
$$v_{x=0} = v_{x=1} = 0, 0 < t \le 1$$

Это ур парабол типа, значит, справедлив принцип максимума, значит, решение единственно. оно 0 для задачи с 0ми начальными условиями, значит, оно $= 0$. значит, для этих начальных условий - решение

Обоснование (!?!?!?!?) (мб часов 10 ушло бы на разбор теории, чтобы разобраться, пока я не шарю. пока просто принцип максимума и такой алгоритм решения. все.)

ФР задача о уравнении Пуассона (???!??!)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2[x(1-x) + u(1-y)]$$
$$\| \left.u\right|_{\Gamma} = 0$$

Решение (такая задача вот, Γ - хз что, но даже несмотря на это, хз, как решать. мб Γ - окружность. тут, если задача с оборванным условием, нужно догадаться, что скорее всего это окружность и не парится про это.)

(!!! шаблонная задача, методы которой максимально типичные!!! усвою - также буду решать, пока тут слабое моё место.)

(далее копия решения)

$$\Delta u = -\,2(x(1-x) + y(1-y)) \quad \left.u\right|_{\Gamma} = 0 \quad 0 \le (x,y) \le 1$$
$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \quad \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\cdot u_r + \frac{1}{r^2}\cdot u\varphi\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right.$$
$$f(x,y) = 2r(\cos\varphi(r\cos\varphi - 1) + \sin\varphi(r\sin\varphi - 1)) =$$
$$= 2r\left(r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) - \cos\varphi - \sin\varphi\right) = 2r(r - \cos\varphi - \sin\varphi)$$
$$r^2\cdot u_r + r\cdot u_r + U\varphi\varphi = 2r^4 - 2r^3(\cos\varphi + \sin\varphi)$$
$$u(1,\varphi) = 0$$
$$u(r,\varphi) = V(r,\varphi) + W(r,\varphi)$$
$$\Delta U = \Delta V + \Delta W$$

1. $r^2\cdot V_{rr} + r\cdot V_r + V_{\varphi\varphi} = -2r^3(\cos\varphi + \sin\varphi)$
$V(T,\varphi) = R(T)\cdot\Phi(\varphi) \quad \Phi(\varphi) = \cos\varphi + \sin\varphi$
$N^2\cdot R''\cdot\phi + r\cdot R'\cdot\phi + R\cdot\phi'' = -2\Gamma^3\cdot\phi \mid: \phi \ne 0$
$\phi' = -\sin\varphi + \cos\varphi \quad \phi'' = -\sin\varphi - \cos\varphi \quad \phi'' = -\phi$
$R = R(r); r^2\cdot R'' + r\cdot R' - R = -2r^3 \quad R(1) = 0$
$r = e^t \quad R' = R'_t\cdot e^{-t} \quad R'' = e^{-2t}\left(R''_{tt} - R'_t\right)$ (ур-е Эйлера)

$$e^{-2t}e^{2t}\left(R''_{tt} - R'_t\right) + e^t\cdot e^{-t}\cdot R'_t - R = 2e^{3t}$$
$$R''_{tt} - R = 2e^{3t}$$

$R_{tt}^{I\prime} - R = 0 \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{12} = \pm 1$
$R(t) = R_0(t) + R_r(t)$
$R_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad f(t) = -2e^{3t} \quad \alpha = 3 \quad R = 0$
$R_1(t) = Ae^{3t} \quad R_1'(t) = 3Ae^{3t} \quad R_1''(t) = 9Ae^{3t}$
$9A - A = -2 \quad A = -\frac{1}{4} \quad R_1(t) = -\frac{1}{4}e^{3t}$
$R(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - \frac{e^{3t}}{4}$
$R(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 + -\frac{r^3}{4}$
$R(1) = C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 0 \quad C_2 = \frac{1}{4} - C_1$
$R(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{r}{4} - C_1 r - \frac{r^3}{4} = \frac{C_1}{r} - C_1 r + \frac{r - r^3}{4}$
$c_1 = a; V(r, \varphi) = \left(a \cdot \left(\frac{1}{r} - r\right) + \frac{r - r^3}{4}\right) \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi)$

2. $N^2 \cdot W_{\mu N} + r = W_\mu + W_{\varphi\varphi} = 2N^4$
$W(r, \varphi) = R(r) \quad W_{\varphi\varphi} = 0$
$N^2 \cdot R'' + r \cdot R' = 2\mu^4$
$\mu R'' + R' = 2\mu^3 \quad R(1) = 0$ ур-ue tinnepa
$r = e^t e^t \cdot e^{-2t} (R_{tt}'' - R_t') + e^{-t} \cdot R_t' =$ Refll $2e^{3t}$
$R_{tt}'' = 2e^{4t} \quad R_t' = \frac{1}{2}e^{4t} + c_1$

$R(t) = \frac{1}{8}e^{4t} + c_1 t + c_2 \quad t = \ln r$
$R(r) = \frac{r^4}{8} + c_1 \ln r + c_2$
$R(1) = \frac{1}{8} + c_2 = 0 \quad c_2 = -\frac{1}{8} \quad c_1 = b$
$R(M) = w(r) = b \cdot \ln r + \frac{r^4 - 1}{8}$
$u(r, \varphi) = \left[a\left(\frac{1}{r} - r\right) + \frac{\Gamma - r^3}{4}\right](\cos\varphi + \sin\varphi) + b \ln r + \frac{r^4 - 1}{8}$
$u(x, y) = a\left[\frac{x+y}{x^2+y^2} - (x+y)\right] + \frac{x+y}{4}\left(1 - x^2 - y^2\right) + \frac{b}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - 1}{8}$

Проверка через программирование (!??!?) (кст, мб во многих задачах буду вставлять.!!)

15.3.3 Задачи на Краевые задачи в пространстве

МФТИ.Карлов-л5.з1 Типичное уравнение теплопроводности

Решить
$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\Delta u + e^{-7t} \cdot \cos(x + 2y + 3z) \\ u|_{t=0} = \sin x \cdot y \cdot \cos y \cdot e^{-z^2} \end{cases},$$
где $u = u(x, y, z, t), \Delta = \Delta_{x,y,z}$.

(??? как через формулу Пуассона решать???? потом подумаю.)

Две неоднородности убираются подстановкой:
$$u = u_1 + u_2,$$
1)
$$\begin{cases} (u_1)_t = \frac{1}{2}\Delta u_1 + e^{-7t} \cdot \cos(x + 2y + 3z) \\ (u_1)|_{t=0} = 0 \end{cases}$$
2)
$$\begin{cases} (u_2)_t = \frac{1}{2}\Delta u_2 \\ (u_2)|_{t=0} = \sin x \cdot y \cos y \cdot e^{-z^2} \end{cases}$$

1) В случае, когда в условии есть собственная функция оператора Лапласа, ищем u_1 в виде
$$u_1(x, y, z, t) = f(t) \cdot \cos(x + 2y + z),$$

где $f(t)$ - ищем. Используем, что $\Delta(\cos(x+2y+3z)) = \left(-1^2-2^2-3^2\right)\cos(x+2y+3z) = -14{\cdot}\cos(x+2y+3z)$. Подставляем u_1:

$$\begin{cases} f'(t)\cos(x+2y+3z) = \frac{1}{2}f(t)\cdot(-14)\cos(x+2y+3z) + e^{-7t}\cos(x+2y+3z) \\ f(0)\cdot\cos(x+2y+3z) = 0 \end{cases}$$

Поскольку $\cos(x+2y+3z) \not\equiv 0$, то можно сократить на $\cos(x+2y+3z)$:

$$\begin{cases} f'(t) = -7f(t) + e^{-7t} \\ f(0) = 0 \end{cases},$$

т.е. получили задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Общее решение однородного уравнения:

$$\lambda = -7, \Rightarrow f(t) = Ce^{-7t}$$

Так как данный случай - резонансный (показатель степени $\left(e^t\right)^{-7}$ совпадает с корнем характеристического многочлена), то поэтому частное решение ищем в виде:

$$f(t) = a\cdot t\cdot e^{-7t}$$

Подставляем в уравнение:

$$a\cdot e^{-7t} - a\cdot 7t\cdot e^{-7t} = -7\cdot a\cdot t\cdot e^{-7t} + e^{-7t}, \Rightarrow a = 1$$

Таким образом,

$$f(t) = C\cdot e^{-7t} + t\cdot e^{-7t}$$

- общее решение неоднородного уравнения. Из граничного условия:

$$0 = f(0) = C, \Rightarrow f(t) = te^{-7t}.$$

Таким образом,

$$u_1(x,y,z,t) = te^{-7t}\cdot\cos(x+2y+3z).$$

2) Ищем u_2. Для u_2:

$$\begin{cases} (u_2)_t = \frac{1}{2}\Delta u_2 \\ (u_2)|_{t=0} = \sin x\cdot y\cos y\cdot e^{-z^2}. \end{cases}$$

Только для однородного уравнения теплопроводности работает следующий прием: если в начальном условии неоднородность представлена в виде произведений функций с разделенными переменными, то можно разбить задачи на несколько разных, а результаты перемножить:

$$u_2(x,y,z,t) = v(x,t)\cdot w(y,t)\cdot g(z,t).$$

Таким образом, имеем 3 новые задачи:

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{2}v_{xx} \\ v|_{t=0} = \sin x \end{cases}, \qquad \begin{cases} w_t = \frac{1}{2}w_{yy} \\ w|_{t=0} = y\cos y \end{cases}, \qquad \begin{cases} g_t = \frac{1}{2}g_{zz} \\ g|_{t=0} = e^{-z^2} \end{cases}.$$

Для v, w используем следующую формулу:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v \\ v|_{t=0} = v_0\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, t\right) \end{cases}$$

Фиксируем $x_1, \ldots, x_n$. Задача превращается в следующую:

$$\begin{cases} v'(t) = a^2\cdot\Delta v(t) \\ v(0) = v_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- задача Коши для дифференциального уравнения в $\mathbb{R}$, её решение:

$$v(t) = v_0\cdot e^{a^2\Delta t} = v_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}\Delta^n\cdot t^n}{n!}, \Rightarrow v = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}\cdot t^n\cdot\Delta^n v_0}{n!}$$

(данные выкладки приведены для запоминания этой формулы, поэтому обоснование опущено). Поскольку $\sin x$ - собственная функция оператора Лапласа, то вышенаписанная формула подходит, а потому

$$v=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot t^n\Delta^n(\sin x)}{n!}$$

Т.к.

$$\begin{array}{lll} 0: & \Delta^0(\sin x)= & \sin x \\ 1: & \Delta^1(\sin x)= & -\sin x \\ \vdots & \vdots & \\ n: & \Delta^n(\sin x)= & (-1)^n\sin x \end{array},$$

Это ответ, но его можно (и нужно, чтобы не потерять баллы) упростить:

$$v=\sin x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot t^n}{n!}=/*e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}*/=\sin x\cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

Для w :

$$\begin{cases} w_t=\frac{1}{2}w_{yy} \\ w|_{t=0}=y\cos y \end{cases}$$

Обозначим $y\cos y=w_0(y)$
$$\begin{array}{lllll} \Delta^0\left(w_0\right) & = & w_0 & & \\ \Delta^1\left(w_0\right) & = & (1\cdot\cos y-y\sin y)'_y= & -\sin y-\sin y-y\cos y= & -2\sin y-w_0 \\ \Delta^2\left(w_0\right) & = & \Delta\left(-2\sin y-w_0\right)= & 2\sin y-(-2\sin y-2w_0)= & 4\sin y+w_0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

$$\Delta^n\left(w_0\right)=(-1)^n2n\sin y+(-1)^nw_0= \quad (-1)^n\left(2n\sin y+w_0\right)$$

$$=\sin y\cdot 2\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}+w_0\cdot e^{-\frac{t}{2}}=w_0\cdot e^{-\frac{t}{2}}-t\sin y\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^n}{n!}=e^{-\frac{t}{2}}w_0-te^{-\frac{t}{2}}\sin y$$

Таким образом,

$$w(y,t)=e^{-\frac{t}{2}}(y\cos y-t\sin y).$$

Для функции g, которая удовлетворяет

$$\begin{cases} g_t=\frac{1}{2}g_{zz} \\ g|_{t=0}=e^{-z^2} \end{cases}$$

используем формулу Пуассона: (????? а иначе не решается задача? проверю?)

$$\begin{cases} u=u\left(x_1,\ldots,x_n,t\right) \\ u_t=a^2\Delta u \\ u|_{t=0}=u_0\left(x_1,\ldots x_n\right), \quad \text{где } u_0\text{-непрерывная и ограниченн} \end{cases}$$

Решение дается формулой

$$\Rightarrow u=\frac{1}{\left(4\pi a^2t\right)^{n/2}}\int\underset{\mathbb{R}^n}{\ldots}\int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}u_0(\xi)d\xi,$$

где $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right),\xi=\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$. (для волнового уравнения существует формула Кирхгофа. Однако при использовании формул Пуассона или Кирхгофа необходимо брать интегралы, поскольку требуется выразить ответ в элементарных функциях).

$$g(z,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\frac{1}{2}t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-(z-\xi)^2}{4\cdot\frac{1}{2}t}}e^{-\xi^2}d\xi$$

Интеграл Пуассона имеет вид: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, где в нашем случае показатель exp:

$$-\xi^2-\frac{\xi^2-2z\xi+z^2}{2t}=-\frac{1+2t}{2t}\xi^2+\frac{z}{t}\xi-\frac{z^2}{2t}=\left[-(\underbrace{\sqrt{\frac{1+2t}{2t}}}_{c}\xi)^2+2\underbrace{\sqrt{\frac{1+2t}{2t}}}_{c}\xi\cdot(\underbrace{\frac{1}{2t}\sqrt{\frac{2t}{1+2t}}z}_{m})-\underbrace{\frac{z^2}{2t(1+2t)}}_{m^2}\right]-\frac{z^2}{2t}+\frac{z^2}{2t(1+2t)}$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
g(z,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(c\xi-m)^2} e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}\,d\xi = \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(c\xi-m)^2}\,\frac{d(c\xi-m)}{c} = \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{2\pi t}}\cdot\sqrt{\frac{2t}{1+2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(c\xi-m)^2} d(c\xi-m) = \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{1+2t)}}}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+2t}} = \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{1+2t)}}}{\sqrt{1+2t}}.
\end{aligned}
$$

Ответ:

$$
u(x,y,z,t) = t\cdot e^{-7t}\cos(x+2y+3z) + e^{-t/2}\sin x\cdot e^{-t/2}(y\cos y - t\sin y)\cdot\frac{e^{-\frac{z^2}{(1+2t)}}}{\sqrt{1+2t}}
$$

МФТИ.Карлов-л5.з2. Типичное волновое уравнение

Решить волновое уравнение:

$$
\begin{cases}
u_{tt} = \Delta u + \left(x^2 - z^2 + x - 2y + 3z\right)\cdot e^t \\
u|_{t=0} = \sqrt[3]{x-2y+3z}, \\
u_t|_{t=0} = x^2yz,
\end{cases}
$$

где $u = u(x,y,z,t)$, $\quad \Delta = \Delta_{x,y,z}$.

Решение: Разбиваем задачу на 3 части:

$$
u = u_1 + u_2 + u_3,
$$

где

$$
\begin{cases}
(u_1)_{tt} = \Delta u_1 + \left(x^2 - z^2 + x - 2y + 3z\right)\cdot e^t, \\
(u_1)|_{t=0} = 0, \quad (u_1)_t|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(u_2)_{tt} = \Delta u_2 \\
u|_{t=0} = \sqrt[3]{x-2y+3z}, \quad (u_2)_t|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(u_3)_{tt} = \Delta u_3 \\
(u_3)|_{t=0} = 0, \quad (u_3)_t|_{t=0} = x^2yz
\end{cases}
$$

При решении задачи такого типа могут использоваться приёмы: использование собственной функции оператора Лапласа и нахождение ответа в виде ряда.

Собственной функцией оператора Лапласа в данном случае является

$$
g(x,y,z) = \left(x^2 - z^2 + x - 2y + 3z\right)
$$

- гармоническая функция с собственным числом 0.

1. Ищем u_1:

$$
u(x,y,z,t) = f(t)\cdot g(x,y,z).
$$

Подставляем в уравнение и в начальные условия:

$$
\Delta(g) = 2 - 2 = 0 = 0\cdot g,
$$

а потому подстановка будет достаточно простой:

$$
\begin{cases}
f''(t)\cdot g = f(t)\cdot 0\cdot g + g\cdot e^t \\
f(0)\cdot g = 0, \quad f'(0)\cdot g = 0
\end{cases}.
$$

Поскольку функция g не является тождественно нулевой, то на неё можно сокращать:

$$
\begin{cases}
f'' = e^t \\
f(0) = 0, \quad f'(0) = 0
\end{cases}
$$

Получили задачу Коши. Находим общее решение f из $f'(t) = e^t + C_1$:

$$f(t) = e^t + C_1 t + C_2$$

Для выполнения условий получаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 + C_2 = 0 \\ f'(0) = 1 + C_1 = 0 \end{array} \right. , \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = -1 \end{array} \right.$$

Отсюда

$$u_1(x, y, z, t) = \left(e^t - t - 1\right)\left(x^2 - z^2 + x - 2y + 3z\right).$$

2. Ищем u_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_2)_{tt} = \Delta u_2 \\ u|_{t=0} = \sqrt[3]{x - 2y + 3z}, \quad (u_2)_t|_{t=0} = 0 \end{array} \right. .$$

В данном случае необходимо использовать замену переменных. Другие приёмы неприменимы, поскольку корень, стоящий в начальном условии, не является собственной функцией оператора Лапласа, а искать ответ в виде ряда будет крайне затруднительно. Неоднородность является функцией 3-ёх переменных, но эти три переменные входят в виде выражения, линейного по ним. Поэтому делаем замену

$$\xi = x - 2y + 3z,$$

а ответ ищется в виде функции:

$$v(\xi(x, y, z), t) = u_2(x, y, z, t).$$

Идея в том, что раз неоднородность в уравнении хоть и трёхмерна, но на самом деле зависит от выражения $(x - 2y + 3z)$, то есть шанс найти ответ в соответствующей форме, то есть в виде функции $v(\xi, t)$. Это попытка свести задачу к одномерному волновому уравнению. Если это получится, то далее можно будет пользоваться формулой Д'Аламбера. Пересчитаем производные:

$$v_{tt} = (u_2)_{tt}, \qquad (u_2)_x = v_\xi \cdot \xi_x = v_\xi \cdot 1, \qquad (u_2)_{xx} = v_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 = v_{\xi\xi} \cdot 1^2,$$

$$(2)_{yy} = v_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 = v_{\xi\xi} \cdot (-2)^2 \qquad (u_2)_{zz} = v_{\xi\xi} \cdot 3^2$$

отсюда получается, что после замены:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} = \left(1 + (-2)^2 + 3^2\right) v_{\xi\xi}, \\ v|_{t=0} = \sqrt[3]{\xi}, \quad v_t|_{t=0} = 0 \end{array} \right. ,$$

лишний сомножитель, а вид уравнения не меняется - это по-прежнему волновое уравнение, только 5 теперь в $\mathbb{R}$. Значит, можно использовать формулу Д'Аламбера. Формула Д'Аламбера применима для задач вида:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot v_{xx}, \quad v = v(x, t) \\ v|_{t=0} = v_0(x), \quad v_t|_{t=0} = v_1(x) \end{cases}$$

и имеет вид:

$$v(x, t) = \frac{1}{2}\left(v_0(x + at) + v_0(x - at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_1(\lambda) d\lambda$$

Необходимые условия: $v_0(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right), v_1(x) \in C^1(\mathbb{R})$. внимание не акцентируется. Пользуясь формулой Д'Аламбера, получаем:

$$v(\xi, t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\xi + \sqrt{14}t} + \sqrt[3]{\xi - \sqrt{14}t}\right)$$

Приводим к исходным переменным:

$$u_2(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x - 2y + 3z + \sqrt{14}t} + \sqrt[3]{x - 2y + 3z - \sqrt{14}t}\right)$$

Приём, который здесь применялся, называется линейной заменой переменных; этот приём действует только для линейной замены, поскольку иначе изменится тип уравнения. Для волнового уравнения этот приём применим, поскольку задача сводится к одномерной, а для одномерной задачи существует готовая формула - формула Д'Аламбера. 3. Ищем u_3: Для функции $u = u\left(x_1, \ldots, x_n, t\right)$ и задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 \cdot \Delta u, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \, u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{array} \right.$$

есть готовый ответ (для вывода см. задачу 1):

$$u\left(x_1,\ldots,x_n,t\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}\Delta^n u_0}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n}t^{2n+1}\Delta^n u_1}{(2n+1)!}.$$

В этом случае ответ более громоздкий, чем в задаче на уравнение теплопроводности, поскольку тут вторая производная по t. Подобные формулы полезны тогда, когда можно посчитать степени оператора Лапласа от начальных условий, например, в случае начальных условий в виде многочлена или собственной функции оператора Лапласа. Если это невозможно, то данный способ решения ведет в тупик. Для рассматриваемой задачи $a^2=1$. Находим степени оператора Лапласа от начальных условий:

$$\begin{gathered}u_0=0,\Rightarrow \Delta^n u_0=0,\\ u_1(x,y,z)=\Delta^0\left(x^2yz\right)=x^2yz\\ \Delta\left(x^2yz\right)=2yz\\ \Delta^2\left(x^2yz\right)=0\end{gathered}$$

Ответ:

$$u_3(x,y,z,t)=0+\frac{1\cdot t\cdot x^2yz}{1!}+\frac{t^3}{3!}\cdot 2yz.$$

откуда

$$\begin{gathered}u=u_1+u_2+u_3=\left(e^t-t-1\right)\left(x^2-z^2+x-2y+3z\right)+\\ +\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x-2y+3z+\sqrt{14}t}+\sqrt[3]{x-2y+3z-\sqrt{14}})+tx^2yz+\frac{t^3}{3}yz\end{gathered}$$

Для отсутствия претензий от проверяющего итоговый ответ необходимо выписать.

B-16.11

Найти стационарную температуру $u(r,z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания R и высотой h, если:

1) температура нижнего основания и боковой поверхности цилиндра равна нулю, а температура верхнего основания зависит только от r (расстояние от оси цилиндра);

2) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом, а температура верхнего основания есть функция от r;

3) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры, а температура верхнего основания есть функция от r;

4)температура верхнего и нижнего оснований равна нулю, а температура в каждой точке боковой поверхности зависит только от расстояния этой точки до нижнего основания (т. е. от z); 5) основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть заданная функция от z.

Нахождение решений задач $16.11, 16.12$ методом разделения переменных требует применения бесселевых функций (см. с. 247).

B-16.12

Найти стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму цилиндра с радиусом основания R и высотой h, если:

1) к нижнему основанию $z=0$ подводится постоянный тепловой поток q, а боковая поверхность $r=R$ и верхнее основание $z=h$ поддерживаются при нулевой температуре;

2) к нижнему основанию $z=0$ подводится постоянный тепловой поток q, верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

Коэффициенты A_n, B_n определяются из краевых условий.

Нахождение решений задач $16.11, 16.12$ методом разделения переменных требует применения бесселевых функций (см. с. 247).

B-16.13

Найти функцию u, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=r}=f(\theta),$$

где:

1) $f(\theta)=\cos\theta$;
2) $f(\theta)=\cos^2\theta$;
3) $f(\theta)=\cos 2\theta$;
4)$f(\theta)=\sin^2\theta$.

В-16.14

Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса R и такую, что $(u+u_r)|_{r=r}=1+\cos^2\theta$.

В-16.15

Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса R и такую, что:
1) $u_r|_{r=r}=\sin^2\theta$
2) $(u-u_r)|_{r=r}=\sin^2\theta$
3) $u_r|_{r=r}=A\cos\theta$.

В-16.16

Выяснить, разрешима ли внутренняя задача Неймана для шара радиуса R, если:
1) $u_r|_{r=r}=A\cos\theta$
2) $u_r|_{r=r}=\sin\theta$. Найти соответствующее решение.

В-16.17

Найти гармоническую внутри шарового слоя $1<r<2$ функцию такую, что

$$\text{если:}\quad u|_{r=1}=f_1(\theta),\quad u|_{r=2}=f_2(\theta),$$

1) $f_1=\cos^2\theta,\quad f_2=\frac{1}{8}\left(\cos^2\theta+1\right)$;
2) $f_1=\cos^2\theta,\quad f_2=4\cos^2\theta-\frac{4}{3}$;
3) $f_1=1-\cos 2\theta,\quad f_2=2\cos\theta$
4)$f_1=\frac{1}{2}\cos\theta,\quad f_2=1+\cos 2\theta$; 5) $f_1=9\cos 2\theta,\quad f_2=3\left(1-7\cos^2\theta\right)$.

В-16.18

Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса R, если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0, а основание полусферы - при нулевой температуре.

В-16.19

Найти стационарную температуру внутри однородного изотропного шара радиуса R, если на поверхности шара поддерживается температура

$$u|_{r=r}=\begin{cases} u_1 & \text{при}\quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\\ u_2 & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi\end{cases}$$

В-16.20

Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что:
1) $u|_{r=1}=\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta$;
2) $u|_{r=1}=(\sin\theta+\sin 2\theta)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$;
3) $u|_{r=1}=\sin\theta(\sin\varphi+\sin\theta)$;
4) $u_r|_{r=1}=\sin^{10}\theta\sin 10\varphi,\quad u|_{r=0}=1$.

В-16.21

Найти функцию, гармоническую внутри сферы радиуса R с центром в начале координат и такую, что:
1) $u|_{r=r}=\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\sin^2\theta\cos\theta$;
2) $u|_{r=r}=\sin\left(3\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin^3\theta$;
3) $u|_{r=r}=\sin^2\theta\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\theta\sin\varphi$;
4) $(u+u_r)|_{r=r}=\sin^2\theta\left[\sqrt{2}\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2\varphi\right]$; 5) $(u+u_r)|_{r=r}=\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta)$.

В-16.22

Найти функцию, гармоническую вне единичной сферы и такую, что:
1) $u_r|_{r=1}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\sin\theta$;
2) $u|_{r=1}=\cos^2\theta\sin\theta\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$.

В-16.23

Найти функцию, гармоническую вне сферы радиуса R с центром в начале координат и такую, что:
1) $u|_{r=r} = \sin^3\theta\cos\theta\cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $u|_{r=r} = \sin 100\varphi \sin^{100}\theta$;
3) $(u - u_r)|_{r=r} = \sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$.

В-16.24

Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r-1} = f_1(\theta,\varphi)$, $u|_{r=2} = f_2(\theta,\varphi)$, где:
1) $f_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad f_2 = 0$;
2) $f_1 = 3\sin 2\varphi\sin^2\theta, \quad f_2 = 3\cos\theta$;
3) $f_1 = 7\sin\theta\cos\varphi, \quad f_2 = 7\cos\theta$;
4)$f_1 = \sin^2\theta(3 - \sin 2\varphi), \quad f_2 = 4f_1$; 5) $f_1 = 12\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad f_2 = 0$; 6) $f_1 = \sin 2\varphi\sin^2\theta, \quad f_2 = \cos 2\varphi\sin^2\theta$; 7) $f_1 = \cos\varphi\sin 2\theta, \quad f_2 = \sin\varphi\sin 2\theta$; 8) $f_1 = 31\sin 2\theta\sin\varphi, \quad f_2 = 31\sin^2\theta\cos 2\varphi$; 9) $f_1 = \cos\theta, \quad f_2 = \cos\varphi\left(12\sin\theta - 15\sin^3\theta\right)$.

В-16.25

Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя $1 < r < 2$ и такую, что:
1) $(3u + u_r)|_{r=1} = 5\sin^2\theta\sin 2\varphi, \quad u|_{r=2} = -\cos\theta$;
2) $u|_{r=1} = \sin\theta\sin\varphi(5 + 6\cos\theta), \quad u_r|_{r=2} = 12\sin 2\theta\sin\varphi$;
3) $u|_{r=1} = 1, \quad u_r|_{r=2} = 15\cos\varphi\left(\cos^2\theta\sin\theta + \sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta\right)$.

В-16.26

Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя $1/2 < r < 1$ и такую, что:
1) $u|_{r=1/2} = 0, \quad u|_{r=1} = 6\cos^2\varphi\sin^2\theta$;
2) $u|_{r=1/2} = 30\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos\theta, \quad u|_{r=1} = 0$.

15.3.4 Задачи на Функция Грина оператора Лапласа

В-17.1

Построить функцию Грина для следующих областей в R^3:
1) полупространство $x_3 > 0$;
2) двугранный угол $x_2 > 0, x_3 > 0$;
3) октант $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.

В-17.2

Построить функцию Грина для следующих областей в R^3:
1) шар $|x| < R$;
2) полушар $|x| < R, x_3 > 0$;
3) четверть шара $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$;
4)восьмая часть шара $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.

В-17.3

Пользуясь методом отражений, построить функцию Грина для части пространства, заключенного между двумя параллельными плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$.

Ниже даны краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона, решения которых могут быть найдены с помощью соответствующей функции Грина из задач 17.1-17.3 и формулы (1).

МФТИ.Карлов-4 (??)

Краевая задача для уравнений Лапласа и Пуассона на плоскости одна из самых легких и должна решаться минут за 10-15.

Полезные факты для решения задач на рассматриваемую тему Если решается задача $\Delta v = 0$ в области с кусочно-гладкой границей $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, где $v \in C^2(\mathcal{D})$, то в случае круговой области заранее известен ответ:
1) Если
$$\mathcal{D} = \{r < R\},$$

то

$$v(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n r^n \cos(n\varphi) + b_n r^n \sin(n\varphi)\right)$$

(учтено условие, что $|v(0)| < \infty$), т.е. в случае постановки такой задачи необходимо просто найти коэффициенты a_n, b_n, которые находятся из граничных условий. 2) Если

$$\mathcal{D} = \{r > R\},$$

то

$$v(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c_n}{r^n}\cos n\varphi + \frac{d_n}{r^n}\sin n\varphi\right)$$

(учтено, что $|v(\infty)| < \infty$). 3) Если

$$D = \{R_1 < r < R_2\},$$

то в этом случае:

$$v(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(a_n r^n + \frac{c_n}{r^n}\right)\cos n\varphi + \left(b_n r^n + \frac{d_n}{r^n}\right)\sin n\varphi\right).$$

Таким образом, для уравнения Лапласа в круговых областях (с центром в нуле) ответ заранее известен с точностью до коэффициентов.

Половина коэффициентов пропадает в случае 1 (случае 2), потому что функция должна быть гармонической, иметь вторые непрерывные частные производные в области и быть ограниченной в нуле (бесконечности).

Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta_{r,\varphi} u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Эти факты необходимо знать для решения задач на данную тему. Задача 1.

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{8}{r^2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right), & r > 2, x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \\ u|_{r=2} = \sin^4\varphi & |u(\infty)| < \infty \end{cases}$$

Комментарии: Это не уравнение Лапласа, а уравнение Пуассона, поскольку правая часть не равна 0. Для того чтобы воспользоваться формулами, выписанными выше, необходимо свести задачу к однородному уравнению. Это и есть первый шаг решения. Однородность зависит от r и φ, поэтому оператор Лапласа необходимо записать в полярных координатах. Также для решения этой задачи полезно помнить школьные тригонометрические формулы (например, понижения степени и кратных углов - больше 4-ой степени обычно не требуется). Далее, не обязательно раскладывать функцию $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ на сумму тригонометрических функций, дабы воспользоваться формулами, ибо достаточно оставить её в свернутом виде. Данная задача оценивается в $4-5$ очков (чаще в 4). Решение: 1) <Комментарий (здесь и далее выделен курсивом) - сводим к однородному уравнению путём подбора Функции $g(r,\varphi) : \Delta g = \frac{8}{r^2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$. Таких функций бесконечно много, и среди них нужно подобрать оптимальную. После подбора уравнение запишется в виде $\Delta v = 0$, а ответ - $v + g$ >

Ищем неоднородность в виде $g(r,\varphi) = f(r)\cdot\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$, поскольку при подстановке этого произведения в уравнение каждое слагаемое в операторе Лапласа будет умножено на $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$, так как $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ – собственная функция для второй производной (при дифференцировании она умножится на число). Можно искать и другими путями, но этот способ наиболее простой. Ищем $f(r)$, подставляя в уравнение:

$$f''(r)\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f'(r)\cdot\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)}{r} - \frac{16\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)f(r)}{r^2} = \frac{8}{r^2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

Т.к. множитель $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ присутствует у каждого слагаемого, то на него можно сократить. Потери корней при этом не произойдёт, поскольку исходное уравнение функционально, то есть выполняется при всех значениях аргументов, а $\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \not\equiv 0, \Rightarrow$

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{16f}{r^2} = \frac{8}{r^2}.$$

Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Домножим на r^2:

$$r^2 f''(r) + r\cdot f'(r) - 16f(r) = 8,$$

т.е. это уравнение Эйлера. Сделаем замену: $r = e^t$, тогда

$$y(t) = f(r), f'(r) = \frac{y'(t)}{e^t}, f'' = \frac{y''(t) - y'(t)}{e^{2t}}.$$

Подставляем в уравнение (переменные коэффициенты e^t и e^{2t} сократятся):

$$(y''(t) - y'(t)) + y'(t) - 16\cdot y(t) = 8, \Rightarrow y'' - 16\cdot y = 8.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t},$$

но это можно не писать, поскольку нужна всего лишь одна любая функция, т.е. можно считать $C_1 = C_2 = 0$. Частное решение: $y(t) = A$, т.е. $0 - 16A = 8, A = -\frac{1}{2}$. 2 Таким образом:

$$g(r,\varphi) = -\frac{1}{2}\cdot\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

По ходу решения было важно знать вид оператора Лапласа в полярных координатах, алгоритм решения уравнения Эйлера в частности и решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в общем. Ответ в исходной задаче будем искать в виде $u(r,\varphi) = v(r,\varphi) + g(r,\varphi)$, т.е. v будет решением однородного уравнения, и для его поиска применимы формулы для уравнения Лапласа. Подставляем $u = v + g$ в уравнение и в граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{8}{r^2}\cos(4\varphi + \frac{\pi}{6}) = \Delta u = \Delta v + \Delta g, \quad r > 2 \\ \sin^4\varphi = u|_{r=2} = v|_{r=2} + g|_{r=2} = v|_{r=2} - \frac{1}{2}\cos(4\varphi + \frac{\pi}{6}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, \quad r > 2 \\ v|_{r=2} = \sin^4\varphi + \frac{1}{2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

За доведение до этого этапа поставят 1 балл. *В* случае выбора другой неоднородности итоговый ответ вышел бы тем же, но расчеты вышли бы сложнее. 2) На этом этапе можно пользоваться формулами для решения уравнения Лапласа, но для этого надо граничные условия разложить по функциям Фурье. Это заведомо возможно, поскольку функции Фурье образуют базис на отрезке $[0, 2\pi]$, но задачи составляются так, что фактически никакого ряда не будет, поскольку ряд будет сходиться (сумма будет конечной). В контрольной работе метод Фурье используется в 2-3 задачах, и наиболее полно он представлен в смешанной задаче на отрезке, где будет ряд, а в остальных задачах, как здесь, будет конечная сумма. Разложим граничное условие по функциям Фурье. Для этого вспомним формулы понижения степени:

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

откуда

$$\sin^4\varphi = \left(\sin^2\varphi\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} =$$
$$= \frac{1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}}{4} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8}.$$

При этом второе слагаемое в правой части граничного условия $\frac{1}{2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ раскладывать не будем, поскольку её можно включить в функции Фурье (это уменьшит число вычислений). Таким образом, задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r > 2 \\ v|_{r=2} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8} + \frac{1}{2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Учитывая полученное разложение, достаточно искать ответ в виде:

$$v(r,\varphi) = a_0 + \frac{a_2}{r^2}\cos 2\varphi + \frac{a_4}{r^4}\cos 4\varphi + \frac{\tilde{a}_4}{r^4}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Все другие коэффициенты $a_n \equiv 0, b_n \equiv 0$, поэтому их можно не писать. За доведение до этого этапа обычно ставятся 2 балла. 3) Подставляем $v(r,\varphi)$ в граничное условие и находим коэффициенты: $\frac{3}{8} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8} - \frac{1}{2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = v|_{r=2} = a_0 + \frac{a_2}{4}\cos 2\varphi + \frac{a_4}{16}\cdot\cos 4\varphi + \frac{\tilde{a}_4}{16}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$, где равенство верно $\forall\varphi \in [0; 2\pi]$. Поскольку функции Фурье линейно независимы на этом отрезке, то можно приравнять коэффициенты перед соответствующими базисными функциями:

$$\left.\begin{array}{cc} 1: & \frac{3}{8} = a_0 \\ \cos 2\varphi: & -\frac{1}{2} = \frac{a_2}{4} \\ \cos 4\varphi: & \frac{1}{8} = \frac{a_4}{16} \\ \cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right): & \frac{1}{2} = \frac{\tilde{a}_4}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a_0 = \dfrac{3}{8} \\ a_2 = -2 \\ a_4 = 2 \\ \tilde{a}_4 = 8 \end{array}$$

Без ответа могут снизить оценку примерно на 1 балл. Ответ:

$$u(r,\varphi) = -\frac{1}{2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{8} - \frac{2}{r^2}\cos 2\varphi + \frac{2}{r^4}\cos 4\varphi + \frac{8}{r^4}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Задача 2.

$$\begin{cases} \Delta u = 40x, \\ u|_{r=1} = 5\cos\varphi + \cos 2\varphi \qquad 1 < r < 2, r = \sqrt{x^2+y^2}, x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \\ u_r|_{r=2} = -9\cos^2\varphi \end{cases}$$

Решение: 1) Первым делом сведем к однородному уравнению, т.е. находим какое-нибудь решение уравнения без учета граничных условий, т.е. ищем одну из функций $g(x,y) : \Delta g = 40x$, где $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$. Например, $g = \frac{20}{3}x^3$ (Можно было бы взять любую функцию, например, $g = \frac{20}{3}x^3 + 2011y$, но это затруднило бы вычисления). Ищем ответ в виде $u = v + g$, подставляем в уравнение и в граничные условия: 1.1) $\Delta v = 0$ (функция g именно так и подбиралась) 1.2)

$$5\cos\varphi + \cos 2\varphi = u|_{r=1} = v|_{r=1} + g|_{r=1} =$$
$$= /* \text{ переводим в полярные координаты } g(x,y) */ =$$
$$= v|_{r=1} + \frac{20}{3}r^3\cos^3\varphi\Big|_{r=1}$$
$$v|_{r=1} = 5\cos\varphi + \cos 2\varphi - \frac{20}{3}r^3\cos^3\varphi\Big|_{r=1} = 5\cos\varphi + 2\cos 2\varphi - \frac{20}{3}\cos^3\varphi$$

1.3)

$$-9\cos^2\varphi = u_r|_{r=2} = v_r|_{r=2} + g_r|_{r=2} = v_r|_{r=2} + \frac{20}{3}\cdot 3r^2\cos^3\varphi\Big|_{r=2} = v_r|_{r=2} + 20\cdot 4\cdot\cos^3\varphi.$$

Таким образом, задача свелась к:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 1 < r < 2 \\ v|_{r=1} = 5\cos\varphi + \cos 2\varphi - \frac{20}{3}\cos^3\varphi \\ v_r|_{r=2} = -9\cos^2\varphi - 80\cdot\cos^3\varphi \end{cases}$$

2) Раскладываем граничные условия по функциям Фурье. Для тройных углов и кратных степеней тригонометрических функций справедливы тождества:

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\ \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \\ \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \\ \cos^3\varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4} \\ \sin^3\varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4} \end{cases}$$

Таким образом: 1)

$$v|_{r=1} = 5\cos\varphi + \cos 2\varphi - \frac{5}{3}\cos 3\varphi - 5\cos\varphi = \cos 2\varphi - \frac{5}{3}\cos 3\varphi$$

2)

$$v_r|_{r=2} = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\cos 2\varphi - 20\cos 3\varphi - 60\cos\varphi.$$

Заметим, что граничные условия представимы с помощью 4 базисных функций Фурье, т.е. учитывая разложение граничных условий, достаточно искать ответ в виде:

$$v(r,\varphi) = (a_0 + b_0\ln r) + \left(a_1 r + \frac{c_1}{r}\right)\cos\varphi + \left(a_2 r^2 + \frac{c_2}{r^2}\right)\cos 2\varphi + \left(a_3 r^3 + \frac{c_3}{r^3}\right)\cos 3\varphi.$$

Задача после разложения граничных условий имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 1 < r < 2 \\ v|_{r=1} = \cos 2\varphi - \frac{5}{3}\cos 3\varphi \\ v_r|_{r=2} = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\cos 2\varphi - 20\cos 3\varphi - 60\cos\varphi \end{cases}$$

3) Подставляем $v(r,\varphi)$ в граничные условия и ищем коэффициенты:

$$\begin{cases} v|_{r=1} = (a_0 + 0) + (a_1 + c_1)\cos\varphi + (a_2 + c_2)\cos 2\varphi + (a_3 + c_3)\cos 3\varphi \\ v_r|_{r=2} = 0 + \frac{b_0}{2} + \left(a_1 - \frac{c_1}{4}\right)\cos\varphi + \left(4a_2 - \frac{1}{4}c_3\right)\cos 2\varphi + \left(12a_3 - \frac{3}{16}c_3\right)\cos 3\varphi \end{cases}.$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих базисных функциях:

$$\begin{array}{rl} 1: & 1: \begin{cases} 0 = a_0 \\ -\frac{9}{2} = \frac{b_0}{2} \end{cases} \\ \cos\varphi: & \begin{cases} 0 = a_1 + c_1 \\ -60 = a_1 - \frac{c_1}{4} \end{cases} \\ \cos 2\varphi: & \begin{cases} 1 = a_2 + c_2 \\ -\frac{9}{2} = 4a_2 - \frac{c_2}{4} \end{cases} \\ \cos 3\varphi: & \begin{cases} -\frac{5}{3} = a_3 + c_3 \\ -20 = 12a_3 - \frac{3}{16}c_3 \end{cases} \end{array}$$

Откуда находятся коэффициенты:

$$\begin{array}{cc} a_0 = 0, & b_0 = -9 \\ a_1 = -48, & c_1 = 48 \\ a_2 = -1, & c_2 = 2 \\ a_3 = -\frac{5}{3}, & c_3 = 0 \end{array}$$

Ответ:

$$u(r,\varphi) = \frac{20}{3} \cdot r^3 \cdot \cos^3\varphi - 9\ln r + 48\left(-r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \left(-r^2 + \frac{2}{r^2}\right)\cos 2\varphi - \frac{5}{3}r^3\cos 3\varphi$$

Ответы на вопросы: 1) Всегда ли в ответе одна функция? Ответ: бывают случаи, кодда данная задача имеет бесконечно много решений (часто пример такой дают в домашнем задании). Например, задача Неймана в ограниченной области:

$$\begin{cases} \Delta u = f(r,\varphi), \\ u_r|_{r=R} = u_0(\varphi) \end{cases}.$$

В случае задачи Неймана на границе области отслеживается толлько производная функции по направлению нормали. Если бы учитывалась только сама функция, то такая задача называлась бы задачей Дирихле. Задача Неймана имеет бесконечно много решений, посколъку если и - ответ, то $u + C$ - ответ $\forall C \in \mathbb{R}$. B неораниченной области так бы не вышло. B контрольной такие задачи бывают. Принципиально ход решения это не меняет. В ходе решения при поиске коэффициентов выйдет выражение типа а $a_0 \cdot 0 = 0$ $\Rightarrow a_0$ - любое.

B-17.4

Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(x), \quad x_3 > 0; \quad u|_{x_3=0} = u_0(x),$$

для следующих f и u_0:

1) f, u_0 - непрерывны и ограничены;
2) $f = 0, \quad u_0 = \cos x_1 \cos x_2$
3) $f = e^{-x_3}\sin x_1 \cos x_2, \quad u_0 = 0;$

4)$f = 0$, $u_0 = \theta(x_2 - x_1)$; 5) $f = 0$, $u_0 = \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-1/2}$ 6) $f = 2\left[x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2\right]^{-2}$, $u_0 = \left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-1}$ 7) $f = 0$, $u_0 = \begin{cases} -1, & x_1 < 0 \\ +1, & x_1 > 0 \end{cases}$

B-17.5

Найти решение задачи Дирихле $\Delta u = 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad u|_S = u_0(x)$ u_0- кусочно непрерывна и ограничена.

B-17.6

Решить задачу 17.5 со следующими u_0:

1) $u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = e^{-4x_1}\sin 5x_2;$
2) $u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = x_2\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-3/2};$
3) $u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = \theta(x_2 - |x_1|).$

B-17.7

Найти решение задачи Дирихле для шара $|x| < R$: $\Delta u = -f(x), \quad |x| < R, \quad u|_{|x|=r} = u_0(x).$

В-17.8

Решить задачу 17.7 для следуюших f и u_0:
1) $f = a = \text{const}, \quad u_0 = 0;$
2) $f = |x|^n, n = 0, 1, 2, \ldots, \quad u_0 = a;$
3) $f = e^{|x|}, \quad u_0 = 0.$

В-17.9

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для полушара $|x| < R, x_3 > 0$.

В-17.10

Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -f(|x|), f \in \in C(a \leq |x| \leq b)$ в шаровом слое $a < |x| < b$, удовлетворяющее краевым условиям $\left.u\right|_{|x|=a} = 1, \quad \left.u\right|_{|x|=b} = 0$.

Функииией Грика задачи Дирихле дяя области $G \subset R^2$ являemcs

$$\mathscr{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g(z, \zeta)$$

где $z = x + iy \in \bar{G}, \zeta = \xi + i\eta \in G.\mathscr{G}(z, \zeta)$ обладает всеми свойствами функции Грина в R^3 (см. начало §17). Решение задачи Дирихле $\Delta u = -f(z), z \in G; \left.u\right|_S = u_0(z)$ в R^2 (если оно существует) определяется формулой, соответствующей формуле (1) в R^2. В случае, когда область G - односвязная с достаточно гладкой границей S и известна некоторая функция $w = w(z)$, конформно отображающая G на единичный круг $|w| < 1$, функция Грина находится по формуле

$$\mathscr{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\omega(z, \zeta)|}, \quad \omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)w(\zeta)}$$

В-17.11

Найти функцию Грина для областей:
1) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$;
2) четверть плоскости $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$;
3) круг $|z| < R$;
4)полукруг $|z| < R, \operatorname{Im} z > 0$; 5) четверть круга $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$; 6) полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$; 7) полуполоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0$.

В-17.12

Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad \left.u\right|_{y=0} = u_0(x)$$

для следующих $u_0(x)$:
1) $u_0(x)$ кусочно непрерывна и ограничена;
2) $u_0(x) = \theta(x - a)$
3) $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \bar{\epsilon} [a, b] \end{cases}$
4)$u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 5) $u_0(x) = \frac{x}{1+x^2}$; 6) $u_0(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ 7) $u_0(x) = \cos x$.

В-17.13

Найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в первом квадранте $x > 0, y > 0$ со следующими краевыми условиями:
1) $\left.u\right|_S = u_0(x, y)$ - кусочно непрерывная, ограниченная функция, где S состоит из полупрямых $\{x = 0, y \geq 0\}$ и $\{y = 0, x \geq 0\}$;
2) $\left.u\right|_{x=0} = 0, \quad \left.u\right|_{y=0} = 1$; 3) $\left.u\right|_{x=0} = a, \quad \left.u\right|_{y=0} = b$;
4) $\left.u\right|_{x=0} = 0, \quad \left.u\right|_{y=0} = \theta(x - 1)$; 5) $\left.u\right|_{x=0} = 0, \quad \left.u\right|_{y=0} = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ 6) $\left.u\right|_{x=0} = \sin y, \quad \left.u\right|_{y=0} = \sin x$.

В-17.14

Найти решение задачи Дирихле для уравнения $\Delta u = 0$, $0 < y < \pi$ со следуюшими краевыми условиями: известна некоторая функция $w = w(z)$, конформно отображающая G на единичный круг $|w| < 1$, функция Грина находится по формуле

$$\mathscr{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\omega(z, \zeta)|}, \quad \omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)w(\zeta)}$$

В-17.15

Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полуполосе $0 < y < \pi, x > 0$, со следующими краевыми условиями: 210 Гя. V. Краевве эадачи дяя уравкекий эялиптического muna
1) $u|_{x=0} = 1, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0$;
2) $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \sin x, \quad u|_{y=\pi} = 0$;
3) $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \operatorname{th} x, \quad u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x$;
4) $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x$.

В-17.16

Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -f(z)$ в круге $|z| < R$ при краевом условии $u|_{|z|=r} = u_0(z)$ для следующих f и u_0:
1) f, u_0 - непрерывные функции;
2) $f = a, \quad u_0 = b$;
3) $f = |z|^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad u_0 = 0$;
4) $f = \sin |z|, \quad u_0 = 0$; 5) $f = 0, \quad u_0 = \cos\varphi$, где $\varphi = \arg z, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$.

В-17.17

Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полукруге $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$, при условии $u|_S = u_0(z)$, где S - граница полукруга, для следующих $u_0(z)$:
1) $u_0(z)-$ кусочно непрерывная функция;
2) $u_0|_{r=1} = \sin\varphi, \quad u_0|_{\varphi=0} = 0, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 0, \quad$ где $r = |z|, \varphi = \arg z, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$
3) $u_0|_{r=1} = 0, \quad u_0|_{\varphi=0} = 1, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 1$;
4) $u_0|_{r=1} = \cos\frac{\varphi}{2}, \quad u_0|_{\varphi=0} = \sqrt{r}, \quad u_0|_{\varphi=\pi} = 0$.

В-17.18

Найти решение задачи Дирихле $\Delta u = 0, \operatorname{Re} z > 0, |z-5| > 3$; $u|_{\operatorname{Re} z=0} = 0, u|_{|z-5|=3} = 1$.

15.3.5 Задачи на Метод потенциалов

В-18.1

Пусть ρ - абсолютно интегрируемая функция, $\rho = 0$ вне $\bar{G} \subset R^n$. Доказать: а) объемный потенциал выражается формулой

$$V_n(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad n \ge 3;$$

б) V_n - гармоническая функция вне $\bar{G}$; в) $V_3(x) = \frac{1}{|x|}\int_G \rho(y)dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \to \infty$. Выяснить физический смысл этих потенциалов.

В-18.2

Пусть ρ - абсолютно интегрируемая функция, $\rho = 0$ вне $\bar{G} \subset R^2$. Доказать: а) потенциал площади выражается формулой

$$V_2(x) = \int_G \rho(y) \ln\frac{1}{|x-y|} dy;$$

б) V_2 - гармоническая функция вне $\bar{G}$; в) $V_2(x) = \ln\frac{1}{|x|}\int_G \rho(y)dy + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty$. Выяснить физический смысл этих потенциалов.

В-18.3

Пусть S - ограниченная кусочно гладкая двусторонняя поверхность и $\mu, \nu \in C(S)$. Доказать: а) потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$V_3^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y,$$

$$V_3^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|} dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y$$

где угол φ_{xy} определен в начале §18; б) $V_3^{(0)}$ и $V_3^{(1)}$ - гармонические функции вне S; в) $V_3^{(0)}(x) = \frac{1}{|x|}\int_S \mu(y)dS + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ и $V_3^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), |x| \to \infty$. Выяснить физический смысл этих потенциалов.

B-18.4

Пусть S - ограниченная кусочно гладкая кривая и $\mu, \nu \in \in C(S)$. Доказать: а) логарифмические потенциалы простого и двойного слоя выражаются формулами

$$V_2^{(0)}(x) = \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y$$
$$V_2^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|} dS_y,$$

где угол φ_{xy} определен в тексте; б) $V_2^{(0)}$ и $V_2^{(1)}$ - гармонические функции вне S; в) $V_2^{(0)}(x) = \ln \frac{1}{|x|}\int_S \mu(\zeta)ds + O\left(\frac{1}{|x|}\right), V_2^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \longrightarrow \infty$. Выяснить физический смысл этих потенциалов.

B-18.5

1) Вычислить ньютонов потенциал V_3 с плотностью δ_{S_r};
2) вычислить логарифмический потенциал V_2 с плотностью δ_{S_r}.

B-18.6

Вычислить объемный потенциал V_3 для шара $|x| < R$ со следующими плотностями:
1) $\rho = \rho(|x|) \in C$
2) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$;
3) $\rho = |x|$;
4)$\rho = |x|^2$; 5) $\rho = \sqrt{|x|}$ 6) $\rho = e^{-|x|}$ 7) $\rho = \frac{1}{1+|x|^2}$ 8) $\rho = \sin|x|$ 9) $\rho = \cos|x|$

B-18.10

Найти потенциал площади для круга $r < R$ со следующими плотностями:
1) $\rho = \rho(r) \in C([0, R])$;
2) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$;
3) $\rho = r$;
4)$\rho = r^2$; 5) $\rho = e^{-r}$; 6) $\rho = \frac{1}{1+r^2}$ 7) $\rho = \sqrt{r}$; 8) $\rho = \sin r$; 9) $\rho = \cos r$ 10) $\rho = \sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$; 11) $\rho = \cos\varphi$; 12) $\rho = \rho(\varphi)$ - непрерывная, 2π-периодическая функция.

B-18.11

Найти логарифмический потенциал площади для кольца $R_1 < r < R_2$ со следующими плотностями:
1) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$;
2) $\rho = \rho(r) \in C\left([R_1, R_2]\right)$.

B-18.12

Пусть $f(|y|)$ непрерывна при $|y| \le R$ и $f(|y|) = 0$ при $|y| > R, y \in R^3$. Доказать: а) объемный потенциал $V_3(x)$ с плотностью $f(|y|)$ зависит только от $|x|$ и

$$V_3(x) = \frac{1}{|x|}\int_{|y|<r} f(|y|)dy, \quad |x| > R;$$

б) для того чтобы $V_3(x)$ обратился в нуль при $|x| > R$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int f(|y|)dy = 0$$

в) при условии (*) справедливо равенство

$$\int V_3(x)dx = -\frac{2\pi}{3}\int f(|y|)|y|^2 dy.$$

Дать физическую интерпретацию полученных равенств.

B-18.13

Доказать: если функции $f_1(x)$ и $f_2(|x|)$ непрерывны при $|x| \le R; x \in R^3$, обращаются в нуль при $|x| > R$ и удовлетворяют уравнению

$$\Delta f_1(x) = D^\alpha f_2(|x|),$$

то потенциал $V_3(x)$ с плотностью $f_2(|x|)$ обращается в нуль при $|x| > R$.

B-18.14

Доказать результаты, аналогичные результатам задач 18.12 и 18.14 для потенциала площади, а именно:

1) $V_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} \int_{|y|<r} f(|y|)dy, |y| > R$;

2) $\int V_2(x)dx = -\frac{\pi}{2} \int f(|y|)|y|^2 dy$, если $\int f(|y|)dy = 0$.

B-18.15

Распространить задачи 18.12-18.14 на случай, когда плотность f есть обобщенная функция. Под «интегралом» $\int f(x)dx$ для финитной $f \in \mathscr{D}'$ следует понимать число (f, η), где $\eta \in \mathscr{D}, \eta \equiv 1$ В окрестности носителя f (это число не зависит от выбора вспомогательной функции η).

B-18.16

Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере $|x| = R$.

B-18.17

В точке, лежащей на оси $\theta = 0 (0 \le \theta \le \pi)$, найти потенциал простого слоя, распределенного на сфере $r = R$ со следующими плотностями:

1) μ пропорциональна квадрату расстояния от плоскости $\theta = \pi/2$;

2) $\mu = \sin \frac{\theta}{2}$;

3) $\mu = e^\varphi, 0 \le \varphi \le \pi$, и $\mu = e^{2\pi - \varphi}, \pi \le \varphi < 2\pi$.

B-18.18

На круглом диске радиуса R распределен простой слой с плотностью μ. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска для следующих плотностей:

1) $\mu = \mu_0 = \text{const}$;

2) $\mu = r$;

3) $\mu = r^2$;

4)$\mu = \mu(\varphi)$ - непрерывная 2π-периодическая функция.

B-18.19

Найти потенциал простого слоя, распределенного с плотностью μ на цилиндре

$$\left\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \le x_3 \le H\right\}$$

в точке, лежащей на оси x_3 для следующих плотностей:

1) $\mu = \mu_0 = \text{const}$;

2) $\mu = \mu(\varphi)$ - непрерывная 2π-периодическая функция.

B-18.20

Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью ν_0 для сферы $|x| = R$.

B-18.21

На сфере $r = R$ распределены диполи с плотностью момента ν, ориентированные вдоль внешней нормали. Найти потенциал двойного слоя в точке оси $\theta = 0 (0 \le \theta \le \pi)$, для следующих плотностей:

1) $\nu = \cos \theta$;

2) $\nu = \sin \frac{\theta}{2}$;

3) $\nu = e^\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi$, и $\nu = e^{2\pi - \varphi}, \pi \le \varphi < 2\pi$;

4)$\nu = \nu(\varphi)$ - непрерывная 2π-периодическая функция; 5) ν равна квадрату расстояния от плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$.

В-18.22

На круглом диске радиуса R распределены диполи с плотностью момента ν, ориентированные вдоль нормали, направленной в сторону отрицательных x_3. Найти потенциал двойного слоя в точке, лежашей на оси диска, для следующих плотностей:
1) $\nu = \text{const}$;
2) $\nu = \nu(r) \in C([0, R])$;
3) $\nu = \nu(\varphi)$ - непрерывная, 2π-периодическая функция;
4)$\nu = r + \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$, и $\nu = r + 2\pi - \varphi, \pi \leq \varphi < 2\pi$.

В-18.23

Найти логарифмический потенциал простого слоя для окружности радиуса R со следующими плотностями:
1) $\mu = \mu_0 = \text{const}$;
2) $\mu = \cos^2 \varphi, \quad R = 2$.

В-18.24

Найти логарифмический потенциал двойного слоя для окружности радиуса R со следующими плотностями:
1) $\nu = \text{const}$;
2) $\nu = \sin \varphi$.

В-18.25

Найти логарифмический потенциал простого слоя для отрезка $-a \leq x \leq a, y = 0$ со следующими плотностями:
1) $\mu = \text{const}$;
2) $\mu = -\mu_0, -a \leq x < 0$, и $\mu = \mu_0, 0 < x \leq a$;

В-18.26

Найти логарифмический потенциал двойного слоя для отрезка $-a \leq x \leq a, y = 0$ со следующими плотностями:
1) $\nu = \text{const}$;
2) $\nu = -\nu_0, -a \leq x < 0$, и $\nu = \nu_0, 0 < x \leq a$;
3) $\nu = x$
4)$\nu = x^2$. Пусть $\rho(x)$ - финитная обобщенная функция. Свертки $V = -4\pi\mathscr{E} * \rho$ и $\bar{V} = -4\pi\bar{E} * \rho$, где

$$\mathscr{E} = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \overline{\mathscr{E}} = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$$

- фундаментальные решения оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ в R^3, являются аналогами ньютонова потенциала. Потенциалы V и $\bar{V}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = -4\pi\rho$.

Так же определяются аналоги потенциалов простого и двойного слоев.

То же для оператора $\Delta - k^2$. Здесь аналогом ньютонова потенциала является $V_* = -4\pi\mathscr{E}_* * \rho$, где $\mathscr{E}_* = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$– фундаментальное решение оператора $\Delta - k^2$ в R^3.

В-18.27

Пусть ρ - абсолютно интегрируемая функция и $\rho(x) = 0$, $x \in G_1 = R^3 \backslash \bar{G}$. Доказать:
1) $V, \bar{V}$ и V_* выражаются формулами

$$V(x) = \int_G \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\rho(y)dy, \quad \bar{V}(x) = \int_G \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\rho(y)dy$$
$$V_*(x) = \int_G \frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|}\rho(y)dy$$

2) $V, \vec{V}$ и $V_* \subset C^1\left(R^3\right) \cap C^\infty\left(G_1\right)$ удовлетворяют в области G_1 однородным уравнениям $\Delta u + k^2 u = 0$ и $\Delta u - k^2 u = 0$ соответственно;
3) V и $\bar{V}$ удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$u(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial|x|} \mp iku(x) = o\left(|x|^{-1}\right)$$
$$|x| \longrightarrow \infty \quad \text{и} \quad V_*(x) \to 0, \quad |x| \longrightarrow \infty.$$

В-18.28

Для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал V для шара $|x| < R$ со следующими плотностями:
1) $\rho = \rho(|x|) \in C\left(\bar{U}_r\right)$
2) $\rho = \rho_0 = \text{const}$;
3) $\rho = e^{-|x|}$.

В-18.29

Для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал V для сферического слоя $R_1 < |x| < R_2$ с постоянной плотностью ρ_0.

В-18.30

1) Для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал простого слоя $V^{(0)}$, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере;

2) для оператора $\Delta + k^2$ вычислить потенциал двойного слоя $V^{(1)}$, распределенного с постоянной плотностью ν_0 на сфере.

В-18.31

Для оператора $\Delta - k^2$ вычислить потенциал V_* для шара $r < R$ со следующими плотностями:
1) $\rho = \rho(|x|) \in C\left(\bar{U}_r\right)$
2) $\rho = \rho_0 = \text{const}$;
3) $\rho = e^{-|x|}$.

В-18.32

1) Для оператора $\Delta - k^2$ вычислить потенциал простого слоя $V_*^{(0)}$, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере;

2) для оператора $\Delta - k^2$ вычислить потенциал двойного слоя $V_*^{(1)}$, распределенного с постоянной плотностью ν_0 на сфере.

В-18.33

1) Предполагая границу S области $G \subset R^3$ поверхностью Ляпунова, доказать, что

$$V_3^{(1)}(x) = \int_S \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ -2\pi, & x \in S \\ 0, & x \in R^3 \backslash \vec{G}, \end{cases}$$

где угол φ_{xy} определен в начале параграфа;

2) предполагая границу S области $G \subset R^2$ кривой Ляпунова, доказать, что

$$V_2^{(1)}(x) = \int_S \frac{\cos\varphi_{xy}}{|x-y|} dS_y = \begin{cases} -2\pi, & x \in G \\ -\pi, & x \in S \\ 0, & x \in R^2 \backslash \bar{G} \end{cases}$$

В-18.37

Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра $0 \le r < R$ при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью $f(r,\varphi)$ и на границе $r = R$ поддерживается температура $u_0^-(R,\varphi)$ для следующих f и u_0^-:
1) $f = f_0 = \text{const}$, $u_0^- = 0$;
2) $f = r$, $\quad u_0^- = 0$;
3) $f = r^2$, $\quad u_0^- = a$;
4)$f = e^{-r}$, $\quad u_0^- = \sin\varphi$; 5) $f = \sin r$, $\quad u_0^- = \cos\varphi$; 7) $f = \cos\varphi$, $\quad u_0^- = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$. 6) $f = \sin\varphi$, $\quad u_0^- = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$;

В-18.38

С помощью потенциала простого слоя решить задачу Неймана для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

В-18.39

Найти плотность диффундирующего вещества при стационарном процессе $U(r, \varphi, z)$ внутри и вне бесконечного цилиндра радиуса R при условии, что источники вещества отсутствуют и коэффициент диффузии $D = \text{const}$, а на границе поддерживается заданный поток диффузии u_1 для следующих u_1:

1) $u_1 = \text{const}$;
2) $u_1 = \sin\varphi$
3) $u_1 = \cos\varphi$.

В-18.40

Найти стационарное распределение температуры внутри неограниченного круглого цилиндра радиуса R при условии, что в цилиндре выделяется тепло с плотностью $f(r, \varphi)$ и на границе поддерживается заданный поток тепла $u_1^-(R, \varphi)$ для следующих f и u_1^-:

1) $f = f_0 = \text{const}, \quad u_1^- = -\frac{f_0 r}{2k}$;
2) $f = r, \quad u_1^- = -\frac{R^3}{3}, \quad$ коэффициент теплопроводности $k = 1$;
3) $f = \frac{1}{1+r^2}, \quad u_1^- = \frac{\ln\left(1+R^2\right)}{r}, \quad k = 1$;
4)$f = \sin\varphi, \quad u_1^- = \sin\varphi, \quad k = 1$; 5) $f = \cos\varphi, \quad u_1^- = \cos\varphi, \quad k = 1$.

В-18.42

Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла при условии, что его граница заряжена до потенциала $V_0 = \text{const}$ для следующих случаев:

1) $x > 0, y > 0, -\infty < z < \infty$
2) $0 < \varphi < \varphi_0, \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, 0 \leq r < \infty$.

В-18.43

С помошью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$.

В-18.44

Найти стационарное распределение температуры в шаре $r < R$ при условии, что в шаре выделяется тепло с плотностью f и на границе $r = R$ поддерживается температура u_0^- для следующих f и u_0^-:

1) $f = f_0 = \text{const}, \quad u_0^- = 0$;
2) $f = r, \quad u_0^- = a$;
3) $f = \sqrt{r}, \quad u_0^- = \frac{2}{7}R^{5/2}, \quad k = 1$.

В-18.45

Доказать, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара $r < R$ определяется формулой

$$U(r, \theta, \varphi) = -R\int_0^r u(\rho, \theta, \varphi)\frac{d\rho}{\rho}$$

где u - интеграл Пуассона для шара, т. е.

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{r}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_0^-\left(R, \theta_1, \varphi_1\right)\frac{R^2 - \rho^2}{\left(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\gamma\right)^{3/2}}\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

где γ - угол между радиусами-векторами точек (ρ, θ, φ) и (R, θ_1, φ_1) и $u_0^- = \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{r=r} = u|_{\rho=r}$.

Указ а н и е. Доказать, что если $u(\rho, \theta, \varphi), u(0) = 0$ - гармоническая функция в области, содержащей начало координат, то и функция $U(r, \theta, \varphi) = -R\int_0^r u(\rho, \theta, \varphi)\frac{d\rho}{\rho}$ является гармонической. Далее воспользоваться условием разрешимости задачи, а именно $\int_{r=r} u_0^- dS = 0$.

В-18.42

Найти распределение потенциала электростатического поля внутри двугранного угла при условии, что его граница заряжена до потенциала $V_0 = \text{const}$ для следующих случаев:

1) $x > 0, y > 0, -\infty < z < \infty$
2) $0 < \varphi < \varphi_0, \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, 0 \leq r < \infty$.

В-18.43

С помошью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$.

В-18.44

Найти стационарное распределение температуры в шаре $r < R$ при условии, что в шаре выделяется тепло с плотностью f и на границе $r = R$ поддерживается температура u_0^- для следующих f и u_0^-:
1) $f = f_0 = \text{const}, \quad u_0^- = 0$;
2) $f = r, \quad u_0^- = a$;
3) $f = \sqrt{r}, \quad u_0^- = \frac{2}{7} R^{5/2}, \quad k = 1$.

В-18.45

Доказать, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа для шара $r < R$ определяется формулой

$$U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho}$$

где u - интеграл Пуассона для шара, т. е.

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_0^- \left(R, \theta_1, \varphi_1\right) \frac{R^2 - \rho^2}{\left(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\gamma\right)^{3/2}} \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

где γ - угол между радиусами-векторами точек (ρ, θ, φ) и (R, θ_1, φ_1) и $u_0^- = \frac{\partial U}{\partial n}\big|_{r=r} = u|_{\rho=r}$.

Указ а н и е. Доказать, что если $u(\rho, \theta, \varphi), u(0) = 0$ - гармоническая функция в области, содержащей начало координат, то и функция $U(r, \theta, \varphi) = -R \int_0^r u(\rho, \theta, \varphi) \frac{d\rho}{\rho}$ является гармонической. Далее воспользоваться условием разрешимости задачи, а именно $\int_{r=r} u_0^- dS = 0$.

В-18.56

Решить задачу

$$\Delta u - k^2 u = -f(x), \quad u|_{|x|=r} = u_0^-(x)$$

внутри сферы $|x| = R$ для следующих f и u_0^-:
1) $f = f_0 = \text{const}$, $u_0^- = 0$, $k = R = 1$
2) $f = 1$, $u_0^- = 1 - 2e^{-1} \operatorname{sh} 1$, $k = R = 1$.

В-18.57

Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного цилиндра радиуса R, если на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация u_0.

15.3.6 Задачи на Вариационные методы

(потом в 1 ч укажу их важность, краснок что-то говорил, я вообще хз, чего они важны?)

В-19.1

Пусть $u(x)$ - классическое решение задачи (1), (I). Показать, что если $u \in C^1(\bar{Q})$, то $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (I).

В-19.2

Пусть $u(x)$ - классическое решение задачи (1), (III) (или (II)). Показать, что если $u \in C^1(\bar{Q})$, то $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (III) (или (II)).

В-19.3

Если $u(x)$ - обобщенное решение задачи (1), (I) и $u \in \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, то $u(x)$ является классическим решением этой задачи.

B-19.4

Если $u(x)$ - обобщенное решение задачи (1), (III) (или (II)) и $u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$, то $u(x)$ является классическим решением этой задачи.

B-19.5

Доказать единственность обобщенного решения задачи (1), (I) при $g = 0$.

B-19.6

Показать, что если функция g является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$ (в частности, $g \in C^1(\Gamma)\big)$, то обобщенное решение задачи (1), (I) существует.

B-19.7

Пусть в области Q задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(x)u = f(x),$$

где $p \in C^1(\bar{Q}), \min p(x) = p_0 > 0, q \in C(\bar{Q}), f \in L_2(Q)$. Принадлежащая пространству $H^1(Q)$ функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи (4), (I), если при всех $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1 (Q)$ она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q (p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + quv) dx = \int_Q fvdx$$

и след ее на Γ равен g. Доказать, что принадлежащее $H^1(Q)$ классическое решение задачи (4), (I) является обобщенныт.

B-19.8

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (4), (I) при $q \geq 0$.
Ук а з ан и е. Воспользоваться результатом задачи 4.106.

B-19.9

Пусть в области Q задано эллиптическое уравнение

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q(x)u = f(x)$$

где вещественные функции $p_{ij} \in C^1(\bar{Q}), p_{ij}(x) = p_{ji}(x)(i, j = 1, \ldots, n)$ и для всех $x \in \bar{Q}$ и любых вещественных $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ справедливо неравенство $\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma_0|\xi|^2$ с постоянной $\gamma_0 > 0, q \in C(\bar{Q})$, $f \in L_2(Q)$. Принадлежащая пространству $H^1(Q)$ функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи (5), (I), если при всех $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1 (Q)$ она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left(\sum p_{ij}(x) u_{x_i v_{x_j}} + quv \right) dx = \int_Q fvdx$$

и ее след на Γ равен g. Доказать, что принадлежашее $H^1(Q)$ классическое решение задачи (5), (I) является обобщенным.

B-19.10

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (5), (I), если $q \geq 0$. У к а з а н и е. Воспользоваться результатом задачи 4.112.

B-19.11

Обобщенным решением задачи (4), (III) (или (II)) называется принадлежашая $H^1(Q)$ функция $u(x)$, удовлетворяющая при всех $v(x) \in\in H^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\int_Q (p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + quv) dx + \int_\Gamma p\sigma uvds = \int_Q fvdx + \int_\Gamma pgvds.$$

Доказать, что принадлежащее $C^1(\bar{Q})$ классическое решение задачи (4), (III) (или (II)) является обобщенным.

B-19.12

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (4), (III) (или (II)) в предположении, что $f \in L_2(Q)$, $g \in L_2(\Gamma), \sigma(x) \geq 0$ на $\Gamma, q(x) \geq 0$ в Q, причем либо $\sigma(x) \not\equiv 0$, либо $q(x) \not\equiv 0$.

У к аз а н и е. Воспользоваться результатом задачи 4.117.

B-19.13

Пусть $\tilde{l}_2(Q)$ и $\widetilde{H}^1(Q)$ - подпространства пространств $L_2(Q)$ и $H^1(Q)$, состоящие из тех функций из $L_2(Q)$ и $H^1(Q)$ соответственно, для которых $\int_Q f dx = 0$. Доказать, что при $g(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0, f \in \widetilde{l}_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи (4), (II), принадлежащее $\widetilde{H}^1(Q)$.

Ук аз а н и е. Воспользоваться результатом задачи 4.121.

B-19.14

Рассмотрим при $f \in L_2(Q)$ функционал

$$E_1(v) = \int_Q (\operatorname{grad} v)^2 dx - 2\int_Q fv dx$$

на множестве функций $v \in H^1(Q)$, для которых $v|_\Gamma = g$, где функция $g(x)$ является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $E(v)$ достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (1), (I).

B-19.15

Рассмотрим при $f \in L_2(Q), p \in C(\bar{Q}), q \in C(\bar{Q}), \min p(x) = p_0 > 0, q(x) \geq 0$ функционал

$$E_1(v) = \int_Q p|\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_Q q(x)v^2 dx - 2\int_Q fv dx$$

на множестве функций $v \in H^1(Q)$, для которых $v|_\Gamma = g$, где функция $g(x)$ является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (4), (I). че

B-19.9

Рассмотрим функционал

$$E_2(v) = \int_Q \left[\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\right] dx + \int_Q qv^2 dx - 2\int_Q fv dx$$

на множестве функций $v \in H^1(Q)$, для которых $v|_\Gamma = g$, где функция $g(x)$ является следом на Γ некоторой функции из $H^1(Q)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $E_2(v)$ достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (5), (I).

B-19.17

Рассмотрим при $f \in L_2(Q), g(x) \in L_2(\Gamma), \sigma \in C(\Gamma), \sigma \geq 0$ на $\Gamma, \sigma(x) \not\equiv 0$, функционал

$$\tilde{E}_1(v) = \int_Q |\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_\Gamma \sigma v^2 dS - 2\int_Q fv dx - 2\int_\Gamma gv dS, \quad v \in H^1(Q).$$

Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $\widetilde{E}_1(v)$ достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (1), (III).

B-19.18

Пусть $f \in L_2(Q), g(x) \in L_2(\Gamma), p \in C(\bar{Q}), q \in C(\bar{Q}), \sigma \in C(\Gamma)$, $\min p(x) = p_0 > 0, q(x) \geq 0, \sigma(x) \geq 0$ и или $q(x) \not\equiv 0$, или $\sigma(x) \not\equiv 0$. Рассмотрим на $H^1(Q)$ функционал

$$E_2(v) = \int_Q p|\operatorname{grad} v|^2 dx + \int_Q qv^2 dx + \int_\Gamma \sigma p v^2 dS - 2\int_Q fv dx - 2\int_\Gamma pgv dS.$$

Показать, что функция $u(x)$, на которой этот функционал достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи (4), (III) (или (II)). У к а з а н и е. См. задачу 4.117.

B-19.19

Рассмотрим при $f \in \tilde{l}_2(Q), \int_Q f dx = 0, p \in C(\bar{Q}), \min p(x) = p_0 > 0$ функционал

$$E_1(v) = \int_Q p|\operatorname{grad} v|^2 dx - 2\int_Q f v dx$$

237 на подпространстве $\widetilde{H}^1(Q)$ (определения множеств $\tilde{l}_2(Q)$ и $\widetilde{H}^1(Q)$ см. в задаче 19.13; см. также задачи 4.118-4.120) пространства $H^1(Q)$. Показать, что функция $u \in \widetilde{H}^1(Q)$, на которой этот функционал достигает минимума, есть обобщенное решение задачи (4), (II).

B-19.20

Найти функцию v_0, реализующую минимум функционала $\int_0^1 \left(v'^2 + v^2\right) dx + 2\int_0^1 v dx$ в классе $\overset{\circ}{H}{}^1\ (0,1)$

B-19.21

Доказать, что для всех $v \in C^1([0,1])$ справедливо неравенство $\int_0^1 \left(v'^2 + 2xv\right) dx + v^2(0) + v^2(1) \geq -\frac{41}{270}$. Имеет ли место знак равенства для какой-либо функции?

B-19.22

Доказать, что для всех функций $v \in C^1[0,1], v(1) = 0$ имеет место неравенство $\int_0^1 v dx \leq \frac{5}{24} + \frac{v^2(0)}{4} + \frac{1}{4}\int_0^1 v'^2{}^2 dx$. Найти функцию из этого класса, для которой достигается равенство. $= \{0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi\}$

B-19.24

Найти $\inf_{v \in \dot{H}^1(|x|<1)} \left\{\int_{|x|<1} \left[(\operatorname{grad} v)^2 + 2|x|^2 v\right] dx\right\}$, где $x = (x_1, x_2)$.

B-19.25

Найти $\inf_{v \in H^1(|x|<1)} \int_{|x|<1} |\operatorname{grad} v|^2 dx$, где $x = (x_1, x_2), x_1 = |x| \cos\varphi, \quad x_2 = |x| \sin\varphi, \quad v|_{|x|=1} = \varphi(\pi - \varphi)(2\pi - \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

B-19.26

Найти $\inf \int_{|x|<1} |\operatorname{grad} v|^2 dx$ на множестве функций $v \in \in H^1(|x| < 1), x = (x_1, x_2), x_1 = |x| \cos\varphi, x_2 = |x| \sin\varphi$, удовлетворяющих условию $v|_{|x|=1} = \varphi^2, -\pi < \varphi \leq \pi$.

B-19.27

Может ли заданная на окружности $|x| = 1, x_1 = \cos\varphi$, $x_2 = \sin\varphi$, функция $\psi(\varphi)$ быть граничным значением какой-либо функции из $H^1(|x| < 1)$, если: а) $\psi(\varphi) = \operatorname{sign}\varphi, -\pi < \varphi \leq \pi$; б) $\psi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^{2n}\varphi$; в) $\psi(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^4\varphi}{n^5}$.

B-19.28

Пусть Q —кадрат $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$. Доказать, что для любой $f \in \overset{\circ}{H}{}^1\ (Q)$ имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq \frac{1}{2\pi^2}\int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx$$

и установить, что постоянная в неравенстве точная.

B-19.29

Пусть Q - куб $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$. Доказать, что для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^1\ (Q)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{3\pi^2}\|\operatorname{grad} f\|_{L_2}^2.$$

B-19.30

Пусть Q - кольцо $\{1 < |x| < 2\}$. Найти

$$\inf_{f\in H^1(Q)\, f|_{|x|=1}=0} \left\{ \int_{1<|x|<2} \left[(\operatorname{grad} f)^2 + 4f \right] dx + \int_{|x|=2} f^2 ds \right\}, \quad x = (x_1, x_2)\,.$$

B-19.31

Пусть Q - квадрат $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$. Найти функцию, дающую минимум функционалу

$$\inf_{u\in H^1} \left\{ \int_Q \left[(\operatorname{grad} u)^2 + 4\sin x_1 \sin x_2 u \right] dx + 2\int_0^\pi \sin x_1 u\,(x_1, \pi)\, dx_1 \right\}$$

в классе функций $u \in H^1(Q)$, $u|_{x_2=0} = u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = 0$.

B-19.32

Пусть $Q-$ круг $\{|x| < 1\}, x = (x_1, x_2)$. Доказать, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}\,(Q)$ справедливо неравенство

$$\|u\|^2_{L_2} \le \frac{1}{2\pi^2} \|\operatorname{grad} u\|^2_{L_2}.$$

B-19.33

Доказать, что для всех функций $u \in C^1\,(0 < x_1 < 1, 0 < \ < x_2 < 1)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = 0, \quad u|_{x_1=1} = x_2, \quad u|_{x_2=1} = x_1,$$

справедливо неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 (\operatorname{grad} u)^2 dx_1 dx_2 \ge \frac{2}{3}$$

Имеет ли место равенство для какой-нибудь из этих функций?

B-19.34

Доказать, что для всех функций $u \in \overset{\circ}{C}{}^1\,(|x| < 1), x = (x_1, x_2)$ имеет место неравенство

$$2\int_{|x|<1} x_1 x_2 u(x) dx \le \frac{\pi}{1152} + \int_{|x|<1} (\operatorname{grad} u)^2 dx$$

B-19.35

Доказать, что для всех функций $u \in \overset{\circ}{C}{}^1\,(|x| < 1), x = (x_1, x_2, x_3)$ имеет место неравенство

$$\int_{|x|<1} \left[(\operatorname{grad} u)^2 + u \right] dx \ge -\frac{\pi}{45}$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций? $\oint$ 19. Вариачионкые методы 239

B-19.36

Показать, что для всех функций $v \in C^1(|x| \le 1), x_1 = |x|\cos\varphi, x_2 = |x|\sin\varphi$, удовлетворяющих условию $v|_{|x|=1} = \sin\varphi$, где $x = (x_1, x_2)$, справедливо неравенство

$$\int_{|x|<1} \left[2|x|^2 v + (\operatorname{grad} v)^2 \right] dx \ge \frac{63}{64}\pi$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

B-19.37

Доказать, что для всех функций $u \in C^1\left(0<x_1<1,0< \ <x_2<1,0<x_3<1\right), x=\left(x_1, x_2, x_3\right)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.u\right|_{x_1=0}=x_2 x_3, \quad \left.u\right|_{x_2=0}=x_1 x_3, \quad \left.u\right|_{x_3=0}=x_1 x_2$$

справедливо неравенство

$$\iint_{000}^{11} \int_0^1 |\operatorname{grad} u|^2 d x_1 d x_2 d x_3 \geq \frac{7}{2}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

B-19.38

Показать, что для всех функций $v \in C^1(|x| \leq 1), x=\left(x_1, x_2, x_3\right), x_1=|x| \cos \varphi \sin \theta, x_2=|x| \sin \varphi \sin \theta, x_3= |x| \cos \theta$, удовлетворяющих условию $\left.v\right|_{|x|=1}=\cos \theta$, справедливо неравенство

$$\int_{|x|<1}\left[2 v+(\operatorname{grad} v)^2\right] d x \geq \frac{56 \pi}{45}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

B-19.39

Пусть Q - квадрат $\left\{0<x_1<1,0<x_2<1\right\}$. Доказать, что для любой функции $v \in^{\circ 1}(Q)$, удовлетворяющей условию

$$\int_Q \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 v(x) d x=0,$$

справедливо неравенство

$$\|v\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{5 \pi^2}\|\operatorname{grad} v\|_{L_2}^2.$$

B-19.40

Пусть Q - куб $\left\{0<x_1<1,0<x_2<1,0<x_3<1\right\}$. Доказать, что для любой функции $v \in \stackrel{\circ}{H}^1(Q)$, удовлетворяющей условию

$$\int_Q \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 v(x) d x=0,$$

справедливо неравенство $\|v\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{6 \pi^2}\|\operatorname{grad} v\|_{L_2}^2$.

B-19.41

Пусть Q - куб $\left\{0<x_1<\pi, 0<x_2<\pi, 0<x_3<\pi\right\}$. Среди функций $u \in H^1(Q)$, принимающих граничные значения

$$\left.u\right|_{x_1=0}=\left.u\right|_{x_2=0}=\left.u\right|_{x_3=0}=\left.u\right|_{x_1=\pi}=\left.u\right|_{x_2=\pi}=0,$$

найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u)=\int_Q(\operatorname{grad} u)^2 d x+\int_0^\pi \int_0^\pi \sin x_1 \sin x_2 u\left(x_1, x_2, \pi\right) d x_1 d x_2.$$

B-19.42

Пусть Q - шаровой слой $\{1<|x|<2\}, x=\left(x_1, x_2, x_3\right)$. Среди функций $u \in H^1(Q)$, принимающих граничные значения $\left.u\right|_{|x|=2}=0$, найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(u)=\int_Q\left[(\operatorname{grad} u)^2+2 u\right] d x+\int_{|x|=1} u^2 d S.$$

Примеры от Владимирова в конце

Задача 8. Найти минимум функционала

$$I(v)=\int_G\left[|\operatorname{grad} v|^2+\frac{4v}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right]dx_1dx_2$$

среди функций, принадлежащих классу $\stackrel{\circ}{C}{}^1(G)$, где $G=\{1<|x|<3\}$, $x=(x_1,x_2)$.

Р е ш ен и е. Известно, что существует функция $v_0\left(x_1,x_2\right)\in\in\stackrel{\circ}{C}{}^1(G)$, дающая минимум функционалу (1). Функция $v_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\Delta u=\frac{2}{r},\quad \left.u\right|_{|x|=1}=\left.u\right|_{|x|=3}=0;$$

записав лапласиан в полярных координатах, получим

$$\left(ru_r\right)'=2,\quad \left.u\right|_{|x|=1}=\left.u\right|_{|x|=3}=0.$$

Решением краевой задачи (2) является функция $v_0=2(r-1)-\frac{4}{\ln 3}\ln r$. Так как v_0 не зависит от φ, то

$$|\operatorname{grad} v_0|^2=\left|\frac{\partial v_0}{\partial r}\right|^2=\left(2-\frac{4}{\ln 3}\frac{1}{r}\right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}I\left(v_0\right)&=\int_0^{2\pi}\int_1^3\left\{\left(2-\frac{4}{\ln 3}\frac{1}{r}\right)^2+\left[8(r-1)-\frac{16}{\ln 3}\ln r\right]\frac{1}{r}\right\}rdrd\varphi=\\&=2\pi\int_1^3\left(4r-\frac{16}{\ln 3}+\frac{16}{\ln^2 3}\frac{1}{r}+8r-8-\frac{16}{\ln 3}\ln r\right)dr=\\&=2\pi\int_1^3\left(12r-\frac{16}{\ln 3}-8+\frac{16}{\ln^2 3}\frac{1}{r}-\frac{16}{\ln 3}\ln r\right)dr=32\pi\left(\frac{1}{\ln 3}-1\right).\end{aligned}$$

Итак, минимум функционала (1) равен $32\pi\left(\frac{1}{\ln 3}-1\right)$.

15.4 Задачи на Обобщенные функции

15.4.1 Задачи на Основные и обобщенные функции

B-6.1

Пусть $\varphi\in\mathscr{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей:
1) $\frac{1}{k}\varphi(x)$
2) $\frac{1}{k}\varphi(kx)$;
3) $\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$; $k=1,2,\ldots$, сходящиеся в $\mathscr{D}$.

B-6.2

Пусть $n=1$ и

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad -2\varepsilon\leq x\leq 2\varepsilon,\\ 0 & \text{при}\quad |x|>2\varepsilon.\end{cases}$$

Показать, что функция

$$\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy,$$

где ω_ε - «шапочка», является основной из $\mathscr{D}\left(R^1\right)$, причем $0\leq\eta(x)\leq 1$, $\eta(x)\equiv 1$ при $-\varepsilon\leq x\leq\varepsilon,\eta(x)\equiv 0$ при $|x|>3\varepsilon$.

B-6.3

Пусть $G_{2\varepsilon}=\bigcup_{x\in G}U(x;2\varepsilon)-2\varepsilon$-окрестность ограниченной области G и $\chi(x)$ - характеристическая функция области $G_{2\varepsilon}$, т.е. $\chi(x)=1,x\in G_{2\varepsilon}$ и $\chi(x)=0,x\in G_{2\varepsilon}$. Доказать, что функция

$$\eta(x)=\int\chi(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy$$

основная из $\mathscr{D}\left(R^n\right)$, причем $0\leq\eta(x)\leq 1,\eta(x)\equiv 1$ при $x\in G_\varepsilon;\eta(x)\equiv 0$ при $x\bar{\in}G_{3\varepsilon}$.

В-6.4

Пусть функция $\eta(x)$ удовлетворяет условиям задачи 6.2,

$$H(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\eta(x-\varepsilon\nu),\quad e(x)=\frac{\eta(x)}{H(x)}.$$

Доказать, что $H\in C^{\infty}\left(R^{1}\right),H(x)\geq 1; e\in\mathscr{D}\left(R^{1}\right),0\leq e(x)\leq 1$; $e(x)\equiv 1$ при $|x|\leq\varepsilon$ и $e(x)=0$ при $|x|\geq 3\varepsilon;\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e(x-\varepsilon\nu)\equiv 1$.

В-6.5

Доказать, что существуют такие функции $\varphi_{\delta}\in\mathscr{D}\left(R^{1}\right),\delta>1$, что $\varphi_{\delta}(x)=1$ при $|x|\leq\delta-1,\varphi_{\delta}(x)=0$ при $|x|\geq\delta$ и $\left|\varphi_{\delta}^{(\alpha)}(x)\right|\leq C_{\alpha}$, где постоянная C_{α} не зависит от δ.

В-6.6

Пусть непрерывная функция $f(x)$ финитна: $f(x)=0,|x|>R$. Показать, что функция

$$f_{\varepsilon}(x)=\int f(y)\omega_{\varepsilon}(x-y)dy\quad(\varepsilon<R)$$

основная из $\mathscr{D}\left(R^{n}\right)$, причем $f_{\varepsilon}(x)=0$ при $|x|>R+\varepsilon$. Показать, что

$$f_{\varepsilon}(x)\overset{x\in R^{n}}{\longrightarrow}f(x),\quad\varepsilon\longrightarrow 0.$$

В-6.7

1) Доказать, что функция

$$\psi(x)=\frac{1}{x^{m}}\left[\varphi(x)-\eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^{k}\right],\quad m=1,2$$

основная из $\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$, где $\varphi\in\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$ и $\eta\in\mathscr{D}\left(R^{1}\right),\eta\equiv 1$ в окрестности $x=0$;

2) доказать, что функция

$$\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\eta(x)\varphi(0)}{\alpha(x)}$$

основная из $\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$, где $\varphi\in\mathscr{D}\left(R^{1}\right),\eta(x)$ - функция из задачи $6.7,1)$ и $\alpha\in C^{\infty}\left(R^{1}\right)$, имеет единственный нуль порядка 1 в точке $x=0$.

В-6.8

1) Показать, что функция φ_{1} из $\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$ может быть представлена как производная от некоторой другой функции φ_{2} из $\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{1}(x)dx=0$$

2) показать, что всякая функция $\varphi(x)$ из $\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x)=\varphi_{0}(x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x'\right)dx'+\varphi_{1}'(x)$$

где $\varphi_{1}\in\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$, а $\varphi_{0}(x)-$ любая основная функция из $\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{0}(x)dx=1$.

Ук а з ан и е. Воспользоваться задачей $6.8,1)$.

В-6.9

Показать, что $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$ и из сходимости в $\mathscr{D}$ следует сходимость в $\mathscr{S}$.

В-6.10

Пусть $\varphi \in \mathscr{S}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей:
1) $\frac{1}{k} \varphi(x)$;
2) $\frac{1}{k} \varphi(k x)$
3) $\frac{1}{k} \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$ $k=1,2, \ldots$, сходящиеся в $\mathscr{S}$.

В-6.11

Пусть $\varphi \in \mathscr{S}$ и P - полином. Доказать, что $\varphi P \in \mathscr{S}$.

В-6.12

Пусть функция $\psi \in C^{\infty}\left(R^{1}\right), \psi(x)=0$ при $x<a$ и ограничена вместе со всеми производными. Доказать, что функция $\psi(x) e^{-\sigma x}$ основная из $\mathscr{S}\left(R^{1}\right)$, если $\sigma>0$.

В-6.13

Доказать, что $\delta(x)$ - сингулярная обобщенная функция. Дать физическую интерпретацию ее.

В-6.14

Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям:
1) $2 \delta\left(x-x_{0}\right)$
2) $\sum_{k=1}^{N} m_{k} \delta\left(x-x_{k}\right)$;
3) $\mu(x) \delta_{S}(x)$
4)$|x| \delta_{S_{r}}\left(x-x_{0}\right)$; 5) $2 \delta\left(R_{1}-|x-1|\right)+3 \delta\left(R_{2}-|x-2|\right)$. Найти их носители.

В-6.15

Доказать, что:
1) $\delta(x-\nu) \longrightarrow 0, \nu \longrightarrow \infty \text{В} \mathscr{D}^{\prime}\left(R^{1}\right)$
2) $\delta_{S_{r}}(x) \rightarrow 0, R \longrightarrow \infty$ В $\mathscr{D}^{\prime}$.

В-6.16

Доказать, что $\mathscr{S}^{\prime} \subset \mathscr{D}^{\prime}$ и из сходимости в $\mathscr{S}^{\prime}$ следует сходимость в $\mathscr{D}^{\prime}$.

В-6.17

Доказать, что:
1) $e^{x} \in \mathscr{D}^{\prime}\left(R^{1}\right), e^{x} \bar{\in} \mathscr{S}^{\prime}\left(R^{1}\right)$;
2) $e^{1 / x} \bar{\in} \mathscr{D}^{\prime}\left(R^{1}\right)$
3) $e^{x} \sin e^{x} \in \mathscr{S}^{\prime}\left(R^{1}\right)$.

В-6.18

Доказать, что функционал $\mathscr{P} \frac{1}{x}$, действующий по формуле

$$\left(\mathscr{P} \frac{1}{x}, \varphi\right)=\operatorname{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} d x=\lim _{\varepsilon \rightarrow+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{\varphi(x)}{x} d x, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

- сингулярная обобщенная функция.

В-6.19

Вычислить пределы в $\mathscr{D}^{\prime}\left(R^{1}\right)$ при $\varepsilon \longrightarrow+0$:
1) $f_{\varepsilon}(x)=\begin{cases}1 /(2 \varepsilon), & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x|>\varepsilon\end{cases}$
2) $\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^{2}+\varepsilon^{2}\right)}$
3) $\frac{1}{2 \sqrt{\pi \varepsilon}} e^{-x^{2} /(4 \varepsilon)}$;
4)$\frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$; 5) $\frac{1}{\pi x^{2}} \sin ^{2} \frac{x}{\varepsilon}$.

B-6.20

Доказать формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

B-6.21 Некоторые пределы в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ (!!!!!)

Вычислить пределы в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ при $t \to +\infty$:
1) $\frac{e^{ixt}}{x-i0}$
2) $\frac{e^{-ixt}}{x-i0}$
3) $\frac{e^{ixt}}{x+i0}$
4) $\frac{e^{-ixt}}{x+i0}$
5) $t^m e^{ixt}, m \geq 0$.
(порешаю, 1я часть пока слишком слабая.)

B-6.22

Найти предел $\mathscr{P}\frac{\cos kx}{x}, k \longrightarrow \infty$, в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$, где

$$\left(\mathscr{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

B-6.23

Доказать, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)$:
1) сходится в $\mathscr{D}'$ при любых a_k;
2) сходится в $\mathscr{S}'$, если $|a_k| \leq C(1+|k|)^m$.

B-6.24

Пусть $\psi \in \mathscr{D}\left(R^n\right), \quad \psi \geq 0, \int \psi(x)dx = 1$. Доказать, что $\varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \delta(x), \varepsilon \longrightarrow +0$ В$\mathscr{D}'\left(R^n\right)$; в частности, $\omega_\varepsilon(x) \longrightarrow \delta(x)$ $\varepsilon \longrightarrow 0$ В $\mathscr{D}'\left(R^n\right)$

B-6.25

Показать, что функционал $\mathscr{P}\frac{1}{x^2}$, действующий по формуле

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

- сингулярная обобщенная функция.

B-6.26

Показать, что:
1) $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x), \quad \alpha \in C^\infty\left(R^n\right)$; в частности, $x\delta(x) = 0$, $x \in R^1$
2) $x\frac{1}{x} = 1$
3) $x^m \not{P}\frac{1}{x} = x^{m-1}, m \geq 1$.

B-6.27

1) Пусть обобщенная функция f равна нулю вне отрезка $[-a, a]$; доказать, что $f = \eta f$, где $\eta \in C^\infty\left(R^1\right)$ и $\eta(x) \equiv 1$ в $[-a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ любое;

2) пусть $f \in \mathscr{D}'\left(R^n\right)$ и $\eta \in C^\infty\left(R^n\right), \eta(x) \equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$; показать, что $f = \eta f$ и $f \in \mathscr{S}'\left(R^n\right)$.

B-6.28

Доказать, что $\delta(ax) = \frac{1}{|a|^n}\delta(x), a \neq 0$.

B-6.29

Доказать, что $(\alpha f)(x+h)=\alpha(x+h)f(x+h)$, где $\alpha \in C^{\infty}\left(R^{n}\right)$, $f \in \mathscr{D}'\left(R^{n}\right), h \in R^{n}$.

B-6.30

Доказать, что обобщенная функция

$$
\begin{aligned}
& \left(\operatorname{Pf} \frac{1}{x^{2}+y^{2}}, \varphi(x, y)\right)= \\
& \quad=\int_{x^{2}+y^{2}<1} \frac{\varphi(x, y)-\varphi(0,0)}{x^{2}+y^{2}} d x d y+\int_{x^{2}+y^{2}>1} \frac{\varphi(x, y)}{x^{2}+y^{2}} d x d y
\end{aligned}
$$

удовлетворяет уравнению $\left(x^{2}+y^{2}\right) \operatorname{Pf} \frac{1}{x^{2}+y^{2}}=1$ в $\mathscr{D}'\left(R^{2}\right)$.

B-6.31

Пусть $f \in \mathscr{S}'$ и P - полином. Показать, что $fP \in \mathscr{S}'$.

B-6.32

Пусть $f \in \mathscr{D}'\left(R^{1}\right)$ финитна и $\eta(x)$ - произвольная функция из $\mathscr{D}\left(R^{1}\right)$, равная 1 в окрестности $\operatorname{supp} f$. Положим

$$
\hat{f}(z)=\frac{1}{2 \pi i}\left(f\left(x'\right), \frac{\eta\left(x'\right)}{x'-z}\right), \quad z=x+i y .
$$

Доказать, что:

1) $\hat{f}(z)$ не зависит от выбора вспрмогательной функции η;
2) $\hat{f}(z)$ - аналитическая функция при $z \bar{\in} \operatorname{supp} f$;
3) $\hat{f}(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right), z \longrightarrow \infty$;
4) $\hat{f}(x+i \varepsilon)-\hat{f}(x-i \varepsilon) \rightarrow f(x), \varepsilon \longrightarrow+0$ в $\mathscr{D}'\left(R^{1}\right)$.

B-6.33

Пусть $f \in \mathscr{D}'\left(R^{1}\right)$, $\operatorname{supp} f \subset[-a, a]$ и $\eta \in \mathscr{D}\left(R^{1}\right), \eta(\xi) \equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$. Доказать, что функция

$$
\tilde{f}(z)=\left(f(\xi), \eta(\xi) e^{i z \xi}\right), \quad z=x+i y,
$$

не зависит от η, целая и удовлетворяет при некотором $m \geq 0$ и любом $\varepsilon>0$ оценке

$$
|\tilde{f}(x+i y)| \leq C_{\varepsilon} e^{(a+\varepsilon)|y|}(1+|x|)^{m} .
$$

B-6.34

Пусть $f \in \mathscr{D}'\left(R^{n}\right)$ и $\operatorname{supp} f=\{0\}$. Доказать, что f однозначно представляется в виде

$$
f(x)=\sum_{0 \leq|\alpha| \leq N} C_{\alpha} D^{\alpha} \delta(x) .
$$

B-6.35

Пусть ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \delta^{(\nu)}(x)$ сходится в $\mathscr{D}'\left(R^{1}\right)$. Доказать, что $a_{\nu}=0$ при $\nu>\nu_{0}$.

15.4.2 Задачи на Дифференцирование обобщенных функций

B-7.1

Дать физическую интерпретацию обобщенным функциям: В $R^{1}-\delta'(x), \quad -\delta'\left(x-x^{0}\right)$; В $R^{3}-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu \delta_{S}\right), -2 \frac{\partial}{\partial n} \delta_{S_{r}}\left(x-\right.$

B-7.2

Показать, что $\left(\delta^{(m)}\left(x-x_{0}, \varphi(x)\right)=(-1)^{m} \varphi^{(m)}\left(x_{0}\right), m \geq 1\right.$.

В-7.3

Показать, что в $D'\left(R^1\right)$:
1) $\rho(x)\delta'(x) = -\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x)$, где $\rho(x) \in C^1\left(R^1\right)$;
2) $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x), \quad m = 1, 2, \ldots$;
3) $x^m\delta^{(m)}(x) = (-1)^m m!\delta(x), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$;
4)$x^k\delta^{(m)}(x) = 0, m = 0, 1, \ldots, k-1$; 5) $\alpha(x)\delta^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{j+m} C_m^j \alpha^{(m-j)}(0)\delta^{(j)}(x)$, где $\alpha(x) \in C^\infty\left(R^1\right)$ 6) $x^k\delta^{(m)}(x) = (-1)^k k! C_m^k \delta^{(m-k)}(x), \quad m = k, k+1, \ldots$

В-7.4

Показать, что $\theta' = \delta$, где θ - функция Хевисайда.

В-7.5

1) Показать, что в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$
$$(\theta(x)\rho(x))' = \delta(x)\rho(0) + \theta(x)\rho'(x),$$
где $\rho(x) \in C^1\left(R^1\right)$
2) показать, что в $\mathscr{D}'\left(R^2\right)$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta(t)\rho(x,t)) = \delta(t)\rho(x,0) + \theta(t)\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t},$$
где $\rho \in C^1(t \geq 0)$.
Ук а з а н и е. Воспользоваться определением простого слоя (§6).

В-7.6

Вычислить:
1) $\theta'(-x)$;
2) $\theta^{(m)}\left(x - x_0\right), m \geq 1$ целое;
3) $\theta^{(m)}\left(x_0 - x\right), m \geq 1$
4)$(\operatorname{sign} x)^{(m)}, m \geq 1$; 5) $(x \operatorname{sign} x)'$; 6) $(|x|)^{(m)}, m \geq 2$ 7) $(\theta(x)\sin x)'$; 8) $(\theta(x)\cos x)'$; 9) $\left(\theta(x)x^{m+k}\right)^{(m)}, m \geq 1, k = 0, 1, 2, \ldots$; 10) $\left(\theta(x)x^{m-k}\right)^{(m)}, m \geq 1, k = 1, \ldots, m$; 11) $\left(\theta(x)e^{ax}\right)^m, m \geq 1$.

В-7.7

Вычислить производные порядка $1, 2, 3$ функций:

В-7.7

Вычислить производные порядка 1, 2, 3 функций:
1) $y = \left|x\right|\sin x$
2) $y = \left|x\right|\cos x$.

В-7.8

Показать, что
$$\left(D^\alpha f\right)(x+h) = D^\alpha f(x+h), \quad f \in \mathscr{D}', \quad h \in R^n.$$

В-7.9

Доказать, что обобщенные функции $\delta, \delta', \delta'', \ldots, \delta^{(m)}$ линейно независимы.

В-7.10

Доказать:
1) $\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathscr{P}\frac{1}{x}$, где $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ определена в задаче 6.18;
2) $\frac{d}{dx}\mathscr{P}\frac{1}{x} = -\mathscr{P}\frac{1}{x^2}$, где $\mathscr{P}\frac{1}{x^2}$ определена в задаче 6.25;
3) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x \pm i0} = \mp\pi\delta'(x) - \mathscr{P}\frac{1}{x^2}$;
4)$\frac{d}{dx}\mathscr{P}\frac{1}{x^2} = -2\mathscr{P}\frac{1}{x^3}$, где
$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^3}, \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x) - x\varphi'(0)}{x^3}dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^1\right).$$

B-7.11

Показать, что ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(x-k)$ сходится в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ при любых a_k.

B-7.12

Показать, что если $|a_k| \leq A|k|^m + B$, то ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ сходится в $\mathscr{S}'\left(R^1\right)$.

B-7.13

Пусть $f(x)$ - такая кусочно непрерывная функция, что Доказать, что $f \in C^1\left(x \leq x_0\right) \cap C^1\left(x \geq x_0\right)$.

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta\left(x - x_0\right) \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'\left(R^1\right), \quad (**)$$

где $[f]_{x_0} = f\left(x_0 + 0\right) - f\left(x_0 - 0\right)$ – скачок функции f в точке x_0. Доказать, что если классическая производная функции $f(x)$ имеет изолированные разрывы 1-го рода в точках $\{x_k\}$, то формула $(**)$ принимает вид

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta\left(x - x_k\right).$$

B-7.14

Вычислить $f^{(m)}$ для функций:
1) $\theta(a - |x|), a > 0$; 2) $[x]$;
3) $\operatorname{sign} \sin x$
4)$\operatorname{sign} \cos x$; Здесь $[x]$ означает целую часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

B-7.15

Пусть $f(x) - 2\pi$-периодическая функция, причем $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, 0 < x \leq 2\pi$. Найти f'.

B-7.16

Пусть $f(x) = x, -1 < x \leq 1$, - периодическая с периодом 2 Функция. Найти $f^{(m)}, m \geq 1$.

B-7.17

Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

B-7.18

Доказать, что

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(x - k\pi)$$

B-7.19

Пусть $f(x) \in C^{\infty}\left(x \leq x_0\right) \cap C^{\infty}\left(x \geq x_0\right)$. Доказать, что В $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$

$$\begin{gathered} f^{(m)}(x) = \left\{f^{(m)}(x)\right\} + [f]_{x_0} \delta^{(m-1)}\left(x - x_0\right) + \\ + \left[f'\right]_{x_0} \delta^{(m-2)}\left(x - x_0\right) + \ldots + \left[f^{(m-1)}\right]_{x_0} \delta\left(x - x_0\right) \end{gathered}$$

где

$$\left[f^{(k)}\right]_{x_0} = f^{(k)}\left(x_0 + 0\right) - f^{(k)}\left(x_0 - 0\right), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

- скачок k-й производной в точке x_0.

B-7.20

Найти все производные функций:

1) $y = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

4)$y = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ (x+1)^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$ 7) $y = \begin{cases} \sin x, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & |x| \geq \pi \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} |\sin x|, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & |x| \geq \pi \end{cases}$

B-7.21

Доказать: 1) $|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k\pi)$; 2) $|\cos x|'' + |\cos x| = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{2k+1}{2}\pi\right)$. Указ а н и е. Воспользоваться задачей 7.14, 3) и 4). Пусть

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(x) y^{(k)} = f$$

- линейное дифференциальное уравнение порядка m с коэффициентами $a_k(x) \in C^{\infty}\left(R^1\right)$ и $f \in \mathscr{D}'\left(R^1\right)$. Его обобиенным речением называется всякая обобщенная функция $y \in \mathscr{D}'\left(R^1\right)$, удовлетворяющая уравнению (*) в обобщенном смысле, т. е.

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k y^{(k)}, \varphi\right) = \left(y, \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left(a_k \varphi\right)^{(k)}\right) = (f, \varphi)$$

для любой $\varphi \in \mathscr{D}\left(R^1\right)^*$. Всякое решение уравнения $(*)$ можно представить в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

B-7.22

Найти общие решения в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ следующих уравнений:

1) $xy = 0$;

2) $\alpha(x)y = 0$, где $\alpha \in C^{\infty}\left(R^1\right)$ и имеет единственный нуль в точке $x = 0$ порядка 1

3) $\alpha(x)y = 0$, где $\alpha \in C$ и $\alpha > 0$;

4)$(x-1)y = 0$; 5) $x(x-1)y = 0$ 6) $\left(x^2-1\right)y = 0$ 7) $xy = 1$; 8) $xy = \mathscr{P}\frac{1}{x}$; 9) $x^n y = 0, n = 2, 3, \ldots$ 10) $x^2 y = 2$ 11) $(x+1)^2 y = 0$; 12) $(\cos x)y = 0$.

B-7.23

Найти общие решения в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ уравнений:

1) $y' = 0$;

2) $y^{(m)} = 0, \quad m = 2, 3, \ldots$

B-7.24

Доказать, что общим решением в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ уравнения $x^n y^{(m)} = 0, n > m$, является обобщенная функция

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} b_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k$$

где a_k, b_k, c_k - произвольные постоянные.

B-7.25

Найти общие решения в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ уравнений:
1) $xy' = 1$;
2) $xy' = \mathscr{P}\frac{1}{x}$
3) $x^2y' = 0$
4)$x^2y' = 1$; 5) $y'' = \delta(x)$; 6) $(x+1)y'' = 0$; 7) $(x+1)^2y'' = 0$; 8) $(x+1)y''' = 0$.

B-7.26

Доказать, что общим решением в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ уравнения $xy = \operatorname{sign} x$ является обобщенная функция $C\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{|x|}$, где

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx.$$

B-7.27

Доказать, что если $f \in \mathscr{D}'\left(R^1\right)$ инвариантна относительно сдвига, т.е. $(f, \varphi) = (f(x), \varphi(x+h))$, где h - любое вещественное число, то $f = \text{const}$.

Указани и е. Доказать, что $f' = 0$, и воспользоваться задачей 7.23, 1). $^{*)}$ Иногда для краткости выражение кудовлетворяет уравнению в обобценном смысле» заменяется выражением «удовлетворяет уравнению в $\mathscr{D}' \rightarrow 4^*$

B-7.28

Найти решение в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ уравнения:

$$af'' + bf' + cf = m\delta + n\delta'$$

где $a, b, c, m, n-$ заданные числа. Рассмотреть случаи:
1) $a = c = n = 1, \quad b = m = 2$;
2) $b = n = 0, a = m = 1, c = 4$;
3) $b = 0, \quad a = n = 1, \quad m = 2, \quad c = -4$.

B-7.29

Доказать, что система $\frac{dy}{dx} = A(x)y$, где матрица $A(x) \in \in C^\infty\left(R^1\right)$ имеет в $\mathscr{D}'$ только классическое решение.

B-7.30

Доказать, что уравнение $u' = f$ разрешимо в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ при Jюбой $f \in \mathscr{D}'\left(R^1\right)$.
Ук аз ан и е. Воспользоваться задачей $6.8, 2$).

B-7.31

Доказать, что уравнение $xu = f$ разрешимо в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$ при любой $f \in \mathscr{D}'\left(R^1\right)$.
Ук а з ан и е. Воспользоваться задачей $6.7, 1)$.

B-7.32

Доказать, что уравнение $x^3u' + 2u = 0$ не имеет решений в $\mathscr{D}'\left(R^1\ \right)$ (кроме 0).

B-7.33

Пусть $\theta\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \theta\left(x_1\right) \ldots \theta\left(x_n\right)$. Показать, что

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \delta(x) = \delta\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

в $\mathscr{D}'\left(R^n\right)$.

B-7.34

На плоскости (x, y) рассмотрим квадрат с вершинами

$$A(1,1), \quad B(2,0), \quad C(3,1), \quad D(2,2).$$

Пусть функция f равна 1 в $ABCD$ и 0 вне его. Вычислить

$$f_{yy}^{\prime\prime}-f_{xx}^{\prime\prime}$$

B-7.35

Пусть область $G \subset R^{3}$ ограничена кусочно гладкой поверхностью S и дана функция $f \in C^{1}(\bar{G}) \cap C^{1}\left(\bar{G}_{1}\right)$, где $G_{1}=R^{n} \backslash \bar{G}$. Доказать формулу

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i}}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right\}+[f]_{S} \cos \left(\boldsymbol{n}, x_{i}\right) \delta_{S}, \quad i=1,2,3,$$

в $\mathscr{D}^{\prime}\left(R^{3}\right)$, где $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{x}$ - внешняя нормаль к S в точке $x \in S$, а $[f]_{S}-$ скачок функции $f(x)$ при переходе извне через поверхность S:

$$\lim _{\substack{x^{\prime} \rightarrow x \\ x^{\prime} \in G_{1}}} f\left(x^{\prime}\right)-\lim _{\substack{x^{\prime} \rightarrow x \\ x^{\prime} \in G}} f\left(x^{\prime}\right)=[f]_{S}(x), \quad x \in S.$$

B-7.36

Доказать, что если $f \in C^{2}(\bar{G}) \cap C^{2}\left(\bar{G}_{1}\right)$, где $G_{1}=R^{n} \backslash \bar{G}$, то справедлива формула Грина

B-7.36

Доказать, что если $f \in C^{2}(\bar{G}) \cap C^{2}\left(\bar{G}_{1}\right)$, где $G_{1}=R^{n} \backslash \bar{G}$, то справедлива формула Грина

$$\Delta f=\{\Delta f\}+\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_{S} \delta_{S}+\frac{\partial}{\partial n}\left([f]_{S} \delta_{S}\right).$$

B-7.37

Доказать, что если $f(x, t) \in C^{2}(t \geq 0)$ и $f=0$ при $t<0$, то в R^{n+1} справедливы формулы:
1) $\square_{a} f=\left\{\square_{a} f\right\}+\delta(t) f_{t}(x, 0)+\delta^{\prime}(t) f(x, 0)$;
2) $\frac{\partial f}{\partial t}-a^{2} \Delta f=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}-a^{2} \Delta f\right\}+\delta(t) f(x, 0)$.

15.4.3 Задачи на Прямое произведение и свертка обобщенных функций

B-8.1

Доказать: $\operatorname{supp}(f(x) \cdot g(y))=\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$.

B-8.2

Доказать, что в $\mathscr{D}^{\prime}\left(R^{n+1}(x, t)\right)$:
1) $\left(u_{1}(x) \cdot \delta(t), \varphi\right)=\left(u_{1}(x), \varphi(x, 0)\right)$
2) $\left(u_{0}(x) \cdot \delta^{\prime}(t), \varphi\right)=-\left(u_{0}(x), \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t}\right)$. Указ а и и е. Воспользоваться формулой (1).

B-8.3

Доказать:
1) $\theta_{t}(x, t)$ - простой слой на оси $t=0$ плоскости (x, t) с плотностью $\theta(x)$ 2) $-\theta_{tt}(x, t)$ - двойной слой на оси $t=0$ с плотностью $\theta(x)$. У к а ан и е. Воспользоваться задачей 8.2.

B-8.4

Показать:
1) $\theta\left(x_{1}\right) \cdot \theta\left(x_{2}\right) \cdot \ldots \cdot \theta\left(x_{n}\right)=\theta\left(x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{n}\right)$;
2) $\delta\left(x_{1}\right) \cdot \delta\left(x_{2}\right) \cdot \ldots \cdot \delta\left(x_{n}\right)=\delta\left(x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{n}\right)$.

В-8.5

Показать:
$$\frac{\partial^n \theta(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n).$$

В-8.6

Показать, что $(f\cdot g)(x+x_0,y) = f(x+x_0)\cdot g(y)$.

В-8.7

Показать, что $a(x)(f(x)\cdot g(y)) = a(x)f(x)\cdot g(y)$, где $a \in \in C^\infty(R^n)$

В-8.8

Доказать, что в $\mathscr{D}'(R^2)$:
1) $\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|) = a\delta(at-|x|)$;
2) $\frac{\partial}{\partial x}\theta(at-|x|) = \theta(t)\delta(at+|x|) - \theta(t)\delta(at-|x|)$;
3) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(at-|x|),\varphi\right) = -a\left(\delta(at-|x|),\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$;
4) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at-|x|),\varphi\right) = -\left(\theta(t)\delta(at+x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+$
$$+\left(\theta(t)\delta(at-x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Обобщенную функцию вида $f(x)\cdot 1(y)$ назовем ке зависящей от y. Она действует по правилу
$$(f(x)\cdot 1(y),\varphi) = \int (f(x),\varphi(x,y))dy.$$

В-8.9

Показать:
1) $\int (f(x),\varphi(x,y))dy = \left(f(x),\int \varphi(x,y)dy\right)$;
2) $D_y^\alpha(f(x)\cdot 1(y)) = 0$, где $f\in\mathscr{D}', |\alpha|\neq 0$.

В-8.10

Пусть $g(y)\in\mathscr{S}'(R^m)$ и $\varphi\in\mathscr{S}(R^{n+m})$. Доказать, что:
1) $\psi(x) = (g(y),\varphi(x+y))\in\mathscr{S}(R^n)$;
2) $D^\alpha\psi(x) = (g(y), D_x^\alpha\varphi(x,y))$;
3) если $\varphi_k\longrightarrow\varphi, k\longrightarrow\infty$ в $\mathscr{S}(R^{n+m})$, то $\psi_k\longrightarrow\psi, k\longrightarrow\infty$ в $\mathscr{S}(R^n)$
4)если $f\in\mathscr{S}'(R^n)$ и $g\in\mathscr{S}'(R^m)$, то $f(x)\cdot g(y)\in\mathscr{S}'(R^{n+m})$.

В-8.11

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ локально интегрируемы в R^n. Показать, что свертка $f*g$ является локально интегрируемой функцией, если:
1) f и $g\in L_1(R^n)$
2) f или g финитна;
3) $f=0$ и $g=0$ при $x<0; n=1$. В случае 1) показать, что $f*g\in L_1(R^n)$ и справедливо неравенство
$$\|f*g\|_{L_1}\leq\|f\|_{L_1}\cdot\|g\|_{L_1}.$$

В-8.12

Показать, что в условиях задачи $8.11, 3$)
$$(f*g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy.$$

B-8.13

Показать:
1) $\delta * f = f * \delta = f$;
2) $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$;
3) $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$;
4)$\delta^{(m)} * f = f^{(m)}$; 5) $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$.

B-8.14

Вычислить в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$:
1) $\theta(x) * \theta(x)$;
2) $\theta(x) * \theta(x) x^2$
3) $e^{-|x|} * e^{-|x|}$

4)$e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}, a > 0$; 5) $\theta(x) x^2 * \theta(x) \sin x$; 6) $\theta(x) \cos x * \theta(x) x^3$ 7) $\theta(x) \sin x * \theta(x) \operatorname{sh} x$; 8) $\theta(a-|x|) * \theta(a-|x|)$. В задачах 8.15-8.29 доказать утверждения.

B-8.15

Если $f_\alpha(x) = \theta(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha x}, \alpha > 0$ - целое, то $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

B-8.16

Если $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/\left(2\alpha^2\right)}, \alpha > 0$, то $f_\alpha * f_\beta = f\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

B-8.17

Если $f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi\left(x^2+\alpha^2\right)}, \alpha > 0$, то $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

B-8.18

$\operatorname{supp}(f * g) \subset [\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g]$. У к аз а н и е. Воспользоваться задачей 8.1.

B-8.19

Если $f, g \in \mathscr{D}'_+$, то $e^{ax} f * e^{ax} g = e^{ax}(f * g)$.

B-8.20

Если $f \in \mathscr{D}', \varphi \in \mathscr{D}$, то $f * \varphi = (f(y), \varphi(x-y)) \in C^\infty\left(R^1\right)$. У к а з а и и е. Воспользоваться формулой (7) и задачей 8.9, 1).

B-8.21

Если $f \in \mathscr{D}', f * g = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$ и $\operatorname{supp} \varphi \in [x < 0]$, то $f = 0$ при $x < 0$.

B-8.22

Если свертка $f * 1$ существует, то она постоянна.

B-8.23

Для независимости обобщенной функции от x_i необходима и достаточна ее инвариантность относительно всех сдвигов по x_i.

B-8.24

Для независимости $f(x) \in \mathscr{D}'\left(R^n\right)$ от x_i необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

B-8.25

Если $f \in \mathscr{D}'$ не зависит от x_i, то и $f * g$ не зависит от x_i.

В-8.26

Решением уравнения $Lu=\delta$, где

$$L=\frac{d^{m}}{dx^{m}}+a_{1}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\ldots+a_{m-1}(x)\frac{d}{dx}+a_{m}(x)$$

$a_{k}\in C^{\infty}\left(R^{1}\right)$, в $\mathscr{D}'\left(R^{1}\right)$ является $u(x)=\theta(x)Z(x), Z(x)\in C^{m}\left(R^{1}\right)-$ решение задачи

$$LZ=0,\quad Z(0)=Z'(0)=\ldots=Z^{(m-2)}(0)=0,\quad Z^{(m-1)}(0)=1.$$

В-8.27

Решением уравнения $Lu=f, f\in\mathscr{D}'_{+}$, в $\mathscr{D}'_{+}$ является $u=\theta Z*f$, где $Z(x)$ - функция из задачи 8.25.

В-8.28

Решением уравнения Абеля

$$\int_{0}^{x}\frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}}d\xi=g(x)$$

где $g(0)=0, g\in C^{1}(x\geq 0), 0<\alpha<1$, является функция

$$u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_{0}^{x}\frac{g'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}.$$

Ук а з ан и е. Уравнение записать в виде свертки $u*\theta(x-\alpha)=g(x)$ (считаем $u=0$ и $g=0$ при $x<0$) и воспользоваться задачей 8.15 при $\beta=1-\alpha$.

В-8.29

Решением уравнения $\theta(x)\cos x*f=g$ в $\mathscr{D}'\left(R^{1}\right)$, где $g\in\in C^{1}(x\geq 0), g=0$ при $x<0$, является

$$f(x)=g'(x)+\int_{0}^{x}g(\xi)d\xi$$

В-8.30

Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления R, самоиндукции L и емкости C. В момент времени $t=0$ в цепь включается э. д. с. $E(t)$. Показать, что сила тока $i(t)$ в цепи удовлетворяет уравнению $Z*i=E(t)$, где

$$Z=L\delta'(t)+R\delta(t)+\frac{\theta(t)}{C}\text{ - импеданс цепи.}$$

В-8.31

Пусть $f\in D'\left(R^{n+1}\right)$. Доказать:
1) $\left[\delta\left(x-x_{0}\right)\cdot\delta(t)\right]*f(x,t)=f\left(x-x_{0},t\right)$
2) $\left[\delta\left(x-x_{0}\right)\cdot\delta^{(m)}(t)\right]*f(x,t)=\frac{\partial^{m}f\left(x-x_{0},t\right)}{\partial t^{m}}$.

В-8.32

Вычислить следующие свертки в $\mathscr{D}'\left(R^{n}\right)$:
1) $f*\delta_{S_{r}}$, где $f(x)\in C$ и $\delta_{S_{r}}(x)$ - простой слой на сфере $|x|=R$ с плотностью 1 (см. §6);
2) $f*\frac{\partial}{\partial n}\delta_{S_{r}}$, где $f\in C^{1}$
3) $\delta_{S_{r}}*|x|^{2}, n=3$
4)$\delta_{S_{r}}*e^{-|x|^{2}}, n=3$; 5) $\delta_{S_{r}}*\sin|x|^{2}, n=3$; 6) $\delta_{S_{r}}*\frac{1}{1+|x|^{2}}, n=3$; 7) $\frac{1}{|x|}*\mu\delta_{S}, n=3; \ln\frac{1}{|x|}*\mu\delta_{S}, n=2$; 8) $-\frac{1}{|x|}*\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_{S}\right), n=3; \ln|x|*\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_{S}\right), n=2$; S - ограниченная поверхность. Определение обобщенных функций $\mu\delta_{S}-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_{S}\right)$ см. в §6 и §7.

В-8.33

Вычислить в $\mathscr{D}'\left(R^2\right)$:
1) $\theta(t)x * \theta(x)t$;
2) $\theta(t-|x|) * \theta(t-|x|)$
3) $\theta(t)\theta(x) * \theta(t-|x|)$.

В-8.34

Пусть $f, g \in \mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right), f(x,t)=0$ при $t<0$ и $g=0$ вне $\bar{\Gamma}^{+}$. Доказать, что свертка $g * f$ существует в $\mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right)$ и выражается формулой

$$(g * f, \varphi)=\left(g(\xi, t) \cdot f(y, \tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta\left(a^2t^2-|\xi|^2\right)\varphi(\xi+y, t+\tau)\right)$$
$$\varphi \in \mathscr{D}\left(R^{n+1}\right)$$

где $\eta(t) \in C^{\infty}\left(R^1\right), \eta(t)=0$ при $t<-\delta$ и $\eta(t) \equiv 1$ при $t>-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\delta)$.

В-8.35

Пусть $g(x,t) \in \mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right), g=0$ вне $\bar{\Gamma}^{+}$и $u(x) \in \mathscr{D}'\left(R^n\right)$. Доказать:
1) $g * u(x) \cdot \delta(t)=g(x,t) * u(x)$, причем обобщенная функция $g(x,t) *$ * $u(x)$ действует по правилу

$$(g(x,t) * u(x), \varphi)=\left(g(\xi, t) \cdot u(y), \eta\left(a^2t^2-|\xi|^2\right)\varphi(\xi+y, t)\right),$$

$\varphi \in \mathscr{D}\left(R^{n+1}\right)$
2) $g * u(x) \cdot \delta^{(k)}(t)=\frac{\partial^k}{\partial t^k}(g(x,t) * u(x))=\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k} * u(x)$.

В-8.36

Вычислить в $\mathscr{D}'\left(R^2\right)$:
1) $\theta(at-|x|) * [\omega(t) \cdot \delta(x)], a>0$, где $\omega(t) \in C(t \geq 0)$ и $\omega(t)=0$ при $t<0$;
2) $\theta(at-|x|) * [\theta(t) \cdot \delta(x)]$;
3) $\theta(at-|x|) * \frac{\partial}{\partial t}[\theta(t) \cdot \delta(x)]$;
4)$\theta(at-|x|) * [\theta(t) \cdot \delta'(x)]$; 5) $\theta(at-|x|) * [\theta(x) \cdot \delta(t)]$; 6) $\theta(at-|x|) * \frac{\partial}{\partial t}[\omega(x) \cdot \delta(t)]$, где $\omega(x) \in C\left(R'\right)$ (У ка а и и е. Воспользоваться задачей 7.5, 2).); 7) $\theta(at-|x|) * \frac{\partial}{\partial x}[\theta(x) \cdot \delta(t)]$.

В-8.37

Вычислить в $\mathscr{D}'\left(R^2\right)$:
1) $e^x\delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/\left(4a^2t\right)}, a>0$
2) $\theta(t)e^t x * \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$
3) $\theta(x)\delta(t) * \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$.

В-8.38

Пусть $f \in C^{\infty}\left(R^n \backslash\{0\}\right)$ и $g \in \mathscr{D}'\left(R^n\right)$ финитна. Показать, что $f * g \in C^{\infty}\left(R^n \backslash \operatorname{supp} g\right)$. Указ а и е. Воспользоваться формулой (7).

В-8.39

Пусть $f \in \mathscr{S}'$ и $g \in \mathscr{D}'$ финитна. Доказать, что $f * g \in \mathscr{S}'$.

В-8.40

Доказать: если $f \in \mathscr{D}'$, то $f * \omega_{\varepsilon} \longrightarrow f', \varepsilon \rightarrow 0$ в $\mathscr{D}'$. У каз а н и е. Воспользоваться задачей 6.24. Введем обобщенную функцию $f_{\alpha}(x)$, зависящую от параметра α, $f_{\alpha}(x)=\begin{cases}\frac{\theta(x)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha>0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)}(x), & \alpha \leq 0, \alpha+n>0, N \text{ целое}\end{cases}$ (ср. с задачей 8.15).

B-8.41

Доказать, что $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

B-8.42

Доказать, что

$$f_0* = \delta*, \quad f_{-n*} = \frac{d^n}{dx^n}*, \quad f_{n*} = \underbrace{\theta * \theta * \ldots * \theta*}_{n \text{ раз}}.$$

Сверточная операция $f_{-\alpha*}$ при $\alpha > 0, \alpha$ не равно целому числу, называется (дробкой) производной порядка α (эту производную обопервообразной порядка α (эту первообразную обозначим через $u_{(\alpha)}$, Т. е. $u_{(\alpha)} = f_\alpha * u\big)$

B-8.43

Вычислить производную порядка 3/2 от $\theta(x)$.

B-8.44

Вычислить первообразную порядка 3/2 от $\theta(x)$.

B-8.45

Вычислить производную порядка 1/2 от $f(x), f = 0$ при $x < 0$.

B-8.46

Вычислить первообразную порядка 1/2 от $f(x), f = 0$ при $x < 0$. функций со сходимостью $f_k \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{E}'$, если: а) $f_k \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty$ В $\mathscr{D}'$;

B-8.47

Обозначим через $\mathscr{E}'$ пространство финитных обобщенных функций со сходимостью $f_k \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{E}'$, если: а) $f_k \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty$ в $\mathscr{D}'$; б) существует число R такое, что supp $f_k \subset U_r$ при всех k. Доказать т еор е м у: если линейный непрерывный оператор L из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$ комщутируеm с операцией сдвига, mо L - оnераmор свермки, $L = f_0*$, 2де $f_0 = L\delta$.

15.4.4 Задачи на Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

B-9.1

1) Пусть $f(x) \in C^k\left(R^1\right), k \geq 0$, и $\int\left|f^{(\alpha)}(x)\right| dx < \infty, \alpha \leq k$; доказать, что $F[f] \in C\left[R^1\right]$ и $|\xi|^k|F[f](\xi)| \leq a$;

2) пусть $f(x) \in C^k\left(R^n\right), k \geq 0$ и $|x|^{n+l}\left|D^\alpha f(x)\right| \leq b, |\alpha| \leq k$, $l \geq 1$ целое; доказать, что $F[f] \in C^{l-1}\left(R^n\right)$ и $|\xi|^k\left|D^\beta F[f](\xi)\right| \leq b, \quad |\beta| \leq l-1$.

B-9.2

Доказать, что $f = F^{-1}[F[f]]$, где F^{-1} определяется формулой (3), для следующих f:

1) $f(x) \in C\left(R^n\right), |x|^{n+\varepsilon}|f(x)| \leq a, |\xi|^{n+\varepsilon}|F[f](\xi)| \leq a, \varepsilon > 0$;

2) $f(x) \in C^2\left(R^1\right), \int\left|f^{(\alpha)}(x)\right| dx < \infty, \alpha \leq 2$;

3) $f(x) \in C^{n+1}\left(R^n\right), \left|D^\alpha f(x)\right||x|^{n+1} \leq a, |\alpha| \leq n+1$. Проверить, что случай 3) вытекает из случая 1).

B-9.3

Доказать, что

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F\left[D^\beta\left(x^\alpha \varphi\right)\right](\xi), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

B-9.4

1) Доказать, что если $\varphi \in \mathscr{S}$, то и $F[\varphi] \in \mathscr{S}$;

2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$, т. е. что из $\varphi_k \longrightarrow \varphi, k \longrightarrow \infty$, в $\mathscr{S}$ следует $F[\varphi_k] \longrightarrow F[\varphi]$ в $\mathscr{S}$.

Ук а з а н и е. Воспользоваться задачей 9.3.

B-9.5

1) Доказать, что если $f \in \mathscr{S}'$, то и $F[f] \in \mathscr{S}'$;

2) доказать, что операция преобразования Фурье непрерывна из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$, т. е. из $f_k \longrightarrow f, k \longrightarrow \infty$, в $\mathscr{S}'$ следует $F[f_k] \longrightarrow F[f]$ В $\mathscr{S}'$;

3) доказать, что если f - функция медленного роста, то

$$F[f](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<r} f(x) e^{i(\xi,x)} dx \quad \text{в} \quad \mathscr{S}';$$

4)доказать, что если $f \in L_2(R^n)$, то $F[f] \in L_2(R^n)$ и

$$F[f](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<r} f(x) e^{i(\xi,x)} dx \quad \text{в} \quad L_2(R^n)$$

(теорема Планшереля); 5) доказать, что если f и $g \in L_2(R^n)$, то справедливо равенство Парсеваля

$$(2\pi)^n (f,g) = (F[f], F[g]);$$

6) доказать, что если $f \in L_1(R^n)$, то $F[f] \in L_\infty(R^n) \cap C(R^n)$ и выражается формулой

$$F[f](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi,x)} dx, \quad \|F[f]\|_{L_\infty(R^n)} \leq \|f\|_{L_1(R^n)},$$
$$F[f(\xi)] \longrightarrow 0, \quad |\xi| \longrightarrow \infty$$

(теорема Римана-Лебега), $F[f * g] = F[f]F[g], f, g \in L_1(R^n)$; 7) доказать, что если $f \in \mathscr{S}'$ и $\varphi \in \mathscr{S}$, то

$$F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi];$$

8) пусть $f \in L_1(R^1)$ - кусочно непрерывная функция такая, что $\{f'(x)\}$ - также кусочно непрерывна; доказать формулу обращения

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} F[f](\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad x \in R^1.$$

B-9.6

Доказать в $\mathscr{S}(R^n)$:

1) $F[\delta(x-x_0)] = e^{i(\xi,x_0)}$;

2) $F[\delta] = 1$;

3) $f[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$;

4)$F\left[\frac{\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)}{2}\right] = \cos x_0\xi, \quad n=1$; 5) $F\left[\frac{\delta(x-x_0)-\delta(x+x_0)}{2i}\right] = \sin x_0\xi, \quad n=1$.

B-9.7

Доказать в $\mathscr{S}'(R^n)$:

1) $F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha$

2) $F[x^\alpha] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi)$.

B-9.8

Вычислить преобразования Фурье следующих функций ($n=1$):

1) $\theta(R-|x|)$

2) $e^{-a^2x^2}$

3) e^{ix^2};

4)e^{-ix^2}; 5) $f(x) = 0$ при $x<0, \quad f(x) = k, \quad k<x<k+1, \quad k = 0, 1, \ldots$

B-9.9

Доказать ($n=1$):
1) $F\left[\theta(x)e^{-ax}\right]=\frac{1}{a-i\xi},\quad a>0$
2) $F\left[\theta(-x)e^{ax}\right]=\frac{1}{a+i\xi},\quad a>0;$
3) $F\left[e^{-a|x|}\right]=\frac{2a}{a^2+\xi^2},\quad a>0;$
4)$F\left[\frac{2a}{a^2+x^2}\right]=2\pi e^{-a|\xi|},\quad a>0;$ 5) $F\left[\theta(x)e^{-ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]=\frac{1}{(a+i\xi)^\alpha},\quad a>0,\alpha>0.$

B-9.10

Воспользовавшись формулой Сохоцкого (см. задачу 6.20) и результатами задач 9.5 и 9.9, 1) и 2), доказать:
1) $F[\theta(x)]=\pi\delta(\xi)+i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}$
2) $F[\theta(-x)]=\pi\delta(\xi)-i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}.$

B-9.11

Вычислить преобразования Фурье следующих обобщенньгх функций ($n=1$):
1) $\delta^{(k)},k=1,2,\ldots;$
2) $\theta(x-a)$
3) $\operatorname{sign}x;$
4)$9\frac{1}{x}$; 5) $\frac{1}{x\pm i0}$; 6) $|x|$; 7) $\theta(x)x^k,k=1,2,\ldots$; 8) $|x|^k,k=2,3,\ldots$; 9) $x^k\mathscr{P}\frac{1}{x},k=1,2,\ldots$; 10) $x^k\delta,k=1,2\ldots$
11) $x^k\delta^{(m)}(x),m\geq k$
13) $\mathscr{P}\frac{1}{x^3}$, где $\mathscr{P}\frac{1}{x^3}$ определена в задаче 7.10; 1
4)$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k),|a_k|\leq C(1+|k|)^m$ 15) $\theta^{(1/2)}(x)$ (определение дробныгх производныгх см. в § 8).

B-9.12

Доказать, что

$$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\right]=-2c-2\ln|\xi|,$$

где

$$c=\int_0^1\frac{1-\cos u}{u}du-\int_1^\infty\frac{\cos u}{u}du \text{ - постоянная Эйлера,}$$

а $\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\left(x\in R^1\right)$ огределена в задаче 7.26.

B-9.13

Доказать, что

$$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}\right]=-2\pi\ln|\xi|-2\pi c_0,$$

где обобщенная функция $\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2},x\in R^2$, огределяется формулой

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2},\varphi\right)=\int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}dx+\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|^2}dx$$

$$c_0=\int_0^1\frac{1-J_0(u)}{u}du-\int_1^\infty\frac{J_0(u)}{u}du$$

и J_0 - функция Бесселя.

B-9.14

Решить в $\mathscr{S}'$ интегральное уравнение

$$\int_0^\infty u(\xi)\cos\xi x dx=\theta(1-x)$$

B-9.15

Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx.$$

Ук аз ан и е. Воспользоваться равенством Парсеваля и задачей $9.8, 1)$.

B-9.16

Доказать, что

$$F \cdot \left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right] = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}, \quad \xi \in R^2.$$

B-9.17

Доказать:

1) $F\left[\frac{1}{|x|^2}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \quad \xi \in R^3;$

2) $F\left[|x|^{-k}\right] = 2^{n-k}\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}|\xi|^{k-n}, \xi \in R^n, 0<k<n.$

Ук аз ан и е. Воспользоваться формулой (2) при $f=|x|^{-k}$ в $\mathscr{S}'\left(R^1\right)$ и $\varphi = e^{-|x|^2/2}$.

B-9.18

Доказать, что $F\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{2\pi i}{\zeta}, \zeta = \xi + i\eta$.

B-9.19

Вычислить преобразование Фурье обобщенной функции $\frac{1}{4\pi r}\delta_{S_r}, n=3$, определенной в §6.

B-9.20

Методом преобразования Фурье доказать в $\mathscr{S}'\left(R^1\right)$, что:

1) $y = c_0\delta(x) + c_1\delta^1(x) + \ldots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$ - общее решение уравнения $x^n y = 0, n = 1, 2, \ldots;$

2) $\sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k \delta^{(k-m)}(x)$– общее решение уравнения $x^n y^{(m)} = 0, n > m$.

Ук а а н и е. Воспользоваться задачами $7.23, 2)$ и 7.24.

B-9.21

Доказать в $\mathscr{S}'\left(R^{n+1}(x,t)\right)$, где $(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$:

1) $F_x[\delta(x,t)] = 1(\xi)\cdot\delta(t);$

2) $F_x\left[\frac{\partial^m f(x,t)}{\partial t^m}\right] = \frac{\partial^m}{\partial t^m} F_x[f(x,t)];$

3) $F_x[\theta(at-|x|)] = 2\theta(t)\sin\frac{a\xi t}{\xi}, a>0, n=1$

4)$F_x[f(x)\delta(t)] = F[f](\xi)\delta(t), f \in \mathscr{S}'\left(R^n\right)$.

B-9.22

Доказать в $\mathscr{S}'\left(R^{n+m}\right)$:

1) $D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f(x,y)] = F_x\left[(ix)^\alpha D_y^\beta f\right];$

2) $F_x\left[D_x^\alpha D_y^\beta f\right] = (-i\xi)^\alpha F_x\left[D_y^\beta f\right].$

B-9.23

Доказать, что в $\mathscr{S}'\left(R^2\right)$

$$F_\xi^{-1}\left[\theta(t)e^{-a^2\xi^2 t}\right] = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/\left(4a^2 t\right)}.$$

Ук а з ан и е. Воспользоваться формулой (3) и задачей 9.8, 2). 119

B-9.24

Доказать, что в $\mathscr{S}'\left(R^{n+1}\right)$

$$F_{\xi}^{-1}\left[\theta(t) e^{-a^{2}|\xi|^{2} t}\right]=\theta(t)\left(\frac{1}{2 a \sqrt{\pi t}}\right)^{n} e^{-|x|^{2} /\left(4 a^{2} t\right)}.$$

У к а а н и е. Воспользоваться задачей 9.23.

B-9.25

Доказать, что в $\mathscr{S}'\left(R^{2}\right)$

$$F_{\xi}^{-1}\left[\theta(t) \frac{\sin a \xi t}{a \xi}\right]=\frac{1}{2 a} \theta(a t-|x|).$$

У к аз а н и е. Воспользоваться задачей $9.8, 1)$.

B-9.26

Доказать, что в $\mathscr{S}'\left(R^{3}\right)$

$$F_{\xi}^{-1}\left[\theta(t) \frac{\sin a|\xi| t}{a|\xi|}\right]=\frac{\theta(a t-|x|)}{2 \pi a \sqrt{a^{2} t^{2}-|x|^{2}}}.$$

Yк а з а и и е. Воспользоваться задачей 9.16.

B-9.27

Доказать, что в $\mathscr{S}'\left(R^{4}\right)$

$$F_{\xi}^{-1}\left[\theta(t) \frac{\sin a|\xi| t}{a|\xi|}\right]=\frac{\theta(t)}{4 \pi a^{2} t} \delta_{S_{a t}}(x)$$

(здесь $S_{a t}=\{x:|x|=a t\}$).
Ук а а н и е. Воспользоваться задачей 9.19.

B-9.28

Пусть f - финитная обобщенная функция и $\eta-$ любая функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в окрестности носителя f. Доказать, что функция $\tilde{f}(z)=\left(f(\xi), \eta(\xi) e^{i(z, \xi)}\right), z=x+i y$: а) не зависит от η; б) целая; в) $\tilde{f}(x)=F[f]$.

B-9.29

Доказать, что если f и g финитны и $f * g=0$, то либо $f=0$, либо $g=0$.
Ук аз ан и е. Воспользоваться задачей 9.28.

B-9.30

1) Доказать, что $F[\delta(x) \cdot 1(y)]=(2 \pi)^{m} 1(\xi) \delta(\eta)$;
2) обозначим δ-функцию на гиперплоскости $(a, x)=0$ пространства R^{n} через $\delta((a, x))$, так что

$$(\delta((a, x)), \varphi)=\int_{(a, x)=0} \varphi d s, \quad \varphi \in \mathscr{D}\left(R^{n}\right).$$

Доказать, что $F\left[\delta\left(a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}\right)\right]=2 \pi \delta\left(a_{2} \xi_{1}-a_{1} \xi_{2}\right)$.

15.4.5 Задачи на преобразование Лапласа обобщенных функций

В задачах 10.1-10.9 и 10.11-10.14 доказать утверждения.

B-10.1

Если $f(t)$ - локально интегрируема в $R^{1}, f(t)=0, t<0$ и

$$f(t)=O\left(e^{a t}\right), t \longrightarrow \infty, \text { то } f \in \mathscr{D}_{+}^{\prime}(a) \text { и }$$

$$\mathscr{F}(p)=\int_{0}^{\infty} f(t) e^{-p t} d t, \quad \sigma>a$$

B-10.2

Если $f \in \mathscr{D}'_+(a), f(t) \longleftrightarrow \mathscr{F}(p), \sigma > a$ и функция $\mathscr{F}(\sigma + i\omega)$ абсолютно интегрируема по ω на R^1 при некотором $\sigma > a$, то в этом случае формула обращения принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathscr{F}(p) e^{pt} dp.$$

B-10.3

1) $\mathscr{D}'_+(a_1) \subset \mathscr{D}'_+(a_2)$, если $a_1 \le a_2$;
2) если $f \in \mathscr{S}' \cap \mathscr{D}'_+$, то $f \in \mathscr{D}'_+(0)$.

B-10.4

Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, то:
1) $pf \in \mathscr{D}'_+(a)$, где $p-$ полином;
2) $f(kt) \in \mathscr{D}'_+(ka), k > 0$
3) $f(t)e^{\lambda t} \in \mathscr{D}'_+(a + \operatorname{Re} \lambda)$.

B-10.5

Если $f, g \in \mathscr{D}'_+(a)$, то $f * g \in \mathscr{D}'_+(a)$ и справедливо равенство

$$(f * g)e^{-\sigma t} = \left(fe^{-\sigma t}\right) * \left(ge^{-\sigma t}\right), \quad \sigma > a.$$

Ук а 3 а ни е. Воспользоваться 8.20.

B-10.6

Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, то:
1) $f(t - \tau) \in \mathscr{D}'_+(a), \tau \ge 0$;
2) $f^{(m)} \in \mathscr{D}'_+(a), m = 1, 2, \ldots$;
3) $f_{(m)} \in \mathscr{D}'_+(a), m = 1, 2, \ldots$

B-10.7

1) $\delta(t) \longleftrightarrow 1$;
2) $\delta^{(m)}(t - \tau) \longleftrightarrow p^m e^{-\tau p}, \tau \ge 0, p$ любое, $m = 0, 1, \ldots$;
3) $\theta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p}, \sigma > 0$;
4)$\theta(t)e^{i\omega t} \longleftrightarrow \frac{1}{p - i\omega}, \sigma > 0$; 5) $\theta(t)e^{-i\omega t} \longleftrightarrow \frac{1}{p + i\omega}, \sigma > 0$ 6) $\theta(t) \cos t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \sigma > 0$ 7) $\theta(t) \sin t \longleftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \sigma > 0$; 8) $\frac{\theta(t) t^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{\lambda t} \longleftrightarrow \frac{1}{(p - \lambda)^m}, \sigma > \operatorname{Re} \lambda, m = 0, 1, \ldots$; 9) $\theta(t) J_0(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}, \sigma > 0$.

B-10.8

Если f - функция из $\mathscr{D}'_+(a), f \in C^n(t \ge 0)$ и $f \longleftrightarrow \mathscr{F}$, то $\left\{f^{(n)}(t)\right\} \longleftrightarrow p^n \mathscr{F}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0) p^{n-k-1}, \quad \sigma > a$.

B-10.9

Если f и g - функции из $\mathscr{D}'_+(a), g \in C^1(t \ge 0)$ и $f \longleftrightarrow \mathscr{F}$, $g \longleftrightarrow \mathscr{G}$, То $\int_0^t f(\tau) \left\{g'(t - \tau)\right\} d\tau \longleftrightarrow p\mathscr{F}(p)\mathscr{G}(p) - g(+0)\mathscr{F}(p), \quad \sigma > a$.

B-10.10

Решить уравнение $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t)$, где $e(t)-$ локально интегрируемая функция, $e(t) = 0, t < 0$.

B-10.11

Фундаментальное решение $\mathscr{E}(t)$ уравнения

$$\mathscr{E}^{(m)} + a_1\mathscr{E}^{(m-1)} + \ldots + a_m\mathscr{E} = \delta$$

существует и единственно в классе $\mathscr{D}'_+(a)$ и удовлетворяет соотношению

$$\mathscr{E}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{Q(p)}, \quad \sigma > a,$$

где $\theta(p) = p^m + a_1p^{m-1} + \ldots + a_m, a = \max_j \operatorname{Re}\lambda_j, \lambda_j -$ корни полинома Q.

B-10.12

Если $f_\alpha(t), -\infty < \alpha < \infty$, - обобщенная функция, введенная в §8 (с. 110), то:
1) $f_\alpha(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p^\alpha}, \sigma > 0$, где $p^\alpha -$ та ее ветвь, для которой $p^\alpha > 0$ при $p > 0$;
2) $f_\alpha(t)e^{\lambda t} \longleftrightarrow \frac{1}{(p-\lambda)^\alpha}; \sigma > \operatorname{Re}\lambda$.

B-10.13

Если $|a_k| \leq c(1+k)^m, k = 0, 1, \ldots$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t-k) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kp}, \quad \sigma > 0.$$

B-10.14

Если $f(t) - T$-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде, то

$$\theta(t)f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt}dt, \quad \sigma > 0.$$

B-10.15

Найти решения уравнений в классе $\mathscr{D}'_+(a)$ (при надлежащем a): 1) $(\theta\cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$; 2) $(\theta t\cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$;
3) $\mathscr{E} + 2(\theta\cos t) * \mathscr{E} = \delta(t)$;
4) $\begin{cases} \theta * u_1 + \delta' * u_2 = \delta(t) \\ \delta * u_1 + \delta' * u_2 = 0 \end{cases}$

B-10.16

Пусть $\mathscr{E}_1 -$ решение уравнения $g * \mathscr{E}_1 = \theta$ в $\mathscr{D}'_+(a)$, причем $\mathscr{E}_1$ - локально интегрируемая функция, $\mathscr{E}_1 \in C^1(t \geq 0)$. Доказать, что решение в $\mathscr{D}'_+(a)$ уравнения $g * u = f$, где f - локально интегрируемая функция из $\mathscr{D}'_+(a)$, выражается формулой

$$u(t) = \mathscr{E}_1(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau)\left\{\mathscr{E}'_1(t-\tau)\right\}d\tau.$$

B-10.17

Вычислить преобразование Лапласа функции

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2^k, & k < t < k+1, k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

B-10.18

Решить уравнение $\chi * a = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\delta(t-k)$ в $\mathscr{D}'_+(\ln 2)$; функция $a(t)$ определена в задаче 10.17.

B-10.19

Доказать формулу: $\sin t = \int_0^t J_0(t-\tau) J_0(\tau) d\tau$.

B-10.20

Решить следующие задачи Коши:
1) $u' + 3u = e^{-2t}, \quad u(0) = 0$;
2) $u'' + 5u' + 6u = 12, \quad u(0) = 2, u'(0) = 0$;
3) $\left\{ \begin{array}{l} u' + 5u + 2v = e^{-t}, \\ v' + 2v + 2u = 0, \end{array} \right. u(0) = 1, v(0) = 0$.

15.4.6 Задачи на фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов

B-11.1

Доказать, что единственное в $\mathscr{D}'_+$ фундаментальное решение оператора

$$\frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m$$

выражается формулой задачи 8.26 (определение $\mathscr{D}'_+$ см. §8).

B-11.2

Доказать, что функция $\mathscr{E}(x)$ является фундаментальным решением оператора:
1) $\mathscr{E}(x) = \theta(x) e^{\pm ax}, \quad \frac{d}{dx} \mp a$;
2) $\mathscr{E}(x) = \theta(x) \frac{\sin ax}{a}, \frac{d^2}{dx^2} + a^2$;
3) $\mathscr{E}(x) = \theta(x) \frac{\operatorname{sh} ax}{a}, \quad \frac{d^2}{dx^2} - a^2$;
4)$\mathscr{E}(x) = \theta(x) e^{\pm ax} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \left(\frac{d}{dx} \mp a\right)^m, m = 2, 3, \ldots$

B-11.3

Найти единственные в $\mathscr{D}'_+$ фундаментальные решения следующих операторов:
1) $\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}$
2) $\frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 1$
3) $\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2$
4)$\frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 5$ 5) $\frac{d^3}{dx^3} - a^3$; 6) $\frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}$ 7) $\frac{d^4}{dx^4} - a^4$ 8) $\frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$.

B-11.4

Доказать, что:
1) $\mathscr{E}(x,y) = \frac{1}{\pi z} = \frac{1}{\pi(x+iy)}$– Фундаментальное решение операто- ра Коши-Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$
2) $\mathscr{E}(x,y) = \frac{\bar{z}^{k-1} e^{\lambda z}}{\pi \Gamma(k) z}, k = 1, 2, \ldots,$ – фундаментальное решение оператора $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda\right)^k$
3) $\mathscr{E}(x,y) = \frac{2\bar{z}^{k-1} z^{m-1}}{\pi \Gamma(k) \Gamma(m)} \ln |z|, k, m = 1, 2, \ldots,$ - фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^{k+m}}{\partial \bar{z}^k \partial z^m}$;
4)$\mathscr{E}(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda}{y - \lambda x} e^{-\mu \alpha}$– фундаментальное решение обобщенного оператора Коши-Римана $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} + \mu, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

B-11.5

Доказать, что $\mathscr{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$ - фундаментальное решение оператора Лапласа в R^2. Выяснить физический смысл.

В-11.6

Доказать: са в R^3; выяснить физический смысл;

2) $\mathscr{E}(x)=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, n=3,4,\ldots,-$ фундаментальное решение оператора Лапласа в R^n, где $\sigma_n=\int_{S_1} dS=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}-$ площадь поверхности единичной сферы в R^n;

3) $\mathscr{E}_{n,k}(x)=\frac{(-1)^k\Gamma(n/2-k)}{2^{2k}\pi^{n/2}\Gamma(k)}|x|^{2k-n}$ - фундаментальное решение итерированного оператора Лапласа Δ^k при $2k<n, k=1,2,\ldots$,

$$\mathscr{E}_{n,k}(x)=\frac{1}{\pi\cdot 2^{2k-1}\Gamma(k)}|x|^{2k-2}\ln|x|, \quad n=2.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 9.17, 2).

В-11.7

Доказать, что $\mathscr{E}(x)=-\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$ и $\overline{\mathscr{E}}(x)=-\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}-$ фундаментальные решения оператора Гельмгольца $\Delta+k^2$ в R^3.

В-11.8

Доказать, что если функция $u(x)$ удовлетворяет в R^3 уравнению $\Delta u+k^2u=0$ и условиям излучения

$$u(x)=O\left(|x|^{-1}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial|x|}-iku(x)=o\left(|x|^{-1}\right)$$

∞, то $u\equiv 0$.

при $|x|\longrightarrow\infty$, то $u\equiv 0$.

В-11.9

Доказать, что фундаментальными решениями оператора Гельмгольца $\Delta+k^2$ являются функции:

1) $\mathscr{E}(x)=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|)$ и $\overline{\mathscr{E}}(x,y)=\frac{i}{4}H_0^{(2)}(k|x|)$ в R^2, где $H_0^{(k)}$, $k=1,2,$ - функции Ханкеля;

2) $\mathscr{E}(x)=\frac{1}{i2k}e^{ik|x|}$ и $\overline{\mathscr{E}}(x)=-\frac{1}{i2k}e^{-ik|x|_{\text{в}}}\,R^1$.

В-11.10

Доказать, что фундаментальными решениями оператора $\Delta-k^2$ являются функции:

1) $\mathscr{E}(x)=-\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$ В R^3;

2) $\mathscr{E}(x)=-\frac{1}{2\pi}K_0(k|x|)$ в R^2, где $K_0(\xi)=i\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(i\xi)-$ функция Ханкеля мнимого аргумента;

3) $\mathscr{E}(x)=\frac{e^{-k|x|}}{2k}$ в R^1

4)$\mathscr{E}(x)=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\left(\frac{k}{|x|}\right)^{n/2-1}K_{n/2-1}(k|x|)$ в R^n.

В-11.11

Доказать, что если $\mathscr{E}_1(x,t)$ - фундаментальное решение оператора $\frac{\partial}{\partial t}+L\left(D_x\right)$, то $\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\mathscr{E}_1(x,t)-$ фундаментальное решение оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t}+L\left(D_x\right)\right)^k$.

В-11.12

Доказать, что:

1) $\mathscr{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-|x|^2/\left(4a^2t\right)}-$ фундаментальное решение оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta$ в R^n; выяснить физический смысл;

2) $\frac{\theta(t)t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n\Gamma(k)}e^{-|x|^2/\left(4a^2t\right)}$ – Ф фндаментальное решение оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)^k$ в $R^n, k=1,2,\ldots$

У к а з ан и е. Воспользоваться задачей 11.11.

В-11.13

Доказать, что $\mathscr{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct-(x+bt)^2/\left(4a^2t\right)}-$ фундаментальное решение оператора $\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-b\frac{\partial}{\partial x}-c$.

B-11.14

Доказать, что:

1) $\mathscr{E}_1(x,t) = -\frac{i\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{i\left(x^2/(4t)-\pi/4\right)}$ – Фундаментальное решение оператора Шрёдингера $i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (Указ ан и е. Воспользоваться формулой $\int_0^\infty e^{iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$)

2) $\mathscr{E}_n(x,t) = -\frac{i\theta(t)}{\hbar} \left(\frac{m_0}{2\pi\hbar t}\right)^{n/2} \exp\left\{i\left[\frac{|x|^2}{2\hbar t}(m+i0) - \frac{\pi n}{4}\right]\right\}$ – фундаментальное решение оператора $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta$; n любое;

3) $\frac{\theta(t)t^{k-1}}{(2a\sqrt{\pi t})^n \Gamma(k)} \exp\left\{\pm\left(\frac{|x|^2}{4ia^2 t} + \frac{\pi n}{4} i\right)\right\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – фундаментальное решение оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm ia^2\Delta\right)^k$ в R^n (У к а з ан и е. Воспользоваться задачей 11.11.).

B-11.15

Доказать, что:

1) $\mathscr{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at-|x|)$ - фундаментальное решение одномерного волнового оператора $\Box_a$; выяснить физический смысл;

2) $\mathscr{E}_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$ – фундаментальное решение двумерного волнового оператора $\Box_a$, $x = (x_1, x_2)$; выяснить физический смысл. Указ ан и е. Воспользоваться задачей 9.26.

B-11.16

Доказать, что:

1) $\mathscr{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi a}\delta\left(a^2t^2 - |x|^2\right)$, где $S_{at} : |x| = at$, является фундаментальным решением трехмерного волнового оператора $\Box_a$, $x = (x_1, x_2, x_3)$; выяснить физический смысл (

Ук аз ан и е. Воспользоваться задачей 9.27.);

3) $\frac{1}{\pi 2^{2k-1} a^{2k+1} \Gamma(k)\Gamma(k-1)} \left(a^2t^2 - |x|^2\right)^{k-2} \theta(at-|x|)$– фундаментальное решение оператора $\Box_a^k$ в R^n;

4)фундаментальное решение оператора $\Box_a$ в R^4 можно представить в виде

$$\mathscr{E}_3(x,t) = \frac{1}{8\pi a^3}\Box_a \theta(at-|x|).$$

B-11.17

Доказать, что

$$\mathscr{E}_n(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(2a)^{n-2}\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Box_a^{(n-3)/2} \left[\theta(t)\delta\left(a^2t^2-|x|^2\right)\right], \\ \frac{1}{(2a)^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Box_a^{(n-2)/2} \left[\frac{\theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\right], & n \text{ четное}, \end{cases}$$

является фундаментальным решением волнового оператора $\Box_a$.

Ук аз а н и е. При нечетных*"n воспользоваться формулой

$$\mathscr{E}_n(x,t) = \theta(t) F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}\right]$$

и задачей 9.27; при четных n применить метод спуска по переменной x_{n+1}.

B-11.18

Доказать, что $\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at-|x|)e^{b(at-x)/\left(2a^2\right)}$– фундаментальное решение оператора

$$\Box_a - b\frac{\partial}{\partial x} - \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{где} \quad a, b > 0.$$

Указ ан и е. Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{z\tau}}{z} dz = \theta(\tau), \quad \alpha > 0.$$

B-11.19

Доказать, что:

1) $\mathscr{E}(x,t) = -\theta(t)\theta(-x)e^{at+bx}$ - фундаментальное решение операгора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial t} + ab$, где $b > 0$ (см. указание к задаче 11.18);

2) $\mathscr{E}(x,t) = \theta(t)\theta(x)I_0(2m\sqrt{xy})$ - фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - m^2$ в R^2.

B-11.20

Доказать, что фундаментальным решением оператора $\Box_a - m^2$ является функция

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2a} I_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right).$$

B-11.21 Фундаментальное решение Клейна-Гордона (!?!??!??)

Доказать, что фундаментальным решением оператора Клейна-Гордона-Фока $\Box_a + m^2$ являются функции

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2a} J_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right), \quad n=1;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a^2} \frac{\cos\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-x^2}}, \quad n=2;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a}\delta\left(a^2t^2-|x|^2\right) - \frac{m}{4\pi a^2}\theta(at-|x|)\frac{J_1\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-|x|^2}\right)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad n=3,$$

где J_0, J_1- функции Бесселя.

Решение (!!! доучу когда-то, мб скоро!!!! не знаю пока!!! в 1ю впишу тоже это!!!)

B-11.22 Фундаментальное решение телеграфного уравнения (??)

Доказать, что фундаментальными решениями телеграфного оператора $\Box_a + 2m\frac{\partial}{\partial t}$ являются функции

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2a}e^{-mt}\theta(at-|x|)I_0\left(m\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\right), \quad n=1;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{e^{-mt}\theta(at-|x|)\operatorname{ch}\left(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}\right)}{2\pi a^2\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}}, \quad n=2;$$

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(at)}{2\pi a}e^{-mt}\delta\left(a^2t^2-|x|^2\right) - \frac{me^{-mt}\theta(at-|x|)I_1\left(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}\right)}{4\pi a^3\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}}, \quad n=3,$$

где $I_0(\xi) = J_0(i\xi), I_1(\xi) = -iJ_1(i\xi)-$ функции Бесселя мнимого аргумента.

У к а з а н и е. Воспользоваться фундаментальным решение Клейна-Гордона.

Решение

B-11.23 Оператор переноса (?????)

1) Доказать, что

$$\mathscr{E}(x,t) := v\theta(t)e^{-\alpha vt}\delta(x-vts),$$

где $(\theta(t)e^{-\alpha vt}\delta(x-vts), \varphi(x,t)) = \int_0^\infty e^{-\alpha vt}\varphi(vts,t)dt$ это фундаментальное решение оператора переноса

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} + (s, \operatorname{grad}\mathscr{E}) + \alpha\mathscr{E} = \delta(x,t), \quad |s|=1, \quad v>0, \quad \alpha\geq 0; \quad n=3.$$

2) Доказать, что

$$\mathscr{E}^0(x) := \left(\frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2}\delta\left(s-\frac{x}{|x|}\right), \varphi\right) = \int_0^\varphi e^{-\alpha\rho}\varphi(\rho s)d\rho$$

это фундаментальное решение стационарного оператора переноса

$$\left(S, \operatorname{grad}\mathscr{E}^0\right) + \alpha\mathscr{E}^0 = \delta(x), \quad n=3.$$

B-11.24

Найти фундаментальное решение уравнения $Z * \mathscr{E} = \delta$, где Z из задачи 8.30.

B-11.25

Доказать, что если $\mathscr{E}(x,t)$ - фундаментальное решение оператора переноса

$$L(D) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \alpha, \quad |a| \neq 0,$$
$$\frac{1}{\Gamma(k)|a|^{2(k-1)}} \left(\bar{a}_1 x_1 + \ldots + \bar{a}_n x_n\right)^{k-1} \mathscr{E}(x,t)$$

То - фундаментальное решение оператора $L^k(D)$.

Ук аз ан и е. Воспользоваться индукцией по k. Пусть $f(x,t) \in \mathscr{D}'\left(R^{n+1}\right)$ и $\varphi(x) \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$. Введем обобщенную функцию $(f(x,t), \varphi(x)) \in \mathscr{D}'\left(R^1\right)$, действующую на основные функции $\psi \in \mathscr{D}\left(R^1\right)$ по формуле $((f(x,t), \varphi(x)), \psi(t)) = (f, \varphi\psi)$. Из определения вытекает, что

$$\left(\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}, \varphi(x)\right) = \frac{d^k}{dt^k}(f(x,t), \varphi(x)), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Говорят, что обобщенная функция $f(x,t)$ прияадлежит классу C^p по переменяой t в интервале (a,b), если для любой $\varphi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ обобщенная функция $(f(x,t), \varphi(x)) \in C^p(a,b)$.

B-11.26

Для фундаментальных решений $\mathscr{E}_n(x,t), n = 1,2,3$, волнового оператора, рассмотренных в задачах 11.15-11.16, доказать:
1) $\mathscr{E}_n(x,t) \in C^\infty$ по $t \in [0,\infty)$;
2) $\mathscr{E}_n(x,t) \to 0, \frac{\partial \mathscr{E}_n(x,t)}{\partial t} \longrightarrow \delta(x), \frac{\partial^2 \mathscr{E}_n(x,t)}{\partial t^2} \to 0$ при $t \longrightarrow +0$ в $\mathscr{D}'\left(R^n\right)$

B-11.27

Для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ оператора теплопроводности (см. задачу 11.12) доказать, что

$$\mathscr{E}(x,t) \longrightarrow \delta(x), \quad t \longrightarrow +0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'\left(R^n\right).$$

B-11.28

Для фундаментального решения оператора Шрёдингера (см. задачу 11.1
4)доказать, что

$$\mathscr{E}_1(x,t) \longrightarrow -i\delta(x), \quad t \longrightarrow +0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'\left(R^1\right).$$

B-11.29

Для фундаментального решения из задачи 11.18 доказать:
1) $\mathscr{E}(x,t) \in C^\infty$ по $t \in [0,\infty)$
2) $\mathscr{E}(x,t) \longrightarrow 0, \frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t} \longrightarrow \delta(x), \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^2} \to -\frac{b}{a}\delta(x), t \longrightarrow +0$ в $\mathscr{D}'\left(R^1\right)$.

B-11.30

Для фундаментального решения из задачи 11.13 доказать, что

$$\mathscr{E}(x,t) \longrightarrow \delta(x), \quad t \longrightarrow +0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'\left(R^1\right).$$

15.5 Функциональные пространства и интегральные уравнения

15.5.1 Задачи на измеримость функций, интеграл Лебега

(это же в функане. Скучные задачи, мб когда-то посмотрю.)

B-3.1

Установить, что следующие множества являются множествами меры нуль:
1) конечное множество точек;
2) счетное множество точек;
3) пересечение счетного множества множеств меры нуль;
4)объединение счетного множества множеств меры нуль; 5) гладкая ($n-1$)-мерная поверхность; 6) гладкая k-мерная поверхность $(k \leq n-1)$. В задачах 3.2-3.9 доказать утверждения.

B-3.2

Функция Дирихле $\chi(x)$ (равная 1, если все координаты точки x рациональны, и 0 в противоположном случае) равна нулю п. в.

B-3.3

Функция $f(x)=\frac{1}{1-|x|}$ почти всюду непрерывна в R^n.

B-3.4

Последовательность функций $f_n(x)=|x|^n$ в шаре $|x| \leq 1$ сходится к нулю п. в.

B-3.5

Т ео рем а. Для того итобы множестео E было мноэестеом меры куль, кеобходимо и достаточно, итобь существовало такое его покрыттие сиетяой системой открьттых кубов с кокечной суммой объемов, при котором каждая точка E оказывается покрытой бесконечньм множеством кубов.

B-3.6

Функция $f \in C(Q)$ измерима.

B-3.7

Если $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны и $g(x)$ измерима в Q, то $f(x)$ тоже измерима в Q.

B-3.8

Предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций является измеримой функцией.

B-3.9

Функция, непрерывная в $\bar{Q}$ за исключением подмножества, составленного из конечного (или счетного) числа гладких k-мерных поверхностей $(k \leq n-1)$, измерима в Q.

B-3.10

Установить измеримость следующих функций, заданных на отрезке $[-1,1]$ а) $y=\operatorname{sign} x$; б) $y=\begin{cases}\sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ в) $y=\begin{cases}\operatorname{sign}\left(\sin \cdot \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x=0\end{cases}$ г) $y=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{если } x=\frac{m}{n} \text{ при взаимно простых } m, n, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$

B-3.11

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы в Q. Установить измеримость следуюших функций: а) $f(x) g(x)$; б) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x) \neq 0, x \in Q$); в) $|f(x)|$; г) $(f(x))^{g(x)}$, если $f(x)>0$.

B-3.12

Пусть $f(x) \in C(Q)$ и в каждой точке $x \in Q$ существует производная f_{x_i}. Доказать, что f_{x_i} измерима в Q.

B-3.13

а) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы в Q. Доказать измеримость в Q функций $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$.
б) Доказать, что всякая измеримая функция $f(x)$ есть разность двух неотрицательных измеримых функций

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \min\{0, -f(x)\}.$$

B-3.14

Доказать, что неубывающая (невозрастающая) на отрезке $[a, b]$ функция измерима.

B-3.15

Доказать, что если $f(x)$ измерима в Q, то существует последовательность многочленов, сходящихся к $f(x)$ п. в. в Q.

В задачах 3.16-3.20 доказать утверждения.

B-3.16

Если $f(x) \geq 0$ и $\int_Q f(x)dx = 0$, то $f(x) = 0$ п.в. в Q.

B-3.17

Если $f(x) = 0$ п. в. в Q, то $\int_Q f dx = 0$.

B-3.18

Если $f, g \in L_1(Q)$, то $\alpha f + \beta g \in L_1(Q)$ при любых постоянных α и β.

B-3.19

Если $f \in L_1(Q)$, то $|f| \in L_1(Q)$ и

$$\left| \int_Q f dx \right| \leq \int_Q |f| dx$$

B-3.20

Если $f \in L_1(Q)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая финитная функция $g_\varepsilon \in C(\bar{Q})$, что $\int_Q |f - g_\varepsilon| \, dx < \varepsilon$.

B-3.21

Проверить, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рациональное}, \\ 0, \text{ если } x \text{ иррациональное}, \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$, но не интегрируема по Риману. Чему равен ее интеграл Лебега?

B-3.22

Найти интегралы по отрезку $[0, 1]$ от следующих функций (предварительно доказав их интегрируемость): а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально}; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } 1/3, \\ x^3, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } 1/3, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально}; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, \text{ если } x \text{ иррационально и меньше } 1/2, \\ x^2, \text{ если } x \text{ иррационально и больше } 1/2, \\ 0, \text{ если } x \text{ рационально}; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = m/n, \text{ где } m, n \text{ взаимно прос} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} x^{-1/3}, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ x^3, & \text{если } x \text{ рационально}; \end{cases}$ е) $f(x) = \operatorname{sign} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$.

В-3.23

При каких значениях α интегрируемы по шару $|x|<1$ следующие функции: а) $f(x)=\frac{1}{|x|^2}$ б) $f(x)=\frac{1}{(1-|x|)^\alpha}$ в) $f(x)=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{|x|^\alpha}$?

В-3.24

Пусть $g(x)$ - измеримая и ограниченная функция в ограниченной области Q. Показать, что функция $f(x)=\int_Q \frac{g(\xi)}{|x-\xi|^\alpha}d\xi$ принадлежит $C^k(R^n)$ при $k<n-\alpha$.

В-3.25

Пусть $f\in L_1(Q)$. Показать, что функция

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если в точке } x|f(x)|<N, \\ N, & \text{если в точке } x|f(x)|\geq N, \end{cases}$$

интегрируема по Q и справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\int_Q f_N(x)dx=\int_Q f(x)dx.$$

В-3.26

Пусть $Q=(0<x_1<1,0<x_2<1)$, а функция $f(x)$ задана в Q следующим образом: а) $f(x)=\begin{cases} \frac{x_1x_2}{|x|^4} & \text{при } (x_1,x_2)\neq(0,0), \\ 0 & \text{при } x_1=x_2=0 \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} \frac{x_1^2-x_2^2}{|x|^4} & \text{при } (x_1,x_2)\neq(0,0), \\ 0 & \text{при } x_1=x_2=0; \end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x_2^2} & \text{при } 0<x_1<x_2<1, \\ -\frac{1}{x_1^2} & \text{при } 0<x_2<x_1<1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

1) Принадлежат ли эти функции пространству $L_1(Q)$?

2) Принадлежат ли $L_1(0,1)$ функции $\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1, \int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2$?

3) Выполняется ли равенство

$$\int_0^1 dx_1\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2=\int_0^1 dx_2\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1?$$

В-3.27

На отрезке $[0,1]$ задана последовательность ступенчатых функций $f_n(x), n=1,2,\ldots$

$$f_n(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } \frac{i}{2^k}\leq x\leq\frac{i+1}{2^k} \\ 0 \text{ для остальньтх } x\in[0,1], \end{cases}$$

где целые числа n,k,i связаны соотношениями

$$n=2^k+i,\quad 0\leq i\leq 2^k-1.$$

Показать, что $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n dx=0$ и что $f_n(x)\nrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$ для $x\in[0,1]$.

Множество измеримых в Q функций, квадрат модуля которых принадлежит $L_1(Q)$, называется пространством $L_2(Q)$ (при этом, как и в случае $L_1(Q)$; эквивалентные функции считаются отождествленными). В задачах 3.28-3.33 доказать утверждения.

В-3.28

Если $f_1,f_2\in L_2(Q)$, то $\alpha f_1+\beta f_2\in L_2(Q)$ при любых постоянных α и β.

В-3.29

Если $f\in L_2(Q)$ и Q - ограниченная область (или область с ограниченным объемом), то $f\in L_1(Q)$.

В-3.30

Ни одно из включений $L_1(R^n)\subset L_2(R^n), L_2(R^n)\subset L_1(R^n)$ места не имеет.

B-3.31

Если $f, g \in L_2(Q)$, то $f \cdot g \in L_1(Q)$.

B-3.32

Если $f, g \in L_2(Q)$, то имеет место неравенство Буняковского

$$\left|\int_Q f \cdot g dx\right| \leq \left(\int_Q |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_Q |g|^2 dx\right)^{1/2}.$$

B-3.33

Если $f, g \in L_2(Q)$, то имеет место неравенство Минковского

$$\left(\int_Q |f+g|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_Q |f|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_Q |g|^2 dx\right)^{1/2}.$$

B-3.34

Установить принадлежность к $L_2(Q)$ следующих функций: а) $y = x^{-1/3}, \quad Q = [0,1]$; б) $y = \frac{\sin x}{x^{3/4}}, \quad Q = (0,1)$ в) $y = \begin{cases} x^{-1/3}\cos x, & x \text{ иррационально,} \\ x^{-1/3}, & x \text{ рационально, } x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad Q = [-1,1]$; г) $y = \begin{cases} \frac{\sin(x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & |x| \neq 0, \\ 0, & |x| = 0, \end{cases} \quad Q = (|x| < 1)$

д) $y = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3}\,\mathrm{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)}, & |x| \neq 0, x \neq 1/k, \\ 0, & x = 0, x = 1/k, \end{cases} \quad Q = [0,1].$

B-3.35

При каких α и β функция $f(x) = \frac{1}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta}$ принадлежит $L_2(Q)$, если $Q = \{|x_1| + |x_2| > 1\}$?

B-3.36

При каких α функция $r^{-\alpha}, r = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, принадлежит $L_2(Q)$, если: а) $Q = (r < 1)$; б) $Q = (r > 1)$?

B-3.37

При каких α функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin|x|^2}{|x|^\alpha} & \text{при } |x| \neq 0, \\ 0 & \text{при } |x| = 0, \end{cases} \qquad |x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$$

принадлежит $L_2(Q)$, если $Q = (|x| < 1)$?

B-3.38

При каких α функция $|x|^{-\alpha}$, где $|x| = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$, принадлежит $L_2(Q)$, если: а) $Q = (|x| < 1)$ б) $Q = (|x| > 1)$; в) $Q = R^n$?

B-3.39

Пусть функция $g \in L_2(Q)$, где Q - ограниченная область. Показать, что функция $f(x) = \int_Q \frac{g(y)}{|x-y|^\alpha} dy$ для $\alpha < \frac{n}{2}$ принадлежит пространству $C^k(\bar{Q})$ при $k < \frac{n}{2} - \alpha$.

B-3.40

Показать, что для функции $f \in L_2(Q)$(Q - ограниченная область) по любому $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f_\varepsilon \in C(\bar{Q})$, что

$$\int_Q |f - f_\varepsilon|^2 dx < \varepsilon.$$

15.5.2 Задачи на Функциональные пространства

B-4.1

Установить, что следующие множества являются линейными пространствами: а) множество $C^k(Q), 0 \leq k \leq \infty$; б) множество точек n-мерного пространства R^n; множество точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$; в) множество финитныхх в Q функций; г) множество ограниченных в Q функций; д) множество аналитических функций в области Q комплексной плоскости $\mathbb{C}$; е) множество функций из $C(\bar{Q})$, обращающихся в нуль на некотором множестве $E \in \bar{Q}$ ж) множество $C\left(Q \backslash \left\{x^0\right\}\right)$, где $x^0 \in Q$;

3) множество функций f из $C(\bar{Q})$, для которых $\int_Q f\varphi dx = 0$, где φ - некоторая функция из $C(\bar{Q})$, а Q - ограниченная область; и) множество функций f из $C(\bar{Q})$, для которых $\int_S f\varphi ds = 0$, где φ - некоторая функция из $C(\bar{Q})$, а. S - ограниченный кусок гладкой поверхности, лежашей в Q; к) множество функций, интегрируемых по Риману (по области Q); л) множество принадлежащих $C^k(\bar{Q})$ решений линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(x) D^\alpha f = 0, \quad \text{где} \quad A_\alpha \in C(\bar{Q}), \quad |\alpha| \leq k;$$

м) множество измеримых в Q функций; н) пространство $L_1(Q)$; о) пространство $L_2(Q)$.

B-4.2

Убедиться, что следующие множества функций не составляют линейного пространства: а) множество функций из $C(\bar{Q})$, равньт 1 в некоторой точке $x^0 \in Q$; б) множество функций $f \in C(\bar{Q})$, для которых $\int_Q f dx = 1(Q-$ ограниченная область); в) множество решений дифференциального уравнения $\Delta u = 1$.

B-4.3

Доказать, что следующие системы функций линейно независимы: а) $1, x, x^2 \ldots$ на отрезке $[a, b](a < b)$; б) $x^\alpha, |\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$, в области Q; в) $e^{ikx}, k = 0, 1, \ldots$, на отрезке $[a, b]$; г) $[f(x)]^k k = 0, 1, \ldots$, в области Q, где $f(x)$ - некоторая функция из $C(Q), f \not\equiv \text{const}$.

B-4.4

Доказать, что множество $C(\bar{Q})$ является линейным нормированным пространством с нормой: 1) $\|f\|_{C(\bar{Q})} = \max_{x \in \bar{Q}} |f(x)|$; 2) $\|f\|'_{C(\bar{Q})} = 13 \max_{x \in \bar{Q}} |f(x)|$.

B-4.5

Доказать, что множество $C^k(\bar{Q})$ есть линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{C^k(\bar{Q})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{Q}} |D^\alpha f(x)|.$$

B-4.6

Пусть $E-$ некоторое множество из $\bar{Q}$. Показать, что множество непрерывных в $\bar{Q}$ функций $f(x)$, обращающихся в нуль в точках E, есть линейное нормированное пространство с нормой (1) при $k = 0$.

B-4.7

Установить, что следующие множества определенных в ограниченной области Q функций являются линейными нормированными пространствами с нормой (1) при $k = 0$: а) множество функций из $C(\bar{Q})$, финитных в Q; б) множество $C^\infty(\bar{Q})$; в) множество аналитических в Q и непрерывных в $\bar{Q}$ функций.

B-4.8

Убедиться, что в R^n можно ввести норму следующим обра30М: а) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ б) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$; в) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i$.

B-4.9

Убедиться, что при любом $p \geq 1$ в R^n можно ввести норму формулой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Найти $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

B-4.10

Показать, что при любом $p \geq 1$ в качестве нормы в $C(\bar{Q})$ можно взять выражение

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f|^p dx \right)^{1/p}$$

(область Q ограничена). Найти $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

B-4.11

Убедиться, что линейные пространства примеров 4.4, 4.5, $4.6, 4.8, 4.9$ являются банаховыми (т.е. полными в соответствующих нормах), а линейные нормированные пространства примеров B-4.7, 4.10 при конечном p - неполными.

B-4.12

Показать, что в пространствах $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$ можно ввести нормы

$$\|f\|_{L_1(Q)} = \int_Q |f| dx,$$

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left(\int_Q |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

B-4.13

Пусть область Q ограничена. Показать, что: а) множество $\dot{C}^{\circ}(\bar{Q})$ функций из $C(\bar{Q})$, обращающихся в нуль на границе области Q, есть банахово подпространство $C(\bar{Q})$ (с нормой (1) при $k = 0$); б) подмножество функций f из:
1) $C(\bar{Q})$;
2) $L_1(Q)$;
3) $L_2(Q)$, для которых $\int_Q f(x)\varphi_i(x)dx = 0, i = 1, 2, \ldots, s$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$– некоторые функции из $C(\bar{Q})$, есть банахово подпространство пространства $C(\bar{Q})$ (с нормой (1) при $k = 0), L_1(Q)$ (с нормой (3)) и $L_2(Q)$ (с нормой (4)) соответственно.

B-4.14

Показать, что счетное множество, составленное из линейных комбинаций с рациональными коэффициентами одночленов $x^\alpha, x = (x_1, \ldots, x_n), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$, всюду плотно в: а) $C(\bar{Q})$ (норма (1) при $k = 0$); б) $L_1(Q)$ (норма (3)); в) $L_2(Q)$ (норма (4)), где Q - ограниченная область.

B-4.15

Показать, что $L_2(Q)$ - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_Q f\bar{g} dx.$$

B-4.16

Подмножество функций $f \in L_2(Q)$, ортогональныт к некоторым функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ из $L_2(Q)$, образует подпространство пространства $L_2(Q)$.

Пусть в области Q задана непрерывная и положительная функция $\rho(x)$ (весовая функция). Обозначим $L_{2,\rho}(Q)$ множество измеримых в Q функций $f(x)$, для которыг $\rho|f|^2 \in L_1(Q)$.

B-4.17

Показать, что $L_{2,\rho}(Q)$ - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_Q \rho f \bar{g} dx$$

B-4.18

Доказать, что: а) $L_2(Q) \subset L_{2,\rho}(Q)$, если $\rho(x)$ ограничена в Q; б) $L_{2,\rho}(Q) \subset L_2(Q)$, если $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ в Q ($\rho_0 = \text{const}$).

B-4.19

Установить ортогональность в $L_2(0, 2\pi)$ тригонометрической системы $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$

B-4.20

Доказать, что системы функций $\sin(n + 1/2)x, n = 1, 2, \ldots,$ и $\cos(n + 1/2)x, n = 1, 2, \ldots,$ ортогональны в $L_2(0, \pi)$.

B-4.21

Доказать, что многочлены Јежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1 \right)^n \right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

образуют ортонормированную систему в $L_2(-1, 1)$.

B-4.22

Доказать, что система функций

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n(\arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

есть система многочленов (многочлены Чебышева), ортонормированная в $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1, 1)$.

B-4.23

Доказать, что система функций

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

есть система многочленов (многочлены Эрмита), ортогональная в $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$

B-4.24

Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, заданного на функциях из $C^2((0, 1)) \cap C^1([0, 1])$ при граничных условиях $(hu - u_x)|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, h$ - постоянная, ортогональны в $L_2(0, 1)$.

B-4.25

Показать, что отвечающие различным значениям собственные функции оператора $-\Delta$, заданного на функциях $f \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ при граничном условии $u|_\Gamma = 0$ или $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + g(x)u \right)\Big|_\Gamma = 0$, где $g \in C(\Gamma)$, ортогональны в $L_2(Q)$.

B-4.26

Пусть $\rho \in C(\bar{Q}), \rho(x) \geq \rho_0 > 0$. Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора $-\frac{1}{\rho(x)}\Delta$, заданного на $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в $L_{2,\rho}(Q)$.

B-4.27

Пусть $p \in C^1[0,1], q \in C[0,1], \rho \in C[0,1], \rho(x) \geq \rho_0 > 0$. Показать, что отвечающие различнымм собственным значениям собственные функции оператора

$$-\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + \frac{q(x)}{\rho(x)},$$

заданного на $C^2((0,1)) \cap C^1([0,1])$ при граничных условиях $u_x|_{x=0} = 0,\ (u_x + Hu)|_{x=1} = 0 (H-$ постоянная), ортогональны в $L_{2,\rho}(0,1)$.

B-4.28

Пусть $p \in C^1(\bar{Q}), \quad q \in C(\bar{Q}), \rho \in C(\bar{Q}), \rho(x) \geq \rho_0 > 0$. Показать, что отвечающие различным собственным значениям собственные функции оператора $-\frac{1}{\rho(x)} \operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q(x)$, заданного на $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ при граничных условиях задачи 4.25, ортогональны в $L_{2,\rho}(Q)$.

B-4.29

Показать, что принадлежащие $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ решения в Q уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющие при различныт λ граничному условию $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u\right)\big|_\Gamma = 0$, ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

B-4.30

Показать, что последовательность $\sin kx, k = 1, 2, \ldots$, сходится слабо к нулю в $L_2(0, 2\pi)$, но не сходится в норме $L_2(0, 2\pi)$. В задачах 4.31-4.39 доказать утверждения.

B-4.31

Если последовательность $f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится к $f(x)$ по норме $L_2(Q)$, то она сходится и слабо к $f(x)$.

B-4.32

Если последовательность $f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится к $f(x)$ по норме $L_2(Q)$, то $\int_Q f_n dx \longrightarrow \int_Q f dx,\ n \longrightarrow \infty$($Q$-ограниченная область).

B-4.33

Если $u_k \in L_2(Q), \quad k = 1, 2, \ldots$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится

к $u(x)$ по норме $L_2(Q)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \int_Q u_k dx = \int_Q u dx (Q-$ ограниченная область). область). $C(\bar{Q})$ сходится к $f(x)$ равномерно в $\bar{Q}$, то она сходится и по норме $L_2(Q)$ (Q - ограниченная область).

B-4.35

Если последовательность $f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится слабо к $f(x) \in L_2(Q)$, то последовательность норм $\|f_n(x)\|_{L_2(Q)}, n = 1, 2, \ldots$, ограничена.

B-4.36

Если последовательность $f_n(x), n = 1, 2, \ldots$, функций из $L_2(Q)$ сходится слабо к $f(x) \in L_2(Q)$ и $\|f_n(x)\| \longrightarrow \|f(x)\|$ при $n \longrightarrow \infty$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и по норме $L_2(Q)$.

B-4.37

Для любой функции $f(x) \in L_2(Q)$ имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2$$

где $f_k, k = 1, 2, \ldots$, - коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $e_1, e_2, \ldots$

B-4.38

Любая ортонормированная система $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ в $L_2(Q)$ сходится слабо к нулю, но не сходится по норме $L_2(Q)$.

B-4.39

Для любой $f \in L_2(Q)$

$$\min_{c_1,\ldots,c_n} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k e_k \right\|$$

(т. е. n-я частная сумма ряда Фурье наилучшим образом приближает $f(x)$ в $L_2(Q)$).

B-4.40

Найти многочлен 2 -й степени, наилучшим образом приближающий в $L_2(-1,1)$ функцию: а) x^3; б) $\sin \pi x$; в) $|x|$.

B-4.41

Найти тригонометрический многочлен первого порядка, наилучшим образом приближающий в $L_2(-\pi,\pi)$ функцию: а) $|x|$; 5) $\sin \frac{x}{2}$.

B-4.42

Найти многочлен первой степени, наилучшим образом приближающий в $L_2\left(Q_i\right)$ функцию $x_1^2 - x_2^2$, где Q_i: а) круг $x_1^2 + x_2^2 < 1$ б) квадрат $0 < x_1, x_2 < 1$.

B-4.43

Установить полноту в $L_2(Q)$ систем: а) $\sin kx, k = 1, 2, \ldots, Q = [0,\pi]$; б) $\sin(2k+1)x, k = 0, 1, \ldots, Q = [0, \pi/2]$. В задачах 4.44-4.50 доказать утверждения.

B-4.44

Многочлены Лежандра (задача 4.21) и многочлены Чебышева (задача 4.22) образуют ортонормированные базисы пространства $L_2(-1,1)$ и $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1,1)$ соответственно.

B-4.45

Чтобы ортонормированная в $L_2(Q)$ система $e_1, e_2, \ldots$ была ортонормированным базисом $L_2(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in L_2(Q)$ выполнялось неравенство ПарсеваляСтеклова

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 .$$

B-4.46

Если $f \in L_2(a,b)$ и $\int_a^b x^k f(x) dx = 0$ для $k = 0, 1, \ldots$, то $f(x) = 0$ п. в. на (a,b).

B-4.47

Если $f \in L_2$ и $\int_Q x^\alpha f(x) dx = 0$ для всех $\alpha, |\alpha| = 0, 1, \ldots$, то
$f(x) = 0$ п. в. в Q.

B-4.48

Если f_k и $g_k, k = 1, 2, \ldots$, - коэффициенты Фурье функций f и g из $L_2(Q)$ по некоторому ортонормированному базису, то

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k .$$

В-4.49

Всякая ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима.

В-4.50

Для того чтобы система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из $L_2(Q)$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы определитель Г рамма $\det \|(\varphi_i, \varphi_j)\|, i, j = 1, \ldots, n$, был отличен от нуля.

В-4.51

Найти явное выражение функций $e_k, k = 1, 2, \ldots, n$, через функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

В-4.52

Ортонормировать в $L_{2,\rho}(Q)$ методом Грамма-Шмидта следующие последовательности функций, предварительно убедившись в их линейной независимости: а) $1, x, x^2, x^3 \quad (\rho \equiv 1, Q = (-1, +1))$; б) $1 - x, 1 + x^2, 1 + x^3 \quad (\rho \equiv 1, Q = (-1, +1))$; в) $\sin^2 \pi x, 1, \cos \pi x \quad (\rho \equiv 1, Q = (-1, +1))$; г) $1, x, x^2 \quad (\rho = e^{-x}, Q = (0, \infty))$; д) $1, x, x^2 \quad \left(\rho = e^{-x^2/2}, Q = (-\infty, +\infty)\right)$; е) $1, x, x^2 \quad \left(\rho = \sqrt{1 - x^2}, Q = (-1, 1)\right)$; ж) $1, x, x^2 \quad \left(\rho = 1/\sqrt{1 - x^2}, Q = (-1, 1\right.$

В-4.53

Показать, что в результате ортонормирования системы $1, x, x^2, \ldots$ методом Грамма-ШМидта в скалярном произведении

$$(f, g) = \int_0^1 \frac{f\bar{g}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

получается ортонормированный базис пространства $L_{2,1/\sqrt{1-x^2}}(-1, 1)$, состоящий из многочленов Чебышева $T_n(x), n = 1, 2, \ldots$

В-4.54

Ортонормировать систему многочленов $1, x_1, x_2$ в круге $|x| < 1$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u\bar{v} dx.$$

В-4.55

Ортонормировать систему многочленов $1, x_1, x_2, x_3$ в шаре $|x| < 1, x = (x_1, x_2, x_3)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{|x|<1} u\bar{v} dx.$$

В-4.56

Обозначим через $L_2'(-\infty, \infty)$ множество таких функций $\boldsymbol{f}(x) \in L_{2,\text{ loc}}(-\infty, \infty)$, для которых существует конечный предел $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} \int_{-k}^{k} |f|^2 dx$. Показать, что $L_2'(-\infty, \infty)$ - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} \int_{-k}^{k} f\bar{g} dx.$$

В-4.57

Доказать, что система функций $e^{i\alpha x}$, где α - любое вещественное число, является ортонормированной системой в $L_2'(-\infty, \infty)$ (см. предыдущую задачу).

В-4.59

Показать, что из существования о.п. $D^\alpha f$ не следует существования о.п. $D^{\alpha'} f$ при $\alpha_i' \leq \alpha_i, i = 1, \ldots, n, |\alpha'| < |\alpha|$.

Ук а а н и е. Рассмотреть функцию $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, где $f_i(x_i)$ не имеют о.п. первого порядка.

В-4.60

Показать, что если в области Q функция $f(x)$ имеет о. п. $D^{\alpha} f$, то и в любой подобласти $Q' \subset Q$ функция $f(x)$ имеет о.п. $D^{\alpha} f$.

В-4.61

Пусть в области Q_1 задана функция $f_1(x)$, имеющая о. . $D^{\alpha} f_1$, а в области Q_2 - функция $f_2(x)$, имеющая о. п. $D^{\alpha} f_2$. Доказать, что если $Q_1 \cup Q_2$ - область и для $x \in Q_1 \cap Q_2 f_1(x) = f_2(x)$, то функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in Q_1, \\ f_2(x), & x \in Q_2 \end{cases}$$

meeet о. п. $D^{\alpha} f$ в $Q_1 \cup Q_2$, равную $D^{\alpha} f_1$ в Q_1 и $D^{\alpha} f_2$ в Q_2.

В-4.62

Iусть

$$f\left(x_1, x_2\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } |x| < 1, x_2 > 1, \\ -1, \text{ если } |x| < 1, x_2 < 1. \end{cases}$$

Убедиться, что $f\left(x_1, x_2\right)$ имеет обобщенные производные первого порядка в каждом из полукругов, но не имеет о.п. по x_2 в круге $|x| < 1$.

В-4.63

Доказать свойства средних функций: а) $f_h \in C^{\infty}\left(R^n\right)$ б) $f_h(x)$ сходятся при $h \longrightarrow 0$ к $f(x)$ в $L_2(Q)$, если $f \in L_2(Q)$; в) в любой строго внутренней подобласти $Q' \Subset Q$ при достаточно малом h имеет место равенство $\left(D^{\alpha} f\right)_h = D^{\alpha} f_h$, т. е. обобщенная производная от средней функции равна средней функции от обобщенной производной. В задачах 4.64-4.72 доказать утверждения.

В-4.64

Если у функции $f(x)$ в области Q существует о.п. $D^{\alpha} f = \omega(x)$, а для функции $\omega(x)$ существует о. п. $D^{\beta} \omega$, то существует о.п. $D^{\alpha+\beta} f$

В-4.65

а) $y = \operatorname{sign} x \notin H^1(-1,1)$; б) $y = |x| \in H^1(-1,1), \quad y = |x| \notin H^2(-1,1)$.

В-4.66

Если $f \in H^1(a,b)$ и о.п. $f'(x) = 0$, то $f(x) = \text{const}$ п. в.

В-4.67

Если $f \in H^1(a,b)$, то $f(x)$ эквивалентна на $[a,b]$ непрерывной функции.

В-4.68

Если $f(x) \in H^1(-\infty, \infty)$, то $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

В-4.69

Обозначим через $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$ подпространство пространства $H^1(0,2\pi)$, состоящее из всех функций $f(x)$ из $H^1(0,2\pi)$, для которых $f(0) = f(2\pi)$.

Доказать следующее утверждение: для того чтобы функция $f(x)$ (из $H^1(0,2\pi)$) принадлежала $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд с общим членом $n^2\left(a_n^2 + b_n^2\right)$, где

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Равенство

$$\|f\|_{\widetilde{H}^1(0,2\pi)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\left(k^2 + 1\right)$$

определяет одну из зквивалентных норм $\tilde{H}^1(0,2\pi)$.

B-4.70

Для того чтобы функция $f \in L_2(0,\pi)$ принадлежала $\overset{\circ}{H}{}^1(0,\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд с общим членом $k^2 b_k^2$, $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx dx$.При этом

$$\|f\|^2_{H^1(0,\pi)} = \int_0^\pi \left(f^2 + f'^2\right) dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty \left(k^2+1\right) b_k^2$$

B-4.71

Для любой $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(a,b)$ имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Стеклова)

$$\int_a^b f^2 dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b f'^2 dx$$

B-4.72

Найти функцию $f_0(x) \not\equiv 0$, для которой неравенство задачи 4.71 превращается в равенство. Показать, что если $f(x) \neq c f_0(x)$, где c - постоянная, то для $f(x)$ имеет место строгое неравенство.

B-4.73

Доказать, что для любой функции $f \in H^1(0,2\pi)$, для которой $f(0) = f(2\pi)$, имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} f^2 dx \le \int_0^{2\pi} \left(f'\right)^2 dx + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)dx\right)^2$$

B-4.74

Доказать, что для любой функции $f \in H^1(0,2\pi)$ имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Пуанкаре)

$$\int_0^{2\pi} f^2 dx \le 4\int_0^{2\pi} \left(f'\right)^2 dx + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f dx\right)^2$$

Ук а ан и е. Воспользоваться тем, что система $\cos(kx/2), k = 0,1,2,\ldots$, является ортогональным базисом пространства $H^1(0,2\pi)$.

B-4.75

Доказать, что существует двумерное подпространство пространства $H^1(0,2\pi)$, для всех элементов которого неравенство задачи 4.74 превращается в равенство. Найти это подпространство и доказать, что для всех элементов из $H^1(0,2\pi)$, не принадлежащих этому подпространству, неравенство задачи 4.74 строгое.

B-4.76

Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(|x|<1), x_1 = |x|\cos\varphi, x_2 = |x|\sin\varphi, f(x) = f(|x|,\varphi)$. Доказать, что $\lim_{|x|\to 1-0}\int_0^{2\pi} f^2(|x|,\varphi)d\varphi = 0$.

B-4.77

Пусть $f \in H^1(|x|<1), x_1 = |x|\cos\varphi, x_2 = |x|\sin\varphi, f|_{|x|=1} = h(\varphi), 0 \le \varphi < 2\pi$. Доказать, что

$$\lim_{|x|\to 1-0}\int_0^{2\pi} |h(\varphi) - f(|x|,\varphi)|^2 d\varphi = 0.$$

B-4.78

Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(0<x_1<1, 0<x_2<1)$. Доказать, что

$$\int_0^1 f^2\left(x_1,x_2\right) dx_1 = o\left(x_2\right) \quad \text{при} \quad x_2 \to 0.$$

B-4.79

Пусть $x=(x_1,x_2)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$ и функция

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right)$$

принадлежит $H^1(|x|<1)$. Выразить через a_k, b_k интеграл

$$\int_{\rho<1}\left(|\operatorname{grad} f|^2+|f|^2\right)dx.$$

B-4.80

Пусть

$$\psi(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}k\left(a_k^2+b_k^2\right)<\infty.$$

Доказать, что существует функция $f\left(x_1,x_2\right)\in H^1(|x|<1)$ такая, что $\left.f\right|_{\rho=1}=\psi(\varphi), x_1=\rho\cos\varphi, x_2=\rho\sin\varphi$.

B-4.81

При каких значениях α функция $f=|x|^{-\alpha}\sin|x|$ принадлежит $H^2(|x|<1), x=(x_1,x_2)$?

B-4.82

Доказать, что $|x_1|\left(|x|^2-1\right)\in^{\circ 1}(|x|<1), x=(x_1,x_2,x_3)$.

B-4.83

При каких значениях α функция $f=|x|^{-\alpha}e^{x_1-x_2}$ принадлежит $H^1(|x|<1), x=(x_1,x_2,x_3)$?

B-4.84

. Пусть $f\left(x_1,x_2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx_1e^{-kx_2}, 0\leq x_1\leq\pi, x_2>0$. При каких a_k функция f принадлежит $H^1\left(0<x_1<\pi, x_2>0\right)$?

B-4.85

Пусть $f\in H^1(|x|<1), x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right), n\geq 2$. Обязана ли функция $f(x)$ быть эквивалентной непрерывной функции в шаре $|x|<1$ (ср. с результатом задачи 4.67)? В задачах 4.86-4.90 доказать утверждения.

B-4.86

Если $f\in H^1(Q)$ и $f(x)=\text{const}$ п. в. в $Q'\subset Q$, то $\operatorname{grad} f=0$ п. в. в Q'.

B-4.87

Если $f\in H^1(Q)$ и $|\operatorname{grad} f|=0$ п. в. в Q, то $f(x)=\text{const}$ I. B. в Q.

B-4.88

Если $f\in H^1(Q), g\in\overset{\circ}{H}{}^{1}(Q)$, то для всех $i=1,2,\ldots,n$ справедлива формула $\int_Q fg_{x_i}dx=-\int_Q gf_{x_i}dx$ (формула интегрирования по частям).

В-4.89

Если $f \in H^1(Q)$ и $g \in H^1(Q)$, то для всех $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_Q f g_{x_i} dx = -\int_Q g f_{x_i} dx + \int_\Gamma f g \cos(n x_i)\, ds,$$

где под знаком интеграла по Γ стоят следы функций f и g на Γ.

В-4.90

$\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ есть подпространство пространства $H^1(Q)$. Пусть функция $f \in L_2(Q)$ продолжена, например, нулем вне Q. Конеикоразностным отношением $f(x)$ по переменному $x_i, i = 1, 2, \ldots \ldots, n$, будем называть при $h \neq 0$ функцию

$$\delta_i^h f = \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x)}{h}$$

также принадлежащую пространству $L_2(Q)$. В задачах 4.91-4.96 доказать утверждения.

В-4.91

Для любой финитной на (a, b) функции f из $L_2(a, b)$ и любой функции $g \in L_2(a, b)$ при достаточно малых $|h|$ имеет место формула «интегрирования по частям»

$$\left(\delta^h f, g\right) = -\left(f, \delta^{-h} g\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В-4.92

Для достаточно малых $|h| \neq 0$ для произвольной финитной в Q функции $f \in L_2(Q)$ и произвольной функции $g \in L_2(Q)$ имеет место формула «интегрирования по частям»

$$\left(\delta_i^h f, g\right) = -\left(f, \delta_i^{-h} g\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В-4.93

Если финитная на (a, b) функция f принадлежит $H^1(a, b)$, то при $h \longrightarrow 0 \delta^h f(x) \longrightarrow f'(x)$ в норме $L_2(a, b)$.

В-4.94

Если для финитной на (a, b) функции $f \in L_2(a, b)$ при $h \longrightarrow 0$ $\delta^h f \to \tilde{f}(x)$ в норме $L_2(a, b)$, то $f(x)$ принадлежит $H^1(a, b)$ и $\tilde{f}(x)$ является о. п. функции $f(x)$.

В-4.95

Если финитная в Q функция $f \in L_2(Q)$ имеет о. п. $f_{x_i} \in$
$\in L_2(a, b)$ при некотором $i = 1, 2, \ldots n$, то при $h \to 0$ $\quad \delta_i^h f \longrightarrow f_{x_i}$ в норме $L_2(Q)$.

В-4.96

Если финитная в Q функция f принадлежит $L_2(Q)$ и при $h \longrightarrow 0$ $\quad \delta_i^h f \longrightarrow \tilde{f}_i(x)$ в норме $L_2(Q)$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, n$, то $f(x)$ имеет в Q о. п. по x_i, совпадающую с $\widetilde{f}_i(x)$.

В-4.97

С помощью результата задачи 4.71 показать, что скалярные произведения

$$(f, g)_{\mathrm{I}} = \int_0^\pi (fg + f'g')\, dx, \quad (f, g)_{\mathrm{II}} = \int_0^\pi f'g' dx$$

в пространстве $\circ^1$ $(0, \pi)$ эквивалентны.

В-4.98

Доказать с помощью задачи 4.74, что скалярные произведе$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_0^{2\pi}(fg+f'g')\,dx$, $(f,g)_{\mathrm{II}} = \int_0^{2\pi} f'g'dx + \left(\int_0^{2\pi} f dx\right)\left(\int_0^{2\pi} g dx\right)$ в пространстве $H^1(0,2\pi)$ эквивалентны.

В-4.99

Множество $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$ функций $f \in H^1(0,2\pi)$, для которых $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$, есть подпространство пространства $H^1(0,2\pi)$. Показать, что в $\widetilde{H}^1(0,2\pi)$ скалярное произведение можно определить соотношением $(fg)_{\tilde{H}^1(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} f'g'dx$.

В-4.100

Пусть $\rho(x) \in C(\bar{Q})$ и $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. Показать, что форму- лой $(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q \rho fg dx, f,g \in L_2(Q)$, определяется скалярное произведение в $L_2(Q)$, эквивалентное скалярному произведению $\int_Q fg dx$.

В-4.101

Пусть $\rho \in C(\bar{Q}), \rho(x) > 0$ в $\bar{Q}\backslash x^0$ и $\rho\left(x^0\right) = 0$, где x^0- ляется скалярное произведение в $L_2(Q)$, не эквивалентное скалярному произведению $\int_Q fg dx$ (Q - ограниченная область).

В-4.102

Пусть $\rho \in C\left(\bar{Q}\backslash x^0\right)$, где x^0- некоторая точка из $\bar{Q}$ и $\rho(x) > 0$ для $x \in \bar{Q}\backslash x^0, \rho(x) \longrightarrow \infty$ при $x \longrightarrow x^0, x \in \bar{Q}$. Показать, что в $L_{2,\rho}(Q)$ можно ввести скалярное произведение $\int_Q fg dx$, не эквивалентное скалярному произведению $\int_Q \rho fg dx$.

В-4.103

Пусть $f \in H^1(|x|<1), x = (x_1,x_2)$ и $f(x)|_{|x|=1} = h(\varphi)$, $x_1 = |x|\cos\varphi, x_2 = |x|\sin\varphi$. Доказать, что существует такая не зависящая от функции $f(x)$ постоянная $c > 0$, что

$$\int_{|x|<1} f^2 dx \leq \mathrm{c}\left[\int_0^{2\pi} h^2(\varphi)d\varphi + \int_{|x|<1} |\operatorname{grad} f|^2 dx\right].$$

В-4.104

Доказать существование такой постоянной $c > 0$, что для любой $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ имеет место неравенство Стеклова

$$\int_Q f^2 dx \leq c\int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx.$$

В-4.105

Показать, что вытажение $\int_Q(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)dx$ задает скалярное произведение в $\circ^1$ (Q), эквивалентное скалярному произведению $\int_Q[fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx$.

В-4.106

Пусть $p,q \in C(\bar{Q}), p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0$. Доказать, что скалярные произведения в $\circ^1$ (Q)

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx,$$
$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q [qfg + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx$$

эквивалентны.

B-4.107

Пусть вещественные функции $p_{ij}, p_{ij}(x) = p_{ji}(x), i, j = 1, 2, \ldots, n$, и q принадлежат $C(\bar{Q}), q \geq 0$, и для всех $x \in \bar{Q}$ и всех вещественных векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

где постоянная $\gamma_0 > 0$.

$$(f, g)_{\mathrm{I}} = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx.$$

B-4.108

Пусть $p, q \in C(\bar{Q}), p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq q_0 > 0$. Тогда скалярные произведения в $H^1(Q)$

$$(f, g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$$

$$(f, g)_{\mathrm{I}} = \int_Q [qfg + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$$

эквивалентны.

(?? и в чем задача? доказать это??)

B-4.109

Пусть x^0 - произвольная точка из $\bar{Q}$, а $U = Q \cap \cap \{|x - x_0| < r\}$ при некотором $r > 0$. Доказать, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $f \in H^1(Q)$ имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq \mathrm{c} \left[\int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_U f^2 dx \right].$$

B-4.110

С помощью результата задачи 4.108 показать, что скалярные произведения в $H^1(Q)$

$$(f, g)_{\mathrm{I}} = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx,$$

$$(f, g)_{\mathrm{II}} = \int_Q [qfg + p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)] dx$$

эквивалентны, если непрерывные в $\bar{Q}$ функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям: $p \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0$ и $q(x) \not\equiv 0$ в Q.

B-4.111

Если в условиях задачи 4.107 $q(x) \geq q_0 > 0$, то выражение

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в $H^1(Q)$, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению $\int_Q [(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) + fg] dx$.

B-4.112

Если в условиях задачи 4.107$q(x) \geq 0$ в $\bar{Q}$ и $q(x) \not\equiv 0$, то выражение

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx$$

можно принять за скалярное произведение в $H^1(Q)$, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению $\int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx$.

B-4.113

Показать, что существует такая постоянная $c > 0$, что для любой $f \in H^1(Q)$ имеет место неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[\int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_{\partial Q} f^2 ds \right].$$

B-4.114

Пусть x^0 - произвольная точка границы ∂Q, а $U = \partial Q \cap \cap \left\{ \left| x - x^0 \right| < r \right\}$ при некотором $r > 0$. Доказать существование такой постоянной $c > 0$, что для всех $f \in H^1(Q)$ справедливо неравенство

$$\int_Q f^2 dx \leq c \left[\int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx + \int_U f^2 ds \right].$$

B-4.115

Доказать, что если $\sigma \in C(\partial Q)$ и $\sigma(x) > 0$, то выражение

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds$$

задает в $H^1(Q)$ скалярное произведение, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx.$$

B-4.116

Доказать, что если $\sigma \in C(\partial Q), \sigma(x) \geq 0, \sigma(x) \not\equiv 0$, то в $H^1(Q)$ можно задать скалярное произведение

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx.$$

B-4.117

Пусть $p \in C(\bar{Q}), q \in C(\bar{Q}), \sigma \in C(\partial Q), p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ в $\bar{Q}, \sigma(x) \geq 0$ на ∂Q, причем или $q(x) \not\equiv 0$, или $\sigma(x) \not\equiv 0$. Тогда скалярные произведения в $H^1(Q)$

$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q [p(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) + qfg]dx + \int_{\partial Q} \sigma f g ds,$$

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx$$

эквивалентны.

B-4.118

Показать, что существует постоянная $c > 0$ такая, что для любой функции $f \in H^1(Q)$ $\left(\partial Q \in C^1\ \right)$ имеет место неравенство (неравенство Пуанкаре)

$$\int_Q f^2 dx \leq c\left[\left(\int_Q f dx\right)^2 + \int_Q |\operatorname{grad} f|^2 dx\right].$$

B-4.119

С помощью результата задачи 4.118 показать эквивалентность скалярных произведений

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx,$$
$$(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)dx + \int_Q f dx \cdot \int_Q g dx$$

в пространстве $H^1(Q)$.

B-4.120

Показать, что множество $\widetilde{H}^1(Q)$ функций $f \in H^1(Q)$, для которыг $\int_Q f dx = 0$, образует подпространство $H^1(Q)$.

B-4.121

Показать, что в подпространстве $\tilde{H}^1(Q)$ можно определить скалярное произведение $(f,g)_{\mathrm{I}} = \int_Q (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)dx$, зквивалентное скалярному произведению

$$(f,g) = \int_Q [fg + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)]dx.$$

15.5.3 Задачи на интегральные уравнения

МФТИ.Карлов-л6.з1

Решить уравнение при всех λ и найти собственные функции и характеристические числа интегрального оператора (который в этом уравнении участвует):

$$u(x) = \lambda \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2 y^2} - 1\right) u(y)dy + 3x^2 - 4, \quad u \in C[1;2]$$

Об интегральных уравнения Общий вид интегрального уравнения на отрезке:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x)$$

Интегральное уравнение можно рассматривать не только на отрезке, но и на компакте. Выражение (2) называется интегральным уравнением Фредгольма, выражение $\int_a^b K(x,y)u(y)dy$ называется интегральным оператором. Это - линейное отображение, действующее на функцию u. $K(x,y)$ не меняется и называется ядром оператора. В письменной контрольной ядро должно быть вырождено, т.е. иметь вид:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x) \cdot h_i(y),$$

т.е. вырожденное ядро является суммой функций с разделенными переменными. Это позволяет легко свести интегральное уравнение к системе линейных уравнений. В общем случае, когда ядро невырожденно, строится приближение этого ядра вырожденными по норме ℓ_2. Тогда уравнение решается приближённо. На контрольной ядро всегда будет вырожденным, однако это необходимо проверить.

Решение. В рассматриваемом случае ядро $\left(\frac{4}{x^2y^2}-1\right)$ является вырожденным.

1) Выносим из под интеграла функции, зависящие от x (это возможно и в общем случае), т.е. те, которые не зависят от переменной интегрирования:

$$u(x)=\lambda\frac{4}{x^2}\left(\int_1^2\frac{1}{y^2}u(y)dy\right)-\lambda\left(\int_1^2u(y)dy\right)+3x^2-4,$$

где оставшиеся интегралы обозначим a_1 и a_2 соответственно, получив:

$$u(x)=\lambda\cdot\frac{4}{x^2}a_1-\lambda\cdot a_2+3x^2-4.$$

Если найти a_1 и a_2, то можно найти и u. Они ищутся следующим образом:

$$a_1=\int_1^2\frac{1}{y^2}u(y)dy=\int_1^2\frac{1}{y^2}\left(\lambda\cdot\frac{4}{y^2}a_1-\lambda\cdot a_2+3y^2-4\right)dy=\int_1^2\left(\frac{4\lambda a_1}{y^4}-\frac{\lambda a_2}{y^2}+3-\frac{4}{y^2}\right)dy$$
$$a_2=\int_1^2u(y)dy=\int_1^2\left(\lambda\cdot\frac{4}{y^2}a_1-\lambda\cdot a_2+3y^2-4\right)dy$$

Отсюда можно получить систему линейных уравнений на a_1 и a_2. Самая частая ошибка при решении этой задачи - ошибка в вычислениях при вычислении интегралов. Если этот этап выполнен верно, то получается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными с параметром λ, которую можно легко решить. Для экономии времени интегралы считаются отдельно:

$$\int_1^2 1dy=1\qquad \int_1^2y^2dy=\left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2=\frac{7}{3}\qquad \int_1^2\frac{1}{y^2}dy=-\left.\frac{1}{y}\right|_1^2=\frac{1}{2}$$
$$\int_1^2y^2dy=\left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2=\frac{7}{3}\qquad \int_1^2\frac{1}{y^2}dy=-\left.\frac{1}{y}\right|_1^2=\frac{1}{2}\qquad \int_1^2\frac{1}{y^4}dy=-\left.\frac{1}{3y^3}\right|_1^2=\frac{7}{24}$$

При подстановке получаем: $\begin{cases}a_1=4\lambda a_1\cdot\frac{7}{24}-\lambda a_2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 1-4\cdot\frac{1}{2}\\ a_2=4\lambda a_1\cdot\frac{1}{2}-\lambda a_1\cdot 1+3\cdot\frac{7}{3}-4\cdot 1\end{cases}$, то есть

$$\begin{cases}\left(1-\frac{7}{6}\lambda\right)a_1+\frac{a_2}{2}\lambda=1\\ -2\lambda a_1+(1+\lambda)a_2=3.\end{cases}$$

При решении этой системы надо выделить случай, когда детерминант не равен нулю и решение ровно одно. Обычно корни уравнения $D=0$ - целые или простые дробные числа.

Рассмотрим:

$$\det\begin{vmatrix}1-\frac{7}{6}\lambda & \frac{\lambda}{2}\\ -2\lambda & 1+\lambda\end{vmatrix}=0\qquad \lambda=2;-3$$

Таким образом, можно выписать решение уравнения. 1 случай: $\lambda\neq 2;-3$. Тогда $\exists!$ решение. Найдём его по правилу Крамера:

$$a_1=\frac{\det\begin{vmatrix}1 & \frac{\lambda}{2}\\ 3 & 1+\lambda\end{vmatrix}}{-\frac{\lambda^2}{6}-\frac{\lambda}{6}+1}=\frac{(1+\lambda)-\frac{3}{2}\lambda}{-\frac{1}{6}(\lambda-2)(\lambda+3)}=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)(-6)}{(\lambda-2)(\lambda+3)}=\frac{3\cdot(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda+3)}=\frac{3}{\lambda+3}$$
$$a_2=\frac{\det\begin{vmatrix}1-\frac{7}{6}\lambda & 1\\ -2\lambda & 3\end{vmatrix}}{-\frac{1}{6}(\lambda-2)(\lambda+3)}=\frac{\left(3-\frac{7}{2}\lambda+2\lambda\right)(-6)}{(\lambda-2)(\lambda+3)}=\frac{\left(3-\frac{3}{2}\lambda\right)(-6)}{(\lambda-2)(\lambda+3)}=\frac{9(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda+3)}=\frac{9}{\lambda+3}$$

Отсюда решение уравнения для случая $\lambda\neq 2,\lambda\neq -3$ есть:

$$u(x)=\frac{4\lambda}{x^2}\cdot\frac{3}{\lambda+3}-\lambda\cdot\frac{9}{\lambda+3}+3x^2-4.$$

2 случай: $\lambda=2$. Тогда:

$$\begin{cases}\left(1-\frac{7}{3}\right)a_1+a_2=1\\ -4a_1+3a_2=3\end{cases}$$
$$\begin{cases}-\frac{4}{3}a_1+a_2=1\\ -4a_1+3a_2=3\end{cases}$$

Получили бесконечно много ответов:

$$a_2 = 1 + \frac{4}{3}a_1.$$

Тогда

$$u(x) = \frac{8 \cdot a_1}{x^2} - 2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}a_1\right) + 3x^2 - 4, \quad a_1 \in \mathbb{R}.$$

Почти всегда бывает (в силу особенностей составления задач) так, что для одной из λ ответов бесконечно много, а для второй - ответов нет.

3 случай: $\lambda = -3$. Тогда:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{7}{2}\right) a_1 - \frac{3}{2}a_2 = 1 \\ 6a_1 - 2a_2 = 3 \end{cases}$$

Видно, что $\varnothing$. Тогда ответ на первый вопрос: При $\lambda \neq 2, -3: \quad u(x) = \frac{4\lambda}{x^2} \cdot \frac{3}{\lambda+3} - \lambda \cdot \frac{9}{\lambda+3} + 3x^2 - 4$, При $\lambda = 2: \quad u(x) = \frac{8 \cdot a_1}{x^2} - 2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}a_1\right) + 3x^2 - 4, \quad a_1 \in \mathbb{R}$. При $\lambda = -3$: Нет решений На этом этапе было заработано где-то 3 из 4 очков за задачу. Заметим, что теоремы Фредгольма здесь нигде не были использованы. Однако иногда задачи составляются таким образом, что без них не обойтись.

2) Ищем собственные функции и характеристические числа. Рассмотрим однородное интегральное уравнение на отрезке:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy.$$

В качестве ответа явно подходит функция ноль. Решения этого уравнения, не равные нулю, называются собственными функциями оператора K.λ, при которых получаются ненулевые решения, называются характеристическими числами, соответствующими данной собственной функции. Если интеграл рассматривать как линейный оператор, действующий на функцию u, то тогда, если $\lambda \neq 0$, можно записать:

$$\frac{1}{\lambda}u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy,$$

Т.е.

$$K(u) = \frac{1}{\lambda}u, \quad \lambda \neq 0.$$

Характеристические числа λ характеризуют оператор, являясь некоторой аналогией его спектра. Таким образом, для ответа на вопрос надо решить однородное уравнение:

$$u(x) = \lambda \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2y^2} - 1\right) u(y)dy.$$

Используем предыдущие вычисления; искомый ответ:

$$u(x) = \frac{4\lambda a_1}{x^2} - \lambda a_2,$$

где a_1, a_2 - решение системы:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{7}{6}\lambda\right) a_1 + \frac{a_2}{2}\lambda = 0 \\ -2\lambda a_1 + (1+\lambda)a_2 = 0 \end{cases}.$$

Пользуясь уже проведёнными вычислениями:

$$\det \ = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2; -3.$$

1 случай: $\lambda \neq 2; -3$. Тогда система (35) имеет только тривиальное решение, а потому собственных функций нет.

2 случай: $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}a_1 + a_2 = 0 \\ -4a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a_1 + 3a_2 = 0 \\ -4a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{4}{3}a_1; u(x) = a_1 \cdot \left(\frac{4 \cdot 2}{x^2} - \frac{2 \cdot 4}{3}\right), a_1 \in \mathbb{R}.$$

Также встречаются ошибки, когда для собственной функции забывают отбросить неоднородную часть. В этом случае ответ не определяется с точностью до умножения на константу, что неверно. 3 случай: $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} \left(1+\frac{7}{2}\right)a_1 - \frac{3}{2}a_2 = 0 \\ 6a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2}a_1 - \frac{3}{2}a_2 = 0 \\ 6a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_2 = 3a_1, u(x) = a_1 \cdot \left(\frac{4(-3)}{x^2} + 3 \cdot 3\right), a_1 \in \mathbb{R}$$

Ответ (2 часть): $u_1(x) = \left(\frac{8}{x^2} - \frac{8}{3}\right)-$ собственная функция, $\lambda = 2-$ соотв. характеристическое число $u_2(x) = \left(9 - \frac{12}{x^2}\right)-$ собственная функция, $\lambda = -3-$ соотв. характеристическое число В данной задаче теоремы Фредгольма не были востребованы, но можно сформулировать задачу таким образом, что эти теоремы будут использоваться.

МФТИ.Карлов-л6.з2

Найти условия на функцию $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, при которых уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \cdot \sin|x| + y \cdot |x|)u(y)dy + f(x).$$

разрешимо при всех допустимых $\lambda \in \mathbb{C}$.

Заметим, что ядро вырождено. Можно решать эту задачу как предыдущую, но можно решить проще. (?? и как как предыдущую??)

(потом все короче напишу, пока сойдет, потому что мало задач написано.)

О теореме Фредгольма - критерии разрешимости интегрального уравнения Критерий интегральной разрешимости: при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x)$$

разрешимо (у него существуют решения) $\Longleftrightarrow$ f ортогонально любому решению сопряжённого однородного уравнения, т.е.

$$0 = (f(y), \overline{\psi(y)}) = \int_a^b f(y)\overline{\psi(y)}dy$$

для любой функции ψ - решения сопряженного однородного уравнения:

$$\psi(y) = \bar{\lambda} \int_a^b \overline{K(y,x)}\psi(y)dy,$$

т.е. в ядре заменены местами переменные x и y и берется комплексное сопряжение, а λ заменяется на $\bar{\lambda}$. Отсюда следует, что применительно к рассматриваемой задаче необходимо рассмотреть однородное уравнение, поменяв местами x и y.

Решение Рассматриваем сопряжённое однородное уравнение:

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|x| \cdot \sin|y| + x \cdot |y|)\psi(y)dy.$$

Здесь комплексного сопряжения в ядре нет, поскольку на рассматриваемом отрезке переменные действительны. Надо найти решения уравнения (47) при разных $\bar{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\psi(x) =& \bar{\lambda}|x| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|y|\psi(y)dy + \bar{\lambda}x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y|\psi(y)dy = \bar{\lambda}|x|a_1 + \bar{\lambda}xa_2 \\
\psi(x) =& \bar{\lambda}|x| \cdot a_1 + \bar{\lambda}x \cdot a_2 \\
a_1 =& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|y| \cdot \left(\bar{\lambda} \cdot y \cdot a_1 + \bar{\lambda}y \cdot a_2\right) dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\bar{\lambda}a_1 \sin|y| \cdot |y| + \bar{\lambda}a_2 y \sin|y|\right) dy \\
a_2 =& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y| \left(\bar{\lambda}|y| \cdot a_1 + \bar{\lambda} \cdot y \cdot a_2\right) dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\bar{\lambda} \cdot a_1 \cdot y^2 + \bar{\lambda} \cdot a_2 y \cdot |y|\right) dy
\end{aligned}$$

Считаем отдельно коэффициенты, нужные для получения системы:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|y|\cdot|y|dy = 2\cdot\int_0^{\pi/2}\sin y\cdot y\cdot dy = /* \quad \begin{matrix} u = y, \Rightarrow & du = dy \\ dv = \sin y dy, \Rightarrow & v = -\cos y \end{matrix} \quad */ =$$

$$= -\, y\cdot\cos y|_0^{\pi/2} + 2\cdot\int_0^{\pi/2}\cos dy = 0 + 2(\sin y)|_0^{\pi/2} = 2$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y\cdot\sin|y|dy = 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2 dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{12}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y\cdot|y|dy = 0$$

тут второй и четвёртый интегралы - интегралы от нечётных функций на отрезке с центром в нуле, отсюда следует то, что они равны 0. При интегрировании первой функции пользуемся её чётностью.

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a_1 = \bar\lambda a_1\cdot 2 \\ a_2 = \bar\lambda a_1\cdot\frac{\pi^3}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\cdot(1-2\bar\lambda) = 0 \\ \bar\lambda\frac{\pi^3}{12}a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \bar\lambda|x|a_1 + \bar\lambda\cdot x\cdot a_2$$

На данном этапе ищутся собственные функции сопряжённого оператора (решения сопряжённого уравнения).

$$\det\begin{vmatrix} 1-2\bar\lambda & 0 \\ \bar\lambda\cdot\frac{\pi^3}{12} & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (2\bar\lambda - 1) = 0 \Longleftrightarrow \bar\lambda = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем 2 случая.

1. Если $\lambda \neq \frac{1}{2}, \Rightarrow \det \neq 0, \Rightarrow a_1 = a_2 = 0, \psi(x) = 0$, а потому заведомо

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cdot\psi(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cdot 0 = 0$$

т.е. при $\bar\lambda = 1/2$ уравнение разрешимо при всех f.

2. Если $\bar\lambda = \frac{1}{2}$, то

$$\begin{cases} a_1\cdot 0 = 0 \\ \frac{\pi^3}{24}a_1 = a_2 \end{cases},$$

т.е. a_1- любое. Тогда

$$\psi(x) = \frac{1}{2}a_1\cdot|x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{24}a_1\cdot x = \frac{a_1}{2}\left(|x| + \frac{\pi^3}{24}x\right), \quad a_1\in\mathbb{R}.$$

По теореме Фредгольма необходимо, чтобы f была ортогональна функции (61), т.е. при $\lambda = \bar\lambda = \frac{1}{2}$ исходное неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cdot\frac{a_1}{2}\left(|x| + \frac{\pi^3}{24}x\right)dx = 0.$$

Ответ: исходное однородное уравнение разрешимо при всех допустимых $\lambda\in\mathbb{C} \Longleftrightarrow$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cdot\frac{a_1}{2}\left(|x| + \frac{\pi^3}{24}x\right)dx = 0.$$

B-5.1

Показать, что интегральный оператор K с ядром $\mathscr{K}(x,y)$ ограничен из $L_2(G)$ в $L_2(G)$, если

$$\int_{G\times G} |\mathscr{K}(x,y)|^2 dxdy = c^2 < \infty.$$

B-5.2

Показать, что интегральный оператор K с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x,y)$ является нулевым в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}(x,y)=0, x\in G, y\in G$.

B-5.3

Пусть ядро $\mathscr{K}(x,y)$ интегрального уравнения (1) принадлежит $L_2(G\times G)$. Доказать сходимость метода последовательных приближений для любой функции $f\in L_2(G)$, если $|\lambda|<1/|c|$ (постоянная c взята из задачи 5.1).

B-5.4

Пусть K - интегральный оператор с непрерывным ядром. Доказать, что операторы $K^p=K\left(K^{p-1}\right), p=2,3,\ldots$, являются интегральными операторами с непрерывными ядрами $\mathscr{K}_p(x,y)$ и эти ядра удовлетворяют соотношениям

$$\mathscr{K}_p(x,y)=\int_G \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}_{p-1}(\xi,y)d\xi.$$

B-5.5

Показать, что ядра $\mathscr{X}_p(x,y)$, введенные в задаче 5.4 (они называются повторньии (итерированными) ядрами ядра $\mathscr{K}(x,y)$), удовлетворяют неравенствам:

$$|\mathscr{K}_p(x,y)|\le M^p v^{p-1},\quad p=1,2,\ldots$$

B-5.6

Показать, что ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\mathscr{K}_{m+1}(x,y), x\in\bar{G}, y\in\bar{G}$, сходится в круге $|\lambda|<\frac{1}{Mv}$, а его сумма $(x,y;\lambda)$ (резольвента ядра $\mathscr{K}(x,y)$) непрерывна в $\bar{G}\times\bar{G}\times U_{1/(Mv)}$ и аналитична по λ в круге $|\lambda|<\frac{1}{Mv}$. Показать также, что при $|\lambda|<\frac{1}{Mv}$ решение интегрального уравнения (1) единственно в классе $C(\bar{G})$ и для любой $f\in C(\bar{G})$ представляется через резольвенту $(x,y;\lambda)$ формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_G \mathscr{K}(x,y;\lambda)f(y)dy.$$

B-5.7

Показать, что резольвента $(x,y;\lambda)$ (см. задачу 5.6) непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ удовлетворяет при $|\lambda|<\frac{1}{Mv}$ каждому из уравнений:

а) $(x,y;\lambda)=\lambda\int_G\mathscr{K}(x,\xi)(\xi,y;\lambda)d\xi+\mathscr{K}(x,y)$;

б) $(x,y;\lambda)=\lambda\int_G\mathscr{K}(\xi,y)(x,\xi;\lambda)d\xi+\mathscr{K}(x,y)$;

в) $\frac{\partial(x,y;\lambda)}{\partial\lambda}=\int_G(x,\xi;\lambda)(\xi,y;\lambda)d\xi$.

В задачах 5.8-5.13 рассматриваются интегральные уравнения вида

$$\int_0^x\mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy=f(x),$$
$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x\mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy+f(x),$$

которые называются интегральными уравнениями Вольтерра первого и второго родов соответственно.

(??? а не Фредгольма?)

B-5.8

Пусть выполнены следующие условия: а) функции $\mathscr{K}^*(x,y)$ и $\mathscr{K}_x(x,y)$ непрерывны на множестве $0\le x\le y\le a$ б) $\mathscr{K}(x,x)\ne 0$ для всех x; в) $f\in C^1([0,a])$ и $f(0)=0$. Доказать, что при этих условиях уравнение (4) равносильно уравнению

$$\varphi(x)=\frac{f'(x)}{\mathscr{K}(x,x)}-\int_0^x\frac{\mathscr{K}_x(x,y)}{\mathscr{K}(x,x)}\varphi(y)dy.$$

В-5.9

Показать, что дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = F(x)$$

с непрерывными козффициентами $a_i(x)(i = 1, 2, \ldots, n)$ при начальных условиях $y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$ равносильно интегральному уравнению (5), где

$$\mathscr{K}(x, y) = \sum_{m=1}^{n} a_m(x)\frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}$$
$$f(x) = F(x) - C_{n-1}a_1(x) - (C_{n-1}x + C_{n-2})\, a_2(x) - \ldots$$
$$\ldots - \left(C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_1x + C_0\right) a_n(x).$$

В-5.10

Пусть $\mathscr{K} \in C(x \geq 0), \mathscr{K}(x) = 0$ при $x < 0$. Доказать, что обобщенная функция

$$\mathscr{E}(x) = \delta(x) + \mathscr{B}(x), \qquad \text{где} \qquad = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathscr{K} * \mathscr{K} * \ldots * \mathscr{K}}_{m \text{ раз}},$$

есть фундаментальное решение оператора Вольтерра второго рода с ядром $\mathscr{K}(x, y)$ (см. (5)), т.е.

$$\mathscr{E} - \mathscr{K} * \mathscr{E} = \delta.$$

Показать, что при этом ряд для (x) сходится равномерно в каждом конечном промежутке и удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$(x) = \int_0^x \mathscr{K}(x-y)(y)dy + \mathscr{K}(x), \quad x \geq 0$$

(функция $(x - y)$ является резольвентой ядра $\mathscr{K}(x - y)$ при $\lambda = 1$).

В-5.11

Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра (5) с ядром $\mathscr{K}(x, y)$:
1) $\mathscr{K}(x, y) = 1$;
2) $\mathscr{K}(x, y) = x - y$.

В-5.12

Решить следующие интегральные уравнения:
1) $\varphi(x) = x + \int_0^x (y - x)\varphi(y)dy$
2) $\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x - y)\varphi(y)dy$
3) $\varphi(x) = \lambda \int_0^x (x - y)\varphi(y)dy + x^2$.

В-5.13

Показать, что если $g \in C^1(x \geq 0), g(0) = 0, 0 < \alpha < 1$, то функция

$$f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^x \frac{g'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy$$

удовлетворяет интегральному уравнению Абеля

$$\int^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}} dx = g(x)$$

В задачах 5.14-5.30 ядро $\mathscr{K}(x, y)$ интегрального уравнения является вырожденным, т. е.

$$\mathscr{K}(x, y) = \sum_{m=1}^{N} f_m(x)g_m(y),$$

где функции $f_m(x)$ и $g_m(y)(m = 1, 2, \ldots, N)$ непрерывны в квадрате $a \le x, y \le b$ и линейно независимы между собой. В этом случае интегральное уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{N} c_m f_m(x),$$

где неизвестные c_m определяются из системы алгебраических уравнений.

В-5.14

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathscr{X}(x, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях:
1) $\mathscr{K}(x, y) = x - 1$, $f(x) = x$
2) $\mathscr{K}(x, y) = 2e^{x+y}, \quad f(x) = e^x;$
3) $\mathscr{K}(x, y) = x + y - 2xy, \quad f(x) = x + x^2.$

В-5.15

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях: в следующих случаях:
1) $\mathscr{K}(x, y) = xy + x^2y^2, \quad f(x) = x^2 + x^4;$
2) $\mathscr{K}(x, y) = x^{1/3} + y^{1/3}, \quad f(x) = 1 - 6x^2;$
3) $\mathscr{K}(x, y) = x^4 + 5x^3y, \quad f(x) = x^2 - x^4;$
4)$\mathscr{K}(x, y) = 2xy^3 + 5x^2y^2, \quad f(x) = 7x^4 + 3$; 5) $\mathscr{K}(x, y) = x^2 - xy, \quad f(x) = x^2 + x$; 6) $\mathscr{K}(x, y) = 5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2, \quad f(x) = x.$

В-5.16

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях:
1) $\mathscr{X}(x, y) = \sin(2x + y), \quad f(x) = \pi - 2x;$
2) $\mathscr{X}(x, y) = \sin(x - 2y), \quad f(x) = \cos 2x;$
3) $\mathscr{K}(x, y) = \cos(2x + y), \quad f(x) = \sin x;$
4)$\mathscr{K}(x, y) = \sin(3x + y), \quad f(x) = \cos x$; 5) $\mathscr{K}(x, y) = \sin y + y\cos x, \quad f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$; 6) $\mathscr{X}(x, y) = \cos^2(x - y), \quad f(x) = 1 + \cos 4x.$

В-5.17

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях:
1) $\mathscr{K}(x, y) = \cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y, \quad f(x) = \cos 3x;$
2) $\mathscr{K}(x, y) = \cos x \cos y + 2\sin 2x \sin 2y, \quad f(x) = \cos x$
3) $\mathscr{X}(x, y) = \sin x \sin y + 3\cos 2x \cos 2y, \quad f(x) = \sin x.$

В-5.18

Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

1) $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \left[\sin(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)dy$;

2) $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \left[\cos^2(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)dy$;

3) $\varphi(x) = \lambda \int_0^{1} \left(x^2y^2 - \frac{2}{45}\right) \varphi(y)dy$;

4)$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{2/5} + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/5}\right] \varphi(y)dy$; 5) $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y + +\sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y)\varphi(y)dy$.

В-5.19

При каких значениях параметров a и b разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 12 \int_0^1 \left(xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3}\right) \varphi(y)dy + ax^2 + bx - 2?$$

Найти решения при этих значениях a и b.

В-5.20

При каких значениях параметра а разрешимо интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sqrt{15} \int_0^1 \left[y\left(4x^2 - 3x\right) + x\left(4y^2 - 3y\right)\right] \varphi(y)dy + ax + \frac{1}{x}?$$

В-5.21

Выяснить, при каких значениях λ интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - y)\varphi(y)dy + f(x)$$

разрешимо для любой $f(x) \in C([0, 2\pi])$, и найти решение.

В-5.22

Найти решения следующих интегральных уравнений при всех λ и при всех значениях параметров a, b, c, входящих в свободный член этих уравнений:

1) $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (y \sin x + \cos y)\varphi(y)dy + ax + b$

2) $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y)\varphi(y)dy + a \sin x + b$

3) $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (1+xy)\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$

4)$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(x^2y + xy^2\right) \varphi(y)dy + ax + bx^3$ 5) $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(xy + x^2y^2\right) \varphi(y)dy + ax + b$ 6) $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left[5(xy)^{1/3} + 7(xy)^{2/3}\right] \varphi(y)dy + ax + bx^{1/3}$ 7) $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{1+y^2} \varphi(y)dy + a + x + bx^2$; 8) $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$ 9) $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2\right) \varphi(y)dy + ax + b$.

В-5.23

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathscr{K}(x, y)$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

при всех λ, a, b, если:

1) $\mathscr{K}(x, y) = 3x + xy - 5x^2y^2, \quad f(x) = ax$;

2) $\mathscr{K}(x, y) = 3xy + 5x^2y^2, \quad f(x) = ax^2 + bx$.

B-5.24

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathscr{K}(x,y)$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy+f(x)$$

при всех λ, a, b, если:
1) $\mathscr{K}(x,y)=x\cos y+\sin x\sin y, \quad f(x)=a+b\cos x$
2) $\mathscr{K}(x,y)=x\sin y+\cos x, \quad f(x)=ax+b.$

B-5.25

Найти решение и резольвенту $(x,y;\lambda)$ следующих интегральных уравнений:
1) $\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi\sin(x+y)\varphi(y)dy+f(x)$
2) $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(1-y+2xy)\varphi(y)dy+f(x);$
3) $\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^\pi(x\sin y+\cos x)\varphi(y)dy+ax+b;$
4)$\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}(\sin x\sin y+\sin 2x\sin 2y)\varphi(y)dy+f(x).$

B-5.26

Найти все значения параметров a, b, c, при которых следующие интегральные уравнения имеют решения при любых λ:
1) $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1\left(xy+x^2y^2\right)\varphi(y)dy+ax^2+bx+c$
2) $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(1+xy)\varphi(y)dy+ax^2+bx+c$, где $a^2+b^2+c^2=1;$
3) $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1\frac{1+xy}{\sqrt{1-y^2}}\varphi(y)dy+x^2+ax+b;$
4)$\varphi(x)=\lambda\int_0^1\left(xy-\frac{1}{3}\right)\varphi(y)dy+ax^2-bx+1;$ 5) $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(x+y)\varphi(y)dy+ax+b+1$ 6) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}\cos(2x+4y)\varphi(y)dy+e^{ax+b};$ 7) $\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi(\sin x\sin 2y+\sin 2x\sin 4y)\varphi(y)dy+ax^2+bx+c;$
8) $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1\left(1+x^2+y^3\right)\varphi(y)dy+ax+bx^3.$

B-5.27

Найти все значения параметра a, при которых интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1(ax-y)\varphi(y)dy+f(x)$$

разрешимо при всех действительных λ и всех $f\in C([0,1])$.

B-5.28

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:
1) $\varphi(x_1,x_2)=\lambda\int_{-1}^1\int_{-1}^1\left[x_1+x_2+\frac{3}{32}(y_1+y_2)\right]\varphi(y_1,y_2)dy_1dy_2$
2) $\varphi(x)=\lambda\int_{|y|<1}\left(|x|^2+|y|^2\right)\varphi(y)dy, \quad x=(x_1,x_2);$
3) $\varphi(x)=\lambda\int_{|y|<1}\frac{1+|y|}{1+|x|}\varphi(y)dy, \quad x=(x_1,x_2,x_3).$

B-5.29

Выяснить, имеет ли интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_{|y|<1}\left(|x|^2-|y|^2\right)\varphi(y)dy, \quad x=(x_1,x_2,x_3)$$

вещественные характеристические числа, и если имеет, то найти соответствующие собственные функции.

В-5.30

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $\mathscr{K}(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ и решить интегральное

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x_1 x_2 + y_1 y_2) \varphi(y_1, y_2) \, dy_1 dy_2 + f(x_1, x_2)$$

В задачах $5.31, 5.33 - 5.35$ ядро $\mathscr{K}(x, y)$ интегрального уравнения (1) является эрмитовым, т. е. совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром:

$$\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{K}^*(x, y) = \overline{\mathscr{K}(y, x)}.$$

В частности, если эрмитово ядро является вещественным, то оно симметрично, т.е. $\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{K}(y, x)$.

Эрмитово непрерывное ядро $\mathscr{K}(x, y) \not\equiv 0$ обладает следующими свойствами:

1) множество характеристических чисел этого ядра не пусто, расположено на действительной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;

2) система собственных функций $\{\varphi_k\}$ может быть выбрана ортонормальной:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}.$$

В-5.31

Доказать, что если $\mathscr{K}(x, y)$ - эрмитово ядро, то характеристические числа второго итерированного ядра $\mathscr{K}_2(x, y)$ (см. задачи 5.4-5.5) положительны.

В-5.32

Доказать, что если ядро $\mathscr{K}(x, y)$ является кососимметричным, т.е. $\mathscr{K}(x, y) = -\mathscr{K}^*(x, y)$, то его характеристические числа чисто мнимые.

В задачах 5.33-5.35 предполагается, что характеристические числа λ_k эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x, y)$ занумерованы в порядке возрастания их модулей, т. е.

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \ldots$$

и каждое из этих чисел повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Тогда можно считать, что каждому характеристическому числу λ_k соответствует одна собственная функция φ_k. Систему собственньг функций $\{\varphi_k\}$ будем считать ортонормальной.

В-5.33

Пусть $\mathscr{K}(x, y)$ - эрмитово непрерывное ядро, $\mathscr{X}_p(x, y)$– повторное ядро ядра $\mathscr{K}(x, y)$. Доказать формулы:

1) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\varphi_m(x)|^2}{\lambda_m^2} = \int_a^b |\mathscr{K}(x, y)|^2 dy$;

2) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} = \int_a^b \int_a^b |\mathscr{K}(x, y)|^2 dx dy$; 3) $(Kf, f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k}, f \in L_2(G), K$ - интегральный оператор с ядром $\mathscr{X}(x, y)$

4)$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^{2p}} = \int_a^b \int_a^b |\mathscr{K}_p(x, y)|^2 \, dx dy \quad p = 1, 2, \ldots$ Пусть $\mathscr{K}_n(x, y)$ - -е повторное ядро для эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x, y)$. Назовем величину

$$\alpha_n = \int_a^b \mathscr{X}_n(x, x) dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

п-м следом ядра $\mathscr{X}(x, y)$

В-5.34

Доказать:

1) отношение $\frac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}$ не убывает и ограничено;

2) существует $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{2n+2}}$ и этот предел равен наименьшему характеристическому числу ядра $\mathscr{X}_2(x, y)$;

3) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^n} = \alpha_n (n \geq 2)$, где $\lambda_m, m = 1, 2, \ldots$, - характеристические числа ядра $\mathscr{X}(x, y), |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$;

4)$\frac{1}{|\lambda_1|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\alpha_{2n}}$.

В-5.35

Пусть λ не является характеристическим числом эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$. Доказать, что (единственное) решение уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy+f(x)$$

можно представить в виде ряда

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_m)}{\lambda_m-\lambda}\varphi_m(x)+f(x),$$

равномерно сходящегося на $\bar{G}$, а для резольвенты $(x,y;\lambda)$ имеет место формула

$$(x,y;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi_m(x)\bar{\varphi}_m(y)}{\lambda_m-\lambda},$$

где билинейный ряд сходится в $L_2(G\times G)$.

В-5.36

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy$$

в следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad 0\le x\le y\le 1\\ y, & \text{если} \quad 0\le y\le x\le 1\end{cases}$

2) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{если} \quad 0\le x\le y\le 1\\ y(1-x), & \text{если} \quad 0\le y\le x\le 1\end{cases}$

3) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} \frac{2-y}{2}x, & \text{если} \quad 0\le x\le y\le 1,\\ \frac{2-x}{2}y, & \text{если} \quad 0\le y\le x\le 1;\end{cases}$

4)$\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} (x+1)(y-2), & \text{если} \quad 0\le x\le y\le 1\\ (y+1)(x-2), & \text{если} \quad 0\le y\le x\le 1\end{cases}$

5) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} (x+1)y, & \text{если} \quad 0\le x\le y\le 1,\\ x(y+1), & \text{если} \quad 0\le y\le x\le 1\end{cases}$

6) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} \left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y+e^{2-y}\right), & \text{если} \quad 0\le x\le y\le 1,\\ \left(e^x+e^{2-x}\right)\left(e^y-e^{-y}\right), & \text{если} \quad 0\le y\le x\le 1\end{cases}$

7) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} \sin x\sin(1-y), & \text{если} \quad 0\le x\le y\le 1\\ \sin(1-x)\sin y, & \text{если} \quad 0\le y\le x\le 1\end{cases}$

В-5.37

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром $\mathscr{K}(x,y)$ В следующих случаях:

1) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} (1+x)(1-y), & \text{если} \quad -1\le x\le y\le 1\\ (1-x)(1+y), & \text{если} \quad -1\le y\le x\le 1\end{cases}$

2) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} \cos x\sin y, & \text{если} \quad 0\le x\le y\le \pi,\\ \cos y\sin x, & \text{если} \quad 0\le y\le x\le \pi;\end{cases}$

3) $\mathscr{K}(x,y)=\begin{cases} \sin x\cos y, & \text{если} \quad 0\le x\le y\le \pi,\\ \sin y\cos x, & \text{если} \quad 0\le y\le x\le \pi\end{cases}$

В-5.38

Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\omega(x+y)\varphi(y)dy$$

в следующих случаях:

1) $\omega(t)$ - четная 2π-периодическая функция, причем $\omega(t)=t$, если $t\in[0,\pi]$

2) $\omega(t)$ - четная 2π-периодическая функция, причем $\omega(t)=\pi-t$, если $t\in[0,\pi]$.

В-5.39

Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения с ядром $\mathscr{K}(x,y) = \omega(x-y)$, где $\omega(t)-$ непрерывная кусочно гладкая четная 2π-периодическая функция, $0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi$.

В-5.40

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x),$$

если $f(x) \in C^2([0,1])$ и

$$\mathscr{K}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad 0 \le x \le y \le 1 \\ y, & \text{если} \quad 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{K}(x,y)-$ непрерывное ядро интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x).$$

Выражение называется символом Фредгольма, а функция

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{A_n}{n!}\lambda^n$$

$$A_n = \int_a^b \dots \int_a^b \mathscr{K}\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \dots t_n \\ t_1 & t_2 \dots t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

где называется определителем Фредгольма ядра $\mathscr{K}(x,y)$ или интегрального уравнения (6).

В-5.41

Доказать, что коэффициенты A_n определителя Фредгольма удовлетворяют неравенствам $|A_n| \le n^{n/2}M^n(b-a)^n$. Вывести отсюда, что $D(\lambda)$ - целая функция от λ.

Ук а з ан и е. Использовать неравенство Адамара (см. [2]). Минором Фредаольма называется функция

$$D(x,y;\lambda) = \lambda\mathscr{K}(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{B_n(x,y)}{n!}\lambda^{n+1}$$

где

$$B_n(x,y) = \int_a^b \dots \int_a^b \mathscr{K}\mathscr{K}\begin{pmatrix} x & t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ y & t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

В-5.42

Показать, что если $\mathscr{K}(x,y)-$ непрерывная в квадрате $L : \{a \le x, y \le b\}$ функция, то $D(x,y;\lambda)$ - непрерывная функция переменных x, y, λ в $L \times \mathbb{C}$ и $D(x,y;\lambda)$ (при фиксированных x и y) является целой функцией от λ.

В-5.43

Доказать, что коэффициенты A_n, функции $B_n(x,y)$ и ядро $\mathscr{K}(x,y)$ (см. (7)-(10)) связаны равенствами:

1) $B_n(x,y) = A_n\mathscr{K}(x,y) - n\int_a^b B_{n-1}(x,\xi)\mathscr{K}(\xi,y)d\xi$;

2) $B_n(x,y) = A_n\mathscr{K}(x,y) - n\int_a^b \mathscr{K}(x,\xi)B_{n-1}(\xi,y)d\xi$. Указ ан и е. Разложить определитель, входящий в подынтегральное выражение для $B_n(x,y)$, по элементам первого столбца.

В-5.44

Доказать первое и второе фундаментальные соотношения Фредгольма:

$$D(x,y;\lambda) - \lambda\mathscr{K}(x,y)D(\lambda) = \lambda\int_a^b \mathscr{K}(x,\xi)D(\xi,y;\lambda)d\xi,$$

$$D(x,y;\lambda) - \lambda\mathscr{K}(x,y)D(\lambda) = \lambda\int_a^b \mathscr{K}(\xi,y)D(x,\xi;\lambda)d\xi.$$

Ук аз а н и е. Воспользоваться разложением (9), сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ в левой и правой частях доказываемых равенств и применить результат предыдущей задачи.

В-5.45

Доказать формулы

$$A_n = \int_a^b B_{n-1}(x,x)dx, \quad \int_a^b D(x,x;\lambda)dx = -\lambda D'(\lambda)$$

В-5.46

Доказать формулу $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^{n-1}$ (коэффициенты α_n определены на с. 75).

В-5.47

Пусть определитель Фредгольма $D(\lambda)$ интегрального уравнения (6) не равен нулю. Доказать, что в этом случае интегральное уравнение для любой $f(x) \in C([a,b])$ имеет решение и при том только одно и что это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)} f(y)dy.$$

В-5.48

Используя представление решения интегрального уравнения при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ через резольвенту $(x,y;\lambda)$(см. задачу 5.6) и результат предыдущей задачи, доказать формулу

$$(x,y;\lambda) = \frac{D(x,y;\lambda)}{\lambda D(\lambda)}$$

(эта формула определяет аналитическое продолжение резольвенты, заданной при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ в виде ряда (см. задачу 5.6)).

В-5.49

Доказать, что характеристические числа интегрального уравнения с непрерывным ядром совпадают с нулями определителя Фредгольма $D(\lambda)$ этого уравнения.

В-5.50

Доказать, что ранг m характеристического числа λ_0 интегрального уравнения с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x,y)$ конечен и имеет место неравенство

$$m \le |\lambda_0|^2 \int_a^b \int_a^b |\mathscr{K}(x,y)|^2 dxdy$$

В-5.51

Доказать, что определители Фредгольма непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ и союзного с ним ядра $\mathscr{K}^*(x,y)$ совпадают и, следовательно, данное и союзное уравнения имеют одни и те же характеристические числа (см. задачу 5.49).

В-5.52

Показать, что ранг характеристического числа для данного непрерывного ядра и союзного с ним ядра один и тот же.

В-5.53

Доказать, что при $|\lambda| < 1$ интегральное уравнение Милна

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \left(\int_{|x-y|=0}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \varphi(y)dy$$

имеет единственное решение $\varphi = 0$ в классе ограниченных функций на $[0,\infty)$.

B-5.54

Для интегрального уравнения Пайерлса

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_G \frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|^2} \varphi(y) dy, \quad \alpha > 0,$$

доказать оценку

$$\lambda_1 \left(1 - e^{-\alpha D}\right) \geq \alpha,$$

где D - диаметр области $G \subset R^3, \lambda_1$ - наименьшее по модулю характеристическое число ядра.

B-5.55

Доказать, что при $\lambda < 1/2$ решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy + f(x)$$

единственно в классе ограниченных функций в R^1 и выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y) dy.$$

Примеры от Владимирова в конце

Задача 7. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x) \varphi(y) dy + a \sin x + bx$$

при всех допустимых значениях a, b, λ. Р еш ен и е. Обозначим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \cdot \varphi(y) dy, \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y \varphi(y) dy;$$

тогда уравнение (1) примет вид

Из (2) и (3) получаем

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \left(\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + by\right) dy,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y \left(\lambda C_1 y + \lambda C_2 \cos y + a \sin y + by\right) dy$$

откуда находим $C_1 = \lambda C_1 \cdot 2\pi + a\pi + 2\pi b$

$$C_2 = \lambda C_1 \frac{2\pi^3}{3} + a \cdot 2\pi + b \frac{2\pi^3}{3}$$

Систему (

4)запишем в следующем виде:

$$C_1(1 - 2\pi\lambda) = a\pi + 2\pi b,$$
$$-\lambda \frac{2\pi^3}{3} C_1 + C_2 = 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}.$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ системы (5) равен $\Delta(\lambda) = 1 - 2\pi\lambda$. Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$, то система (5) имеет единственное решение при любых a и b:

$$C_1 = \frac{a\pi + 2\pi b}{1 - 2\pi\lambda}, \quad C_2 = \frac{2\pi^3 \lambda (a\pi + 2\pi b)}{3(1 - 2\pi\lambda)} + 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}.$$

и b : $\quad C_1 = \frac{a\pi+2\pi b}{1-2\pi\lambda}, \quad C_2 = \frac{2\pi^3\lambda(a\pi+2\pi b)}{3(1-2\pi\lambda)} + 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}$. Подставляя C_1 и C_2 из (6) в (3), найдем при $x \neq \frac{1}{2\pi}$ единственное решение интегрального уравнения (1). Пусть $\lambda = \frac{1}{2\pi}$, тогда система (5) примет вид

$$C_1 \cdot 0 = (a + 2b)\pi,$$
$$-\frac{\pi^2}{3} C_1 + C_2 = 2a\pi + \frac{2\pi^3 b}{3}.$$

Система (7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a + 2b = 0.$$

Условие (8) является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) при $\lambda = \frac{1}{2\pi}$. Здесь $\frac{1}{2\pi}$– характеристическое число интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x)\varphi(y)dy.$$

Общее решение однородной линейной системы

$$C_1 \cdot 0 = 0$$
$$-\frac{\pi^2}{3}C_1 + C_2 = 0$$

соответствуюшей системе (7), имеет вид

$$\widetilde{C}_1 = C, \quad \widetilde{C}_2 = \frac{\pi^2}{3}C,$$

где C - произвольная постоянная.

В качестве частного решения системы (7) можно взять

$$C_1^0 = 0, \quad C_2^0 = 2a\pi - \frac{a\pi^3}{3}.$$

Поэтому общее решение системы (7) имеет вид

$$C_1 = C, \quad C_2 = \frac{\pi^2}{3}C + a\pi\left(2 - \frac{\pi^2}{3}\right).$$

Подставляя C_1 и C_2 из (9) в (3), найдем все решения уравнения (1) при $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ при условии (8). Эти решения можно записать формулой

$$\varphi(x) = \left(A - \frac{a}{2}\right)x + \left[\frac{A\pi^2}{2} + a\left(1 - \frac{\pi^2}{6}\right)\right]\cos x + a\sin x,$$

где A - произвольная постоянная.

15.6 Задачи на смешанные задачи

(подумаю потом про название)

МФТИ.Карлов-3 Типичная смешанная задача на отрезке и метод Фурье

(!! вот то отработать нужно!)

$$\begin{cases} u_{tt} + 6u_t = 2u_{xx} - 5x \cdot e^{-t} + (2x-\pi)^2 \cdot e^{-4t}; & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), t > 0 \\ u|_{t=0} = x + 3, & u_t|_{t=0} = 2 \cdot \sin 3x \sin x + \cos 4x - x \\ u_x|_{x=0} = e^{-t}, & u_x|_{x=\pi/2} = e^{-t} \end{cases}$$

Поскольку задача смешанная, то будут начальные и граничные условия. Рассматривается функция $u(x,t)$. За такую задачу дают больше всего баллов. Решение: Для решения задачи воспользуемся методом Фурье, т.е. будем решать задачу через ряд. Для этого необходимо занулить граничные условия. Поэтому:

1) Обнуляем граничные условия, т.е. подбираем функцию, удовлетворяющую граничным условиям. Таких функций много, и потому можно взять любую попроще. Эта функция $g(x,t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$g_x|_{x=0} = e^{-t},\ g_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = e^{-t}.$$

Общего метода нет, почти всегда такую функцию можно подобрать устно. Совет: на самом деле можно, глядя на условия задачи, неоднородности, стоящие в уравнении или в начальных условиях, понять, какое желательно подобрать g. Это следует из-за особенности составления этих задач. Например:

$$g(x,t) = x \cdot e^{-t}.$$

В случае любой другой функции ответ получался бы всё равно тем же самым, только более сложные функции могли бы привести к более сложным вычислениям. Ищем ответ в виде:

$$u = v + g.$$

Подставляем эту сумму в уравнение, в начальные и в граничные условия и смотрим, какими они станут для v:

$$\begin{cases} v_{tt} + xe^{-t} + 6v_t - 6xe^{-t} = 2v_{xx} - 5x \cdot e^{-t} + (2x-\pi)^2 \cdot e^{-4t}, \\ v\big|_{t=0} + x = x + 3; \quad v_t\big|_{t=0} - x = 2\sin 3x \sin x + \cos 4x - x \\ v_x\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

В большинстве случаев в правой части уравнения должна оставаться одна функция, отвечающая за неоднородность, поскольку её необходимо в процессе решения разложить в ряд Фурье. Если остались две функции, то скорее всего либо была выбрана не лучшая функция g, либо были сделаны ошибки в подсчётах. Полученное уравнение не является ни волновым, ни теплопроводности. Однако метод Фурье является общим и может применяться и для волнового уравнения, и для уравнения теплопроводности, и для уравнения такого вида. За доведение до этого этапа даётся 1 балл. Если ошибиться на каком-то из этапов, то на дальнейших этапах проверяющими считается, что решаемая задача не имеет ничего общего с данной, а потому баллы за дальнейшее решение не выставляются. Однако некоторые преподаватели проверяют лояльнее и могут какое-то количество баллов поставить. 2) Ищем ответ в виде ряда:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t),$$

причем требуется, чтобы функция $X_n(x)$ была собственной для второй производной, т.е.:

$$-X_n''(x) = \lambda X_n(x).$$

Это попытка найти ответ. Если это получится, то вычисления будут простые. Условие (8) нужно для того, чтобы подстановка в уравнение (6) была удобной. Минус присутствует в обычной записи данного уравнения, потому что это уравнение второго порядка будет решаться на функциях X_n, удовлетворяющих граничным условиям:

$$X_n'(0) = X_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

В задаче могут быть 4 различных варианта задания граничных условий, поскольку из четырёх условий (2 для функций и 2 для их производных на концах отрезка) нужно выбрать два. Условия на X_n ставятся такими же, как и на v на границе соответствующей области. Если будут найдены такие X_n, то граничные условия точно будут выполнены. На лекциях было доказано, что оператор минус вторая производная - линейный оператор на функциях, рассматривающийся на линейном пространстве (если взять функции класса C^2 на отрезке такие, что для них на концах отрезка выполнены соответствующие условия, то они образуют линейное пространство, поскольку их сумма тоже будет удовлетворять этим условиям). Более того, этот оператор неотрицательно определён, т.е. все λ точно неотрицательны. В противном случае необходимо было бы рассматривать два случая. Для $\lambda < 0$ возможны только $X_n = 0$. Отсюда следует, что общий вид ответа:

$$X_n(x) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Этим можно пользоваться на контрольной. Ответ будет определен с точностью до умножения на C. Для производной $X_n'(x)$:

$$X_n'(x) = -\sqrt{\lambda}C_1 \cdot \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

Подставляем:

$$\begin{array}{lcc} 0 = X_n'(0) = C_2\sqrt{\lambda}, \Rightarrow & \text{или} & \lambda = 0, \Rightarrow X_n = C_1 \\ & \text{или} & C_2 = 0 \\ 0 = X_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1\sqrt{\lambda} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}\right), \Rightarrow & \text{или} & C_1 = 0 \Rightarrow X_n = 0, \\ & \text{или} & \lambda = 0, \Rightarrow X_n = C_1, \\ & \text{или} & \sin\left(\sqrt{\lambda \frac{\pi}{2}}\right) = 0, \Rightarrow \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ & & \sqrt{\lambda} = 2n, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \\ & & \lambda = (2n)^2, n \geq 0 \end{array}$$

Таким образом, все искомые из условий X_n получились следующими:

$$X_n(x) = \cos 2nx, n \geq 0.$$

Здесь учтена и константа (при $n = 0$). X_n определяется с точностью до умножения на константу, поэтому не надо указывать C_1. Больше всего ошибок в этой задаче происходит при решении тригонометрического уравнения. Важно помнить, что

$$\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Таким образом, половина ответа уже известна. Именно поэтому важно было занулить граничные условия, ибо при их обнулении получаются именно функции Фурье. Возможны и другие коэффициенты перед x. В любом случае это будут функции Фурье, т.е. независимые функции, образующие базис, по которому можно раскладывать ответ. 3)

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t) \cdot \cos 2nx.$$

Этот ряд надо подставить в уравнение и стараться всё превращать в ряды. Раскладываем в ряды v_{tt}, v_t, v_{xx} и неоднородности в уравнении:

$$\begin{gathered}
3 = 3 \cdot 1 \text{ гдее } 1 = X_0(x) \\
2\sin 3x \sin x + \cos 4x = /* \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \\
\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) */ \\
= 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \cos 4x = \cos 2x \\
\cos 2x = 1 \cdot \cos 2x, \text{ где } \cos 2x = X_1(x)
\end{gathered}$$

3 С третьей функцией дела обстоят сложнее, поскольку её разложение будет больше:

$$(2x-\pi)^2 x \underset{=}{\in} \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \cos 2nx$$

Вообще говоря, произвольная функция не обязана раскладываться в ряд Фурье, который, возможно, не сходится. Однако часто на экзамене делают грубое решение в целях экономии времени. В его рамках предполагается, что разложение будет. Однако в этом случае на веру берётся факт о том, что разложение будет и именно по ортогональной системе. Тогда для нахождения коэффициентов a_n необходимо левую и правую части (19) скалярно умножить на нужную базисную функцию:

$$a_n = \frac{\big((2x-\pi)^2, \cos 2nx\big)}{(\cos 2nx, \cos 2nx)},$$

где учтено, что базис ортогонален. Если расписать более конкретно:

Можно в рамках проверки рассмотреть функцию $(2x-\pi)^2$ на интервале $(0;\pi/2)$. Это - парабола с вершиной в точке $\frac{\pi}{2}$. Требуется эту функцию разложить по косинусам чётной кратности. Это означает, что при продолжении этой функции и рассмотрении её на отрезке $[-\pi;\pi]$ она должна была бы быть чётной, а из-за того, что косинусы у неё только чётной кратности, она также должна быть чётной на интервале $[0;\pi]$ относительно $\pi/2$. Т.е. если функция обладает этим свойством, то она будет раскладываться на отрезке $[-\pi;\pi]$ по косинусам и будет чётной относительно точек $-\pi/2, 0, \pi/2$. Такими же свойствами обладают и чётные косинусы. Далее вспоминаем, что продолженная таким образом функция вышла непрерывной кусочно-гладкой, т.е. график непрерывный, а кусочная гладкость означает, что у функции конечное число точек, в которых может быть разрыв первой производной - разрыв первого рода (у данной функции одна такая точка - в нуле), а значения на концах совпадают, то ряд Фурье к ней сходится равномерно на нужном отрезке.

Посчитаем знаменатель:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 2nx dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 4nx}{2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Для числителя (интегрирование по частям): $\int_0^{\pi/2} (2x-\pi)^2 \cdot \cos 2nx dx = /* \begin{array}{lll} u = (2x-\pi)^2, & \Rightarrow & du = 2 \cdot 2(2x-\pi)dx \\ dv = \cos 2nx dx, & \Rightarrow & v = \frac{\sin 2nx}{2n} \end{array} * =$
$= \int_0^{\pi/2} u dv = (2x-x)^2 \cdot \frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{n}(2x-\pi) \cdot \sin 2nx = = -\int_0^{\pi/2} \frac{2}{n}(2x-\pi) \cdot \sin 2nx$. Нужно еще раз провести интегрирование по частям:

$$/* \begin{array}{l} u = \frac{2}{n}(2x-\pi), \quad \Rightarrow \quad du = \frac{4}{n}dx \\ dv = \sin 2nx dx, \Rightarrow v = -\frac{\cos 2nx}{2n} * \end{array} \Rightarrow -\int_0^{\pi/2} \frac{2}{n}(2x-\pi) \cdot \sin 2nx =$$

$$= \frac{2}{n}(2x-\pi) \cdot \frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{n^2} \cos 2nx dx = \frac{2}{n}(2x-\pi) \cdot \frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 0 - \frac{2}{n}(2x-\pi) \cdot \frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_{x=0} = \frac{\pi}{n^2}.$$

Можно не находить коэффициенты a_n и написать ответ в виде ряда, но за это снимут 1 балл. Иногда необходимо учесть, что $\cos \pi n = (-1)^n$, и встречаются выражения типа $((-1)^n - 1)$. Для $n \geq 1$ имеем:

$$a_n = \frac{\pi/n^2}{\pi/4} = \frac{4}{n^2}.$$

Для $n = 0$:

$$a_0 = \frac{\int_0^{\pi/2} (2x-\pi)^2 dx}{\int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx} = \frac{\left.\frac{(2x-\pi)^3}{3\cdot 2}\right|_0^{\pi/2}}{\pi/2} = 0 - \frac{\frac{(-\pi)^3}{6}}{\pi/2} = \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Найденные коэффициенты не потребуются до самого ответа. 4) Нужно разложенные ряды подставить в уравнение и найти T_n; подставляем:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cdot \cos 2nx$$

в уравнение и в начальные условия (граничные условия уже выполнены, их можно не проверять). По ходу дела необходимо дважды продифференцировать ряд, однако функциональный ряд можно дифференцировать не всегда. Необходимо, чтобы продифференцированный ряд равномерно сходился на интервале, а исходный ряд сходился хотя бы в одной точке. Однако 5 на письменном экзамене не следует это проверять.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n''(t) \cos 2nx + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} T_n'(t) \cos 2nx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \left(-(2n)^2 \cos 2nx\right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2 \cos nx e^{-4t}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cdot \cos 2nx = 3, \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) \cos 2nx = \cos 2x$$

Это - наиболее содержательная часть метода Фурье. В левой и правой частях уравнения и условий функции разложены по базису Фурье на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поскольку функции $\cos 2nx$ образуют базис и являются линейно независимыми, то можно приравнять коэффициенты перед ними справа и слева. Собираем подобные слагаемые перед базисными функциями $\cos 2nx$: $\begin{matrix}\cos 2nx \\ n \geq 2\end{matrix}$: $\begin{cases} T_n'' + 6 \cdot T_n' = -8 \cdot n^2 T_n + a_n \cdot e^{-} \\ T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0 \end{cases}$

$n = 1$: $\begin{cases} T_1'' + 6T_1' = -8T_1 + a_1 \cdot e^{-4t} \\ T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = 1 \end{cases}$ $n = 0$: $\begin{cases} T_0'' + 6T_0' = a_0 e^{-4t} \\ T_0(0) = 3, \quad T_0'(0) = 0 \end{cases}$ Таким образом, остались задачи Коши для T_n для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Можно оценить количество исключений (таких как подзадачи (31) и (32)) по количеству баллов за задание, и если за задачу ставится 9 баллов, а исключений нет или оно всего одно, то вероятно была допущена ошибка. Бывают исключения, связанные с резонансом, а также связанные с тем, что в одном случае корни комплексные, а в другом экспоненты. В этом примере есть все возможные исключения. На этом этапе заработано 5-6 очков, и дальше по одному будет даваться за каждую из подзадач (30)-(32). 5) $n \geq 2$. Характеристический многочлен:

$$M^2 + 6M + 8n^2 = 0.$$
$$D = 36 - 32n^2$$

Таким образом, дискриминант отрицательный для $n \geq 2$.

$$M = \frac{-6 \pm 2i\sqrt{8n^2 - 9}}{2} = -3 \pm i\sqrt{8n^2 - 9}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$T_n(t) = C_1 \cdot e^{-3t} \cdot \cos \omega_n t + C_2 \cdot e^{-3t} \sin \omega_n t,$$

где

$$\omega = \sqrt{8n^2 - 9}.$$

Ищем частное решение:

$$T_n'' + 6T_n' + 8n^2 \cdot T_n = a_n \cdot e^{-4t}.$$

6 Резонанс отсутствует. Поэтому вид частного решения: $A \cdot e^{-4t}$. Подставляем в (38):

$$16A \cdot e^{-4t} - 24A \cdot e^{-4t} + 8n^2 A e^{-4t} = a_n \cdot e^{-4t}$$
$$\left(8n^2 - 8\right) A = a_n$$
$$A = \frac{a_n}{8(n^2-1)} \qquad (n \geq 2)$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$T_n(t) = C_1 \cdot e^{-3t} \cos \omega_n t + C_2 \cdot e^{-3t} \sin \omega_n t + \frac{a_n}{8\,(n^2-1)} \cdot e^{-4t}.$$

Подставляем начальные условия, получив систему линейных уравнений на C_1 и C_2:

$$\begin{cases} T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Подстановка даёт:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + \frac{a_n}{8(n^2-1)} \\ 0 = -3C_1 + C_2\omega_n - \frac{4a_n}{8(n^2-1)} \end{cases}$$

Находим C_1, C_2:

$$T_n(t) = \frac{a_n}{8\,(n^2-1)} \cdot \left[e^{-3t} \left(\frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t - \cos \omega_n t \right) + e^{-4t} \right].$$

6) $n = 1$:

$$\begin{cases} T_1'' + 6T_1' + 8T_1 = a_1 \cdot e^{-4t} \\ T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = 1 \end{cases}$$

Характеристический многочлен:

$$M^2 + 6M + 8 = 0$$
$$M_1 = -2, \quad M_2 = -4$$

Общее решение однородного уравнения:

$$T_1(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-4t}.$$

Наступает резонанс, поскольку неоднородность в уравнении (46) - это $e^{\gamma t}$, где $\gamma = -4$ - в то же время корень характеристического многочлена, имеющий кратность 1. В этом случае частное решение ищется как:

$$a \cdot t^k \cdot e^{-4t} = ate^{-4t}.$$

Подставляем в уравнение, получая:

$$\left(ate^{-4t}\right)'' = \left(ae^{-4t} - 4ate^{-4t}\right)' = -4ae^{-4t} - 4ae^{-4t} + 16ate^{-4t} = -8ae^{-4t} + 16ate^{-4}$$
$$-8ae^{-4t} + 16ate^{-4t} + 6ae^{-4t} - 24ate^{-4t} + 8ate^{-4t} = a_1 \cdot e^{-4t} \qquad | \, \boldsymbol{\nabla} \cdot e^{-4t}$$
$$-2a = a_1, \Rightarrow a = -\frac{a_1}{2}$$

Общее решение неоднородного уравнения есть:

$$T_1(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-4t} - \frac{a_1}{2} t \cdot e^{-4t}$$

Начальные условия:

$$T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = 1.$$

Тогда

$$0 = C_1 + C_2$$
$$1 = -2C_1 - 4C_2 - \frac{a_1}{2}$$

Ишем C_1, C_2:

$$T_1(t) = \left(\frac{a_1}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-2t} - e^{-4t} \right) - \frac{a_1}{2} te^{-4t}$$

7) $n = 0$:

$$\begin{cases} T_0'' + 6T_0' = a_0 e^{-4t} \\ T_0(0) = 3; \quad T_0'(0) = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$M^2 + 6M = 0$$
$$M_1 = 0, \quad M_2 = -6$$

Общее решение однородного уравнения:

$$T_0(t) = C_1 + C_2 e^{-6t}.$$

Резонанса нет $\Rightarrow$ частное решение имеет вид $a \cdot e^{-4t}$. Подставляем:

$$16ae^{-4t} - 24ae^{-4t} = a_0 e^{-4t}$$
$$-8a = a_0, \Rightarrow a = -\frac{a_0}{8}$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$T_0(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-6t} - \frac{a_0}{8} e^{-4t}$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} 3 = T_0(0) = C_1 + C_2 - \frac{a_0}{8} \\ 0 = T_0'(0) = -6C_2 + \frac{a_0}{2} \end{cases}$$

Находим $T_0(t)$:

$$T_0(t) = 3 + a_0 \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} e^{-6t} - \frac{1}{8} e^{-4t} \right).$$

Ответ:

$$u(x,t) = xe^{-t} + \left(3 + a \left(\frac{1}{24} + \frac{e^{-6t}}{12} - \frac{e^{-4t}}{8} \right) \right) + \cos 2x \left[\left(\frac{a_1}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-2t} - e^{-4t} \right) - \frac{a_1}{2} t e^{-4t} \right] +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \cos 2nx \left(\frac{a_n}{8\left(n^2-1\right)} \cdot \left[e^{-3t} \left(\frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t - \cos \omega_n t \right) + e^{-4t} \right] \right)$$

8 где На контрольной на этом моменте можно поставить точку. Рассмотрим, почему при использовании метода Фурье можно дважды почленно дифференцировать по t или по x. Было сказано, что дифференцирование законно, если после дифференцирования получается равномерно сходящийся ряд, то есть надо смотреть надо на последнюю часть в выражении (67). Коэффициент $\frac{a_n}{8(n^2-1)}$ убывает как $\frac{1}{n^4}$. Если дважды продифференцировать этот ряд по x, то от косинуса выйдет еще $4n^2$, тогда этот коэффициент будет убывать как $\frac{1}{n^2}$. Остальная часть функционального ряда будет ограничена. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд можно по модулю ограничить коэффициентами числового сходящегося ряда и ряд равномерно сходится. Если дважды продифференцировать по t, то выйдет множитель ω_n^2, который имеет порядок n^2, и ситуация не изменится. Таким образом, дифференцирование корректно.

15.6.1 Задачи на Метод разделения переменных

(??? а где на метод Фурье задачи!?????)

МФТИ.Карлов-2 Смешанная задача для полубесконечной струны

где рассматривается функция $u = u(x,t)$. В первой строке стоит одномерное волновое уравнение. Поскольку $x > 0$, речь идёт о полуструне. Необходимо свести задачу к однородной, поскольку для неё есть готовое решение, а для задачи Коши есть формула Д'Аламбера. Решение 1) Сводим к однородному уравнению: ищем функцию $g(x,t)$ такую, что $g_{tt} = g_{xx} + 6t$. Ясно, что их бесконечно много. Например:

$$g(x,t) = t^3.$$

Неоднородность обычно подбирается устно, иногда надо считать. Общего алгоритма нет. Ищем ответ в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + t^3.$$

Тогда $v(x,t)$ будет решением однородного уравнения. Подставим (3) в (1):

$$\begin{cases} v_{tt} + 6t = v_{xx} + 6t, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = v|_{t=0} = x + \sin x, & u_t|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 1 - \cos x \\ u_x|_{x=0} = v_x|_{x=0} = 2, & t \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, задача сведена к однородному уравнению:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ v|_{t=0} = x + \sin x = v_0, & v_t|_{t=0} = 1 - \cos x = v_1. \\ v_x|_{x=0} = 2, & t \geq 0 \end{cases}$$

Для однородного уравнения есть готовые ответы. Для однородного волнового уравнения на оси:

$$v_{tt} = a^2 \cdot v_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

общее решение имеет вид:

$$v(x,t) = I(x - at) + J(x + at),$$

где I, J - произвольные функции из класса C^2. Формула для решения задачи Коши для однородного волнового уравнения:

$$\begin{cases} v|_{t=0} = v_0(x) \\ v_t|_{t=0} = v_1(x) \end{cases} \quad \to \text{ формула Даламбера:}$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(v_0(x+at) + v_0(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_1(\lambda)d\lambda$$

Идея решения заключается в следующем: первая четверть делится на две области линией $x = at$, при этом ниже этой линии для нахождения ответа используются только начальные условия, поскольку если взять любую точку, лежащую ниже этой характеристики, то для неё соответствующие ей линии $x - at = C_1$ и $x + at = C_2$ не попадают на ось Ot, то есть не попадают на ту ось, где поставлены граничные условия, и получается, что для области, лежащей ниже характеристики $x = at$, учитываются только начальные условия (при $t = 0$).

2) В области $x > t (a = 1)$ используем формулу Д'Аламбера:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}((x+t) + \sin(x+t) + (x-t) + \sin(x-t)) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(1 - \cos\lambda)d\lambda = x + \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}(\lambda - \sin\lambda)\Big|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= x + \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}((x+t) - (x-t) + \sin(x-t) - \sin(x+t)) =$$

$$= (x+t) + \sin(x-t).$$

3) $x \leq t$ В этом случае одна из линий $x - at = C_1, x + at = C_2$ будет попадать на ось $t = 0$, т.е. туда, где поставлены граничные условия. Но необходимо и второе условие. Вид ответа:

$$v(x,t) = I(x-t) + J(x+t),$$

поскольку это - решение однородного волнового уравнения. Неизвестных - две, потому нужно два условия. Одно - это граничное условие на $v_x|_{x=0} = 2$, а второе - непрерывность склейки: искомый ответ должен быть класса C^2 в первой четверти, т.е. при $x = t$ функция должна быть непрерывна. Поскольку при $x > t$ решение уже было найдено, то этим можно воспользоваться: условие непрерывной склейки:

$$I(0) + J(2t) = x + t + \sin(x-t) = 2t.$$

Вторым условием будет:

$$2 = v_x|_{x=0} = I'(-t) + J'(t),$$

где производные функций - производные именно по тем переменным, от которых они зависят. Таким образом:

$$\begin{cases} J(2t) = 2t - I(0) \\ I'(-t) + J'(t) = 2 \end{cases}.$$

Функции I, J находятся с точностью до $+C$. Поэтому можно принять $I(0) = 0$. Тогда

$$J(2t) = 2t, \Rightarrow J(\eta) = \eta, \Rightarrow J'(\eta) = 1$$
$$I'(-t) + 1 = 2, \Rightarrow I'(-t) = 1, \Rightarrow I'(\xi) = 1$$

Отсюда:

$$I(\xi) = \xi + C,$$
$$0 = I(0) \Rightarrow C = 0$$
$$J(\eta) = \eta$$
$$I(\xi) = \xi.$$

Отсюда

$$v(x,t) = I(x-t) + J(x+t) = 2x$$

Ответ:

$$u(x,t) = t^3 + \begin{cases} x + t + \sin(x-t), & x > t \\ 2x, & x \leq t \end{cases}$$

Задача 2:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & t > 0; x > 0 \\ u|_{t=0} = 2 \cdot e^{2x} - 4, & u_t|_{t=0} = 0; x \geq 0 \\ (u_x - 2u)|_{x=0} = 8t^2 + 8, & t \geq 0 \end{cases}$$

Проверить, что решение принадлежит к классу C^2, ответ обосновать.

Решение: Уравнение изначально однородное. Рассматриваем первую четверть. В данном случае $a = 2$, поэтому проводим линию $x = 2t$. Решение будет состоять из двух частей. 1) $x > 2t$ Общий вид ответа для однородного волнового уравнения:

$$u(x,t) = I(x - 2t) + J(x + 2t).$$

Так выглядит решение любого однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}$. В области $x > 2t$ учитываются только начальные условия:

$$\begin{cases} 2 \cdot e^{2x} - 4 = u|_{t=0} = I(x) + J(x) \\ 0 = u_t|_{t=0} \end{cases}$$

Продифференцируем выражение (23) по t, пользуясь формулой дифференцирования сложной функции:

$$u_t(x,t) = -2I'(x - 2t) + 2J'(x + 2t)$$
$$u_t|_{t=0} = -2I'(x) + 2J'(x)$$

В данной области граничные условия не учитываются.

При решении (24), пользуясь (26), получаем:

$$\begin{cases} I(x) = -J(x) + 2 \cdot e^{2x} - 4 \\ I'(x) = J'(x) \end{cases};$$

найдём производную $I'_\xi(\xi)$:

$$\frac{d}{dx}: \quad I'(x) = -J'(x) + 4 \cdot e^{2x}.$$

Подставляем это во второе уравнение:

$$2J'(x) = 4 \cdot e^{2x},$$

откуда

$$J'(x) = 2 \cdot e^{2x},$$
$$J(x) = e^{2x} + C.$$

Находим отсюда I:

$$I(x) = e^{2x} - C - 4.$$

Таким образом, получаем ответ при $x > 2t$:

$$u(x,t) = e^{2(x-2t)} - 4 + e^{2(x+2t)}.$$

Данный способ решения, в отличии от поиска решения с помощью формулы Даламбера, помогает ускорить процесс нахождения ответа во второй части, потому что известен не только ответ первой области, но и его разбиение на части I и J. 3) $x < 2t$; учтём, что известны следующие ответы:

$$u(x,t) = I_2(x - 2t) + J_2(x + 2t),$$

где I_2 и J_2 могут отличаться от соответствующих функций из первой области. Однако вид ответа будет таким из-за того, что рассматривается волновое однородное уравнение. Заметим, что обратная волна J в обеих областях одинакова: $J_2(\eta) = J(\eta)$, т.к. при подстановке $x = 2t$ и учёте непрерывности предыдущего ответа получается, что

$$I(x - 2t) + J(x + 2t) = I_2(x - 2t) + J_2(x + 2t), \quad x = 2t.$$

Это приводит к тому, что:

$$I(0) + J(4t) = I_2(0) + J_2(4t),$$

откуда непосредственно следует равенство $J_2(\eta) = J(\eta)$. Константу можно выбросить, поскольку эти функции находятся с точностью до констант, т.е. $J = J_2$ с точностью до $+C$. Тогда

$$u(x,t) = I_2(x - 2t) + e^{2(x+2t)}$$

Используем граничное условие:

$$8t^2+8=(u_x-2u)|_{x=0}=I_2'(-2t)\cdot 1+2\cdot e^{4t}-2I_2(-2t)-2\cdot e^{4t}.$$

Отсюда:

$$I_2'(-2t)-2I_2(-2t)=8t^2+8$$
$$\xi=-2t,\xi^2=4t^2$$
$$I_2'(\xi)-2\cdot I_2(\xi)=2\xi^2+8$$

Производная берется по переменной, от которой зависит I_2; в первой области было известно, как ответ разбивается на две части (прямая и обратная волна), это помогло во второй области уже сразу найти половину ответа, поскольку неизвестно только I_2. Решим уравнение (41); общее решение:

$$I_2(\xi)=C\cdot e^{2\xi}$$

Частное решение - многочлен второй степени $a\xi^2+b\xi+c$. Подставляем:

$$2a\xi+b-2a\xi^2-2b\xi-2c=2\xi^2$$
$$\begin{cases} a=-1 \\ 2a=2b,\Rightarrow b=-1 \\ b-2c=8,\Rightarrow c=-4.5 \end{cases}$$

Отсюда общее решение неоднородного уравнения:

$$I_2(\xi)=C\cdot e^{2\xi}-\xi^2-\xi-4.5$$

Для нахождения C надо выполнить проверку для любой общей точки обеих областей, например, $(0;0)$:

$$\begin{cases} x>2t: & e^{2(x-2t)}-4+e^{2(x+2t)} \\ x<2t: & e^{2(x+2t)}+C\cdot e^{2(x-2t)}-(x-2t)^2-(x-2t)-4.5 \\ & 1-4+1=1+C-4.5,\Rightarrow C=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Отсюда ответ:

$$u(x,t)=\begin{cases} e^{2(x-2t)}-4+e^{2(x+2t)}, & x>2t, \\ e^{2(x+2t)}+\frac{3}{2}\cdot e^{2(x-2t)}-(x-2t)^2-(x-2t)-4.5, & x\le 2t \end{cases}$$

Ответ непрерывен на всей линии $x=2t$, поскольку он непрерывен в $(0;0)$. Рассмотрим вопрос о том, находится ли функция в классе C^2. Внутри областей функция является C^2-гладкой. Проблемы могут быть только при склейке. Для проверки ответа на C^2 необходимо проверить согласование начальных и граничных условий: если они согласуются в точке $(0;0)$ (там, где они пересекаются) до второго порядка, то проблемы будут отсутствовать везде вдоль линии $x=2t$. При ответе на этот вопрос формула (48) (решение уравнения) не требуется. Проверим u_x:

$$8=8t^2+8|_{t=0}\overset{(1)}{=}u_x(0,0)-2u(0,0)\overset{(2)}{=}\left[\left(2e^{2x}-4\right)_x-2\left(2e^{2x}-4\right)\right]\Big|_{x=0},$$

где переход (1) следует из граничного условия, а переход (2) - из начального. Для правой части:

$$4e^{2x}-4e^{2x}+8=8,$$

а потому (49) - верное равенство. Проверим вторые производные:

$$\left(8t^2+8\right)_t'\Big|_{t=0}=u_{xt}(0,0)-2u_t(0,0)=(0)_t'|_{t=0}-2\cdot 0|_{t=0}.$$

Таким образом, условия совпали в начальной точке до второго порядка, т.е. согласованы, т.е. ответ лежит в классе C^2. Если бы не было равенства (49), то решение было бы не C^1-гладким, а если бы выполнилось (49), но не (51), то решение было бы C^1-гладким, но не C^2-гладким.

В-20.1

Решить задачу о колебании струны $0<x<l$ с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение u_0 имеет форму:

1) синусоиды $u_0(x)=A\sin\frac{\pi nx}{l}$ (n целое);

2) параболы, осью симметрии которой служит прямая $x=\frac{l}{2}$, а вершиной - точка $M\left(\frac{l}{2},h\right)$;

3) ломаной OAB, где $O(0,0),A(c,h),B(l,0),0<c<l$. Рассмотреть случай $c=\frac{l}{2}$.

В-20.2

Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое ($u_0 = 0$), а начальная скорость u_1 задается формулой:

1) $u_1(x) = v_0 = \text{const},\ x \in [0, l]$;

2) $u_1(x) = \begin{cases} v_0, \text{ если} & x \in [\alpha, \beta], \\ 0, \text{ если} & x \in [\alpha, \beta], \end{cases}$ где $0 \le \alpha < \beta \le l$

3) $u_1(x) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi(x - x_0)}{2\alpha}, & \text{если } x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \\ 0, & \text{если } x \widetilde{\in} [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \end{cases}$ где $0 \le x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \le l$. Уравнение (1) описывает свободные продольные колебания стержня. В задачах 20.3, 20.4 требуется найти продольные колебания стержня, применяя метод разделения переменных.

В-20.3

Решить задачу о продольных колебаниях однородного стержня при произвольных начальных данных в каждом из следующих случаев:

1) один конец стержня ($x = 0$) жестко закреплен, а другой конец ($x = l$) свободен;
2) оба конца стержня свободны;
3) один конец стержня ($x = l$) закреплен упруго, а другой конец ($x = 0$) свободен.

В-20.4

Найти продольные колебания стержня, если один его конец ($x = 0$) жестко закреплен, а к другому концу ($x = l$) приложена сила P (в момент времени $t = 0$ сила перестает действовать).

В-20.5

Найти силу тока $i(x, t)$ в проводе длины l, по которому течет переменный ток, если утечка тока отсутствует и омическим сопротивлением можно пренебречь. Предполагается, что начальный ток в проводе (при $t = 0$) равен нулю, а начальное напряжение задается формулой $v|_{t=0} = E_0 \sin \frac{\pi x}{2l}$. Левый конец провода ($x = 0$) изолирован, а правый конец ($x = l$) заземлен.

Задача о нахождении вынужденных колебаний однородной струны $0 < x < l$, жестко закрепленной на концах, под действием внешней силы с плотностью p приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t)$$

($g = p/\rho$, где ρ - линейная плотность струны) при граничных условиях (3) и начальных условиях (2). Решение задачи (11), (2), (3) ищут в виде суммы

$$u = v + w,$$

где v - решение неоднородного уравнения (11), удовлетворяющее граничным условиям (3) и нулевым начальным условия

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

а w есть решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3) и начальным условиям (2).

Решение v представляет вынужденные колебания струны (эти колебания совершаются под действием внешней возмущающей силы при отсутствии начальных возмущений), а решение w представляет свободные колебания струны (они обусловлены начальными возмущениями). Функцию v отыскиваем в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

по собственным функциям задачи (6), (7). Iодставляя (12) в (11), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = g(x, t).$$

Разлагая функцию $g(x, t)$ в интервале $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам

$$g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и сравнивая (13) и (14), находим дифференциальные уравнения

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = g_k(t)$$

где

$$g_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(\xi,t)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Решая уравнения (15) при нулевых начальных условиях

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

находим $T_k(t)$, а затем определяем v с помощью формулы (12). Заметим, что решения $T_k(t)$ уравнений (15) при условиях (16) можно представить в виде

$$T_k(t) = \frac{2}{k\pi a}\int_0^t \left[\int_0^l g(\xi,\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right]d\tau.$$

Решение задачи $(11), (2), (3)$ представляется в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где функции $T_k(x)$ определяются формулой (17), а коэффициенты a_k и b_k - формулами

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

B-20.6

Решить методом разделения переменных следующие смешанные задачи:
1) $u_{tt} = u_{xx} + 2b(b = \text{const}, 0 < x < l), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0;$
2) $u_{tt} = u_{xx} + \cos t(0 < x < \pi), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$

B-20.7

Решить задачу о колебаниях однородной струны $(0 < x < l)$, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$, под действием внешней непрерывно распределенной силы с плотностью $\rho(x,t) = A\rho\sin\omega t$, $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}(k = 1, 2, \ldots)$. Начальные условия - нулевые.

B-20.8

Решить задачу о продольных колебаниях стержня, подвешенного за конец $x = 0$ (конец $x = l$ свободен), совершаемых под влиянием силы тяжести.

Задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны под действием внешней силы в случае, когда концы струны двигаются по некоторому закону, приводится к решению уравнения (11) при граничных условиях вида

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t)$$

и начальных условиях (2). Решение задачи $(11), (2), (18)$ ищем в виде $u = v + w$ где $w = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$ - функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям (18).

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям $v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$, уравнению $v_{tt} - a^2 v_{xx} = g_1$, где $g_1(x,t) = g(x,t) - \left(w_{tt} - a^2 w_{xx}\right)$, и следующим начальным условиям:

$$v|_{t=0} = u_0(x) - w|_{t=0}, \quad v_t|_{t=0} = u_1(x) - w_t|_{t=0}.$$

Мы пришли к задаче типа (11), (2), (3) для функции v. 3 амеч ан и е. Иногда удается найти функцию v, удовлетворяющую неоднородному уравнению (11) и заданным граничным условиям (18). Тогда, отыскивая решение задачи (11), (2), (18) в виде $u = v + w$, находим, что функция w удовлетворяет однородному уравнению (1), нулевым граничным и начальным условиям (19).

B-20.9

Решить следующие смешанные задачи:
1) $u_{xx} = u_{tt}, 0 < x < l$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = t$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$;
2) $u_{xx} = u_{tt}, 0 < x < 1$, $u|_{x=0} = t + 1$, $u|_{x=1} = t^3 + 2$, $u|_{t=0} = x + 1$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$.

B-20.10

Решить задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны, закрепленной на одном конце ($x = 0$) и подверженной на другом конце ($x = l$) действию возмущающей силы, которая вызывает смещение, равное $A \sin \omega t$, где $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}(k = 1, 2, \ldots)$. В момент времени $t = 0$ смещения и скорости равны нулю.

B-20.11

Пусть стержень длиной l, конец которого $x = 0$ жестко закреплен, находится в состоянии покоя. В момент $t = 0$х его свободному концу $x = l$ приложена сила $Q = \mathrm{const}$, действующая вдоль стержня. Найти смещение $u(x, t)$ стержня.

B-20.12

Решить задачу о продольных колебаниях однородного цилиндрического стержня, один конец которого заделан, а к другому концу приложена сила $Q = A \sin \omega t$, направление которой совпадает с осью стержня $\left(\omega \neq \frac{a\pi(2k+1)}{2l}, k = 0, 1, 2, \ldots\right)$.

B-20.13

Решить задачу о свободных колебаниях однородной струны длиной l, закрепленной на концах и колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Начальные условия нулевые.

B-20.14

Решить следующие смешанные задачи:
1) $u_{tt} = u_{xx} - 4u(0 < x < 1)$; $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$; $u|_{t=0} = x^2 - x$, $u_t|_{t=0} = 0$
2) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = \pi x - x^2$, $u_t|_{t=0} = 0$
3) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u(0 < x < \pi)$; $u_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = x$
4)$u_{tt} + u_t = u_{xx}(0 < x < 1)$; $u|_{x=0} = t$, $u|_{x=1} = 0$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 1 - x$ 5) $u_{tt} = u_{xx} + u(0 < x < 2)$; $u|_{x=0} = 2t$, $u|_{x=2} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ 6) $u_{tt} = u_{xx} + u(0 < x < l)$; $u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = t$; $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = \frac{x}{l}$

B-20.15

Решить следующие смешанные задачи:
1) $u_{tt} = u_{xx} + x(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = \sin 2x$, $u_t|_{t=0} = 0$
2) $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1(0 < x < 1)$; $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$

B-20.16

Решить следующие смешанные задачи:
1) $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x(0 < x < \pi/2)$; $u_x|_{x=0} = 2t$, $u|_{x=\pi/2} = \pi t$; $u|_{t=0} = \cos x$, $u_t|_{t=0} = 2x$;
2) $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x)(0 < x < \pi/2)$; $u|_{x=0} = 3$, $u_x|_{x=\pi/2} = t^2 + t$; $u|_{t=0} = 3$, $u_t|_{t=0} = x + \sin x$
3) $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4 + t) + \cos \frac{3x}{2}(0 < x < \pi)$; $u_x|_{x=0} = t + 1$, $u|_{x=\pi} = \pi(t + 1)$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = x$
4)$u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x} \sin 3x(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = \pi t$; $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = x$; 5) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1 - 4t) + \cos 3x(0 < x < \pi/2)$; $u_x|_{x=0} = t$, $u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi t}{2}$; $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = x$; 6) $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x(0 < x < \pi)$; $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ 7) $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2 \sin 2x \cos x(0 < x < \pi/2)$; $u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ 8) $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t(0 < x < \pi)$; $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = \pi t$; $u|_{t=0} = e^{-x} \sin x$, $u_t|_{t=0} = x$.

В задачах 20.17-20.20 требуется применять метод разделения переменных для изучения колебаний мембраны. Задача о колебаниях однородной мембраны сводится к решению уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u + f$ при некоторых начальных и граничных условиях (см. с. 14-16).

В частности, задача о свободных колебаниях прямоугольной мембраны ($0 < x < p, 0 < y < q$), закрепленной по контуру, сводится к решению волнового уравнения

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x,y).$$

B-20.17

Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны $(0 < x < p, 0 < y < p)$, закрепленной вдоль контура, если $u|_{t=0} = A\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

B-20.18

Решить следуюшую смешанную задачу:

$$u_{tt} = \Delta u \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 3\sin x\sin 2y, \quad u_t|_{t=0} = 5\sin 3x\sin 4y.$$

B-20.19

Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0 < x < p, 0 < y < q)$, закрепленной вдоль контура, если $u|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

B-20.20

. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю, в следующих случаях:

1) начальное отклонение определяется равенством $u|_{t=0} = AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{r}\right)$, где μ_k - положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$; начальная скорость равна нулю;

2) начальное отклонение и начальная скорость зависят только ot r, T. e. $u|_{t=0} = f(r)$, $u_t|_{t=0} = F(r)$;

3) начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальная скорость равна нулю.

B-20.21

Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + f(t)J_0(\mu_k x)$$

где μ_k - положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0, 0 < x < 1$, если: $u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, $|u|_{x=0}| < \infty$,

1) $f(t) = t^2 + 1$

2) $f(t) = \sin t + \cos t$.

B-20.22

Найти решение смешанной задачи
$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1$$
$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = g(t), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$
если:

1) $g(t) = \sin^2 t$, $u_0(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}\right]$, $u_1(x) = 0$;

2) $g(t) = \cos 2t$, $u_0(x) = \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}$, $u_1(x) = 0$;

3) $g(t) = t - 1$, $u_0(x) = J_0(\mu_1 x) - 1$, где μ_1 - положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0, u_1(x) = 1$.

B-20.23

Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} + f(t) = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1$$
$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = g(t), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

1) $f(t)=\cos t, \quad u_0(x)=1-\frac{J_0(x)}{J_0(1)}, \quad u_1(x)=0;$

2) $f(t)=\sin 3t, \quad g(t)=u_0(x)=1, \quad u_1(x)=\frac{1}{3}\left[1-\frac{J_0(3x)}{J_0(3)}\right];$

3) $f(t)=-2\cos 2t, \quad g(t)=u_1(x)=0, \quad u_0(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{J_0(2x)}{J_0(2)}-1\right]+ +J_0\left(\mu_1 x\right)$, где μ_1- положительный корень уравнения $J_0(\mu)=0$.

B-20.24

Решить смешанную задачу

$$u_{xx}+\frac{1}{x}u_x=u_{tt}+u, \quad 0<x<1$$
$$|u|_{x=0}|<\infty, \quad u|_{x=1}=\cos 2t+\sin 3t$$
$$u|_{t=0}=\frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}, \quad u_t|_{t=0}=\frac{3J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}$$

B-20.25

Решить задачу о колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю, если эти колебания вызваны равномерно распределенным давлением $p=p_0\sin\omega t$, приложенным одной стороне мембраны. Предполагается, что среда не оказывает сопротивления и что $\omega\neq\frac{a\mu_n}{r}$, где $\mu_n(n=1,2,\ldots)$ - положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$ (нет резонанса).

B-20.26

Решить смешанную задачу

$$u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x-\frac{u}{x^2}, \quad 0<x<1$$
$$|u|_{x=0}|<\infty, \quad u|_{x=1}=0, \quad u|_{t=0}=u_0(x), \quad u_t|_{t=0}=u_1(x)$$

если:

1) $u_0(x)=J_1\left(\mu_k x\right)+J_1\left(\mu_m x\right), \quad u_1(x)=0$

2) $u_0(x)=J_1\left(\mu_k x\right), \quad u_1(x)=J_1\left(\mu_m x\right)$ Здесь μ_k и μ_m - два различных положительных корня уравнения $J_1(\mu)=0$.

B-20.27

Решить смешанную задачу

$$u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x-\frac{u}{x^2}+e^t J_1\left(\mu_k x\right)$$

где μ_k - положительный корень уравнения $J_1(\mu)=0, 0<x<1$,

$$|u|_{x=0}|<\infty, \quad u|_{x=1}=u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0.$$

B-20.28

Решить смешанную задачу

$$u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x-\frac{u}{x^2}, \quad 0<x<1$$
$$|u|_{x=0}|<\infty, \quad u|_{x=1}=\sin 2t\cos t, \quad u|_{t=0}=0$$
$$u_t|_{t=0}=\frac{J_1(x)}{2J_1(1)}+\frac{3}{2}\frac{J_1(3x)}{J_1(3)}$$

B-20.29

Решить смешанную задачу

$$u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x-\frac{4u}{x^2}, \quad 0<x<1,$$
$$|u|_{x=0}|<\infty, \quad u|_{x=1}=0, \quad u|_{t=0}=u_0(x), \quad u_t|_{t=0}=$$

если:

1) $u_0(x)=u_1(x)=J_2\left(\mu_k x\right);$

2) $u_0(x)=\frac{1}{2}J_2\left(\mu_k x\right), \quad u_1(x)=\frac{3}{2}J_2\left(\mu_k x\right)$. Здесь μ_k - положительный корень уравнения $J_2(\mu)=0$.

В-20.30

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{4u}{x^2} + f(t) J_2 (\mu_1 x), \quad 0 < x < 1$$

где μ_1 - положительный корень уравнения $J_2(\mu) = 0$,

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

если:
1) $f(t) = t$
2) $f(t) = \cos t$.

В-20.31

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{9u}{x^2}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = J_3 (\mu_1 x),$$

где μ_1 - положительный корень уравнения

$$J_3(\mu) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

если:
1) $u_0(x) = 0$;
2) $u_0(x) = J_3 (\mu_1 x)$.

В-20.32

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{9u}{x^2} + f(t) J_3 (\mu_k x), \quad 0 < x < 1$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$$

где μ_k - положительный корень уравнения $J_3(\mu) = 0$, если:
1) $f(t) = e^{-t}$
2) $f(t) = t - t^2$.

В-20.33

Решить смешанную задачу

$$(x u_x)_x = u_{tt}, \quad 0 < x < \frac{1}{4},$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1/4} = 0, \quad u|_{t=0} = J_0 \left(2\mu_1 \sqrt{x}\right), \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

где μ_1 - положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

В-20.34

Тяжелая однородная нить длиной l, подвешенная за один из своих концов ($x = l$), выводится из положения равновесия и отпускается без начальной скорости. Изучить колебания нити, которые она совершает под действием силы тяжести; предполагается, что среда не оказывает сопротивления.

В-20.35

Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом ($x = l$) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти отклонение $u(x, t)$ нити от положения равновесия.

B-20.36

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = (xu_x)_x\,, \quad 0 < x < 1,$$
$$|u|_{x=0}\,| < \infty, \quad u_x|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_0\left(\mu_k\sqrt{x}\right),$$
где $\mu_k -$ положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$.

B-20.37

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x + f(t)J_0\left(\mu_1\sqrt{x}\right), \quad 0 < x < 1,$$
$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

где μ_1 - положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$, если:
1) $f(t) = t$
2) $f(t) = \sin t$.

B-20.38

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{x}, \quad 0 < x < 1,$$
$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_2\left(\mu_k\sqrt{x}\right)$$

где μ_k - положительный корень уравнения $J_2(\mu) = 0$.

B-20.39

Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{9u}{4x}, \quad 0 < x < 1,$$
$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_3\left(\mu_1\sqrt{x}\right),$$

где μ_1 - положительный корень уравнения $J_3(\mu) = 0$.

B-20.40

Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

1) концы стержня $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u|_{t=0} = u_0(x)$; рассмотреть случаи: а) $u_0(x) = A = \text{const}$, б) $u_0(x) = Ax(l-x), \quad A = \text{const}$;

2) конец $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конце $x = l$ происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, начальная температура стержня $u|_{t=0} = u_0(x)$;

3) на обоих концах стержня ($x = 0$ и $x = l$) происходит теплообмен с окружающей средой, а начальная температура стержня $u|_{t=0} = u_0(x)$

4)концы стержня ($x = 0$ и $x = l$) теплоизолированы, а начальная температура $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$; 5) концы стержня теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0 = \text{ const}, & \text{если } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

изучить поведение $u(x,t)$ при $t \longrightarrow \infty$; 6) концы стержня теплоизолированы, а

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}x, & \text{если } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l}(l-x), & \text{если } \frac{l}{2} \le x < l \end{cases}$$

где $u_0 = \text{const}$; найти $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

В-20.41

Решить следующие смешанные задачи:
1) $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = x^2 - 1;$
2) $u_{xx} = u_t + u, \quad 0 < x < l, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 1;$
3) $u_t = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = x^2 - \pi x.$

В-20.42

Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

1) концы стержня поддерживаются при постоянных температу рах $u|_{x=0} = u_1$, $u|_{x=l} = u_2$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$; найти $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$;

2) концы стержня имеют постоянную температуру $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_1$, а начальная температура задается формулой

$$u|_{t=0} = u_0(x) = Ax(l-x),$$

где $A = \text{const}$; найти $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$; § 20. Memod разделения перемекяых 257

3) левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=l} = u_2$, начальная температура равна $u|_{t=0} = \frac{A}{l}x$, где $A = \text{const}$;

4)левый конец стержня поддерживается при заданной постоянной температуре $u|_{x=0} = u_1$, а на правый конец подается извне заданный постоянный тепловой поток; начальная температура стержня $u|_{t=0} = u_0(x)$.

В-20.43

Дан тонкий однородный стержень длины l, с боковой поверхности которого происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, имеющую нулевую температуру; левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=0} = u_1$. Определить температуру $u(x,t)$ стержня, если:

1) правый конец стержня $x = l$ поддерживается при температуре $u|_{x=l} = u_2 = \text{const}$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0(x)$;

2) на правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю; начальная температура равна нулю. В задаче о распространении тепла в стержне, концы которого поддерживаются при заданных температурах, зависящих, вообще говоря, от t, граничные условия имеют вид

$$u|_{x=0} = \alpha_1(t), \quad u|_{x=l} = \alpha_2(t).$$

В этом случае решение задачи (1), (3), (8а) можно искать в виде $u = v + w$, где функция w определяется формулой $w = \alpha_1(t) + \frac{x}{l} \times \times (\alpha_2(t) - \alpha_1(t))$

В-20.44

Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце $x = l$ поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце температура равна $u|_{x=0} = At$, где $A = \text{const}$. Начальная температура стержня равна нулю.

В-20.45

Решить следующие смешанные задачи:
1) $u_t = u_{xx}, 0 < x < l, u_x|_{x=0} = 1, u|_{x=l} = 0, u|_{t=0} = 0;$
2) $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x, 0 < x < \pi/2, u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = u|_{t=0} = 0;$
3) $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, 0 < x < 1, u|_{x=0} = u|_{x=l} = t, u|_{t=0} = e^x \sin \pi x$
4)$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x, 0 < x < \pi/2, u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi/2} = 1, u|_{t=0} = x$; 5) $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x, 0 < x < \pi, u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, u|_{t=0} = 0;$

$$6)\ u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, 0 < x < \pi, u|_{x=0} = 1 + t, u|_{x=\pi} =$$
$$= 1 + t, u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x.$$

В-20.46

Решить следующие смешанные задачи:
1) $u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2\cos t, 0 < x < \pi, u_x|_{x=0} = t^2, u_x|_{x=\pi} = t^2, u|_{t=0} = \cos 2x;$
2) $u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, 0 < x < \pi, u_x|_{x=0} = 0\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi, u|_{t=0} = x^2 + 2;$
3) $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x, 0 < x < \pi/2, u_x|_{x=0} = 1, u|_{x=\pi/2} = t^2 + \pi/2, u|_{t=0} = x;$
4) $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x, 0 < x < \pi\ u_x|_{x=0} = 1, u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1, u|_{t=0} = x$
5) $u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x}\cos^2 \pi x, 0 < x < 1, u|_{x=0} = t\ u|_{x=1} = 2t, u|_{t=0} = 0$

Указания для задач ниже

Задача о распространении тепла в однородном шаре радиуса R с центром в начале координат в случае, когда температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки от центра шара, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

при начальном условии

$$\left.u\right|_{t=0}=u_0(r).$$

Если на поверхности шара происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, то граничное условие имеет вид

$$\left.\left(u_r+hu\right)\right|_{r=r}=0.$$

Полагая $v=ru$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

$$\left.v\right|_{r=0}=0,\quad \left.\left[v_r+\left(h-\frac{1}{r}\right)v\right]\right|_{r=r}=0,$$

$$\left.v\right|_{t=0}=ru_0(r).$$

Таким образом, задача (14)-(16) приводится к задаче (17)-(19) о распространении тепла в стержне, один конец которого ($r=0$) поддерживается при нулевой температуре, а на другом конце ($r=R$) происходит теплообмен с окружающей средой (см. задачу 20.43).

B-20.47

Дан однородный шар радиуса R с центром в начале координат. Определить температуру внутри шара, если:

1) внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, Т. е. $\left.u\right|_{t=0}=u_0(r)$

2) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру, а $\left.u\right|_{t=0}=u_0(r)$; 3) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен со средой, имеюшей температуру $u_1=\text{const}$, а $\left.u\right|_{t=0}=u_0=\text{const}$;

4)внутрь шара, начиная с момента $t=0$, через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности $q=\text{const}$, а начальная температура $\left.u\right|_{t=0}=u_0=\text{const}$.

B-20.48

Дана тонкая квадратная пластинка $(0<x<l, 0<y<l)$, для которой известно начальное распределение температуры $\left.u\right|_{t=0}=u_0(x,y)$. Боковые стороны $x=0,\quad x=l$ и стороны оснований $y=0, y=l$ во все время наблюдения удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластинки в момент времени $t>0$.

15.6.2 Задачи на Другие методы

B-21.1

Доказать, что задача $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad t>0,\quad x>0;\ \left.u\right|_{t=0}=0,\quad \left.u_t\right|_{t=0}=0,\quad \left.u\right|_{x=0}=g(t)$ имеет единственное решение $u(x,t)=\begin{cases}0, & x\geq at,\\ g\left(t-\frac{x}{a}\right), & x<at\end{cases}$ если $g\in C^2(t\geq 0), g(0)=g'(0)=g''(0)=0$.

B-21.2

Доказать, что задача $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad t>0,\quad x>0;\ \left.u\right|_{t=0}=u_0(x),\quad \left.u_t\right|_{t=0}=u_1(x),\quad \left.u\right|_{x=0}=0$ имеет единственное решение $u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[u_0(x+at)+u_0(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)d\xi, & x\geq at,\\ \frac{1}{2}\left[u_0(x+at)-u_0(at-x)\right]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}u_1(\xi)d\xi, & x<at,\end{cases}$ если $u_0\in C^2(x\geq 0), u_1\in C^1(x\geq 0), u_0(0)=u_0''(0)=u_1(0)=0$. Показать, что это решение можно получить из формулы Далам- бера (с. 137), если функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ продолжить нечетным образом для $x<0$.

В-21.3

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = g(t)$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geq at \\ -a\int_0^{t-x/a} g(\tau)d\tau, & x < at \end{cases}$$

если $g \in C^1(t \geq 0), g(0) = g'(0) = 0$.

В-21.4

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u_x|_{x=0} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi, & x \geq at \\ \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(at-x)\right] + & \\ \quad +\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} u_1(\xi)d\xi + \int_0^{at-x} u_1(\xi)d\xi\right], & x < at \end{cases}$$

если $u_0 \in C^2(x \geq 0), \quad u_1 \in C^1(x \geq 0), \quad u_0'(0) = u_1'(0) = 0$. Показать, что это решение можно получить из формулы Даламбера, если функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ продолжить четным образом для $x < 0$.

В-21.5

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g(t), \quad u|_{x=l} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\tilde{g}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a}\right) - \tilde{g}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(n+1)l}{a}\right)\right]$$
$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

если $g \in C^2(t \geq 0), g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.

В-21.6

Доказать, что задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l;$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi)d\xi$$

где функции $\tilde{u}_0(x), \tilde{u}_1(x)$ - нечетные, $2l$-периодические и совпадающие с функциями $u_0(x), u_1(x)$ при $0 \leq x \leq l$, если $u_0 \in C^2[0,l]$, $u_1 \in C^1[0,l], u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = \overline{u_0''}(0) = u_0''(l) = 0$.

В задачах 21.7-21.23 требуется доказать, что существует единстенное решение поставленной задачи; найти это решение.

В-21.7

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$
$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x - \beta u)|_{x=0} = g(t),$
$g \in C^1(t \geq 0), \quad g(0) = g'(0) = 0.$

B-21.8

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, x > 0;$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x - \beta u)|_{x=0} = 0$$

$$u_0 \in C^2(x \geq 0), \quad u_0'(0) - \beta u_0(0) = 0.$$

B-21.9

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, 0 < x < l;$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = g(t), \quad u_x|_{x=l} = 0,$$

$g \in C^1(t \geq 0), \quad g(0) = g'(0) = 0.$

B-21.10

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, 0 < x < l;\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0,$

$$u_0 \in C^2([0,l]), \quad u_1 \in C^1([0,l])$$

B-21.18

$u_{tt} = 9u_{xx} + e^t, t > 0, x > 0;$

$$u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 3\cos\frac{x}{3}, \quad u_x|_{x=0} = 2 - \cos t.$$

B-21.19

$u_{tt} = 3u_{xx} + 2\left(1 - 6t^2\right)e^{-2x}, t > 0, x > 0;$
$u|_{t=0} = 1, \quad u|_{t=0} = x, \quad (u_x - 2u)|_{x=0} = -2 + t - 4t^2.$

B-21.20

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, x > 0;\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x + u)|_{x=0} = 1 - \cos t.$$

B-21.21

$$u_{tt} = u_{xx} + 4, t > 0, x > 0;\ u|_{t=0} = 1 - x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x + u)|_{x=0} = \frac{3}{2}t^2.$$

B-21.22

$u_{tt} = u_{xx}, t > 0, x > 0;$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_t - u)|_{x=0} = 2t - t^2.$$

B-21.23

1) $u_{tt} = u_{xx} - 6, t > 0, x > 0;$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_t + 2u_x)|_{x=0} = -4t$$

2) $u_{tt} = 4u_{xx} + 2, t > 0, x > 0;$

$$u|_{t=0} = 2 - x, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad (u_t + 3u_x)|_{x=0} = 3t - e^t.$$

B-21.24

Найти наибольшую область, в которой поставленная задача имеет единственное решение, и найти это решение:
1) $u_{tt} = u_{xx};\ u|_{t=0} = x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0 \quad 0 \leq x \leq 2, \quad u|_{x=0} = t^3, \quad 0 \leq t \leq 2;$
2) $u_{tt} = u_{xx};\ u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad u|_{t=3x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$

B-21.25

Доказать, что задача имеет единственное решение

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & |x|\geq 1+at\\ \frac{1}{|x|}g\left(t+\frac{1-|x|}{a}\right), & 1<|x|<1+at\end{cases}$$

если $g\in C^2(t\geq 0), g(0)=g'(0)=g''(0)=0$. Показать, что если $g(t)$ - финитная функция, то $u(x,t)=0$ для любого фиксированного $x, |x|\geq 1$, при достаточно больших t. В случае, когда $g(t)\neq 0$ при $0<t<T, g(t)=0$ при $t\geq T$, найти момент времени t_x, в который через точку $x, |x|>1$ пройдет задний фронт волны.

B-21.26

Найти решение задачи

$$u_{tt}=a^2\Delta u,\quad t>0,\quad |x|>1,\quad x\in R^3$$
$$u|_{t=0}=\alpha(|x|),\quad u_t|_{t=0}=\beta(|x|),\quad u|_{|x|=1}=0$$

где $\alpha(r)\in C^2(r\geq 1), \beta(r)\in C^1(r\geq 1), \alpha(1)=0, \alpha''(1)+2\alpha'(1)=0$, $\beta(1)=0$. Доказать, что если функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ финитные, то $u(x,t)=0$ для любого фиксированного $x, |x|\geq 1$, при достаточно больших t.

B-21.29

Решить задачу

$$u_{tt}=\Delta u,\quad t>0,\quad |x|>1,\quad x\in R^3;$$
$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0,\quad \left(ku+\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{|x|=1}=g(t),\quad k=\text{ const.}$$

Решить задачи 21.30-36

B-21.30

$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), t>0, x>0$; $u|_{t=0}=u_0(x)$, $u|_{x=0}=0$.

B-21.31

$u_t=a^2u_{xx}, t>0, x>0;$

$$u|_{t=0}=0,\quad u|_{x=0}=g(t).$$

B-21.32

$u_t=a^2u_{xx}, t>0, x>0;$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad u_x|_{x=0}=0.$$

B-21.33

$u_t=a^2u_{xx}, t>0, x>0$

$$u|_{t=0}=0,\quad u_x|_{x=0}=g(t).$$

276 Гя. VI. Снеианная задаяа

B-21.34

$u_t=u_{xx}, t>0, x>0;$

$$u|_{t=0}=0,\quad (u-u_x)|_{x=0}=g(t).$$

B-21.35

$u_t=a^2u_{xx}, t>0, x>0;$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad (u_x-hu)|_{x=0}=0,\quad h\geq 0.$$

B-21.36

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, t > 0, x > 0;\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0.$$

15.7 Постановки краевых задач математической физики

15.7.1 Вывод уравнений и постановки краевых задач

(да, это мб важно, тем не менее, это очень прикладной уровень, так что вдали, начинать не с него следует.)

B-1.1

Найти статический прогиб струны, закрепленной на концах, под действием непрерывно распределенной нагрузки (на единицу длины).

B-1.2

Вывести уравнение малых поперечных колебаний струны с насаженной на нее в некоторой внутренней точке x_0 бусиной массы m.

B-1.3

Вывести уравнение колебания струны, колеблющейся в упругой среде.

B-1.4

Крутильными колебаниями стержня называют такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Вывести уравнение малых крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня. Рассмотреть случаи: а) концы стержня свободны; б) концы стержня жестко закреплены; в) концы стержня упруго закреплены.

B-1.5

Точкам упругого однородного прямоугольного стержня, жестко закрепленного на левом конце и свободного на правом, в начальный момент времени $t = 0$ сообщены малые поперечные отклонения и скорости, параллельные продольной вертикальной плоскости симметрии стержня.

Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений точек стержня при $t > 0$, предполагая, что стержень совершает малые поперечные колебания.

B-1.6

Труба, заполненная идеальным газом и открытая с одного конца, движется поступательно в направлении своей оси с постоянной скоростью v. В момент времени $t = 0$ труба мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу об определении смещения газа внутри трубы на расстоянии x от закрытого конца.

B-1.7

Заключенный в цилиндрической трубке идельный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра. Поставить краевую задачу для определения смещения $u(x, t)$ частиц газа в случаях, когда концы трубки: а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками; б) открыты; в) закрыты поршеньками с пренебрежимо малой массой, насаженными на пружинки с коэффициентами жесткости ν и скользящими без трения внутри трубки.

B-1.8

Начиная с момента времени $t = 0$ один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила $\Phi(t)$, направленная по оси стержня. В момент времени $t = 0$ поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в неотклоненном положении. Поставить краевую задачу для определения малых продольных отклонений точек стержня при $t > 0$.

В-1.9

Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах, в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

В-1.10

Составить уравнение продольных колебаний стержня, у которого площадь поперечного сечения есть заданная функция от x, считая материал стержня однородным.

В-1.11

. Поставить краевую задачу о продольньхх колебаниях упругого стержня, имеющего форму усеченного конуса, если концы стержня закреплены неподвижно и стержень выведен из состояния покоя тем, что его точкам в момент времени $t = 0$ сообщены начальные скорости и продольные отклонения. Длина стержня равна l, радиусы оснований $R, r(R > r)$, материал стержня однороден. Деформацией поперечных сечений пренебречь.

В-1.12

Находящаяся в горизонтальной плоскости невесомая струна с постоянной угловой скоростью ω вращается вокруг вертикальной оси, причем один конец струны прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени $t = 0$ точкам этой струны сообщаются малые отклонения и скорости по нормалям к этой плоскости. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от плоскости равновесного движения.

В-1.13

Пусть в точке $x = 0$ бесконечной однородной струны находится шарик массы m_0. Начальные скорости и начальные отклонения точек струны равны нулю. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от их положения равновесия в следующих случаях: а) начиная с момента времени $t = 0$ на шарик действует сила $F = F_0 \sin \Omega t$ б) в начальный момент времени $t = 0$ шарик получает импульс p_0 в поперечном направлении; в) шарик в случае б) закреплен упруго с эффективной жесткостью k^2.

В-1.14

Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Сопротивлением среды пренебречь.

В-1.15

Во внутренних точках $x = x_i, i = 1, \ldots, n$, на струне сосредоточены массы $m_i, i = 1, \ldots, n$. Поставить краевую задачу для определения мальг поперечных колебаний струны при произвольных начальныгх данных. Концы струны закреплены.

В-1.16

Два полуограниченныг однородныгх упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены жестко торцами и составляют один неограниченный стержень. Пусть ρ_1, E_1 - плотность и модуль упругости одного из них, а ρ_2, E_2 - другого. Поставить краевую задачу для определения отклонений поперечных сечений неограниченного стержня от их положения равновесия, если в начальный момент времени поперечным сечениям сообщены некоторые продольные смещения и скорости.

В-1.17

Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом $(x = l)$ на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \omega^2 u.$$

В-1.18

Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой однородной струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец жестко закреплен, а нижний свободен.

В-1.19

Поставить задачу об определении магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника, по поверхности которого течет ток силой J.

В-1.20

Кабель, имеющий потенциал v_0, при $t = 0$ заземляется на одном конце через сосредоточенную емкость (или индуктивность); другой конец изолирован. Поставить задачу об определении электрического тока в кабеле.

В-1.21

Конец $x = 0$ круглого однородного вала закреплен, а к концу $x = l$ жестко прикреплен диск с моментом инерции J_0. В начальный момент времени диск закручивается на угол α и отпускается без начальной скорости. Поставить краевую задачу для определения углов поворота поперечных сечений вала при $t > 0$.

В-1.22

Тяжелый стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени $t = 0$ 24 Гя. I. Постановки краевьх задач математической физики стержень освобождается. Поставить краевую задачу о вынужденныхх колебаниях стержня.

В-1.23

Пусть все условия предыдущей задачи остаются без изменения, за исключением условия на нижнем конце: к нему прикреплен груз Q, причем за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент времени из-под груза убирается подставка и груз начинает растягивать стержень).

В-1.24

Поставить задачу о движении полуограниченной струны ($0 \le x < \infty$) при $t > 0$, если при $t < 0$ по ней бежит волна $u(x, t) = f(x + at)$, а конец струны $x = 0$ закреплен жестко.

В-1.25

Поставить краевую задачу о мальх радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в цилиндрической трубке радиуса R настолько длинной, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Начальные отклонения и начальные скорости есть заданные функции от r.

В-1.26

Поставить задачу об обтекании шара стационарным потоком идеальной жидкости (потенциальное течение). Привести электростатическую аналогию.

В-1.27

Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в сферическом сосуде радиуса R, если начальные скорости и начальные отклонения заданы как функции от r.

В-1.28

Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях мембраны, к которой приложено нормальное давление P на единицу площади, если в невозмущенном состоянии мембрана является плоской, а окружающая среда не оказывает сопротивления колебаниям мембраны. Рассмотреть случаи: а) мембрана жестко закреплена на границе L; б) мембрана свободна на L; в) на части L_1 границы L мембрана закреплена жестко, а на остальной части L_2 границы L она свободна.

В-1.29

Поставить краевую задачу о колебании круглой однородной мембраны, закрепленной по краю, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. В момент времени $t = 0$ К поверхности мембраны приложена внешняя сила плотности $f(r, \varphi, t)$, действующая перпендикулярно плоскости невозмущенной мембраны. Начальные скорости и отклонения точек мембраны отсутствуют.

B-1.30

Закрепленная по краям однородная прямоугольная мембрана в начальный момент времени $t = 0$ получает удар в окрестности центральной точки, так что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{U_\varepsilon} v_0(x) dx = A, \quad x = (x_1, x_2)\,,$$

где A - некоторая постоянная, $v_0(x)$ - начальная скорость. Поставить краевую задачу о свободныхх колебаниях.

B-1.31

Пусть электрическая цепь состоит из сопротивления R, самоиндукции L и емкости C. В момент времени $t = 0$ в цепь включается э. д. с. E_0. Показать, что сила тока $i(t)$ в цепи удовлетворяет уравнению

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E_0, \quad t > 0.$$

B-1.32

Рассмотрим электромагнитное поле в некоторой среде. Исходя из уравнений Максвелла вывести уравнения, которым удовлетворяют компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей для случаев: а) плотность зарядов $\rho = 0, \varepsilon = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\boldsymbol{J} = \lambda \boldsymbol{E}$ (закон Ома); б) среда - вакуум и токи отсутствуют.

B-1.33

Поставить задачу о проникновении магнитного поля в правое полупространство, заполненное средой с проводимостью σ, если начиная с момента времени $t = 0$ на поверхности $x = 0$ поддерживается напряженность магнитного поля $H = H_0 \sin \Omega t$, направленная параллельно поверхности.

B-1.34

Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью. Рассмотреть случаи: а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре; б) на концах стержня поддерживается заданный тепловой поток; в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

B-1.35

Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной плотности в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x. Написать граничные условия, предполагая, что диффузия происходит в плоском слое $0 \le x \le l$. Рассмотреть случаи: а) на граничных плоскостях концентрация диффундирующего вещества поддерживается равной нулю; б) граничные плоскости непроницаемы; в) граничные плоскости полупроницаемы, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

B-1.36

Вывести уравнение диффузии распадающегося газа (количество распавшихся молекул в единицу времени в данной точке пропорционально плотности с коэффициентом пропорциональности $\alpha > 0$)

B-1.37

Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого $f(x)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на конце $x = 0$ поддерживается постоянная температура u_0, а на боковой поверхности и на конце $x = l$ происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры.

B-1.38

Поставить задачу об определении температуры в бесконечном тонком теплоизолированном стержне, по которому с момента $t = 0$ в положительном направлении со скоростью v_0 начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий q единиц тепла в единицу времени.

B-1.39

Поставить краевую задачу об остывании тонкого однородного кольца радиуса R, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен окружающей средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

B-1.40

Вывести уравнение диффузии взвешенньдх частиц с учетом оседания, предполагая, что скорость частиц, вызываемая силой тяжести, постоянна, а плотность частиц зависит только от высоты z и от времени t. Написать граничное условие, соответствующее непроницаемой перегородке.

B-1.41

Поставить краевую задачу об остывании равномерно нагретого стержня формы усеченного конуса (искривлением изотермических поверхностей пренебрегаем), если концы стержня теплоизолированы, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

B-1.42

Растворенное вещество с начальной плотностью $c_0 = \mathrm{const}$ диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x = h, x = l$. Поставить краевую задачу для процесса выравнивания плотности, предполагая, что границы $x = 0, x = l$ непроницаемы для вещества.

B-1.43

Внутри однородного шара начиная с момента времени $t = 0$ действуют источники тепла с равномерно распределеннной постоянной плотностью Q. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ внутри шара, если начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Рассмотреть случаи: а) на поверхности шара поддерживается нулевая температура; б) на поверхности шара происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой нулевой температуры.

B-1.44

Дан однородный шар радиуса R с начальной температурой, равной нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ внутри шара, если: а) шар нагревается равномерно по всей поверхности постоянным тепловым потоком q; б) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой зависит только от времени.

B-1.45

Начальная температура неограниченной пластины толщи ны $2h$ равна нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ по толщине пластины, если:

а) пластина нагревается с обеих сторон равными постоянными тепловыми потоками q; б) в пластине начиная с момента времени $t = 0$ действует источник тепла с постоянной плотностью Q, а ее основания поддерживаются при температуре, равной нулю.

B-1.46

Неограниченный цилиндр радиуса R имеет начальную температуру $f(r)$. Поставить краевую задачу о радиальном распространении тепла, если: а) боковая поверхность поддерживается при постоянной темпеpatype; б) с боковой поверхности происходит лучеиспускание в окружающую среду нулевой температуры.

B-1.47

Дана тонкая прямоугольная пластина со сторонами l, m, для которой известно начальное распределение температуры. Поставить краевую задачу о распространении тепла в пластине, если боковые стороны поддерживаются при температуре

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi_1(x), \quad u|_{y=m} = \varphi_2(x), \\ u|_{x=0} &= \psi_1(x), \quad u|_{x=l} = \psi_2(x). \end{aligned}$$

В-1.48

Начальное распределение температуры в однородном шаре задано функцией $f(r,\theta,\varphi)$. Поставить краевую задачу о распределении тепла в шаре, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре u_0.

В-1.49

Два полуограниченных стержня, сделанных из разных материалов, в начальный момент времени приведены в соприкосновение своими концами. Поставить краевую задачу о распределении тепла в бесконечном стержне, если известны начальные температуры каждого из двух полуограниченных стержней.

В-1.50

Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры в тонкой прямоугольной пластине ACB со сторонами $OA = a, OB = b$, если: а) на боковых сторонах пластины поддерживаются заданные температуры; б) на сторонах OA и OB заданы тепловые потоки, а стороны BC и AC теплоизолированы.

В-1.51

На плоскую мембрану, ограниченную кривой L, действует стационарная поперечная нагрузка с плотностью $f(x,y)$. Поставить краевую задачу об отклонении точек мембраны от плоскости, если: а) мембрана закреплена на краю; б) край мембраны свободен; в) край мембраны закреплен упруго.

В-1.52

Дан цилиндр с радиусом основания R и высотой h. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутри цилиндра, если температура верхнего и нижнего оснований есть заданная функция от r, а боковая поверхность: а) теплоизолирована; б) имеет температуру, зависящую только от z; в) свободно охлаждается в среде нужной температуры.

В-1.53

Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутренних точек полусферы, если сферическая поверхность поддерживается при заданной температуре $f(\varphi,\theta)$, а основание полусферы - при нулевой температуре.

В-1.54

Шар радиуса R нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности q, падающим на его поверхность, и отдает тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Поставить краевую задачу о распределении температуры внутренних точек шара.

В-1.55

Пусть $n(x,s,t)$ - плотность частиц в точке x, летящих с постоянной скоростью v в направлении $8 = (s_1, s_2, s_3)$ в момент времени t; обозначим через $\alpha(x)$ коэффициент поглощения и $h(x)$ коэффициент умножения в точке x. Предполагая рассеяние в каждой точке x изотропным, показать, что $n(x,s,t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению переноса

$$\frac{1}{v}\frac{\partial n}{\partial t} + (8, \operatorname{grad} n) + \alpha(x)n = \frac{\beta(x)}{4\pi}\int_{|s'|=1} n\left(x, s', t\right) d\boldsymbol{s}' + F,$$

где $F(x,s,t)$ - плотность источников, $\beta(x) = \alpha(x)h(x)$.

В-1.56

Поставить краевую задачу для уравнения задачи 1.55, считая, что задано начальное распределение плотности и задан падающий поток частиц на границу S области G.

B-1.57

Показать, что для решения $n(x,s)$ стационарной краевой задачи

$$(s, \operatorname{grad} \boldsymbol{n}) + \alpha(x)\boldsymbol{n} = \frac{\beta(x)}{4\pi} \int_{|s'|=1} n\left(x, s'\right) ds' + F(x),$$
$$\boldsymbol{n}|_S = 0, \quad \text{ если } (s, \boldsymbol{n}) < 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ - внешняя нормаль к S, средняя плотность

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|s|=1} n(x,s) ds$$

удовлетворяет интегральному уравнению Пайерлса

$$n_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-|x-x'|}}{|x-x'|^2} \left(\int_0^1 \alpha\left[tx + (1-t)x'\right] dt \right) \left[\beta\left(x'\right) n_0\left(x'\right) + F\left(x'\right)\right] dx'.$$

B-1.58

Разлагая решение $\boldsymbol{n}(x,s)$ стационарной краевой задачи 1.57 в ряд по сферическим функциям от s, удерживая только члены с нулевой и первыми гармониками, показать, что функция

$$\boldsymbol{n}_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|s|=1} n(x,s) ds$$

есть решение краевой задачи (диффузное приближение)

$$-\frac{1}{3} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\alpha} \operatorname{grad} h_0 \right) + (1-h) h_0 = \frac{f}{\alpha}, \quad \left(n_0 + \frac{2}{3\alpha} \frac{\partial n_0}{\partial n} \right) \Big|_S = 0$$

15.7.2 Классификация уравнений второго порядка

Уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0$$

в каждой фиксированной точке x_0 можно привести к каноническому виду неособым линейным преобразованием $\xi = B^T x$, где B - такая матрица, что преобразование $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{\eta}$ приводит квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_0\right) y_i y_j$$

к каноническому виду. (Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, например, методом выделения полных квадратов.)

B-2.1

Привести к каноническому виду уравнения:
1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$
2) $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$;
3) $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$;
4)$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$; 5) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$; 6) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$; 7) $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$; 8) $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$; 9) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0$; 10) $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0$; 11) $u_{x_1x_1} + 2\sum_{k=2}^{n} u_{x_kx_k} - 2\sum_{k=1}^{n-1} u_{x_kx_{k+1}} = 0$; 12) $u_{x_1x_1} - 2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_{x_{k-1}x_k} = 0$; 13) $\sum_{k=1}^{n} k u_{x_kx_k} + 2\sum_{l<k} l u_{x_lx_k} = 0$;

B-2.2

В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнения:
1) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$;
2) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$;
3) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$;
4)$u_{xx} - xu_{yy} = 0$; 5) $u_{xx} - yu_{yy} = 0$; 6) $xu_{xx} - yu_{yy} = 0$; 7) $yu_{xx} - xu_{yy} = 0$; 8) $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$; 9) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$ 10) $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$ 11) $\left(1 + x^2\right)u_{xx} + \left(1 + y^2\right)u_{yy} + yu_y = 0$; 12) $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} = 0$; 13) $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} + \left(2 - \cos^2 x\right)u_{yy} = 0$; 1
4)$y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$; 15) $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$. Пусть коэффициенты уравнения (1) непрерывны в некоторой области D. Функция $u(x, y)$ называется рещением уравкекия (1), если она принадлежит классу $C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D. Множество всех решений уравнения (1) называется обиим решением уравкения (1).

B-2.3

Найти общее решение уравнений с постоянными коэффициентами:
1) $u_{xy} = 0$;
3) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$;
2) $u_{xx} - a^2u_{yy} = 0$; 5) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$
4)$u_{xy} + au_x = 0$ 7) $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$; 6) $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$; 8) $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2u_{yy} + u_x + au_y = 0$.

B-2.4

Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

заменой $u(x, y) = v(x, y)e^{-bx-ay}$ приводится к виду $v_{xy} + (c - ab)v = 0$.

B-2.5

Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} = u$ имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^x f(t)J_0(2i\sqrt{y(x - t)})dt +$$
$$+ \int_0^y g(t)J_0(2i\sqrt{x(y - t)})dt + [f(0) + g(0)]J_0(2i\sqrt{xy})$$

где $J_0(z)$ - функция Бесселя, а f и g - произвольные функции класса C^1.

B-2.6

Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} = F(x, y)$, где $F \in C\left(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b\right)$, имеет вид

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y F(\xi, \eta)d\eta d\xi,$$

где f и g - произвольные функции класса C^2.

B-2.7

Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} + A(x, y)u_x = 0$, где $A(x, y) \in C^1\left(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b\right)$, имеет вид

$$u(x, y) = f(y) + \int_{x_0}^x g(\xi)\exp\left\{-\int_{y_0}^y A(\xi, \eta)d\eta\right\}d\xi$$

где f и g - произвольные функции классов C^2 и C^1 соответственно.

В-2.8

Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{1}{x-y}u_x + \frac{1}{x-y}u_y = 0$$

имеет вид $u(x,y) = \frac{f(x)+g(y)}{x-y}$, где f и g - произвольные функции из класса C^2.

В-2.9

Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{n}{x-y}u_x + \frac{m}{x-y}u_y = 0$$

где n и m - натуральные числа, имеет вид

$$u(x,y) = \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{m-1}\partial y^{n-1}}\left[\frac{f(x)+g(y)}{x-y}\right],$$

где f и $g-$ произвольные функции из классов C^{m+1} и C^{n+1} соответственно.

В-2.10

Доказать, что общее решение уравнения

$$u_{xy} + \frac{n}{x-y}u_x - \frac{m}{x-y}u_y = 0$$

где n и m - неотрицательные целые числа, имеет вид

$$u(x,y) = (x-y)^{n+m+1}\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left[\frac{f(x)+g(y)}{x-y}\right],$$

где f и g - произвольные функции из классов C^{n+2} и C^{m+2} соответственно.

В-2.11

В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнений:
1) $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$;
2) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$;
3) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0$;
4)$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy} = 0$; 5) $u_{xy}-xu_x+u = 0$; 6) $u_{xy}+2xyu_y-2xu = 0$; 7) $u_{xy}+u_x+yu_y+(y-1)u = 0$; 8) $u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0$.

16 Другие задачи

16.1 Задачи о нелинейных уравнениях

16.1.1 Простейшие задачи о нелинейных уравнениях

Лебедев-

7.1.1. Решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями $u = -c_1x + c_2x^3$, полученное с помощъю метода характеристик, можсно Формально продолюсить и на времена $t > c_1^{-1}$, что приводит к неоднозначному решению (x). Найти область существования этой неоднозначности и значения Функции и в этой области.

Лебедев-

7.1.2. Найти решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями $u = -c_1x + c_2x^2$.

Лебедев-

7.1.3. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая является константой f_0 на интервале $-x_0 < x < x_0$ и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака f_0 ?

Лебедев-

7.1.4. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая равна $h_0 x$ на интервале $-x_0 < x < x_0$ и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака h_0 ?

Лебедев-

7.1.6. Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием $\Psi(0, x) = 1 - A \exp\left(-x^2\right) . B$ иисислить соответствуюющее поле u.

Лебедев-

7.2.1. Проверить непосредственно законы сохранения интегралов (7.17,7.18,7.19), исходя из уравнения (7.14).

Лебедев-

7.2.2. Вывести соотношение Таланова (7.21).

Лебедев-

7.1.5. Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием $\Psi(0, x) = \cosh(ax) + B \cosh(bx)$. Вычислить соответствующее поле и. Проследить, как большой шок "поедает"маленький, считая $b > a$ u $B \ll 1$.

Часть V

—— Special PDE in a Nutshell ——

17 Особые методы в двух словах

(100% много отдельных методов захочется указать, так что для этого раздел)

17.1 О нелинейных уравнениях

(это же в интегрируемых системах, но там полно всего, а тут самая минимальная суть.)

17.1.1 Об уравнении Хопфа

В линейном приближении решение одномерного волнового акустического уравнения говорит, что в системе отсчета, движущейся с (линейной) скоростью звука, характеристики акустического поля не меняются. (?? а какие нелинейные поправки - тут и впишу???)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \text{(Hopf eq.)}$$

(? пара строчек обоснований, откуда?) Введем характеризующую акустическое поле величину u, в линейном приближении в выбранной системе отсчета мы имеем тривиальное уравнение $\partial_t u = 0$. Учтем теперь нелинейность. В главном порядке это квадратичная нелинейность. Однако мы не можем ввести в уравнение член, пропорциональный u^2 (??? додумаю??). Дело в том, что однородное в пространстве поле u соответствует однородному же изменению давления среды, что не может вызвать эволюцию u. Поэтому мы должны ввести в уравнение член, содержащий пространственные производные. В главном порядке он пропорционален $\partial_x u$.

Можно сказать, что нелинейный член в уравнении Хопфа отражает зависимость скорости звука от плотности (или давления). Действительно, в лабораторной системе отсчета уравнение (7.1) имеет вид $\partial_t u+(c_0+u)\,\partial_x u=0$, где c_0- скорость Звука в линейном уравнении. Отсюда видно, что u - поправка к этой скорости.

Уравнение Хопфа (7.1) содерж ит только первые производные от u и линейно по этим производным. Такое уравнение может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. А именно, можно найти уравнения для изменения поля u вдоль специальнхх траекторий (характеристик), которые определяются уравнениями:

$$\frac{du}{dt}=0, \quad \frac{dx}{dt}=u.$$

Таким образом, начальные значения поля u, не меняясь, переносятся со скоростью u. Поле u вследствие уравнений (7.2) неявно определяется из соотношений

$$x=y+ut, \quad u=u(0,y),$$

где, как и выше, $u(0,x)$ - начальное значение поля. Если $u(0,x)$ является монотонно растущей функцией x, то эволюция, которая описывается (7.3), заключается в нерграниченном 'растягивании' поля u вдоль оси X, без изменения значений этого поля. Таким образом, локально поле u становится все более похожим на линейный профиль, а наклон этого профиля уменьшается со временем. Легко установить закон этого убывания. Для этого найдем уравнение на производную $s = \partial u/\partial x$, которое получается из уравнения Хопфа (7.1) после дифференцирования:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} = -s^2$$

Таким образом, мы должны решать вдоль характеристики уравнение $ds/dt = -s^2$, решение которого имеет вид $s = (1/s_0 + t)^{-1}$, где s_0– значение производной s при $t = 0$. Если $s_0 > 0$ (что соответствует монотонно растущей функции u), то на больших временах $s \approx t^{-1}$, то есть наклон на всех характеристиках становится одинаковым. Это и означает формирование линейного профиля.

Отметим, что методом характеристик можно решить и более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

которое отличается от уравнения Хопфа (7.1) дополнительным членом в правой части, "накачкой"f, которая может быть произвольной функцией времени t и пространственной координаты x. Тогда вместо системы (7.2) надо решать уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t,x), \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Однако динамика, которая описывается уравнением Хопфа, обычно приводит к возникновению особенностей в поле u. Они связаны с теми участками в начальном профиле, где наклон $u(0,x)$ отрицателен. Эволюцию этого наклона можно найти при помощи того же уравнения (7.4), которое приводит к $s = (1/s_0 + t)^{-1}$. Если $s_0 < 0$, то значение s обращается в бесконечность при $t = -1/s_0$. Таким образом, если в начальном профиле $s(0,x)$ имеются участки с отрицательными значениями s, то за конечное время производная $s = \partial_x u$ обращается в бесконечность. Быстрее всего это происходит для наибольшего по абсолютной величине значения s, которое определяется условием $\partial s/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2 = 0$. Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим y_0, впервые обращается в бесконечность s.

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки y_0. Раскладывая функцию $u(0,y)$ в ряд Тейлора вблизи точки y_0, мы находим

$$u(0,y) \approx u_0 - c_1\,(y - y_0) + c_2\,(y - y_0)^3\,,$$

где c_1 и c_2 - положительные константы. Положительность c_1 означает отрицательность s вблизи точки y_0, а положительность c_2 означает, что значение s максимально по абсолютной величине в точке y_0. Далее, решая уравнения (7.3), мы находим

$$u = u_0 - c_1\,(x - ut - x_0 + u_0/c_1) + c_2\,(x - ut - x_0 + u_0/c_1)^3\,,$$

где мы ввели обозначение $x_0 = y_0 + u_0/c_1$. В этом слу- чае в момент времени $t = 1/c_1$, который и является моментом, когда s обращается в бесконечность в точке x_0, приведенное соотношение сводится к

$$c_2\,(u - u_0)^3 = -c_1^4\,(x - x_0)$$

где мы опустили линейное по $x - x_0$ слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при мальгх $x - x_0$. Таким образом, мы приходим к профилю $u - u_0$, который пропорционален $(x - x_0)^{1/3}$, то есть является сингулярным в точке $x = x_0$. Эта сингулярность и является формальной причиной, по которой s обращается в бесконечность.

Таким образом, даже если нелинейность слаба, она за конечное время приводит к образованию особенности в поле u. При приближении к особенности уравнение Хопфа становится неприменимым, так как растет вторая произ водная от u, и потому для анализа дальнейшей эволюции уравнение Хопфа следует модифицировать, например, рассмотрев уравнение Бюргерса.

О приложениях

17.1.2 Об уравнении Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(Bugers eq., dim-less)}$$

Уравнение Бюргерса - это уравнение Хопфа с диссипацией, связанной с вязкостью, и потому пропорциональной 2 производной.

На самыгх больших временах любое решение уравнения (7.7), стремящееся к нулю на $\pm\infty$ по x, стремится к нулю, $u \to 0$. Действительно, в силу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dx \frac{u^2}{2} = -\int dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

Таким образом, положительно определенная величина $\int dxu^2$ убывает со временем и, при достаточно большом t, становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргерса u, которое стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Тогда при больших t значение u становится малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (7.7). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению. Локализованные решения этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} u &\propto \tfrac{1}{t^{1/2}} \exp\left[-\tfrac{(x-x_0)^2}{4t}\right] \\ u &\propto \tfrac{x-x_0}{t^{3/2}} \exp\left[-\tfrac{(x-x_0)^2}{4t}\right] \end{aligned}$$

вторая асимптотика реализуется при условии $\int dxu = 0$.

В случае сильной нелинейности, который реализуется, если для начальных условий $UL \gg 1$, где $L-$ характерный масштаб (корреляционная длина) начального состояния $u(0,x)$, а U - характерное значение поля $u(0,x)$. В этом случае начальная эволюция поля u может быть описана в пренебрежение второй производной в уравнении (7.7), когда оно сводится к уравнению Хопфа (7.1), которое, однако, ведет к сингулярности.

Уравнение Бюргерса позволяет проанализировать структуру, которая возникает после возникновения сингулярности в уравнении Хопфа. После некоторого переходного процесса формируется специальное решение, которое двигается со скоростью u_0, то есть $\partial u/\partial t = -u_0 \partial u/\partial x$. Подставляя это соотношение в уравнение Бюргерса (7.7), мы находим затем его первый интеграл $(u-u_0)^2 - 2\partial u/\partial x = \text{const}$. Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_0 - 2a\tanh\left[a\left(x - x_0\right)\right]$$

которое называют шоком. Это решение соответствует тому, что в области ширины a^{-1} поле u испытывает скачок $4a$. Решение (7.9) дает универсальную форму шоков, которые формируются при условии $UL \gg 1$, тогда $a \sim U$. Заметим, что стационарность этого решения не противоречит сделанному выше утверждению о стремлении u к нулю на больших временах, поскольку последнее справедливо только для решений, стремящихся к нулю при $x \to \pm\infty$, в то время как выражение (7.9) этому условию не удовлетворяет.

Поясним общую структуру поля u, которая возникает при эволюции некоторого характеризующегося сильной нелинейностью начального условия. За конечное время из участков u с отрицательным наклоном формируются шоки, а из участков с положительным наклоном формируются промежутки между шоками. В дальнейшем поле в этих промежутках стремится к линейному профилю, поскольку его эволюция управляется уравнением Хопфа. Как следует из выражения (7.9), шок двигается со скоростью u_0, которую можно определить, как полусумму значений поля u на краях шока. Это означает, что время от времени происходят события, когда большой шок (со значительной амплитудой a) догоняет меньший шок. Это кончается поглощением малого шока большим. Поэтому количество шоков в системе постепенно убывает.

Детали этих процессов можно проследить с помощью преобразования Коула-Хопфа (Cole-Hopf)

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h/\partial x.$$

Оно приводит уравнение Бюргерса (7.7) к чисто диффузионному уравнению

$$\partial\Psi/\partial t = \partial^2\Psi/\partial x^2,$$

которое изучалось в разделе (4.2.1). Решение уравнения (7.11) может быть выражено в виде интеграла от начального значения

$$\Psi(t,x) = \int \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] \Psi(0,y),$$

в соответствии с (4.36).

Выражение (7.12) может быть использовано для получения ряда точньг решений уравнения Бюргерса. Рассмотрим в качестве примера начальное условие $\Psi(0,x) = \cosh(ax)$, которое соответствует шоку (7.9)с $u_0 = x_0 = 0$. В этом можно убедиться, производя обратное по отношению к (7.10) преобразование

$$u = -2\partial(\ln\Psi)/\partial x$$

Подставляя выражение $\Psi(0,x) = \cosh(ax)$ в уравнение (7.12) и вычисляя интеграл по y, мы находим $\Psi(t,x) = \cosh(ax)\exp(a^2t)$. Подставляя это выражение в соотношение (7.13), мы находим то же выражение $u = -2a\tanh(ax)$, поскольку дополнительный временной множитель выпадает из ответа. Таким образом, мы другим способом убедились в том, что выражение (7.9) дает стационарное решение уравнения Бюргерса. Обратим внимание на то, что мы получили растущее со временем решение уравнения диффузии. Это связано с тем, - ноле Ψ неограниченно растет при $x \to \pm\infty$.

О приложениях

17.1.3 О нелинейном уравнении Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию огибающих электромагнитньгх волн, плазменньг колебаний, и так далее. Другими словами, НУШ относится к универсальным волновым уравнениям, которые применимы в самых разньг физических случаях.

Как мы уже установили в разделе (4.1.3), в линейном прибл ижении уравнение на огибающую ψ можно свести к свободному уравнению Шрёдингера (4.60) (мы не рассматриваем возникающий иногда гиперболический случай). Теперь мы учтем нелинейность в уравнении для амплитуды ψ. Для ряда случаев эта нелинейность по физическим соображения м может быть только третьего порядка. Например, при распространении электромагнитных волн в материальных средах основным источником нелинейности является эффект Керра, то есть зависимость диэлектрической проницаемости среды от напряженности электрического поля. Диэлектрическая проницаемость раскладывается по четным степеням напряженности поля. Главным членом разложения является квадратичный, отсюда и кубическая нелинейность в уравнении на огибающую.

Нелинейность должна быть добавлена в уравнение Шрёдингера (4.60), она пропорциональна третьей степени ψ. Если система однородна по времени, то имеется дополнительное правило отбора нелинейного члена. Как следует из (4.20), сдвиг по времени эквивалентен добавлению фазы к ψ. Поэтому уравнение на ψ должно быть инвариантно относительно сдвига фазы ψ, что однозначно определяет вид нелинейного члена, который должен быть пропорционален $|\psi|^2\psi$. Еще одним дополнительным правилом отбора является отсутствие диссипации, что фиксирует действительный коэффициент при $|\psi|^2\psi$ в уравнении.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно менять соотношения между коэффициентами при нелинейном и дисперсионном слагаемьх НУШ, но не их относительный знак. Поэтому НУШ может быть приведено к двум каноническим типам:

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi + 2|\psi|^2\psi = 0,$$

и

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi - 2|\psi|^2\psi = 0.$$

Мы видим, что оба этих уравнения имеют вид квантовомеханического уравнения Шрёдингера (4.54) с потенциалом U, равным $-2|\psi|^2$ в случае (7.14) и $+2|\psi|^2$ для (7.15). Поскольку уравнение (7.14) соответствует притягивающему потенциалу, то этот случай называется 'НУШ с притяжением', и, соответственно, уравнение (7.15) - 'НУШ с отталкиванием'. Как мы знаем из квантовой механики, волновые функции в притягивающих

и отталкивающих потенциалах имеют качественно разные свойства. Поэтому и решения уравнений (7.14) и (7.15) отличаются радикальным образом. Самые интересные эффекты возникают в притягивающем случае (7.14), который, к тому же, часто реализуется в оптических приложениях. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся именно на нем.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (7.14) является следствием вариационного принципа. А именно, оно получается, как экстремум 'действия'

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \textstyle\int dt d\boldsymbol{r} L \\ L &= i\psi^*\partial_t\psi - \nabla\psi^*\nabla\psi + |\psi|^4\end{aligned}$$

При вариации S удобно рассматривать поля ψ и ψ^*, как независимые динамические переменные, что возможно в силу того, что ψ имеет две степени свободы.

У равнение (7.14) ведет к законам сохранения ряда величин, которые связаны с общими симметриями этого уравнения: инвариантностью по отношению к сдвигу фазы ψ, а также по отношению к сдвигу начала отсчета времени и начала координат, смотри раздел 7.5.1. Соответствующими интегралами движения при произвольном числе измерений для локализованньхх в пространстве решений являются 'число частиц' N, 'энергия' E и 'импульс' $\boldsymbol{P}$, то есть $dN/dt = 0, dE/dt = 0, d\boldsymbol{P}/dt = 0$.

Выражения для этих (Нётеровских) интегралов движения

$$\begin{aligned}N &= \textstyle\int d\boldsymbol{r}|\psi|^2 \\ E &= \textstyle\int d\boldsymbol{r}\left(|\nabla\psi|^2 - |\psi|^4\right) \\ \boldsymbol{P} &= -i\textstyle\int d\boldsymbol{r}\psi^*\nabla\psi\end{aligned}$$

могут быть получены в рамках общей процедуры из Лагранж иана (7.16), смотри выражения (7.82, 7.84, 7.87). Для нелинейного уравнения Шрёдингера имеется замечательное соотношение - теорема Таланова, позволя ющее сделать качественные выводы о поведении решений НУШ для широкого класса начальньх условий. Для вывода теоремы Таланова рассмотрим функционал

$$I = \int d\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^2|\psi|^2$$

Для волнового пакета, центрированного вокруг начала координат, этот функционал можно оценить, как $I \sim NR^2$, где R - размер пакета. Для интеграла (7.20) справедл иво соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2}I = 8\int d\boldsymbol{r}\left(|\nabla\psi|^2 - \frac{\mathrm{d}}{2}|\psi|^4\right)$$

которое является следствием уравнения (7.14). Здесь d - размерность пространства.

В двумерном случае в правой части (7.21) возникает выражение:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8E, \quad \mathrm{d} = 2.$$

Поскольку E не зависит от времени, то общее решение уравнения (7.22) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct + 4Et^2, \quad \mathrm{d} = 2,$$

где константы C и E определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что $E < 0$. Тогда при любьх конечньг $I(0)$ и C наступит такой момент времени t_*, что $I(t_*) = 0$. Из оценки $I \sim NR^2$ следует, что R в момент $t = t_*$ обратится в ноль. Сохранение же числа частиц N влечет за собой сингулярность ψ в этот момент.

Таким образом, в двух измерениях при $E < 0$ происходит коллапс - явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при $E > 0$, однако при $E < 0$ он неизбежен. Коллапс означает, что в функции ψ за конечное время возникает сингулярность в некоторой точке. Это может произойти в точке, отличной от $\boldsymbol{r} = 0$, в момент времени более ранний, чем $t = t_*$. То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале $t \leq t_*$ коллапс при $E < 0$ в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве уравнение (7.21) для $I(t)$ приводит к неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8E - 4\int d\boldsymbol{r} |\psi|^4 < 8E.$$

Поэтому вместо равенства (7.23) мы приходим к неравенству

$$I(t) < I(0) + Ct + 4Et^2, \quad \mathrm{d} = 3.$$

Это неравенство по-прежнему означает неизбежность коллапса при $E < 0$.

О приложениях

17.1.4 Об уравнении Гросса-Питаевского

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi - 2|\psi|^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0, \qquad \text{(Gross-Pitaevski eq.)}$$

Мы рассматриваем простейший однородный случай. Обычно же холодные атомы находятся в оптических ловушках. Для описания этого случая в уравнение (7.26) следует ввести внешний потенциал, который создается оптической ловушкой . уравнения Шрёдингера (7.15) сдвигом фазы ψ на $\kappa^2 t$. Несмотря на это, решения уравнений (7.15) и (7.26) существенно отличаются. Это связано с тем, что при решении нелинейного уравнения Шрёдингера (7.15) обычно считается, что функция ψ стремится к нулю на бесконечности, в то время как при решении уравнения Гросса-Питаевского (7.26) обычно считается, что на уравнения Гросса-Питаевского (7.26), которое записывается в виде $\psi = \psi_0 e^{i\varphi_0}$, где $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$ и фаза φ_0 произвольна.

Как и нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Гросса-Питаевского (7.26) может быть получено, как условие экстрему ма дей ствия

$$\mathcal{S} = \int dt d\boldsymbol{r} L$$
$$L = i\psi^* \partial_t \psi - \nabla\psi^* \nabla\psi - |\psi|^4 + \kappa^2 |\psi|^2$$

По сравнению с выражением (7.16) в 'дей ствии' (7.27) противоположен знак перед $|\psi|^4$ и имеется дополнительный член с κ. Таким образом, мы приходим к законам сохранения волнового действия, энергии и импульса

$$N = \int dV |\psi|^2$$

(дальше еще много теории, но пока не так занимался ей, когда-то продолжу, доделать - дело 3 дней.)

О приложениях

Уравнение ГП которое описывает, например, динамику сверхтекучей системы холодных атомов.

17.1.5 Об уравнениях Эйлера и Навье-Стокса

(пока не актуально)

17.1.6 Об уравнении Кортевега-де-Фриза

(пока не актуально)

17.1.7 Об уравнении синус-Гордон

(пока не актуально)

17.1.8 Об одномерном нелинейном уравнении

(пока не актуально)

17.1.9 О нётеровских интегралах движения

(уже в теорполе мб и написал это? скоррелирую!!!)

Часть VI
Другие темы уравнений математической физики

17.2 Другие методы решения уравнений математической физики (???)

(пока тут, потом мб поменяю структуру)

17.2.1 Метод Гамильтона-Якоби (??)

Обсудим подробно метод Гамильтона-Якоби.
(скоро напишу, пока основы доучивать нужно!)

17.3 О специальных решениях по ПТФ

Здесь мы будем рассматривать специ альные решения ди фференциальных уравнени й в частных производных , которые сводят ся к функции одной переменной. Существование такого сорта решений обязано симметрии уравнения (однородность, изотропия, инвариантность относительно перемасштабировония времени, координат и искомого поля). Отдельный вопрос связан со статусом подобных решений: они могут представлять универсальную асимптотику на больших вре менах или, наоборот, являться сепаратрисой (абсолютно неустойчивым решением). Выяснение этого вопроса должно проводиться для каждого конкретного уравнения. Мы сосредоточимся здесь на нахождении собственно автомодельных решений.

17.3.1 Автомодельные решения

Мы будем считать, что поле $u(t, \boldsymbol{r})$ подчиняется некоторому ди ференциальному уравнению в частных производных, которое однородно (по времени и пространству)

и изотропно. В этом случае возможно существование автомодельных решений, которые имеют вид

$$u = \frac{1}{t^a} f\left(r/t^b\right),$$

где a и b-некоторые числа. Аргумент функции f, то есть r/t^b, называется автомодельной переменной. Чтобы уравнение имело автомодельное решение (6.37), оно должно быть инвари антно относительно перемасштабировки

$$t \to \mathcal{Z}t, \quad r \to \mathcal{Z}^b r, \quad u \to \mathcal{Z}^{-a} u$$

где $\mathcal{Z}$-произвольный фактор. Очеви дно, решение (6.37) инвариант но относительно преобразов ания (6.38).

Мы уже сталкивались с автомодельным поведением. Например, функция Грина уравнения диффузии $\partial_t u = \nabla^2 u$, которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right) G = \delta(t)\delta(\boldsymbol{r})$$

имеет автомодельный вид (6.37)

$$G(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

где $d-$ размерность простран ства. В данном случае автомодельной переменной является $r/\sqrt{t}$. Действительно, уравнение диффузии $\partial_t u = \nabla^2 u$ инвариантно относительно $t \to \mathcal{Z}t, r \to \mathcal{Z}^{1/2}r$. Что же касается показателя a в выражении (6.40), то он связан с правой частью уравнения $(6,39)$; обе части этого уравнения должны одинаково вести себя при преобразовании $t \to \mathcal{Z}t$, $r \to \mathcal{Z}^{1/2}r$

При $t > 0$ функция Грина (6.40) является решением уравнения диффузии с нулевой правой частью и может рассматриваться, как его автомодельное решение. Отметим, что в силу линейности уравнение диффузии само по себе не фиксирует показатель a в (6.37). Однако этот показатель фиксируется законом сохранения $\int dVu = \text{const}$, который следует из уравнения диффузии $\partial_t u - \nabla^2 u = 0$ для локализованного в пространстве поля. Из закона сохранения следует соотношение $db - a = 0$, которое в совокупности с $b = 1/2$ дает $a = d/2$, что и соответствует автомодельности решения (6.40). Разумеется, не всякое решение уравнения ди ффузии $\partial_t u - \nabla^2 u = 0$ имеет автомодельный характер. Однако на больших временах решение уравнения диффузии с локализованным начальным условием становится близким к поведению функции Грина, то есть автомодельность решения возникает аси мптотически.

Задача

6.3.1. Найти автомоделвное локализованное решение уравнения

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0.$$

Р ассмотрим одномерное нелинейное уравнение диффузии

$$\partial_t u = \partial_x \left(u \partial_x u \right).$$

Будем искать автомодельное решение этого уравнения вида (6.37). У равнение (6.41) инвариантно относительно преобразов ания (6.38) при условии $a + 2b = 1$. Дополнительное условие на показатели a, b получается, если мы рассматриваем поле u, достаточно быстро стремящееся к нулю на бесконечности. В этом случае получаем из уравнения (6.41)

$$\partial_t \int dxu = 0 \to \int dxu = \text{ const}.$$

Отсюда находим $a = b$. Таким образом, $a = b = 1/3$, и автомодельное решение (6.37) имеет вид

$$u = t^{-1/3} f \left(x t^{-1/3} \right).$$

Подст авляя выражение (6.42) в уравнение (6.41), находи м

$$\partial_\xi \left(f \partial_\xi f \right) + \frac{1}{3} \partial_\xi (\xi f) = 0,$$

где $\xi = xt^{-1/3}-$ автомодельная переменная. Интегрируя это уравнение, находим

$$f \partial_\xi f + \frac{1}{3} \xi f = 0,$$

поскольку константа интегрирования равна нулю в силу предполагаемого быстрого стремления f к нулю при стремлении ξ к бесконечности. Находим два решения: $f = 0$ и $f = C - \xi^2/6$, где $C-$ произвольная константа. Решение, стремящееся к нулю на бесконечности, склеивается из этих двух решений:

$$f(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} f = C - \xi^2/6, \quad \xi^2 < 6C \\ f = 0, \quad \xi^2 > 6C \end{array} \right.$$

Возможность склейки связана с первым порядком дифференци ального уравнения (6.43), которое требует непрерывности функции f, но допускает скачок в ее производной .

Задача

6.3.2. Найти локализованное автомоделвное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x \left(u^2 \partial_x u\right)$$

Р ассмотрим уравнение

$$\partial_t u = -\partial_x \left[(\partial_x u)^2\right]$$

Будем искать его локализованное автомодельное решение вида (6.37). Инвариантность относительно преобразования (6.38) в совокупности с законом сохранения $\int dxu = \text{const}$ дает $a = b = 1/4$. Подставляя выражение (6.37) с этими показателя ми в уравнение (6.45), находим

$$\partial_\xi(\xi f) = 4\partial_\xi \left[(\partial_\xi f)^2\right].$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\xi f = 4 \left(\partial_\xi f\right)^2,$$

поскольку константа интегрирования равна нулю в силу предполагаемого быстрого стремления f к нулю при стремлении ξ к бесконечности. Помимо тривиального решения $f = 0$ найденное уравнение и меет решение, которое можно найти после разделения переменных $f = (1/36)\left(\xi^{3/2} - C\right)^2$, где $C-$ произвольная постоян ная. Учитывая, что f локализовано, находим

$$f(\xi) = \begin{cases} f = (1/36)\left(\xi^{3/2} - C\right)^2, & \xi < C^{2/3}, \\ f = 0, & \xi > C^{2/3}. \end{cases}$$

Задача

6.3.3. Найти локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = -\partial_x \left[(\partial_x u)^4\right].$$

Выше мы рассматривали двучленные уравнения, инвариантность которых относительно преобразования (6.38) давала одно соотношение между показателями a и b. Дополнительную связь между показателями a и b удав алось найти за счет закона сохранения. Это и фиксировало величины a и b. Встречаются и трехчленные уравнения, инвариантность которых относительно преобразов ания (6.38) дает сразу два условия, которые фиксируют a и b. Рассмотрим в качестве пример а нелинейное уравнение диффузии с источни ком

$$\partial_t u = \partial_x \left(u^n \partial_x u\right) + u^k$$

Инвариантность ур авнения (6.47) относительно преобразования (6.38) дает два условия, которые приводят к

$$a = \frac{1}{k-1}, \quad b = \frac{k-n-1}{2(k-1)}.$$

ременной $\xi = x/t^b$ в данном случае может быть решено только численно.

Задача

6.3.4. Выписать уравнение на функиию f терминах автомоделвной переменной $\xi = x/t^b$ для уравнения (6.47).

Задача

6.3.5. Найти локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x \left(u^{-1} \partial_x u\right) + \partial_x u.$$

17.3.2 Движение фронта

Однородные по времени и пространству дифференциальные уравнения допускают решения вида $u(t, \boldsymbol{r}) = w(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t)$, которые описывают эволюцию поля u, которая сводится к движению некоторого профиля со скоростью $\boldsymbol{V}$. Мы будем говорить о такой эволюции, как о движении фронта, который определяется условием $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{V}t$, если далеко впереди (перед фронтом) и далеко позади (з а фронтом) поле u стремит ся к некоторым константам. Разумеется, эт и константы сами по себе должны быть решениями исходного ур авнения. Проанализируем ур авнение Фишера

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + u(1-u),$$

которое встречается в различных контекстах. Например, оно моделирует процесс горения, тогда $u = 0$ соответствует исходной смеси горючего и окислителя, а $u = 1$ - полностью сгоревшей смеси. Уравнение (6.49) имеет два стационарных однородных решения, $u = 0$ и $u = 1$, первое из которых неустойчиво, а второе устойчиво. Предполаг ается, что во в сем п ространстве $0 < u < 1$. Это свойство поддерживается уравнением. Напри мер, полагая

$$u = \frac{\exp(\eta)}{1+\exp(\eta)},$$

находим уравнение

$$\partial_t \eta = \partial_x^2 \eta - \tanh(\eta/2) \left(\partial_x \eta\right)^2 + 1,$$

которое не имеет особенностей по η на всей действительной оси. Таким образом, эволюция η не приводит к выходу u за пределы интервала $(0, 1)$.

Уравнение (6.49) относится к типу релаксационных уравнений (5.41), оно может быть записано в виде $\partial_t u = -\delta\mathcal{F}/\delta u$, где

$$\mathcal{F} = \int dx \left[\frac{1}{2}\left(\partial_x u\right)^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3\right].$$

Вследствие уравнения (6.49) функционал (6.50) монотонно убывает со временем, поскольку его производная по времени

$$\partial_t \mathcal{F} = -\int dx (\delta\mathcal{F}/\delta u)^2 = -\int dx \left(\partial_t u\right)^2$$

отрицательна. Это свойство соответствует необратимости процесса горения.

Уравнение (6.49) допускает решение в виде распространяющегося фронта $u(t, x) = w(x - Vt)$, когда происходит переход от неустойчивого состояния $u = 0$, которое реализуется перед фронтом, к у стойчивому состоянию $u = 1$, которое реализуется за фронтом. Как следует из уравнения (6.49), уравнение на функцию w имеет вид

$$V\partial_x w + \partial_x^2 w + (1-w)w = 0.$$

Имеется ограничение снизу на скорость движения фронта $V > 2$, которое можно получить из ан ализа приближения уравнения (6.51) к нулевому значению при $x \to \infty$, когда w мало. В случае $V < 2$ уравнение (6.51)

приводит к осцилляторному характеру приближения w к нулю при $x \to \infty$, что противоречит условию $w > 0$. При $V > 2$ уравнение (6.51) имеет решение, удовлетворяющее условию $0 < w < 1$, которое описывает распространяющийся фронт. В общем случае это решение можно найти только численно.

Задача

6.3.6. Найти решение уравнения (6.51), которое имеет вид $w = [1 + \exp(cx)]^{-2}$. Какому значению скорости V оно соответствует?

Задача

6.3.7. Найти производную $\partial_t \mathcal{F}$ при движении Фронта, которое описывается уравнением $u(t,x) = w(x - Vt)$

Спрашивается, какому значению скорости V соответствует решение реальной задачи Коши? Ответ зависит от начальных условий. Как показали Колмогоров, Петровский и Пискунов, нач альные условия $u = 0$ при $x > 0$ и $u = 1$ при $x < 0$ приводят к возникновению фронта, который движется с минимально возможной скоростью $V = 2$. Это связано с нулевым значением u в той области, куда распрост раняет ся фронт. Можно обеспечить и бОльшую скорость распространения фронта. Но для этого в области, куда р аспространяется фронт, необходимо обеспечить ненулевое значение u, которое будет поддерживать распространение фронта со скоростью $V > 2$. Например, в этой области можно создать $u(x)$, которое определяется решением уравнения (6.51). стационарных однородных решения, 0 и 1 . Соответственно, распространение фронта заключается в переходе от неустойчивого решения 0 к устойчивому 1 . В то же время имеется класс уравнений, которые допускают в качестве стационарного решения произвольную константу. В качестве иллюстрации приведем хорошо известное уравнение Бюргерса

$$\partial_t u + u\partial_x u = \partial_x^2 u$$

которое, очевидно, имеет своим решением произвольную константу $u = \text{const}$. В подобном случае распространение фронта может заключаться в переходе од одной константы к другой.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения Бюргерса (6.52). Будем искать его решение, которое заключается в распространении фронта, перед которым значение u равно нулю, а за фронтом - некоторой константе. Подстановка $u(t,x) = w(x - Vt)$ в уравнение Бюргерса (6.52) дает соотношение $-V\partial_x w +\ w\partial_x w - \partial_x^2 w = 0$, которое приводит к первому интегралу $-Vw + w^2/2 - \partial_x w = C$. Мы рассматриваем решение, которое стремится к нулю при $x \to \infty$, в этом случае $C = 0$. Разделяя переменные в оставшемся уравнении первого порядка, находим $V(x - x_0) = \ln[(2V - w)/w]$, где x_0- произвольная константа. Отсюда находим

$$w(x) = \frac{2V}{1 + \exp\left[V(x - x_0)\right]}.$$

Обратим внимание на то, что при $x \to -\infty w \to 2V$. Таким образом, найденное решение описывает движение фронта, перед которым u равно нулю, а за которым u равно $2V$.

Задача

6.3.8. Найти форму Фронта, перед которым $u = 0$, для уравнения $\partial_t u + 3u^2\partial_x u = \partial_x^2 u$.

Задача

6.3.9. Найти форму антисимметричного Фронта для уравнения $\partial_t u + 3u^2\partial_x u + \partial_x^3 u = 0$ Приведем пример, когда разность значений поля u перед фронтом и за ним не связан а со скоростью его движения. Рассмотрим ур авнение

$$2u\partial_t u = \partial_x \left[(\partial_x u)^2\right],$$

которое также допускает в качестве стационарного решения произвольную кон станту. Подстановка $u = w(x- Vt)$ в уравнение (6.54) дает

$$2Vw\partial_x w + \partial_x\left[(\partial_x w)^2\right] = 0.$$

Это уравнение имеет, очевидно, первый интеграл

$$Vw^2 + (\partial_x w)^2 = C,$$

который должен быть положительным при $V > 0$. Найденный первый интеграл (6.56) имеет смысл закона сохранения для осциллятора, который приводит к решениям в виде гармонических функций. Если мы хотим получить решение в виде фронта, то мы должны склеить его с константами, которые являются решениями уравнения (6.55). Поскольку (6.55) является уравнением второго порядка по производной, то в месте склейки должны быть непрерывны как сама функция, так и ее производная. Отсюда получаем решение

$$\begin{aligned} w(x) &= -\sqrt{C/V}, \quad x < -\tfrac{\pi}{2\sqrt{V}} \\ w(x) &= \sqrt{C/V}\sin\left(\sqrt{V}x\right), \quad -\tfrac{\pi}{2\sqrt{V}} < x < \tfrac{\pi}{2\sqrt{V}} \\ w(x) &= \sqrt{C/V}, \quad x > \tfrac{\pi}{2\sqrt{V}} \end{aligned}$$

Очевидно, что аргумент x в этих выражениях может быть сдвинут на произвольную константу. Более того, можно построить и более сложные решения, когда между асимптотическими константами происходит произвольное число полупериодов, а не один, как приведено выше. Отметим, что при $V < 0$ решений уравнения (6.55), которые давали бы фронты, нет. Это связано с тем, что при $V < 0$ решения уравнения (6.56) выражаются через гиперболические косинус и синус, которые не могут быть подклеены к асимптотическим константам.

Задача

6.3.10. Как связань между собой асимптотические значения w для Фронта, который описывается уравнением (6.55), если между ними вставлен один период?

17.4 Об автономных системах

(мб это тут, мб в диффурах напишу, пока не уверен. скорее всего, тут.)

17.4.1 Фиксированные точки и предельные циклы

17.4.2 Уравнение Ван дер Поля

17.4.3 Бифуркации

17.4.4 Модель Лоренца

17.4.5 Лагранжевы уравнения

17.4.6 Релаксационные уравнения

17.4.7 Полевые релаксационные уравнения

17.4.8 Теория возмущений

17.4.9 Решение вблизи особой точки основного уравнения

17.4.10 Пограничный слой

17.5 О нелинейных уравнениях

(тоже важно обсудить, все-таки интересные методы. мб подниму в раздел выше потом.)
(структруа умф птф)
(прослежу, чтобы тут было некторое важное из интегрируемых систем, но вообще эта теория там.)

17.5.1 Об уравнении Хопфа

Мы н ачин аем изучение нелинейных явлений с акустики. Сначал а мы рассмотри м одномерный случай, когда все хар актеризующие акустическое поле величины зави сят только от одной координаты x. Нас будут интересов ать явления, связанные с волнами, распространяющими ся в одномнапр авлении. Как известно,в линейном приближении решение одномерного волнового акустического уравнения говорит, что в системе отсчета, движущейся с (линейной) скоростью звука, хар актеристики акустического поля не меняются. Учтем теперь нелинейные эффекты, которые мы будем анализировать в той же системе отсчета. Нелинейные эффекты будут счит аться слабыми, то есть мы будем прини мать во вни мание только главные нелинейные члены в уравнениях. 7.1.1 Уравнение Хопфа Введем характеризующую акустическое поле величину u, которая, напри мер, может описывать отклонение плотности вещества от его равновесного значения. В линейном приближении в выбранной системе отсчета мы имеем тривиальное уравнение $\partial_t u = 0$. Учтем теперь нелинейность. В главном порядке это квадратичная нелинейность. Одн ако мы не можем ввести в уравнение член, пропорциональный u^2. Дело в том, что однородное в простр анстве поле u соответ ствует однородному же изменению давления среды, что не может вызв ать эволюцию . Поэтому мы должны ввести в уравнение член, содержащий пространственные производные. В главном порядке он пропорционален $\partial_x u$.

Таким образом, после соответствующего перемасштабиров ания мы приходи м к ур авнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

которое называется уравнение Хопфа (Hopf). Можно сказать, что нелинейный член в уравнении Хопфа отражает зависимость скорости звука от плотности (или давления). Действительно, в лабораторной системе отсчета уравнение (7.1) имеет вид $\partial_t u + (c_0 + u)\,\partial_x u = 0$, где c_0- скорость Звука в линейном уравнении. О тсюда видно, что $u-$ поправка к этой скорости.

Уравнение Хопфа (7.1) содерж ит только первые производные от u и линейно по этим производным. Такое уравнение может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. А именно, можно найти уравнения для изменения поля u вдоль специальньх траекторий (характеристик), которые определяются уравнениями:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Таким образом, начальные значения поля u, не меняясь, переносятся со скоростью u. Поле u вследствие уравнений (7.2) нея вно определяется из соотношений

$$x = y + ut, \quad u = u(0, y),$$

где, как и выше, $u(0,x)$ - начальное значение поля. Если $u(0,x)$ является монотонно растущей функцией x, то эволюция, которая описывается (7.3), заключается в нерграниченном 'растягивании' поля u вдоль оси X, без изменения значений этого поля. Таким образом, локально поле u становится все более похожим на линейный профиль, а наклон этого профиля уменьшается со временем. Легко установить закон этого убывания. Для этого найдем уравнение на производную $s = \partial u/\partial x$, которое получается из уравнения Хопфа (7.1) после дифференцирования:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} = -s^2$$

Таким образом, мы должны решать вдоль характеристики уравнение $ds/dt = -s^2$, решение которого имеет вид $s = (1/s_0 + t)^{-1}$, где s_0- значение производной s при $t = 0$. Если $s_0 > 0$ (что соответствует монотонно растущей функции u), то на больших временах $s \approx t^{-1}$, то есть наклон на всех характеристиках становится одинаковым. Это и означает формирование линейного профиля.

Отметим, что методом характеристик можно решить и более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

которое отличается от уравнения Хопфа (7.1) дополнительным членом в правой части, "накачкой"f, которая может быть произвольной функцией времени t и пространственной координаты x. Тогда вместо системы (7.2) надо решать уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t,x), \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Однако динамика, которая описывается уравнением Хопфа, обычно приводит к возникновению особенностей в поле u. Они связаны с теми участками в начальном профиле, где наклон $u(0,x)$ отрицателен. Эволюцию этого наклона можно найти при помощи того же уравнения (7.4), которое приводит к $s = (1/s_0 + t)^{-1}$. Если $s_0 < 0$, то значение s обращается в бесконечность при $t = -1/s_0$. Таким образом, если в начальном профиле $s(0,x)$ имеются участки с отрицательными значениями s, то за конечное время производная $s = \partial_x u$ обращается в бесконечность. Быстрее всего это происходит для наибольшего по абсолютной величине значения s, которое определяется условием $\partial s/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2 = 0$. Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим y_0, впервые обращается в бесконечность s.

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки y_0. Раскладывая функцию $u(0,y)$ в ряд Тейлора вблизи точки y_0, мы находим

$$u(0,y) \approx u_0 - c_1\left(y - y_0\right) + c_2\left(y - y_0\right)^3,$$

где c_1 и c_2 - полож ительные константы. Полож ительность c_1 означает отрицательность s вблизи точки y_0, а положительность c_2 означает, что значение s максимально по абсолютной величине в точке y_0. Далее, решая уравнения (7.3), мы находим

$$u = u_0 - c_1 \left(x - ut - x_0 + u_0/c_1\right) + c_2 \left(x - ut - x_0 + u_0/c_1\right)^3,$$

где мы ввели обозначение $x_0 = y_0 + u_0/c_1$. В этом слу- чае в момент времени $t = 1/c_1$, который и является моментом, когда s обращается в бесконечность в точке x_0, приведенное соотношение сводится к

$$c_2 \left(u - u_0\right)^3 = -c_1^4 \left(x - x_0\right)$$

где мы опустили линейное по $x - x_0$ слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при мальгх $x - x_0$. Таким образом, мы приходим к профилю $u - u_0$, который пропорционален $\left(x - x_0\right)^{1/3}$, то есть является сингулярным в точке $x = x_0$. Эта сингулярность и является формальной причиной, по которой s обращается в бесконечность.

Таким образом, даже если нелинейность слаба, она за конечное время приводит к образованию особенности в поле u. При приближении к особенности уравнение Хопфа становится неприменимым, так как растет вторая произ водная от u, и потому для анал иза дальнейшей эволюции уравнение Хопфа следует модифицировать. Именно на этом пути возникает уравнение Бюргерса.

Задача

7.1.1. Решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями $u = -c_1 x + c_2 x^3$, полученное с помощъю метода характеристик, можсно Формально продолюсить и на времена $t > c_1^{-1}$, что приводит к неоднозначному решению (x). Найти область существования этой неоднозначности и значения Функции и в этой области.

Задача

7.1.2. Найти решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями $u = -c_1 x + c_2 x^2$.

Задача

7.1.3. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая является константой f_0 на интервале $-x_0 < x < x_0$ и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака f_0 ?

Задача

7.1.4. Найти решение уравнения (7.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая равна $h_0 x$ на интервале $-x_0 < x < x_0$ и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака h_0 ?

17.5.2 Об уравнении Бюгерса

Уравнение Бюргерса (Burgers) отличается от уравнения Хопфа (7.1) введением дополнительного члена, который описывает диссипацию, связанную с вязкостью, и потому пропорционального второй производной. В безразмерньхх переменных мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

которое и называется уравнением Бюргерса. Подчеркнем, что область применимости уравнения Бюргерса отнюдь не ограничивается акустикой, оно возникает во многих физических задачах.

На самьгх больших временах любое решение уравнения (7.7), стремящееся к нулю на $\pm\infty$ по x, стремится к нулю, $u \to 0$. Действительно, в силу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dx \frac{u^2}{2} = -\int dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

Таким образом, положительно определенная величина $\int dx u^2$ убывает со временем и, при достаточно большом t, становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргерса u, которое стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Тогда при больших t значение u становится малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (7.7). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению. Локализованные решения этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} u &\propto \tfrac{1}{t^{1/2}} \exp\left[-\tfrac{(x-x_0)^2}{4t}\right] \\ u &\propto \tfrac{x-x_0}{t^{3/2}} \exp\left[-\tfrac{(x-x_0)^2}{4t}\right] \end{aligned}$$

вторая асимптотика реализуется при условии $\int dx u = 0$.

В случае сильной нелинейности, который реализуется, если для начальньг условий $UL \gg 1$, где $L-$ характерный масштаб (корреляционная длина) начального состояния $u(0, x)$, а U - характерное значение поля $u(0, x)$. В этом случае начальная эволюция поля u

может быть описана в пренебрежение второй производной в уравнении (7.7), когда оно сводится к уравнению Хопфа (7.1), которое, однако, ведет к сингулярности. Уравнение Бюргерса позволяет проанализировать структуру, которая возникает после возникновения сингулярности в уравнении Хопфа. После некоторого переходного процесса формируется специальное решение, которое двигается со скоростью u_0, то есть $\partial u/\partial t = -u_0 \partial u/\partial x$. Подставляя это соотношение в уравнение Бюргерса (7.7), мы находим затем его первый интеграл $(u-u_0)^2 - 2\partial u/\partial x = \text{const}$. Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_0 - 2a \tanh\left[a\left(x - x_0\right)\right]$$

которое называют шоком. Это решение соответствует тому, что в области ширины a^{-1} поле u испытывает скачок $4a$. Решение (7.9) дает универсальную форму шоков, которые формируются при условии $UL \gg 1$, тогда $a \sim U$. Заметим, что стационарность этого решения не противоречит сделанному выше утверждению о стремлении u к нулю на больших временах, поскольку последнее справедливо только для решений, стремящихся к нулю при $x \to \pm\infty$, в то время как выражение (7.9) этому условию не удовлетворяет.

Поясним общую структуру поля u, которая возникает при эволюции некоторого характеризующегося сильной нелинейностью начального условия. За конечное время из у частков u с отрицательным наклоном формируются шоки, а из участков с положительным наклоном формируются промежутки между шоками. В дальнейшем поле в этих промежутках стремится к линейному профилю, поскольку его эволюция управляется уравнением Хопфа. Как следует из выражения (7.9), шок двигается со скоростью u_0, которую можно определить, как полусумму значений поля u на краях шока. Это означает, что время от времени происходят события, когда большой шок (со значительной амплитудой a) догоняет меньший шок. Это кончается поглощением малого шока большим. Поэтому количество шоков в системе постепенно убывает.

Детали этих процессов мож но проследить с помощью преобразования Коула-Хопфа (Cole-Hopf)

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h/\partial x.$$

Оно приводит уравнение Бюргерса (7.7) к чисто диффузионному уравнению

$$\partial\Psi/\partial t = \partial^2\Psi/\partial x^2,$$

которое изучалось в разделе (4.2.1). Решение уравнения (7.11) может быть выражено в виде интеграла от начального значения

$$\Psi(t,x) = \int \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] \Psi(0,y),$$

в соответствии с (4.36).

Выражение (7.12) может быть использовано для получения ряда точньг решений уравнения Бюргерса. Рассмотрим в качестве примера начальное условие $\Psi(0,x) = \cosh(ax)$, которое соответствует шоку (7.9)с $u_0 = x_0 = 0$. В этом можно убедиться, производя обратное по отношению к (7.10) преобразование

$$u = -2\partial(\ln\Psi)/\partial x$$

Подставляя выражение $\Psi(0,x) = \cosh(ax)$ в уравнение (7.12) и вычисляя интеграл по y, мы находим $\Psi(t,x) = \cosh(ax)\exp\left(a^2 t\right)$. Подставляя это выражение в соотношение (7.13), мы находим то же выражение $u = -2a\tanh(ax)$, поскольку дополнительный временной множитель выпадает из ответа. Таким образом, мы другим способом убедились в том, что выражение (7.9) дает стационарное решение уравнения Бюргерса. Обратим внимание на то, что мы получили растущее со временем решение уравнения диффузии. Это связано с тем, - поле Ψ неограниченно растет нри $x \to \pm\infty$. Задача 7.1.5. Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием $\Psi(0,x) = \cosh(ax) + B\cosh(bx)$. Вычислить соответствующее поле и. Проследить, как большой шок "поедает"маленький, считая $b > a$ и $B \ll 1$.

Задача

7.1.6. Найти решение уравнения (7.11) с начальным условием $\Psi(0,x) = 1 - A\exp\left(-x^2\right).B$ иислить соответствуюоцее поле u.

17.5.3 Об Нелинейное уравнение Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию огибающих электромагнитньгх волн, плазменньг колебаний, и так далее. Другими словами, НУШ относится к универсальным волновым уравнениям, которые применимы в самых разньг физических случаях.

Как мы уже установили в разделе (4.1.3), в линейном прибл ижении уравнение на огибающую ψ можно свести к свободному уравнению Шрёдингера (4.60) (мы не рассматриваем возникающий иногда гиперболический случай). Теперь мы учтем нелинейность в уравнении для амплитуды ψ. Для ряда случаев эта нелинейность по физическим соображения м может быть только третьего порядка. Например, при распространении электромагнитных волн в материальных средах основным источником нелинейности является эффект Керра, то есть зависимость диэлектрической проницаемости среды от напряженности электрического поля. Диэлектрическая проницаемость раскладывается по четным степеням напряженности поля. Главным членом разложения является квадратичный, отсюда и кубическая нелинейность в уравнении на огибающую.

Нелинейность должна быть добавлена в уравнение Шрёдингера (4.60), она пропорциональна третьей степени ψ. Если система однородна по времени, то имеется дополнительное правило отбора нелинейного члена. Как следует из (4.20), сдвиг по времени эквивалентен добавлению фазы к ψ. Поэтому уравнение на ψ должно быть инвариантно относительно сдвига фазы ψ, что однозначно определяет вид нелинейного члена, который должен быть пропорционален $|\psi|^2\psi$. Еще одним дополнительным правилом отбора является отсутствие диссипации, что фиксирует действительный коэффициент при $|\psi|^2\psi$ в уравнении.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно менять соотношения между коэффициентами при нелинейном и дисперсионном слагаемьх НУШ, но не их относительный знак. Поэтому НУШ может быть приведено к двум каноническим типам:

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi + 2|\psi|^2\psi = 0,$$

и

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi - 2|\psi|^2\psi = 0.$$

Мы видим, что оба этих уравнения имеют вид квантовомеханического уравнения Шрёдингера (4.54) с потенциалом U, равным $-2|\psi|^2$ в случае (7.14) и $+2|\psi|^2$ для (7.15). Поскольку уравнение (7.14) соответствует притягивающему потенциалу, то этот случай называется 'НУШ с притяжением', и, соответственно, уравнение (7.15) - 'НУШ с отталкиванием'. Как мы знаем из квантовой механики, волновые функции в притягивающих

и отталкивающих потенциалах имеют качественно разные свойства. Поэтому и решения уравнений (7.14) и (7.15) отличаются радикальным образом. Самые интересные эффекты возникают в притягивающем случае (7.14), который, к тому же, часто реализуется в оптических приложениях. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся именно на нем.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (7.14) является следствием вариационного принципа. А именно, оно получается, как экстремум 'действия'

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int dt d\boldsymbol{r} L \\ L &= i\psi^*\partial_t\psi - \nabla\psi^*\nabla\psi + |\psi|^4 \end{aligned}$$

При вариации S удобно рассматривать поля ψ и ψ^*, как независимые динамические переменные, что возможно в силу того, что ψ имеет две степени свободы.

У равнение (7.14) ведет к законам сохранения ряда величин, которые связаны с общими симметриями этого уравнения: инвариантностью по отношению к сдвигу фазы ψ, а также по отношению к сдвигу начала отсчета времени и начала координат, смотри раздел 7.5.1. Соответствующими интегралами движения при произвольном числе измерений для локализованньхх в пространстве решений являются 'число частиц' N, 'энергия' E и 'импульс' $\boldsymbol{P}$, то есть $dN/dt = 0, dE/dt = 0, d\boldsymbol{P}/dt = 0$.

Выражения для этих (Нётеровских) интегралов движения

$$\begin{aligned} N &= \int d\boldsymbol{r}|\psi|^2 \\ E &= \int d\boldsymbol{r}\left(|\nabla\psi|^2 - |\psi|^4\right) \\ \boldsymbol{P} &= -i\int d\boldsymbol{r}\psi^*\nabla\psi \end{aligned}$$

могут быть получены в рамках общей процедуры из Лагранж иана (7.16), смотри выражения (7.82, 7.84, 7.87). Для нелинейного уравнения Шрёдингера имеется замечательное соотношение - теорема Таланова, позволя ющее сделать качественные выводы о поведении решений НУШ для широкого класса начальньх условий. Для вывода теоремы Таланова рассмотрим функционал

$$I = \int d\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^2|\psi|^2$$

Для волнового пакета, центрированного вокруг начала координат, этот функционал можно оценить, как $I \sim NR^2$, где R - размер пакета. Для интеграла (7.20) справедл иво соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8 \int d\boldsymbol{r} \left(|\nabla\psi|^2 - \frac{\mathrm{d}}{2}|\psi|^4 \right)$$

которое является следствием уравнения (7.14). Здесь d - размерность пространства.

В двумерном случае в правой части (7.21) возникает выражение:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8E, \qquad \mathrm{d} = 2.$$

Поскольку E не зависит от времени, то общее решение уравнения (7.22) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct + 4Et^2, \qquad \mathrm{d} = 2,$$

где константы C и E определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что $E < 0$. Тогда при любьх конечньг $I(0)$ и C наступит такой момент времени t_*, что $I(t_*) = 0$. Из оценки $I \sim NR^2$ следует, что R в момент $t = t_*$ обратится в ноль. Сохранение же числа частиц N влечет за собой сингулярность ψ в этот момент.

Таким образом, в двух измерениях при $E < 0$ происходит коллапс - явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при $E > 0$, однако при $E < 0$ он неизбежен. Коллапс означает, что в функции ψ за конечное время возникает сингулярность в некоторой точке. Это может произойти в точке, отличной от $\boldsymbol{r} = 0$, в момент времени более ранний, чем $t = t_*$. То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале $t \le t_*$ коллапс при $E < 0$ в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве уравнение (7.21) для $I(t)$ приводит к неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8E - 4 \int d\boldsymbol{r} |\psi|^4 < 8E.$$

Поэтому вместо равенства (7.23) мы приходим к неравенству

$$I(t) < I(0) + Ct + 4Et^2, \qquad \mathrm{d} = 3.$$

Это неравенство по-прежнему означает неизбежность коллапса при $E < 0$.

Задача

7.2.1. Проверить непосредственно законы сохранения интегралов (7.17,7.18,7.19), исходя из уравнения (7.14).

Задача

7.2.2. Вывести соотношение Таланова (7.21).

17.5.4 Об уравнении Гросса-Питаевского

У равнением Гросса-Питаевского называется уравнение

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi - 2|\psi|^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0,$$

которое описывает, например, динамику сверхтекучей системы холодных атомов. Мы рассматриваем простейший однородный случай. Обычно же холодные атомы находятся в оптических ловушках. Для описания этого случая в уравнение (7.26) следует ввести внешний потенциал, который создается оптической ловушкой . уравнения Шрёдингера (7.15) сдвигом фазы ψ на $\kappa^2 t$. Несмотря на это, решения уравнений (7.15) и (7.26) существенно отличаются. Это связано с тем, что при решении нелинейного уравнения Шрёдингера (7.15) обычно считается, что функция ψ стремится к нулю на бесконечности, в то время как при решении уравнения Гросса-Питаевского (7.26) обычно считается, что на уравнения Гросса-Питаевского (7.26), которое записывается в виде $\psi = \psi_0 e^{i\varphi_0}$, где $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$ и фаза φ_0 произвольна.

Как и нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Гросса-Питаевского (7.26) может быть получено, как условие экстрему ма дей ствия

$$\mathcal{S} = \int dt d\boldsymbol{r} L$$
$$L = i\psi^* \partial_t \psi - \nabla\psi^* \nabla\psi - |\psi|^4 + \kappa^2 |\psi|^2$$

По сравнению с выражением (7.16) в 'дей ствии' (7.27) противоположен знак перед $|\psi|^4$ и имеется дополнительный член с κ. Таким образом, мы приходим к законам сохранения волнового действия, энергии и импульса

$$N = \int dV |\psi|^2$$

17.5.5 Об Уравнения Эйлера и Навье-Стокса

17.5.6 Об Уравнение Кортевега-де-Фриза

17.5.7 Об Уравнение синус-Гордон

17.5.8 Об Одномерное нелинейное уравнение

17.5.9 Об Нётеровские интегралы движения

18 Уравнения математической физики в квантовой теории поля

(по идее тут много всего особенного)

19 Интегрируемые системы в математической физике

20 Геометрические методы в математической физике

по идее тут много всего, но во время вуза этим заниматься следует в последнюю очередь.

основа: [3]

(пока просто хрен я дойду до этих методов, базу бы узнать, на это итак уйдет минимум 2 недели!)

21 Приложения УМФ

(судя по всему его нужно раскидать будет)

наверное, это прямо очень интересный раздел, наконец-то овладеем всеми методами.

21.1 квантовая теория поля

очень актуально.
заготовлю сперва выше разделы!!!!
потом сюда уже буду применять их.

21.2 оптика !!!

хз, но это на самом деле актуально!!!!

21.2.1 волновое уравнение

(тоже часть задания, когда-то дойду. но мб в другое место писать буду)

21.2.2 формула Кирхгофа в оптике

21.3 уравнение теплопроводности!!

21.4 плазма

там еще есть много много приложений, которые вкратце хотелось бы упомянуть, берешь и решаешь.

22 О численных решениях и моделировании

(тут коротко обсудим, прямо супер подробно в отдельных статьях, до которых я скорее всего никогда не дойду.)

22.0.1 Основные методы численного решения

(суть записи по вычматам)

22.0.2 Типичные примеры

моделирование уравнения Геймгольца

итак, нужно записать эту главу, чтобы начать видеть приложения.

итак, код найден тут, потом его я разберу подробно, пока что просто принимаем, что что-то такое есть, и в принципе очень полезно.

классическая такая матфизика - часто нужна, а потом уже мы идет в гильбертовы пространства и смотрим дополнения. пока что начнем с основ.

итак, у нас есть Ω - граница 2D поверхности. и имеется функция $u(x, y)$, которая должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad & x, y \in \Omega \\ u(x, y) = 0 \quad & \forall x, y \in \Omega \end{aligned} \tag{22.1}$$

создадим в Wolfram команду `helmholzSolve` чтобы она решала такие уравнения.
(я хз, как)

```
Needs["NDSolve`FEM`"];
helmholzSolve[g_,
numEigenToCompute_Integer,

opts : OptionsPattern[]] := Module[
{u,
   x,
   y,
   t,
   pde,
   dirichletCondition,
   mesh,
   boundaryMesh,
   nr,
   state,
   femdata,
   initBCs,
   methodData,
   initCoeffs,
   vd,
   sd,
   discretePDE,
   discreteBCs,
   load,
   stiffness,
   damping,
   pos,
   nDiri,
   numEigen,
   res,
   eigenValues,
   eigenVectors,
   evIF},

(* Discretize the region *)
If[Head[g] === ImplicitRegion || Head[g] === ParametricRegion,
mesh = ToElementMesh[DiscretizeRegion[g],
opts],
mesh = ToElementMesh[DiscretizeGraphics[g],
opts]
];
boundaryMesh = ToBoundaryMesh[mesh];

(* Set up the PDE and boundary condition *)
pde = D[u[t,x,y],
t] - Laplacian[u[t,x,y],
{x,
   y}] + u[t,x,y] == 0;
dirichletCondition = DirichletCondition[u[t,x,y] == 0,
True];

(* Pre-process the equations to obtain the FiniteElementData in StateData *)
nr = ToNumericalRegion[mesh];
{state} = NDSolve`ProcessEquations[{pde,
   dirichletCondition,

   u[0,
   x,
   y] == 0},
u,
{t,
   0,
   1},
Element[{x,
   y},
nr]];
femdata = state["FiniteElementData"];
initBCs = femdata["BoundaryConditionData"];
methodData = femdata["FEMMethodData"];
initCoeffs = femdata["PDECoefficientData"];

(* Set up the solution *)
vd = methodData["VariableData"];
sd = NDSolve`SolutionData[{"Space" -> nr,
   "Time" -> 0.}];

```

```
(* Discretize the PDE and boundary conditions *)
discretePDE = DiscretizePDE[initCoeffs,
methodData,
sd];
discreteBCs = DiscretizeBoundaryConditions[initBCs,
methodData,
sd];

(* Extract the relevant matrices and deploy the boundary conditions *)
load = discretePDE["LoadVector"];
stiffness = discretePDE["StiffnessMatrix"];
damping = discretePDE["DampingMatrix"];
DeployBoundaryConditions[{load,
   stiffness,
   damping},
discreteBCs];

(* Set the number of eigenvalues ignoring the Dirichlet positions *)
pos = discreteBCs["DirichletMatrix"]["NonzeroPositions"][[All,
2]];
nDiri = Length[pos];
numEigen = numEigenToCompute + nDiri;

(* Solve the eigensystem *)
res = Eigensystem[{stiffness,
   damping},
-numEigen];
res = Reverse /@ res;
eigenValues = res[[1,
nDiri + 1 ;; Abs[numEigen]]];
eigenVectors = res[[2,
nDiri + 1 ;; Abs[numEigen]]];
evIF = ElementMeshInterpolation[{mesh},
#] & /@ eigenVectors ;

(* Return the relevant information *)
{eigenValues,
   evIF,
   mesh}
]
```

только говорят, что там какие-то подводные камни и вообще так вот зрешать это все нельзя. (тут я кстати задумался, что вообще говоря я не знаю, как их решать, и это в самом деле хороший вопрос)

Часть VII

Appendix

Обсудим известные из курса классического анализа теоремы и конструкции, которые активно применяются в различных задачах математической физики.

A Введение

A.1 Мотивация

(вообще, эта запись может быть одной из центральных записей, потому что часто к этому происходит возврат. хз, пока еще не прочувствовал, но по сути именно через УМФ многое и связано в физике!!! пока не глубоко это вижу к сожалению.)

все строгие задачи теоретической физики сводятся к задаче математической физики

Так что по сути этой записью я и пользуюсь, когда решаю задачи теорфиза.

То есть запись очень используемая.

И поэтому она отражает во многом уровень.

Очень важно собрать его нормально, потому что по сути именно эта запись ключевая для физики, а не запись по матану или еще чему-то.

Другие тоже важны очень, но основные шаблоны решения задач прописаны именно тут.

квантовая теория поля во многом это та же матфизика

Мотивация изучать обобщенные задачи

(неплохо бы сформулировать её, пока не уверен.)

A.2 Мышление для математической физики

A.2.1 Подход к уравнениям математической физики

Технические особенности

Используем горизонтальную ориентацию листов Эффективная мелочь, потому что формулы очень большие.

Строгие вычисления и преоразования на 5 страниц как способ развлечься

(пропишу это глубже, чисто подход к Консту. С таким подходом все и берется. такое особое развлечение, тем не менее, когда в целом все понимаешь, можно и такими строгими способами идти. тут порассуждаю про это.)

О важности параллельной доработки функционального анализа

потому что связи тут самые передовые.

и это не сложно, примерно просто неделю потратить на него нужно - и все,

четкость математической физики становится огромная.

A.2.2 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания математической физикиа.

A.2.3 Необходимые темы для математической физики

Математическая физика использует многие темы матемтики: функан, диффуры, т.п.... но я ее излагать буду с точки зрения физики, показывая кучу примеров и приложений методов. Можно было бы фокусироваться на математику, но она у меня в соответствующих разделах, поэтому тут сфокусируемся на физических приложениях математики.к

В записи содержится много примеров, много расчетов, что важно для строгости.

что еще особенное?

Важность математического анализ

всё полностью на нем стоит..

Важность функционального анализ

вроде нужен, но пока что я не уверен.

Важность дифференциальных уравнений

мб и нужны, не знаю точно.

A.2.4 Дополнительные темы для математической физики

A.2.5 способы изучения математической физикиа

A.3 Короткий исторический обзор

От ПТФ

В настоящем пособии мы представим подходы, которые используются в теоретической физике для решения задач, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений, включая нелинейные уравнения и уравнения в ч астных производных, то есть уравнений полевых. Мы обсуждаем также методы, связанные с интегральными уравнениями и теорией групп. Значимость этих сюжетов была установлена в ходе развития физики. Осознание важности решения дифференциальных уравнений и связанных с ними задач восходит к тому же времени, когда был достигнут первый грандиозный успех современной теоретической физики - объяснение Ньютоном формы орбит планет на основе законов механики. Хотя сам Ньютон зачастую предпочитал пользоваться геометрическими методами, он хорошо сознавал, что наиболее адекватным языком созданной им конструкции являются именно дифференциальные уравнения.

В течение восемнадцатого века параллельно с быстрым ростом качества астрономических наблюдений происходило уточнение законов движения планет и более мелких астрономических объектов (комет, астероидов), связанное с воздействием на них других планет. На этом пути родилась, по современной терминологии, теория возмущений, которая имеет дело с поправками, связанными со слабым дополнительным воздействием на физическую систему. В частности, было осознано, что в некоторых случаях даже слабое возмущение способно за большое время сильно исказить орбиту планеты или иного тела. Так появилась теория так называемых секулярных членов в уравнениях механики.

В том же восемнадцатом веке возник новый предмет изучения - гидродинамика. Эйлер и Лагранж сформулировали основные уравнения, которым подчиняется движение любой жидкости. И эти уравнения оказались дифференциальными уравнения ми в частных производных. Впоследствии эти уравнения были уточнены Навье и Стоксом, которые включили в рассмотрение вязкость . Гидродинамика оказалась удивительно богатой на различные физические явления, что связано с существенной ролью нелинейности в динамике жидкости.

Гидродинамика на долгие годы стала тем полигоном, на котором испытывались различные методы математической физики. О собенно плодотворным в этом отношении оказался период конца девятнадцатого - начала двадцатого века, когда были поставлены и решены многие гидродинамические задачи. Эта наука не исчерпана до сих пор, например, не существует последовательной теории турбулентности, то есть хаотического состояния жидкости, которое возникает при больших числах Рейнольдса.

Однако гидродинамика сыграла и еще одну очень важную роль - она стала парадигмой, на основе которой строилось понимание других физических явлений. Именно гидродинамика послужила плацдармом, с которого началась осознание таких явлений, как термодинамика и электромагнетизм. И хотя понятия флогистона и эфира были впоследствии отброшены, как слишком грубые модели явлений, использующие прямые аналогии с жидкостью, сам подход, связанный с дифференциальны ми уравнения ми в частных производных, восходящий к гидродинамике, оказался чрезвычайно плодотворным. Именно на этом пути в течении девятнадцатого века в физике родилось современное понятие поля.

В девятнадцатом веке произошло первое великое объединение - постепенно было осознано, что такие явления, как электричество, магнетизм и распространение света являются проявлениями единой сущности электромагнитного поля. Впоследствии к свету добавились Электромагнитные волны различной длины волны, от радиоволн до рентгеновского излучения. И описание всех этих явлений в рамках единой теории электромагнитного поля остается одним из самых значимых достижений физики. Это описание базируется на дифференциальных уравнениях в частных производных.

По мере расширения круга задач, с которыми имеет дело физика, выяснилось, что далеко не во всех случаях для анализа можно обойтись элементарными функциями. Поэтому в течении восемнадцатого-девятнадцатого века в оборот математической физики были введены более сложные функции, которые называются специальными. Репертуар специальных функций установился к наталу двадцатого века. Подтіcркнем, 'тоо исполь зование специальных функций тесно связано с теорией функций комплексного переменного, построенной в основном в девятнадцатом веке.

В течении девятнадцатого века было осознано, что теоретическая физика имеет дело с разнообразным асимптотическим поведением. В связи с этим в математической физике были разработаны методы определения асимптотического поведения различных функций и решений широкого спектра уравнений. С другой стороны, выявилась значительная роль законов сохранения, симметрийное происхождение которых было выявлено уже в двадцатом веке.

При построении в первой половине двадцатого века теории относительности (к ак специальной, так и общей) и квантовой механики использовались в основном методы, разработанные в рамк ах теории классического поля. Это объясняет удивительно высокий темп создания этих совершенно новых разделов физики. Например, уравнение Шрёдингера представляет собой типичное полевое уравнение в частных производных.

В ходе дальнейшего развития в двадцатом веке в теоретической физике возникли разделы, исследования в рамках которых приводят к интегродифференциальным уравнениям. Примерами могут служить кинетика физических систем, которая исследуется в рамках кинетического уравнения, или квантовая теория поля. Эти области лежат вне рамок настоящего пособия. В то же время даже в квантовой теории поля возникают задачи, которые по своей постановке являются уравнениями классического поля. В качестве примера можно привести так называемые инстантоны. Даже при решении задач, которые и сходно восходят к дифференциальным уравнениям, зачастую возник ают интегральные уравнения. Такая ситуация типична при использовании метода функций Грина, который подробно обсуждается в настоящем пособии. Мы обсуждаем ряд задач, которые ставятся в терминах интегральных уравнений, которые возникают в самых разных физических контекстах.

В двадцатом веке чрезвычайно расширилась область при мени мости методов классического поля. Речь идет о динамике любой среды, которую можно рассматривать, как непрерывную. Приведем в качестве примера плазму, которая чрезвычайно богата на различные динамические явления. Подчеркнем также, что плазма может существовать на различных масштабах, от космических до ядерных (где осуществима так называемая кваркглюонная плазма), способ ее описания от этого принципиально не меняется.

В связи с бурным развитием динамики непрерывных сред во второй половине двадцатого века были сформулированы базисные нелинейные уравнения, которые описывают ключевые динамические явления в самых разных физических ситуациях. Это в основном уравнения для полей, зависящих от времени и одной координаты. Поразительным образом оказалось, что значительная часть этих базисных уравнений имеют бесконечный набор законов сохранения. С другой стороны, эти уравнения допускают аналитическое построение весьма сложных решений, которые обычно называют солитонными.

В течение двадцатого века была осознана фундаментальная роль симметрийных соображений в объяснении различных физических явлений. Фактически, в основании любой современной физической теории лежит та или иная симметрия, которая в значительной мере определяет особенности применяемого в этой теории математического аппарата. Чрезвычайно важным является понятие спонтанного нарушения симметрии, которое лежит в основе таких явлений, как сверхтекучесть и сверхпроводимость, а также возникновения масс элементарных частиц за счет механизма Хиггса. Анализ всех этих явлений требует использования аппарата теории групп.

Во второй половине двадцатого века нашли широкое развитие методы исследования систем, обладающих стохастическим поведением. Такие системы должны описываться в рамках величин, усредненных по флуктуациям, то есть случайным изменениям характеризующих систему величин во времени и пространстве. Зачастую такие усредненные уравнения описываются дифференциальными или интегральными уравнениями. В качестве примера можно привести диффусвойства Броуновского движения.

(добавлю формулы, перепишу)

A.4 Литература по уравнениям математической физики

(!!!! тут баланс очень слабый, группировать потом буду книги!!)

Основная литература математической физики

Колоколов, Лебедев и др. Умф для ПТФ
самое полезное и компактное, разберу в первую очередь!!!! потом всё другое.

Задачники

[2] Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики
Планируется как основной задачник, из которого многое и беру.

Другие небольшие методички

[5] Самарова семинары https://www.resolventa.ru/index.php/mfti-umf-fopf

вроде очень крутые семинары, многое из этого использую. Обязательно многое впишу!!! просто до этого нужно добраться, именно по этим семинарам буду тренироваться.

[?] Колесникова С. И. "Методы решения основных задач математической физики"

пока что просто в планах. так или иначе, задачи нарешаться важно!

пока что просто в планах. так или иначе, задачи нарешаться важно!

[?] Яковлев "Функциональные пространства".

хз (??)

[?] Карасёв Р.Н. Отдельные темы математического анализа

по введению математическому многое возьму.

Другие ученики по УМФ

[1] Константинов Р. В. Классические и обобщенные решения уравнений математической физики

В настоящий момент главная книга, по которой создается запись. Проблема ее в том, что она только с одного бока раскрывает задачи, а также слишком длинно все расписывается. Так что позже что-нибудь нормальное возьму, кока что нужно его хотя бы вписать, потому что многие темы там раскрыты фундаментально.

Д.А.Шапиро Конспект лекций по математическим методам физики часть II: представления групп и их применение в физике. функции грина.

крутая книга со многими примерами, потом посмотрю в качестве дополнений для всего. пока что-то и лень и не совсем она про умф. но вообще, давно в планах была, особенно по теории групп много конструкций там хороших.

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. "Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Физтех рекомендует , мб хорошая книга, все там просто вроде, но нужно засесть.

[2] Уроев В.М. Уравнения математической физики. Москва: ИФ Яуза, 1998.

Физтех рекомендует , мб хорошая книга, все там просто вроде, но нужно засесть.

[3] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва: БИНОМ, 2005.

Физтех рекомендует , мб хорошая книга, все там просто вроде, но нужно засесть.

[?] Михайлова "Сборник задач по УМФ"

пока не трогал. второй задачник на случай, если первого мало будет.

По функциональному анализу основная в помощь

какие-то, которые конст советовал и обожает, найду, если будет нужно.

Углубленные книги

Зельдович Элементы математической физики 1973

очень крутая книга, давно в планах было разобрать её, дойду - обязательно пару дней буду дополнять ей структуру.

Саймонс Рид том 4. АНАЛИЗ ОПЕРАТОРОВ

Очень заумная книга, где может быть многое профессиональное найду, пока не до этого.

По теорфизическим применениям

по их я читаю более всего, ибо это самое интересное.

(пока почти не доходил)

тахтаджаян

много его буду проходить. очень хочется много его доделать, а особенно в квантовую механику добавить!

[3] Катанаев М. О. "Геометрические методы в математической физике"

добавлю много обязательно и в физику, и в математику его! пока не трогал.

[4] Мышкис прикладная математика для инженеров

хорошая книга, много интересных глав, мб брать буду. структура по ней создана, вроде бы темы хорошо раскрываются.

[6] Шмидт В. А. Релятивистские поля и струны

пара хороших доказательств, а также задачи про колебания струн и еще чего-то взята. почему бы и не взять ведь?

статьи с различными деталями

пока их не читал, но скорее всего их много будет.

Про моделирование

тут

отличный пример о моделировании в вольфраме. мб посмотрю потом.

A.5 Обзор математической физики

что вообще в нем происходит?

A.5.1 математической физики в двух словах

Обсудим, что из себя представляет математической физики наиболее кратко, выделяя самую суть.

появление математической физики в нашей картине мира

один подход

второй подход

обзор различных задач и решений

какие есть и как они связаны друг с другом?

суть функции грина

по сути самое важное, чем мы и занимаемся тут.

что отличает нас от тех, кто просто диффуры прошел!!!

четко пропишу!

один большой раздел

такой-то набор следствий

обзор необходимых для математической физики математических методов

(освою - напишу)

A.5.2 наиболее прикладные темы математической физикиа

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

title

A.5.3 итоговые формулы и закономерности

A.5.4 обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

A.5.5 Удивительные факты

A.5.6 Результаты математической физики

A.5.7 Применения математической физики в других разделах физики

A.5.8 Обзор дальнейших развитий математической физики

A.6 связь математической физики с разными другими разделами

A.6.1 связь с дифференциально геометрией

не шарю.

A.7 Описание записи

A.7.1 описание глав и разделов

описание записи в целом

первая часть

вторая часть

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

A.7.2 обозначения и константы

A.8 обзор математической физики

что вообще в нем происходит?

A.8.1 обзор теоретических подходов

A.8.2 математическая физика в задачах дифференциальной геометрии

многие параграфы чисто как приложения к диффгему

A.8.3 обзор приложений

A.9 Головоломки математической физики

сбалансирую и наберу потом по интересности
надо бы найти что-то лишь идейное, чтобы не было много вычислений.

B Методы математического анализа для УМФ

B.1 примеры различных преобразований

B.1.1 вычисление свертки

и тут в каждом параграфе каждая свертка полезна

по сути дз 2 по УМФ, чисто тут сгруппирую и все.

B.2 оценки

как с пределами там работаем и всем таким?

теорема лебега об ограниченной сходимости дает нам условие на занос предела под сумму.

B.3 интегралы

перечень основных методов

B.3.1 теоремы Лебега

C Пространства функций

C.1 Гильбертово пространство

(определение и все из 4го семестра распишу тут)

если функция лежит в нем, то это можно проверить условием на ряд:[10]

$$\sum_n |v_n|^2 |e^{-i\lambda t}|^2 < +\infty \tag{C.1}$$

короче, у нас еще дофига проверок всякой хрени по всем мелочам.

в Гильбертовом пространстве вводят также:

Определение C.1. *производная $\dot{u}$ в смысле гильбертова пространства - если* $\lim_{\Delta t \to 0} \| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \dot{u} \|^2 = 0$

Если $\dot{u}$ существует, то ее можно разложить в ряд $\dot{u}$[11][12]

C.1.1 свойства и дополнительные характеристики

суть в том, что они скорее всего нужны просто для понимания происходящего, но применять их не будем.

Теорема 2. *Рисса об ортогональном разложении*

(что типа если есть подпространство, то само H разбивается в прямую сумму.)

Теорема 3. *Рисса,Фреше*

[10] откуда это?

[11] ?????

[12] мы можем раскладывать по базису и дальше подставлять эти ряды. да? я так делал?

Доказательство. оно есть

оно не малое.

оно займет 40 мин, чтобы разобраться.

скипаю.

□

C.2 пространство Швартца

(что это?)

суть в том, что там про свертки и все такое.

C.2.1 свертка

большая часть задания по УМФ, которое мы потом все посмотрим.

C.2.2 пределы

C.3 О некоторых обобщенных функциях

C.3.1 О дельта-функции

(тут ее свойства соберем основные для УМФ)

определение

Оперирование с идеальными объектами в физике такими как дит к появлению в математическом аппарате, описывающем эти объек- ты, так называемых обобщенных функиий. Наиболее известные и част выражениях, умноженными на «хорошую"функцию. Поэтому свойст- ва обобщенных функций определяются свойствами интегралов — они имеют интегральный смысл.

Таким образом, математическая теория обобшенных фуниший стпоится на сопоставлении им функционалов, т. е. интегральных выражений. содержащих произведения с хорошими «функциями». Например. пляя $\delta(x)$ -функции определяется функшионал с поо- извотьной «хороших функцией:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

В функционале происходит «сглаживание (усрелнение) сингупапиости δ -функции. В физике это отвечает замене молели точечнота обтеита некоторым распределением в єфизически бесконечно маломм облеме так что среднее значение распределенного объекта совпалает с величиной точечного.

В теории обобщенных функший часто используется другой подход: обобщенная функция рассматривается как предел последовательности «хороших» функций. Такой подход может оказаться более наглядным, чем функциональный, поскольку в этом случае производится предельный переход после выполнения всех «обычных» операций нал последовательностью «хороших» функций, аппроксимируюших обобщенную. 10.2 δ -ФУНКЦИЯ В этом параграфе рассмотрим «основную"обобшенную функцию на уровне єфизической строгости». Оправданием такого подхода может служить высказывание одного из великих математиков: «Если Ньютон ждал три века, пока его душу спасут из ада, построив строгую теорию математического анализа, то Шварц спас душу Дирака еще при его жиЗни».

Прежде всего подчеркнем, что δ -функция - это операторная величина, которая приобретает «реальный» смысл только если она стоит под знаком интеграла. Иными словами,

δ -функция есть ядро линейного интегрального оператора. При этом само ядро не есть функция в обычном сMbICJe.

Представления и определения δ -функции мы рассмотрим в следующем параграфе, а сейчас приведем, пожалуй, самое распространенное определение:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{0}^{K}\cos Kx\ \mathrm{d}x\equiv\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{x}.$$

Сам по себе предел $K\to\infty$ выражения (10.2), конечно, не существует, однако, если его правую часть умножить на «хорошую» (обычную) функцию, регулярную при $x=0$ и проинтегрировать по интервалу, включаюшшему точку $x=0$, а после интегрирования выполнить предельный переход, предел будет сушествовать:

$$\int_{-a}^{b}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{-aK}^{bK}f\left(\frac{y}{K}\right)\frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y=f(0)$$

Формула (10.3) определяет основное свойство δ -функции и ее можно рассматривать как определение (10.1).

Наглядно $\delta(x)$ можно представить себе как функцию, равную нулю при всех $x\neq0$, но имеюшую в точке $x=0$ столь сильную сингулярНОСТЬ, чТО

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$

Если формально продифференцировать определение (10.2), получим определение производной от δ -функции:

$$\delta'(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\left(\frac{K\cos Kx}{x}-\frac{\sin Kx}{x^2}\right)$$

которая имеет «реальный» смысл только в интегральном выражении. Если после выполнения интегрирования выполнить предельный перехол так же, как и в формуле (10.3), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x=-f'(0)$$

Заметим, что интегрированием по частям, выражение (10.3) сводится к выражению (10.6), где производная δ -функции опрелелена в соответствии с(10.5)

представления дельта-функции

Рассмотрим наиболее часто встречаюшиеся случаи появления δ -функции, когда некоторый параметр стремится к нулю. 1. Бесконечно медленное (адиабатическое) изменение физической величины (как правило - некоторого взаимодействия). В этом случае имеем интегральное выражение:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\mathrm{e}^{\pm ikx}\ \mathrm{d}k$$

Действительно, выражение (10.7) обладает необходимыми свойствами:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left.\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}\right|_{x\neq0}=0$$

и соответственно при $x=0$ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon}=\infty$$

Вычислим теперь интеграл от дроби, стоящей под знаком предела:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\mathrm{d}x}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\pi\left(1+y^2\right)}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{\pi}\ \mathrm{res}\ \left.\frac{1}{1+y^2}\right|_{y=\mathrm{i}}=1$$

2. Периодически меняюшееся взаимодействие (представление Дирихле)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\mathrm{e}^{\pm ikx}\ \mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N}\cos kx\ \mathrm{d}k$$

Здесь роль малого ε играет $1/N$. В дальнейшем придется часто пользоваться теоремой Римана-Лебега: интеграл от произведения медленно меняющейся функции $f(x)$ и периодической функции с малым периодом и средиим за период равным нулю мал и в пределе равен нулю. Это имеет место, например для функций: $\exp(\mathrm{i}Nx), \sin Nx, \cos Nx$ при $N\to\infty$. Действительно, беря по частям интеграл, получаем

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\ \mathrm{d}x=\left.f(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{\mathrm{i}N}\right|_a^b-\frac{1}{\mathrm{i}N}\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\ \mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}N}\left(f(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nb}-f(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Na}\right)+\left.O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right|_{N\to\infty}\to 0$$

Проверим теперь выполнение основных свойств δ -функции для выражения (10.8). Заметим, что в конечных пределах

$$\int_a^b\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

но интеграл в бесконечных пределах (по всей оси) отличен от нуля и равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y=1$$

Таким образом, согласно сформулированной выше теореме получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\ \mathrm{d}x=\varphi(0).$$

Следовательно, функция (10.8) удовлетворяет основному свойству δ -функции (10.1). Рассмотренные два представления наиболее часто встречаются в физических задачах. 3. Представление в виде гауссовой экспоненты:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\right|_{x\neq 0}=0,\quad \text{Но}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\right|_{x=0}=\infty.$$

Сама функция по знаком предела (10.10) выбрана нормированной на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon} \mathrm{d}x = 1$$

Для любой хорошей функции, как и в представлении Дирихле можем записать:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon} \varphi(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon} \mathrm{d}x = \varphi(0)$$

4. Это представление похоже на представление Дирихле:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}$$

Вновь легко проверяем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\bigg|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\bigg|_{x=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Осталось убедиться, что интеграл в бесконечных пределах от рассматриваемой функции равен 1. Для этого вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha y}{y^2} \mathrm{~d}y$$

Интеграл вычисляется дифференцированием по параметру α :

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha y \cos \alpha y}{y} \mathrm{~d}y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha y}{y} \mathrm{~d}y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{~d}t = 1$$

Решая тривиальное дифференциальное уравнение $I'(\alpha) = 1$, получаем: $I(\alpha) = \alpha +$ const с «ачальным» условием $I(0) = 0$, поэтому $I(\alpha) = \alpha$. Заметим теперь, что заменой $x/\varepsilon = y$ мы сводим нужный нам интеграл к вспомогательному при $\alpha = 1$. Таким образом убеждаемся, что функция под знаком предела нормирована на 1. Далее, воспользовавшись теоремой Римана-Лебега, убеждаемся, что рассматриваемое представление удовлетворяет основному свойству δ -функции (10.1). 5. Представление Пикара:

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}$$

Здесь так же как в представлении Дирихле $\varepsilon = N^{-1}$. Легко убеждаемся:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}\bigg|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}\bigg|_{x=0} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} = \infty$$

Интеграл в бесконечных пределах равен 1 и не зависит от параметра N. Основное свойство δ -функции также выполняется. 6. Представление Стильтьеса:

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}$$

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}$$

Проверяем выполнение необходимых требований:

$$\lim_{N\to\infty} \left.\frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}\right|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \left.\frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}\right|_{x=0} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} = \infty$$

Убедимся, что функция нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N\,\mathrm{d}x}{2\pi \operatorname{ch} Nx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N\mathrm{e}^{-Nx}}{\pi\left(1+\mathrm{e}^{-2Nx}\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Убелиться в том, что представление (10.14) удовлетворяет необходимому свойству (10.1) можно так же, как в случае с быстро убываюшей гауссовой экспонентой (10.8).

В заключение параграфа отметим, что δ -функция размерна, ее размерность обратна размерности аргумента:

$$[\delta(x)] = [x]^{-1}$$

свойства

Подчеркнем еще раз, что свойства обобщенных функций не зависят от выбора представления, аппроксимирующего данную функцию: свойства обобщенных функций выполняются в пространстве основных, «хороших функций. Например, в классе функций C^{∞}, которые при $|x| \to \infty$ стремятся к нулю вместе со своими производными любого порядка быстрее любой степени $1/|x|$. Таким образом, равенства в формулах понимаются как равенства соответствующих функиионалов. В этом смысле обобщенную функцию можно рассматривать как ядро линейного интегрального оператора.

Например, основное свойство δ -функции (10. 1) для какой-либо функции $f(x)$ записанное в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

следует понимать как::

$$\begin{aligned}(f(x)\delta(x), \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\varepsilon}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(0)\varphi(0) = \\ = f(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Поскольку все свойства в классе основных функций переносятся на исследуемые функции, в физике принято в записи формул опускать функЦии $\varphi(x)$, и оставлять только «нужные ф функции $f(x)$, как это представлено в формуле (10.1a). Перечислим основные свойства δ -функции. 1. При «сдвиге» аргумента δ -функции имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\left(x-x_0\right)\mathrm{d}x = f\left(x_0\right)$$

2. δ -функции четная:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

3. δ -функции однородная:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Свойства (10.17) – (10.19) легко доказываются заменой переменной под интегралом в определении (10.1). 4. δ -функция от функции:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left|f'\left(x_i\right)\right|}\delta\left(x-x_i\right)$$

где $f\left(x_{i}\right)=0, x_{i}-$ простые (некратные) корни. Это свойство легко доказывается разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора до первого порядка в окрестностях нулей: $f(x)=f\left(x_{i}\right)+f^{\prime}\left(x_{i}\right)\left(x-x_{i}\right)+\ldots$ с учетом свойств

$$
\begin{gathered}
(10.18) \text{ и } (10.19). \\
5. x \delta(x)=0
\end{gathered}
$$

6. Производная δ -функции может быть записана только в интегральном соотношении:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}(\delta(x)) \mathrm{d} x=-f^{\prime}(0)
$$

Это свойство доказывается интегрированием по частям с учетом обращения в нуль на пределах интегрирования «хороших» функций. Свойство (10.21) обобщается на производную любого порядка:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{~d} x^{n}}(\delta(x)) \mathrm{d} x=(-1)^{n} f^{(n)}(0)
$$

7. Интегральное представление (фурье-образ) δ -функции:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i} k x} \mathrm{~d} x=2 \pi \delta(k)
$$

Это свойство можно рассматривать как обратное преобразование Фурье для 1, поскольку из перечисленных выше свойств следует:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{e}^{i k x} \mathrm{~d} x=1
$$

8. Функционал, определяющий действие δ -функции, можно представить интегралом по замкнутому контуру в комплексной плоскости:

$$
\lim _{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) \varphi(x) \mathrm{d} x=\lim _{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2 \pi \mathrm{i}} \int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z) \frac{\mathrm{d} z}{z}=\varphi(0)
$$

математические преобразования

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$
I=\int_{0}^{\infty} \cos k_{1} x \cos k x \mathrm{~d} x
$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$
\begin{aligned}
I=\int_{-\infty}^{\infty} & \left(\cos \left(k+k_{1}\right) x+\cos \left(k-k_{1}\right) x\right) \mathrm{d} x= \\
& =\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k+k_{1}\right) x}+\mathrm{e}^{\mathrm{l}\left(k-k_{1}\right) x}\right) \mathrm{d} x=2 \pi\left(\delta\left(k+k_{1}\right)+\delta\left(k-k_{1}\right)\right)
\end{aligned}
$$

2. Вычислить $\delta(\sin x)$. Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента δ -функции: $x_{n}=\pi n$, соответственно $\sin ^{\prime} x_{n}=\cos x_{n}=(-1)^{n}$. ГIоэтому можно записать:

$$
\delta(\sin x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2 \pi n)
$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_{0}^{\infty} \cos k_1 x \cos kx \ \mathrm{d}x$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\left(k + k_1\right) x + \cos\left(k - k_1\right) x\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{l}(k-k_1)x}\right) \mathrm{d}x = 2\pi\left(\delta\left(k + k_1\right) + \delta\left(k - k_1\right)\right)$$

2. Вычислить $\delta(\sin x)$. Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента δ -функции: $x_n = \pi n$, соответственно $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$. ГIоэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Коэффициенты Фурье равны

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-inx} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - 2\pi k) \mathrm{e}^{-inx} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

поэтому имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

4. Показать, что в смысле обобщенных функций справедлива формула:

$$\pm \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} = \delta(x)$$

Если точка $x = 0 \notin [a, b]$, по теореме Римана-Лебега

$$\pm \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{N \to \infty} \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} \varphi(x) \mathrm{d}x = 0$$

Обходя точку $x = 0$ в комплексной плоскости по контуру, показанному на рис. 10.1, получаем

$$\pm \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} \varphi(x) \mathrm{d}x = \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{N \to \infty} \int_{C_{\pm}} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} \ \mathrm{d}x =$$
$$= \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_{\pm}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \varphi(0)$$

Что соответствует основному свойству δ -функции.

У пражнения 1. Показать, что

$$\delta\left[\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\right]=\frac{1}{\left|x_1-x_2\right|}\left(\delta\left(x-x_1\right)+\delta\left(x-x_2\right)\right)$$

2. Получить полезную формулу:

$$\delta\left(x^2-a^2\right)=\frac{1}{2|a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a))$$

3. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^{\infty} \sin k_1 x \sin k x \mathrm{~d} x$$

4. Используя теорему Римана-Лебега, показать, что в смысле обобшенных фунКций

$$\pm \frac{1}{2 \pi \mathbf{i}} \lim _{N \rightarrow \infty} \frac{\mathrm{e}^{\pm i N x}}{x \pm \mathrm{i} 0}=0$$

5. Показать, что

$$x^n \delta^{(k)}(x)=0 \quad \text { при } \quad k=0,1, \ldots, n-1 .$$

6. Показать, что при $k \geq n$ справедлива формула:

$$x^n \delta^{(k)}(x)=(-1)^n \frac{n!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}(x)$$

Указание. Воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{~d} x^k}(f(x) g(x))=\sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

где

$$C_k^i=\frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности, имеем

$$\begin{gathered}
x \delta^{(k)}(x)+k \delta^{(k-1)}(x)=0 \quad \text { при } \quad n=1 \\
x^n \delta^{(n)}(x)=(-1)^n n!\delta(x) \quad \text { при } \quad n=k
\end{gathered}$$

интересные вопросы про дельта-функцию

там нам загадок полно задают, их сюда и буду писать в параграфах.
особенно обсудим вопросы про ошибочное представление про нее.

схожие функции

они часто используются для разных свойства дельта-функции, так что обсудим и их. мб ранее уже использовались.

C.3.2 О функции Хевисайда

(потом напишу, дополнение все-таки)

Суть

Функция Хевисайда или функция включения $\theta(x)$ определяется как

$$\theta(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x\geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x<0. \end{cases}$$

Производная θ -функции есть δ -функция. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

Заметим, что производная любой функции, имеющей разрыв первого рода, выражается через δ -функцию.

Функцию Хевисайда можно представить как предел ε -последовательности:

$$\theta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}+\frac{1}{2}$$

Функцию $\operatorname{sign}x=|x|/x$ можно выразить через функцию Хевисайда:

$$\operatorname{sign}x=2\theta(x)-1=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x>0 \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \\ -1 & \text{при} \quad x<0 \end{cases}$$

Упражнения 1. Показать, что

$$\frac{d}{dx}|x|=\operatorname{sign}x$$

2. Определить производную функции $\operatorname{sign}x$. 3. Доказать, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty}(-i)N\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}=\delta(x)$$

Указание. Проинтегрировать по частям и воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Обобщенная функция $\wp\frac{1}{x}$ определяется через функционал следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$$

С произвольной функшией $f(x)$ такой интеграл называется интегралом в смысле главного значения и обозначается как

$$V\cdot p\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\equiv\wp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Часто в физике возникают следующие ситуации, когда необходимо использовать обобшенную функиию $\wp\frac{1}{x}$, аппроксимируемую функциями:

$$\wp\tfrac{1}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\tfrac{x}{x^2+\varepsilon^2}=\tfrac{1}{2\mathbf{i}}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{k}{|k|}\mathbf{e}^{-|k|\varepsilon}\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\,\mathrm{d}k$$
$$\wp\tfrac{1}{x}=\lim_{N\to\infty}\tfrac{1-\cos Nx}{x}=\lim_{N\to\infty}\int_0^N\sin kx\,\mathrm{d}k$$

Действительно, в случае (10.31) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-x}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)+$$
$$+\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\int_{-x}^{x}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x=\left(\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)$$

В случае (10.32) справедливость представления доказывается аналогично, но следует дополнительно воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Функционал (10.30) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости z по контуру C_+ или C_-, обходяшему точку $x = 0$ по полуокружности ралиуса $\varepsilon \to 0$ соответственно сверху или снизу (рис. 10.2) и вычитания или добавления полувычета iл $\varphi(0)$:

$$\left(\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_+} \frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z \mp \mathrm{i}\pi\varphi(0)$$

От интеграла по контуру в комплексной плоскости (10.33) можно перейти к интегралу по действительной оси, записав его в виде

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_\pm} \frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x\mp\mathrm{i}\varepsilon} = \left(\frac{1}{x\mp\mathrm{i}0}, \varphi(x)\right) =$$
$$= \left(\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) \pm \mathrm{i}\pi(\delta(x), \varphi(x))$$

Полученная формула (10.34) позволяет ввести еше две новые обобщенные функции Сохоцкого:

$$\frac{1}{x\pm i0} = \wp\frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x)$$

Формулы Сохоцкого могут быть также легко получены в предельном переходе дия ε -последовательностяХ:

$$\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon} = \frac{x\mp\mathrm{i}\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2} \mp \mathrm{i}\pi\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}$$

Пример Показать, что обобшенная функция $\wp\frac{1}{x}$ есть производная от $\ln|x|$. Действительно, запишем функционал:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x}, \varphi(x)\right) = (\ln|x|, \varphi'(x)) = -\int_{-\infty}^{\infty}(\ln|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Выделяя теперь ε -окрестность 0 и разбивая интеграл на три, получаем

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x|\varphi(x)|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x|>\varepsilon}\tfrac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\tfrac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\wp\tfrac{1}{x}, \varphi(x)\right)$$

Упражнение Показать, что фурье-образ функции $1/x$ можно получить из представления (10.32), и он равен

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\pi\operatorname{sign}k$$

С обобшенными функциями Сохоцкого можно связать еще две функции, имеюшие большое применение в физике:

$$\delta_\pm(x) = \pm\frac{i}{2\pi}\frac{1}{x\pm i0}$$

Обобщенные функции (10.36) получаются в ε -последовательностях

$$\delta_\pm(x) = \pm\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon k\pm\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

Функшии δ_+ облалают полезными свойствами:

$$\delta_+(x) + \delta_-(x) = \delta_(x)$$
$$\delta_+(x) - \delta_-(x) = \tfrac{i}{\pi}\wp\tfrac{1}{x}$$

свойства обобщенных функций

Умножсение обобшенных функший может быть опрелелено либо как предел произведения ε -представлений, либо как функционал. Во втором случае, если f и g - две обобшенные функнии. то произведение их определяется как:

$$(g \cdot f, \varphi) = (g, f\varphi)$$

видно, что одна из функций (в данном случае f) должна быть достаточно «хрошей», чтобы имеюшаяся сингулярность функшии g не превысипа ционал, так и вычисляя производную какого-либо ε-прелставления Трехмерная функция $\delta(\mathbf{r})$ опрелеляется как

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{ikr}}\mathrm{d}^3\mathbf{k}$$

где интегрирование совершается по всему k-пространству. Соответственно, основное свойство (10.1) теперь принимает вил

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\delta(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = f(0)$$

где интегрирование выполняется по некоторой области. включаюшшей точКу $\mathbf{r} = 0$.

Если функция $f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = f(r)$ и при этом регулярна в нуле, свойсгво (10.41) можно переписать как

$$\int \delta(\mathbf{r})f(r)\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int f(r)r^2\,\mathrm{d}r\int \delta(\mathbf{r})\mathrm{d}\Omega = f(0)$$

Выражение (10.42) позволяет ввести «радиальную ф функцию $\delta(r)$:

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi}\frac{\delta(r)}{r^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\delta'(r)}{r}$$

δ -функции в нуле. При этом данная операция вполне допустима, посколь- ку элемент объема содержит r^2. Множитель $1/2\pi$ учитыгает что интегпи- делить как $1/z$, но с особым выбором пути интегрирования (контура)

для каждой функции.

Действительно, это свойство вытекает из формул...

(10.24) и (10.33) и рис. 10.1 и 10.2. Заметим, что дтя δ -функции выбирается замкнутый контур, обходяший точку 0. Контуры интегрирования, даюшие различные обобшенные функшии из функции $1/z$, представлены на общем рис. 10.3.

1. Произведение двух функций $\wp\frac{1}{r}$ не определено. Действительно, согласно (10.39) можем записать:

$$\wp\frac{1}{x}\cdot\wp\frac{1}{x} = \left(\wp\frac{1}{x}, \wp\frac{1}{x}\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{M}{\varepsilon}\to\infty.$$

2. Вместе с тем определена производная от функции $\wp$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = -\left(\wp\frac{1}{x}, \varphi'(x)\right) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(x)+\varphi'(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Если воспользоваться ε -представлением. получаем

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}\right)_{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{x^{2}+\varepsilon^{2}}=-\frac{x^{2}-\varepsilon^{2}}{\left(x^{2}+\varepsilon^{2}\right)^{2}}$$

3. Покажем, что

$$\wp\frac{1}{x}\cdot\delta(x)=-\frac{1}{2}\delta'(x)$$

Действительно, воспользуемся ε -прелставлениями обеих функтий:

$$\begin{gathered}\left(\wp\tfrac{1}{x}\right)_{\varepsilon}=\tfrac{x}{x^{2}+\varepsilon^{2}}\\ \delta_{\varepsilon}(x)=\tfrac{\varepsilon}{\pi(x^{2}+\varepsilon^{2})},\quad \delta_{\varepsilon}'(x)=-\tfrac{2\varepsilon x}{\pi(x^{2}+\varepsilon^{2})}\end{gathered}$$

результат (10.44). 4. Можно так же показать, что не опрелелено произвеление лвухх δ -функций, имеюших одинаковый аргумент. 5. Так же как и во втором примере, используя ε -прелставления можно показать, что

$$\left(\wp\frac{1}{x}+\pi\delta(x)\right)\left(\wp\frac{1}{x}-\pi\delta(x)\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}$$

6. Определено произведение двух функший Сохошкого:

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}0}\cdot\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\mathrm{i}\pi\delta'(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}$$

У пражнения 1. Показать, что в смысле обобшенных функший

$$\int_{0}^{\infty}\sin k_{1}x\cos kx\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+k_{1}}-\frac{1}{k-k_{1}}\right)$$

2. Показать, что при $a\neq b$ произведение

$$\delta(x-a)\delta(x-b)=0$$

3. Доказать формулу:

$$\delta(ax+by)\delta(cx+dy)=\det\left(\begin{array}{cc}a&b\\c&d\end{array}\right)^{-1}\delta(x)\delta(y)$$

D дополнительный функции

чисто основы и применения их, полный анализ в матане

D.0.1 бесселя

D.0.2 полиномы эрмита

,

E Литература

[1] Константинов Р. В. *Лекции по математической физике.*

[2] В. С. Владимиров, А. А. Вашарин, Х.Х. Каримова, В.П. Михайлов, Ю.В. Сидоров, and М.И. Шабунин. *Сборник задач по уравнениям математической физики.* 2001.

[3] МО Катанаев. Геометрические методы в математической физике: E-print. *arXiv preprint arXiv:1311.0733*, 2016.

[4] А Мышкис. *Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы.* Litres, 2018.

[5] Самарова С. С. *Семинары по математической физике в мфти.*

[6] В.А. Шмидт. *Релятивистские поля и струны.* 2021.