Теория вероятностей

Юрий Голубев *

19 октября 2023 г.

Запись не предназначена для распространения.

Обсуждается теория вероятностей, а также некоторые отдельные методы: диаграммные техники, теория случайных процессов, статистика, программирование, указываются приложения.

Цели:

1) тренируюсь на задачах, дорабатываю под них структуру.

2) разбираю кучу мелочей, кучу методичек и всех мелких вопросов, их полным полно, на недели 2 как минимум

Содержание

*yura.winter@gmail.com

1 Предисловие

Приведем соображения о подходе к теории вероятностей.

1.1 Основная мотивация

1.2 Головоломки теории вероятностей для мотивации

Фокус с угадыванием конечного полученного числа в последовательности

(впишу, по сути то, что Маес показал. а почему так? вот - чтобы ответить, мотивация к изучению теорвера)

(сам пока не знаю, почему)

Часть I
Теория вероятностей в двух словах

2 Основные методы теории вероятностей

2.1 Самое важное в теории вероятностей

2.1.1 О комбинаторных методах в задачах о вероятности

Перестановки, сочетания, размещения

Число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$:

$$P_n = n!$$

Доказывается по индукции, используя $P_k = kP_{k-1}$. (?? не актуально пока про это думать.)

2.1.2 Основные темы теории вероятностей в двух словах (???)

Вероятностное пространство и вероятность

Определение пространства элементарных событий и события Исходным объектом вероятностной модели является пространство элементарных событий. Его принято обозначать прописной греческой буквой Ω, произвольную точку этого пространства называют элементарным событием и обозначают строчной буквой $\omega : \omega \in \Omega$.

алгебра и события (пока хз)

(тут пара слов про алгебру, начинаем использовать ее понятия и язык, а подробно со всеми свойствами - в следующей главе, там с алгебры и всяких в деталяъ свойств все вообще и будет начинаться)

вот наши аксиомы

вот наше вероятностное пространство.

Ω **Пространство элементарных событий** Основными понятиями теории вероятностей являются вероятностное пространство и событие.

Исходным объектом вероятностной модели является пространство элементарных событий, которое принято обозначать прописной греческой буквой Ω. Любой элемент этого пространства называют элементарным событием и обозначают строчной буквой $\omega : \omega \in \Omega$.

Если считать, что мы строим вероятностную модель конкретного случайного явления, то пространство элементарных событий Ω можно представлять себе как множество всех возможных реализаций ω этого явления.

Пространство элементарных событий для одной и той же задачи можно выбирать разными способами. (?? поч??) Например, в качестве пространства элементарных событий в модели бросания игрального кубика можно выбрать $\Omega = [0, 1)$ и считать, что выпадает k очков, если $\omega \in \left[\frac{k-1}{6}, \frac{k}{6}\right)$.

Общий алгоритм решения вероятностных задач (??!!!) Удачный выбор пространства элементарных событий может упростить решение задачи.

Следующий шаг в построении вероятностного пространства состоит в выделении из множества всех подмножеств Ω некоторой совокупности $\mathcal{F}$ подмножеств, которые далее будут называться событиями. Каждому событию сопоставляется число из отрезка $[0, 1]$, которое называют вероятностью события. Множество событий должно быть замкнуто относительно простейших теоретико-множественных операций: объединения, пересечения и дополнения, а вероятности событий удовлетворять некоторым естественным условиям.

Понятия теории множеств В теории вероятностей принята следующая множественная терминология.

Суммой множеств событий A и B называется их объединение $A \cup B$.

пересечение $A \cap B-$ произведением, Для сокращения длины формул часто вместо $A \cap B$ пишут просто AB. (!!!)

дополнение $A^c = \bar{A} = \Omega \backslash A-$ противоположсным событием.

Если A и B - события, то говорят, что при каждом $\omega \in A \cap B$ события A и B происходят одновременно.

Если $A \cap B = \varnothing$, то события A и B называют несовместными.

Если $A \subseteq B$, то говорят, что событие A влечет событие B.

Наиболее используемые свойства $\cup$ и $\cap$ (???) (потом оставлю именно такие)

Операции $\cup$ и $\cap$ коммутативны, ассоциативны и транзитивны: для любых подмножеств $A, B, C \subseteq \Omega$

$$\begin{aligned} AB &= BA, & A \cup B &= B \cup A \\ (AB)C &= A(BC), & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ A(B \cup C) &= AB \cup AC, & A \cup (BC) &= (A \cup B)(A \cup C) \end{aligned}$$

Также: (???)

$$\begin{aligned} \text{если } A \subset B, &\text{ то } \bar{B} \subset \bar{A} \\ \overline{AB} &= \bar{A} \cup \bar{B}, \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}, \\ A \cup B &= A \cup (\bar{A} \cap B), \\ A \backslash B &= A \backslash (A \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\overline{\bigcap_{k \geqslant 1} A_k} = \bigcup_{k \geqslant 1} \overline{A_k}, \quad \bigcup_{k \geqslant 1} A_k = \bigcap_{k \geqslant 1} \overline{A_k}$$

Алгебра множеств Совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется алгеброй множеств, если выполнены следующие условия:

1) $\varnothing \in \mathcal{A}, \quad \Omega \in \mathcal{A}$

2) если $A \in \mathcal{A}$, то и $\Omega \backslash A = A^c \in \mathcal{A}$;

3) если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$ и $A \cap B \in \mathcal{A}$.

В условия 1) и 3) вторые части являются следствиями первых и условия 2).

Примеры алгебр множеств:

а) совокупность всех подмножеств конечного множества Ω,

б) совокупность всех конечных объединений содержащихся в $(0, 1]$ замкнутых справа полуинтервалов.

В алгебре множеств можно (разными способами) выделять конечную или бесконечную совокупность «элементарных» множеств, из которых операциями объединения, пересечения и взятия дополнения можно получить все множества, составляющие алгебру.

Говорят, что такая совокупность подмножеств порождает алгебру множеств.

σ-алгебра Алгебра $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется σ-алгеброй, если для любой конечной или счетной совокупности множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$

$$\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F} \quad \text{и} \quad \bigcap_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F}$$

Множество всех подмножеств Ω, очевидно, является и алгеброй, и σ-алгеброй. Его выбирают в качестве множества событий $\mathcal{F}$, если пространство элементарных событий Ω конечно или счетно.

Пусть $\mathcal{F}_k, k \in K, -$ конечная или бесконечная совокупность алгебр (или $\sigma-$ алгебр) подмножеств множества Ω.

Пересечением алгебр (соответственно, σ-алгебр) $\mathcal{F}_k, k \in K$, называется совокупность всех таких подмножеств $A \subseteq \Omega$, что $A \in \mathcal{F}_k$ при любом $k \in K$.

(??) объединение алгебр может не быть алгеброй, в отличие от пересечений Задача: проверить, что пересечение алгебр (σ-алгебр) является алгеброй ($\sigma-$ алгеброй) и что обычное теоретико-множественное объединение алгебр (σ-алгебр) может не быть алгеброй (σ-алгеброй).

(хз, как проверить, потом сделаю это)

Борелевская σ-алгебра Определение. Пусть $M-$ совокупность подмножеств множества Ω.

Пересечение всех алгебр подмножеств множества Ω, которые содержат M, называется наименьшей алгеброй, порожденной M. Пересечение всех σ-алгебр подмножеств множества Ω, которые содержат M, называется наименьшей σ-алгеброй, или борелевской σ-алгеброй, порожденной M.

Мера и типичные её свойства (всё, что про неё нужно, в один пар-ф сюда сношу)

Определение. Пусть $\mathcal{F}-$ алгебра или σ-алгебра подмножеств Ω.

Функция $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ называется мерой, если она аддитивна, т.е. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых таких $A, B \in \mathcal{F}$, что $A \cap B = \varnothing$.

Мера μ называется c сётно-аддитивной, если $\mu\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right)$ для любой последовательности попарно не пересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

Свойства вероятности

(вкратце об основных свойствах)

2.1.3 О решении задач про случайные величины

Алгоритм определения составной случайной величины по известным распределениям ее частей

2.1.4 О доказательстве неравенств (!?!?!?!??!?!)

(очень распространенные задачи)

2.2 О формализме и теоремах теории вероятностей (????)

(по идее тут детали и суть основы теории, что тоже часто может понадобиться.)

2.3 О других разделах теории вероятностей

2.3.1 О Марковских цепях и следствиях

О Марковских цепях с непрерывным временем

Вводим (??)

Основное - управляющее уравнение

$$\vec{\pi}(n+1) = \hat{P} \cdot \vec{\pi}(n).$$

Чаще всего известно распределение вероятностей в начальный момент времени $\vec{\pi}(0)$, тогда

$$\vec{\pi}(n) = \hat{P}^n \cdot \vec{\pi}(0).$$

Отсюда

$$\pi_1(n) = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n \pi_1(0) - \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n \pi_2(0)$$
$$\pi_2(n) = \frac{p}{p+q} - \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n \pi_1(0) + \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n \pi_2(0).$$

Это потому что мы представляем матрицу в виде $\hat{P} = \hat{Q}\hat{D}\hat{Q}^{-1}$, где $\hat{D}$ - диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы $\hat{P}, \hat{Q}$ - матрица, составленная из собственных столбцов матрицы $\hat{P}$. Решая уравнение $\det(\hat{P} - \lambda \hat{I}) = 0$ находим пару собственных чисел $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1-p-q$, которым соответствуют собственные столбцы $\vec{a}_1 = (1/p, 1/q)^T$, $\vec{a}_2 = (1,-1)^T$, по определению удовлетворяющие условию $\hat{P}\vec{a} = \lambda\vec{a}$. Используя эти результаты, запишем

$$\hat{P}^n = \hat{Q}\hat{D}^n\hat{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 1 \\ \frac{1}{q} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \frac{pq}{p+q} & \frac{pq}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} & -\frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n & \frac{q}{p+q} - \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n \\ \frac{p}{p+q} - \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n & \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n \end{pmatrix}$$

О Марковских цепях с дискретным временем

О марковских цепях в последовательностях случайных событий

(чисто для задач теорвера подготовка)

О других приложениях марковских цепей

(их много, потом укажу)

О Марковских цепях в кинетике

О марковских цепях в системах массового обслуживания (??)

О другом про марковские цепи

(наверняка там многое еще есть.)

2.3.2 О задач случайных процессов (!?!?)

Обзор методов случайных процессов

Решения через усреднения (так у Белана домашка и делалась)

Решения через управляющее уравнение Маркова Такую модель можно составить.

Решения через интеграл по траекториям К нему не сложно прийти, а потом мб что-то можно с ним сделать.

(потом разберусь с этим методом.)

Часть II
Основы теории вероятностей

Приведем подробную теорию вероятностей на необходимом уровне строгости.

3 Основы теории вероятностей

Остановимся на концепциях, которые будем дальше использовать.
(все строго в рамках приложений к теории вероятностей)

3.1 Основы теории множеств и теории меры

3.1.1 Теория множеств для теории вероятностей (??)

(тут куча всего, что мало нужно, однако этим занимаются при изучении теорвера)
Обсудим формализм теории множеств.

применение теории множеств для теории вероятностей

Построение теоретико-множественной модели теории вероятностей связано с введением пространства Ω элементарных событий, называемых исходами. В результате каждого проведения случайного эксперимента может наблюдаться только один элементарный исход ω, при этом любое событие A ассоциируется с некоторым наборов исходов, то есть подмножеством в Ω. Например, Ω также рассматривается как событие, его называют достоверным событием, поскольку оно происходит всегда, а $\emptyset$ связывают с невозможным событием.

Теоретико множественные операции и отношения соответствуют логическим операциям над событиями. Если $A \in B$, то это означает, что наступление события A влечет наступление события B. Событие $\overline{A} = \Omega \backslash A$ называется отрицанием события A.

Объединению $A \bigcup B$ соответствует событие, которое происходит в случае, когда произошло A или B.

Пересечению $A \bigcap B \equiv AB$ соответствует событие, которое происходит лишь в случае, когда происходят одновременно и A и B. Аналогичный смысл имеют объединение и пересечение любого числа событий.

Разность $A\ B$означает событие, когда A произошло, но B не произошло.

Далее вероятность будет определена как мера на множествах событий, поэтому научимся работать с множествами, после - с мерой, а потом займемся теорией вероятностей.

Типичные операции над множествами

Приведем свойства операций над множествами, которые часто используются. Все эти свойства легко понять с помощью кругов Эйлера.

Операции объединения и пересечения множеств обладают свойством дистрибутивности:

$$A \bigcap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} (AB_i)\,, \quad A \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} \left(A \bigcup B_i \right)$$

Для дополнений выполняются правила де Моргана:

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

пределы множеств (????)

Пределы множеств определяются так:

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n} A_k, \quad A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geqslant n} A_k$$

Если $A_1, A_2, ...$ интерпретировать как события, то верхний предел A^* выражает то, что произошло бесконечно много событий последовательности, а нижний предел A_* соответствует тому, что произошли все события последовательности, за исключением, быть может, конечного числа.

В случае $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ последовательность $\{A_n\}$ называется монотонно возрастающей и тогда $A^* = A_* = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Аналогично, в случае $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ последовательность $\{A_n\}$ называется монотонно убывающей и $A^* = A_* = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. В общем случае последовательность $\{A_n\}$ называется сходящейся, если $A^* = A_*$

Типы множеств

Часто используются другие понятия теории множеств, с которыми тут познакомимся.

Определение 3.1. *Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X называется дизъюнктным, если элементы $\mathcal{F}$ попарно не пересекаются, то есть для любых $A, B \in \mathcal{F}$ из $A \cap B \neq \varnothing$ следует $A = B$*

(тут много дополнять нужно)

Алгебры множеств

(потом к каждому определению пояснения добавлю)

Определим понятия теории множеств, с которым будем далее работать.

Обзор понятий теории множеств (позже напишу общую картину всего, пока не усвоено это)

кольца

Определение 3.2. *кольцом называется семейство $\mathcal{R}$ подмножеств множества X (подмножеств), если*

(??)

1 . $\varnothing \in \mathcal{R}$

2. $\forall A, B \in \mathcal{R}$ подмножества $A \cup B, A \cap B$ и $A \backslash B \in \mathcal{R}$.

(оно нужно?)

Алгебра множеств Кольцо расширяется до алгебры множеств.

Определение 3.3. *(алгебра множеств) Алгеброй множеств называется множество $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, если $\Omega \in \mathcal{A}$ и оно замкнуто относительно операций объединения, пересечения и взятия дополнения.*

Примером кольца подмножеств R, не являющегося алгеброй, является семейство всех ограниченных подмножеств R. (?)

Чтобы понять, алгебра ли данная система подмножеств, иногда более удобно использовать эквивалентное определение:

Лемма 1. *Множество $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется алгеброй множеств, если выполняются*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) Если $A \in \mathcal{A}$, *то* $\bar{A} \in \mathcal{A}$

(iii) Если $A, B \in \mathcal{A}$, *то* $A \cup B \in \mathcal{A}$

Заметим, что здесь нужно объединять только конечных множеств.

Доказательство (пока что скопированный текст из горяйного, потом пересмотрю) Нам нужно показать, что A замкнуто относительно всех теоретико множественных операций.

Из условий (ii) и (iii) следует, что класс A замкнут относительно операции взятия дополнения и объединения. Остается показать, что класс A также замкнут относительно операции пересечения.

Пусть A и B из A . Тогда в силу условия (ii) дополнения A, B принадлежат A . Представление

$\mathcal{A}$ Замкнут относительно operaпии взятия дополнения и объединения. Остает- Пусть A и B из $\mathcal{A}$.

Тогда в силу условия (ii) доолнения $\bar{A}, \bar{B}$ принадлежат

$$AB = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$$

Часто мы работаем не с конечным пересечением, а со счетным, в этом случае говорят о сигма-алгебре.

Определение 3.4. *σ-алгебра (сигма алгебра) - алгебра, в которой любое конечное или счетное семейство подмножеств даст также элемент из этой алгебры:*

$$\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F} \quad и \quad \bigcap_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F}$$

Например, для страховой компании можно посчитать вероятность того, что она никогда не разорится, придумав какую-то вероятностную модель в рамках которой эта компания работает. Введем событие "один компания не разорится никогда, событие "два разорится завтра, "три послезавтра, т.д. В итоге у нас имеется счетное число событий, и их объединение должно быть достоверным событием, для таких задач используется σ-алгебра.

(пример, где алгебра не сигма алгебра - ну я хз вообще, пока забьем, но вообще для понимания важно было бы понять это)

утв: на конечном множестве алгебра то же самое что и сигма алгебра. (???)

Алгебр и сигма-алгебр может быть много, а мы хотим создавать простейшие. Для этого нам понадобятся борелевские сигма-алгебры.

Определение 3.5. *Борелевская σ-алгебра, порожденной M - совокупностью подмножеств множества Ω - это пересечение всех алгебр подмножеств множества Ω, которые содержат M.*

Также она называется наименьшей алгеброй, порожденной M.

ну и самое интересное - примеры.

Определение 3.6. *события - подмножества в борелевской сигма алгебре* в общем, это все просто сильные слова, на самом деле за ними нет ничего кроме как понимание, что мы можем делать с этими элементами, ну в точности то же, что и подсказывает нам интуиция.

вывод можно сделать только такой, что типа по сути все - подмножества и все типа.

по сути это только введение.

ну и здесь есть оффтоп - связь с теорией меры, позже обязательно свяжу, сейчас нет возможности.

как измеримость и работы лебега в этом всем находятся?

разбиения (зачем вообще они???)

В множестве можно выделять подмножества. Если они покрывают все множество, то это очень хорошо и это называется разбиением.

Определение 3.7. *(Разбиения)*

Совокупность событий $D = D_1, ..., D_n$ будем называть разбиением, если $DiDj = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^{n} D_i = W$. Множества D_i называются в этом случае атомами разбиения D.

Таким образом, разбиения для теории вероятностей

Определение 3.8. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство. Систему событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ называют разбиением пространства Ω, если эти события попарно несовместны, а их объединение совпадает с Ω :*

$$A_1 \bigcap A_j = \varnothing (1 \leqslant i < j), \quad A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots = \Omega$$

Справедливо и обратное утверждение. Теорема. Каждая конечная алгебра множеств порождается конечным разбиением.

Доказательство (скопировано, пока что пофиг)

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}-$ конечная алгебра подмножеств Ω. Для каждого $\omega \in \Omega$ ПОЛОжим

$$A_\omega = \bigcap_{\{A \in \mathcal{F} : \omega \in A\}} A$$

Покажем, что совокупность Γ всех попарно различных множеств A_ω образует разбиение Ω, порождающее алгебру $\mathcal{F}$, т. е. что

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega = \Omega$$

если $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, То A_{ω_1} и A_{ω_2} Либо совпадают, либо не пересекаются,

Равенство (9) очевидно, так как по определению $\omega \in A_\omega$ для каждого $\omega \in \Omega$ и совокупность $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ отличается от Γ лишь повторами элементов.

Для доказательства утверждения (10) заметим, что при любых $\omega \in \Omega$ и $B \in \mathcal{F}$

$$\omega \in B \Rightarrow A_\omega \subseteq B$$

Покажем, что если $A_\omega \cap A_\kappa \neq \varnothing$, то $A_\omega = A_\kappa$ Пусть $\beta \in A_\omega \cap A_\kappa$. В силу (12) тогда

$$A_\beta \subseteq A_\omega \text{ и } A_\beta \subseteq A_\kappa$$

Допустим, что $\omega \notin A_\beta$. Тогда $\omega \in A_\omega \backslash A_\beta$ и в силу (12)

$$A_\omega \subseteq A_\omega \backslash A_\beta \subset A_\omega \backslash \{\beta\}$$

что невозможно, так как $\beta \in A_\omega$; Значит, $A_\beta \cap A_\omega \neq \varnothing$. Следовательно, $\omega \in A_\beta$. Но тогда $A_\omega \subseteq A_\beta$ в силу (12), а отсюда и из (13) вытекает, что $A_\omega = A_\beta$ Так же доказывается, что $A_\kappa = A_\beta$. Тем самым (10) доказано. Из (9) и (10) следует, что совокупность Γ образует разбиение Ω. Это разбиение конечно, так как алгебра $\mathcal{F}$ конечна и любое $A_\omega \in \mathcal{F}$. Из (12) следует, что $\omega \in A_\omega \subseteq B$ для любых $\omega \in B, B \in \mathcal{F}$, поэтому

$$B = \bigcup_{\omega \in B} \omega \subseteq \bigcup_{\omega \in B} A_\omega, \quad \bigcup_{\omega \in B} A_\omega \supseteq B \Rightarrow B = \bigcup_{\omega \in B} A_\omega$$

т. е. конечное разбиение Γ порождает алгебру $\mathcal{F}$. Теорема доказана.

независимые алгебры и разбиения

Определение 3.9. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *- вероятностное пространство. Независимыми разбиения*

$$\{A_{11}, A_{12}, \ldots\}, \{A_{21}, A_{22}, \ldots\}, \ldots, \{A_{m1}, A_{m2}, \ldots\}$$

пространства Ω *на множества* $A_{ij} \in \mathcal{F}$ *являются тогда, когда*

$$\mathbf{P}(A_{1i_1} \cap A_{2i_1} \cap \ldots \cap A_{mi_m}) = \mathbf{P}(A_{1i_1}) \mathbf{P}(A_{2i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{mi_m})$$

для любых допустимых значений $i_1, \ldots, i_m \geqslant 1$.

Определение 3.10. *Независимыми алгебры или* σ*-алгебры событий* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}$ *являются тогда, когда*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_m) = \mathbf{P}(A_1) \ldots \mathbf{P}(A_m)$$

для любых событий $A_k \in \mathcal{F}_k, \quad k = 1, \ldots, m$

(и еще тут теорему зубкова про все это. хз, нужна ли она??)

Основы теории меры

(только основные следствия теории меры, которые будем дальше использовать)

Определение 3.11. *(*

определение *меры по Гусеву)*

Определение 3.12.

Определение 3.13.

вероятностные меры (отдельно теория меры для вероятностных мер)
Для теории вероятностей определяют на алгебрах событий меру.

Определение 3.14. *Мера* μ *на* σ*-алгебре* F *подмножеств* Ω *называется вероятностной, если все ее значения лежат в отрезке [0, 1] и* $\mu(\Omega) = 1$

здесь пара заметок из тем гусева, очень даже нужны они тут, чтобы понимать, что и зачем мы сделали?
(а также из карасевника пара выписок)
посмотрим на свойства вероятностых мер

Теорема Теорема Каратеодори.

Если на алгебре А подмножеств пространства Ω определена вероятностная мера μ, обладающая свойством счетной аддитивности, то эту меру можно продолжить на наименьшую σ-алгебру $F = \sigma(A)$, порожденную алгеброй А с сохранением свойства счетной аддитивности.

(????)

продолжения мер (зачем они???)

Независимость разбиений, алгебр и σ-алгебр

Суть

О случаях применения

Теория Определение. Пусть $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}, \gamma_k \subseteq \Omega, k = 1, 2, \ldots -$ совокупность подмножеств Ω. Наименьшая алгебра (σ-алгебра) множеств $\mathcal{F}(\gamma)$, содержащая γ, называется алеброй (σ-алгеброй), порожденной γ.

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство. Систему событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ будем называть разбиением пространства Ω, если эти события попарно несовместны, а их объединение совпадает с Ω :

$$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j), \quad \bigcup_{n \geqslant 1} A_n = \Omega$$

Разбиения называют еще полными системами несовместных событий. Замечание. Если $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} -$ конечное разбиение Ω, то алгебра $\mathcal{F}(\gamma)$ порожденная разбиением γ, является конечной и состоит из пустого множества $\varnothing$ и всех множеств вида

$$\gamma_{i_1} \cup \gamma_{i_2} \cup \ldots \cup \gamma_{i_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$$

Из этого замечания следует, что если в разбиении $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ все n множсеств не пустые, то $\mathcal{F}(\gamma)$ состоит из 2^n элементов. Справедливо и обратное утверждение. Теорема. Каждая конечная алгебра множеств порождается конечным разбиением.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}-$ конечная алгебра подмножеств Ω. Для каждого $\omega \in \Omega$ положим

$$A_\omega = \bigcap_{\{A \in \mathcal{F}: \omega \in A\}} A$$

Покажем, что совокупность Γ всех попарно различных множеств A_ω образует разбиение Ω, порождающее алгебру $\mathcal{F}$, т. е. что

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega = \Omega$$

если $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, то A_{ω_1} и A_{ω_2} либо совпадают, либо не пересекаются, любое множество $B \in \mathcal{F}$ можно представить в виде $B = \cup_{\omega \in B} A_\omega$.

Равенство (9) очевидно, так как по определению $\omega \in A_\omega$ для каждого $\omega \in \Omega$ и совокупность $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ отличается от Γ лишь повторами элементов.

Для доказательства утверждения (10) заметим, что при любых $\omega \in \Omega$ и $B \in \mathcal{F}$

$$\omega \in B \Rightarrow A_\omega \subseteq B$$

Покажем, что если $A_\omega \cap A_\kappa \neq \varnothing$, то $A_\omega = A_\kappa$. Пусть $\beta \in A_\omega \cap A_\kappa$.В силу (12) тогда

$$A_\beta \subseteq A_\omega \text{ и } A_\beta \subseteq A_\kappa$$

Допустим, что $\omega \notin A_\beta$. Тогда $\omega \in A_\omega \backslash A_\beta$ и в силу (12)

$$A_\omega \subseteq A_\omega \backslash A_\beta \subset A_\omega \backslash \{\beta\}$$

что невозможно, так как $\beta \in A_\omega$; значит, $A_\beta \cap A_\omega \neq \varnothing$. Следовательно, $\omega \in A_\beta$. Но тогда $A_\omega \subseteq A_\beta$ в силу (12), а отсюда и из (13) вытекает, что $A_\omega = A_\beta$. Так же доказывается, что $A_\kappa = A_\beta$. Тем самым (10) доказано. Из (9) и (10) следует, что совокупность Γ образует разбиение Ω. Это разбиение конечно, так как алгебра $\mathcal{F}$ конечна и любое $A_\omega \in \mathcal{F}$. Из (12) следует, что $\omega \in A_\omega \subseteq B$ для любых $\omega \in B, B \in \mathcal{F}$, поэтому

$$B = \bigcup_{\omega \in B} \omega \subseteq \bigcup_{\omega \in B} A_\omega, \quad \bigcup_{\omega \in B} A_\omega \supseteq B \Rightarrow B = \bigcup_{\omega \in B} A_\omega$$

т. е. конечное разбиение Γ порождает алгебру $\mathcal{F}$. Теорема доказана.

Задача. Доказать, что если пространство элементарных событий Ω счетно, то любая σ-алгебра его подмножеств порождается некоторым разбиением. Задача. Может ли бесконечная σ-алгебра быть счетным множеством? Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство. Разбиения

$$\{A_{11}, A_{12}, \ldots\}, \{A_{21}, A_{22}, \ldots\}, \ldots, \{A_{m1}, A_{m2}, \ldots\}$$

пространства Ω на множества $A_{ij} \in \mathcal{F}$ называются независимыли , если

$$\mathbf{P}\left(A_{1i_1} \cap A_{2i_1} \cap \ldots \cap A_{mi_m}\right) = \mathbf{P}\left(A_{1i_1}\right) \mathbf{P}\left(A_{2i_2}\right) \ldots \mathbf{P}\left(A_{mi_m}\right)$$

для любых допустимых значений $i_1, \ldots, i_m \geqslant 1$. Алгебры или σ-алгебры событий $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}$ называются независимыми, если

$$\mathbf{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_m\right) = \mathbf{P}\left(A_1\right) \ldots \mathbf{P}\left(A_m\right)$$

для любых событий $A_k \in \mathcal{F}_k, k = 1, \ldots, m$. Теорема. Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство и σ-алгебры $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}$ порождаются конечными или счетными разбиениями Ω, то $\sigma-$ алгебры $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ независимы тогда и толъко тогда, когда независимы порожсдагощие их разбиения.

Доказательство. Если σ-алгебры $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ независимы, то порождающие их разбиения тоже независимы, поскольку элементы разбиений принадлежат алгебрам. Пусть теперь независимы разбиения

$$\{A_{11}, A_{12}, \ldots\}, \{A_{21}, A_{22}, \ldots\}, \ldots, \{A_{m1}, A_{m2}, \ldots\}$$

порождающие σ-алгебры $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$, и $B_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, B_m \in \mathcal{F}_m$. Покажем, что $\mathbf{P}\left(B_1 B_2 \ldots B_m\right) = \mathbf{P}\left(B_1\right) \mathbf{P}\left(B_2\right) \ldots \mathbf{P}\left(B_m\right)$. Действительно, так как σ-алгебра $\mathcal{F}_k$ порождается разбиением $\{A_{k1}, A_{k2}, \ldots\}$, то каждому событию $B_k \in \mathcal{F}_k$ соответствует такое множество натуральных чисел $\{i_k(1), i_k(2), \ldots\}$, что

$$B_k = \bigsqcup_{v \geqslant 1} A_{k i_k(v)}, \quad k = 1, \ldots, m$$

Тогда

$$B_1 B_2 \ldots B_m = \bigcap_{k=1}^{m} \left(\bigsqcup_{v \geqslant 1} A_{k i_k(v)}\right) = \bigsqcup_{v_1 \geqslant 1} \cdots \bigsqcup_{v_m \geqslant 1} A_{1 i_1(v_1)} \ldots A_{m i_m(v_m)}$$

поскольку пересечения элементов разбиений в правой части попарно не пересекаются: если $(v_1, \ldots, v_m) \neq (u_1, \ldots, u_m)$, то существует $k \in \{1, \ldots, m\}$, при котором $v_k \neq u_k$; тогда $A_{ki_k(v_k)} \bigcap A_{ki_k(u_k)} = \varnothing$ и

$$\left(A_{1i_1(v_1)} \ldots A_{mi_m(v_m)}\right) \cap \left(A_{1i_1(u_1)} \ldots A_{mi_m(u_m)}\right) \subseteq \left(A_{ki_k(v_k)} \cap A_{ki_k(u_k)}\right) = \varnothing$$

Так как вероятность объединения несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, а разбиения $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ независимы, то

$$\mathbf{P}\left\{B_1 B_2 \ldots B_m\right\} = \sum_{v_1 \geqslant 1} \ldots \sum_{v_m \geqslant 1} \mathbf{P}\left\{A_{1i_1(v_1)} \ldots A_{mi_m(v_m)}\right\} =$$

$$= \sum_{v_1 \geqslant 1} \ldots \sum_{v_m \geqslant 1} \mathbf{P}\left\{A_{1i_1(v_1)}\right\} \ldots \mathbf{P}\left\{A_{mi_m(v_m)}\right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{v \geqslant 1} \mathbf{P}\left\{A_{ki_k(v)}\right\} \right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left\{B_k\right\}$$

Теорема доказана.

3.1.2 Исчисление событий (!?!?!)

(очень важный раздел!)

Определения

Случайное событие A, связанное с опытом S, – это такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта S, причём заранее, до проведения опыта, неизвестно, произойдёт оно или нет. Всюду в дальнейшем при рассмотрении случайных событий мы будем опускать слово «случайное». Достоверным событием, съязанным с опытом S, называется такое событие Ω, которое обязательно произойдёт в результате опыта S. Невозможным событием, связанным с опытом S, называется такое событие $\varnothing$, которое обязательно не произойдёт в результате опыта S.

Над событиями A и B, связанными с одним и тем же опытом S, определены следующие операции.

Событие А влечёт за собой событие B (или событие А Вложено в событие В), если каждое появление события A сопровождается появлением события B. Это обозначается как $A \subseteq B$. События A и B называют эквивалентными, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Эквивалентность обозначается как $A = B$. Объединением (или суммой) событий A и B называется событие $A \cup B$ (или $A + B$), которое наступает всегда, когда наступает либо событие A, либо событие B.

Пересечением (или произведением) событий A и B называется событие $A \cap B$ (или AB), которое наступает всегда, когда события A и B наступают одновременно.

Дополнением события B до события A (или разностью событий A и B) называется событие $A \backslash B$, которое наступает всегда, когда наступает событие A, и при этом не наступает событие B. Противоположным событию A называется событие $\bar{A} = \Omega \backslash A$ (читается «не A), которое наступает всегда, когда событие A не наступает.

События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$, т. е. если в результате опыта события A и B не могут наступить одновременно.

Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, если они попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing, \quad i \neq j$) и их объединение эквивалентно достоверному событию ($H_1 \cup H_2 \cup \cup \cdots \cup H_n = \Omega$)

Случайное событие ω, связанное с опытом S, которое невозможно представить как объединение или пересечение более простых событий, связанных с тем же опытом, называется эдементарным событием. Очевидно, достоверное событие $\Omega = \{\omega\}-$ это множество всех элементарных со- бытий (поэтому Ω называют ещё пространством эяементарных событий), а невозможное событие $\varnothing-$ это пустое множество. Любое событие, связанное с опытом S, можно представить как некоторое подмножество достоверного события Ω, т. е. как множество некоторых элементарных событИЙ.

Для наглядного представления событий, операций над событиями и отношений между ними используются диаграммы Въенна - Эйлера (рис. 1.1). На этих диаграммах достоверное событие Ω изображается в виде некоторой области на плоскости, элементарные события ω_i- точками внутри области, соответствующей Ω. При этом любому случайному событию A будет соответствовать некоторая геометрическая фигура внутри области, соответствующей Ω (рис. 1.1а). Объединение $A \cup B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих, по крайней мере, одному из событий A и B (рис. 1.1б). Пересечение $A \cap B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно обоим событиям A и B (рис. 1.1в). Дополнение $A \backslash B$ события B до события A состоит из всех элементарных событий, принадлежащих событию А и при этом не принадлежащих событию B (рис. 1.1г). Событие $\bar{A}$, противоположное событию A, состоит из всех элементарных событий, не принадлежащих событию A (рис. 1.1д). Несобместные события не имеют общих элементарных событий (рис. 1.1е). Полная группа событий представлена на рис. 1.1ж. Событие А влечёт за собой событие B, если все элементарные события, входящие в A, входят и в B (рис. 1.13). Операции над событиями обладают следующими свойствами: коммутативность объединения событий: $A \cup B = B \cup A$, ассоциативность объединения событий:

$$\begin{gathered}(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\\ A \cup A = A,\\ A \cup \bar{A} = \Omega,\end{gathered}$$

$A \cup \varnothing = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, коммутативность пересечения событий: $A \cap B = B \cap A$, ассоциативность пересечения событий: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, дистрибутивность пересечения событий относительно объединения:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$A \cap A = A$,

$$\begin{gathered}A \cap \bar{A} = \varnothing,\\ A \cap \varnothing = \varnothing,\\ A \cap \Omega = A,\\ A \backslash B = A \cap \bar{B},\\ \bar{\Omega} = \varnothing\\ \bar{\varnothing} = \Omega\end{gathered}$$

правила де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

пример несовместных случайных событий. Известно, что $A \subseteq B$. Найти: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

3.1.3 Характеристические функции множеств (!?!?!?!?)

3.2 Другие теоремы о множествах

3.2.1 Лемма Бореля-Кантелли

(зубков)

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ задана последователъность событий $\{A_1, A_2, \ldots\}$ и

$$A^* = \left\{\omega \in \Omega : \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}\left(A_n\right) = \infty\right\}$$

где $\mathbb{I}\left(A_n\right)$ - индикатор события A_n.

а) Если $\sum_{n \geq 1} \mathrm{P}\left\{A_n\right\} < \infty$, то $\mathrm{P}\left\{A^*\right\} = 0$

б) Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно независимы *и* $\sum_{n \geq 1} \mathrm{P}\left\{A_n\right\} = \infty, \mathit{mo}\, \mathrm{P}\left\{A^*\right\} = 1$

Доказательство

Пусть $\nu_T = \sum_{1 \leqslant n \leqslant T} \mathbb{I}\left(A_n\right)$ - число одновременно происходящих событий в совокупности $A_1, \ldots, A_T$. Последовательность ν_T монотонно не убывает, поэтому при каждом $\omega \in \Omega$ существует $\lim_{T \to \infty} \nu_T \stackrel{\text{def}}{=} \nu = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}\left\{A_n\right\} \leqslant \infty$ Тогда

$$\mathrm{M}\nu_T = \sum_{k=1}^{T} \mathrm{P}\left\{A_k\right\}, \quad \mathrm{M}\nu = \sum_{k \geq 1} \mathrm{P}\left\{A_k\right\} \quad \text{и} \quad A^* = \{\nu = \infty\}$$

а) Если ряд $\sum_{n \geq 1} \mathrm{P}\left\{A_n\right\}$ сходится, то $\mathrm{M}\nu < \infty$ и поэтому $\mathrm{P}\{\nu < \infty\} = 1$, т. е. $\mathrm{P}\left\{A^*\right\} = 0$ б) Покажем, что $\mathrm{D}\nu_T \leq \mathrm{M}\nu_T$. По общей формуле для дисперсии суммы случайных величин

$$\mathrm{D}\nu_T = \mathrm{D} \sum_{n=1}^{T} \mathbb{I}\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{T} \mathrm{D}\mathbb{I}\left(A_n\right) + \sum_{\substack{k,n=1 \\ k \neq n}}^{T} \operatorname{cov}\left(\mathbb{I}\left(A_k\right), \mathbb{I}\left(A_n\right)\right)$$

В силу попарной независимости событий A_n их индикаторы тоже попарно независимы, значит, $\operatorname{cov}\left(\mathbb{I}\left(A_k\right), \mathbb{I}\left(A_n\right)\right) = 0$ при $k \neq n$. Кроме того, $\mathrm{D}\mathbb{I}(A) = \mathrm{P}\{A\}(1 - \mathrm{P}\{A\}) \leqslant \mathrm{P}\{A\}$. Следовательно

$$\mathrm{D}\nu_T = \sum_{k=1}^{T} \mathrm{D}\mathbb{I}\left(A_k\right) = \sum_{k=1}^{T} \mathrm{P}\left\{A_k\right\}\left(1 - \mathrm{P}\left\{A_k\right\}\right) \leqslant \mathrm{M}\nu_T$$

Используя неравенство Чебышева и эту оценку, находим, что при любом $a < \mathrm{M}\nu_T$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left\{\nu_T < a\right\} \leqslant \mathrm{P}\left\{\left\{\nu_T < a\right\} \bigcup \left\{\nu_T > \mathrm{M}\nu_T + \left(\mathrm{M}\nu_T - a\right)\right\}\right\} = \\ &= \mathrm{P}\left\{\left|\nu_T - \mathrm{M}\nu_T\right| > \mathrm{M}\nu_T - a\right\} \leqslant \tfrac{\mathrm{D}\nu_T}{\left(\mathrm{M}\nu_T - a\right)^2} \leqslant \tfrac{\mathrm{M}\nu_T}{\left(\mathrm{M}\nu_T - a\right)^2} \end{aligned}$$

В случае б) $\nu_T \uparrow \nu$ и $\mathrm{M}\nu_T \uparrow \infty$ при $T \uparrow \infty$, значит, при любом $a < \infty$

$$\mathrm{P}\{\nu < a\} \leqslant \lim_{T \to \infty} \mathrm{P}\left\{\nu_T < a\right\} = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}\{\nu \geqslant a\} = 1 - \mathrm{P}\{\nu < a\} = 1$$

Наконец,

$$\mathrm{P}\{\nu = \infty\} = \mathrm{P}\left\{\bigcap_{a=1}^{\infty} \{\nu \geqslant a\}\right\} = 1$$

как вероятность пересечения счетной совокупности событий, вероятность каждого из которых равна 1. Лемма доказана.

О важности условия попарной независимости

Второе утверждение леммы Бореля-Кантелли без условия попарной независимости (или какого-то заменяющего его условия) может быть неверным. В качестве примера можно рассмотреть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, в которорm $\Omega=[0,1], \mathcal{F}-\sigma$ -алгебра борелевских множеств и P$-$ мера Лебега, и положить $A_k=(0, a_k], k=1,2, \ldots$ Если $a_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для любого $\omega \in[0,1]$ множество таких k, что $\omega \in A_k$, конечно, поэтому $A^*=\varnothing$ и $\mathrm{P}\{A^*\}=0$ независимо от того, сходится или расходится ряд $\sum_{k \geqslant 1} a_k$

О случаях применения (!?!?!?)

В доказательствах (???) (?? пока хз)

Лемма Бореля-Кантелли оказывается полезным инструментом при доказательстве предельных теорем для последовательностей случайных величин.

Из Леммы Б-К следует, что в одномерной цепочке если есть вероятность, что какое-то звено будет изъято, то она не будет одной линией? (???) (на статфизе говорили это, я хз, как это следует отюсда??)

3.2.2 Неравенство Колмогорова

Неравенство Колмогорова. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n-$ независимые случайные величины, которые имеют конечные математические ожидания и дисперсии, и $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Tozda

$$\mathbf{P}\left\{\max _{1 \leqslant k \leqslant n}\left|S_k-\mathbf{M} S_k\right| \geqslant x\right\} \leqslant \frac{\mathbf{D} S_n}{x^2}$$

Доказательство

Так как $S_k-\mathrm{M} S_k=\sum_{m=1}^k\left(\xi_m-\mathrm{M} \xi_m\right)$ и

$$\mathrm{M}\left(\xi_m-\mathrm{M} \xi_m\right)=0, \quad \mathrm{D}\left(\xi_m-\mathrm{M} \xi_m\right)=\mathrm{D} \xi_m$$

то без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{M} \xi_1=\ldots=\mathrm{M} \xi_n=0$, и доказывать, что при этом условии

$$\mathbf{P}\left\{\max _{1 \leqslant k \leqslant n}\left|S_k\right| \geqslant x\right\} \leqslant \frac{\mathrm{D} S_n}{x^2}$$

Введем случайную величину

$$\tau=\begin{cases}k, & \text{если } S_1^2, \ldots, S_{k-1}^2<x^2, S_k^2 \geqslant x^2 \\ n+1, & \text{если } S_1^2, \ldots, S_n^2<x^2\end{cases}$$

Так как события $\{\tau=k\}, k=1, \ldots, n+1$, попарно несовместны, то

$$S_n^2 \geqslant S_n^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{I}\{\tau=k\}$$

и в силу монотонности и аддитивности математического ожидания

$$\begin{gathered}\mathrm{D} S_n=\mathrm{M} S_n^2 \geqslant \sum_{k=1}^n \mathrm{M} S_n^2 \mathbb{I}\{\tau=k\}= \\ =\sum_{k=1}^n \mathrm{M}\left(S_k+S_n-S_k\right)^2 \mathbb{I}\{\tau=k\} \geqslant \\ \geqslant \sum_{k=1}^n \mathrm{M} S_k^2 \mathbb{I}\{\tau=k\}+2 \sum_{k=1}^n \mathrm{M} S_k\left(S_n-S_k\right) \mathbb{I}\{\tau=k\}\end{gathered}$$

(отброшенное слагаемое $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}\left(S_n - S_k\right)^2 \mathbb{I}\{\tau = k\}$ неотрицательно). Сделаем два замечания. Во-первых,

$$\mathbf{P}\left\{S_k^2 \mathbb{I}\{\tau = k\} \geqslant x^2\right\} = \mathbf{P}\left\{S_k^2 \mathbb{I}\{\tau = k\} \geqslant 0\right\} = P\{\tau = k\}$$

т. е. $\mathrm{M}S_k^2 \mathbb{I}\{\tau = k\} \geqslant x^2 \mathrm{P}\{\tau = k\}, k = 1, \ldots, n$. Во-вторых, при любом фиксированном k индикатор $\mathbb{I}\{\tau = k\}$ есть функция от $\xi_1, \ldots, \xi_k$, и поэтому разность $S_n - S_k = \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n$ не зависит от значений $\mathbb{I}\{\tau = k\}$ и S_k. Значит, при любом $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}S_k\left(S_n - S_k\right)\mathbb{I}\{\tau = k\} = \mathrm{M}S_k \mathbb{I}\{\tau = k\} \cdot \mathrm{M}\left(S_n - S_k\right) = \\ = \mathrm{M}S_k \mathbb{I}\{\tau = k\} \cdot \mathrm{M}\left(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n\right) = 0 \end{aligned}$$

Объединяя эти замечания с оценкой (53), получаем:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}S_k^2 \nVdash\{\tau = k\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x^2 \mathrm{P}\{\tau = k\} = \\ = x^2 \mathrm{P}\{\tau \leqslant n\} = x^2 \mathrm{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant x\right\} \end{aligned}$$

Деля обе части неравенства на x^2, завершаем доказательство неравенства Колмогорова.

3.2.3 О применениях неравенства Колмогорова

(?? хз)

3.2.4 Формализм теории вероятностей (???)

Обсудим вкратце формализм теории вероятностей, приведем часто используемые теоремы.

Вероятностное пространство и вероятность

(тут идея его прописать на достаточном уровне подробно)

Определение пространства элементарных событий и события Исходным объектом вероятностной модели является пространство элементарных событий. Его принято обозначать прописной греческой буквой Ω, произвольную точку этого пространства называют элементарным событием и обозначают строчной буквой $\omega : \omega \in \Omega$.

алгебра и события (пока хз)
(тут пара слов про алгебру, начинаем использовать ее понятия и язык, а подробно со всеми свойствами - в следующей главе, там с алгебры и всяких в деталяъ свойств все вообще и будет начинаться)
вот наши аксиомы
вот наше вероятностное пространство.

Ω **Пространство элементарных событий** Основными понятиями теории вероятностей являются вероятностное пространство и событие.

Исходным объектом вероятностной модели является пространство элементарных событий, которое принято обозначать прописной греческой буквой Ω. Любой элемент этого пространства называют элементарным событием и обозначают строчной буквой $\omega : \omega \in \Omega$.

Если считать, что мы строим вероятностную модель конкретного случайного явления, то пространство элементарных событий Ω можно представлять себе как множество всех возможных реализаций ω этого явления.

Пространство элементарных событий для одной и той же задачи можно выбирать разными способами. (?? поч??) Например, в качестве пространства элементарных событий в модели бросания игрального кубика можно выбрать $\Omega = [0, 1)$ и считать, что выпадает k очков, если $\omega \in \left[\frac{k-1}{6}, \frac{k}{6}\right)$.

Общий алгоритм решения вероятностных задач (??!!!) Удачный выбор пространства элементарных событий может упростить решение задачи.

Следующий шаг в построении вероятностного пространства состоит в выделении из множества всех подмножеств Ω некоторой совокупности $\mathcal{F}$ подмножеств, которые далее будут называться событиями. Каждому событию сопоставляется число из отрезка $[0, 1]$, которое называют вероятностью события. Множество событий должно быть замкнуто относительно простейших теоретико-множественных операций: объединения, пересечения и дополнения, а вероятности событий удовлетворять некоторым естественным условиям.

Понятия теории множеств В теории вероятностей принята следующая множественная терминология.

Суммой множеств событий A и B называется их объединение $A \cup B$.

пересечение $A \cap B-$ произведением, Для сокращения длины формул часто вместо $A \cap B$ пишут просто AB. (!!!)

дополнение $A^c = \bar{A} = \Omega \backslash A-$ противоположсным событием.

Если A и B - события, то говорят, что при каждом $\omega \in A \cap B$ события A и B происходят одновременно.

Если $A \cap B = \varnothing$, то события A и B называют несовместными.

Если $A \subseteq B$, то говорят, что событие A влечет событие B.

Наиболее используемые свойства $\cup$ и $\cap$ (???) (потом оставлю именно такие)

Операции $\cup$ и $\cap$ коммутативны, ассоциативны и транзитивны: для любых подмножеств $A, B, C \subseteq \Omega$

$$\begin{aligned} AB &= BA, & A \cup B &= B \cup A \\ (AB)C &= A(BC), & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ A(B \cup C) &= AB \cup AC, & A \cup (BC) &= (A \cup B)(A \cup C) \end{aligned}$$

Также: (???)

$$\begin{aligned} \text{если } A \subset B, \text{ то } \bar{B} &\subset \bar{A} \\ \overline{AB} &= \bar{A} \cup \bar{B}, \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}, \\ A \cup B &= A \cup (\bar{A} \cap B), \\ A \backslash B &= A \backslash (A \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\overline{\bigcap_{k \geqslant 1} A_k} = \bigcup_{k \geqslant 1} \overline{A_k}, \quad \bigcup_{k \geqslant 1} A_k = \bigcap_{k \geqslant 1} \overline{A_k}$$

Алгебра множеств Совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется алгеброй множеств, если выполнены следующие условия:

1) $\varnothing \in \mathcal{A}, \quad \Omega \in \mathcal{A}$

2) если $A \in \mathcal{A}$, то и $\Omega \backslash A = A^c \in \mathcal{A}$;

3) если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$ и $A \cap B \in \mathcal{A}$.

В условия 1) и 3) вторые части являются следствиями первых и условия 2).

Примеры алгебр множеств:

а) совокупность всех подмножеств конечного множества Ω,

б) совокупность всех конечных объединений содержащихся в $(0,1]$ замкнутых справа полуинтервалов.

В алгебре множеств можно (разными способами) выделять конечную или бесконечную совокупность «элементарных» множеств, из которых операциями объединения, пересечения и взятия дополнения можно получить все множества, составляющие алгебру.

Говорят, что такая совокупность подмножеств порождает алгебру множеств.

σ-алгебра Алгебра $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется σ-алгеброй, если для любой конечной или счетной совокупности множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$

$$\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F} \quad \text{и} \quad \bigcap_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F}$$

Множество всех подмножеств Ω, очевидно, является и алгеброй, и σ-алгеброй. Его выбирают в качестве множества событий $\mathcal{F}$, если пространство элементарных событий Ω конечно или счетно.

Пусть $\mathcal{F}_k, k \in K, -$ конечная или бесконечная совокупность алгебр (или $\sigma-$ алгебр) подмножеств множества Ω.

Пересечением алгебр (соответственно, σ-алгебр) $\mathcal{F}_k, k \in K$, называется совокупность всех таких подмножеств $A \subseteq \Omega$, что $A \in \mathcal{F}_k$ при любом $k \in K$.

(??) объединение алгебр может не быть алгеброй, в отличие от пересечений
Задача: проверить, что пересечение алгебр (σ-алгебр) является алгеброй ($\sigma-$ алгеброй) и что обычное теоретико-множественное объединение алгебр (σ-алгебр) может не быть алгеброй (σ-алгеброй).

(хз, как проверить, потом сделаю это)

Борелевская σ-алгебра Определение. Пусть $M-$ совокупность подмножеств множества Ω.

Пересечение всех алгебр подмножеств множества Ω, которые содержат M, называется наименьшей алгеброй, порожденной M. Пересечение всех σ-алгебр подмножеств множества Ω, которые содержат M, называется наименьшей σ-алгеброй, или борелевской σ-алгеброй, порожденной M.

Мера и типичные её свойства (всё, что про неё нужно, в один пар-ф сюда сношу)

Определение. Пусть $\mathcal{F}-$ алгебра или σ-алгебра подмножеств Ω.

Функция $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ называется мерой, если она аддитивна, т.е. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых таких $A, B \in \mathcal{F}$, что $A \cap B = \varnothing$.

Мера μ называется c сётно-аддитивной, если $\mu\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right)$ для любой последовательности попарно не пересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Примеры мер на $\mathbb{R}$: а) мера Лебега, б) $\mu(A)$ - количество целых чисел, принадлежащих A. Определение. Мера μ на σ-алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется вероятностной, если все ее значения лежат в отрезке $[0,1]$ и $\mu(\Omega) = 1$.

Теорема Каратеодори Обычно меры определяют их значениями на совокупности множеств, порождающих σ-алгебру. Теорема Каратеодори указывает условия, при которых можно продолжить счетно-аддитивную меру с алгебры на σ-алгебру.

Согласно теореме Каратеодори, если на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω определена вероятностная мера μ, обладающая свойством счетной аддитивности, то эту меру можсно продолжсть на наименьшую σ-алгебру $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, порожсденную алгеброй $\mathcal{A}$ с сохранением свойства счетной аддитивности.

(в теории меры доказательство и пояснения, тут потом вставлю про теорвер дополнения)

Свойства вероятности

(вкратце об основных свойствах)

3.2.5 Large deviations theory

Суть (??)

$$P\left(M_N > x\right) \approx \exp(-NI(x))$$

Теория по вики

Consider a sequence of independent tosses of a fair coin. The possible outcomes could be heads or tails. Let us denote the possible outcome of the i-th trial by X_i, where we encode head as 1 and tail as 0 . Now let M_N denote the mean value after N trials, namely

$$M_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Then M_N lies between 0 and 1. From the law of large numbers it follows that as N grows, the distribution of M_N converges to $0.5 = \mathrm{E}[X]$ (the expected value of a single coin toss). Moreover, by the central limit theorem, it follows that M_N is approximately normally distributed for large N. The central limit theorem can provide more detailed information about the behavior of M_N than the law of large numbers. For example, we can approximately find a tail probability of M_N, $P\left(M_N > x\right)$, that M_N is greater than x, for a fixed value of N. However, the approximation by the central limit theorem may not be accurate if x is far from $\mathrm{E}\left[X_i\right]$ unless N is sufficiently large. Also, it does not provide information about the convergence of the tail probabilities as $N \to \infty$. However, the large deviation theory can provide answers for such problems. Let us make this statement more precise. For a given value $0.5 < x < 1$, let us compute the tail probability $P\left(M_N > x\right)$. Define

$$I(x) = x \ln x + (1-x)\ln(1-x) + \ln 2$$

Note that the function $I(x)$ is a convex, nonnegative function that is zero at $x = \frac{1}{2}$ and increases as x approaches 1 . It is the negative of the Bernouli entropy with $p = \frac{1}{2}$; that it's appropriate for coin tosses follows from the asymptotic equipartition property applied to a Bernoulli trial. Then by Chernoff's inequality, it can be shown that $P\left(M_N > x\right) < \exp(-NI(x))$.2] This bound is rather sharp, in the sense that $I(x)$ cannot be replaced with a larger number which would yield a strict inequality for all positive N.[3] (However, the exponential bound can still be reduced by a subexponential factor on the order of $1/\sqrt{N}$; this follows from the Stirling approximation applied to the binomial coefficient appearing in the Bernoulli distribution.) Hence, we obtain the following result:

$$P\left(M_N > x\right) \approx \exp(-NI(x))$$

The probability $P\left(M_N > x\right)$ decays exponentially as $N \to \infty$ at a rate depending on x. This formula approximates any tail probability of the sample mean of i.i.d. variables and gives its convergence as the number of samples increases.

О связи энтропией в статфизе (??)

(остается вопрос, там же иначе все вроде мы получали.)

Возьмем логарифм от $P\left(M_N > x\right) \approx \exp(-NI(x))$ и переобозначим вероятность, получим

$$\frac{1}{N} \ln W = -I$$

(??? дальше какое-то рассуждение про это, пока мало что знаю.)

3.3 Простейшие вероятностные модели

(тут школа и около школьные все задачи и модели, самое простейшее. мб помещу раздел куда-то в другое место)

3.3.1 Свойства классической вероятностной модели

Теория вероятностей работает с классической вероятностной моделью, поэтому познакомимся с ней и посмотрим то, что с помощью нее можно сделать?

(вроде бы она вообще всегда будет работать)

вероятностной моделью работает с вероятностным пространством.

Теорема

(Основная часть аксиоматики Колмогорова).

Вероятностным пространством называется тройка (Ω, F, P), в котором Ω - пространство элементарных событий, F - σ-алгебра подмножеств Ω, называемых событиями, $P : F \to [0, 1]$ - функция, называемая вероятностью, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in F$, неотрицательность
2. $P(\Omega) = 1$, нормированность.
3. $P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$ - счетная аддитивность.

Таким образом мы строго определили вероятность. Далее посмотрим на ее свойства.

свойства вероятности 1) $\mathbf{P}\left(A^c\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$, в частности, $\mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$ и $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Доказательство Первое равенство следует из аксиомы 3°, так как $A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \varnothing$. При $A = \Omega$ получаем второе равенство. Наконец, $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$, так как должно Выполняться условие: $\mathbf{P}\left(A^c\right) = 1 - \mathbf{P}(A) \geqslant 0$

2) Если $A \subseteq B$, то $\mathbf{P}\{A\} \leqslant \mathbf{P}\{B\}$ и $\mathbf{P}\{B \backslash A\} = \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A\}$.

Доказательство Действительно, так как $B = A \cup (B \backslash A)$ и $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$, то по аксиоме 3° примененной к последовательности $A, B \backslash A$,

$$\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B \backslash A\}$$

что эквивалентно доказываемому равенству. Неравенство $\mathbf{P}\{A\} \leqslant \mathbf{P}\{B\}$ следует из соотношения (1) и аксиомы 1 °

3) Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{A_k\right\}$$

Доказательство Положим $B_1 = A_1, B_k = A_k \backslash \left(A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}\right), k = 2, \ldots, n$. Докажем, что при Любом $m = 1, \ldots, n$

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$$

Из включений $B_k \subset A_k, k = 1, \ldots, n$, следует, что $\cup_{k=1}^{m} B_k \subset \cup_{k=1}^{m} A_k$.С дру- гой стороны, для каждого элемента $\omega \in \cup_{k=1}^{m} A_k$ определено значение $k(\omega) =$

$$\min\left\{k \geqslant 1 : \omega \in A_k\right\} \leqslant m, \text{ и тогда } \omega \in B_{k(\omega)} \in \cup_{k=1}^{m} B_k$$

События $B_1, \ldots, B_n$ попарно не пересекаются, так как

$$B_m \cap \left(\cup_{k=1}^{m-1} B_k\right) = \left(A_m \backslash \left(\cup_{k=1}^{m-1} A_k\right)\right) \cap \left(\cup_{k=1}^{m-1} A_k\right) = \varnothing, \quad m = 2, \ldots, n$$

Используем теперь аксиому 3° и свойство 2)

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(B_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k\right)$$

4) Для любых событий A и B

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

Доказательство Так как $A \cup B = (A \backslash AB) \cup (B \backslash AB) \cup AB$ и события $A \backslash AB, B \backslash AB$ и AB попарно не пересекаются, то по аксиоме 3°

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A \backslash AB) + \mathbf{P}(B \backslash AB) + \mathbf{P}(AB)$$

Кроме того, по той же аксиоме 3°

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \backslash AB) + \mathbf{P}(AB) \text{ и } \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \backslash AB) + \mathbf{P}(AB)$$

Из и (4) следует (2)

5) От объединений можно переходить к пересечениям с помощью теоремы сложения вероятностей.

Теорема о сложении вероятностей

Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \mathbf{P}\left\{A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}\right\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i\right) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n\right) \quad (3.1)$$

Доказательство При $n=2$ утверждение совпадает с 4). Поэтому докажем по индукции: допустим, что при некотором $n \geqslant 2$ утверждение справедливо, и покажем, что тогда оно справедливо и при $n+1$. Пусть $A_1, \ldots, A_{n+1}$– произвольные события. Мы должны показать, что

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right\} = \sum_{m=1}^{n+1}(-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n+1} \mathbf{P}\left\{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m}\right\}$$

Если $B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, то $\cup_{k=1}^{n+1} A_k = B \cup A_{n+1}$ и в силу 4) и предположения индукции

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right\} = \mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\left\{A_{n+1}\right\} - \mathbf{P}\left\{B \cap A_{n+1}\right\}$$

где $\mathbf{P}\{B\}$ есть правая часть (5). Правая часть (6) отличается от правой части (5) только слагаемыми, содержапцми A_{n+1}, и нам осталось доказать, что

$$\mathbf{P}\left\{A_{n+1}\right\} - \mathbf{P}\left\{B \cap A_{n+1}\right\} = \sum_{m=1}^{n+1}(-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m = n+1} \mathbf{P}\left\{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m}\right\}$$

Слагаемое в правой части, соответствуюшее $m=1$, есть $\mathbf{P}\left\{A_{n+1}\right\}$. Остальные слагаемые соответствуют $\mathbf{P}\left\{B \cap A_{n+1}\right\}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\left\{B \cap A_{n+1}\right\} = \mathbf{P}\left\{\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^n \left(A_k \cap A_{n+1}\right)\right\} = \\ = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{j=1}^m \left(A_{i_j} \cap A_{n+1}\right)\right\} = \\ = -\sum_{m=1}^n (-1)^{(m+1)-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m < i_{m+1} = n+1} \mathbf{P}\left\{A_{i_1} \ldots A_{i_m} A_{i_{m+1}}\right\}\end{gathered}$$

О случаях применения (???)

Теорема о непрерывности вероятностной меры

Для любой неубывающей

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{A_n\right\}$$

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{B_n\right\}$$

В частиости, если $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots u \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$, то

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{B_n\right\} = 0$$

Доказательство Доказательство. 1. Аналогично доказательству свойства 3) по неубываюшей последовательности событий $\{A_n\}$ построим последовательность несовместных событий $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1, B_3 = A_3 \backslash A_2$ и т.д. Так же, как в доказательстве свойства 3), $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, кроме того, $\mathbf{P}\left\{B_n\right\} = \mathbf{P}\left\{A_n\right\} - \mathbf{P}\left\{A_{n-1}\right\}$ при $n \geqslant 2$ по свойству 2). Тогда в силу аксиомы счетной аддитивности

$$\mathbf{P}\left\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \mathbf{P}\left\{\sqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{B_n\right\}$$

Сумма ряда с неотрицательными членами равна пределу его частичных сумм, но так как $A_N = \sqcup_{n=1}^{N} B_n$ при любом $N \geqslant 1$, то

$$\mathbf{P}\{B_1\} + \mathbf{P}\{B_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{B_N\} = \mathbf{P}\{A_N\}$$

( )

$$\mathbf{P}\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{B_n\} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{A_N\}$$

что и требовалось доказать.

$A_n = \overline{B_n} = \Omega \backslash B_n, n \geqslant 1$, то $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ и по доказанному в п.1 и по свой- crBy 1)

$$\mathbf{P}\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{A_N\} = \lim_{N\to\infty} (1 - \mathbf{P}\{B_N\}) = 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{B_N\}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\cup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \mathbf{P}\{\omega : \exists k : \omega \in A_k\} = \mathbf{P}\{\Omega \backslash \{\omega : \omega \in A_k \forall k\} = \\ = \mathbf{P}\left\{\overline{\cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}}\right\} = \mathbf{P}\left\{\overline{\cap_{n=1}^{\infty} B_n}\right\} = 1 - \mathbf{P}\{\cap_{n=1}^{\infty} B_n\}\end{gathered}$$

Из этих двух равенств вытекает первое утверждение п.2. Второе утверждение следует из первого и из свойства 1). Теорема доказана.

свойства вероятностного пространства (6 параграф зубков)

О случаях применения (???)

примеры поясним примерами классическую вероятностную модель.

посмотрим теперь, используя вероятностное пространство, на известные нам уже модели.

Пример 3.1. *Конечные вероятностные пространства.*

Пусть в тройке $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ $\Omega = \{\omega\}-$ *пространство элементарных событий - конечное множество, состоящее из* $|\Omega|$ *элементов,* σ *-алгебра (в данном случае - алгебра)* $\mathcal{F}-$ *совокупность всех подмножеств* Ω. *Вероятность* $\mathbf{P}$ *можно задать, определив для каждого* $\omega \in \Omega$ *неотрицательное число* $\mathbf{P}(\omega)$ *так, чтобы*

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}(\omega) = 1$$

Для произвольного события $A \subseteq \Omega$ *положим*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\omega)$$

Выполнение аксиом колмогорова $1^\circ - 3^\circ$ *в этом случае очевидно.*

Частным случаем является так называемое классическое

определение *вероятности, когда* $\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ *для всех* $\omega \in \Omega$.В *этом случае*

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ для любого } A \subseteq \Omega$$

Конструкция классической вероятности

Приведем типичную конструкцию вероятности, которая чаще всего имеется в виду.
(?? самое нужное тут пропишу как раз, в самом начале)

Конструкция вероятности на пальцах

(тут крайне не строгое понимание всего, которое часто дается в вводных курсах)

Определение классической вероятности Пусть при некотором испытании множество всевозможных событий Ω состоит из конечного числа элементарных событий $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Говоря на бытовом языке, классическая вероятность $\mathbf{P}(A)$ есть число, сопоставляемое каждому множеству событий:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

От этого числа требуется только нормированность и чтобы вероятность нулевого была равна 0.

3.3.2 Комбинаторика для выборок

Именно этим параграфом и решаются все простые задачи классической вероятностной модели.

Основное правило комбинаторики

Все формулы простейшей комбинаторики выводятся из основного правило комбинаторики.
(????)

Лемма 2. *(Основное правило комбинаторики) Пусть имеется m наборов элементов, причем i-тый набор состоит из k_i элементов. Общее число N способов, которыми можно произвести выбор по одному элементу из каждой группы, определяется равенством*

$$N = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

(вроде достаточно очевидно)
(потом просмотрю подробнее, мб докажу)

Комбинаторные указания (!??!?)

(!?!!! вот это супер важно для решений задач!!!)

Частным случаем классической вероятностной схемы является урновая схема: в урне содержится $(K + L)$ шаров, среди которых K белых и L чёрных; из урны наугад без возвращения извлекаются $(k + l)$ шаров, тогда вероятность $\mathbf{P}_{K,L}(k, l)$ того, что в выборке содержится ровно k белых шаров и l чёрных, вычисляется по формуле гипергеометрической вероятности:

$$\mathbf{P}_{K,L}(k, l) = \frac{\mathrm{C}_K^k \mathrm{C}_L^l}{\mathrm{C}_{K+L}^{k+l}}$$

Размещения по ящикам

(такое тоже есть, подробно - в записи по комбинаторике)

Размещение незанумерованных шаров по занумерованным ящикам

Размещение занумерованных шаров по незанумерованным ящикам

Размещение занумерованных шаров по занумерованным ящикам

О других размещениях (???) (пока не знаю, но могут быть ведь мб?)
(??? если у нас больше ящиков, чем коробок?)
(?? если у нас больше коробок, чем ящиков??)
(пока просто не думал, комбинаторику нужно подтянуть.)

Выборки из ящиков

Приведем типичные задачи про выборки, решающиеся простой комбинаторикой.

(по идее многие простые задачи должны решаться этой главой. мб потом сделаю unindent, если будет прямо много на это задач)

Обзор количества комбинаций при разных выборках Многие (?? какие??) комбинаторные вычисления укладываются в следующую схему. Допустим, что мы имеем n занумерованных шаров: a_1, ... , a_n. Осуществляется выборка объема k из этой совокупности шаров. Нас интересует количество способов, которыми можно осуществить эту выборку.

При этом возникает четыре различные ситуации: выборка может быть упорядоченной или неупорядоченной и с возвращением или без возвращения.

(тут итоги приведу)

Число возможных комбинаций для данного типа выборки указано в таблице.

Выборки	с возврапением	без возвращения
упорядоченные	n^k	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
неупорядоченные	$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Выборка с возвращением одинаковых шаров разных цветов (если без нумерации, то что?)

О применениях выборки с возвращением одинаковых шаров разных цветов (??) (пока хз)

Выборка с возвращением занумерованных шаров разных цветов (??) Пусть есть урна, содержащая N шаров, занумерованных числами $1, 2, ..., N$, причем шары с номерами от 1 до M белые, а остальные $N - M$ шаров черные. Из урны последовательно извлекают, узнают номер, возвращаю обратно t шаров. Вероятность, что среди t шаров, появилось s белых есть:

$$\mathbf{P}\left(A_s\right) = C_t^s \left(\frac{M}{N}\right)^s \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{t-s}$$

(?? пока не вникал как следует в док-во, не актуально, но оно ниже)

Действительно.

Возможные исходы t извлечений шаров (элементарные события) можно отождествить с наборами $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ чисел из множества $\{1, \ldots, N\}$.

Поэтому в качестве пространства элементарных событий в данном случае можно выбрать множество $\Omega = \{(k_1, \ldots, k_t) : k_1, \ldots, k_t \in \{1, \ldots, N\}\} = 1, \ldots, N^t$

Количество наборов$(k_1, k_2, \dots, k_t)$, образующих такое пространство элементарных событий Ω, равно N^t

При классическом определении вероятности каждому набору $(k1, ..., kt) \in \Omega$ сопоставляется вероятность $\frac{1}{N_t}$

(тут комбинаторика должна работать!!!! пока я криво очень уж ее написал, так что я хз, почему так задача решается)

Количество наборов чисел $(k_1, k_2, \dots, k_t) \in \{1, \dots, N\}^t$, содержащих ровно s чисел из множества $\{1, \dots, M\}$ и $t - s$ чисел из $\{M+1, \dots, N\}$, равно $C_t^s M^s (N-M)^{t-s}$, поэтому

$$\mathbf{P}\left(A_s\right) = C_t^s \left(\frac{M}{N}\right)^s \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{t-s}$$

О применениях выборки с возвращением занумерованных шаров разных цветов (??) Можно посмотреть на применения такого примера.

Например, случай при $N = 2, M = 1$ можно интерпретировать как t-кратное бросание идеальной симметричной монеты, или как двоичная последовательность.

при этом исходы бросаний называют «гербом» и «решеткой». Другая интерпретация этого же случая состоит в том, что белый шар отождествляется с 0, а черный — с 1;

тогда выборка соответствует равновероятной случайной двоичной последовательности и событие $B_s =$ равновероятная случайная двоичная последовательность длины t содержит ровно s единиц имеет вероятность

$$\mathbf{P}\left\{B_s\right\} = \frac{1}{2^t} C_t^s$$

Выборка без возвращения Пусть есть урна, содержащая N шаров, занумерованных числами $1, 2, ..., N$, причем шары с номерами от 1 до M белые, а остальные $N - M$ шаров черные. Пусть из урны извлекают $t \leqslant N$ шаров без возвращения. Вероятность A_s^* того, что при выборе t шаров без возвращения появилось s белых шаров есть:

$$\mathbf{P}\left(A_s^*\right) = C_t^s \frac{M^{[s]}(N-M)^{[t-s]}}{N^{[t]}}$$

(????)

Действительно.

Теперь в качестве элементарных событий следует рассматривать наборы попарно различных чисел $(k_1, k_2, \dots, k_t) \in \{1, \dots, N\}^t$.

В качестве пространства элементарных событий можно выбрать

$$\Omega = \left\{(k_1, \dots, k_t) : k_1, \dots, k_t \in \{1, \dots, N\}, k_i \neq k_j, 1 \leqslant i < j \leqslant t\right\}.$$

Число элементов этого пространства элементарных событий Ω вычисляется по другой формуле:

$$|\Omega| = N(N-1)\dots(N-t+1) = N^{[t]}$$

Вероятность каждого элементарного события в схеме выбора t шаров без возвращения равна $\frac{1}{N^{(l)}}$.

Поэтому число элементарных событий A_s^* равно

$$N(A_s^*) = C_t^s M^{[s]}(N-M)^{[t-s]}$$

и находим вероятность

$$\mathbf{P}\left(A_s^*\right) = C_t^s \frac{M^{[s]}(N-M)^{[t-s]}}{N^{[t]}}$$

О применениях выборки ...

Другие выборки (?)

(если еще что-то будет, то сюда буду вписывать. пока хз, какие еще есть выборки)

3.3.3 Геометрическая вероятность

Обсудим геометрическую вероятность сполна.
(думаю, эта вся теория в этом разделе и поместится.)

Конструкция геометрической вероятности

Определение геометрической вероятности Если пространство элементарных событий Ω представляет собой область в $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, \ldots$, и все элементарные события считаются равновероятными, вероятность события $A \subset \Omega$ вычисляется по формуле так называемой геометрической вероятности:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

где под $\mu(A)$ понимается мера Лебега множества A, хотя для простых множеств достаточно и меры Жордана.
(??? конкретики мало, потом добавлю её, досмотрю про это лекции)

О случаях применимости геометрической вероятности (!!) (потом четко напишу!!!)

Об ошибках в понимании геометрической вероятности Ошибка думать, что тут задачи только про падение точки в область, ведь геометрическая вероятность встречается в самых абсолютно разных случаях.
(конкретно - пока я не усвоил)

Почему в геометрической вероятности пространство Евклидово? Если плоскость x, t, то казалось бы, имеем пространство Минковского????
А если те же задачи, но со скоростями близкими к скорости света решить????
вот тут я просто не знаю.
остался вопрос.

О способах решения задач на геометрическую вероятность (?!?)

Вроде просто рисуем картинку, считаем нужную меру множества. Чаще всего это просто площадь.
По идее иногда это мог бы быть и объем большей фигуры.

О применениях геометрической вероятности в негеометрических задачах (!?!?)

(пока мало опыта, напишу потом.)

О задачах про встречи через геометрическую вероятность (типичные задачи, укажу на их решение.)

3.4 Условная вероятность

3.4.1 Условная вероятность и основные теоремы

Конструкция условной вероятности в двух словах

(всё тут, не вижу смысла делить на пар-фы)

Рассмотрим ограничение вероятностного пространства на множество $B : (\Omega_B, \mathcal{F}_B, \mathbf{P}^*_B)$, где $\Omega_B = B$, $\mathcal{F}_B = \{C \in \mathcal{F} : C \subseteq B\}$ и $\mathbf{P}^*_B\{C\} = \mathbf{P}\{C\}$ для всех множеств $C \subset B, C \in \mathcal{F}$.

Чтобы $\mathbf{P}^*_B$ - было вероятностной мерой, нужно ее нормировать числом $\mathbf{P}\{B\}$, иначе было бы $\mathbf{P}^*_B\{\Omega_B\} = \mathbf{P}\{B\} < 1$.

Определение 3.15. *Условная вероятность события $A \in F$ в вероятностном пространстве (Ω, F, P) при условии наступления события B называется величина*

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$$

Свойства условной вероятности следующие.

Условные вероятности независимых событий A, B совпадают с безусловными. Если $\mathbf{P}\{A\} > 0, \mathbf{P}\{B\} > 0$ и $\mathbf{P}\{AB\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$, то

$$\mathbf{P}\{A|B\} = \mathbf{P}\{A|\bar{B}\} = \mathbf{P}\{A\}, \mathbf{P}\{\bar{A}|B\} = \mathbf{P}\{\bar{A}|\bar{B}\} = \mathbf{P}\{\bar{A}\}$$

(?? какие еще???)

О случаях применения условной вероятности (?!!)

Часто нужно перейти от всего вероятностного пространства к его подмножеству нужно воспользоваться условной вероятностью. Например, это нужно, если мы ищем среди события B исходы благориятствующие событию A.

Теорема умножения

Из определения следует формула

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$$

Обобщим эту формулу для n событий.

Теорема умножения

Для любых событий A таких что $\mathbf{P}\left(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}\right) \neq 0$, справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left\{A_1 A_2 \ldots A_n\right\} = \mathbf{P}\left\{A_1\right\} \mathbf{P}\left\{A_2 | A_1\right\} \mathbf{P}\left\{A_3 | A_1 A_2\right\} \ldots \mathbf{P}\left\{A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1}\right\}$$

Доказательство (пока скопировано, не важно оно)

Так как $A_1 \ldots A_{n-1} \subseteq A_1 \ldots A_k$ при любом $k \leqslant n-1$, то из условия $\mathbf{P}\left\{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}\right\} > 0$ следует, что $\mathbf{P}\left\{A_1 A_2 \ldots A_k\right\} > 0$ при любом $k = 1, 2, \ldots, n-1$ т.е. что все условные вероятности в правой части (19) определены. При $n = 2$ формула (19) совпадает с (18). Далее воспользуемся методом математической индукции. Допустим, что при некотором $n \geq 2$ формула (19) верна для любых n событий, и, используя (18), докажем, что тогда формула (19) верна и для любых $n+1$ событий:

О случаях применения теоремы умножения

(пока хз)

О неверных пониманиях условной вероятности

(тоже часто её можно криво понимать, опишу тут, как)

3.4.2 Формула полной вероятности

В случае несколько исходов, после каждого из которых вероятность дальнейших событий разная, для подсчета вероятности нужно суммировать по всем исходам, в чем нам поможет формула полной вероятности.

(???)

Конструкция формулы полной вероятности в двух словах (?)

Изначальный набор событий $A_1, A_2, \ldots$ при условии которых наступает событие B представляет собой разбиение множества событий, то есть разбивает пространство всех событий на непересекающиеся подмножества, полно покрывающих исходное.

Теорема

(Формула полной вероятности) Если $A_1, A_2, \ldots$ — не более чем счетное разбиение пространства событий Ω такое, что $P\{A_k\} \neq 0$ $(k = 1, 2, ...)$, то для любого события B справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{B\} = \sum_{k \geqslant 1} \mathbf{P}\left\{A_k\right\} \mathbf{P}\left\{B | A_k\right\}$$

(?? кст, а для более чем счетного что?)

Доказательство Для доказательства нужно просто переписать B через пересечение с каждым A_i, а потом просто воспользоваться формулой условной вероятности.

То есть пусть $A_1, A_2, \ldots$ - разбиение Ω, то

$$B = B \bigcap \Omega = B \bigcap \left(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k \right) = \bigcup_{k \geqslant 1} (BA_k) \text{ и } BA_k \bigcap BA_j = \varnothing \text{ при } k \neq j$$

Пользуясь аддитивностью вероятности и теоремой умножения, находим:

$$\mathbf{P}\{B\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{BA_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{A_k\right\} \mathbf{P}\left\{B | A_k\right\}$$

Теорема доказана.

О случаях применениях полной вероятности

(вроде понимаю, потренироваться нужно тут ещё)

В случае несколько исходов, при каждом из которых вероятность последующего события разная, для подсчета вероятности нужно суммировать по всем исходам, в чем нам поможет формула полной вероятности.

Вероятность хотя бы одного исхода (!?)

Вычисление вероятности появления хотя бы одного из совместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычислять как разность между единицей и вероятностью произведения противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n\right).$$

В частности, если все n событий имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - (1-p)^n.$$

3.4.3 Формула Байеса

Если известно $(B|A_k)$, а хотим мы найти $(A_k|B)$, то в этом нам поможет формула Байеса.

(тут посмотрю популярную лекцию, давно в палнах это!!!)

Формула Байеса

Теорема

(формула Байеса)

Если $A_1, A_2, \ldots$ — полная система несовместных событий и событие B таково, что $\mathbf{P}(B) \neq 0$, то

$$\mathbf{P}\left\{A_k|B\right\} = \frac{\mathbf{P}\left\{A_k\right\}\mathbf{P}\left\{B|A_k\right\}}{\sum_{k\geqslant 1}\mathbf{P}\left\{A_k\right\}\mathbf{P}\left\{B|A_k\right\}}$$

Доказательство Достаточно воспользоваться определением условной вероятности, теоремой умножения и формулой полной вероятности:

$$\mathbf{P}\left\{A_k|B\right\} = \frac{\mathbf{P}\left\{A_kB\right\}}{\mathbf{P}\{B\}} = \frac{\mathbf{P}\left\{A_k\right\}\mathbf{P}\left\{B|A_k\right\}}{\sum_{k\geqslant 1}\mathbf{P}\left\{A_k\right\}\mathbf{P}\left\{B|A_k\right\}}$$

Теорема доказана.

О понимании формулы Байеса (??)

(??? что там за вероятность прошлого от будущего???? так и не понял пока)

О случаях применений формулы Байеса (!)

(Зачем она??? хз. самое важное!!)

О Байесовском методе

(он вообще связан с ф-ой Байеса?)

Примеры условной вероятности

Приведем типичные иллюстративные примеры условной вероятности.

(буду решать задачи - приведу)

3.4.4 Независимость событий (!?!!!)

Обсудим подробно независимые события

Конструкция независимых событий (???)

Новая выгрузка нормальной теории Как уже было отмечено, говорить о вероятности наступления какого-либо события как о мере возможности наступления этого события можно лишь при выполнении определённого комплекса условий опыта. Так, если к комплексу условий, при которых изучалась вероятность наступле- 17 ния события A, добавить условие наступления события B, получим другое значение вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\}-$ вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло (или [2] условиая вероятность события A при условии B), которая равна по определению

$$\mathbf{P}\{A \mid B\}=\frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}}.$$

Иногда вместо обозначения $\mathbf{P}\{A \mid B\}$ используют обозначение $\mathbf{P}_B\{A\}=\mathbf{P}\{A \mid B\}$. Вероятность $\mathbf{P}\{A\}$, в отличие от условной вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\}$, называется безусловной. Из определения условной вероятности (2.1) следует формула умножения Вероятностей

$$\mathbf{P}\{A \cap B\}=\mathbf{P}\{B\} \mathbf{P}\{A \mid B\}=\mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{B \mid A\},$$

остающаяся справедливой и в случае, когда $\mathbf{P}\{A\}=0$ или $\mathbf{P}\{B\}=0$. Говорят, что события A и B являются независимыми, если

$$\mathbf{P}\{A \cap B\}=\mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{B\}.$$

Формулу (2.3) для независимых событий A и B называют теоремой умножения вероятностей. Очевидно, при $\mathbf{P}\{B\}>0$ теорема умножения вероятностей (2.3) означает, что условная вероятность события A при условии B совпадает с безусловной вероятностью события A :

$$\mathbf{P}\{A \mid B\}=\mathbf{P}\{A\}.$$

Формулу умножения вероятностей легко обобщить на случай произвольного конечного числа событий:

$$\mathbf{P}\left\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right\}=\mathbf{P}\left\{A_1\right\} \mathbf{P}\left\{A_2 \mid A_1\right\} \mathbf{P}\left\{A_3 \mid A_1 \cap A_2\right\} \cdots \mathbf{P}\left\{A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right\}.$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми B совокупности, если для любого их подмножества $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ вероятность одновременного наступления событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ равна произведению безусловных вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}\left\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right\}=\mathbf{P}\left\{A_{i_1}\right\} \mathbf{P}\left\{A_{i_2}\right\} \cdots \mathbf{P}\left\{A_{i_k}\right\}(k=1,2, \ldots, n).$$

Если условие (2.6) выполняется только при $k=2$, то события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарио независимыми [2] Следует обратить внимание на следующие факты: - из условия несовместности не следует условие независимости; - из условия независимости не следует условие несовместности; - из условия независимости в совокупности следует попариая независимость, но из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то из обобщённой теоремы сложения вероятностей следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\}=\mathbf{P}\left\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right\}=$$

$$=1-\left(1-\mathbf{P}\left\{A_1\right\}\right)\left(1-\mathbf{P}\left\{A_2\right\}\right) \cdots\left(1-\mathbf{P}\left\{A_n\right\}\right)=1-\prod_{i=1}^n\left(1-\mathbf{P}\left\{A_i\right\}\right).$$

Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, то для вычисления вероятности произвольного события A можно использовать формулу полной Вероятности:

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A \mid H_1\}\mathbf{P}\{H_1\} + \mathbf{P}\{A \mid H_2\}\mathbf{P}\{H_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A \mid H_n\}\mathbf{P}\{H_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A \mid H_i\}\mathbf{P}\{H_i\},$$

в соответствии с которой вероятность наступления события А может быть представлена как сумма произведений условных вероятностей события A при условии наступления событий H_i на безусловные вероятности этих событий H_i. Поскольку среди событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, в результате опыта должно наступить одно и только одно, эти события H_i называют гипотезами $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Формула полной вероятности (2.8) остаётся справедливой и в случае, если условие, состоящее в том, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, заменить более слабым: гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$), а их объединение содержит событие $A\,(A \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n)$. Из формулы полной вероятности следует формула Байеса:

$$\mathbf{P}\{H_k \mid A\} = \frac{\mathbf{P}\{A \mid H_k\}\mathbf{P}\{H_k\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \frac{\mathbf{P}\{A \mid H_k\}\mathbf{P}\{H_k\}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A \mid H_i\}\mathbf{P}\{H_i\}} (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Вероятности $\mathbf{P}\{H_i\}$ гипотез H_i называют априориыми вероятностями (вероятностями гипотез H_i до проведения опыта) в отличие от апостериориых вероятностей $\mathbf{P}\{H_i \mid A\}$ (вероятностей гипотез H_i, уточнённых в результате опыта, исходом которого стало событие A).

Конструкция независимых событий С информационной точки зрения под независимостью события B от события A естественно понимать то, что знание о наступлении события A не влияет на вероятность наступления события B.

(то есть есть причинная независимость, да?)

Определение 3.16. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *- вероятностное пространство. События* $A, B \in \mathcal{F}$ *называются независимыми, если*

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

Интуитивное представление о независимых событиях Это два круга, которые пересекаются так, что их мера пересечения равна произведению мер этих кругов.

Симметричность независимости Независимость событий A и B можно было бы записать с помощью условной вероятности, то есть, например, равенством $P(B|A) = P(B)$, но в то же время можно и равенством $P(A|B) = P(A)$. Покажем, что оба эти равенства эквивалентны в случае, если $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$, то из независимости B от A следует независимость A от B, то есть независимость симметрична.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$$

(потом посмотрю. чего не взять бы это за опр-е??)

Независимость в совокупности (??) (тут детали есть, см. примеры, потом доразбираюсь)

Определение 3.17. *События* $A_1, \ldots, A_n$ *независимы в совокупности, если для любых* $k = 2, \ldots, n$ *и* $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ *Выполняются соотношения*

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k})$$

Независимые наборы событий Можно также расширить определение:

Определение 3.18. *Наборы событий $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ называются независимыми, если для любого набора $A_1 \in \mathscr{F}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}_n$ события $A_1, \ldots, A_n$ независимы В совокупности.*

(?? и зачем оно??)

Свойства независимых событий (??) (?? откуда вообще это я взял? Горяйнова потом посмотрю!!)

Перечислим простейшие свойства независимых событий.

Лемма 3. *Если события A и B независимы, то независимы также пары событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$:*

$$\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}), \qquad \mathbf{P}(\overline{A}\overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})$$

Доказательство Утверждение достаточно доказать для пары A и $\bar{B}$. Используя равенство $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, получаем

$$\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A \backslash AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B})$$

Если $A \in F$ – событие, то события A и $\emptyset$, а также A и Ω независимы

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A\varnothing) &= 0 = \mathbf{P}(A) \cdot 0 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\varnothing) \\ \mathbf{P}(A\Omega) &= \mathbf{P}(A) \cdot 1 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\Omega) \end{aligned}$$

$\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$$\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A \backslash AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B})$$

аналогично, $\mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B)$; наконец,

$$\mathbf{P}(\overline{A}\overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A} \backslash \overline{A}B) = \mathbf{P}(\overline{A}) - \mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(\overline{A})(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})$$

Другое про независимые события

Отличие независимых событий от несовместных событий - Для несовместных $P\left(A_1 A_2\right) = P(0) = 0$.

- Для независимых $P(A_1 \wedge A_2) = P(A1) * P(A2)$

Несовместные события могут быть независимыми, если | $P(A1)^* P(A2) = 0$, то есть только когда одно из событий - невозможное, т.е. вероятность его наступления равна нулю.

title

О неверных пониманиях независимых событий (??) (тут соберу их, вроде такое часто может появиться. пока хз, вроде всё и понятно...)

Примеры независимых событий

Пример попарно независимых, но не независимых в совокупности событий (??!!!) Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, где все элементарные события ω_i равновероятны. Определим $A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_1, \omega_3\}, C = \{\omega_1, \omega_4\}$. Эти события попарно независимы, но не выполняется равенство

$$\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$$

Пример независимых в совокупности, но не попарно независимых событий (??!!!) Подбрасываются две игральные кости. Рассмотрим три события:

$A=\{$на первой кости выпала "единица "двойка"или "пятерка"$\}$,

$B=\{$на первой кости выпала "четверка "пятерка"или "шестерка"$\}$,

$C=\{$ сумма выпавших очков на двух игральных костях равна девяти $\}$.

В этом случае выполняется равенство

$$\mathbf{P}(ABC)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$$

но нет даже попарной независимости.

Пример независимых событий на плоскости Пусть пространство элементарных событий $\Omega=\{(x,y):x,y\in[0,1]\}$ - единичный квадрат, $\mathcal{F}$ - σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств Ω, $\mathbf{P}$ - мера Лебега на Ω (обобщающая геометрическое понятие площади). Если

$$A=\{(x,y)\in\Omega:a_1\leqslant x\leqslant a_2\},\quad B=\{(x,y)\in\Omega:b_1\leqslant y\leqslant b_2\}$$

То $AB=\{(x,y)\in\Omega:a_1\leqslant x\leqslant a_2,b_1\leqslant y\leqslant b_2\}$, и

$$\mathbf{P}\{A\}=\frac{a_2-a_1}{|\Omega|}=a_2-a_1,\quad \mathbf{P}\{B\}=\frac{b_2-b_1}{|\Omega|}=b_2-b_1$$

$$\mathbf{P}\{AB\}=\frac{(a_2-a_1)\,(b_2-b_1)}{|\Omega|}=(a_2-a_1)\,(b_2-b_1)=\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$$

т.е. по определению события A и B независимы.

(?? потом досмотрю)

3.5 Последовательности независимых испытаний

Приведем теорию и примеры типичных последовательностей испытаний.

3.5.1 Схема Бернулли

Будем рассматривать схемы, в которых в каждом испытании вероятность наступления определенного события равны p, обозначим вероятность его не наступления $q=1-p$.

Схема Бернулли в двух словах

Схема Бернулли это задача о независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A постоянна и равна p. Ищется вероятность того, что в среди n испытаний событие A наступит ровно m раз?

Будем смотреть на происходящее, как на последовательность белых и черных кружков, где белый - означает, что событие A не наступило, черный - что наступило. Тогда вероятность одной такой последовательности равна p^mq^{n-m}. Всего последовательностей существует C_n^m штук. Поэтому вероятность иметь среди n испытаний ровно m событий A дается так называемой формулой Бернулли или биномиальным законом:

$$P_n(m)=C_n^mp^mq^{n-m}$$

Называние такое из-за того, что $P_n(m)$ равна коэффициенту при x^m в разложении бинома $(q+px)^n$.

Хотя бы какое-то число раз нужное событие наступит (?)

Заметим, что среди n испытаний событие A точно наступит какое-то число раз от нуля до n. Поэтому сумма вероятностей исходов с разными количествами появления A должна равняться вероятности достоверного события:

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$$

Это следует из формулы бинома Ньютона: $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = (p+q) = 1$

Вероятность $P_n(m)$ с увеличением m растет, потом убывает. в случае, если $np-q$ целое, максимальное значение она имеет для двух $m : m_1 = np - q, m_2 = np + q$. В случае, если не целое, то максимальное при наименьшем целом, близким к m_1.

О применениях схемы Бернулли (!??!!)

(потом пропишу, где нужна, очень много задач на нее.)

Полиномиальная схема

В случае k событий A_1, A_2, $A_3, \ldots$ A_k с вероятностью каждого p_i, в схеме Бернулли вероятность, что A_1 встретится m_1 раз, что A_2 встретится m_2 раз, ..., A_k – m_k равна.

$$P_n\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} p_1^{m}, p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$$

Аналогично, ее называют полиномиальным распределением

примеры последовательностей независимых испытаний

Посмотрим на интересные (и только интересные!) примеры.

3.5.2 Типичные асимптотики схемы Бернулли

(тут только самые полезные и не сложные теоремы!!! основное - в главе дальше. короче говоря, сюда только то, что уже использовал и буду переносить!!!)

Есть множество различных частных случаев схем Бернулли, которые встречаются в жизни. Например, случай Пуассона,

Теорема Пуассона

Простейший предел дается формулой Пуассона.

Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$, то при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется:

$$\mathbf{P}\left(B_n(k)\right) = C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Доказательство Преобразовав формулу Бернулли

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} &= \frac{1}{k!} \frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^{k-1}} n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(np)^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (1-p)^{-k} (1-p)^{\frac{1}{p} np}, \end{aligned}$$

видим, что в пределе у нас стоит экспонента:

$$\mathbf{P}\left(B_n(k)\right) = \lim_{p\to 0}(1-p)^{1/p} = e^{-1}$$

Заметим, что в условиях теоремы Пуассона имеет место оценка

$$\left| P\left(B_n(k)\right) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{\lambda^2}{n}, \quad \lambda = np$$

т. е. результат применим, когда np^2 мало.

О случаях применений теоремы Пуассона

(пока хз)

3.5.3 Геометрическое распределение

Обозначим через k_1 номер того испытания в процессе Бернулли, когда впервые выпадает единица. Каковы статистические свойства случайной величины k_1 ? В силу статистической независимости испытаний, функция распределения вероятностей $P\left(k_1\right)$ равна произведению вероятностей получить нули в каждой из первых k_1-1 попытках и вероятности выпадения единицы $k_1 -^{-}$попытке, то есть

$$P\left(k_1\right) = p(1-p)^{k_1-1}$$

Данное распределение называется геометрическим. Математическое ожидание числа попыток, необходимых, чтобы встретить первую единицу в последовательности независимых испытаний Бернулли, равно

$$\langle k_1\rangle = \sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 p(1-p)^{k_1-1} = p\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k_1=1}^{\infty} q^{k_1} = p\frac{\partial}{\partial q}\frac{q}{1-q} = \frac{1}{p}$$

Дисперсия номера попытки, в которой впервые выпадает единица равна

$$\begin{aligned}\sigma_{k_1}^2 &= \sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^2 p(1-p)^{k_1-1} - \frac{1}{p^2} = p\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 q^{k_1} - \frac{1}{p^2} = \\ &= p\frac{\partial}{\partial q}\left[q\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k_1=1}^{\infty} q^{k_1}\right] - \frac{1}{p^2} = p\frac{\partial}{\partial q}\left[q\frac{\partial}{\partial q}\frac{q}{1-q}\right] - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

Упражнение: Симметричную монетку подбрасывают снова и снова до тех пор пока она не выпадет два раза подряд одной и той же стороной (неважно какой именно). Вычислите математическое ожидание необходимого числа бросаний k.

3.5.4 Распределение Пуассона

Теория

Найдем функцию распределения числа событий n, произошедших за время наблюдения t. Для этого разделим ось времени на малые интервалы длины $\Delta t \ll \lambda^{-1}, t$. Тогда число пуассоновских событий равно числу единиц в серии из $N = t/\Delta t$ независимых испытаний Бернулли, где вероятность получить единицу в очередном исходе составляет

$p = \lambda\Delta t$, причем $\Delta t \to +0$. Воспользовавшись результатом предудущего раздела, можно записать

$$p(n) = \lim_{\Delta t\to+0} B\left(n, \frac{t}{\Delta t}, \lambda\Delta t\right) = \lim_{\Delta t\to+0} \frac{\left(\frac{t}{\Delta t}\right)!}{n!\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right)!}(\lambda\Delta t)^n(1-\lambda\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}-n} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to+0} \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^n(\lambda\Delta t)^n(1-\lambda\Delta t)^{\frac{\lambda t}{\lambda\Delta t}} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

Данное распределение называется распределением Пуассона, а сам факт стремления биномиального распределения к распределению Пуассона в пределе $p \to +0, N \to +\infty, pN = \mathrm{const}$ известен как предельная теорема Пуассона, или закон редких событий, или закон малых чисел. Можно сказать, что пуассоновский процесс представляет собой континуальный предел процесса Бернулли. Среднее число событий, произошедших за время t равно

$$\mu_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{m+1}}{m!} = \lambda t$$

где нами была выполнена замена индекса суммирования $m = n - 1$. Аналогично находим дисперсию числа событий, случившихся в промежутке времени длительностью t

$$\sigma_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} - (\lambda t)^2 = e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)\frac{(\lambda t)^{m+1}}{m!} - (\lambda t)^2 =$$
$$= e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^m}{(m-1)!} + e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!} - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

Суперпозиция потоков Пуассона

Важным свойством пуассоновского потока является его стабильность относительно сложения. Оказывается, суперпозиция двух независимых пуассоновских потоков с рейтами λ_1 и λ_2 дает пуассоновский поток с рейтом $\lambda_1 + \lambda_2$.

Для доказательства сложим количества событий, n_1 и n_2, произошедших за один и тот же интервал времени t в двух пуассоновских потоках с рейтами λ_1 и λ_2, соответственно. Характеристическая функция вероятностного распределения случайной величины $n = n_1 + n_2$ равна

$$\Phi(k) \equiv \left\langle e^{ik(n_1+n_2)}\right\rangle = \left\langle e^{ikn_1}\right\rangle\left\langle e^{ikn_2}\right\rangle = \varphi_1(k)\varphi_2(k),$$

где $\phi_1(k)$ и $\phi_2(k)$ - характеристические функции распределений Пуассона случайных величин n_1 и n_2, то есть

$$\varphi_1(k) \equiv \left\langle e^{ikn_1}\right\rangle = \exp\left(-\lambda_1 t\right)\sum_{n_1=0}^{+\infty} e^{ikn_1}\frac{(\lambda_1 t)^{n_1}}{n_1!} =$$
$$= \exp\left(\lambda_1 t\left(e^{ik}-1\right)\right),$$
$$\varphi_2(k) \equiv \left\langle e^{ikn_2}\right\rangle = \exp\left(\lambda_2 t\left(e^{ik}-1\right)\right).$$

Таким образом, находим

$$\Phi(k) = \varphi_1(k)\varphi_2(k) = \exp\left(\left(\lambda_1+\lambda_2\right)t\left(e^{ik}-1\right)\right).$$

откуда следует что случайная величина n имеет пуассоновское распределение с рейтом $\lambda_1 + \lambda_2$.

Деление потока Пуассона

Аналогично, пуассоновский поток с рейтом λ можно разделить на два независимых пуассоновских подпотока с рейтами λ_1 и $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$. Деление исходного процесса производится посредством подбрасывания монетки с вероятностями орла и решки равными λ_1/λ и $1 - \lambda_1/\lambda$, случайный исход которого определяет, к какому из двух производных процессов будет принадлежать очередное пуассоновское событие. Проще всего указанное свойство можно доказать, показав их справедливость для процесса Бернулли с малой вероятностью единицы, и перейдя затем к континуальному пределу.

Упражнение: Посетители прибывают в торговый комплекс в случайные моменты времени и независимо друг от друга со средней частотой λ. В каждом отдельном случае вероятность того, что очередной посетитель будет женского пола равна q. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа женщин, прибывших в в торговый комплекс за промежуток времени t.

Неоднородный поток Пуассона

Неоднородным потоком Пуассона называется поток событий, в котором вероятность $\lambda(t)dt$ наблюдать событие в промежутке времени $[t, t+dt]$ как и в однородном случае не зависит предшествующей истории наблюдений, но зависит от времени t. Такой процесс можно рассматривать как предельный случай последовательности независимых испытаний Бернулли, в которой вероятность выпадения единицы в очередной попытке зависит от номера этой попытки. К примеру, события распада радиактивных атомов в образце, состоящим в начальный момент времени из большого их числа $N_0 \gg 1$, представляют собой неоднородный пуассоновский процесс с рейтом $\lambda(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$.

Распределение числа событий

Пусть n - это число событий, произошедших за время t, отсчитываемое от произвольно выбранного момента начала наблюдений. Найдем функцию распределения вероятностей $p(n;t)$. В случае $n = 0$ получаем

$$P(0;t) = \Pr\left[qT_1 > t\right] = \int_t^{+\infty} dT_1 \frac{T_1}{\langle T_1 \rangle} P\left(T_1\right) \int_{t/T}^1 dq = \int_t^{+\infty} dT_1 \frac{T_1}{\langle T_1 \rangle} P\left(T_1\right) \left(1 - \frac{t_1}{T}\right),$$

где q - это отношение, в котором точка начала наблюдений делит межсобытийный интервал, на который она попала. Если $n > 0$, то искомое распределение можно записать как

$$\begin{aligned} P(n;t) &= \Pr\left[(qT_1 + T_2 + \ldots + T_n < t) \cap (T_{n+1} > t - qT_1 - T_2 - \ldots - T_n)\right] = \\ &= \int_0^t d\tau \rho(\tau) \int_{t-\tau}^{+\infty} dT_{n+1} P\left(T_{n+1}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

где $\rho(\tau)$ - плотность вероятности случайной величины $qT_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

Решение в Лаплас-представлении Из соотношения (23) с учетом теоремы о свертке следует простая связь между Лаплас-образами функциями $p(n;t), \rho(\tau)$ и $P(T)$, а именно

$$\tilde{p}(n;s) = \frac{1 - \tilde{P}(s)}{s} \tilde{\rho}(s),$$

где

$$\tilde{\rho}(s) = \left\langle e^{-s\tau} \right\rangle = \left\langle e^{-s(qT_1+T_2+\ldots+T_n)} \right\rangle = \left\langle e^{-sqT_1} \prod_{i=2}^{n} e^{-sT_i} \right\rangle = \left\langle e^{-sqT_1} \right\rangle \prod_{i=2}^{n} \left\langle e^{-sT_i} \right\rangle \quad (25)$$

$$= \tilde{P}^{n-1}(s) \int_0^{+\infty} dT_1 \frac{T_1}{\langle T_1 \rangle} P\left(T_1\right) \int_0^1 dq e^{-sqT_1} = \tilde{P}^{n-1}(s) \int_0^{+\infty} dT_1 P\left(T_1\right) \frac{1-e^{-sT_1}}{\langle T_1 \rangle\, s} = \quad (26)$$

$$= \frac{\tilde{P}^{n-1}(s)(1-\tilde{P}(s))}{\langle T \rangle s}.$$

Подставляя этот результат в Ур. (24), находим

$$\tilde{p}(n;s) = \frac{(1-\tilde{P}(s))^2 \tilde{P}^{n-1}(s)}{\langle T \rangle s^2}$$

Упражнение: Проверьте, что в случае экспонециального распределения интервала времени между последовательными событиями обратное преобразование Лапласа от выражения (28) дает распределение Пуассона.

Теорема о свертке (напоминание) Пусть

$$\varphi(t) = \int_0^t d\tau f(\tau) F(t-\tau)$$

Умнодим обе части этого равенства на e^{-st} и проинтегрируем по от 0 до $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-st} \varphi(t) = \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \int_0^t d\tau f(\tau) F(t-\tau)$$

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} dt \int_0^t d\tau e^{-st} f(\tau) F(t-\tau).$$

Замена переменных $x = t-\tau, y = s$ позволяет записать

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy e^{-s(x+y)} f(y) F(x),$$

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} dx e^{-sx} F(x) \int_0^{+\infty} dy e^{-sy} f(y),$$

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{F}(s) \tilde{f}(s)$$

3.5.5 Экспоненциальное распределение

Теория по Белану

Рассмотрим теперь статистику интервала времени T между парой последовательных пуассоновских событий. Повторяя рассуждения аналогичные упомянутым выше, можно сказать, что T равно произведению Δt на разность номеров соседних единиц в серии из $N = T/\Delta t$ независимых испытаний Бернулли, где вероятность получить единицу в очередном исходе составляет $p = \lambda \Delta t$, причем $\Delta t \to +0$. Используя геометрическое распределение (4), запишем

$$P(T) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t} \lambda \Delta t (1-\lambda \Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}-1} = \lambda e^{-\lambda T}$$

Получили экспоненциальное распределение. Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины T

$$\mu_T = \int_0^{+\infty} dT \lambda e^{-\lambda T} T = \lambda^{-1}$$

3.5.6 Теоремы Муавра-Лапласа

Локальная теорема Муавра

Теорема

(Локальная теорема Муавра)

В схеме Бернулли, при вероятности испытания A $P(A) = p$, вероятность $P_n(m)$ событий A при $n \to \infty$ равномерно стремится к:

$$\sqrt{npq} P_n(m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \to 1.$$

где $x \equiv x_{mn} \equiv \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ находится в конечном интервале, $q = (1-p)$.

Доказательство (потом пропишу, пока не актуально, гнеденко стр 79)

Доказывается это с помощью формулы Стирлинга:

$$s! = \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s} e^{\theta_s}$$

$$|\theta_s| \leqslant \frac{1}{12s}$$

$$m = np + x\sqrt{npq}$$

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} e^{-\theta} \left(\frac{n}{m} p\right)^m \left(\frac{n}{n-m} q\right)^{n-m}$$

$$\theta = \theta_n - \theta_m - \theta_{n-m} < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right)$$

$$\ln A_n = \ln \left(\frac{n}{m} p\right)^m \left(\frac{n}{n-m} q\right)^{n-m} = -(np + x\sqrt{npq}) \ln \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x\sqrt{npq}) \ln \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{np}}\right) \quad (3.2)$$

$$\ln\left(1 + x\sqrt{\tfrac{q}{np}}\right) = x\sqrt{\tfrac{q}{np}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{qx^2}{np} + O\left(\tfrac{1}{n^{3/2}}\right)$$
$$\ln\left(1 - x\sqrt{\tfrac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{\tfrac{p}{nq}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{px^2}{nq} + O\left(\tfrac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$\ln A_n = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$A_n : e^{-\frac{x^2}{2}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$$\sqrt{npq} \cdot \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \to 1 \text{ равномерно}$$

(хз)

О случаях применимости локальной теоремы Муавра (??)

(не знаю, интересно)

Пример применения локальной теоремы Муавра: распределение Бернулли с $n = 10000, m = 40, p = 0,005$

пусть

$$n = 10000, m = 40, p = 0,005$$

По теореме Муавра имеем:

$$P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$$

примерно $\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0,005 \cdot 0,995} = \sqrt{49,75} \sim 7,05$; $\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \sim -1,42$
Осталось вычислить функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Значение ее ищется в таблице.
В итоге

$$P_n(m) \sim \frac{0,1456}{7,05} = 0,00206$$

(потом еще потренируюсь с таблицами)

Теорема Муавра-Лапласа в двух словах

Теорема

(Теорема Муавра-Лапласа)
вероятность этого события равна p, то равномерно относительно a и b ($-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$)

$$P\left\{a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Доказательство теоремы Муавра-Лапласа

(скорее всего это в части ниже будет, раз оно долгое. если короткое - вставлю в пар-ф выше)

Доказательство (см гнеденко)
и тут его три страницы, пока что не буду писать его

О случаях применимости теоремы Муавра-Лапласа (??)

(не знаю, интересно)

Обобщение теоремы Муавра на случай нескольких событий

Таким же способом можно доказать обобщение этой теоремы на случай нескольких испытаний $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Теорема

(потом запишу, пока что она не нужна)

Вероятность того, что каждое событий встретится m_1 раз удовлетворяет

$$\sqrt{n^{k-1}}P_n\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right) : \frac{e^{-\frac{1}{2}\Sigma_{i=1}q_i x_i^2}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_k}} \to 1$$

О случая применений локальной теоремы Муавра

(хз)

О случая применимости теоремы Муавра-Лапласа

(с опытом впишу)

Пример применения теоремы Муавра-Лапласа

(говорят, применений на самом деле много)

В этой главе нам часто нужно будет считать интегралы, если с этим возникают сложности, то следует смотреть раздел "математические методы"в конце этой записи.

Оценим вероятность неравенства $\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \epsilon$

имеем

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \epsilon\right\} = \mathbf{P}\left\{-\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

и в силу теоремы Муавра-Лапласа

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \epsilon\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 1$$

Что собственно и очевидно.

Это называется законом больших чисел.

(где-то мы это использовать начнем позже...)

Чему равна вероятность того, что частота наступления события A, у которого вероятность в каждом испытании равна p, за n испытаний отклонится от p не более чем на α?

$$P\left\{\left|\tfrac{\mu}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right\} = P\left\{-\alpha\sqrt{\tfrac{n}{pq}} \leqslant \tfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \alpha\sqrt{\tfrac{n}{pq}}\right\} \sim$$
$$\sim \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\tfrac{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \tfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

(численно можно досчитать)

еще пример у Гнеденко

(????)

3.6 Случайные величины в двух словах

Обсудим самую используемые свойства и конструкции случайной величины.

3.6.1 Типичные задачи о случайных величинах

Поиск распрпделения случайной величины из двух, распредееление которых известно (!??!??!?!?)

(максимально типичные задачи, пропишу, как решаются они!!!!)

3.6.2 Конструкция случайной величины

Обсудим конструкцию случайной величины.

Определение случайной величины

Основные формулы случайной величины (тут всё, что и использую чаще всего, скоро оттренирую, впишу. мб метод через индикаторы четко вставлю)

Вкратце о случайной величине и её использовании Случайной величиной называется функция, у которой прообраз любого борелевского множества принадлежит сигма алгебре исходного множества.

что еще?

(тут дальше пробегаюсь обзором, что вводятся дальше такие-то величины, так-то она используется. пересказ всего в двух словах. полезная такая заготовка, именно это я и думаю, когда представляю весь этот раздел.)

О том, почему такая замысловатая конструкция случайной величины (???) (а я хз на самом деле, так не понял, что-то тут на самом деле ведь заумно. чего не сказать проще??? очень акутальный вопрос)

Определение и свойства случайной величины

Определение 3.19. *Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ в $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ на произвольном множестве назвается функция $\xi = \xi(\omega)$, принимающая значения в множестве S с σ-алгеброй подмножеств Σ, называется любая $(\mathcal{F}, \Sigma)$-измеримая функция $\xi : \Omega \to S$, т.е. такая функция, что для любого подмножества $A \subseteq S, A \in \Sigma$, выполняется условие*

$$\xi^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$$

(???? я так и не понял, почему такое определение???)

Если $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ - случайные величины, заданные на одном и том же конечном или счетном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, а $g(X_1, \ldots, X_n)$ - функция, заданная на прямом произведении множеств значений этих случайных величин, то $\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ - тоже случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - произвольное вероятностное пространство, то для того, чтобы суперпозиция $g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ была случайной величиной, нужно налагать на функцию $g : \Omega \to S$ те или иные условия, обеспечивающие измеримость суперпозиции $g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

(?? потом подумаю про то, что выше, но скорее это не нужно)

О других определениях случайной величины (укажем тут, что квантовая случайная величина есть и что-нибудь еще, что дополлняет теорию выше)

Индикаторы событий

Пример: индикатор событий (мб про индикатор отдельный раздел сделаю потом)
Простейшая случайная величина - индикатор событий.
Индикатор для события $A \in \mathcal{F}$ определяется как:

$$I_A = I(A) = I_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ при } \omega \in A \\ 0 \text{ при } \omega \notin A \end{cases}$$

(что про него важное известно?)

О применении индикаторов (!!!) (почему ими часто пользуются в задачах??? я хз, пока не понимаю это)

Свойства индикаторов Свойства индикаторов следующие:
1) $I(\varnothing) \equiv 0, I(\Omega) \equiv 1,\ I\left(A^c\right) = 1 - I(A)$
2) Для любых событий $A_1, \ldots, A_n$

$$I\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = I\left(A_1\right) \ldots I\left(A_n\right)$$

3) Если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то

$$I\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^n I\left(A_i\right)$$

4) Если $A \cap B \neq \varnothing$, то $I(A \cup B) \neq I(A) + I(B)$.
5) В общем случае

$$I\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s < n} I\left(A_{k_1} \ldots A_{k_s}\right)$$

Доказательство (пока не смотрел пруф, потом впишу)
Докажем свойства выше. (? их же доказываем?)
Их можно вывести с помошью уже перечисленных свойств и равенства

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$$

Действительно:

$$\begin{aligned} I\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) =& 1 - I\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 - I\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) = \\ =& 1 - \prod_{k=1}^n I\left(\overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=1}^n \left(1 - I\left(A_k\right)\right) = \\ =& \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n} I\left(A_{i_1}\right) \cdots I\left(A_{i_s}\right) \end{aligned}$$

Заменяя произведения индикаторов индикаторами пересечений событий, получаем:

$$I\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} I\left(A_k\right) - \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n} I\left(A_{k_1}A_{k_2}\right) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant k_1<k_2<k_3\leqslant n} I\left(A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}\right) - \ldots + (-1)^{n-1} I\left(A_1\ldots A_n\right) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_s<n} I\left(A_{k_1}\ldots A_{k_s}\right)$$

Если I_A - индикатор события A, то

$$\mathbf{M} I_A = \mathbf{P}\{A\}$$

Действительно:

$$\mathbf{M} I_A = \sum_{\omega\in\Omega} I_A(\omega)\mathbf{P}(\omega) = \sum_{\omega\in A}\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}\{A\}$$

Порождение алгебры случайной величиной (зубков про начало про расрпделения)

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задана случайная величина ξ и множество ее значений $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счетно. Тогда события $A_j = \{\omega : \xi(\omega) = x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, образуют конечное или счетное разбиение Ω. Это разбиение порождает алгебру событий (подмножеств Ω)

$$A(\xi) = \{A = \{\omega\in\Omega : \xi(\omega)\in B\} : \quad B\subseteq S\}$$

поскольку для любого $B \subseteq S$

$$\{\omega\in\Omega : \xi(\omega)\in B\} = \left\{\omega\in\Omega : \xi(\omega)\in \bigcup\nolimits_{j:x_j\in B}\{x_j\}\right\} =$$
$$= \bigcup\nolimits_{j:x_j\in R}\{\omega\in\Omega : \xi(\omega) = x_j\} = \bigcup\nolimits_{j:x_j\in R} A_j$$

Так как события A_j не пересекаются, то

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}(\omega)x_k$$

$$A(\xi) = \{A = \{\omega\in\Omega : \xi(\omega)\in B\}, \quad B\in\Sigma\}$$

(?? и что с этого???)

Об ошибках в понимании случайной величины (!!!) (потом соберем их)

Независимость случайных величин

(16 зубков)

Определение независимости случайных величин

Определение 3.20. *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве и принимающие значения в измеримых пространствах $(S_1, \Sigma_1), \ldots,$ (S_n, Σ_n) соответственно, называются независимыми в совокупности, если независимы порожденные ими σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\xi_n}$ или, что то же самое, если для любых событий $B_1\in\Sigma_1, \ldots, B_n\in\Sigma_n$*

$$\mathbf{P}\left\{\xi_1\in B_1, \ldots, \xi_n\in B_n\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1\in B_1\right\}\ldots\mathbf{P}\left\{\xi_n\in B_n\right\}$$

Тут еще пара теорем от Зубкова (потом вставлю, пока раз не вставил, значит, скипануть можно)

3.6.3 Функция распределения случайной величины

вкратце о функции распределения

Полезны формулы:

$$F_\xi(x+0) - F_\xi(x-0) = \mathbf{P}\{\xi = x\} \ \forall x$$

? что еще???

О применениях функции распределения

(пока четко не вижу)

Функция распределения используется для получения плотности случайной величины.

Определение функции распределения и ее свойства

Случайная величина ξ со значениями в множестве S порождает меру на подмножествах $B \subseteq S, B \in \Sigma$ по формуле

$$\mathbf{P}_\xi\{B\} = \mathbf{P}\{\xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \Sigma$$

Эта мера называется законом распределения (или просто распределением) случайной величины ξ

Закон распределения является мерой на пространстве значений случайной величины и не связан жестко с каким-либо вероятностным пространством.

Случайные величины с одним и тем же законом распределения могут быть определены на разных вероятностных пространствах, и на одном вероятностном пространстве можно определить разные случайные величины с одним и тем же законом распределения. Так как в теории вероятностей, как правило, изучаются только свойства распределений случайных величин, то случайные величины с одинаковыми распределениями обычно считаются эквивалентными

Если случайная величина ξ принимает действительные значения, то закон ее распределения удобно описывать функцией распределения

$$F_\gamma(x) = \mathbf{P}\{\xi \leqslant x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

Свойства функции распределения

(их помню, потом посмотрю док-ва)

Теорема

Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ не убывает,
2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ непрерывна справа $\mathbf{P}\{\xi < x\} = F(x-0) = \lim_{y\uparrow x} F(y)$

Доказательство (???? не смотрел, ибо не актуально)
Посмотрим на каждый пункт в отдельности.
1. Если $x < y$, то $\{\xi \leqslant y\} \supseteq \{\xi \leqslant x\}$ и

$$F(y) - F(x) = \mathbf{P}\{\gamma \leqslant y\} - \mathbf{P}\{x < \xi \leqslant y\} \geq 0$$

2. Из равенства $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1}(C_n \backslash C_{n-1})$, где $C_n = \{\omega : -n < \xi \leqslant n\}, C_0 = \varnothing$, получаем, что

$$1 = \mathbf{P}\{\Omega\} = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\left\{C_n | C_{n-1}\right\} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}\left\{C_n \backslash C_{n-1}\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{C_n\right\} = \lim_{N\to\infty}(F(N) - F(-N))$$

Теперь из того, что $F(x) \in [0,1]$ при всех x, следуют равенства

$$\lim_{x\to\infty} F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(\infty) = 1$$

3. Рассмотрим последовательность непересекающихся множеств

$$B_n = \left(\omega : x + \frac{1}{n+1} < \xi(\omega) \leqslant x + \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда $\{\omega : \quad x < \xi \leqslant x + 1\} = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ и

$$F(x+1) - F(x) = \mathbf{P}\{x < \xi \leqslant x + 1\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{n\geqslant 1} B_n\right\} =$$
$$= \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\left\{B_n\right\} = \sum_{n\geqslant 1}\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F\left(x + \frac{1}{n+1}\right)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{n=1}^{N}\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F\left(x + \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(F(x+1) - F\left(x + \frac{1}{N+1}\right)\right.$$

Следовательно,

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} F\left(x + \frac{1}{N+1}\right) = F(x+0) = \lim_{y\downarrow x} F(y)$$

Аналогично, рассматривая непересекающиеся множества

$$A_1 = \{\omega : \xi \leqslant x - 1\}, \quad A_n = \left\{x - \frac{1}{n-1} < \xi_n \leqslant x - \frac{1}{n}\right\}, \quad n \geqslant 2$$

для которых $\{\omega : \quad \xi < x\} = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, находим

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\xi < x\} =& \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\left\{A_n\right\} = \\
=& F(x-1) + \sum_{n\geqslant 2}\left(F\left(x - \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n-1}\right)\right) = \\
=& \lim_{N\to\infty}\left(F(x-1) + \sum_{n=2}^{N}\left(F\left(x - \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n-1}\right)\right)\right) = \\
=& \lim_{N\to\infty} F\left(x - \frac{1}{N}\right) = \lim_{y\uparrow x} F(y) = F(x-0)
\end{aligned}$$

Следствие. $F_\xi(x+0) - F_\xi(x-0) = \mathbf{P}\{\xi = x\}$ при любом x.

$F'(x) = p\xi(x)$ **- связь с плотностью распределения** плотностью распределения ξ есть производная $F'(x) = p\xi(x)$, если она существует.

(??? и про неё нужно еще что-то сказать??)

3.6.4 Совместные распределения

Рассмотрим распределение нескольких случайных величин.

Вероятность совместного распределения

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ по набору случайных величин $\xi_1 = \xi_1(\omega), \ldots, \xi_k = \xi_k(\omega)$ можно построить новую случайную величину: случайный вектор

$$\Xi = \Xi(\omega) = (\xi_1, \ldots, \xi_k)\,, \quad \omega \in \Omega$$

Пусть случайные величины имеют измеримые пространства значений $(S_1, \Sigma_1)\,, \ldots, (S_k, \Sigma_k)$ принимающий значения в пространстве $S = S_1 \times \ldots \times S_k$.

В пространстве S рассматривается σ-алгебра подмножеств, порожденная прямыми произведениями элементов $\xi_1, \ldots, \xi_k$ пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задан случайный вектор

$$\Xi = \Xi(\omega) = (\xi_1, \ldots, \xi_k)\,, \quad \omega \in \Omega$$

со значениями в пространстве $S = S_1 \times \ldots \times S_k$, То по нему однозначно определяются образуюпуие его случайные компоненты

$$\xi_1 = \xi_1(\omega), \ldots, \xi_k = \xi_k(\omega)$$

а по распределению Ξ в пространстве $S = S_1 \times \ldots \times S_k$ - распределения его компонент:

$$\mathbf{P}\left\{\xi_j \in B_j\right\} = \mathbf{P}\left\{\Xi \in S_1 \times \ldots \times S_{j-1} \times B_j \times S_{j+1} \times \ldots \times S_k\right\}$$

Компонент случайного вектора называются его маргинальными распределениями.

О случаях применения совместного распределения (!!!)

(!! что-то вроде я уже напарывался на то, что задача не решается, потому что не владею этой темой!! соберу её скоро мб!!)

Совместное распределение для двух случайных величин

В простейшем случае на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ есть две случайные величины $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ И $y_1, \ldots, y_n$ - все возможные зНачения случайных величин ξ и η соответственно:

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}\left\{\xi = x_r\right\} = p_r, \quad r = 1, \ldots, m, \quad p_1 + \ldots + p_m = 1 \\ \mathbf{P}\left\{\eta = y_s\right\} = q_s, \quad s = 1, \ldots, n, \quad q_1 + \ldots + q_n = 1 \end{array}$$

случайных величин ξ и η Определяется вероятностями

$$v_{rs} = \mathbf{P}\left\{\xi = x_r, \quad \eta = y_s\right\}, \quad r \in \{1, \ldots, m\}, \quad s \in \{1, \ldots, n\}$$

Пределением $\{v_{rs}\}$ и маргинальными распределениями $\{p_r\}$ и $\{q_s\}$ описывается соотношениями

$$\begin{array}{l} p_r = \mathbf{P}\left\{\xi = x_r\right\} = \mathbf{P}\left\{(\xi, \eta) \in \{x_r\} \times \{y_1, \ldots, y_n\}\right\} = \sum_{s=1}^{n} v_{rs} \\ q_r = \mathbf{P}\left\{\eta = y_s\right\} = \mathbf{P}\left\{(\xi, \eta) \in \{x_1, \ldots, x_m\} \times \{y_s\}\right\} = \sum_{r=1}^{m} v_{rs} \end{array}$$

(тут хотя бы одну типичную задачу вставлю, ибо на формулу выше много задач есть!!!)

Функция распределения совместных величин

(из горяйнова, пока не очень зашло)

Совместное распределение случайных величин также можно описать функцией распределения. Пусть ξ и η - две случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Тогда их совместная функция распределения есть:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant x, \eta(\omega) \leqslant y\})$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Отметим свойства $F_{\xi,\eta}$ как функции двух переменных.

$1^*.F_{\xi,\eta}(x,y)$ не убывает по каждой переменной;

$2^*.F_{\xi,\eta}(x,y)$ непрерывна справа по каждой переменной и

$$F_{\xi,\eta}(-\infty, y) = F_{\xi,\eta}(x, -\infty) = 0, \quad F_{\xi,\eta}(+\infty, +\infty) = 1$$

3^*. Для всех $x, y \in \mathbb{R}, \Delta x \geqslant 0, \Delta y \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$F_{\xi,\eta}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{\xi,\eta}(x, y+\Delta y) - F_{\xi,\eta}(x+\Delta x, y) + F_{\xi,\eta}(x,y) \geqslant 0$$

Свойства $1^* - 3^*$ являются характеристическими для совместной функции распределения.

Кроме того, совместная функция распределения содержит в себе индивидуальные (одномерные) функции распределения:

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y), \quad F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y)$$

Определение параметров для совместного распределения (!?!)

(очень часто именно в этом и задача, найти ковариацию, дисперсию их. как решать - все еще хз.)

Совместное распределение для более чем двух случайных величин

3.6.5 Математическое ожидание

Конструкция математического ожидания

Основные формулы математического ожидания Наиболее важно знать следующие формулы математического ожидания:

Определим простые случайные величины, как величины, принимающие лишь конечное число разных значений.

Для простой случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, принимающей значения из конечного множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$, математическое ожидание было определено равенством

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$$

Если распределение случайной величины ξ имеет плотность $p_\xi(x) u \int_{\mathbb{R}} |x| p_\xi(x) dx < \infty$, то

$$\mathbf{M}\xi = \int_{\mathbb{R}} x p_\xi(x) dx$$

Определение Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство, и пространство элементарных $\mathbf{P}(\omega)$ на элементах ω пространства элементарных событий Ω. Пусть, далее, $\xi = \xi(\omega)$ случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимающая действительные значения.

Определение 3.21. *математическим ожиданием называется величина*

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega) = S_+(\xi) + S_-(\xi)$$

если обе величины

$$S_+(\xi) = \sum_{\omega\in\Omega:\xi(\omega)\geqslant 0} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega), \quad S_-(\xi) = \sum_{\omega\in\Omega:\xi(\omega)<0} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega)$$

конечны; если же хотя бы одна из них бесконечна, то говорят, что случайная величина ξ не имеет математического ожидания.

Основные свойства математического ожидания (?) (излишнее перенесу потом в главу ниже)

Рассмотрим основные свойства математического ожидания

Конечная аддитивность математического ожидания: Если каждая из случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеет конечное математическое ожидание, то

$$\mathbf{M}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right) = \mathbf{M}\xi_1 + \ldots + \mathbf{M}\xi_n$$

Доказательство Рассмотрим сначала сумму двух случайных величин. Ввиду абсолютной сходимости рядов $\sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega)$ и $\sum_{\omega\in\Omega} \eta(\omega)\mathbf{P}(\omega)$ их члены можно переставлять, не изменяя значения суммы, и поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta &= \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} \eta(\omega)\mathbf{P}(\omega) = \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} (\xi(\omega) + \eta(\omega))\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{M}(\xi + \eta)\end{aligned}$$

В последнем переходе использовано определение математического ожидания. Общий случай следует из этого частного индукцией по числу слагаемых:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right) =& \mathbf{M}\left(\left(\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1}\right) + \xi_n\right) = \\ &= \left(\mathbf{M}\xi_1 + \ldots + \mathbf{M}\xi_{n-1}\right) + \mathbf{M}\xi_n\end{aligned}$$

Условие конечности математических ожиданий слагаемых существенно. Например, если $\gamma = \gamma(\omega)$ - случайная величина, не имеющая математического ожидания, а $\xi(\omega) = -\gamma(\omega)$, то $\xi(\omega) + \gamma(\omega) = 0$ при любом $\omega \in \Omega$, и поэтому $\mathbf{M}(\xi + \gamma) = 0$, однако $\mathbf{M}(\xi + \gamma) \neq \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\gamma$, так как правая часть не определена.

Счетная аддитивность: если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left|\xi_n\right| < \infty$, то

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n$$

Действительно, правую часть (24) можно представить в виде двойного ряда, который по условию (23) сходится абсолютно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega\in\Omega} \xi_n(\omega)\mathbf{P}(\omega), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega\in\Omega} \left|\xi_n(\omega)\mathbf{P}(\omega)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left|\xi_n\right| < \infty$$

а левая часть (24) получается из этого двойного ряда изменением порядка суммирования:

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\right\}=\sum_{\omega\in\Omega}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(\omega)\right)\mathbf{P}(\omega)$$

для абсолютно сходящегося ряда такая операция не изменяет его сумму.

Линейность: если $b, c \in R$ - константы, а ξ - случайная величина, то

$$\mathbf{M}(c\xi+b)=c\mathbf{M}\xi+b$$

Действительно,

$$\mathbf{M}(c\xi+b)=\sum_{\omega\in\Omega}(c\xi(\omega)+b)\mathbf{P}(\omega)=c\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\mathbf{P}(\omega)+b\sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{P}(\omega)=c\mathbf{M}\xi+b$$

Теоремы о предельном переходе математического ожидания (!!!!) (тут потом немного комментариев добавлю, чисто как обзорный пар-ф. подробнее - в части ниже. и нужно потренироваться, чисто анализ!!!)

Основные теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания есть следующие.

Теорема

[О монотонной сходимости] Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$- неотричательные случайных величин $u\xi_n \nearrow \xi$. Тогда $\mathbf{M}\xi_n \nearrow \mathbf{M}\xi$ при $n \to \infty$

Здесь для удобства формулировки теоремы допускается случай $\mathbf{M}\xi = +\infty$. Тогда и $\mathbf{M}\xi_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Это допущение предполагается и в последующих формулировках теорем.

(тут комментарий про идею док-ва, пока хз)

Теорема

[Лемма Фату] Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ — неотрицательные случайные величины. Тогда

$$\mathbf{M}\varliminf_{n\to\infty}\xi_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mathbf{M}\xi_n$$

(тут комментарий про идею док-ва и применения, пока хз)

Теорема

[Лебега о мажорируемой сходимости] Пусть $\eta, \xi_1, \xi_2, ..$. — случайные величины, для которых выполняются следующие условия: $|\xi_n| \leq \eta$ для всех n, $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и $\mathbf{M}\eta < \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\xi_n=\mathbf{M}\xi, \quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left|\xi_n-\xi\right|=0$$

(тут комментарий про идею док-ва и применения, пока хз)

Мультипликативное свойство математических ожиданий длянезависимых случайных величин с не более чем счетными значениями (вроде, всё просто, да? зубков 17)

Теорема

Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, принимают значения из конечного или счетного множества действительных чисел, имеют конечные математические ожидания и независимы, то

$$\mathbf{M}\left(\xi_1 \ldots \xi_n\right) = \mathbf{M}\xi_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}\xi_n$$

Доказательство проведем индукцией по числу сомножителей.

(??? тут укажу идею док-ва, пока не так уловил)

Основным случаем является база индукции: $n = 2$. Пусть ξ и η - независимые случайные величины; будем обозначать через $x_1, x_2, \ldots$ все возможные значения ξ, через $y_1, y_2, \ldots$ - все возможные значения η. Случайные величины ξ и η порождают разбиения

$$\begin{gathered}\left\{A_j = \{\omega \in \Omega: \quad \xi(\omega) = x_j\right\}, \quad j \geqslant 1\} \\ \left\{B_k = \{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = y_k\right\}, \quad k \geqslant 1\}\end{gathered}$$

пространства элементарных событий Ω; тогда

$$\begin{gathered}\xi = \sum_{j \geqslant 1} x_j I\left(A_j\right), \quad \mathbf{M}\xi = \sum_{j \geqslant 1} x_j \mathbf{P}\left\{A_j\right\} \\ \eta = \sum_{k \geqslant 1} y_k I\left(B_k\right), \quad \mathbf{M}\eta = \sum_{k \geqslant 1} y_k \mathbf{P}\left\{B_k\right\}\end{gathered}$$

и

$$\xi\eta = \left(\sum_{j \geqslant 1} x_j I\left(A_j\right)\right) \cdot \left(\sum_{k \geqslant 1} y_k I\left\{B_k\right\}\right) =$$

$$= \sum_{j \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} x_j y_k I\left(A_j\right) I\left(B_k\right) = \sum_{j \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} x_j y_k I\left(A_j B_k\right)$$

Остается воспользоваться возможностью почленного умножения абсолютно сходящихся рядов для $\mathrm{M}\,\xi$ и $\mathbf{M}\eta$, независимостью ξ и η и определением математического ожидания:

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta = \left(\sum_{j \geqslant 1} x_j \mathbf{P}\left\{A_j\right\}\right)\left(\sum_{k \geqslant 1} y_k \mathbf{P}\left\{B_k\right\}\right) = \\ = \sum_{j \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} x_j y_k \mathbf{P}\left\{A_j\right\} \mathbf{P}\left\{B_k\right\} = \sum_{j \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} x_j y_k \mathbf{P}\left\{A_j B_k\right\} = \mathbf{M}\xi\eta\end{gathered}$$

Если утверждение теоремы верно для $n-1$, то по уже доказанному

$$\mathbf{M}\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right) = \mathbf{M}\left(\left(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}\right) \xi_n\right) = \mathbf{M}\left(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}\right) \mathbf{M}\xi_n = \mathbf{M}\xi_1 \cdot \ldots \mathbf{M}\xi_n$$

Теорема доказана.

(тут комментарии и дополнения укажу. зачем теорема нужна, всё такое. пока вроде понятно, ну и ок.)

Математическое ожидание случайной величины с произвольным распределением (зубков)

Определим простые случайные величины, как величины, принимающие лишь конечное число разных значений.

Для простой случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, принимающей значения из конечного множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$, математическое ожидание было определено равенством

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}\left\{\xi = x_k\right\}$$

При распространении понятия математического ожидания на произвольные случайные величины, принимающие действительные значения, следует его определить сначала для неотрицательных случайных величин, а потом - для произвольных по следующей схеме:

(?? чего проще не получается?? потом подумаю.)

а) для неотрицательной случайной величины $\xi \geqslant 0$ строится монотонно возрастающая последовательность простых случайных величин $\xi_n(\omega)$

$$\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega) \text{ при } n \uparrow \infty \text{ для всех } \omega \in \Omega$$

и полагают

$$\mathbf{M}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n$$

б) произвольная случайная величина ξ представляется в виде разности двух неотрицательных случайных величин: $\xi = \xi_+ - \xi_-$, где $\xi_+ = \max(\xi, 0)$, $\quad \xi_- = \max(-\xi, 0)$, и полагают $\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\xi_+ - \mathbf{M}\xi_-$

Корректность такого определения математического ожидания обосновывается следующим утверждением.

Теорема

Если $\xi = \xi(\omega)$ - неотрицательная случайная величина, а $\xi_n = \xi_n(\omega)$ $-u\eta_n = \eta_n(\omega)$ - неубывающие последовательности простых случайных величин, сходящиеся к $\xi(\omega)$ при каждом $\omega \in \Omega$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\eta_n$$

Доказательство очевидная лемма.

Пусть $\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots$ - простые случайные величины, $\xi_n \uparrow \xi \geqslant \eta, n \uparrow \infty$.

Тогда $\lim_n \mathbf{M}\xi_n \geqslant \mathbf{M}\eta$

Доказательство леммы.

Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. События $A_n = \{\omega : \xi_n(\omega) \geqslant \eta(\omega) - \varepsilon\}$ монотонно возрастают по n и в силу условия леммы $\overline{A_n} \downarrow \varnothing$ значит, $\mathbf{P}\left\{\overline{A_n}\right\} \to 0, \mathbf{P}\left\{A_n\right\} \to 1, n \to \infty$.

Далее

$$\xi_n \geqslant \xi_n I_{A_n} \geqslant (\eta - \varepsilon) I_{A_n} = \eta - \varepsilon I_{A_n} - \eta I_{\overline{A_n}}$$

и по свойствам математических ожиданий простых случайных величин

$$\mathbf{M}\xi_n \geqslant \mathbf{M}\left(\eta - \varepsilon I_{A_n} - \eta I_{\overline{A_n}}\right) = \mathbf{M}\eta - \varepsilon \mathbf{P}\left\{A_n\right\} - z\mathbf{P}\left\{\overline{A_n}\right\}$$

где $z < \infty$ выбрано так, что $\mathbf{P}\{\eta \leqslant z\} = 1$($\eta$ - простая случайная величина). Переходя к пределу по $n \to \infty$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n \geqslant \mathbf{M}\eta - \varepsilon \text{ при любом } \varepsilon > 0$$

что эквивалентно утверждению леммы. Перейдем к доказательству теоремы. Для каждого $m < \infty$ имеем по условию $\xi_n \uparrow \xi \geqslant \eta_m, n \uparrow \infty$, и в силу леммы

$$\lim_n \mathbf{M}\xi_n \geqslant \mathbf{M}\eta_m \text{ при любом } m = 1, 2, \ldots$$

переходя к пределу по $m \to \infty$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n \geqslant \lim_{m\to\infty} \mathbf{M}\eta_m$$

что эквивалентно утверждению леммы.

Перейдем к доказательству теоремы.

Для каждого $m < \infty$ имеем по условию $\xi_n \uparrow \xi \geqslant \eta_m, n \uparrow \infty$, и в силу леммы

$$\lim_n \mathbf{M}\xi_n \geqslant \mathbf{M}\eta_m \text{ при любом } m = 1, 2, \dots$$

переходя к пределу по $m \to \infty$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n \geqslant \lim_{m\to\infty} \mathbf{M}\eta_m$$

В силу симметрии $\lim_{m\to\infty} \mathbf{M}\eta_m \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n$. Следовательно

$$\lim_n \mathbf{M}\xi_n = \lim_n \mathbf{M}\eta_n$$

При переходах, описанных в пп. а) и б), сохраняются все установленные нами ранее свойства математических ожиданий и формулы для их вычислений.

Доказательства этого проводятся по одной и той же схеме.

(?? я так и не понял, чего оно такое большое?)

Мультипликативность математического ожидания в для счетнозначных случайных величин Покажем, что для независимых случайных величин определенное с помощью предельного перехода математическое ожидание обладает свойством мультипликативности.

Теорема.

Если ξ и η - независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, то

$$\mathbf{M}\xi\eta = \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta$$

Доказательство.

а) Для простых независимых случайных величин оно уже доказано.

б) Пусть ξ и η - независимые неотрицательные случайные величины. Введем монотонно неубывающие последовательности простых случайных величин

$$\xi_n = \min\left\{n, \left[2^n\xi\right]/2^n\right\} \uparrow \xi, \quad \eta_n = \min\left\{n, \left[2^n\eta\right]/2^n\right\} \uparrow \eta$$

При каждом n простые случайные величины ξ_n и η_n независимы как функции от независимых случайных величин ξ и η. Последовательность $\xi_n\eta_n$ состоит из простых случайных величин, монотонна и сходится к случайной величине $\xi\eta$. Из соотношений

$$\mathbf{M}\xi_n \to \mathbf{M}\xi, \quad \mathbf{M}\eta_n \to \mathbf{M}\eta, \quad \mathbf{M}\xi_n\eta_n \to \mathbf{M}\xi\eta, \quad n \to \infty$$

и из того, что $\mathbf{M}\xi_n\eta_n = \mathbf{M}\xi_n\mathbf{M}\eta_n$, следует, что

$$\mathbf{M}\xi\eta = \lim \mathbf{M}\xi_n\eta_n = \lim \mathbf{M}\xi_n\mathbf{M}\eta_n = \lim \mathbf{M}\xi_n \lim \mathbf{M}\eta_n = \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta$$

в) Пусть ξ и η - независимые случайные величины, принимающие как положительные, так и отрицательные значения. Тогда

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad \eta = \eta^+ - \eta^-, \quad x^+ = \max\{0, x\}, \quad x^- = \max\{0, -x\}$$

Случайные векторы (ξ^+, ξ^-) , (η^+, η^-) независимы как функции от независимых случайных величин ξ и η и имеют неотрицательные компоненты. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\xi\eta = \mathbf{M}\left(\xi^+ - \xi^-\right)\left(\eta^+ - \eta^-\right) &= \\ = \mathbf{M}\xi^+\eta^+ - \mathbf{M}\xi^+\eta^- - \mathbf{M}\xi^-\eta^+ + \mathbf{M}\xi^-\eta^- &= \\ = \mathbf{M}\xi^+\mathbf{M}\eta^+ - \mathbf{M}\xi^+\mathbf{M}\eta^- - \mathbf{M}\xi^-\mathbf{M}\eta^+ + \mathbf{M}\xi^-\mathbf{M}\eta^- &= \\ = \left(\mathbf{M}\xi^+ - \mathbf{M}\xi^-\right)\left(\mathbf{M}\eta^+ - \mathbf{M}\eta^-\right) &= \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta\end{aligned}$$

Об ошибках в понимании математического ожидания (хз)

Формулы для вычисления математического ожидания

(зубков)

(потом перепишу, я пока не пойму, очевидные же вещи, если это так, то вынесу их отдельно в параграф до этого)

Формулы для математических ожиданий случайных величин с дискретными распределениями выведены раньше.

(да?)

Теория Для неотрицательной случайной величины ξ с действительными значениями и произвольным распределением математическое ожидание определяется по общей схеме с помощью неубывающей последовательности простых случайных величин, сходящуюся к ξ при $n \to \infty$,

(????)

например, с помощью последовательности $\xi_n(\omega) = \min\left\{n, \frac{[2^n\xi(\omega)]}{2^n}\right\}$

$$\mathbf{M}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{P}\left\{\omega : \frac{k-1}{2^n} < \xi(\omega) \leq \frac{k}{2^n}\right\}$$

Этот предел является интегралом Лебега по пространству элементарных событий Ω и обозначается $\int_\Omega \xi(\omega) d\mathbf{P}\{\omega\}$

(??????)

Неотрицательная случайная величина определяет меру $P_\xi(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\}$ на полуоси $[0, \infty)$ и функцию распределения $F_\xi(x)$. В этих терминах формулу для $\mathbf{M}\xi$ можно представить в виде

$$\mathbf{M}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2} \mathbf{P}\left\{\left(\frac{k-1}{2^n} < \xi(\omega) \leqslant\leqslant \frac{k}{2^n}\right)\right)\right\} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2} \left(F_\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - F_\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right) = \int_0^\infty x dF(x)$$

т.е. в виде интеграла Лебега-Стилтьеса.

Случайную величину ξ, принимающую значения обоих знаков, можно представить в виде разности двух неотрицательных случайных величин ξ^+ и ξ^-, и, применяя к каждой из них последнюю формулу и объединяя результаты, получим следующее выражение:

$$\mathbf{M}\xi = \int_R x dF(x)$$

Из него следует формула для вычисления математического ожидания случайной величины, имеющей абсолютно непрерывное распределение.

Математическое ожидание для величины с плотностью распределения (!! думаю, это важно, в какой-то задаче такая же конструкция использовалась!!)

Утверждение 1.

Если распределение случайной величины ξ имеет плотность $p_\xi(x)$ и $\int_\mathbb{R} |x| p_\xi(x) dx < \infty$, то

$$\mathbf{M}\xi = \int_\mathbb{R} x p_\xi(x) dx$$

Доказательство.

При условиях утверждения

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} = F_\xi(0) + \int_0^x p_\xi(u)du$$

и поэтому по правилам интегрального исчисления

$$\mathbf{M}\xi = \int_{\mathbb{R}} xdF_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} xd\left(F_\xi(0) + \int_0^x p_\xi(u)du\right) = \int_{\mathbb{R}} xp_\xi(x)dx$$

Немного сложнее (фактически повторяя процедуру определения математического ожидания) проводится доказательство формулы для математического ожидания функции от случайной величины.

Лемма 4 (Математическое ожидание от функции от случайной величины)**.** *Если распределение случайной величины ξ имеет плотность $p_\xi(x)$, функция $g(x)$ кусочно-непрерывна, а также $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|p_\xi(x)dx < \infty$, то*

$$\mathbf{M}g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p_\xi(x)dx$$

Доказательство.

Как и при определении математического ожидания, достаточно рассмотреть случай, когда $g(x) \geqslant 0$ при всех x.

Прежде всего заметим, что формула (42) верна, если $g(x)$ - ступенчатая функция.

Действительно, в этом случае существует такое разбиение действительной оси на не более чем счетное множество интервалов $\Delta_k = (a_k, b_k)\,, k = 1, 2, \ldots$, что $g(x) = g_k$ для всех $x \in \Delta_k$.

Множество концов этих интервалов относительно непрерывного распределения имеет нулевую меру и поэтому не влияет на значения математического ожидания и интеграла.

Отсюда и из свойств счетной аддитивности математического ожидания и интеграла следует, что

$$\mathrm{M}\, g(\xi) = \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{M}\, g(\xi)\mathbb{I}\left\{\xi \in \Delta_k\right\} =$$
$$= \sum_{k\geqslant 1} g_k \mathbf{P}\left\{\xi \in \Delta_k\right\} = \sum_{k\geqslant 1} g_k \int_{\Delta_k} p_\xi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)p_\xi(x)dx$$

Если функция $g(x)$ кусочно-непрерывна, то существует разбиение действительной оси на не более чем счетное множество интервалов, на каждом из которых функция $g(x)$ непрерывна. Аналогично предыдущему отсюда следует, что достаточно доказать равенство

$$\mathbf{Mg}(\xi)\mathbb{I}\{\xi \in (a, b)\} = \int_a^b g(x)p_\xi(x)dx$$

для случая, когда $g(x)$ непрерывна на конечном интервале (a, b) $\int_a^b |g(x)|p_\xi(x)dx < \infty$ Для доказательства, во-первых, построим ступенчатую функцию $g^*(x), x \in (a, b)$ удовлетворяющую условию $g(x) \leqslant g^*(x) \leqslant g(x) + 1$ при всех $x \in (a, b)$ (это возможно в силу непрерывности $g(x)$). Тогда случайная величина $g^*(\xi)$ имеет дискретное распределение и $\mathbf{M}g^*(\xi) \leqslant \int_a^b (g(x) + 1)dx < \infty$ Во-вторых, построим последовательность ступенчатых функций $g_n(x)$, сходящуюся к $g(x)$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда последовательность случайных величин $g_n(\xi)$ сходится к случайной величине $g(\xi)$,которая не больше случайной величины $g^*(\xi)$ с конечным математическим ожиданием. По теореме о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} g_n(\xi) = \mathbf{M} g(\xi)$$

но, как было показано выше, $\mathbf{M} g_n(\xi) = \int_a^b g_n(x) p_\xi(x) dx$, а эти интегралы при $n \to \infty$ сходятся к $\int_a^b g(x) p_\xi(x) dx$ по построению функций $g_n(x)$. Утверждение доказано.

3.6.6 Дисперсия

Обсудим наиболее используемую теорию дисперсии.

Конструкция дисперсии

Теория Центральный момент второго порядка всегда неотрицателен и имеет собственное название - дисперсия-и два обозначения: $D\xi$ и $\sigma^2(\xi)$, поскольку является важной и удобной характеристикой распределения случайной величины:

$$\mathbf{D}\xi = \sigma^2(\xi) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2$$

Так же, как математическое ожидание является средним значением случайной величины, дисперсия является средним значением квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Величина $\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}\xi}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ и характеризует степень разброса значений случайной величины ξ около $\mathbf{M}\xi$. Свойства дисперсии: 1. Выражение через степенные моменты:

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2$$

О применениях дисперсии (пропишу четко)

3.6.7 Степенные моменты

кратко о моментах что тут будет и как их используем?
????

Степенные моменты случайных величин

(14 зубков)

Пусть ξ - случайная величина, принимаюшяая значения из множества $\{x_1, x_2, \ldots\}$ а $g(x)$ - Числовая функция. Тогда $\eta = g(\xi)$ - тоже случайная величина,

$$\eta = \sum_{k\geqslant 1} g(x_k) I\{\xi = x_k\}$$

$$\mathbf{M} g(\xi) = \mathbf{M}\eta = \sum_{k\geqslant 1}^{n} g(x_k) \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$$

Полагая $g(x) = x^n, g(x) = |x|^n, g(x) = (x - \mathbf{M}\xi)^n,$, мы получаем величины, каждая из которых имеет свое название:

момент n-го порядка:

$$\mathbf{M}\xi^n = \sum_{k\geqslant 1}^{n} x_k^n \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$$

абсолютный момент n-го порядка:

$$\mathbf{M}|\xi|^n = \sum_{k\geqslant 1}^{n} |x_k|^n \, \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$$

центральный момент n-го порядка:

$$\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^n = \sum_{k\geqslant 1}^{n} (x_k - \mathbf{M}\xi)^n \, \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$$

Способы определения момента для данного распределения (??) (?? есть на это задачи, пока хз, как решать.)

О применениях k-х моментов (???)

3.6.8 Ковариация

(18, зубков)

Основные формулы ковариации (с опытом пропишу)

определениее и основные свойства Определение.

Пусть ξ и η - случайные величины с действительными значениями и конечными математическими ожиданиями.

Ковариацией случайных величин ξ и η называется величина

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}\left[(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\right]$$

Изучим свойства.

Очевидно, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$.

1. В частном случае ковариация это дисперсия.

Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание (когда?), то $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbf{D}\xi$.

Утверждение следует из определений ковариации и дисперсии:

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\xi - \mathbf{M}\xi) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{D}\xi$$

2. Для любых случайных величин с конечными математическими ожиданиями

$$|\operatorname{cov}(\xi, \nu)| \leqslant \sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}$$

Определение.

Отношение

$$\frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = \operatorname{corr}(\xi, \eta)$$

называют корреляцией случайных величин ξ и η

Из только что доказанного неравенства следует, что корреляция (если она определена, т.е. если $\mathbf{D}\xi$ и $\mathbf{D}\eta$ конечны) по модулю не превосходит 1 и что она имеет такой же знак, как и ковариация.

3. Если случайные величины ξ иη независимы и имеют конечные математические ожидания, то $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$. Существуют зависимые случайные величины, ковариация которых

равна о. Доказательство. Первое утверждение следует из мультипликативности математического ожидания для произведения независимых случайных величин:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{M}\{(\xi-\mathbf{M}\xi)(\eta-\mathbf{M}\eta)\} = \mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)\mathbf{M}(\eta-\mathbf{M}\eta) = \\ = (\mathbf{M}\xi-\mathbf{M}\xi)(\mathbf{M}\eta-\mathbf{M}\eta) = 0$$

Для доказательства второго утверждения достаточно привести пример двух случайных величин, которые не являются независимыми, но имеют нулевую ковариацию. Рассмотрим пару случайных величин (ξ,η), распределение которой состоит из 4 атомов веса $1/4$, расположенных в концах единичных векторов координатных осей:

$$\mathbf{P}\{(\xi,\eta)=(0,1)\} = \mathbf{P}\{(\xi,\eta)=(0,1)\} = \\ = \mathbf{P}\{(\xi,\eta)=(-1,0)\} = \mathbf{P}\{(\xi,\eta)=(0,-1)\} = \\ = \mathbf{P}\{(\xi,\eta)=(-1,0)\} = \mathbf{P}\{(\xi,\eta)=(0,-1)\} = \tfrac{1}{4}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi=1\} = \mathbf{P}\{\eta=1\} = \mathbf{P}\{\xi=-1\} = \mathbf{P}\{\eta=-1\} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}\{\xi=0\} = \mathbf{P}\{\eta=0\} = \frac{1}{2}$$

и

$$0 = \mathbf{P}\{\xi=0, \quad \eta=0\} \neq \mathbf{P}\{\xi=0\}\mathbf{P}\{\eta=0\} = \frac{1}{4}$$

Таким образом, если случайные величины ξ и η независимы и имеют конечные математические ожидания, то их ковариация и корреляция равны 0. С другой стороны, если случайные величины ξ и η линейно связаны: $\eta = a\xi + b$ - то $\mathbf{M}\eta = a\mathbf{M}\xi + b, \quad \mathbf{D}\eta = a^2\mathbf{D}\xi$ и

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)(\eta-\mathbf{M}\eta) = \\ = \mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)(a\xi+b-(a\mathbf{M}\xi+b)) = a\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2 = a\mathbf{D}\xi \\ \operatorname{corr}(\xi,\eta) = \tfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = \tfrac{a\mathbf{D}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi a^2\mathbf{D}\xi}} = \operatorname{sign}(a)$$

т.е. ковариация и корреляция имеют тот же знак, что коэффициент a, и при этом корреляция линейно связанных случайных величин с невырожденными распределениями равна либо 1, либо -1. Таким образом, ковариация и корреляция в какой-то мере характеризуют степень зависимости между случайными величинами.

Случайные величины, ковариация которых равна 0, называют некоррелированными. Свойства независимости и некоррелированности одно из другого не следуют. Независимые случайные величины не являлотся некоррелированными, если они не имеют математического ожидания.

формула для дисперсии суммы случайных величин 4. Теперь докажем формулу для дисперсии суммы случайных величин. Теорема. Для любых случайных величин $\xi_1,\ldots,\xi_n$

$$\mathbf{D}\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\xi_k + 2\sum_{1\leqslant k<m\leqslant n}\operatorname{cov}\left(\xi_k,\xi_m\right)$$

Если случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_n$ попарно независимы (или хотя бы попарно некоррелированы), то

$$\mathbf{D}\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\right) = \mathbf{D}\xi_1+\ldots+\mathbf{D}\xi_n$$

Если пары случайных величин $\left(\xi_1,\eta_1\right),\ldots,\left(\xi_n,\eta_n\right)$ попарно независимы, то

$$\operatorname{cov}\left(\xi_1+\ldots+\xi_n, \quad \eta_1+\ldots+\eta_n\right) = \operatorname{cov}\left(\xi_1,\eta_1\right)+\ldots+\operatorname{cov}\left(\xi_n,\eta_n\right)$$

Доказательство. Используя определение дисперсии и аддитивность математического ожидания, находим:

$$\begin{gathered}\mathbf{D}(\xi_1+\ldots+\xi_n)=\mathbf{M}\left((\xi_1+\ldots+\xi_n)-\mathbf{M}(\xi_1+\ldots+\xi_n)\right)^2= \\ =\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^n\xi_k-\sum_{k=1}^n\mathbf{M}\xi_k\right)^2=\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbf{M}\xi_k)\right)^2= \\ =\mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbf{M}\xi_k)^2+2\sum_{1\leqslant k<m\leqslant n}(\xi_k-\mathbf{M}\xi_k)(\xi_m-\mathbf{M}\xi_m)\right\}= \\ =\sum_{k=1}^n\mathbf{D}\xi_k+2\sum_{1\leqslant k<m\leqslant n}\operatorname{cov}(\xi_k,\xi_m)\end{gathered}$$

Тем самым доказано первое утверждение. Для доказательства второго заметим, что если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ попарно независимы, то все слагаемые второй суммы равны 0 как ковариации независимых случайных величин.

Из попарной независимости пар $(\xi_1,\eta_1),\ldots,(\xi_n,\eta_n)$ следует, что случайные величины ξ_i и η_j независимы при любых $i\neq j$ и поэтому $\operatorname{cov}(\xi_i,\eta_j)=0$ при $i\neq j$ Следовательно,

$$\begin{gathered}\operatorname{cov}(\xi_1+\ldots+\xi_n,\eta_1+\ldots+\eta_n)= \\ =\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^n\xi_i-\mathbf{M}\sum_{i=1}^n\xi_i\right)\left(\sum_{j=1}^n\eta_j-\mathbf{M}\sum_{j=1}^n\eta_j\right)= \\ =\mathbf{M}\sum_{i=1}^n(\xi_i-\mathbf{M}\xi_i)\sum_{j=1}^n(\eta_j-\mathbf{M}\eta_j)= \\ =\sum_{i,j=1}^n\mathbf{M}(\xi_i-\mathbf{M}\xi_i)(\eta_j-\mathbf{M}\eta_j)= \\ =\sum_{i=1}^n\mathbf{M}(\xi_i-\mathbf{M}\xi_i)(\eta_i-\mathbf{M}\eta_i)=\sum_{i=1}^n\operatorname{cov}(\xi_i,\eta_i)\end{gathered}$$

Теорема доказана.

Определение

Если $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ - набор случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве (или, что то же самое, случайный вектор), то матрица

$$B=B(\xi)=\|\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)\|=\begin{vmatrix}\mathbf{D}\xi_1 & \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) & \ldots & \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_d)\\ \operatorname{cov}(\xi_2,\xi_1) & \mathbf{D}\xi_2 & \ldots & \operatorname{cov}(\xi_2,\xi_d)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \operatorname{cov}(\xi_d,\xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_d,\xi_2) & \ldots & \mathbf{D}\xi_d\end{vmatrix}$$

называется его матрицей ковариаций или ковариационной матрицей.

Утверждение.

Матрица ковариаций $B(\xi)=\|\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)$ случайного вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ симметрична и неотрицательно определена.

Более того, матрица ковариаций $B(\xi)$ вырождена ($\det B=0$) тогда и только тогда, когда существует максимальный вектор $x\in R^d\{0\}u$ число $c\in R$, что $\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^d x_i\xi_i=c\right\}=1$
Доказательство. Симметричность матрицы ковариаций следует из того, что $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)$. Неотрицательная определенность матрицы $B=\|\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)\|$ означает, что соответствующая ей квадратичная форма неотрицательна:

$$Q_B(x)=xBx^T\geqslant 0$$

для любого вектора $x=(x_1,\ldots,x_d)\in R^d$ той же размерности, что и порядок матрицы B. Покажем, что $Q_B(x)$ неотрицательно определена:

$$\begin{gathered}Q_B(x)=(x_1,\ldots,x_d)\|\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_j)\|(x_1,\ldots,x_d)^T= \\ =\sum_{i,j=1}^d x_i\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)x_j=\sum_{i,j=1}^d x_ix_j\mathbf{M}(\xi_i-\mathbf{M}\xi_i)(\xi_j-\mathbf{M}\xi_j)= \\ =\mathbf{M}\sum_{i,j=1}^d x_ix_j(\xi_i-\mathbf{M}\xi_i)(\xi_j-\mathbf{M}\xi_j)= \\ =\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^d x_i(\xi_i-\mathbf{M}\xi_i)\right)^2\geqslant 0\end{gathered}$$

при любом векторе $x = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d$. Наконец, вырожденность матрицы B означает, что соответствующая ей квадратичная форма Q_B обращается в нуль хотя бы на одном ненулевом векторе x. Но по свойствам математического ожидания равенство в неравенстве

$$Q_B(x) = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{d} x_i\left(\xi_i - \mathbf{M}\xi_i\right)\right)^2 \geqslant 0$$

возможно только в случае, когда

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{d} x_i\left(\xi_i - \mathbf{M}\xi_i\right) = 0\right\} = 1$$

Т. е.

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{d} x_i\xi_i = \sum_{i=1}^{d} x_i\mathbf{M}\xi_i = c\right\} = 1$$

Утверждение полностью доказано.

6.

В п.4 было доказано, что дисперсии и ковариации сумм независимых случайных величин равны соответственно суммам дисперсий и ковариаций слагаемых. Аналогичное утверждение верно для ковариационных матриц. $(\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nd})$ независимы, $B\left(\xi_1\right), \ldots, B\left(\xi_n\right) -$ *их* ковариационные матрицы *и*$\Xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n = \left(\Xi_1, \ldots, \Xi_d\right)$, *то*

$$B(\Xi) = B\left(\xi_1\right) + \ldots + B\left(\xi_n\right)$$

Доказательство. Из независимости векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ следует, что при любых $k, m \in \{1, \ldots, d\}$ их компоненты ξ_{ik} и ξ_{jm} независимы, если $i \neq j$. Для доказательства теоремы рассмотрим произвольный элемент соу $\left(\Xi_k, \Xi_m\right)$ ковариационной матрицы вектора

$$\Xi = \left(\Xi_1, \ldots, \Xi_d\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \xi_{id}\right)$$

Этот элемент имеет вид

$$\operatorname{cov}\left(\Xi_k, \Xi_m\right) = \operatorname{cov}\left(\xi_{1k} + \ldots + \xi_{nk}, \quad \xi_{1m} + \ldots + \xi_{nm}\right)$$

причем пары $\left(\xi_{1k}, \xi_{1m}\right), \ldots, \left(\xi_{nk}, \xi_{nm}\right)$ независимы. По теореме о ковариации суммы независимых пар случайных величин

$$\operatorname{cov}\left(\Xi_k, \Xi_m\right) = \operatorname{cov}\left(\xi_{1k}, \xi_{1m}\right) + \ldots + \operatorname{cov}\left(\xi_{nk}, \xi_{nm}\right)$$

Таким образом, каждый элемент ковариационной матрицы вектора Ξ равен сумме соответствующих элементов ковариационных матриц векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Тем самым Теорема доказана.

7. При умножении случайной величины на константу c ее дисперсия умножается на c^2. Обобщение этого свойства на ковариационные матрицы выглядит следующим образом.

Утверждение 2.

Если $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{R}^d$ - случайный вектор, $B(\gamma)$ - его матрица ковариаций, $c \in \mathbb{R}, \bar{a} \in \mathbb{R}^d$, $C = \|c_{ij}\| - (d \times d)$ -матрица, то

$$B(c\gamma + a) = c^2 B \quad u \quad B(C\gamma + a) = CB(\gamma)C^T$$

Доказательство.
Первое равенство следует из того, что при любых i, j

$$\operatorname{cov}(c\gamma_i + a_i, c\gamma_j + a_j) = \mathbf{M}(c\gamma_i - \mathbf{M}c\gamma_i, c\gamma_j - \mathbf{M}c\gamma_j) = c^2 \operatorname{cov}(\gamma_i, \gamma_j)$$

Для доказательства второго равенства заметим, что $(C\gamma)_i = \sum_{j=1}^d c_{ij}\gamma_j$, поэтому в силу билинейности оператора ковариации

$$\begin{gathered}\operatorname{cov}((C\gamma + a)_r, (C\gamma + a)_s) = \\ = \mathbf{M}\left(\sum_{j=1}^d c_{rj}\gamma_j - \mathbf{M}\sum_{j=1}^d c_{rj}\gamma_j\right)\left(\sum_{m=1}^d c_{sm}\gamma_m - \mathbf{M}\sum_{m=1}^d c_{sm}\gamma_m\right) = \\ = \sum_{j,m=1}^d \mathbf{M}(c_{rj}\gamma_j - \mathbf{M}c_{rj}\gamma_j)(c_{sm}\gamma_m - \mathbf{M}c_{sm}\gamma_m) = \\ = \sum_{j,m=1}^d c_{rj} \operatorname{cov}(\gamma_j, \gamma_m)\, c_{sm} = \left(CB(\gamma)C^T\right)_{rs}\end{gathered}$$

что и требовалось доказать.

Способы определения ковариации (??)

(в 1ю продублирую)
Если задана таблица условных распределений, то считаем мат ожидания, а потом вставляем в формулу

3.6.9 Типичные неравенства в теории вероятностей

Приведем наиболее используемые неравенства.
(тут тренироваться нужно много!!!)

Неравенство Маркова

.

Конструкция Для любой случайной величины и любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{\mathbf{M}|\xi|}{x}$$

О случаях применений (??)

Доказательство Доказательство.
Рассмотрим разбиение Ω на события $\{|\xi| \geq x\}$ и $\{|\xi| < x\}$. Тогда

$$\begin{gathered}\mathbf{M}|\xi| = \mathbf{M}|\xi|(I\{|\xi| \geqslant x\} + I\{|\xi| < x\}) = \\ = \mathbf{M}|\xi| I\{|\xi| \geqslant x\} + \mathbf{M}|\xi| I\{|\xi| < x\} \geqslant \\ \geqslant \mathbf{M}x I\{|\xi| \geqslant x\} + \mathbf{M}0 \cdot I\{|\xi| < x\} = x\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant x\}\end{gathered}$$

Разумеется, неравенство Маркова содержательно только при $x > \mathbf{M}|\xi|$.

Неравенства Чебышёва

.

Конструкция Для любой случайной величины ξu для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{\mathbf{D}\xi}{x^2}, \quad \mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < x\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{x^2}$$

О случаях применений (??)

Доказательство Доказательство.

Первое неравенство - следствие неравенства Маркова, примененного к квадрату центрированной случайной величины: $\eta = (\xi - \mathbf{M}\xi)^2$.

Второе неравенство эквивалентно первому, так как

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < x\} = 1 - \mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \geqslant x\}$$

Содержательный смысл неравенства Чебышёва в том, что основная масса распределения случайной величины ξ с конечной дисперсией $D\xi$ сосредоточена в интервале, длина которого имеет тот же порядок, что $\sqrt{\mathbf{D}\xi}$.

В частности, если $\mathbf{D}\xi$ мало, то почти все распределение ξ сосредоточено около $\mathbf{M}\xi$.

Неравенство Коши-Буняковского

.

Конструкция

$$\mathbf{M}|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathbf{M}\xi^2\mathbf{M}\eta^2}$$

О случаях применений (??)

Доказательство (и там у зубкова еще много неравенств, но пока что пофиг на них, мне до этого темы доучивать нужно)

Закон больших чисел в двух словах

????

(выпишу сюда суть ее из подробной теории вероятностей)

Суть (потом её напишу)

3.6.10 О других конструкциях

(потом мб сделаю указания на другие конструкции, которые не так актуальны, как то, что выше)

Часть III
Задачи по теории вероятностей

4 Типичные задачи

(У Чистякова есть некоторые ответы и решения!!!!! тренироваться много еще нужно!!)

4.1 Задачи про простейшие вероятностные схемы

4.1.1 Задачи на понимание теории вероятностей (?)

ФР-2023. Парадокс Бертрана.

В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим через ξ ее длину. Найти вероятность $Q_x = \mathrm{P}(\xi > x)$. Вычислить вероятности Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$ того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника и треугольника соответственно. Дать подробное решение в каждом из следующих случаев:

1. Считать, что слово "случайно"означает, что середина хорды равномерно распределена в круге.
2. Считать, что слово "случайно"означает, что направление хорды фиксировано, а середина равномерно распределена на диаметре окружности.
3. Считать, что слово "случайно"означает, что один из концов хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

В качестве ответа на каждый из пунктов принимается формула для Q_x, выражающая искомую вероятность через R и параметр x, а также два значения, вычисленные по этой формуле: при $x = R$ и при $x = R\sqrt{3}$.

4.1.2 Задачи на комбинаторные модели вероятностей (?)

(тут задачи, которые напрямую опираются на комбинаторику)

Ч-1.16

По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$ выбираются числа ξ и η. Обозначим p_m вероятность того, что сумма $\xi + \eta$ будет m-значным натуральным числом в десятичной записи. Найти вероятности $p_{n-\kappa+1}, k = \Rightarrow 0, 1, \ldots, n$, и $q_h = \lim_{n\to\infty} p_{n-k+1}, k = 0, 1, 2, \ldots$

Ч-1.17

По схеме случайного выбора с возвратцением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$ выбиираются числа ξ й η. Обозначпм p_m вероятность того, что произведение $\xi\eta$ будет m-знатным натуральным числом в десятичной записи. Найти $q_k = \lim_{n\to\infty} p_{2n-k} \quad k = = 0, 1, 2, \ldots$

Количество упаковок для сбора коллекции игрушек в них (????)

В каждую жевачку вложен один из n вкладышей, причем каждый вкладыш встречается с вероятностью $1/n$. Сколько в среднем надо купить жевачек, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

Пусть у нас уже собрано k вкладышей. Посчитаем, сколько ждать следующего вкладыша. Назовем жевачку новой, если вложенный в нее вкладыш не встречается среди k уже собранных вкладышей. Обозначим M_k среднее количество жевачек, которое нужно купить, чтобы последняя купленная жевачка была новой. Рассмотрим следующую купленную жевачку. Она с вероятностью $\frac{n-k}{n}$ новая (и при этом ожидание $(k+1)$-ой жевачки в коллекции заканчивается), и с вероятностью $\frac{k}{n}$ она не является новой (в этом случае мы,, купив одну жевачку., снова оказываемся в состоянии, когда среднее число жевачек, которые нужно купить до покупки новой, равно M_k). Тем самым, мы приходим к уравнению

$$M_k = \frac{n-k}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} \cdot (M_k + 1)\,,$$

откуда $M_k = \frac{n}{n-k}$. Отсюда получаем, что среднее число жевачек, которое необходимо купить для полной коллекции вкладышей, равно

$$M_0 + M_1 + \ldots + M_{n-1} = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \ldots + \frac{n}{1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

(??? укажу, почему на самом деле с 0-ля суммируем, важный момент.)
(!! очень крутая задача)
(!! укажу в 1й части суть этих методов!!! очень крутой, очень нетривиальный метод.)

О целесообразности заниматься Интуиция, азарт, эмоции без всего этого жить было бы довольно скучно. Но, тем не менее, это самые слабые места человека. И именно по этим слабым местам активно бьют мошенники, рекламщики, пиарщики, маркетологи, много кто. Математический анализ получаемой информации и собственных планов может быть либо отличной защитой, либо мощным оружием. Как его применить – решать вам и вашей совести. Главное, вырабатывайте привычку математического анализа получаемой информации в любых ситуациях, от похода в магазин, чтения новостей до планирования тактики и стратегии во время компьютерных игр. Особенно, во время игр.

Вероятность совпадения нумераций кубика (??)

Двое человек взяли два кубика, в каждом 6 граней, и произвольного пронумеровали стороны. Какова вероятность того, что с точностью до вращений у них получился один и тот же кубик.

Посчитаем число различных способов, которыми можно пронумеровать грани. 1-ю можно выбрать 6-ю способами, занумеровать 6-ю разными цифрами. 2-ю грань - 5-ю способами, занумеровать 5-ю числами. И т.д. В итоге число различных кубиков будет:

$$N = 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = (6!)^2$$

Поэтому вероятность совпадения $P = \frac{1}{(6!)^2}$

(?? потом проверю, так ли решил как нужно? пока не уверен, 1я часть слабая.)

Ч-1.18

*. Иа множества $\{1, \ldots, N\}$ по схеме случайного равновероятного выбора с возвращением выбираются элементы $X_1', \ldots, X_k'$, а по схеме равновероятного выбора для любой совокупности $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_{\text{м}}\}$, состоящей из попарно различных k-элементных подмножеств $A_i = \{a_{i,1}, \ldots, a_{i,k}\} \subset \{1, \ldots, N\}$, $0 \leqslant \mathbf{P}\left\{\{X_1'', \ldots, X_k''\} \in \mathscr{A}\right\} - \mathbf{P}\left\{\{X_1', \ldots, X_k'\} \in \mathscr{A}\right\} \leqslant \frac{1}{N} C_k^2$.

Ч-1.19

*. По схеме случайного выбора с возвращением й множества натуральных чисет $\{1, 2, \ldots, N\}, N \geqslant 4$, выбирантся числа X и Y. Что больше: и лй

$$p_2 = \mathbf{P}\left\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 2\right\}$$
$$P_3 = \mathbf{P}\left\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 3\right\}?$$

Ч-1.22

По схеме случайного выбора с возвращением из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа X и Y. Показать, что шри $N \geqslant 4$

$$P\left\{X^3 + Y^3 = 0(\bmod 3)\right\} < P\left\{X^3 + Y^3 = 0(\bmod 7)\right\}.$$

Ч-1.23

Из совокуипости всех подмножеств множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ го схеме выбоора с возвращением выбираются множества A_1, A_2. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Ч-1.24

Из совокуппости всех подмножеств множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора с возвращенипм выбпраются подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ Найти вероятность того, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарио не пересегаются.

Ч-1.25

*. В урне содержится $(2n+1)^2$ карточек, на каждой из готорых папгисана упорядоченная пара целых чисел (x, y) (x и y принималт значения от $-n$ до n, каждая пара чисел написана ровно на одной карточKe). Из урны по схеме выбора без возвращения извлекаются три карточки: $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$, ($\xi_3, \eta_3)$. Рассмотрим эти пары как координаты случайных точек Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 плосность р декартовой системе координат. Найти вероят-

Ч-1.26

Бропено 10 игральніг остей. Предполагается, что все комбинации вылгавших очков равновероятны. Найти вероятностп событий:

а) не выпало ни одной «6»;
б) вышало ровно три «6";
в) выпала хотя бы одна 46”;
г) выпало хотя бы две «6".

Ч-1.27

Из множества $\{0, 1, \ldots, N\}$ по схеле равиовероятного выбора с возвращением извлекаются числа

Ч-1.28

Найти вероятность того, тто в помере случайно выббранного в большом городе автомобинля сумма первых двух дифр равна сумме двух последпих.

Ч-1.29

Некоторые москвичи считают трамвайный, троллейбусный или автобусный билет "счастливым если сумма первых трех дифр его шестизнатпого номера совпадает с сумзой последпіх трех гиф(?). Найти вероятность получить «счастливый» оилет.

Ч-1.30

Из карточек разрезпой азбуки составлено слово "СТАТИСТИКА». Затем из атих 10 карточек по схеме случайного выбора без возвращения отобрано 5 карточек. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составнть слово «ТАІСИ».

Ч-1.31

Иа 30 чисел $(1, 2, \ldots, 29, 30)$ случайно отбвраетcя 10 различных чвсел. Найти вероитпости событий: $A = \{$ все числа нечетные $\}$, $B = \{$ ровно 5 чисел делится на 3$\}$,C= $\{$5 чисел четиых и 5 нечетных, причем ровно одно число делится на 10.

Ч-1.32

Из урны, содержащей M_1 шаров с помером 1, M_2 шаров с номером $2, \ldots, M_N$ паров с помером N, случайно беа возвращения выбпрается n шаров. Найтп вероятности событий: 1) появилось m_1 шаров с помером 1, m_2 шаров с номером $2, \ldots, m_N$ паров с номером N; 2) катддый из N номеров появвлея хотя бы один раз.

Ч-1.33

Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора без возвращения выбиратотся числа ξ_1 и ξ_2. Найти $\mathrm{P}\{\xi_2 > \xi_1\}$.При выборе трех чисел найти вероятность того, что второе число лежит между первым и третьим.

Ч-1.36

Десять рукописей разложены по 30 панкам (па одну рукопись 3 папки). Найти вероятность того, что в случайно выбраиных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописп.

Ч-1.37

За круглый стол рассажпваются в случайном порядке $2n$ гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разопть на n непересекагощихся пар так, чтобы каждая пара состояла из сидящих рядом муачины и женщины?

Ч-1.38

Участник лотереи « 6 из 49 на первой карточке отметиі номера $(4, 12, 20, 31, 32, 33)$, а на второй $(4, 12, 20, 41, 42, 43)$. Найти вероятность того, что участнпк получпт ровно два минимальных выигрыша, т. е. что каждый из этих наборов имеет ровно 3 общих элемента с набором номеров $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6) \subset \{1, 2, \ldots, 49\}$, появившихся при розыгрыше тиража.

Ч-1.39

Найти вероятность того, что при случайной расстановке двух ладей на шахматной доске они не будут угрожать друг другу.

Ч-1.40

*. Найти вероятность P_h того, что при случайной расстановке $k(2 \leqslant k \leqslant 8)$ ладей на шахматной доске иикакие две ладьи не будут угрожать друг другу. При каких k эта вероятность меньше 1 / 2 ? Меньше 1 / 100 ?

Ч-1.41

Собираясь в путешествие на воздупном шаре, Пончик положил в каждый из 20 карманов своего костюма по прянику. Через каждые 10 минут полета у Пончика возникает жетавие подкрепиться, и он начинает в стучайном порядке просматрпвать свои карманы до тех пор, пока не найдет очередной пряник. Найти вероятность того, что поиск k-го пряника натинается с пустого кармана.

Ч-1.50

Равновероятной схемой размещения частиц по лчейкам называют схему размещения, в которой помера ячеек, последовательно занимаемых частицами, нолучают посредством случайного выбора с возвращеииием.

Обозпачим $\mu_r = \mu_r(n, N)$ число ячеек, содерпящих ровно по r частиц после размещения n частиц по N ячейгам. Найтн вероятности следующих событий: 1) $\mu_0(n, N) > 0($ при $n = N)$; 2) $\mu_0(n, N) = 0$ (при $n = N + 1)$; 3) $\mu_0(n, N) = 1$ (iри $n = N + 1)$; 4) найдется ячейка, содержапая хотя бы две тастицы (при Jiобых соотпошениях мезду n и N).

Ч-1.51

(см. п1.50). Найти Р $\{\mu_0(n, N) = 0\}$ при пропзЕольных n, N.

Ч-1.52

По N различимым ячейкам размещается случайно n неразличимых частиц. (Элементарными событилми являются наборы чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$, где r_k число частиц в k-й ячейке, $k = 1, 2, \ldots, N$.) Найти вероятности событпй: 1) $\mu_0(n, N) > 0; 2)\, \mu_0(n, N) = 1$.

Ч-1.53

В первом ряду кинотеатра, состоящем из N кресел, сидит n человек. Преднолагая, что все возможные размещения этих n человек в первом ряду равновероятны, пайти вероятности следующих событий:

а) $A_{n,N} = \{$ никакие 2 человека не сидят рядом ;

б) $B_{n,N} = \{$каждый иа n человек имеет ровно одного соседа$\}$;

в) $C_{n,N} = \{$пз любых двух кресел, расположінных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободіно $\}$.

Ч-1.54

В зале кинотеатра в первых двух рядах, каждый из которых состоит из N кресел, сидит n человек. Найти вероятности следующих событий:

а) в первом ряду никакие 2 человека не сидят рядом;

б) во втором ряду каждый человек имеет ровно одного соседа;

в) в первом ряду из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно.

Ч-1.55

Иа всех отображений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя слулайно выбирается отображение. Найти вероятности себытий: 20

а) выбранное отображение каждый из n множнтов переводит в 1 ;

б) элемент i имеет ровно k ирообразов;

в) элемент i переводится в j;

г) выбраниое отображение элементы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ' $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leqslant n)$ переводит в элементы $j_1, j_2, \ldots \cdots, j_k$ cootretctbenio.

Вероятность попадания при одном выстреле при вероятности попадания хотя бы раз при трех (??)

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0,973. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Решение: Пусть p - вероятность попадания в цель при одном выстреле. Введем событие $X = \{$ при трех выстрелах есть хотя бы одно попадание $\}$ и противоположное ему событие $\bar{X} = \{$ при трех выстрелах нет ни одного попадания $\}$.

Вероятность события $\bar{X}$ равна $P(\bar{X}) = (1-p)^3$, тогда вероятность события X равна $P(X) = 1-P(\bar{X}) = 1-(1-p)^3$. По условию эта вероятность равна 0,973, откуда получаем уравнение относительно p :

$$1-(1-p)^3 = 0,973,$$
$$(1-p)^3 = 0,027,$$
$$(1-p) = 0,3,$$
$$p = 0,7.$$

Таким образом, вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

Ответ: 0,7.

Вероятность, что ладьи на шахматной доске не будут бить друг друга

На шахматную доску 8×8 ставится наудачу две ладьи белого и черного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга. Решение: Испытание состоит в расположении двух ладей на шахматной доске. Найдем общее число исходов эксперимента. Первую ладью можно поставить 64 способами, после чего вторую ладью можно поставить 63 способами. Общее число исходов равно $64 \cdot 63$.

Событие A - ладьи не будут «бить» друг друга. Очевидно, что проще вычислить вероятность противоположного события $\bar{A}-$ ладьи будут «бить» друг друга.

Найдем благоприятные исходы для события $\bar{A}$. Первую ладью также можно поставить 64 способами, а вторую - только 14-ю (число свободных клеток горизонтали и вертикали, на пересечении которых стоит первая ладья). Общее число благоприятных исходов равно 64.14. Тогда $P(\bar{A}) = \frac{64\cdot 14}{64\cdot 63} = \frac{2}{9}$, а $P(A) = 1-P(\bar{A}) = \frac{7}{9}$.

Тест на заболевание

Заболеваемость некоторым заболеванием X составляет 0,1% (то есть им страдает 0,1% населения). Для выявления этого заболевания был разработан тест. Тест не дает ложноотрицательных результатов (то есть любой, у кого есть заболевание, даст положительный результат на него), но частота ложноположительных результатов составляет 5% (то есть около 5% людей, прошедших тест, получат положительный результат, даже если у них нет этой болезни). Предположим, что случайно выбранный человек проходит тест и у него положительный результат на X. Какова вероятность того, что этот человек действительно болен X?

Вероятность получить сообщения за меньшее время, чем вермя, за которое наверняка они придут

(натянутая задача, нет такого, хотя отдаленно похожее может быть.)

Володя получает 3 сообщения в час.

а) Какова вероятность того, что он получит 5 сообщений в течение двух часов?

б) Какова вероятность того, что он получит более двух сообщений в течение двух часов?

$$\lambda = 3 \quad P(X=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

X- количество получаемых сообщений

а) $P(A) = \frac{(3\cdot 2)^5}{5!}e^{-6} \approx 0,1606$

б) $k > 2 \quad t = 2$

$$P(A) = P(k>2) = 1-P(0)-P(1)-P(2) = 1-\left(\frac{6^2}{2!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^0}{0!}\right)e^{-6} \approx 0,938$$

(??? причем тут распределение Пуассона!!??? насколько я плохо это знаю, что вообще не готов к такому??)

4.1.3 Задачи на геометрические вероятности

МФТИ-Т.14 Бросание иглы

На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми $L = 1$, бросают иглу длины $l = L$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из линий?

Решение Введем параметр x - расстояние от середины иглы до ближайшей линии. Этим параметром, а также углом α, который составляет игла с перпендикуляром к линиям определяется однозначно положение иглы.

Таким образом, пространство событий $\Omega = [0, L/2] \times [0, \pi]$.

В нем нам нужны события, соответствующие пересечениям, то есть когда проекция углы на перпендикуляр $l \cos \alpha$ больше расстояния от центра иглы до линии: $x \leq l \cos \alpha$. В итоге в прямоугольнике Ω появляется нужная нам область площадью $S = \frac{l}{2} \int_0^\pi \cos \alpha d\alpha = l$.

В итоге по формуле геометрической вероятности $P = \frac{l}{\pi L/2} = \frac{2l}{\pi L}$

Ответ: $\frac{2l}{\pi L}$

Комментарий: это известная задача Бюффона.

МФТИ-Т.15 Три точки на отрезке

На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

Пусть три точки уже находятся на отрезке. Между двумя крайними точками находится одна из них. Она могла бы попасть первой, могла бы второй, а могла бы и третей. Таким образом, из всех способов размещения трех точек только один нужный нам, когда средняя точка попадает последней.

Так как какой бы ни был расклад точек, для каждого расклада только ровно 1/3 из всех возможных событий успешный, то и в итоге вероятность нужного нам события равна 1/3.

Ответ 1/3.

Вероятность выполнения неравенства на координаты случайной точки в квадрате

Пусть в единичном квадрате $[0,1] \times [0,1]$ выбирается случайно точка $A = (\xi, \eta)$. Вероятность, что её координаты удовлетворяют $|\eta - \xi| < \frac{1}{5}$, равна:

$$P\left(|\eta - \xi| < \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{25}.$$

Действительно. Построим вероятностную модель следующим образом. Пространство элементарных событий будет единичный квадрат $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. σ-алгеброй F будет совокупность борелевских подмножеств Ω, вероятностной мерой P — мера Лебега на Ω.

На $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ событию $B = \left\{|\xi - \eta| < \frac{1}{5}\right\}$ соответствует полоса S, ограниченной отрезками, которые соединяют точку $(0, \frac{1}{5}$ с точкой $(\frac{4}{5}, 1)$ и точку $(\frac{1}{5}, 0)$ с точкой $(1, \frac{4}{5}$. Дополнение к этой области до квадрата Ω состоит из двух равнобедренных прямоугольных треугольников, с длинами катетов равными $\frac{4}{5}$.

(мб рисунок добавлю)

В итоге вероятность - отношение площади полоски S к площади Ω. Поэтому осталось просто посчитать площадь S, что легко сделать, разбив полоску на прямоугольник и два треугольников.

В итоге $P\left(|\eta - \xi| < \frac{1}{5}\right) = \frac{|S|}{\Omega|} = \frac{9}{25}$.

Вероятность составления треугольника из двух точек на отрезке

На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

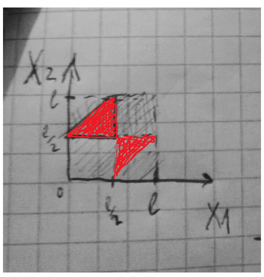


Рис. 1: геометрическая вероятность для двух точек на отрезке

Треугольник можно составить если для любых сторон его a, b, c выполняется $a < c + b$. То есть $2c < +b+c = l$, поэтому любая сторона его должна быть меньше $\frac{l}{2}$. Введем координаты $a = \min(x_1, x_2), b = |x_2 - x_1|, c = l - \max(x_1, x_2)$

У нас должно выполняться при $x_1 < x_2$:

$$x_1 < \frac{l}{2}; x_2 > \frac{l}{2}; x_2 - x_1 > \frac{l}{2}$$

А при $x_1 > x_2$:

$$x_1 > \frac{l}{2}; x_2 < \frac{l}{2}; x_2 - x_1 < \frac{l}{2}$$

Изобразим это на рисунке, посчитаем долю площади от всего квадрата, запишем ответ.
В итоге нужная нам область составляет $\frac{1}{4}$ от площади всех возможных вариантов.
Ответ: $\frac{1}{4}$

Ч-1.61

Случайная точка A равномерно распределена на отрезке $[0,1]$ и делит этот отрезок на две части. Пусть η_1 - длина большей части и η_2 - длина меньшей части. Найти $P\{\eta_1 \leqslant x\}, \mathrm{P}\{\eta_2 \leqslant x\}$ при любом x.

Ч-1.62

Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:
а) расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x;
б) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x;
в) расстояние от точки A до центра квадрата пе превосходит x
г) расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x.

Ч-1.63

Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольпйке со сторонами 1 и 2. Найти вероятностй следующих событий:
а) расстояние от A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;
б) расстояние от A до любой стороны прямоугольника не превосходит x;
в) расстояние от A до диагоналей прямоугольника не превосходит x.

Ч-1.64

Случайнан точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной а. Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайпей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали квадрата.

Ч-1.65

Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате $A = \{(x, y) : |x| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с дентром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A.

Ч-1.67

Случайпая точка X равномерно распределена в правильном треугольнике с вершинами $(a, 0), (-a, 0)$, $(0, a\gamma\overline{3})$. Найти вероятность того, что квадрат с цеятром X а сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в этом треугольнике.

Ч-1.68

Случайная точка X равномерно распределена в круге $S = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$. Найти вероятность того, что параллельный оси абсцисс отрезок длпны R с серединой в точке X целиком солержится в круге S.

Ч-1.69

Случайная точка A имеет равномерное распределение в правпльном n-угольнике. Найти вероятность P_n того, что A находится ближе к границе многоугольника, чем к его диагоналнм. Найтн такие числа C и a, что

$$P_n = Cn^2(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

Ч-1.70

Случайная точка $(\xi 1, \xi_2)$ равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(u, v) : 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$. Обозпачим η чпсло действительпых корней многочлена

$$f_{\xi_1}, \hat{k}_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2 x + \xi_2.$$

Найти вероятности

$$\mathrm{P}\{\eta = k\}, \quad k = 1, 3.$$

Ч-1.71

На паркет, составлепный из правильных k-угольников со стороной a, случайио бросается монета радиусв r. Найти вероятность того, что упавшая нонета не эаденет границу ни одпого из k-угольников паркета для:

а) $k = 3$ 6) $k = 4$; В) $k = 6$.

Ч-1.73

Парадокс Берт р на. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим ξ ее длину. Найти вероятность $Q_x = \mathrm{P}\{\xi > x\}$, если середина хорды равномерно распределена в круге. Вычислить вероятности Q_R и $Q_R\sqrt{3}$ того, что длина хорды больше стороны правильното вписанного шестиугольника и треугольника соответственно.

Результат вависит от того, как понимать слово «случайно». См. задачи n1.74 и n1.75.

Ч-1.74

Решить аадачу n1.73, если направление хорды задано, а ее середина равномерпо распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению.

Ч-1.75

Ренить задачу n1.73, если один конед хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

Ч-1.76

На плоскость, разлинованную параллельными прямыми (расстояние между соседними прямыми равно $2a$), орошена полуокружность радиуса $r < a$; точка $(\varphi, x)(x-$ расстояние от центра окружности до ближайпей прямой, $0 \leqslant x \leqslant a; \varphi-$ угол между этой прямой и диаметром, соединяюiии конды дуги) равномерно распределена в прямоугольните $[0, a] \times [-\pi/2, \pi/2]. = 0, 1, 2)$ пересечений с полуокружностью.

Ч-1.77

В итервале времени $[0, T]$ в случайный момент u появляется сигнал длительности Δ. Приемник включается в случайшый момент $v \in [0, T]$ на время t. Предноложнв, что точка (u, v) равномерно распределена в квадрате $[0, T] \times [0, T]$, найти вероятность обнаружепия cnrilasa.

Ч-1.78

Пассажпр моякет воспользоваться трамванми двух марштутов, следующих с интервалами T_1, T_2. Момент прнхода пассажира определяет на отрезках $[0, T_1], [0, T_2]$ числа a и v, равные временам, оставшимся до прихода трамван соответствуюпего маршрутв. Преднолагая, что точка (u, v) равномерно распределена на $\Omega = \{(u, v) : 0 \leqslant u \leqslant T_1, 0 \leqslant v \leqslant T_2\}$, найти вероятность того, что пассажир, пришедший на остановку, будет ждать пе дольше $t\,(0 < t < \min{(T_1, T_2)})$.

Ч-1.79

Однородный пржмой круговой цилиндр случайно бросается на горизонтальную плоскость. Найти вероятность того, тто цилиндр упадет на боковую поверхность, если его высота h, а радиус основания r. Вычислить зту вероятность при $h = 2r$. При каких h и r вероятности упасть на основание и на боковую поверхность одинаковы?

Ч-1.80

Неоднородный прнмой круговой цилиндр случайно бросается на горивонтальную плоскость. Радиус основания цилиндра r, центр тяжести расположен на оси симметрпи цилиндра на расстоянии а от одного основания и $b > a$ от другого основания цилиндра. Найти вероятность того, что цилиндр упадет: а) на основание, расположенное ближе К центру; б) на основание, более удаленное от центра тяжести; в) на боковую поверхность.

Ч-1.81

Однородный прямой круговой конус с высотой h и радиусом основания r случайно бросается на горизонтальную плоскость. а) Найти вероятность того, что он упадет на основание; б) вычислить ату вероятность при $r = h$; в) при каком отношении r/h вта вероятность pasна $1/4$?

Ч-1.82

Однородное тело, ограниченное сферой и плоскостью, проходящей через центр сферы (полушар), случайно бросается на горизонтальную плоскость. Найти вероятность того, что полушар упадет на плоскуюо часть своей границы.

4.1.4 Задачи про свойства множеств

Обсудим другие имеющиеся свойства множеств, использующиеся в теории вероятностей.

(!!! убежусь, чтобы в 1 и 2 части была нужная теория про это!! пока теории нет и я не разобрался нормально.)

Вероятность $P(AB + C|AC + B)$ при условиях на вероятность каждого (!?!??!?)

Вычислить $P(AB + C|AC + B)$, если известно, что $P(B) = 0.4, P(C) = 0.3, P(A|B) = P(A|C) = 0.7$, B и C - несовместные события.

Как всегда:

$$P(AB + C|AC + B) = \frac{(AB + C)(AC + B)}{AC + B} =$$

Также $P(AB) = P(A|B)P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$, $P(AC) = P(A|C)P(C) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$.

(??!!??! а дальше какое-то преобразование неизвестное мне.)

МФТИ-? Стрелки, начинающие стрелять по жребию (?????)

Два стрелка соревнуются, по очереди стреляя в мишень до первого попадания. Вероятность попадания в мишень стрелка А равна p_1, а стрелка Б - p_2. Право первого выстрела определяется жребием, в котором стрелок А побеждает с вероятностью α. Вычислить значение α, при котором шансы на победу у стрелков А и Б равны, если $p_1 = 0.84, p_2 = 0.8$.

Решение (??? честно, я хз, не отработал еще это.)

МФТИ-Т.1

Пусть A, B - два события. Найти все события X такие, что $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \bar{A})} = B$

По правилу де Моргана:

$$\overline{B} = (X \cup A) \cap (X \cup \bar{A})$$

По правилу де Моргана $(X \cup \bar{A}) = (\overline{\overline{X} \cap A})$, таким образом:

$$(X \cup A) \cap (\overline{\overline{X} \cap A}) = \overline{\overline{(X \cup A)} \cup (\overline{X} \cap A)} = \overline{(\overline{X} \cap \overline{A}) \cup (\overline{X} \cap A)} = X$$

Ответ $X = \overline{B}$.

МФТИ-Т.2

Пусть A, B - два события. Найти все события X такие, что $AX = AB \iff A \cup X = A \cup B$.

Очевидно, что необходимо, чтобы $X \in A \cap B$. Но также X может содержать любое множество $Y \in X$, которое при $A \cup X$ дало бы ноль, таким образом задача решена.

Ответ $X = Y \cup (A \cap B)\ \forall\ Y \in \overline{A}$.

МФТИ-Т.3

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ - события. Покажите, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1$$

Воспользуемся свойству вероятностной меры: $\forall B \quad \mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(\overline{B}) = 1$. Возьмем в качестве B выражение: $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, тогда $\overline{B} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}$. Подставляя, получаем:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1$$

МФТИ-Т.4

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - последовательность событий и $\mathbf{P}(A_n) = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажите, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

Первый способ: Пусть $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Заметим, что $B_1 \in B_2 \in \ldots$, тогда

$$P(\overline{B_n}) = P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}) \leq \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 0$$

Поэтому в силу положительной определенности $P(\overline{B_n}) = 0$, поэтому $P(B_n) = 1$
Окончательно, заменяя A на B и используя непрерывность вероятностной меры получаем:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n)$$

Второй способ: знаем, что на всем вероятностном пространстве Ω выполняется $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Таким образом $A_i = \Omega - A_{i0}$, где $A_{i0} : \mathbf{P}(A_{i0}) = 0$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\Omega - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{i0}\right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1$$

МФТИ-Т.5

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - последовательность событий. Покажите, что

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

Вспомним определение:

$$A^* = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geqslant n} A_k, \quad A_* = \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$$

Первое неравенство доказывается с помощью непрерывности вероятностной меры:

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geqslant n} A_k) \equiv P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \equiv P(\lim B_n) \underbrace{\overset{\text{т.к.} B_1\subseteq B_2\subset\ldots}{\equiv}}_{\text{по непрер. меры}} \lim P(B_n) \underbrace{\leq}_{B_n=\cup_{N=n}^{\infty}\subset A_n} \varliminf_{n\to\infty} P(A_n)$$

Выражение $\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$ очевидно.
И последнее неравенство:

$$P(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geqslant n} A_k) \equiv P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \equiv P(\lim B_n) \underbrace{\overset{\text{т.к.} B_1\supseteq B_2\supset\ldots}{\equiv}}_{\text{по непрер. меры}} \lim P(B_n) \underbrace{\geq}_{B_n=\cup_{N=n}^{\infty}\supset A_n} P(A_n)$$

МФТИ-Т.6 Неравенство $|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$

Покажите, что для любых двух событий A и B выполняется неравенство

$$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$

Обозначим $AB \equiv c$, $A \backslash B \equiv a$, $B \backslash A \equiv b$, тогда доказать нужно нам, что

$$|c - (a+c)(b+c)| \leq \frac{1}{4}$$

Причем по условию, так как мы работаем с событиями, должно выполняться: $a + b + c \leq 1$.
Докажем, что $c - (a+c)(b+c) \geq -\frac{1}{4}$. Действительно, $2\sqrt{ab} \leq a + b \leq 1 \to ab \leq 1\frac{1}{4}$.

$$c - (a+c)(b+c) = (1 - \underbrace{-a - b - c}_{\leq 0}) - ab \geq -\frac{1}{4}$$

Докажем, что $c - (a+c)(b+c) \leq \frac{1}{4}$. Преобразуем выражение уже в другом виде:

$$c - (a+c)(b+c) \leq c - c^2 = c(1-c) = (\sqrt{c}\sqrt{(1-c)})^2 \underbrace{\leq}_{\text{неравнство Коши}} \left(\frac{1}{2}(c + (1-c))\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Таким образом, уж точно

$$|c - (a+c)(b+c)| \leq \frac{1}{4}$$

4.1.5 Задачи о костях и монетах (!!!)

(пока по актуальности собираю)

МФТИ-Т.16 Вероятность, что при подбрасывании двух костей сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков

Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков.

Найдем, чему равна вероятность, что при подбрасывании двух игральных костей выпадет 5: всего таких исходов 4: если выпадает 1,4; 4,1; 2,3; 3,2. Таким образом, $p_5 = 4/36 = 1/9$

Вероятность, что при подбрасывании двух игральных костей выпадет 7: всего таких исходов 4: если выпадает 2,5; 5,2; 2,4; 4,2; 1,6; 6,1. Таким образом, $p_7 = 6/36 = 1/6$

Пусть A - событие, состоящее в выпадении 5 раньше 7. Оно состоит из исхода, при котором на i-м шаге выпадает 5, а на $(i-1)$-х шагах не выпадало ни 5, ни 7, обозначим его B_i. Запишем событие A в виде

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

тогда его вероятность:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

Также $P(B_i) = (1 - p_5 - p_7)^{i-1} p_5$, потому что отдельные броски независимы.
Таким образом, осталось посчитать ответ:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p_5 - p_7)^{i-1} p_5 = \frac{p_5}{1 - (1 - p_5 - p_7)} = \frac{p_5}{p_5 + p_7} = 4/(6+4) = 2/5$$

Ответ: $\frac{2}{5}$

МФТИ-Т.? Вероятность первого выпадения герба у каждого из троих подбрасывающих (?!!!!!)

Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Найти вероятности выигрыша каждого игрока

(!! оч крутая задача)

Пусть A_i - вероятность того, что у первого игрока при i-м бросании будет герб. Аналогично, B_i - вероятность того, что у второго игрока при i-м бросании будет герб, C_i - у третьего.

Тогда запишем $A = \bigcup A_i,\ B = \bigcup B_i,\ C = \bigcup C_i$.

И также..

По формуле полной вероятности $P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(\overline{A_1})P(A|\overline{A_1})$.

И понятно, что $P(A|A_1) = 1$, $P(A_1) = P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2}$, поэтому

$$P(A) = \frac{1}{2}(1 + P(A|\overline{A_1}))$$

Дальше заметим, что $P(A|\overline{A_1})$ это вероятность успеха после двух последовательных неудач второго и третьего игрока или после 5 неудач или после 8 неудач и т.п. Это же в точности $P(C)$.

По этой же логике $P(B|\overline{A_1}) = P(A)$

Формула полной вероятности для $P(B)$:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(\overline{A_1})P(B|\overline{A_1}) = 0 + \frac{1}{2}P(A)$$

В итоге получается система

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \tag{4.1}$$

$$P(C) = 2P(A) - 1 \tag{4.2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}P(A) \tag{4.3}$$

Она легко решается.

Ответ: $P(A) = \frac{4}{7},\ P(B) = \frac{2}{7},\ P(C) = \frac{1}{7}$.

Одна единица при бросании четырех игральных костей или хотя бы одна пару единиц за один бросок при 24 бросаниях двух костей?

Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц за один бросок при 24 бросаниях двух костей?

Посмотрим на случай четырех костей.

Можно считать количество успешных исходов, но это сделать сложно, так что пойдем от обратного, посчитаем неудачные исходы.

Вероятность невыпадения единицы в одном испытании: $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, в четырех экспериментах вероятность того, что среди всех выпавших костей нет ни одной единицы равна $\left(\frac{5}{6}\right))^4$.

Тогда вероятность выпадения единицы равна

$$P_1 = 1 - (\frac{5}{6})^4$$

Посмотрим на случай двух костей. При одном бросании двух костей у нас 36 может быть разных исходов, при этом подходит только один. Поэтому аналогично первому пункту, вероятность хотя бы за какой-то бросок получить пару единиц, равна:

$$P_2 = 1 - (1 - \frac{1}{36})^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

Осталось только сравнить эти P_2 и P_1. Просто посчитаем их на калькуляторе. В итоге

$$P_1 > P_2$$

Ответ: Успех в случае бросания одной кости имеет большую вероятность.

При подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12

(потренируюсь, сверну скорее всего потом в пару строк, тут всё очевидно, просто подсчетом событий. пока потренироваться еще нужно, научиться на самом деле быстро решать такие задачи.)

Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12.

Посчитаем количество исходов, которые дадут 11 очков в сумме. По сути это количество целочисленных положительных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ при условии $x_1, x_2, x_3 \leq 6$.

$$P(x_1 + x_2 + x_3 = 11) = \sum_{i=1}^{6} P(a = i)P(x_2 + x_2 = 11 - i) = \frac{1}{6}\sum_{i=5}^{10} P(x_2 + x_2 = i)$$

$$P(x_1 + x_2 + x_3 = 12) = \sum_{i=1}^{6} P(a = i)P(x_2 + x_2 = 12 - i) = \frac{1}{6}\sum_{i=6}^{11} P(x_2 + x_2 = i)$$

$$P(x_1 + x_2 + x_3 = 12) - P(x_1 + x_2 + x_3 = 12) = P(x_2 + x_3 = 11) - P(x_2 + x_3 = 5)$$
$$\overset{\text{считаем благоприятные}}{\underbrace{=}_{\text{исходы}}} \frac{2}{36} - \frac{4}{36} < 0$$

Поэтому при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12.

4.1.6 Задачи о картах (!!!)

(потренирую позже!!)

вероятность того, что среди выбранных карт из колоды будут представительницы всех мастей

Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

Назовем наши масти A, B, C, D. Назовем A_A, A_B, A_C, A_D - исходы, в которых есть масть A, B, C, D соответственно.

Нам нужно событие $X = A_A \cap A_B \cap A_C \cap A_D$ - что есть представители всех мастей.

Посчитаем вероятность события $\overline{X} = \overline{A_A} \cup \overline{A_B} \cup \overline{A_C} \cup \overline{A_D}$ - что нет представителя какой-то из мастей. Для этого воспользуемся формулой включения-исключения:

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \mathbf{P}\left\{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m}\right\}$$

И так как одной из четырех масти не может быть - 4мя способами, двух мастей - $C_4^2 = 6$ способами, трех - $C_4^3 = 4$ способами, то вторая сумма, учитывая что вероятности наличия разных мастей не зависят от конкретного вида масти, будет иметь вид:

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = 4\mathbf{P}(\overline{A_1}) - 6\mathbf{P}(\overline{A_1 A_2}) + 3\mathbf{P}(\overline{A_1 A_2 A_3})$$

Посчитаем вероятности членов в этой сумме, найдя количество благоприятствующих исходов:

$$P(\overline{A_i}) = \frac{C^6_{52-13}}{C^6_{52}}; \quad P(\overline{A_i}) = \frac{C^6_{52-13-13}}{C^6_{52}}; P(\overline{A_i}) = \frac{C^6_{52-13-13-13}}{C^6_{52}};$$

Подставим все в ответ: $P_{\text{искомое}} = 1 - \left(4\frac{C^6_{39}}{C^6_{52}} - 6\frac{C^6_{26}}{C^6_{52}} + 4\frac{C^6_{13}}{C^6_{52}}\right)$

(?? где число???)

4.2 Задачи про последовательности испытаний (!!!)

(нужно проработать этот раздел, типичные задачи!)

4.2.1 Задачи на условные вероятности

Ч-2.пр.2

Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, по схеме случайного выбора без возвращения последовательно извлекаются пары. Найти вероятность p_k того, что черный шар впервые появится при k-м испытании $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Обозначим C_i событие, состоящее в том, что в i-м испытании появился черный шар. Тогда события $B_k = \{$ впервые черный пар появился при k-м испытании $\}$, $k = 1, 2, 3, 4$ можно выразить через C_i и $\bar{C}_i$:

$$B_1 = C_{1_1} \quad B_2 = \bar{C}_1 C_2, \quad B_3 = C_1 C_2 C_3, \quad B_4 = \bar{C}_1 C_2 \bar{C}_3 C_4$$

По формуле (n2.3)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}(C_1), \quad \mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}\left(\vec{C}_1\right) \mathrm{P}\left(C_2 \mid \bar{C}_1\right), \\
&\mathrm{P}(B_3) = \mathrm{P}\left(\bar{C}_{\mathrm{I}}\right) \mathrm{P}\left(\bar{C}_2 \mid \bar{C}_1\right) \mathrm{P}\left(C_3 \mid \bar{C}_1 \bar{C}_2\right) \\
&\mathrm{P}(B_4) = \mathrm{P}\left(\bar{C}_1\right) \mathrm{P}\left(\bar{C}_2 \mid \bar{C}_1\right) \mathrm{P}\left(\dot{C}_3 \mid \bar{C}_1 \bar{C}_2\right) \mathrm{P}\left(C_4 \mid \bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3\right)
\end{aligned}$$

По классическому определению вероятности

$$\mathrm{P}(C_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathrm{P}\left(\bar{C}_1\right) = \frac{3}{5}, \quad \mathrm{P}\left(\bar{C}_{i+1} \mid \bar{C}_1 \ldots \bar{C}_i\right) = \frac{3-i}{5-i}$$
$$\mathrm{P}\left(C_{i+1} \mid \bar{C}_1 \ldots \bar{C}_i\right) = \frac{2}{5-i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В результате получим

$$p_1 = \mathrm{P}(B_1) = \frac{2}{5} = 0,4, \quad p_2 = \mathrm{P}(B_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3_{\mathrm{s}}$$
$$p_3 = \mathrm{P}(B_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0,2$$
$$j_4 = \mathrm{P}(B_4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 0,1.$$

Ч-2.пр.3

Найти вероятность того, что среди 10 однозначных случайных чисел ровно 4 четных числа и 2 нечетных числа, кратных 3.

Решен и е. Однозначное случайное число четно с ввроятностью $p_1 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, нечетно и кратно 3 с вероятностью $p_2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Вероятность остальных исходов $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{3}{10}$. Если ξ_1- число четных чисел среди 10 случайных чисел, ξ_2 - число нечетных чисел, кратных 3, то число остальных чисел $\xi_3 = 10 - \xi_1 - \xi_2$, и по формуле (n2.10) с $N = n = 10$ находим $P\{\xi_1 = 4, \xi_2 = 2\} = P\{\xi_1 = 4, \xi_2 = 2, \xi_3 = 5\} =$

$$= \frac{10!}{4!2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right)^4 = 0,063787\ldots$$

Частный случай полипомиальной схемы с $N = 2$ называют схемой Бернулаи. Ниye два исхода каждого испытания в схеме Бернулли будем обозначать символами 1 и 0 или называть успехом и неудачей, а соответствующие им веронтности - буквами p и $q = 1 - p$. Если $\mu_n \rightarrow$

число успехов (или число единиц) в n испытаниях Берпулли, то

$$P\{\mu_n = m\} = P_n(m, p) = C_n^m \dot{p}^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

(n2.11)

Ч-2.пр.4

Проводится n независимых опытов, состоящих в одновременном подбрасывании k монет. Вычислить вероятности событий: $A = \{$ хотя бы один раа все k монет выпали гербами, $B = \{$ ровно m раз все k монет выпали гербами $\}$.

Появление k гербов в одном опыте будем называть успехом. Вероятность успеха $p = \frac{1}{2^h}$. Проще вычислить вероятность противоположного события не выпали гербами. Положим $C_l = \{$ в l-м испытании произошелт успех $\}$. Тогда $\bar{A} = \bar{C}_1 \bar{C}_2 \ldots \bar{C}_n$, и по формуле (n2.6) находим

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = \prod_{l=1}^n \mathrm{P}\left(\bar{C}_l\right) = \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)^n.$$

Для вычисления $\mathrm{P}(\bar{A})$ можно было также воспользоваться формулой (n2.11), положив в ней $m=0, p=\frac{1}{2^{k^2}} q==1-\frac{1}{2^k}$. Таким образом,

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\bar{A})=1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^n .$$

Вероятность события B определяем по формуле (n2.11):

$$\mathrm{P}(B)=C_n^m\left(\frac{1}{2^k}\right)^m\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-m}$$

Ч-2.пр.5

В партии из $n=200$ пзделий каждое изделие незавцсимо от остальных может быть бракованным с вероятностью $p=0,01$. Оделить вероятность того, что число μ_n браковалных издельй в этой партии равно трем.

Решение. Величина $n p^2=0,02$ мала. В качестве прибилиженного значения пскомой вероятности можно использовать предельное значение в (n2.12) (теорему Пуассона) с $\lambda=n p=2: P\left\{\mu_n=3\right\} \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2}$. По табл. 3 (с. 308) находим числовое значение: $\mathrm{P}\left\{\mu_n=3\right\} \approx 0,18045 \ldots$ Точное значение вероятности можно найти по формуле (n2.11):

$$P\left\{\mu_n=3\right\}=C_{200}^3(0,01)^3(0,99)^{197}=0,181355 \ldots$$

Ч-2.пр.6

В партии из $n=22500$ изделий, каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p=1/5$. Найти вероятность того, что число μ_n бракованных изделий заключено между 4380 и 4560.

Значение $n p q=3600$ велико, поатому можно воспользоватьсн пормальным приближением (n2.14). Вычтем $n p=4500$ из трех частей неравепства $4380<\mu_n<4560$ и потучившееся перавенство поделм почленно на $-2<\frac{\mu_n-n p}{\sqrt{n p q}}<1$. $P\left\{4380<\mu_n<4560\right\}=\mathrm{P}\left\{-2<\frac{\mu_n-n p}{\sqrt{n p q}}<1\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_{-2}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} d x_0$ Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_{-2}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} d x=\frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} d x+\frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}} d x=\Phi_0(1)+\Phi_0(2)_2$$

то (см. тай.. 1, с. n306-n307).

$$\mathrm{P}\left\{4380<\mu_n<4560\right\} \approx 0,3413+0,4772=0,8185 .$$

Ч-2.пр.7

Найти вероятность того, что в схеме Бернулли первый успех появится в k-м испытании, если нероiітность успеха в отдельном испытании равна p. Peme.$A_{\mathrm{h}}=\{$ первый успех появился в $k-$ испытании $\}$ определяетея исходами в k первых испытаниях. Пусть событие $C_i=\{$ в $i-$ M испытании наступил успех $\}$. ”огда

$$A_k=\bar{C}_1 \bar{C}_2 \ldots \bar{C}_{k-1} C_k,$$

и по формуле (n2.17) находим

$$\mathrm{P}\left(A_k\right)=\mathrm{P}\left(\bar{C}_1\right) \mathrm{P}\left(\bar{C}_2\right) \ldots \mathrm{P}\left(\bar{C}_{k-1}\right) \mathrm{P}\left(C_k\right)=q^{k-1} p .$$

Пнведем еще две формулы, полезные в тех случаях, lin’a заданы или могут быть легко вычислены условные июроятности. Если события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ попарно несоиместны и $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n=\Omega$, то для любого события A имеем

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=1}^n \mathrm{P}\left(B_k\right) \mathrm{P}\left(A \mid B_k\right)$$

’(эормула полной вероятности) и

$$\mathrm{P}\left(B_m \mid A\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B_m\right)^{\mathrm{P}}\left(A \mid B_m\right)}{\sum_{k=1}^n \mathrm{P}\left(B_k\right)^{\mathrm{P}}\left(A \mid B_k\right)}, \quad m=1, \ldots n_s$$

Ч-2.пр.8

В ящик, содержащий 8 исправных иаделий, добавлепо 2 изделия, взятых со склада; известно, "то доля бракованных изделий на складе равна 5%. Шайти воролтность того, что взятое наудачу из пополпенного ищика изделие пе будет бракованным. Рениение. Определим события A, B_0, B_1, B_2 ? $A =$ иизделие, взятие из пополненного ящика, $B_h = \{$ из двух изделий, добавленных в ящик, k бракованных, $k = 0, 1, 2$. Очевидно, что $B_0 \cup B_1 \cup B_2 = \Omega$ и $B_\mathrm{k} B_l = \varnothing \quad (k\%l)$. Мояніо воспользоваться формулой полной вероятности $(n2.18)$:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(B_0\right) \mathrm{P}\left(A \mid B_0\right) + \mathrm{P}\left(B_1\right) \mathrm{P}\left(A \mid B_1\right) + \mathrm{P}\left(B_2\right) \mathrm{P}\left(A \mid B_2\right)^{-}$$

35 Если шроиаошло событие B_k, то в ящике из 10 изделий k бракованиых, следователын,

$$P\left(A \mid B_k\right) = \frac{10-k}{10}, \quad k = 0, 1, 2.$$

При выборе малого числа изделий из большой партии схемы выбора без возвращения и с возвращением ияеют близкие вероятности исходов (см. задачу n18). Считая поэтому, что каждое из добавленных изделий независимо от другого может быть бракованным с вероятностью 0,05, находим

$$P\left(B_0\right) = 0,95^2, \quad P\left(B_1\right) = 2 \cdot 0,95 \cdot 0,05, \quad P\left(B_2\right) = 0,05^2.$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}(A) = 0,95^2 \cdot 1 + 2 \cdot 0,95 \cdot 0,05 \cdot \frac{9}{10} + 0,05^2 \cdot \frac{8}{10} = 0,99.$$

II р и м е р

Ч-2.пр.9

Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, по схеме выбора без возвращения отобралии 2 шара. Шар, взятый наудачу из этих двух, оказался белым. Какова вероятность того, что второй шар тоні белый? Р. $B_k = \{$ среди двух отобранных из урны шаров k белых $\}$, $k = 0, 1, 2$, $A = \{$ шар, взятый наудачу из двух отобранных, белый $\}$. Условную вероятность $\mathrm{P}\left(B_2 \mid A\right)$, которую требуется найти, можно вычислить по формуле Байеса (Ч-2.19): $P\left(B_2 \mid A\right) = \frac{P\left(B_2\right)^P\left(A \mid B_2\right)}{P\left(B_0\right)^P\left(A \mid B_0\right) + {}^P\left(B_1\right)^P\left(A \mid B_1\right) + P^P\left(B_2\right)^P\left(A \mid B_2\right)}$. Вероятности, связапные с извлечением двух паров из урны, найдем с помощью классического определения вероятности:

$$\mathbf{P}\left(B_0\right) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = 0,1, \quad \mathbf{P}\left(B_1\right) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = 0,6, \quad \mathbf{P}\left(B_2\right) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0_2 3.$$

Так же определяются условные вероятности, связанные с извлечением одного шара из двух отобранных:

$$\text{Знатит,} \quad \mathrm{P}\left(A \mid B_0\right) = 0, \quad \mathrm{P}\left(A \mid B_1\right) = 0,5, \quad \mathrm{P}\left(A \mid B_2\right) = 1.$$

$$\mathrm{P}\left(B_2 \mid A\right) = \frac{0,3}{0,1 \cdot 0 + 0,0 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

В задачах n2.1-n2.6 вероятностное пространство считается заданным; Для вычисления условных вероятностей нужно использовать формулу (n2.1).

Ч-2.1

Из множества чігсе. $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме слу чайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найги условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

Ч-2.2

Брошено две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятеjки, если известно, что сумма выпавших очков делится па пять.

Ч-2.3

Из 100 карточек с числами $00, 01, \ldots, 98, 99$ случайно выбирается одна. Пусть η_1 и $\eta_2 -$ соответственно сумма и пройведение цифр на выбранной карточке. Іайти $P\left\{\eta_1 = i \mid \eta_2 = 0\right\}, i = 0, 1, \ldots, 18$.

Ч-2.4

Из урны, содержащей M белых и $N-M$ qерных шаров, последовательно без возвращения извлекают n шач ров. Пусть $A_{0}^{(i)}\left(A_{1}^{(i)}\right)$ - событие, состоящее в том, что i-й шар был черный (белый). Используя классическое определеппе случайного выбоора (гл. 1), найти

$$\mathrm{P}\left\{A_{1}^{(\mathrm{s}+1)} \mid A_{\varepsilon_{1}}^{(1)} A_{\varepsilon_{2}}^{(2)} \ldots A_{e_{s}}^{(s)}\right\}, \quad \varepsilon_{i}=0,1.$$

Ч-2.5

Рещить задачу n2.4 в случае выбора с возвраще пием (см. введение к г.. 1, (n3)).

Ч-2.6

Случайный выбор двух подмножеств A_{1} и A_{2} из множества $S=\{1,2, \ldots, N\}$ производится так же, как в в задаче n23. Найти условную вероятность $\mathrm{P}\left\{\left|A_{1}\right|=l_{1},\left|A_{2}\right|=l_{2} \mid A_{1} \cap A_{2}=\varnothing\right\}$ того, что множества A_{1} и A_{2} состоят из l_{1} и l_{2} элементов соответственно при условии, что A_{1} и A_{2} не пересекаются.

В задачах n2.7-n2.11 предполагаются заданными условпые вероятности; при решении используются формулы $(n 2.2),(n 2.3)$.

Ч-2.7

Среди 25 экзаменационных билетов 5 "хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:

а) первый студент взял «хороший» билет,

б) второй студент взял «хоропиий билет,

в) оба студента взяли «хорошие» билеты.

Ч-2.8

Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей M белых и $N-M$ 87 черных шаров. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Используя формулу (n2.3), найти вероятность выигрыша первого участника, если: а) $N=4, M=1$;)N==5, M=1; в) $N=7, M=2$.

Ч-2.9

Из урны, содержащей M белых и $N-M$ терных шаров, по одному без возвращения извлекаются все шары. Используя определение случайного выбора в терминах условных вероятностей, найти вероятностп событийт $A_{k}=\{k$-й mар белый $\}$, $B_{h, l}=\{k$-й и l-й шары белые $\}$, $C_{\mathrm{A}_{1} 1}=\{k$-й шар черный, а l-й белый $\}$.

Ч-2.10

Из урны, содержащей 3 белых шара, 5 черных и 2 краспых, два игрока поочередно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявлянется ничья. Пусть $A_{1}=\{$выигрывает игрок, начавший игру$\}$, $A_{2}=\{$ выигрывает второй участник $\}, B \Rightarrow=\{$ пгра закончилась впичью $\}$. Найти $\mathrm{P}\left(A_{1}\right), \mathrm{P}\left(A_{2}\right), \mathrm{P}(B)$.

Ч-2.13

Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, три пгрока иявлекают пары по очереди. Выигрывает тот, кому раньше попадается белый шар. Найти вероятности P_{1}, P_{2}, P_{3} выигрыша 1-го, 2-го, 3-го игроков в случаях, когда шары извлекаются:

а) по схеме равновероятного выбора с возврашением, б) по схеме равновероятного выбора без возвращения.

Ч-2.14

На остановку прибывают автобусы маршрутов $1,2, \ldots, k$. Номера последовательно прибвяющих автобусов получаются по схемо равновероятного выбора с возвращением из урны, содериящей шары с номерами 38 $1,2, \ldots, k$. Найти вероятность $P_{\sharp}$ того, что до появления автобуса маршрута 1 ни на одном из остальных маршрутов не придет более одного автобуса. При каком минимальном $k \geqslant 2$ эта вероятность меньше 1/2 ?

О дорогах (?)

На рисунке изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта O, выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что туристы попадут в пункт M ?

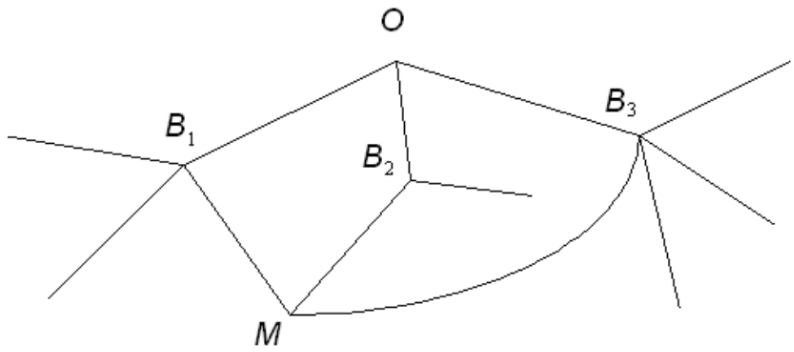


Рис. 2

Решение: Путь туристов обязательно проходит через один из промежуточных пунктов B_1, B_2, B_3.

Пусть H_i - событие, состоящее в том, что при своем движении туристы попадут в пункт $B_i (i=1,2,3)$. События H_1, H_2, H_3 по условию несовместны и равновероятны, т. к. путь из точки О выбирается наугад. Поэтому события $\mathrm{H}_1; \mathrm{H}_2; \mathrm{H}_3$ образуют полную группу, т. к. $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$, и $\sum_{i=1}^{3} P(H_i)=1$.

Если событие A - туристы попадут в пункт M, то $P(A/H_1)=1/3$, $P(A/H_2)=1/2, P(A/H_3)=1/4$. Искомую вероятность находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{36}.$$

Билеты экзамена

Из n-экзаменационных билетов студент знает m («хорошие билеты»). Что лучше: брать на экзамене билет первым или вторым? Решение: Введем событие A - студент взял «хороший» билет. 1. Студент берет билет первым. В этом случае $P(A)=\frac{m}{n}$. 2. Студент берет билет вторым. Введем две гипотезы: H_1 - первый студент взял «хороший» билет, $H_2=\overline{H_1}$.

События $H_1; H_2$ образуют полную группу, т. к. $\sum_{i=1}^{2} P(H_i)=1$. $P(A)=P(H_1)\,P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}+\left(1-\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{m}{n-1}=\frac{m}{n}$. Вывод: безразлично, брать билет первым или вторым. Пр и мер 3. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, во второй -5 белых и 5 черных шаров. Из первой урны наугад берут шар и перекладывают во вторую. Затем из второй урны достают один шар. Какова вероятность того, что он белый? Решение:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}.$$

П р и м ер 5.

На фабрике первая машина производит 25%, вторая 35, а третья 40 деталей. Брак в их продукции равен, соответственно, 5, 4 и 3%. Какова вероятность, что случайно выбранная деталь дефектна? Решение: Событие $A-$ выбранная деталь имеет дефект. Обозначим через H_i событие, состоящее в том, что случайно выбранная деталь изготовлена на i-й машине $(i=1,2,3)$.

Тогда $P(H_1)=0,25; P(H_2)=0,35; P(H_3)=0,40$, и события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу, если учесть, что других машин на фабрике нет и каждую деталь изготавливает только одна машина. Пусть $P(A)$ - искомая вероятность:

$$P(A)=P(H_1)\,P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)\,P(A/H_3)=$$
$$=0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,4\cdot 0,03=0,0385.$$

П р и м ер 6.

Вам последовательно сдается три карты из колоды в 36 карт. Какова вероятность того, что третья карта по масти не совпадает с первыми двумя? Решение: Обозначим A - третья карта по масти отличается от первых двух. В данной задаче удобно выделить следующие две гипотезы: H_1 - первые две карты одинаковы по масти, H_2 - первые две карты различаются по масти $\left(\mathrm{H}_2=\overline{H_1}\right)$. События $\dot{I}_1; \dot{I}_2$ образуют полную группу, т. к. $\sum_{i=1}^{2} P\left(H_i\right)=1$. Заметим, что

$$H_1= \text{ ЧЧ } + + \mathrm{TT} + \text{ПП},$$

где ЧЧ означает, что две первые карты червы, ББ - они бубны, ТТ - они трефы, ПП - они пики.

Вероятность вытащить две червы равна $P(\text{ ЧЧ})=\frac{C_9^2}{C_{36}^2}=\frac{9 \cdot 8}{36 \cdot 35}=\frac{2}{35}$. Аналогично, $P(\text{ ББ })=P(\text{ ТТ })=P()\ =\frac{2}{35}$. Следовательно,

$$P\left(H_1\right)=4 \frac{2}{35}=\frac{8}{35}.$$

Если две первые карты одинаковы по масти, то при вытаскивании третьей карты у нас всего 34 карты, а карт, не совпадающих по масти с первыми двумя, 27. Следовательно, $P\left(A / H_1\right)=\frac{27}{34}$. Так как $H_2=\overline{H_1}$, то $P\left(H_2\right)=1-P\left(H_1\right)=\frac{27}{35}$. Если две первые карты различны по масти, то при вытаскивании третьей карты у нас всего 34 карты, а карт, не совпадающих по масти с первыми двумя, 18. Следовательно, $P\left(A / H_2\right)=\frac{18}{34}$. По формуле полной вероятности

$$P(A)=P\left(A / H_1\right) P\left(H_1\right)+P\left(A / H_2\right) P\left(H_2\right)=\frac{27}{34} \frac{8}{35}+\frac{18}{34} \frac{27}{35}=\frac{26}{34} \frac{27}{35}=0,59.$$

При м ер 7.

По цели произведено три последовательных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле $p_1=0,3$; при втором $p_2=0,6$; при третьем $p_3=0,8$. При одном попадании вероятность поражения цели $r_1=0,4$; при двух попаданиях $r_2=0,7$; при трех попаданиях $r_3=1$. Определить вероятность поражения цели при трех выстрелах. Решение: Пусть событие A - цель поражена. Рассмотрим группу несовместных событий: H_1 - было одно попадание; H_2 - было два попадания; H_3 - было три попадания; H_4 - не было ни одного попадания. Определим вероятность каждого события. По теоремам умножения и сложения вероятностей будем иметь

$$P\left(H_1\right)=p_1\left(1-p_2\right)\left(1-p_3\right)+\left(1-p_1\right) p_2\left(1-p_3\right)+\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right) p_3=0,332.$$
$$P\left(H_2\right)=p_1 p_2\left(1-p_3\right)+p_1\left(1-p_2\right) p_3+\left(1-p_1\right) p_2 p_3=0,468.$$
$$P\left(H_3\right)=p_1 p_2 p_3=0,144.$$
$$P\left(H_4\right)=\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)\left(1-p_3\right)=0,056.$$

События $H_1; H_2; H_3; H_4$ образуют полную группу, т. к. $\sum_{i=1}^{4} P\left(H_i\right)=1$. Выпишем условные вероятности поражения цели при осуществлении каждого из событий H_1, H_2, H_3, и H_4 :

$$P\left(A / H_1\right)=0,4, P\left(A / H_2\right)=0,7, P\left(A / H_3\right)=1, P\left(A / H_4\right)=0.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P\left(H_1\right) P\left(A / H_1\right)+P\left(H_2\right) P\left(A / H_2\right)+P\left(H_3\right) P\left(A / H_3\right)+P\left(H_4\right) P\left(A / H_4\right)=$$
$$=0,332 \cdot 0,04+0,468 \cdot 0,7+0,144 \cdot 1+0,056 \cdot 0=0,6044.$$

П р и мер 8.

Известно, что 96 % выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной хорошую продукцию с вероятностью 0,98, а бракованную - с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту. Решение: Событие A - изделие прошло упрощенный контроль, H_1 - изделие удовлетворяет стандарту, H_2 - изделие бракованное. $P\left(H_l\right)=0,96; P\left(H_2\right)=0,04$; и события $H_1; H_2$ образуют полную группу. $P\left(A / H_I\right)=0,98; P\left(A / H_2\right)=0,05$. $P(A)=P\left(H_I\right) P\left(A / H_I\right)+P\left(H_2\right) P\left(A / H_2\right)=0,96 \cdot 0,98+0,04 \cdot 0,05=0,9428$. $P\left(H_I / A\right)$ - изделие удовлетворяет стандарту, если оно прошло упро- щенный контроль. По формуле Бейеса

$$P\left(H_1 / A\right)=\frac{P\left(H_1\right) \cdot P\left(A / H_1\right)}{P(A)}=\frac{0,96 \cdot 0,98}{0,9428}=0,9979.$$

Пр и мер 9.

В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, во второй -5 белых и 5 черных шаров. Из первой урны наугад берут шар и перекладывают во вторую. Затем из второй урны достают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую переложили белый шар?

Решение: Событие A - извлечен белый шар из второй урны. Введем гипотезы H_1 - достали белый шар из первой урны, H_2 - достали черный шар из первой урны. Надо найти $P\left(H_1/A\right)$.

$$P\left(H_1\right)=\frac{6}{10}, P\left(A/H_1\right)=\frac{5+1}{10+1}=\frac{6}{11}, P\left(H_2\right)=\frac{4}{10}, P\left(A/H_2\right)=\frac{5}{10+1}=\frac{5}{11}, \text{ и}$$

события $H_1; H_2$ образуют полную группу.

По формуле Бейеса

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(A/H_1\right)P\left(H_1\right)}{P\left(A/H_1\right)P\left(H_1\right)+P\left(A/H_2\right)P\left(H_2\right)}=\frac{\frac{6}{11}\frac{6}{10}}{\frac{6}{11}\frac{6}{10}+\frac{5}{11}\frac{4}{10}}=\frac{36}{56}.$$

Пр и м ер 10.

Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3 ; для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком. Решение: Возможны три гипотезы: H_1 - «на линию огня вызван первый стрелок», H_2 - «на линию огня вызван второй стрелок», H_3 - «на линию огня вызван третий стрелок». Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то

$$P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=P\left(H_3\right)=1/3.$$

В результате опыта наблюдалось событие A - после произведенных выстрелов мишень не поражена.

Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны

$$P\left(A/H_1\right)=0,7\cdot 0,7=0,49; P\left(A/H_2\right)=0,5\cdot 0,5=0,25; P\left(A/H_3\right)=0,2\cdot 0,2=0,04.$$

По формуле Бейеса находим вероятность гипотезы H_1 после опыта:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{0,49\cdot 1/3}{1/3\cdot 0,49+1/3\cdot 0,25+1/3\cdot 0,04}=\frac{0,49}{0,78}=0,628.$$

П р и м ер 11.

По линии связи с вероятностями 0,84 и 0,16 соответственно передаются два сигнала A и B. Из-за помех 1/6 часть переданных сигналов A искажается и принимается как сигнал B, а 1/8 часть переданных сигналов B принимается как сигнал A. 1) Какова вероятность того, что при приеме появится: а) сигнал A; б) сигнал B ? 2) Известно, что принят сигнал A. Какова вероятность того, что он же и был передан? Решение: Введем обозначения для событий. H_1 - передан сигнал A, H_2 - передан сигнал B, A - при приеме появится сигнал A, B - при приеме появится сигнал B. Имеем

$$P\left(H_1\right)=0,84; P\left(H_2\right)=0,16; P\left(A/H_1\right)=5/6;$$
$$P\left(A/H_2\right)=1/8; P\left(B/H_1\right)=1/6; P\left(B/H_2\right)=7/8.$$

1. По формуле полной вероятности находим а) $P(A)=P\left(H_1\right)\cdot P\left(A/H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(A/H_2\right)=0,84\cdot\frac{5}{6}+0,16\cdot\frac{1}{8}=0,72;$

б) $P(B)=P\left(H_1\right)\cdot P\left(B/H_1\right)+P\left(H_2\right)\cdot P\left(B/H_2\right)=0,84\cdot\frac{1}{6}+0,16\cdot\frac{7}{8}=0,28$. 2. По формуле Бейеса получаем

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{0,84\cdot\frac{5}{6}}{0,72}\approx 0,97.$$

П р и м ер 12.

Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1=0,2; p_2=0,4; p_3=0,3$. Решение: Введем обозначение A для события - отказали два элемента. Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 - отказали первый и второй элементы, а третий элемент исправен; H_2 - отказали первый и третий элементы, а второй элемент исправен; H_3 - отказали второй и третий элементы, а первый элемент исправен; H_4- ни один элемент не отказал; H_5 - отказал только один элемент; H_6 - отказали все три элемента. При этом (поскольку элементы работают независимо, то применима теорема умножения вероятностей):

$$P\left(H_1\right)=p_1p_2\left(1-p_3\right)=0,2\cdot 0,4\cdot 0,7=0,056;$$
$$P\left(H_2\right)=p_1p_3\left(1-p_2\right)=0,2\cdot 0,3\cdot 0,6=0,036;$$
$$P\left(H_3\right)=p_2p_3\left(1-p_1\right)=0,4\cdot 0,3\cdot 0,8=0,096.$$

Вероятности гипотез $\mathrm{H}_4, \mathrm{H}_5, \mathrm{H}_6$ можно не считать, т. к. из условия задачи следует, что

$$P(A/H_4) = 0, P(A/H_5) = 0, P(A/H_6) = 0,$$

следовательно, равны нулю и произведения $P(H_4) \cdot P(A/H_4), P(H_5) \cdot P(A/H_5)$, $P(H_6) \cdot P(A/H_6)$, входящие в формулу полной вероятности.

При гипотезах $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$ событие A достоверно, соответствующие условные вероятности равны единице. По формуле полной вероятности находим вероятность события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(H_1) P(A/H_1) + P(H_2) P(A/H_2) + P(H_3) \times$$
$$\times (A/H_3) = 0,056 \cdot 1 + 0,036 \cdot 1 + 0,096 \cdot 1 = 0,188.$$

Теперь искомую вероятность вычисляем по формуле Бейеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,056 \cdot 1}{0,188} \approx 0,298.$$

4.2.2 Задачи на независимость событий

- В задатах n2.15-n2.19 предполагается, что задано вероятностное пространство; требуется выяснить, зависимы или независимы некоторые событня.

Ч-2.15

Брошены две игральные кости. Положим $A_t = \{$ число очков, выпавшее па первой кости, $R_t = \{$ делится на $l\}$ $B_t = \{$ число очков, выпавшее на второй кости, $C_1 = \{$ делится ва $l\}$, сумма очiоов, выпавших на первой и второй костях, делится на $l\}$. Отправляясь от классического определения вероятности, установить, являются ли независимыми следующие пары событий а) A_l, B_k - при любых l, k; б) A_2, C_2; в) $A_{4,} C_4$?

Ч-2.16

Игральная кость брошена 2 раза, X_1 и X_2- числа очков, выпавшие при этих испытаниях. Рассмотрим события

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{X_1 \text{ делится на } 2, X_2 \text{ делится на } 3\}, \\
&A_2 = \{X_1 \text{ делится на } 3, X_2 \text{ делится на } 2\}, \\
&A_3 = \{X_1 \text{ делится на } X_2\}, \\
&A_4 = \{X_2 \text{ делится на } X_1\}, \\
&A_5 = \{X_1 + X_2 \text{ делится на } 2\}, \\
&A_6 = \{X_1 + X_2 \text{ делится на } 3\}.
\end{aligned}$$

Найти все пары $\{A_i, A_j\}$, тройки $\{A_i, A_{j,} A_k\}$ и т. д. взаимно независамых событий.

Ч-2.17

С.лучайная точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$: При каких значениях r независимы события $A_r = = \{|\xi_1 - \xi_2| \geqslant r\}$ и $B_r = \{\xi_1 + \xi_2 \leqslant 3r\}$?

Ч-2.18

События A и B независимы. Являются ли незавнспмыми события: а) A и $\bar{B}, 5) \bar{A}$ и $\bar{B}$?

Ч-2.19

Случайная точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Пусть

$$A_1 = \left\{\xi_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\}, \quad A_2 = \left\{\xi_2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$
$$A_3 = \left\{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\xi_2 - \frac{1}{2}\right) < 0\right\}$$

Показать, что любые два события из A_1, A_2, A_3 независимы, но все три события A_1, A_2, A_3 вависимы. Нвляготся ли зависимыми события $A_1 A_2$ и A_3 ?

Ч-2.20

(см. n2.19). Обобщая пример, приведенный в предыдущей задаче, покааать, что для пюбого целого $n \geqslant 4$ существует совокупшость $\{A_1, \ldots, A_n\}$ событий, обладаюЩая следуюпьими свойствамиі:
а) события $A_1, \ldots, A_n$ не являются независимымп,
б) при удалении из $A_1, \ldots, A_n$ любого события остающаяся совокупность состоит из независимых событий.

Ч-2.21

Событиия $A_1, A_2, \ldots, A_n$ удовлетворяют условиям

$$\mathrm{P}\left\{A_i\right\} = p_i, \mathrm{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{i} A_j\right\} = p_1 \ldots p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Является лиг $\{A_1, \ldots, A_n\}$ совокупностью независимых событий?

Ч-2.22

*. Пространство элементарных событий Ω состоит из n элементов. IIри каких k па подмножествах Ω можно определить вероятность P и события $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы события $A_1, \ldots, A_h$ были независимыми в совокупности и $0 < \mathrm{P}\left(A_i\right) < 1 (i = 1, 2, \ldots, k)$?

Ч-2.23

Пространство элементарных событий Ω состоит ия $n \geqslant 4$ элементов. При каких k молно так определить на подмнокествах Ω вероятность P и собнтвя $A_1, \ldots, A_h$, что $0 < P\left(A_i\right) < 1 \quad (i = 1, \ldots, k)$ и события $A_1, \ldots, A_h$ попарно независимы?

Ч-2.28

По цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадапия при i-м выстреле равна p_i, $i = 1, \ldots, n$. Найти вероятность того, что при n выстрелах будет не менее двух попаданий.

4.2.3 Задачи на формулу полной вероятности

Ч-2.29

В первой урне находятся 1 белый и 9 qерных шаров. а во второй - 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урпы по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

Ч-2.30

В первой урне лежит 1 белый шар и 4 красных, а во второй - 1 белый и 7 красных. В первую урну добавляготся два шара, случайно выбрапных па второй у μH.
а) Найти веронтность того, что шар, выбраппый из пополненной первой урны, будет белым.
б) Пусть из нополненной первой урны по схеме случайвого выбора с возвращением цзвлекагот k паров. Найти вероятность того, что все опи будут белыми.

Ч-2.31

Иа урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, наудачу извлекают 2 шара и добавлялот в урну один белый шар.
а) Найти вероятность того, что после этого наудачу внбраппый из урны шар огаљется белым. б)- Пусть из урны по схеме случайпого выбора с возвращением извлекают k шаров. Найти вероятность того, что все они белые.
в) Найти ту же вероятность, что в п. б), для схемы выбора без возвращения.

Ч-2.32

В пункте проката нмеется 10 телевиаоров, для которых вероятность исяравной работы в течение месяца равна 0,90, и 5 -телевизоров с аналогичной вероятностьг, равной 0,95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправяо в течение месяда.

Ч-2.33

В одной урне содержится 1 белый и 2 черных шара, а в другой урне-2 белых и 3 черных шара. В третью урну кладут два-шара, случайно выбранных из первой урны, и два шара, случайно выбравших из второй.

а) Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым?

б) Найти вероятвость того, что при выборе с возврашением из третьей урны двух шаров один из них будет белым, а другой - черным.

в) Найти ту эке вероятяость, что в п. б), для схемы выбора без возвращения.

Ч-2.37

При переливании крови надо учитывать груцпы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу кровп, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой грови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7 % имеют первую, 37,5 % - вторую, 20,9% - третью и 7,9 % - четвертую группы крови.

а) Найти вероятность того, что случайно ввятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

б) Найти вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеются два донора; три донора.

Ч-2.38

Во время пспытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсут ствии помех равна 0,99, при перегреве - $-0,95$, при вибрадии - 0,9, при вибрадин и перегреве - $-0,8$. Найти вероятность P_1 отказа этого реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна 0,2, вероятность вибрации 0,1) и вероятность P_2 отказа при работе в передвижпой лабораторни (вероятность перегрева 0,1, вероятность вибрадии 0,3), предполагая перегрев и впбрацигo незаж висимыми событиямй.

Ч-2.39

(см. n2.38). Найти границы, в которых могут изменяться вероятности P_1 и P_2 в предыдущей задаче, еслш отказаться от предположения о незавпсимости перегрева и вибрации.

Ч-2.40

Имеется пять урн. В 1-й, 2-й и 3 -й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-й и 5 -й ур. нах-по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выби рается урна и из нее извлекается пар. Какова условная вероятность того, что выбрана 4-я или 5-я урна, еоли нзвлеченный шар оказался белым?

4.2.4 Задачи на схему Бернулли (!?!?!??!?)

(очень важно это прорешать будет!)

Пр и м ер 3.

Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми. Решение: Вероятность рождения девочки $p=\frac{1}{2}$, тогда $q=\frac{1}{2}$. Найдем вероятности того, что в семье нет девочек, родилась одна, две или три девочки:

$$P_5(0)=q^5=\frac{1}{32}, P_5(1)=C_5^1p^1q^4=\frac{5}{32},\quad P_5(2)=C_5^2p^2q^3=\frac{10}{32},$$
$$P_5(3)=C_5^3p^3q^2=\frac{10}{32}.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P_5(k\leq 3)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)=\frac{13}{16}$$

Ч-2.46

Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех монет. Найти вероятность тоrо, что хотя бы в одном испытании появятся три «герба».

Ч-2.47

При передаче сообщения вероятгость искажения одного знака равна $1/10$. Каковы вероятности того, что сообщение из 10 знаков: а) пе будет искажено, б) содерікит ровно 3 искажения, в) содержит не более трех искажений?

Ч-2.48

Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единнцы.

Ч-2.49

Найти вероятность того, что в 2 n испытаниях схемы Бернуліи с вероятностью успеха p и пеудачи $q = 1 - p$ появится $m + n$ успехов и все пспытанпя с четными номерами закопчатся успехом.

Ч-2.50

Из множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ случайно й независимо выбирантел два подмножества A_1 и A_2 так, что каждый элемент из S независимо от других элементов с ролтпостю $q = 1 - p$ не включается. Найти вероптность того, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Ч-2.51

. По той же схеме выбора подмножеств иа $S = = \{1, 2, \ldots, N\}$, что в задаче n2.50, независимо выбираются r подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_r, r \geqslant 2$. Найти вероятность того, что выбранные подмножества попарно не пересекаются.

Ч-2.52

(см. n50). Из множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ яезавнсимо вцоираюотс r похмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Механизн выбора состоит в следуюнем: любой элемент мпоінества. S независимо от других элементов с вероятностьго p_i включается в множество A_i и с вероптностью $q_i = 1 - p_i$ пе включаетея $(i = 1, \ldots, r)$. Найти вероятность того, что подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно не пересекаттся.

Ч-2.55

В одном из матчей на первенство мира по шахматам шптии не учитывалнсь, и игра пла до тех пор, пока один из участников матча не наобирал 6 отков (выигрыш - 1 очко, прошгрыш іг пичья - 0 очков). Считая участпиков матча одинаковымн по сите, а результаты отдельшых игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правнлах в момент окончапня матча проигравший набирает k очков, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

Ч-2.56

Обрабатываемые па стапке детали сортируготся по размерам на две группы. Кажаая очередная деталь независимо от предыдущих с равными вероятностями попадает в первую или вторую групигу. Пусть в начал: смены для каждой группы деталей приготовлено по ящику емкости r. Какова вероятность того, что в момент, когда очередную деталь будет некуда класть, в другом яшиге будет m деталей?

Бракованные детали в партии

В партии содержатся 50 деталей, из которых 10 бракованных. Из партии наудачу берутся 5 деталей. Найти вероятность того, что:

1) все 5 деталей бракованные; 2) все 5 деталей доброкачественные; 3) в пятерке извлеченных деталей 3 детали бракованные и 2 детали доброкачественные; 4) среди 5-ти извлеченных деталей хотя бы одна бракованная.

Решение. Будем считать, что все детали пронумерованы, т. е. они образуют множество из $n = 50$ различных по номерам объектов, из которых 10− бракованные, а остальные 40 - доброкачественные. Из этой партии наудачу берутся 5 деталей. В этом состоит эксперимент.

Событие A - все 5 деталей бракованные, событие B - все 5 деталей доброкачественные, событие $C-$ в пятерке извлеченных деталей 3 детали бракованные и 2 - доброкачественные, событие D - в пятерке извлеченных деталей число бракованных деталей от 1 до 5.

Элементарный исход нашего эксперимента определяется номерами пяти взятых деталей, причем порядок указания этих номеров не имеет значения. Общее число таких элементарных событий совпадает с числом различных сочетаний из 50 элементов по 5 и выражается формулой

$$C_{50}^5 = \frac{50!}{5!45!} = \frac{46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{120} = 2118760.$$

Все эти элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны, т. к. 5 деталей берутся наудачу и одна пятерка деталей имеет такие же шансы быть взятой, что и любая другая.

Событию A благоприятствуют лишь те пять деталей, которые взяты из 10 бракованных деталей. Так как порядок взятых 5-ти деталей не играет роли, то их число равно $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!}$ и, следовательно,

$$P(A) = \frac{\tilde{N}_{10}^5}{\tilde{N}_{50}^5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120 \cdot 2118760} \approx 0,0001.$$

Событию B благоприятствуют лишь пятерки деталей, которые взяты из 40 доброкачественных дегалей. Поэтому их число равно C_{40}^5, и

$$P(B) = \frac{\tilde{N}_{40}^5}{\tilde{N}_{50}^5} = \frac{36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40}{120 \cdot 2118760} \approx 0,311.$$

Событию C благоприятствуют лишь те элементарные исходы (пятерки деталей), которые содержат 3 бракованные и 2 доброкачественные детали. Их число (по правилу умножения) равно $C_{10}^3 C_{40}^2$ и, следовательно,

$$P(C) = \frac{C_{10}^3 C_{40}^2}{C_{50}^5} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 39 \cdot 40}{6 \cdot 2 \cdot 2118760} \approx 0,044.$$

Событию $\bar{D}$ благоприятствуют лишь те элементарные исходы (пятерки деталей), которые не содержат бракованные (все доброкачественные детали), т. е. $\bar{D} = B$, поэтому

$$\mathrm{P}(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(B) = 1 - 0,311 \approx 0,689$$

Ч-2.57

По каналу связп нередаютяя сообщения из пулей и единиц. 11з-за помех вероятность правнльной передачи злака равна 0,55. Для повышения вероятности пра вильной передачй кажцый внак сообщення повторяют n раз. Полагают, что последовательности из n принятых знаков в сообпении соответствует знак, составлятщий в ней большинство. Найтн вероя ность правильной передати одного знака прі n-кратном повторении, если $n = 5$.

Ч-2.58

(см п2.57). Подобрать n так, чтобы вероятность правильной передачи зпака была пе меньше 0,99.

Ч-2.59

Joo каналу связи передается 1000 знаков. Каждый аяак может быть искажен независимо от остальиых с вероятностью 0,005. Найти приблияенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

Ч-2.61

Пусть ξ_n - число успехов в n независимых исшытапиях Бернулли с вероятностью успеха, равной 1/2. а) С помощью теоремы Муавра - Јапласа найти приближенные значенпя

$$\mathrm{P}\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\right\}, \mathrm{P}\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\right\}$$

при $n = 100$. 40

б) Вычислить те же вероятности, что в п. а), с погрешностью 10-5, используя уточненную формулу Стирлинга.

Сравнить результаты пп. а) и б) и истолковать их. п2.62*. Решить предыдущую задачу, полагая $n = 128$.

Ч-2.63

Найти приближенное значение вероятности того, что число "девяток» среди 10000 случайных писел заключено междд 940 и 1060.

Ч-2.64

Из таблицы случайных чйсел отбирают числа, делящиеся на 3, до тех пор, пока не наберется 1025 таких чисел. Найти приближенное аначение вероятности того, что цотребуется таблица, содержащая не меньше 2500 чисел.

Ч-2.65

Театр, вмещающий 1000 теловек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который опи вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят чоодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

Ч-2.66

В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяд ездит на поезде в город, выбирая дпи поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

Ч-2.67

Пусть η_N- суммарное число появлений «5» к «6» в N бросаниях игральной кости. При $N = 1800$ найти вероятность того, что $\eta_N \geqslant 620$.

Ч-2.68

Две монеты подбрасывают 4800 раз. Найти приближенное значение вероятности того, что событие "герб - герб"появится меньше 1140 раз.

Ч-2.69

Вероятность попадания в цель при одпом выг стреле равна 0,01. Найти приближенное зпачение вероятности того, что при 100 выстрелах будет не больше трех попаданий.

Ч-2.70

Иа урны. содержапцей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений пгаров. Найти приближенное вначеніие вероятностн того, что число появлений белого шара заключено между 480 и н540.

Ч-2.71

На оиной странице 2400 знаков. Пру типографи ском наборе вероятность искажения одного знака равна,

1/800. Найти яриближенное значение вероятности того, что на странице не менее двух опечаток.

Ч-2.72

Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна p. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех происходит при l-м испытании.

В задачах с n2.73 по n2.78 рассматриваются бесконечные последовательности испытаний. Воспользоваться частным случаем вероятностного пространства, который определяется формулами (n15) - (n2.17) при $N = 2$.

Ч-2.73

Две игральные кости бросают до выпадэния 6 и хотя бы на одной из иих. Найти вероятность того, что впервые "6"появляется при k-м бросании, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Ч-2.74

Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит «герб». Найти вероятности событий:
а) игра закончится до 4-го бросанпя;
б) выиграет начавший игру (первый игрок);
в) вииграет второй игрок.

Ч-2.75

В схеме Бернулли $p-$ вероятность исхода 1 и $q=1-p-$ вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что депочка 00, состоящая из двух нулей подряд, появится раньше цепочки 01. В частности, вычислить эту вероятность при $p=1/2$.

Ч-2.76

Пусть выполнены условия задачи n2.75. Найти вероятность того, что ценочка 00 (два нуля подря д) появится раньше цепочки 10. В частности, вычислить эту вероятность при $p \approx 1/2$.

Ч-2.77

Пусть выполнепы условия задачи n2.75. Найти вероятность P_{0011} того, что деночка 00 появится раньшз цепочки 111. В частности, вычпслітъ эту вероятность при $p=1/2$.

4.2.5 Задачи на пуассоновские события (??)

(мб тут и не про них, посмотрим потом, пока так, выгрузил то, что встречалось.)

Белан-л5.1.

Стрельба по цели ведется до тех пор, пока суммарное число попаданий не достигнет N. Найдите математическое ожидание, дисперсию, а также функцию распределения вероятностей потребовавшегося числа выстрелов k, если выстрелы производятся независимо друг от друга и вероятность попадания в отдельной попытке равна p.

Задача 1

Число выстрелов, требуемое чтобы получить N попаданий можно представить в виде суммы $k=k_1+k_2+\ldots+k_N$, где k_n - это число выстрелов которое потребовалось для достижения n-го попадания, если отсчитывать от предыдущего попадания (или от начала стрельбы, если речь идет об $n=1$). В силу отсутствия памяти о процесса Бернулли слагаемые статистически независимы. Каждое из них при этом имеет геометрическую функцию распределения вероятностей, заданную формулой (4). Воспользовавшись результатами, изложенными на третьей лекции и уравнением (5) и (7), запишем для случая произвольной вероятности p успеха в отдельном испытании

$$\mu_k=N\mu_{k_1}=\frac{N}{p},$$
$$\sigma_k^2=N\sigma_{k_1}^2=N\frac{1-p}{p^2}.$$

Чтобы получить функцию распределения вероятностей $p(k)$ нужно умножить вероятность получить ровно $N-1$ попаданий в серии из первых $k-1$ выстрелов на вероятность попадания в k-м исходе, то есть

$$p(k)=pB(N-1,k-1,p)=\frac{(k-1)!}{(N-1)!(k-N)!}p^N(1-p)^{k-N}$$

Этот результат известен как распределение Паскаля.

Белан-л5.2.

Найти среднее число бросков симметричной монетки необходимое чтобы каждая ее сторона выпала хотя бы два раза.

Задача 2 Подбросим монетку три раза. С вероятностью $1/4$ все три исхода будут одинаковы, и тогда среднее оставшееся число попыток, требуемое для накопления двух недостающих исходов, равно $2+2=4$. С вероятностью $3/4$ не все исходы первых трех попыток одинаковы, и тогда, чтобы получить недостающий исход второй раз, в среднем придется подбросить монетку еще 2 раза. В итоге получаем, что среднее число бросков симметричной монетки необходимое чтобы каждая ее сторона выпала хотя бы два раза равно

$$\frac{1}{4}(3+4)+\frac{3}{4}(3+2)=\frac{22}{4}=5.5$$

Белан-л5.3.

Симметричный игральный кубик подбрасывают раз за разом. Найти среднее число попыток $\langle k\rangle$, необходимое, чтобы каждая из шести граней выпала хотя бы один раз. Найти также дисперсию требуемого числа попыток.

Белан-л5.4.

Сколько в среднем раз необходимо подбросить симметричную монетку, чтобы впервые встретить в последовательности исходов реализацию вида "орел, решка"?

Задача 4 Для соответствующей случайной величины справедливо

$$k = k_1^{\circ} + k_1^{\mathbf{P}}$$

а значит

$$\langle k\rangle = \langle k_1^{\circ}\rangle + \langle k_1^{\mathbf{P}}\rangle = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}.$$

В частности, для симметричной монетки находим, что для появления пары "орел, решка"необходимо в среднем подкинуть монетку $\langle k\rangle = 4$ раз. Отметим, что среднее число попыток, необходимое для появления пары "орел,орел"равно 6.

Белан-л5.5.

Сколько в среднем раз необходимо подбросить симметричную монетку, чтобы впервые встретить в последовательности исходов реализацию вида "десять орлов подряд"?

Задача 5 Для ответа на поставленный вопрос, рассмотрим схему Бернулли, где единица соответствует выпадению орла, а ноль - выпадению решки. Будем решать задачу в общем случае, когда вероятность выпадения единицы в отдельном испытании равна p, и речь идет об ожидании цепочки исходов из N единиц подряд. Количество попыток, требуемое для реализации первой такой цепочки обозначим через k. Каждая последовательность независимых повторений эксперимента Бернулли характеризуется некоторым количеством нулей, выпавших до первого появления единицы, и количеством единиц, выпавших подряд сразу вслед за этим. Если число идущих подряд единиц в первой встретившейся цепочке единиц меньше чем N, то можно считать, что процесс ожидания цепочки из N единиц подряд начинается заново в том смысле, что оставшееся число попыток k' необходимое для выпадения N единиц подряд имеет ту же статистику, что и k. Сказанное может быть записано в форме уравнения

$$k = k_1^{\circ} + (N-1)\cdot I\left(k_1^{\mathbf{P}} > N-1\right) + \left(k_1^{\mathbf{P}} + k'\right) I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)$$

где нами были введены следующие обозначения: k_1° - номер попытки в цепочке независимых испытаний Бернулли, когда впервые выпадает; единица, $k_1^{\mathbf{P}}$ - номер попытки в цепочке независимых испытаний Бернулли, когда впервые выпадает ноль, k' - независимая реализация случайной величины k, $I(\ldots)$ - индикаторная функция. Рекурсивное соотношение (43) представляет собой пример того, что называется уравнением обновления.

Произведем статистическое усреднение

$$\langle k\rangle = \langle k_1^{\mathbf{o}}\rangle + (N-1)\cdot\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{P}} > N-1\right)\right\rangle + \left\langle k_1^{\mathbf{P}} I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle + \left\langle k' I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle.$$

Словом, мы приравняли друг другу математические ожидания левой и парвой частей Ур. (43). В силу отсутствия памяти у процесса Бернулли, $k_1^{\mathbf{P}}$ и k' это статистически независимые случайные величины, а значит $\left\langle k' I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle = \langle k'\rangle \left\langle I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle = \langle k\rangle \left\langle I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle$, и мы можем переписать

$$\langle k\rangle = \langle k_1^{\mathbf{o}}\rangle + (N-1)\cdot\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{P}} > N-1\right)\right\rangle + \left\langle k_1^{\mathbf{P}} I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle + \langle k\rangle \left\langle I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle$$

Решая это уравнение относительно $\langle k\rangle$, находим

$$\langle k\rangle = N - 1 + \frac{\langle k_1^{\mathbf{o}}\rangle + \left\langle k_1^{\mathbf{P}} I\left(k_1^{\mathbf{P}} \leq N-1\right)\right\rangle}{\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{P}} > N-1\right)\right\rangle}.$$

Остается лишь вычислить средние значения, входящие в правую часть полученного выражения.

Вспомним, что статистика случайных величин k_1° и $k_1^{\mathbf{P}}$ описывается геометрическими функциями распределения вероятностей, $P_{\mathbf{o}}\left(k_1^{\circ}\right) = p(1-p)^{k_1^{\circ}-1}$ и $P_{\mathbf{p}}\left(k_1^{\mathbf{p}}\right) = (1-p)p^{k\mathbf{p}}{}_1$ (см **p**. (4)). Значит

$$\langle k_1^{\mathbf{o}}\rangle = \frac{1}{p},$$

$$\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right)\right\rangle = \mathrm{Prob}\left[k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right] = \sum_{k_1^{\mathbf{p}}=N}^{\infty} (1-p)p^k\mathbf{p} - 1 = p^{N-1},$$

$$\left\langle k_1^{\mathbf{p}} I\left(k_1^{\mathbf{p}} \leq N-1\right)\right\rangle = \sum_{k_1^{\mathbf{p}=1}}^{N-1} k_1^{\mathbf{p}}(1-p)p^{k_1^{\mathbf{p}}-1} = \frac{1+(N-1)p^{N-Np^{N-1}}}{1-p}.$$

Подстановка этих формул в Ур. (46) дает финальный ответ к задаче

$$\langle k\rangle = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{p^N}-1\right).$$

В частности, для симметричной монетки ($p = 1/2$) имеем $\langle k\rangle = 2^{N+1} - 2$. То есть, чтобы встретить десять орлов подряд придется подбросить монетку (в среднем) $2^{11} - 2 = 2046$ раз.

Белан-л5.6.

Крупные метеориты падают на Землю в пуассоновские моменты времени с рейтом λ. Обозначим через t_n время ожидания падения n-го по счету метеорита, отсчитываемое от произвольно выбранного момента начала наблюдений. Какова функция плотности вероятности случайной величины t_n ?

Белан-л5.7.

В области полностью ионизированного водорода начинает происходить рекомбинация электронов с ионами, в результате чего газ постепенно деионизируется. Вероятность того, что электрон рекомбинируется за время dt равна $\rho(t)\beta dt$, где $\rho(t)$ это концентрация ионов в текущий момент времени t, а β - некоторый постоянный коэффициент, характеризующий акт рекомбинации. Известно, что концентрация ионов в начальный момент времени равна ρ_0, а система в целом электронейтральна. Найдите плотность вероятностей для случайной величины T - времени, прошедшего до момента рекомбинации отдельно взятого электрона. Каково медианное значение времени рекомбинации T?

4.2.6 Задачи на полиномиальную схему

Ч-2.80

При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью p_1, полностью ломается с вероятностью p_2, получает серьезное повреждение с вероятностью p_3 $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Два серьезныг повреждения прпводят к полной поломке. Найти воронтность того, что при прохождении n порогов байдарка не будет полностьо сломана.

Ч-2.81

Сообщения, передаваемые по калалу связи, состав.iяются из трех знаков A, B, C. Из-за помех каждый знак принимается правильпо с вероятностью 0,6 и принимается ошибочно за любой из двух других знаков с вероятностью 0,2. Для увеличения вероятности правильн ного приема каждый знак передается 5 раз. За переданный знак приннмается знак, который чаще всего встречается в принятой пятерпе знаков. Если наиболее частыг знака два, то ия них выбирается равновероятно один. Найти вероятность правпльного прнема знака при укан заяном способе передати.

Ч-2.82

Пусть $\xi_{\mathrm{r},\uparrow}-$ число появлений нсхода i в n первых истьтаниях полшномиальной схемы (см. введение К гл. 2). Найти $P\left\{\xi_{n,1} = m_1\right\}$.

Ч-2.83

В схеме, оппсанной в задаче n2.82, найти условвую вероятность

$$P\left\{\xi_{n,2} = m_2, \ldots, \xi_{n,N} = m_n \mid \xi_{n,1} = m_1\right\}.$$

Ч-2.84

В N ячейках, разйитых на две группы по N_{t} и N_2 ячеек соответственно $(N_1 + N_2 = N)$, независимо одну от другой размещают n частиц; пусть $p_{ij}(i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots, N_1)$ - вероятность попадания частицы в j-ю ячейку i-й группы, а $\prod_{ij}^{(n)}$ - чпсло частид, попавших в j-10 ячейку i-й группы после размещения n частиц. Найти:

а) $P\left\{\eta_{ij}^{(n)} = k_{ij},\quad i = 1, 2,\quad j = 1, \ldots, N\right\}$,

б) $P\left\{\eta_{21}^{(n)} + \ldots + \eta_{2N_2}^{(n)} = n_2\right\}$,

в) $\mathrm{P}\left\{\eta_{1j} = k_{1j}, j = 1^2, \ldots, N_1 \mid \eta_{21} + \ldots + \eta_{2N_2} = n_2\right\}$.

Ч-2.87

Исходы $\theta_1, \theta_2, \ldots$ последовательиости испытапий с $N = 3$ возможными исходами $1, 2, 3$ и вероятностями исходов p_1, p_2, p_3 объединяются в тройки $(\theta_{3k+1}, \theta_{3h+2}, \ \theta_{3k+3})$. Из первой тройки $(\theta_{3v+1}, \theta_{3v+2}, \theta_{3v+3})$, в которой все исходы различны, выбирается θ_{3v+1}. Найти $\mathrm{P}\left\{\theta_{3\mathrm{v}+1} = = i\right\}$.

Ч-2.88

Испытания в полиномиальной схеме с исходами $1, 2, 3$, имеющими вероятности p_1, p_2, p_3 соответственно, заканчиваются, когда впервые не появится исход 3. Найти вероятность того, что испытания закончатся исходом 1.

Ч-2.89

Игрок A подбрасывает 3 игральные кости, а игн рок $B - 2$ кости. Эти испытания они проводят вместе и последовательно до первого выпадения "6п хотя бы на одной кости. Найти вероятности событий:
а) $A = \{$ впервые 6 появилось у игрока A, а не $B\}$;
б) $B = \{$ впервые 46 и появилось у игрока B, а не $A\}$;
в) $C = \{$ впервые "6"появилось одновременно у $\boldsymbol{A}$ и $B\}$.

4.3 Задачи теории вероятности в жизни и быту

(мб с собеседований тоже сюда буду собирать задачи.)

4.3.1 Задачи на Типичные простые жизненные задачи (!!!!!)

(тут вот то, что встречается в жизни и буду решать!! заработает теория, если пройду основы нормально!!!)
(другой сборник открыл, лень писать, какой)
Время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки случайно и имеет экспоненциальный закон распределения. Было замечено, что в текущем сезоне на ремонт и обслуживание автомобиля после одной поездки тратилось в среднем 5 минут. Найти вероятность того, что при очередной поездке это время не превысит 30 минут.
Пусть X - время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки. По условию задачи $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ и $\mathbf{M}[X] = = 5$. По формуле связи $\mathrm{M}[X]$ и λ получаем, что $\mathrm{M}[X] = \frac{1}{\lambda} = 5$. Отсюда находим $\lambda = 1/5$. Требуется найти $\mathbf{P}\{X \leqslant 30\}$. Плотность вероятности СВ X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Следовательно, получаем

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 30\} = \int_0^{30} \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = - \left. e^{-x/5} \right|_0^{30} = 1 - e^{-6}$$

Ответ. $\mathbf{P}\{X \leqslant 30\} = 1 - e^{-6}$.
Рост взрослого мужчины удовлетворительно описывается нормальным законом распределения. По статистике средний рост составляет 175 cm, а среднеквадратическое отклонение равно 7 см. Найти вероятность того, что рост наугад взятого мужчины будет отличаться от среднего роста не больше чем на 7 см.
Р еш е н ие. Обозначим рост наугад взятого взрослого мужчины через X. По условию задачи $X \sim \mathrm{N}(175; 49)$. Требуется найти $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| \leqslant 7\}$. Так как интервал $(\mathbf{M}[X] - 7, \mathbf{M}[X] + 7)$ симметричен относительно $\mathrm{M}[X]$, то

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| \leqslant 7\} = 2\Phi_0\left(\frac{7}{\sqrt{\mathbf{D}[X]}}\right) = 2\Phi_0(1) \approx 2 \cdot 0,3413 = 0,6826.$$

О т в е т. Искомая вероятность приблизительно равна 0,6826.

МФТИ-Т.18 Мячи из ящика (??!!)

В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

Посмотрим на первое вытягивание двух мячей. Пусть A_1 - событие изъятия 2х старых мячей; A_2 - событие изъятия одного старого мяча; A_3 событие изъятия только новых мячей. С помощью комбинаторики легко посчитать эту вероятность:

$$P(A_1) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15} \tag{4.4}$$

$$P(A_2) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15} \tag{4.5}$$

$$P(A_3) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3} \tag{4.6}$$

Теперь, зная каждый случай первого доставания, второе доставание - назовем его A - при котором достались два новых мяча можно записать с помощью формулы полной вероятности.

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3)$$

$$P(A) = \frac{2}{15}\frac{C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{8}{15}\frac{C_5^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{3}\frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{45} + \frac{16}{135} + \frac{2}{45} = \frac{12+16}{135} = \frac{28}{135}$$

Ответ $\frac{28}{135}$.

МФТИ-Т.19 Вероятность получения букв по каналу

(мб отдельный раздел про такие задачи сделаю.)

По каналу можно передавать одну из трех последовательностей букв: $AAAA, BBBB, CCCC$, причем априорные вероятности равны 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до $0,6$, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и $0,2$. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ACAB$.

Нам не известно, кака считать условную вероятность прошлого при условии будущего, однако есть формула Байеса, которая позволяет перейти к вероятностям будущего при условии прошлого, которые посчитать мы сможем. По формуле Байеса:

$$\begin{aligned} &P(AAAA|ACAB) = \\ &= \frac{P(AAAA)P(ACAB|AAAA)}{P(AAAA)P(ACAB|AAAA) + P(BBBB)P(ACAB|BBBB) + P(CCCC)P(ACAB|CCCC)} = \\ &= \frac{0,3 \cdot (0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2)}{0,3(0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2) + 0,4((0,2)^3 \cdot 0,6) + 0,3((0,2)^3 \cdot 0,6)} = \frac{9}{16} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ответ: $\frac{9}{16}$.

МФТИ-Т.20 автоматы и жетоны

Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

У нас ситуация, когда в первом подходе мог быть или полурабочий или нерабочий автомат. Вероятность неудачи при полурабочем автомате. Так как вероятность работы полурабочего в два раза меньше, чем у рабочего (чья вероятность работы равна 1), то если мы будем подходить к автоматам, то вероятность, что неудача будет на полурабочем должна быть равна половине вероятности на рабочем, а в сумме вероятности равны 1. Из этих соображений следует, что вероятность, что первый автомат был нерабочим равна $\frac{2}{3}$, а что полурабочим - $\frac{1}{3}$.

Дальше, пусть был первый автомат не рабочий. Тогда после ухода из него остались только полурабочий и рабочий автоматы, вероятность успеха на рабочем (по аналогичным рассуждениям) равна $\frac{2}{3}$, а что полурабочим - $\frac{1}{3}$.

А если первый автомат был полурабочий, то остался только рабочий и нерабочий, вероятности успехов на первом равна 1, на втором - 0.

В итоге по формуле полной вероятности получаем (тут сперва вариант: нерабочий, рабочий, рабочий, потом: полурабочий, рабочий, рабочий):

$$P = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{17}{27}$$

Ответ $\frac{17}{27}$

МФТИ-Т.21 Торпеды по кораблю (!?)

(потом еще раз разберу)

Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из m отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

Попробуем просто посчитать число нужных нам событий, и сложить вероятности каждого.

Пусть попало в цель k торпед, нам нужно, чтобы попало $k \in (2, n)$, тогда $(n-k)$ штук промахнулось. Попавшие торпеды могут быть в разной последовательности, последовательностей всего C_n^k. Среди k попавших может быть разное число r пробитых отсеков $r \in (2, k)$, всего возможных последовательностей C_k^r.

Таким образом, нам остается только суммировать наши исходы:

$$P = \sum_{k=2}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{r=2}^{k} C_k^r \left(\frac{1}{m}\right)^r \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{k-r}$$

Вероятность исхода в первом испытании с вероятностью 60% (?????!!!)

Пусть вероятность нужного исхода равна X, сколько нужно сделать испытаний, чтобы получить этот исход с вероятностью 60% (?????)

(прямо очень актуальная жизненная задача, освою теорвер - прорешаю, пока не так владею им)

4.3.2 Задачи о сферах услуг с многими клиентами (!!!)

(это первый раздел, ибо самый прикольный. потом обязательно классификацию додумаю, чтобы прямо с ходу нужные задачи выдавать!!! пока в одном месте всё.)

n конвертов случайным n адресатам (????)

(?? тут пока слабая теория)

В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

Пусть A_i - элементарное событие, состоящее в том, что i-е письмо дошло своему адресату. Тогда нужно найти.

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} \mathbf{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}\right)$$

Посмотрим на каждое слагаемое внимательнее. Каждое слагаемое - вероятность того, что у нас будет m попаданий конвертов и писем. Если зафиксировать m писем, то оставшиеся письма можно раскладывать $(n-m)!$ способами. Всего можно n писем по n конвертам разложить $n!$ способами:

$$\mathbf{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}\right) = \frac{(n-m)!}{n!}$$

при этом при любых перестановках адресатов вероятность такая же, а всего перестановок при фиксированном m будет C_n^m. В итоге формула примет вид:

$$\mathbf{P} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} C_n^m \frac{(n-m)!}{n!} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{1}{m!}$$

Ответ: $\mathbf{P} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{1}{m!}$

Хватит ли сдачи на кассе (!!!)

(!!! вот тут нужно как следует потренироваться и сделать решение быстрым!!)

У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в очереди имеет 100-рублевые купюры, а вторая половина - 50-рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета - 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачу?

Для каждого человека, имеющего 100р чтобы нашлась сдача необходимо, чтобы был перед ним человек, пришедший с 50р.

Таким образом, задача эквивалентна задаче о скобочной последовательности, где есть открывающая и закрывающая скобка. и каждая открытая должна иметь после нее закрывающую.

Известно, что число скобочных последовательностей из n открывающих и n закрывающих скобок равно числу Каталана $K_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}$.

Всего же возможных последовательностей - число сочетаний C_{2n}^n, Поэтому ответ: $P = \frac{1}{n+1}$, для нашего случая, $n = 50$, имеем $P = \frac{1}{51}$

Ответ: $P = \frac{1}{51}$

Вероятность успешной сдачи экзамена при половине подготовки

Студент выучил 50 из 100 экзаменационных вопросов. В экзаменационном билете будет 9 различных вопросов. Вычислить вероятность получения студентом билета, содержащего не более 1 вопроса из числа невыученных.

Поликлиника закреплена за двумя районами города. При этом население первого района в 3 раза больше населения второго района. Известно, что прививку от гришпа в среднем сделали каждые 39 из 100 жителей первого района и каждые 42 из ста жителей второго района. Вычислить вероятность того, что случайным образом выбранный человек проживает в первом районе при условии, что он не сделал прививку от гришша.

4.3.3 Задачи о расстояниях

Вероятность, что случайно расположенные на дороге три человека находятся не близко друг с другом

Вдоль дороги, длиной в 1 км расположены случайным образом три человека. Найти вероятность того, что никакие два человека не находятся друг от друга на расстоянии, меньшем 1/4 км.

Обозначим координаты каждого человека x, y, z. Пусть они расположены в порядке $x \to y \to z$, тогда благоприятный исход A состоит в следующем:

$$A = \begin{cases} y - x \geq \frac{1}{4} \\ z - y \geq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

(?? тут ниже еще кст нормировка какая-то идет, типа чтобы обезразмерить координаты ведь!!!)

$$P(A) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dy \int_0^{y-\frac{1}{4}} dx \int_{y+\frac{1}{4}}^1 dz = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dy \left(y - \frac{1}{4}\right)\left(1 - y - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{48}$$

Порядок трех точек может быть получен $3! = 6$ способами, поэтому ответ есть полученная вероятность, домноженная на 6.

Ответ: $P = \frac{1}{8}$.

4.3.4 Задачи о встречах

Случайный выход пешехода и автобуса (???)

(?? тут путаниц много!!!)

(?? что там с геометрией СТО???? мб там какие-то особенности есть, о которых Суслов говорил?? потом подумаю)

Расстояние от пункта A до пункта B автобус проходит за 2 минуты, а пешеход - за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени из пункта A и отправляется в B пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

Будем решать графически. Нарисуем 2D пространство-время, как на картинке.

Несложные соображения показывают, что незаштрихованная область, которая соответствует встрече, может быть такой такой.

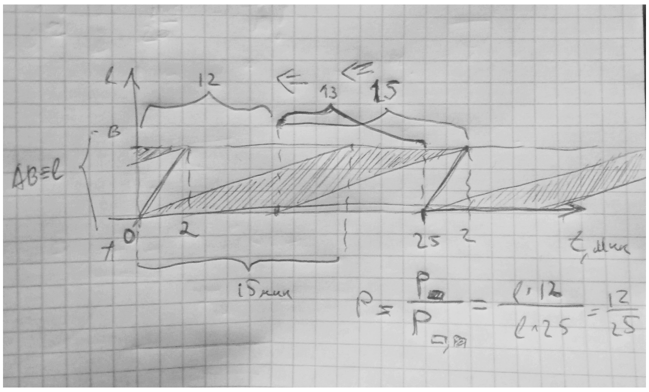


Рис. 3: для задачи Т12. Здесь короткая линия под наклоном - линия движения автобусе. длинные наклонные линии - линии движения человека. заштрихованная область - область всех возможных линий, где мировая линия человека не пересечет мировую линию автобуса. (я рисовал рисунок, решая обратную задачу, поэтому там написано $\frac{12}{25}$)

Таким образом, вероятность не встречи равна отношению площади этой области к интервалу, в котором мы смотрим движение автобуса. То есть вероятность равна: $\frac{15-2}{25} = \frac{13}{25}$

Ответ: $\frac{13}{25}$

Вероятность прихода на каждую лекцию хотя бы одного студента

В течение учебного семестра проводится 14 лекций по теории вероятностей для потока, на котором учатся 60 студентов. Каждый студент независимо от остальных приходит на лекцию с вероятностью 0.25. Вычислить вероятность того, что на каждую лекцию придёт хотя бы один студент.

Считаем типично как обратная вероятность, потому что так проще. На 1 лекцию 1 студент не придет с вероятностью 0,75. Никто не придет на одну лекцию с вероятностью $0,75^{60}$. На каждую лекцию никто не придет - то есть будет 14 лекций, каждой вероятность $0,75^{60}$ - с вероятностью $0,75^{60*14}$. Таким образом, хотя бы один придет на каждую с вероятностью $1-0,75^{60*14}$.

4.4 Задачи про случайные величины (!!!!)

4.4.1 Задачи на неравенства Чебышева и Маркова

(тут очень мощные задачи, соберу потом! ??? куда это лучше вставить, пока не знаю????)

МФТИ-Т.1 Число посетителей салона

Известно, что число посетителей некоторого салона в день является случайной величиной со средним значением 50.

(a) Оценить вероятность того, что число посетителей в конкретный день превысит 75

Решается неравенством Маркова:

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{\mathbf{M}|\xi|}{x}$$

то

$$P(\xi \geq 75) \leq \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

(b) При условии, что дисперсия числа посетителей в день равна 25, оценить вероятность того, что в конкретный день их число будет между 40 и 60.

Решается неравенством Чебышева:

$$P(|\xi - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

поэтому

$$P(|\xi - 50| < 10) = 1 - P(|\xi - 50| \geq 10) \geq \frac{3}{4}$$

(?? а если бы было между 50 и 60-ю??? пока хз.)

МФТИ-Т.2 Вероятность нахождения числа выпадений герба в промежутке

С помошью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что при 1000 бросаниях монеты число выпадений герба окажется в промежутке [450, 550]

Дисперсия в таком эксперименте

$$
\begin{aligned}
&E(\xi^2) = E(\sum_i^n 1_{A_i}) + E(\sum_{i\neq j}^n) = 500 + (1000^2 - 100)/4 = \\
&D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 250
\end{aligned}
$$

Неравенство Чебышева даст:

$$P(|\xi - 500| \geq 50) \leq \frac{250}{500}$$

$$P(|\xi - 500| < 50) = 1 - P(|\xi - 500| \geq 50) \geq 0.9$$

МФТИ-Т.3 Объем партии, при котором более всего качественных изделий (!??!?!?)

Вероятность того, что изделие качественное, равна $0,9$. Каков должен быть объем партии изделий, чтобы с вероятностью $\geq 0,95$ можно было утверждать, что отклонение (по абсолютной величине) доли качественных изделий от 0,9 не превысит $0,01$?

$$P(|\xi - 0,9| < 0,01) = 1 - P(|\xi - 0,9| \geq 0,01) \geq 0,95$$

$$P(|\xi - 0,9| \geq 0,01) \leq 0,05 = \frac{\sigma(\xi)^2}{10^{-4}}$$

но также $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \frac{1}{n}\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1} = \frac{0,3}{\sqrt{n}}$, поэтому:

$$0,05 = \frac{0,3^2}{n \cdot 10^{-4}} \to n = \frac{0,3^2}{0,05 \cdot 10^{-4}} = 18000$$

МФТИ-Т.4 Одностороннее неравенство Чебышева

Пусть случайная величина ξ имеет нулевое среднее и дисперсию σ^2. Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$$

Очевидно, что для $b > 0$

$$P(\xi \geq \epsilon) \leq P\left((\xi + b)^2 \geq (\epsilon + b)^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((\xi + b)^2\right)}{(\epsilon + b)^2} = \frac{\mathbb{E}\left(\xi^2 + 2\xi b + b^2\right)}{(\epsilon + b)^2} = \frac{\mathbb{E}\left(\xi^2\right) + b^2}{(\epsilon + b)^2}$$

Правая часть имеет минимум при $b = \frac{\sigma^2}{\epsilon}$. Подставляя это значение, приходим к нужному неравенству.

МФТИ-Т5 Неравенство Иенсена

Пусть $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$ (т. е. φ Выпуклая функция, и допускается $a = -\infty$ и $b = \infty$). Допустим также, что ξ - случайная величина, которая принимает значения из (a, b) и $\mathbf{M}\xi = m, \mathbf{M}\varphi(\xi)$ конечны. Показать, что тогда

$$\mathbf{M}\varphi(\xi) \geq \varphi(\mathbf{M}\xi) = \varphi(m)$$

$$\varphi(x) \geq \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0)$$

Пусть

$$\varphi(\xi) \geq \lambda(\mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi)) + \varphi(\mathbb{E}(\xi))$$

Берём матожидание ои обеих частей.

$$\mathbb{E}(\varphi(\xi)) \geq \lambda(\mathbb{E}(\xi))(\mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\xi)) + \mathbb{E}(\varphi(\mathbb{E}(\xi))) = \varphi(\mathbb{E}(\xi))$$

МФТИ-Т6

Пусть ξ - случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $\left(a, \sigma^2\right)$. Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(|\xi - a| \geq \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\varepsilon^2/2}$$

$$P(|\xi| \geq \epsilon\sigma) = \left(\int_{\epsilon\sigma}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-\epsilon\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) d(x) = \int_{\epsilon\sigma}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) d(x) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\epsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d(x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)$$

МФТИ-Т.7 еще неравенство (!??!?)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - последовательность одинаково распределенных случайных величин такая, что $\mathbf{M}\xi_k = a, \mathbf{D}\xi_k = \sigma^2$ и $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j} v \ i \neq j$. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

МФТИ-Т.8 о чем-то схожим с ЗБЧ (???)

Пусть $\{\xi_n\}$ - последовательность неотрицательных случайных величин с конечными математическими ожиданиями и $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi, \mathbf{M}\xi < \infty$ $\mathbf{M}\xi_n \to \mathbf{M}\xi$ при $n \to \infty$.

Покажите, что тогда $\mathbf{M}\left|\xi_n - \xi\right| \to 0$ при $n \to \infty$ Т. е. $\xi n \overset{L}{\to} \xi$
$\forall n \in \mathbb{N}:$

$$\left|\mathbb{E}\left(\xi_n\right)\right| < +\infty, |\mathbb{E}(\xi)| < +\infty \to \mathbb{E}\left|\xi_n - \xi\right| < +\infty$$

$\forall \epsilon > 0:$

$$\mathbb{E}\left|\xi_n - \xi\right| = \mathbb{E}\left|(\xi_n - \xi)\left(I\left(\sup_{k\geq n}\left(|\xi_k - \xi| > \epsilon\right)\right) + I\left(\sup_{k\geq n}\left(|\xi_k - \xi| \leq \epsilon\right)\right)\right)\right| =$$
$$= \mathbb{E}\left|(\xi_n - \xi) I\left(\sup_{k\geq n}\left(|\xi_k - \xi| > \epsilon\right)\right)\right| + \mathbb{E}\left|(\xi_n - \xi) I\left(\sup_{k\geq n}\left(|\xi_k - \xi| \leq \epsilon\right)\right)\right|$$

Первый индикатор в пределе принимает значение 1 только на множестве меры 0. Второй индикатор в пределе принимает значение 1 почти всюду. Но тогда под вторым математическим ожиданием стоит выражение $|\xi_k - \xi| \leq \epsilon. \to \mathbb{E}\left|\xi_k - \xi\right| \leq \mathbb{E}(\epsilon) = \epsilon$

4.4.2 Задачи про распределение вероятностей случайных величин (!??!?)

(обязательно прорешаю скоро, просто пока не до этого. уже немного решал, в 1ю часть добавлю потом методы.)

Белан-ВШЭ-л1.1. (!?!?!?!?)

В диапазоне от 1 до N включительно равновероятным образом выбирается натуральное число. Оцените вероятность того, что это число окажется простым, если $\ln N \gg 1$.

$$\pi(N) \approx \int_2^N \frac{dk}{\ln k} \approx \frac{N}{\ln N}.$$

Решение (?? тут какой-то гениальный метод, который я пока не понимаю.)

Белан-ВШЭ-л1.2. Первая цифра во времени жизни атома (!?!?!?!?)

Оцените вероятности различных значений, которые может принимать первая значащая цифра в десятичной записи случайного времени жизни радиоактивного атома неизвестного вещества.

(!!! в 1ю и 2ю обязательно добавлю эти методы)

Решение Случайное времени жизни T радиоактивного атома вещества с рейтом распада λ имеет экспоненциальную функцию распределения $p(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$. Обозначим первую значащую цифру случайной величины T через a_1. От нас требуется вычислить вероятности $\Pr[a_1 = d \mid \lambda]$, где $d = 1, 2, \ldots, 9$. Легко сообразить, что

$$\Pr[a_1 = d \mid \lambda] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{10^n d}^{10^n (d+1)} p(t)dt = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{10^n d}^{10^n (d+1)} \exp(-\lambda t)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [1 - \exp(-10^n \lambda)] \exp(-10^n d\lambda)$$

Отметим, что полученное выражение строго инвариантно относительно замены $\lambda \to 10\lambda$. Этот факт с необходимостью следует из постановки задачи; ведь если используется именно десятичная запись числа, то умножение случайной величины на любую целочисленную степень десятки не изменит первую значащую цифру. Из Ур. (36) видно, что $\Pr[a_1 = d \mid \lambda] > \Pr[a_1 = d + 1 \mid \lambda]$, ведь $\exp(-10^n d\lambda) > \exp(-10^n (d+1)\lambda)$ для любого n. То есть, значение первой значащей цифры не равнораспределено, как можно было бы подумать. К сожалению, суммирование в формуле (36) невозможно произвести аналитическими методами. Однако, имеется возможность получить приближенный ответ, воспользовавшись подсказками численного анализа. А именно, построение графика выражения (36), рассматриваемого как функция от $\log_{10} \lambda$ показывает, что значение $\Pr[a_1 = d \mid \lambda]$ достаточно слабо зависит от этого параметра. Это означает, что искомое распределение первой значащей цифры в десятичной записи времени жизни атома практически не зависит от того, в секундах или в годах это время измеряется.

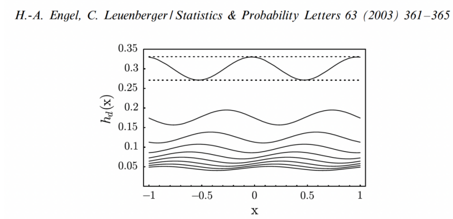


Рис. 4: На этом графике приняты следующие обозначения: $x = \log_{10} \lambda, h_d(x) = \Pr[a_1 = d \mid 10^x]$

Так как функция $\Pr[a_1 = d \mid \lambda]$ периодична по переменной $x = \log_{10} \lambda$ с единичным периодом и слабо меняется, то для целей численной оценки она может быть заменена на амплитуду своей нулевой Фурье-гармоники. Иными словами, можно усреднить по периоду, записав

$$\Pr[a_1 = d \mid \lambda] \approx \int_0^1 \Pr[a_1 = d \mid 10^x]\, dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[1 - \exp\left(-10^{n+x}\lambda\right)\right] \exp\left(-10^{n+x} d\lambda\right) d\mathbf{+37}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-10^{x'}} d\left(1 - e^{-10^{x'}}\right) dx' = \frac{1}{\ln 10} \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-d\lambda} \left(1 - e^{-\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_0^{+\infty} d\lambda \lambda^{\varepsilon - 1} e^{-d\lambda} - \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda^{\varepsilon - 1} e^{-(d+1)\lambda}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \lim_{\varepsilon \to +0} \left[d^{-\varepsilon} \int_0^{+\infty} d\lambda' \lambda'^{\varepsilon - 1} e^{-d\lambda'} - (d+1)^{-\varepsilon} \int_0^{+\infty} d\lambda' \lambda'^{\varepsilon - 1} e^{-(d+1)\lambda'}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\left(d^{-\varepsilon} - (d+1)^{-\varepsilon}\right) \Gamma(\varepsilon)\right] = \frac{\ln \frac{d+1}{d}}{\ln 10} = \log_{10} \frac{d+1}{d}$$

где

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

$$d^{-\varepsilon} - (d+1)^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon \ln d} - e^{-\varepsilon \ln(d+1)} \approx \varepsilon \ln \frac{d+1}{d},$$

$\Gamma(\varepsilon) \approx \int_0^{+\delta} t^{\varepsilon - 1} dt = \frac{\delta^\varepsilon}{\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon}$ (Так как при $\varepsilon \to +0$ интеграл расходится в точке $t = 0$, то при малом ε можно сказать, что доминирующий вклад набирается в малой области $t \in (0, +\delta)$, где $\delta \ll 1$ и $\delta^\varepsilon \approx 1$) Полученное распределение называется законом Бенфорда. Очевидно выполнение условия нормировки: $\sum_{d=1}^9 \Pr[a_1 = d] = \sum_{d=1}^9 \log_{10} \frac{d+1}{d} = 1$.

оставшиеся вопросы как так мы численно считаем???? пропишу этот метод, что если период-я функция, то так вот делаем!!!!

это самое гениальное в задаче.

Белан-ВШЭ-л1.3. (!?!?!?!?)

Рассмотрим случайную величину, равномерно распределенную между 0 и 1. Какова вероятность того, что ровно две из пяти цифр после запятой в десятичной записи этой величины заняты цифрами меньше 6 ?

(решения нет, я пока хз.)

Решение.

Белан-ВШЭ-л1.4. (!?!?!?!?)

Найдите $\langle \max(X_1, X_2) \rangle$, где X_1 и X_2 - две независимые реализации гауссовой случайной величины, с первым моментом μ и дисперсией σ.

Решение. (решения нет, я пока хз.)

Белан-ВШЭ-л1.5. (!?!?!?!?)

Найдите $\langle \min(|X|, 1) \rangle$, где X - случайная величина с функцией распределения $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&\langle \min(|X|, 1)\rangle = \langle |X| \cdot I(|X| \le 1)\rangle + \langle 1 \cdot I(|X| > 1)\rangle = \\
&= \int_{-1}^{+1} dx|x|p(x) + \int_{-\infty}^{-1} dxp(x) + \int_{+1}^{+\infty} dxp(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+1} \frac{xdx}{1+x^2} + \frac{2}{\pi}\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= \frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi}\arctan x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Белан-ВШЭ-л1.7. (!?!?!?!?)

Случайная величина X имеет монотонно возрастающую кумулятивную функцию распределения $F(x)$. Найдите функцию распределения случайной величины $Y = F(X)$.

Решение. Обозначим функцию плотности вероятности случайной величины X как $p(x)$. Так как кумулятивная функция распределения $F(x) = \int_0^x dx' p(x')$ является монотонно возрастающей, то функция распределения $\rho(y)$ случайной величины $Y = F(X)$ равна

$$\rho(y) = p(x(y))\frac{dx(y)}{dy} = p(x)\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^{-1} \mid x = x(y) = p(x(y))\frac{1}{p(x(y))} = 1$$

для $0 \le y \le 1$

Белан-ВШЭ-л1.8. (!?!?!?!?)

Выразите математическое ожидание и дисперсию случайной переменной $Z = aX + bY$, где X и Y - независимые случайные величины с известными первыми двумя статистическими моментами, a и b - некоторые вещественные константы.

Решение.

Белан-ВШЭ-л1.9. (!?!?!?!?)

Неотрицательные случайные величины X_1 и X_2 независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $p(x) = a\exp(-ax)$. Найдите функцию плотности вероятности случайной величины $Y = X_1/X_2$.

Решение. Найдем кумулятивную функцию распределения случайной переменной $Y = X_1/X_2$

$$F(y) = \Pr\left[\frac{X_1}{X_2} \leq Y\right] = \Pr\left[X_1 \leq Y X_2\right] = \int_0^{+\infty} dx_2 p\left(x_2\right) \int_0^{+y x_2} dx_1 p\left(x_1\right) =$$
$$= a^2 \int_0^{+\infty} dx_2 e^{-a x_2} \int_0^{+y x_2} dx_1 e^{-a x_1} = a \int_0^{+\infty} dx_2 e^{-a x_2}\left(1 - e^{-a y x_2}\right) =$$
$$= a \int_0^{+\infty} dx_2 \left(e^{-a x_2} - e^{-a(y+1) x_2}\right) = 1 - \frac{1}{y+1}$$

Значит искомая функция плотности вероятности равна

$$\rho(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{(y+1)^2}$$

Показательность для случайной величины без старения (??)

Докажите, что если X - непрерывная неотрицательная случайная величина, для которой отсутствует старение (т.е. для всех t,s>0 $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$), то она показательно распределена.

(Олег решил, но я еще слишком тупой, чтобы понять решение, так что пропускаю, подрасту - вернусь к ней.)

Распределение $\frac{X}{X-Y}$ от показательных X и Y

Пусть и Y - независимые случайные величины, показательно распределенные с параметром λ. Найдите распределение величины $\frac{X}{X-Y}$.

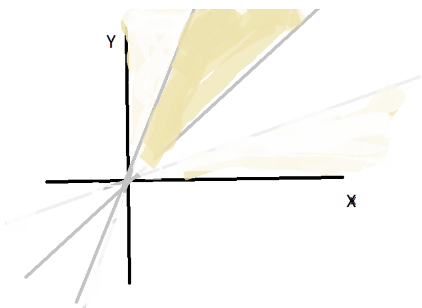
(переучу потом, тут разные новые для меня методы есть.)

Решение через интегрирование, грамотно определяя область Как всегда, в силу независимости $P(XY) = P(x)P(Y)$ делим нужную вероятность на произведение двух:

$$P(X; Y = \left(1 - \frac{1}{k}) X\right) = P(X) P\left(Y = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X\right) = \int_X \int_Y \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dx dy$$

Определим область интегрирования. Оно будет свое для каждого k, который мы повышаем от $-\infty$ до $+\infty$. Наше исходное множество - область $X > 0, Y > 0$, именно по некоторым подмножествам его будут наши интегралы. Прямая $Y = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$ разделяет его на подмножества, если её коэффициент более нуля: $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq 0$. Это возможно только при $k < 0, k > 1$, именно эти случаи и будем рассматривать.

Пусть $k < 0$. Прямая $Y = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$ при $k < 0$ проходит выше прямой $Y = X$. Рассмотрим подмножество $X > Y$, исходное неравенство $\frac{X}{X-Y} \leq k$ дает область $Y \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$, которая не пересекается с подмножеством $X > Y$. Рассмотрим подмножество $X < Y$, исходное неравенство $\frac{X}{X-Y} \leq k$ дает область $Y \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$, таким образом, получаем область между прямыми $X = Y$ и $Y = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$:

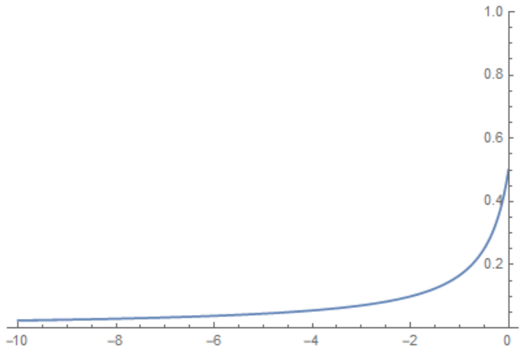


Считаем:

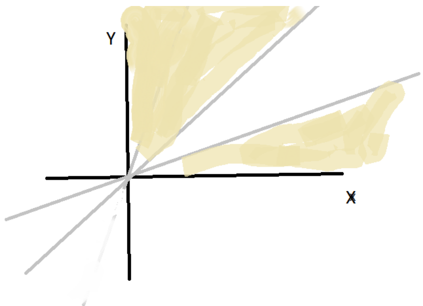
```
Integrate[L^2 Exp[-L(y+x)], {x,0,Infinity},{y,x,(1-1/k)x}, Assumptions->{Im[L]==0,L>0,k<0}]

Plot[1/(2 - 4 k), {k, -10, 0}, PlotRange -> {0, 1}]
```

Получаем:



Пусть $k > 1$. Прямая $Y = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$ проходит ниже прямой $Y = X$. Рассмотрим подмножество $X > Y$, исходное неравенство $\frac{X}{X-Y} \le k$ дает на нем область $Y \le \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$, то есть это множество, заключенное между прямой $Y = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$ и осью X. Рассмотрим подмножество $X < Y$, исходное неравенство $\frac{X}{X-Y} \le k$ дает на нем область $Y \ge \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$, то есть это вся область $Y > X$. В итоге для $k > 1$ интегрируем по $Y > X$ и $0 < Y \le \left(1 - \frac{1}{k}\right) X$:

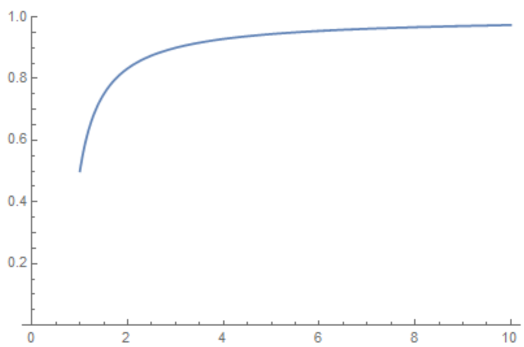


Считаем:

```
Integrate[L^2  Exp[-L(y+x)], {y,0,Infinity},{x,0,y}, Assumptions->{Im[L] == 0, L > 0}]
+
Integrate[L^2 Exp[-L(y+x)], {x,0,Infinity},{y,0,(1-1/k)x}, Assumptions->{Im[L]==0,L>0,k>1}]

Plot[3/2 + k/(1 - 2 k), {k, 1, 10}, PlotRange -> {0, 1}]
```

Получаем:



Получаем, что область интегрирования красиво меняется при увеличении k от $-\infty$ до 0 из прямой $Y = X$ до треугольника между осью Y и прямой $Y = X$, а дальше при увеличении k от 1 до $+\infty$, область продолжает увеличиваться, только уже от оси X, и до заполнения всей четверть плоскости $X > 0, Y > 0$.

Ответ: функция распределения имеет вид: $F(k) = \frac{1}{2-4k}$ при $k < 0$, $F(k) = \frac{1}{2}$ при $k \in [0, 1]$, $F(k) = \frac{3}{2} + \frac{k}{1-2k}$ при $k > 1$.

В общем, здесь по типичным методам происходит переход к интегралу от двух функций, а далее самое сложное: четко преобразовать основное неравенство для определения множества интегрирования. Важно понимать, что для каждого k мы должны определить свою область интегрирования, чем мы и занимаемся, аккуратно решая неравенство. Важно тут быть очень внимательным и последовательным!

Поэтому эта задача сложная. После определения области интегрирования, важно правильно подставить её границы в интеграл, для этого нужна подготовка по математическому анализу. Также важно решать через вольфрам, без этого может быть огромное количество ошибок.

(мб потом улучшу вольфрамовский код, пока прога слабее нужного. как соединить графики в один?? как более компактно записать код?? потом улучшу скорее всего, пока суть итак прекрасно понятна.)

(??? напишу в теорию, что константой можно соединить эти отрезки)

Решение через переход к нужной функции распределения через последовательные шаги (??!!!! вобью эти шаблоны и идеи переходы по шагам в теорию. пока на этот метод забил, потому что итак метод есть рабочий.)

Сперва находим распределение Y/X, далее 1- Y/X, в итоге 1/(1-Y/X)

Вот некачественная копия этих рассуждений:

$$= \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda q t}\right) \cdot e^{-\lambda q} d(\lambda t) = \left(-e^{-\lambda q} + e^{-\lambda q(1+t)} \cdot \frac{1}{1+t}\right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

Uow, $F_{\frac{y}{x}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{1+t}, & t \geqslant 0. \end{cases}$

Uak, $F_{\frac{y}{x}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{1+t}, & t \geqslant 0. \end{cases}$ Cuyraidear becusuma $1 - \frac{y}{x}$ pacmpegenera:

$$F_{1-\frac{y}{x}}(t) = P\left(1 - \frac{y}{x} < t\right) = P\left(\frac{y}{x} > 1 - t\right) = 1 - P\left(\frac{y}{x} \leqslant 1 - t\right) =$$

$$= 1 - F_{\frac{y}{x}}(1-t) = \begin{cases} 1 - \frac{1-t}{2-t}, t \leqslant 1, \\ 1, t > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2-t}, t \leqslant 1, \\ 1, t > 1. \end{cases}$$

$\frac{x}{x-y} = \frac{1}{1-\frac{y}{x}}$. Ocranscs nomers coort. vemgy cuyracitsodx $F_{\frac{1}{2}}(t) = P\left(\frac{1}{q} < t\right) = \begin{cases} P\left(\eta \in \left(\frac{1}{t}; 0\right)\right), \quad t < 0, \\ P(\eta \in (-\infty; 0)), t = 0, \\ P\left(\eta \in (-\infty; 0) v \left(\frac{1}{t}; +\infty\right)\right), t > 0 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} F_q(0) - F_q\left(\frac{1}{t}\right), t < 0, \\ F_q(0), t = 0, \\ 1 + F_q(0) - F_q\left(\frac{1}{t}\right), t > 0. \end{cases}$$

B ramese ayrae: $\eta = 1 - \frac{y}{x}$. Uak,

$$F_{\frac{x}{x-y}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2-\frac{1}{t}}, t < 0, \\ \frac{1}{2}, t = 0, \\ 1 + \frac{1}{2} - 1, t \in (0;1), \\ 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2-\frac{1}{t}}, t \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2(2t-1)}, t < 0, \\ \frac{1}{2}, t = 0, \\ \frac{1}{2}, t \in (0,1), \\ \frac{4t-3}{4t-2}, t \geqslant 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{4t-2}, t < 0, \\ \frac{1}{2} \in [0;1], \\ 1 - \frac{1}{4t-2}, t > 1. \end{cases}$$

Распределение $X/(X+Y)$ от показательных и Y (!!??)

(!!! вобью в 1ю часть, мощные важные методы!!! очень важно отработать и вбить!!!)

Another way Another way is to do it is to perform the following transformation. Let

$$U = \frac{X}{X+Y}$$
$$V = X + Y$$

Then

$$x(u,v) = uv$$
$$y(u,v) = v - uv.$$

The determinant of the Jacobian of the transformation is

$$\begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = v$$

Then, the joint pdf of U and V is

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(uv, v-uv)|v| = ve^{-v}, \text{ for } v \geq 0, 0 \leq u \leq 1.$$

Finally, "integrate out"the v to obtain the marginal pdf of $U = X/(X+Y)$ as

$$f_U(u) = \int_0^\infty f_{U,V}(u,v)dv = \int_0^\infty ve^{-v}dv = 1, \quad \text{for } 0 \leq u \leq 1.$$

Hence, as Michael Hardy showed, $X/(X+Y)$ is uniformly distributed on $[0,1]$.

1 method Obviously $X/(X+Y)$ is between 0 and 1. Let (lower-case) w be a number between 0 and 1.

$$\frac{X}{X+Y} \leq w \text{ if and only if } (1-w)X \leq wY$$

We will find this probability. The conditional probability that $Y \geq \frac{(1-w)}{w}X$, given the value of X, is

$$e^{-(1-w)X/w}$$

The probability we seek is then the expected value of that:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}e^{-(1-w)X/w} &= \int_0^\infty e^{-(1-w)x/w}\left(e^{-x}dx\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-x/w}dx \\ &= w \end{aligned}$$

In other words, this random variable is uniformly distributed between 0 and 1.

Second method: The equality $Y = \frac{1-w}{w}X$ is a straight line through the (X,Y)-plane, passing through $(0,0)$ and having positive slope. We can let y go from 0 to ∞ and then for any fixed value of y, let x go from 0 to $\frac{w}{1-w}y$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\int_0^{wy/(1-w)} e^{-y}e^{-x}dx\right)dy \\ =&\int_0^\infty e^{-y}\left(1-e^{-wy/(1-w)}\right)dy \\ =&\int_0^\infty e^{-y} - e^{-y/(1-w)}dy \\ =&1-(1-w) \\ =&w \end{aligned}$$

Распределение $2X/(1-X^2)$, при X по Коши

Пусть - случайная величина, распределенная по Коши (0, 1). Найдите распределение величины $2X/(1-X^2)$.

(Олег решил, но я еще слишком тупой, чтобы понять решение, так что пропускаю, подрасту - вернусь к ней.)

ВШЭ вероятность первой значащей цифры (!!!)

Задача 2 (7 баллов) Случайная величина X имеет функцию распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{x^\alpha}, \text{ если } x \geq 1, \\ 0, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

где $\alpha > 1$. Найдите вероятности различных значений, которые может принимать первая цифра в десятичной записи величины X. На основе точного ответа отдельно исследуйте случаи $\alpha - 1 \ll 1$ и $\alpha \gg 1$.

$$P(d,a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{10^n d}^{10^n(d+1)} p(x)dx$$

(тут потом напишу, почему так, там выше задача похожая, тут очень важная её модификация)

$$P(d,\alpha)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^{-\alpha+1}\right)_{10^n d}^{107(\alpha+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}10^{n(1-\alpha)}\left(d^{-\alpha+1}-(d+1)^{-\alpha+1}\right)$$

имеем геом прогрессию с с $q=10^{(1+a)}$

$$p(d,\alpha)=\frac{d^{-\alpha+1}-(d+1)^{-\alpha\times 1}}{1-10^{1-\alpha}}\Bigg]$$

Далее один предел

$$\begin{aligned}
&\text{2-1) ирен } \alpha\gg 1\\
&d^{\imath-\alpha}=d^{-\alpha}\gg(d+1)^{\alpha}\\
&\quad 1>10-\alpha\\
&\qquad 1>10^{-\alpha}\\
&p(d,\alpha)\approx\frac{d^{-\alpha}}{1}=\left(d^{-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

второй предел

$$\begin{aligned}
&2.2)\\
&P(d,\beta)=\frac{d^{-\beta}-(d+1)^{-\beta}}{2-10^{-\beta}}=\frac{d^{-\beta}\left(1-\left(\frac{d+1}{d}\right)^{-\beta}\right)}{1-10^{-\beta}}=\\
&=\frac{d^{-\beta}(-1)\left(\frac{d+1}{\alpha}\right)^{-\beta}\log\left(\frac{d+1}{d}\right)}{(-1)10^{-\beta}\log 10}=\\
&=\left(\frac{d+1}{10}\right)^{-\beta}\frac{\log\left(\frac{d-1}{d}\right)}{\log 10}\approx\frac{\log\frac{d+1}{d}}{\log 10}=\\
&=\log_{10}\frac{d+1}{d}.
\end{aligned}$$

Оставшиеся вопросы (!??!?!?) (почему вольфрам криво считает интеграл???? вообще просто хз, когда-то пороюсь, пока не знаю.)

```
In[92]:= Integrate[(a - 1)/x^a, {x, 10^n d, 10^n (d + 1)},
Assumptions -> {a > 1, d > 0, 10^n >= 0}]

Out[92]= 10^n (100^n d (1 + d))^-a (-(10^n d)^a (1 + d) +
d (10^n (1 + d))^a)
```

и вот дальше вообще херня пойдет, если эту формулу использовать.

(!!!! впишу, что именно так мы и ищем предельные случаи!!! именно такая гениальная идея находить первую значащую цифру!!! часа 6 ушло на эту задачу, важно прописать этим методы потом!!! просто по сути нужно аккуратно проделать очевидные математические преобразования!!!!!!!! поэтому эта задача и жесткая!!!)

(!! пропишу методы аппроксимации, что так вот по лопиталю нужно аккуратно брать производные!!! что они через логарифм берутся знать важно. потом когда-то дооформляю.)

ВШЭ вероятность первой значащей цифры в периоде радиоактивного распада

Решение

Основные ходы, которые в 1ю часть добавлю потом!!! (пока просто слабоватая структура.)

Магистратура МФТИ 2019.7.

Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t)=\begin{cases} e^t, & t<0\\ 0, & t\geq 0\end{cases}$$

Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho_Y(t)=\begin{cases} 0,t<0,\\ e^{-t},t\geq 0.\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$.
б) Вычислить математическое ожидание случайной величины Z.
в) Вычислить дисперсию случайной величины Z.

Ответ: а) $P(Z < t) = \begin{cases} 1 - \frac{\exp(-t)}{2}, t > 0, \\ \frac{\exp(t)}{2}, t \leq 0, \end{cases}$ $\quad \rho_Z(t) = \frac{\exp(-|t|)}{2}$, $\quad$ б) $MZ = 0$, $\quad$ в) $DZ = 2$.

Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$P(Z < t) = \iint_{\substack{\xi+\eta<t \\ \xi<0,\eta>0}} e^{\xi-\eta} d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\min\{t,0\}} e^{\xi} d\xi \int_0^{t-\xi} e^{-\eta\eta} d\eta = \int_{-\infty}^{\min\{t,0\}} e^{\xi}\left(1 - e^{\xi-t}\right) d\xi =$$

$$= \exp(\min\{t,0\}) - \frac{\exp(2\min\{t,0\} - t)}{2} = \begin{cases} 1 - \frac{\exp(-t)}{2}, & t > 0, \\ \frac{\exp(t)}{2}, & t \leq 0, \end{cases}$$

Следовательно, плотность распределения случайной величины Z равна $\rho_Z(t) = \frac{\exp(-|t|)}{2}$.

$$MZ = \int_{-\infty}^{+\infty} t\rho_Z(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\exp(-|t|)}{2} dt = 0,$$

$$+\infty$$

$$DZ = MZ^2 - (MZ)^2 = \int_{-\infty}^{+2} t^2\rho_Z(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\exp(-|t|)}{2} dt = \int_0^{+\infty} t^2\exp(-t)dt = 2.$$

Ч-3.пр.1 Распределение координат точки в квадрате

Пусть точка $A = (u, v)$ равномерно распределена в квадрате $\Omega = \{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \leqslant 1\}$. Положим $\xi_1 = \xi_1(u,v) = u$,

$$\xi_2 = \xi_2(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{при} & u \geqslant v, \\ -1 & \text{при} & u < v. \end{cases}$$

Найти:
а) функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины ξ_1;
б) функцию распределения и вероятности значений дискретной величины ξ_2.

Событие $\{\xi_1 \leqslant x\} = \{(u,v) : u \leqslant x, (u,v) \in \epsilon\, \Omega\}$ при $x > 1$ совпадает с Ω, а при $x < 0 - c$. При $0 < x < 1$ множество точек, определяющих событие $\{\xi_1 \leqslant x\}$, образует прямоугольник со сtороиамп 1 и x.

Таким образом,

$$F_{\xi_1}(x) = \mathrm{P}\{\xi_1 \leqslant x\} = \begin{cases} 0 & \text{прн} & x \leqslant 0, \\ x & \text{прн} & 0 < x < 1_f \\ 1 & \text{прн} & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Производная $F'_{:_1}(x)$ в ее точках непрерывности совпадает с шлотностью распределения:

$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} & x \notin [0,1]_r \\ 1 & \text{при} & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Функция распределения ξ_2 находится аналогично. Если $x \geqslant 1$, то $\{\xi_2 \leqslant x\} = \Omega; \{\xi_1 \leqslant x\} = \varnothing$ при $x < -1$, а при $-1 \leqslant x < 1$

$$\{\xi_2 \leqslant x\} = \{(u,v) : u < v, \quad (u,v\rangle \in \Omega\}.$$

Значит,

$$F_{\mathrm{b}_2}(x) = \mathrm{P}(\xi_2 \leqslant x\} = \begin{cases} 0 & \text{при} & x < -1, \\ 1/2 & \text{при} & -1 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при} & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Слутайная величина ξ_2 дискретна; ее распределение сосредоточево в двух точках: -1 и 1. Действительно,

$$\mathrm{P}\{\xi_2 = 1\} = \mathrm{P}\{(u,v) : u > v, \quad (u,v) \in \Omega\} = 1/2,$$
$$\mathrm{P}\{\xi_2 = -1\} = \mathrm{P}\{(u,v) : u < v, \quad (u,v) \in \Omega\} = 1/2.$$

Ч-3.пр.2 Функция от точки в квадрате

Найти распределение величины $\eta = \xi_1^2$, где случайная величнна ξ_1 та же, что. в примере n3.1.

Функция распределения η при $0 \leqslant x \leqslant 1$ определяется следующей ценочкой равенств: $F_\eta(x) = \mathrm{P}\{\eta \leqslant x\} = \mathrm{P}\left\{\xi_1^2 \leqslant x\right\} = \mathrm{P}\left\{-\sqrt{x} \leqslant \xi_1 \leqslant \sqrt{x}\right\} =$

$$\Rightarrow F_{\xi_1}(\sqrt{\bar{x}}) - F_{\xi_1}(-\sqrt{x}) = \sqrt{\bar{x}}.$$

Очевидно, что $F_{\text{п}}\ (x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $F_n(x) = 1$ при $x > 1$. При $0 < x < 1$

$$p_n(x) = F'_{\xi_1}\left(V_{\bar{x}}^{\bar{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};\right.$$

$p_\eta(x) = 0$ при $x < 0$ и шри $x > 1$. Таким образом, величина η абсолютно непрерывна и ев плотность распределения определяется формулой

$$p_n(x) = 1/(2\sqrt{x}) \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$
$$p_\eta(x) = 0 \text{ при } x \notin (0,1).$$

Ч-3.пр.7

Для случайной величины η, определенной в примере 3.2, найти $M\eta$ и $D\eta$.

Если плотность распределения известна, то для вычпслеввя $M\eta$ удобно воспользоваться формулой

$$\mathrm{D}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\eta)^2 p_\eta(x) dx$$

которая является частным случаем (3.9) с $g(x) \Rightarrow = (x - M\eta)^2$. Полсставляя в эти формулы плотность распределения $p_\eta(x)$, вычпслевную в примере 3.2, получим

$$M_\eta = \int_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}, \quad D_\eta = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{4}{45}.$$

Можно было также воспользоваться формулами (3.9) при $g(x) = x^2, g(x) = (x - M\eta)^2$ с заменой $p_4(x)$ па плотность $p_{\bar{z}},(x)$, определенную в прпмере 3.1:

$$M_\eta = M_{\xi_1^2}^2 - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\mathrm{E}_1}(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$
$$= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{4}{45}.$$

Ч-3.пр.3

Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x) = e^{-\pi} \quad (x > 0), \quad p_{\mathrm{s}}(x) = 0 \quad (x \leqslant 0)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \eta(\xi) = [\xi]^2$, где $[\xi]$ обозначает целую часть ξ.

Ремение. Так как $\left\{\eta = k^2\right\} = \{k \leqslant \xi < k+1\}$, то вероятность $\mathrm{P}\left\{\eta = k^2\right\}$ определяется равенствамп $P\left\{\eta = k^2\right\} = P\{k \leqslant \xi < k+1\} =$

$$= \int_k^{h+1} p_\xi(x) dx = \int_k^{k+1} e^{-x} dx = e^{-k}\left(1 - e^{-1}\right), k = 0_x 1, 2, \ldots$$

Ч-3.пр.4

Случайная величина ξ_1 принимает значения 0 и 1, а случайная величина ξ_2 - значения -1, 0 и 1. Вероятности $\mathrm{P}\left\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\right\}$ задаются таблицей:

i \ j	−1	0	1
0	1/16	1/4	1/16
1	1/16	1/4	5/16

Найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1\xi_2$

Произведение $\xi_1\xi_2$ равно нулю, если равен нулю хотя бы один из сомножителей:

$$\{\eta = 0\} = \{\xi_1 = 0, \xi_2 = -1\} \cup \{\xi_1 = \xi_2 = 0\} \cup \{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\},$$

поэтому суммируем нужные ячейки:

$$P\{\eta = 0\} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

Оставшиеся два значения $(1, -1)$ и $(1, 1)$ пары величин (ξ_1, ξ_2) приводят к двум значениям η : -1 и 1. Следовательно,

$$P\{\eta = -1\} = 1/16, \quad P\{\eta = 1\} = 5/16.$$

Таким образом, величина η дискретна; ее распределение сосредоточено на значениях $-1, 0, 1$, и вероятности этих значений равны соответственно $1/16, 5/8, 5/16$.

Ч-3.пр.5

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы; их плотности распределения определяются формулами

$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [0,1], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0,1], \end{cases} \qquad p_{\xi\xi_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при} \quad x \in [0,2], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и плотность распределения величины $\eta = \xi_1\xi_2$.

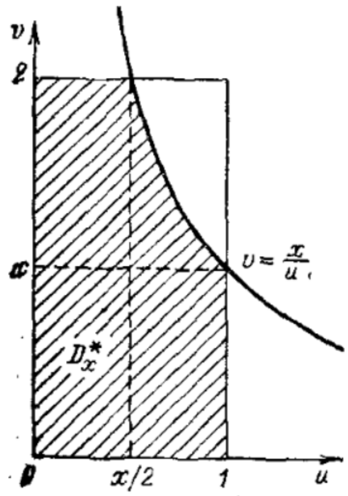
Так как величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то двумерная плотность распределения вектора (ξ_1, ξ_2) есть $p_1\xi_2(u,v) = p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)$. Найдем сначала функцию распределения η:

$$F_n(x) = \mathrm{P}\{\eta \leqslant x\} = \mathrm{P}\left\{\xi_1\xi_2 \leqslant x\right\} = \iint_{D_x} p_{\xi_j}(u)p_{\xi_2}(v)dudv,$$

где $D_x = \{(u,v) : uv \leqslant x\}$. Отсюда

$$F_n(x) = \frac{1}{2}\iint_{D_x^*} dudv$$

где $D_x^* = D_x \cap \{(u,v) : \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$.



Эта область в свою очередь $D_x^* \varnothing$ при $x < 0$ и $D_x^* = \{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2\}$ при $x \geqslant 2$; следовательно,

$$\mathrm{P}\{\eta \leqslant x\} = 0 \quad (x \leqslant 0), \quad \mathrm{P}\{\eta \leqslant x\} = 1 \quad (x \geqslant 2).$$

При $0 < x < 2$

$$\iint_{D_x^*} dudv = 2 \cdot \frac{x}{2} + \int_{x/2}^{1} \frac{x}{u}du = x - x\ln\frac{x}{2}.$$

Таким образом,

$$F_{\mathrm{n}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0. \\ \frac{x}{2}\left(1 - \ln\frac{x}{2}\right) & \text{при} \quad 0 < x < 2 \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$

56 Отсюда находим плотность распределения

$$p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin (0,2], \\ -\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2} & \text{при} \quad x \in (0,2]. \end{cases}$$

Ч-3.пр.6.

Найти плотность распределения величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1, ξ_2 независимы п каждая пз них равпомерно распределена на отрезке $[0,1]$.

По формуле (3.4)

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(y) p_{\xi_2}(x-y) dy = \int_0^1 p_{\xi_2}(x-y) dy.$$

Подынтегральная функцвя $p_{\xi_8}(x-y)$ положительна и равна 1, если $0 \leqslant x-y \leqslant 1$. Отрезок интегрирования $[0,1]$. отрезок $[x-1, x]$ здачений y, при которых $p_{\xi_2}(x-y) > > 0$, не пересекаются, если $x < 0$ или $x > 2$. В этих слу-

$$p_n(x) = \int_0^x dy = x.$$

Если $1 \leqslant x \leqslant 2$, то $[0,1] \cap [x-1, x] = [x-1, 1]$ п

$$p_n(x) = \int_{\alpha-1}^1 dy = 2 - x.$$

Таким образом,

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \text{ плп} \quad x > 2, \\ x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x, & \text{если} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Ч-3.пр.8 (!??!?!?!?) про Бернулли

Пусть η_n - число переходов от успеха к неудаче или обратно в n испытаниях схемы Бернулли, в которой вероятность успеха в отдельном испытании равна p. Найти M_{η_n} и D_{η_n}.

Решение. Представим η_n в виде суммы индикаторов

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1},$$

где $\xi_i = 1$, если исходами i-го и $(i+1)$-го испытаний быллн соответственпо "успех"и "неудача» или "неудача» в «успех». В противном случае $\xi_i = 0$. Тогда

$$\mathrm{M}\xi_1 = \mathrm{P}\left\{\xi_i = 1\right\} = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

u, следовательно,

$$M\eta_n = M\xi_1 + \ldots + M\xi_{n-1} = 2(n-1)p(1-p).$$

Найдем теперь η_n^2. Так как

$$\eta_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i \xi_{i+1} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ |i-j| \geqslant 2}}^{n-1} \xi_i \xi_1$$

и

$$M\xi_i\xi_{i+1} = p(1-p)p + (1-p)p(1-p) = p(1-p)_3$$
$$M_{\xi_i\xi_j} = M\xi_i M\xi_j = 4p^2(1-p)^2 \quad (|i-j| \geqslant 2)_s$$

То

$$M\eta_n^2 = 2p(1-p)(n-1) + 2(n-2)p(1-p) + \\ + 4p^2(1-p)^2\left(n^2 - 5n + 6\right).$$

Отсгда, вспользуя обозначение $q = 1-p$, получдем

$$D_{\eta_{1n}} = M\eta_n^2 - (M\eta_n)^2 = 4pq(1-3pq)n - 2pq(3-10pq).$$

В задачах n3.1-n3.15 рассматриваются одномерные рас шределения; в n3.16-n3.38 - законы совместного распреде тения нескольких случайных величин; в $\mathbf{3.49}-\mathbf{3.53}-$ случайные величины, связанные с последовательностям пслытаний.

Ч-3.1

Распределение дискретной случайной величинн & ошределяется формулами

$$P\{\xi = i\} = \frac{1}{5}, \quad t = -2_s - 1_i 0_s 2.$$

Найти распределения величин $\eta_1 = -\xi, \eta_2 = |\xi|$.

Ч-3.2

Распределение случайной пеличины ξ определя ется формулами $\mathrm{P}\{\xi=k\}=C/k(k+1), k=1,2,\ldots$ Найти: а) постоянную C; б) $\mathrm{P}\{\xi \leqslant 3\}$; в) $\mathrm{P}\left\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\right\}$.

Ч-3.3

. Расшределение дискретноп случайной величины ξ определяется формулами: $\mathrm{P}\{\xi=k\}=C/k(k+1)(k+2)$, $k=1,2,\ldots$ Найти: а) постоянную C; б) $\mathrm{P}\{\xi \geqslant 3\}$;
в) $\mathrm{P}\left\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\right\}$.

Ч-3.4

Плотность распределения случайной величины ξ задана формулами:

$$\begin{aligned} & p_2(x)=C/x^4 \quad \text{при} \quad x \geqslant 1; \\ & p_2(x)=0 \quad \text{при } x<1. \end{aligned}$$

Найти: а) постоянную C; б) плотность распределения $\eta=1/\xi$; в) $\mathrm{P}\{0,1<\eta<0,3\}$.

Ч-3.5

Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha: \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}=1-e^{-\alpha x}(x \geqslant 0)$. Найти плотности распределепия случайных величин:
а) $\eta_1=\sqrt{\xi}$
б) $\eta_2=\xi^2$;
в) $\eta_3=\frac{1}{\alpha} \ln \xi$.

Ч-3.6

Случайная величина & распределена так же, как в задаче n3.5. Найти плотности распределения величин:
а) $\eta_1=\{\xi\}(\{\xi\}-$ дробная доля $\xi)$; б) $\eta_2=1-e^{-\alpha \xi}$.

Ч-3.7

Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти плотности распределения величин: а) $\eta_1=2\xi+1$; б) $\eta_2=-\ln(1-\xi)$.

Ч-3.8

Случайная точка B имеет равномерпое распределение на окружности $x^2+(y-a)^2=r^2$ с центром в точке $A=(0,a)$, а случайная точка $C=(\xi,0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через A и B. Найти функцию распределения и плотность распределепия случайной величины ξ. (Распределение ξ называется распределением Коши.)

Ч-3.9

Случайная величина ξ имеет распределенпе Коши с плотностью $p_{\xi}(x)=\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Найти плотность распределения величин $\eta=\xi^2/\left(1+\xi^2\right), \xi=1/\left(1+\xi^2\right)$.

Ч-3.10

Случайная величина ξ имеет такое же распределешие, как в задаче n3.9. Найти плотность распределения случайных пеличшн $\eta=2\xi/\left(1-\xi^2\right), \zeta=1/\xi$.

Ч-3.11

Пусть $h(x)$ - плотность распределепия случайной величины ξ; функция $g(x)$ дифференцируема и на интервале $(0,1)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Найти: а) такую функцию (x), что случайная величина $\eta=\varphi(\xi)$ имеет своей шлотпостью распределения $f(x)==h(g(x))g'(x)$; б) распределение случайной величииы $\zeta=g(\eta)$.

Ч-3.12

Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x) = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$. Показать, что случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Ч-3.13

Пусть η имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а

$$F_{-1}(y) = \sup\{x : F(x) \leqslant y\}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

- Функция, обратная к функции распределении $F(x)$ (не обязательно непрерывной!). Доказать, что случайная величина $\xi = F_{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$.

Ч-3.14

Построить пример такого абсолютно непрерывного распределения случайной величины ξ с плотностью $p_z(x)$ и такой непрерывной функдии $g(x)$, что распределение случайной величишы $\eta = g(\xi)$ не вырождено и дискретно.

Ч-3.15

Функция распределения $F(x)$ непрерывша и каядой точке. Доказать, что она равномерно непрерывша на всей прямой $-\infty < x < \infty$.

Ч-3.17

Случайные величцны ξ и η независимы. Найти $P\{\xi = \eta\}$, если: а) ξ и η имеют одно и то же дискретное распределение $\mathrm{P}\left\{\xi = x_k\right\} = \mathrm{P}\left\{\eta = x_k\right\} = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots$; б) функция распределения в непрерывна.

Ч-3.18

Совместное распределение ξ, η является равномерным в единичном круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Найти $\mathrm{P}\{|\xi| \leqslant 3/4,\ |\eta| \leqslant 3/4\}$.

Ч-3.19

Плотность совместного распределения величин ξ, η определяется равенствами: $p_{\mathbf{t},\eta}(u, v) = 1$ при $(u, v) \in G$, $p_{\varepsilon,\eta}(u, v) = 0$ при $(u, v) \notin G$, где $G = \left\{(u_2 v) : 0 \leqslant u \leqslant 2, 0 \leqslant v < 1 - \frac{1}{2}u\right\}$. Найти плотность распределения $p_\varepsilon(x)$ случайной величины ξ.

Ч-3.20

Плотность совместного распределения $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v)$ величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами $p_{\xi_1\xi_2}(u, v) = -C(u + v)$ при $0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1$ и $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$, в остальных случаях.

Найти: а) постоянную C;

б) одномерные плотности распределения ξ_1 и ξ_2;

в) плотность распределения $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$.

Ч-3.21

Плотность совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 определяется равевствами: $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = \frac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}$ при $u^2 + v^2 \geqslant 1$ и $p_{\xi_1\xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти плотность распределения $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Ч-3.23

Неотрицательные случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют одну и ту же плотность раслределения $p(x), x \geqslant 0$. Найти плотность $q(u, v)$ совместного распределения случайных величин $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad \eta_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Ч-3.24

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют одну и ту же шлотность распределения $p(x)$. Найти совместную плотность распределения $q(r, \varphi)$ шолярных координат (r, φ) тотки (ξ_1, ξ_2).

Ч-3.25

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же покавательное распределение: $\mathrm{P}\{\xi_i \leqslant \leqslant x\} = 1 - e^{-x}, x \geqslant 0; i = 1, 2$. Найти $\mathrm{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant 1\}$.

Ч-3.26

Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Найти плотности расчределения случайных величин: а) $\xi + \eta$; б) $\xi - \eta$; В) $\xi\eta$;) ξ/η. 69

Ч-3.27

Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с плотностью $e^{-\pi}(x \geqslant 0)$ каждая. Найти плотность распределепия: а) $\xi + \eta$; 6) $\xi - \eta$; в) $\xi\xi - \eta\ |; r)\xi/\eta$.

Ч-3.28

Найти плотность расшределения суммы $\xi + \eta$, если ξ и η независимы, ξ имеет равномерное распределение в отрезке $[0, 1]$, а η - равномерное распределение в отревке $[0, 2]$.

Ч-3.29

Найти плотность расиределения суммы независимых случайных величин. ξ и η, если ξ равномерпо распределена в $[0, 1]$, а η имеет показательное распределение с плотностью $e^{-x}(x \geqslant 0)$.,

Ч-3.30

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы а имеют равномерное распреде.iение в $[0, 1]$.
Найти плотности распределения сумм: а) $\xi_1 + \xi_{21}$
б) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$. Найти $\mathrm{P}\{0,5 \leqslant \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leqslant 2,5\}$.

Ч-3.31

Точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Показать, что распределения случайных величин $|\xi_1 - \xi_2|$ и $\min\{\xi_1, \xi_2\}$ совшадают, т. е. что для любого t

$$\mathrm{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant t\} = \mathrm{P}\{\min\{\xi_1, \xi_2\} \leqslant t\}.$$

Ч-3.32

Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены:
а) показательно с одним и тем Же параметром а;
б) по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

Ч-3.33

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незавшсимы и распределены покавательно с одинаковым параметром α. Найти плотность распределения величнн:
а) $\eta_1 = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ 5) $\eta_2 = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

Ч-3.34

. Случайные величины ξ и ξ_2 независимы и имеют гамма-распределения: $\xi_1 - 0$ параметрами (λ, α), ξ_2- с параметрами (λ, β). Пользауясь формулой

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

найти плотность распределения случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

Ч-3.37

Найти влотность распределения случайной воличины $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$, если ξ_1, ξ_2 независимы и равномерно распределены в отрезке $[0, 1]$.

Ч-3.38

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, n \geqslant 2$, независимы и имеют показательное распределение с плотностью $e^{-x}(x \geqslant 0)$. Обозначим $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1+\ldots+\xi_n}$. Найти плотность распределения η.

Ч-3.39

Величипы ξ_1, ξ_2 независимы; $P\{\xi_1 = 0\} = P\{\xi_1 \Rightarrow = 1\} = 1/2, \xi_2$ равномерно расдределена на отрезке $[0, 1]$. Найти закоп распретеления величины $\xi_1 + \xi_2$.

Ч-3.40

Пусть случайные величины ξ и η независимы, ξ имеет Функцию распределения $F(x)$, а η равномерно распределена в шнтервале $[a, b]$. Показать, что $\xi + \eta$ имеет плотность $\frac{F(x-a)-F(x-b)}{b-a}$.

Ч-3.41

Сумму двух независимых равномерно распределенных па $\{0, 1, \ldots, 9\}$ случайных однозначных чисел ξ и η мояно записать в виде $\xi + \eta = 10\xi_2 + \zeta_1$ $(0 \leqslant \zeta_i \leqslant 9)$. Найти ваконы распределения. ζ_1 и ξ_2 ЗЗависимы ли ξ_1 и ξ_2 ?

Ч-3.42

Произведение двух независимых равномерпо распределенных на $\{0, 1, \ldots, 9\}$ одноаначных чпсел ξ и η можно записать в виде $\xi\eta = 10\xi_2 + \zeta_1$, где ζ_1, ζ_2, целые числа, принимающие значепия от 0 до 9. Зависимы ли ξ_1 и ξ_2 ?

Ч-3.43

Случайная точка $A = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$ имеет равн номерное распределение на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Найтп распределение проекдии (ξ_1, ξ_2) точки A на плоскость (x, y) и проекции ξ точки A на ось x.

Ч-3.44

Ввести на сфере в качестве координат широту и долготу, считая их изменяющимпся в отрезках $[-\pi/2, \pi/2]$ н $[-\pi, \pi]$ соответственно. Найти плотность $p_8(x)$ распределения широты ξ случайной точки, имеюпей равномерное распределение на сфере.

Ч-3.47

В переговорном пункте телефоны-автоматы расшоложены т тех залах: в i-м зале n_i автоматов $(t = = 1, 2, 3; n = n_1 + n_2 + n_3)$. После перерыва посетители одновременно заняли все автоматы. Введем событин $A_i = = \{$ посетитель, закончивший разговор первым, находвлся в i-м зале $\}, i = 1, 2, 3$. Найти вероятности событий A_i, $i = 1, 2, 3$, если времена разговора посетителей нвляются независимыми одинаково распределенвыми случайными величинами с непрерывной функцией распределения.

Ч-3.48

Случайная величина ξ с равномерным распределением на $[0, 1]$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби: $\xi \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 10^{-n}$, где ξ_n- целые, $0 \leqslant \xi_n \leqslant 9$. Доказать, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независтмы.

Ч-3.49

В схеме Бернулли с вероятностью успеха p обозначим через $v_\mathrm{h}(k = 1, 2, \ldots)$ номер испытания, при котором происходит k-й успех, и положим $\tau_1 = v_1, \tau_h = = v_k - v_{k-1}(k = 2, 3, \ldots)$. Найти совМестное распределение величин $\tau_1, \tau_?$ Яляются ли эти величины независимыми?

Ч-3.50

В полиномиальной схеме с исходами $(1, 2, \ldots, N)$ вероятность i-го исхода в каждом испытании равна p_i $i = 1, 2, \ldots, N$. Положим

$$\varepsilon_{s,i} = \begin{cases} 1, \text{ если в } s\text{-м испытании понвился } i\text{-іг псходы} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Являются ли независимыми случайные величины:
а) $\varepsilon_{\mathrm{a},i}, \varepsilon_{s,i} \quad (s, i, j-$ фиксированы);
б) $\varepsilon_{a,i}, \varepsilon_{t,j} \quad (s \neq t)$ В) $\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2}, i, \ldots, \varepsilon_{n,i};$
г) $\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{1k} c_h, \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{2k} c_k, \ldots, \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{nk} c_k$, если $c_1, c_2, \ldots, c_N$ пекоторые постоянпые?
(тут еще задачи были, но я не вставил их)

Ч-3.59

Доказать, что двумерная функдия распределешия $F_{6,n}(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0), если соответствующне одномерные функции распределения $F_8(x)$, $F_n(y)$ непрерывны в точках x_0 и y_0 соответственно.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - независимые одинаково распреЛеленвые случайные величвны. При каждом $\omega\Omega$ расположим числа $\xi_{\mathrm{n}}(\omega), k = 1, \ldots, n$, в порядке возрастапия и перенумеруем их заново: $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$. Полученная последовательность случайных величин называется вариационным рядом, а саму случайные величины $\xi_{(k)}-$ членами вариационного ряда. Такшм образом, В частности, $\xi_{(1)} = \min_{1<k\leqslant n} \xi_k, \xi_{(n)} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k$. Задачи n3.60-n3.66 связаны с вариационным рядом.

Ч-3.60

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots. \xi_n (n \geqslant 2)$ независимы и одинаково распределены с функцией распрепеления $F(x)$. Найти: а) функцию распределения $\xi_{(1,}$; б) функцию распределения $\xi_{(n)}$; в) двумерпую функдию распределепия $\xi_{(1)}, \xi_{(n)}$.

Ч-3.61

По неааввсимым одинаково распределенным случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_n$, имеюшим функцию распределения $F(x)$ и плотность $p(x)$, построен вариационный ряд $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$. Найти: а) плотность распределения $\xi_{(m)}$; б) совместную плотность распределения $\xi_{(h)}$ И $\xi_{(m)} (k < m)$.

Ч-3.62

Случайные велвчины $\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{h+1}$ независимы ø имеют одну и ту же непрерывную функцую распределения. Пусть $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(A)}-$ вариационный ряд величшн $\xi_1, \ldots, \xi$

$$\mathrm{P}\left\{\xi_{k+1} \in \left[\xi_{(l,}, \xi_{(l+1,}\right]\right\}, \quad l = 1, \ldots, k-1,$$
$$\mathrm{P}\left\{\xi_{k+1} < \xi_{(1,}\right\}, \quad \mathrm{P}\left\{\xi_{k+1} > \xi_{(k)}\right\}.$$

Ч-3.63

Случайные величиныт $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и нмеют одинвковое распределение с плотностью $p(x)$. Найти n-мерную плотность $p_n(x_1, \ldots, x_n)$ распределения членов вариационного ряда $\xi_1, \xi_{(2,}, \ldots, \xi_{(n)}$.

Ч-3.64

*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α :

$$\mathrm{P}\{\xi_1 \leqslant x\} = 1 - e^{-ax}, \quad x \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}-$ значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$, расподоЖенные в порядке неубывания (вариационный ряд), Показать, что случайные величины

$$\Delta_1 = \xi_{(1)}, \quad \Delta_i = \xi_{(i)} - \xi_{(i-1)}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

независимы и что

$$\mathrm{P}\{\Delta_1 \leqslant x\} = 1 - e^{-a(n-i+1)x}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ч-3.65

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ. Доказать, что случайные величины

$$\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \text{ и } \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \frac{\xi_3}{3} + \ldots + \frac{\xi_n}{n}$$

одинаково распределены.

Ч-3.66

Пусть $\xi_n = (\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}), n = 1, 2, \ldots$, - по0годовательность независимых векторов, у которых координаты $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,h}$ - независимые случайные величины, имеющие одну и ту же непрерывную функцию распределения $F(x)$. Положим

$$A_n = \left\{ \xi_{n,i} < \min_{1<m<n} \xi_{m,t}, t = 1, \ldots, k \right\}.$$

Доказать, что при $k \geqslant 2$

$$\mathbf{P}\left\{ \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right\} < \frac{1}{2^{k-3} \cdot \mathrm{g}^0}$$

Ч-3.70

Случайнан величина ξ_1 распределена по закопу Пуассона с параметром λ_1 :

$$\mathrm{P}\left\{\xi_1 = k\right\} = \frac{\lambda_1^h}{k!} e^{-\lambda_1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

а случайная велвчина $\xi 2$ распределена по вакону Пуассона с параметром $\lambda_2 > \lambda_1$. Доказать, что при любом целом k

$$\mathbf{P}\left\{\xi_1 \leqslant k\right\} > \mathbf{P}\left\{\xi_2 \leqslant k\right\}.$$

Ч-3.71

Функции распределения $F_1(i)$ и $F_2(t)$ удовлетворяют условию

$$F_1(t) \leqslant F_2(t) \text{ для дюбого } t.$$

Показать, что можно так задать на одном вероятностном пространстве случайные величины ξ_1 и ξ_2 с функпиями распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ соответственно, что

$$P\left\{\xi_1 \geqslant \xi_2\right\} = 1.$$

равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величкна ζ удовлетворяет условиям

$$P\{\zeta = \xi\} = P\{\xi = \eta\} = 1/2.$$

Найти максимально и минимально возможные вначения $\mathrm{P}\left\{\left|\zeta - \frac{1}{2}\right| \leqslant t\right\}$ и указать, при каких совместных распределениях ξ, η ξ ζ эти значения достигаются.

4.4.3 Задачи про математическое ожидания, ковариация, корреляция

(почему-то ваторы не делят на типы эти задачи, я мб потом разделю, посмотрим.)

В задачах n3.75-n3.112 используются прямые способы вычисления математических ожиданий; задачи n3.113-n3.131 иллюстрируют возможности метода индикаторов (см. введение к гл. 3). Задачи n3.132-n3.138 содержат полезные Формулы для математических ожиданий различных функдий от случайных величин. Разными методами решаются задачи n3.139-n3.188.

Ч-3.75

Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $\mathrm{P}\{\xi = i\} = 1/5, i = -2, -1, 0,\ 1, 2$. Найти математические ожидания величин $\eta_1 = -\xi$, $\eta_2 = |\xi|$. Распределение дискретной случайной величвны ξ определяется формулами $\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}, k = = 1, 2, \ldots$ Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

Ч-3.77

Плотность распределения случайной величины & задана Формулами $p_{\mathrm{z}}(x) = 0$ при $x < 1, p_{\mathrm{s}}(x) = = 3/x^4$ при $x \geqslant 1$. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и $\eta = 1/\xi$.

Ч-3.78

Найти $M\xi, \mathrm{D}\xi, M\xi^{[k]}(k = 1, 2, \ldots)$, если:

а) $P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots;$

б) $\mathrm{P}\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, q = 1 - p, m = 0, 1, 2, \ldots, n.$

Ч-3.79

Плотность совместного распределения $p_{\xi_1,\xi_2}(u,v)$ величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами $p_{q_1,z_2}(u,v) = u+ +v$ при $0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1; p_{\xi_1,\hbar_2}(u,v) = 0$ в остальвых случаях. Найти $M\xi_1, M\xi_2, D\xi_1, D\xi_2, \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

Ч-3.80

Совместное распределение ξ_1, ξ_2 опредедяется условиями $\mathrm{P}\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1, \mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_i = -1\} = 1/4, i = = 1, 2$, Найти $M\xi_1, M\xi_2, D\xi_1, D\xi_2, \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

Ч-3.81

Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]; \eta_1 = \cos\xi, \eta_2 = \sin\xi$. Найти М М, $\mathrm{M}_2, \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)$. Являются ли η_1 и η_2 независимыми?

Ч-3.84

Плотность совместного распределения случай$= \frac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}$ при $\dot{u}^2 + v^2 \geqslant 1$ и $p_{\xi_1}, \xi_2(u,v) = 0$ в остальных случаях. Найтп $M\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Ч-3.85

Случайная велшчина & имеет показательное распределение: $\mathrm{P}\{\xi > x\} = e^{-x}$ при $x \geqslant 0$. Найти $M\xi\left(1 - e^{-\alpha??}\right)$.

Ч-3.86

Случайная точка A имеет равномерное распределение в круге радиуса R. Найти математическое ояидание и дисперспю расстояния ξ точки A от центра круга.

Ч-3.87

Случайная величнна ζ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти коэффвциент корреляции случайных величвн η_1, η_2, если:
а) $\eta_1 = a\xi, \eta_2 = b\zeta \quad (a, b > 0)$,
б) $\eta_1 = a\zeta, \eta_2 = b\zeta \quad (a < 0 < b)$,
в) $\eta_1 = \zeta, \quad \eta_2 = \zeta^2$, г) $\eta_1 = \zeta - \frac{1}{2}, \quad \eta_2 = \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2$,
д) $\eta_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right), \quad \eta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)$. имеюдей равномерное распределение в области $D \subset R^2$. Найти коэффидиент корреляции $\rho(\xi, \eta)$, если:
а) D-часть единичного круга, лежащая в шервом квадранте: $x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$.
б) D - треугольник: $x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

Ч-3.89

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n -$ независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)} -$ построенный по $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вариациопный ряд, т. е. вначения $\xi_1, \ldots, \xi_{n-}$ расположенные в порядке неубывяния. Найти плотность $p_i(x)$ распределения $\xi_i, M\xi_{(i)}^h (k = 1, 2, \ldots), \mathrm{D}_{(i)}$.

Ч-3.91

Доказать, что если случайиые величины то $M(\xi + \eta)^3 = M\xi^3 + M\eta^3$.

Ч-3.92

Случайные величины ξ и η некоррелированья. Доказать, что $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

Ч-3.93

Случайные величины ξ, η и ξ попарно некоррелированы. Верно ли равенство $M\xi\eta\xi = M\xi M\eta M\xi$?

Ч-3.94

Случайные величины $\xi, \eta, \S$ имеют нулевые математические ожидания, дисперсии σ^2 и попарно некоррелированы. Чему равны минимальное и максимальное значения $M\xi\eta(???)$?

Ч-3.95

Найтп ковариационную матрицу случайного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, если:
а) ξ_1,ξ_2,ξ_3 независимы и меют стандартное нормальное распределение;
б) вектор & имеет равномерное распределение в кубе $\left\{(x_1,x_2,x_3):\max_{1\leqslant i\leqslant 3}|x_i|\leqslant\sqrt{3}\right\}$;
в) вектор & с верятностью 1/6 принимает каждое из 6 значенвй $(0,0,\pm\sqrt{3}),(0,\pm\sqrt{3},0),(\pm\sqrt{3},0,0)$.

Ч-3.96

Какие из приведенных ниже матркц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$:

а) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $*$ В) $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$ е) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Ч-3.98.

Случайный вектор $(\xi 1,\xi_2,\xi_3)$ имеет ковариацовную матрицу $\begin{pmatrix}1&\rho_{12}&\rho_{13}\\\rho_{12}&1&\rho_{23}\\\rho_{13}&\rho_{23}&1\end{pmatrix}$. Доказать, что

$$|\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23}|\leqslant\sqrt{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{23}^2)}$$

Ч-3.99

а) Показать, что если распределение случайного вектора (ζ_1,ζ_2) совпадает с распределением вектора $(-\xi_1,-\xi_2)$ и $M\xi_1^2+M\xi_2^2<\infty$, ТО

$$\operatorname{cov}(\zeta_1,\zeta_2)=2M(\zeta_1\max(0,\zeta_2)).$$

б) Пусть (ξ_1,η_1) и (ξ_2,η_2) - независимые одинаково распределенные векторы, $M\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)<\infty$. Доказать, что $\operatorname{cov}(\xi_1,\eta_1)=M((\eta_1-\eta_2)\max(0,\xi_1-\xi_2))$.

Ч-3.100

Случайные векторы $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in R^n$ и $\xi^*=(\xi_1^*,\ldots,\xi_n^*)\in R^n$ независкмы, $\xi=(m_1,\ldots,m_n)=m$ $\mathrm{Mg}^*=(m_1^*,\ldots,m_n^*)=m$, матрицы ковариадий ξ и ξ равны $\sigma=\|\sigma_{ij}\|$ и $\sigma^*=\left\|\sigma_{ij}^*\right\|$ соответственно.

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta=\xi_1+\ldots+\xi_n$;

б) математическое ожидание у дисперскю случайной величины $\eta=(\xi,a)==a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n$, где $a=(a_1,\ldots,a_n)$ - данный неслучайный вектор;

в) математические ожидания и ковариационные матрицы векторов $\xi+\xi^*,\xi-\xi*,a\xi+b\xi^*(a,\,b$ - постоянные).

Ч-3.104

Случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots$ независимы и имеют равномерное распределение ва отрезке $[0,1]$. Найти математическое ожидание случайной величины

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}|\xi_{i+1}-\xi_i|.$$

Ч-3.105

Найти дисперсию случайной величины η_n, введевной в задаче

Ч-3.104

Сравнить ее $cn\mathrm{D}\left|\xi_2-\xi_1\right|==\mathrm{D}\left(\left|\xi_2-\xi_1\right|+\left|\xi_4-\xi_3\right|+\ldots+\left|\xi_{2n}-\xi_{2n-1}\right|\right)$.

Ч-3.106

Случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_n$ независимы. Положим

$$\zeta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n,\zeta_n^*=\xi_1\eta_1+\ldots+\xi_n\xi_n.$$

Найти $M\zeta_n,M\zeta_n^*,\mathrm{D}\zeta_n,\mathrm{D}\zeta_n^*,\operatorname{cov}\left(\zeta_n,\zeta_n^*\right)$, если

$$\begin{gathered}\mathrm{M}\xi_k=a,\quad D\xi_k=\sigma^2,\quad \mathrm{P}\left\{\eta_h=1\right\}=p,\\ \mathrm{P}\left\{\eta_k=0\right\}=q=1-p\quad(k=1,2,\ldots,n).\end{gathered}$$

Ч-3.107

В экспедиции, рассчитавной на n двей, ежедвевно от запаса продуктов вужно отделять соответствующую часть: в 1-й день - 1/n-ю часть, во 2 -й день $1/(n-1)$-го часть от остатка и т. д. В действительности нужная часть продуктов отделяется с ошибкой. Пусть $\eta_h(k=1,2,\ldots,n-1)-$ часть от остатка продуктов, которая отделяется в k-й день. Предполагается, что величины η_n независимы, $\mathrm{M}_k=a_k=\frac{1}{n-k+1}$. Найти математическое ожидание случайной величины ξ, равной части продуктов, оставтейся к последнему дню:

$$\zeta=\left(1-\eta_1\right)\left(1-\eta_2\right)\ldots\left(1-\eta_{n-1}\right).$$

Ч-3.112

Случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots$ независимы $M\xi_i=0,\mathrm{D}\xi_i=\sigma^2<\infty,i=1,2,\ldots$ Найти математическое ожндание и дисперсию случайных величин

$$S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n \text{ и } T_n=\xi_{v_1}+\xi_{v_2}+\ldots+\xi_{v_n}$$

где $v_1,v_2,\ldots$ независимые и ве зависящие от $\xi_1,\xi_2,\ldots$ случайные величины, имеющие равномерное распределение на множестве $\{1,2,\ldots,k\}$.

Ч-3.113

Обоэначим через θ_r число циклов длины r в подстановке, случайно выбранной из множества всех n ! подстановок степени n. Найти: а) $M\theta_1,\mathrm{D}\theta_1$; б) $\mathrm{M}\theta_2$; в) $M\theta_r(r\geqslant 1)$.

Ч-3.114

В урне содержитсн M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером $2,\ldots,M_N$ шаров с номером N. По схеме случайного выбора без возвращения выбирается n шаров. Найти математическое ожидавие числа непоявившихся номеров.

Ч-3.115

Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных паров, по схеме выбора беа возврашения извдекаетимеет гипергеометрическое распределение: $\mathrm{P}\{\xi=m\}==\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$. Найти $M\xi$ и D.

Ч-3.116

В N ячейках случайно разамещаются n частиц. Каждая частица независимо от остальных с веронтностью $1/N$ может попасть в пюбую фиксированную ячейку. Обозначим через $\mu_0(n,N)$ число пустых нчеек. Найти $\mathrm{M}\mu_0(n,N),D\mu_0(n,N)$ и асимптотические формулы для них при $n,N\rightarrow\infty,n/N\rightarrow\alpha\in(0,\infty)$.

Ч-3.126

В схеме Бернулли задачи

Ч-3.125

вайти формуды для математического ожидания и дисперсии чвсла μ_{111} появленпй цепочки 111. (Цепочка 11:1 появляется при i-м испытавиц, если исходами $(i-2)$-го, $(i-1)$-го и i-го испытании были единицы.) Сравнить пх с формулами для математического ожидания и дисперспи числа μ_1. появпений исхода 1 в $n-2$ независимых испытаниях схемы Бернулли, когда вероятность исхода 1 равна p^3.

Ч-3.127

Пусть проведено n испытавий по той же схеме Бернулли, что в задачах n3.125 и n3.126. Назовем серией единиц цепочку исходов последовательных испытаний вида $011\ldots110$ (при этом считается, что исходами дополнительных испытаний с номерами 0 и $n+1$ были нули). Пусть η_n - число серий единиц. Найтв: а) $\mathrm{P}\{\eta_n=0\}$;

Ч-3.128

На бесконечшый лист клетчатой бумаги (сторона клеточки равна 1) случайно бросается круг единичного радиуса. Считая, что центр круга равномерно распределен на том единичном квадрате, на который он пошал, найти математическое ожидание чвсла & точек с целочисленвыми коордияатами (x,y), покрытых этим кругом.

Ч-3.129

*. Каждуго целочисленяую точку чпсловой оси независимо от остальных назовем белой с вероятностью и черной с вероятностью $q=1-p$. Пусть S - множество всех таких делочисленных точек x, что расстояпие от x до ближайшей черной точки (включая x, еслв точка x черная) не меньше расстоявия от x до начала координат. Найти математическое ожидание числа $|S|$ елементов множества S.

Ч-3.137

Неотрицательная случайная величина ξ имеет фүункдию распределения $F(x)=\mathrm{P}\{\xi\leqslant x\}$. Доказать, что для любого действительного $\alpha\neq 0$

$$M\xi^\alpha=|\alpha|\int_0^\infty x^{\alpha-1}(1-F(x))dx.$$

Ч-3.138

Случайная ведичияа ξ имеет фупкцию распредедения $F(x)=\mathrm{P}\{\xi\leqslant x\}$. Покааать, что если

$$F_{-1}(y)=\sup\{x:F(x)\leqslant y\}.$$

то для любой иятегрируемой фувкцип $h(x)$

$$Mh(\xi)=\int_0^1 h\left(F_{-1}(y)\right)dy.$$

Замечание, в 1ю унесу

При решении задач Ч-3.139-Ч-3.143 можно использовать следующее простое замечание.

Если случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы й одинаково распределены, а тисло $k<n$, то наборьт $\xi_{i_1},\xi_{i_2},\ldots,\xi_{i_k})$, $\quad 1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_h\leqslant n$, одинаково распределены и для любой измерпмой функции $f(x_1,\ldots\ \ldots,x_k)$ случайные величины $\eta_{i_1,\ldots,i_k}=f\left(\xi_{i_1},\ldots,\ \xi\ _{i_k}\right)_\varepsilon$ где $1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant n, i_r\neq i,\quad(r\neq s)$, тоже одинаково расн пределены.

Ч-3.139

Пусть веронтностное распределедие Р на пло скости R^2 таково, что если точки $X_1,X_2,X_3\in R^2$ везаш висимы и имеют распределение Р, то

$$\mathrm{P}\left\{X_1,X_2,X_3\text{ лежат ва одной прямой }\right\}=0.$$

Найти математическое ожидание угда $X_1X_2X_3$.

Ч-3.140

Случайвые точки A_1,A_2,A_3,A_4 независимы и имеют равномерное распределение в выпуклой плоскои фигуре $C\subset R^2$, площадь которой равна 1. Докааать, что вероятность того, что выпуклая оболочка точек $A_1,A_2,\ A_3,A_4$ есть треугольвик, в 4 раза больше математиче ского ожидания площади треугольвика $A_1A_2A_3$.

Ч-3.137

Неотрицательная случайная величина ξ имеет фүункдию распределения $F(x) = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$. Доказать, что для любого действительного $\alpha \neq 0$

$$M\xi^{\alpha} = |\alpha| \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}(1-F(x))dx.$$

Ч-3.138

Случайная ведичияа ξ имеет фупкцию распредедения $F(x) = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$. Покааать, что если

$$F_{-1}(y) = \sup\{x : F(x) \leqslant y\}.$$

то для любой иятегрируемой фувкцип $h(x)$

$$Mh(\xi) = \int_0^1 h\left(F_{-1}(y)\right) dy.$$

При решении задач n3.139-n3.143 можно использовать следующее простое замечание.

Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы й одинаково распределены, а тисло $k < n$, то наборьт $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k})$, $\quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leqslant n$, одинаково распределены и для любой измерпмой функции $f(x_1, \ldots \ \ldots, x_k)$ случайные величины $\eta_{i_1,\ldots,i_k} = f\left(\xi_{i_1}, \ldots, \ \xi_{\ i_k}\right)_{\varepsilon}$ где $1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant n, i_r \neq i, \quad (r \neq s)$, тоже одинаково расн пределены.

Ч-3.139

Пусть веронтностное распределедие P на пло скости R^2 таково, что если точки $X_1, X_2, X_3 \in R^2$ везаш висимы и имеют распределение P, то

$$\mathrm{P}\left\{X_1, X_2, X_3 \text{ лежат ва одной прямой }\right\} = 0.$$

Найти математическое ожидание угда $X_1X_2X_3$.

Ч-3.140

Случайвые точки A_1, A_2, A_3, A_4 независимы и имеют равномерное распределение в выпуклой плоскои фигуре $C \subset R^2$, площадь которой равна 1. Докааать, что вероятность того, что выпуклая оболочка точек A_1, A_2, A_3, A_4 есть треугольвик, в 4 раза больше математиче ского ожидания площади треугольвика $A_1A_2A_3$.

Ч-3.151

Доказать, что если $M|\xi|^h < \infty$,то

$$\lim_{x\to\infty} x^k P\{|\xi| \geqslant x\} = 0.$$

Ч-3.152

Показать, что если $\xi-$ действительная случайпая величина с ковечным математическим ожиданием и $f(x)-$ функция, выпуклая внцз, то

$$Mf(\xi) \geqslant f(M\xi),$$

в если $f(x)$ выпукла вверх, то

$$Mf(\xi) \leqslant f(M\xi).$$

Ч-3.153

Показать, что для любых случяйных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ с конечными r-ми $(r \geqslant 1)$ моментами справедливо соотіошение

$$M\left|\xi_1 + \ldots + \xi_h\right|^r \leqslant k^{r-1}\left(M\left|\xi_1\right| r + \ldots + M\left|\xi_h\right|^r\right).$$

Ч-3.154

Доказать, что при $1 \leqslant r \leqslant 2$ справедливо неравенство

$$|x+y|^r + |x-y|^r \leqslant 2\left(|x|^r + |y|^r\right), \quad -\infty < x, \quad y < \infty,$$

и с его помощью показать, что если случайные величины ξ и η независимы и распределение η симметрично (т. е. распределения η и $-\eta$ совпадают), то при любом $r, 1 \leqslant r \leqslant 2$,

$$M|\xi + \eta|^r \leqslant M|\xi|r + M|\eta|r.$$

Ч-3.155

Показать, что если случайные величины $\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n$ независимы, имеют симметричные распредеде-ния и $M\left|\xi_1\right|^r < \infty, i = 1, \ldots, n$, для некоторого $r \in [1,2]$, то

$$M\left|\xi_1 + \ldots + \xi_n\right|^r \leqslant M\left|\xi_1\right|^r + \ldots + M\left|\xi_n\right| r.$$

,

Ч-3.158

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ принимает значения в R^k, и существует такой набор чвсел

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, 0, \ldots, 0),$$

что $P\left\{\alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_k \xi_h + \alpha_0 = 0\right\} = 1$. Доказать, что если все элементы матрицы ковариаций $B = \|\sigma_{ijl}$ компоневт вектора & конечны, то:

а) $\det B = 0$;

б) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) B = \left(B\left(\alpha_2, \ldots, \alpha_k\right)^\top\right)^\top = 0_k$ где $^\top$ – знак транспонирования.

Ч-3.159

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_h)$ принимавт значения в R^h имеет математвческое ожидание $m \in R^\wedge$ и матрицу новариаций $B = \|b_{\text{н}}$. Доказать, что: а). матрица B неотрвцательно определена, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{h} b_{ij} a_i a_j = (a, B) \geqslant 0 \text{ для любого } a \in R^h;$$

б)* если равг матрвцы B равен r, то существует r-мерная гвперплоскость $L_r \subset R^h$, для которой $\mathrm{P}\{\xi \in$ $\in L_r\} = 1$, и $\mathrm{P}\left\{\xi \in L_{r-1}\right\} < 1$ для любой $(r-1)$-мерной гиперплоскости $L_{r-1} \subset R^\star$.

Ч-3.160

Случайные величвны $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ везависимы и равномерно распределены в отрезке $[0,1]$. Найти $\mathrm{P}\left\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leqslant x\right\}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Ч-3.161

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и равномерно распределены в отревке [0, 1]. Определим случайную величвну v равной тому значению k, при котором впервые сумма $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$ превзойдет 1. Найти Mv.

Ч-3.162

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы; $\mathrm{D_i} = \sigma_i^2, i = 1, \ldots, n$. При каких $c_1, \ldots, c_n$, удовлетворя-юших условвям $c_k \geqslant 0, c_1 + \ldots + c_n = 1$, случайная величина $\eta_n = c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n$ имееет минимальную дисперсию? Найти мияимальную дисперсию.

Ч-3.163

По известному «правилу трех спгм» вероятность отклонения случайной величины от своего матема-тического ожидания более чем на три корпя из дисперсии мала. Найти $\mathrm{P}\{|\xi - \xi| < 3\sqrt{\mathrm{D}}\}$, если ξ имеет:

а) нормальное распределение;

б) показательвое распределение;

в) равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$;

г) $P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = 1/18, P\{\xi = 0\} = 8/9$;

д) распределение Пуассона с $M\xi = 0,09$.

Ч-3.164

Вычислить математическое ожидание и дисперξ_{ij} - независимые случайные величины с $M_5^5 = 0$ и $D\xi_{ij} = \sigma^2$.

Ч-3.165

Пусть матрица $\Xi = [\![\xi_i\xi_j]\!]_{i,j=1}^n$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n-$ независимые случайные велитины, имеющие сгiммет-ричные распределения (т. е. распределение ξ совпадает с распределением $-\xi_i, i = 1, \ldots, n$). Показать, что если $\mathrm{M}\left|\xi_j\right|^h < \infty, i = 1, \ldots, n$, дiя пелого $k \geqslant 1$, то $M\Xi^h-$ диагопальная матрица.

Ч-3.166

Неотрицательная случайная величина ξ имеет монотопно убывающую выпуклую вниз плотность распределения $f(x), f''(x) > 0$. Что можпо сказать о внаках величин $M \sin \xi, M \cos \xi$?

Ч-3.167

Обозначим $\eta_n = \max\{\mu_n, n - \mu_n\}$, где μ_n- число успехов в схеме Бернулли с n испытаниями и с вероятностью успеха р. Найти $\lim_{n\to\infty} n^{-1} M_{\eta_n}$.

Ч-3.171

Координата & случайной точки A на действительной прямой имеет непрерывную функцию распределения. Найти на атой прямой такую точку B, для которой матемэтическое ожидание длины отрезка AB минимально.

Ч-3.172

Случайные величины ξ, η имеют нецрерывную двумерную плотность расцределения. Как выбрать точку $B = (x, y) \in R^2$, чтобы величина $\varphi(x, y) = M(|\xi - x| + +|\eta - y|\}$ была минимальной?

Ч-3.173

Случайная величина ξ имеет конечный второй момент $M\xi^2$. Найти $\min_x M(\xi - x)^2$ и то аначение x, при котором этот минимум достигается.

Ч-3.174

Математическое ожидание нвадрата расстояния случайной точки $X \in R^2$ от начала координат конечно. Для какой точки A минимально $M|AX|^2$?

Ч-3.175

Уровень весеннего паводка на реке является случайной величиной & с непрерывной функдией распределения $F(x) = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$. Плотина рассчитана так, чтобы выдерживать паводок уровня не выше z. Предполагая, что уровни паводков в разные годы независимы и одинаково распределены, найти:

а) минимальное значение z, при котором математическое ожидание времени до разрушения плотины паводком будет не меньше $T = 100$ лет;

б) минимальное зиачение z, при котором вероятность разрушениия плотины паводком за $T = 100$ лет будет не больте $\alpha = 1/100$.

Ч-3.176

Наблюдения за уровнями весенних паводков в течение T лет дали значения $\xi_1, \ldots, \xi_{\text{т.}}$ На реке построена плотина, которая может выдержать паводок, если только его уровень не превосходит $\zeta_{\mathrm{r}} = \max\{\xi_1, \ldots$ $\cdots, \xi_T\}$. Пусть $\tau_T = \min\left\{t : \hat{j}_{T++} > \zeta_\tau\right\}$ – время до разрушения плотины паводком. Предполагая, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одну и ту же для $M\tau_\tau, \mathrm{P}\{\tau_T \leqslant u\}$ и численные значения этих величин при $T = 100, u = 10$.

Ч-3.177

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют одно и то же распределение с конечным математическим ожиданием, $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \xi_{(3)}$– их вариационный ряд (см. задачу **3.60**).

а) Доказать, что

$$M\left(\xi_{(3)} - \xi_{(1)}\right) = \frac{3}{2} M\left|\xi_1 - \xi_2\right|.$$

б) Доказать, что

$$M\left\{\min\left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)}\right)\right\} \leqslant \frac{3}{4} M\left|\xi_1 - \xi_2\right|.$$

Ч-3.178

Будем говорить, что случайпая величина & сосредоточена на отрезке $[a, b]$, если $\mathrm{P}\{a \leqslant \xi \leqslant b\} = 1$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\{a \leqslant \xi < a + \varepsilon\} > 0 \text{ и } \mathrm{P}\{b - \varepsilon < \xi \leqslant b\} > 0.$$

Доказать, что дисперсия случайной величины, сосредоточенной на отрезке длины l, не превосходит $l^2/4$.

Ч-3.183

Случайные величины ξ и η заданы на одном вероятностном пространстве. Описать множество возможвых значений $\mathrm{P}\{\xi \leqslant \eta\}$ в следующих случаях:

а) $M\xi = 1, M\eta = 10$;

б) ξ и η одинаково распределены; мерно на $[0, a], a \neq 1$. распределение на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что при любом характере зависимости между ξ и η

$$M|\xi - \eta| \leqslant 1/2.$$

Ч-3.185

Случайные величины $\boldsymbol{\xi}$ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а елучайная величина § удовлетворяет условию

$$P\{\xi = \xi\} = P\{\zeta = \eta\} = 1/2.$$

казать совместные распределения ξ, η, ζ, при которых достигаются экстремальные значения Мђ, и пайти максимальное й минимальное возможные значения Мъ.

Ч-3.186

Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, случайная величина χ принимает только значения 0 и 1: $\mathrm{P}\{\chi = 1\} = a, \mathrm{P}\{\chi \Rightarrow = 0\} = 1 - a$. Указать совместные распределения в и χ, при которых достигаются экстремаль

Ч-3.187

Случайные величины & и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина удовлетворяет условию

$$P\{\xi = \xi\} = p \leqslant 1/2, \quad P\{\xi = \eta\} = 1 - p.$$

Укавать совместные распределения ξ, η, ζ, при которых достигаются экстремальные вначения Мξ, и найти эти экстремальные значения.

МФТИ-Т.31.

Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть ξ - число появлений единицы, а η - число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Обозначим A_i - выпадение на i-м броске единицы, B_i - шестерки. $\xi = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}, \eta = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}$;

$$E\mathbb{1}_{A_i} = E\mathbb{1}_{B_i} = \frac{1}{6};$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

$$E(\xi\eta) = E(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i})(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k}) = E(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{B_i}) + E(\sum_{i\neq k} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{B_k}) = \sum_{i\neq k} E\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{B_k} = \frac{n(n-1)}{36}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{n}(E\mathbb{1}_{A_i}^2 - (E\mathbb{1}_{A_i})^2) = n\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}n$$

$$D\eta = \frac{5n}{36}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{-\frac{n}{36}}{\frac{5n}{36}} = -\frac{1}{5}$$

МФТИ-Т.32.

Подбрасывают две игральные кости. Пусть ξ_1 - число очков на первой игральной кости, а ξ_2 - на второй. Определим $\eta_1 = \xi_1+\xi_2$ $\eta_2 = \xi_1-\xi_2$. Найти cov (η_1,η_2) и выяснить, являются ли η_1 и η_2 независимыми.

$$\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2) = E(\eta_1,\eta_2) - E(\eta_1)E(\eta_2) = E(\eta_1^2) - E(\eta_2^2) - (E\eta_1)^2 + (E\eta_2)^2 = D\eta_1 - D\eta_2 = 0$$

Зависимость следует из контрпримера. Из подсчета количества благоприятных успехов, видим, что

$$P(\eta_1 = 2) = \frac{1}{36}; P(\eta_2 = 0) = \frac{1}{6}$$

и в то же время

$$P(\eta_1 = 1, \eta_2 = 0) = P(\eta_1 = 1, \eta_2 = 1) = \frac{1}{36}$$

МФТИ-Т.33.

Доказать, что если случайные величины ξ и η принимают только по два значения каждая, то из некоррелируемости следует их независимость.

$\xi \in \{a_1,a_2\}; \eta \in \{b_1,b_2\}$,

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = 0$$

$$E\xi\eta = \sum_{i,k=1}^{2} a_i b_k E(\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{B_k}) = \sum_{i,k=1}^{2} a_i b_k P(A_i, B_k)$$

$$E\xi E\eta = (\sum_{i=1}^{2} a_i P(A_i))(\sum_{k=1}^{2} b_k P(B_k)) = \sum_{i,k=1}^{2} a_i b_k P(A_i P(B_k)$$

Поэтому

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0 = \sum_{i,k=1}^{2} a_i b_k (P(A_i,B_k) - P(A_i)P(B_k)) \to P(A_iB_k) = P(A-i)P(B_k)$$

МФТИ-Т.34.

Авария происходит в точке X, которая равномерно распределена на дороге длиной L. Во время аварии машина скорой помощи находится в точке Y, которая также равномерно распределена на дороге. Считая, что X и Y независимы, найдите математическое ожидание расстояния между машиной скорой помощи и точкой аварии.

$$E|X-Y| = \int_{[0,L]^2} |x-y|\rho_X(x)\rho_Y(y)dxdy = \int_{[0,L]^2} \frac{|x-y|}{L^2}dxdy = \frac{2}{L}\int_0^L dx\int_x^L (y-x)dy = \frac{2}{L}\frac{L^3}{6} = \frac{L}{3}$$

4.4.4 Задачи на условные распределения

Ч-3.189

Случайные величины ξ и η независимы;

$$\mathrm{P}\{\xi=k\}=\mathrm{P}\{\eta=k\}=pq^{k-1},$$

Найти: $q=1-p, \quad 0<p<1, \quad k=1,2,\ldots$
а) $P\{\xi=\eta\}$;
б) $P\{\xi>\eta\}$;
в) $P\{\xi<\eta\}$; г) $\mathrm{P}\{\xi=k \mid \xi>\eta\}$;
д) $\mathrm{P}\{\xi=k \mid \xi<\eta\}$; е) $\mathrm{P}\{\xi=k \mid \xi=\eta\}$; ж) $\mathrm{P}\{\xi=k \mid \xi+\eta=l\}$; 3) $M(\xi \mid \xi+\eta=l\}, \quad l \geqslant 2$.

Ч-3.190

Найти расиределение целочисленной неотрицательной случайной величины ξ, если:
а) $\mathrm{P}\{0<\xi<\infty\}=1, \quad \mathrm{P}\{\xi=k+1 \mid \xi>k\}=p, \quad k=$

Ч-3.191

Случайные величины ξ, η независимы и одинаково распределены. Найти условную плотность $p_{z\mid\ +n=z}(x)$ распределения ξ при условии $\xi+\eta=z$ в следующих случаях: а) ξ и η имеют показательное распределение с плотностью $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0$; б) ξ и η равномерно распределень в $[0,1]$; в) ξ и η имеют распре-

Ч-3.192

Нлйти устовvую,$x \geqslant 0$. стучаях а), б), в), определенных в дию $\mathrm{D}(\xi \mid \xi+\eta=z)$ в

Ч-3.193

Случайнные величины в и педыдущей задаче. паково распрелелены. Найти $M(\xi \mid \xi+\eta=z)$. Разобрать отдельно случай, когда ξ имеет дискретное распределение или положительную плотность.

Ч-3.194

Плотность совместного распределения величин ξ, η определяется равенствами: $p_{i,\eta}(u,v)=1$ при $(u,v)\in$б
$EG, \rho_{\xi,n}(u,v)=0$ при $(u,v)\neq G$, где $G=\left\{(u,v): 0\leqslant u\leqslant \leqslant 2, 0<v<1-\frac{1}{2}u\right\}$. Найти плотность $p_{\eta\mid\varepsilon-\varepsilon}(x)$ условного распределения η при условии $\xi=2$.

Ч-3.195

Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n-$ результаты n последовательных испытаний Бернулли, $\mathrm{P}\left\{\xi_{\mathrm{i}}=1\right\}=p, \mathrm{P}\left\{\xi_i=0\right\}=$ $=q=1-p$. Доказать, что для любого $k(0\leqslant k\leqslant n)$ условное распределение пабора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ при условки $\xi_1+\ldots+\xi_n=k$ является равномерным на множестве всех C_n^k наборов, состоящих из k единиц и $n-k$ нулей.

Ч-3.196

Случайная величина X_1 имеет биномиальное распределение с параметрами (n,p), случайная величина X_2 при условии X_1 имеет биномиальное распределение с параметрами (X_1,p), X_3 - при условии X_2 имеет биномиальное распределение с параметрами $(X_2,p),\ldots\ \ldots, X_k$ при условии X_{k-1} имеет биномиальное распределение с параметрами (X_{k-1},p). Доказать, что безусловным распределением X_h является биномиальное распределение с параметрами $\left(n,p^k\right)$.

Ч-3.197

Случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_N$. Найти: а) $P\left\{\xi_1+\ldots+\xi_k=m \mid \xi_1+\ldots+\xi_N==n\right\}$; б) $M\left\{\xi_1+\ldots+\xi_n \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\right\}$.

Ч-3.19

8. з урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, сначала извлекается без возвращения выборка объема n, а затем из атой выборки извлекается без возвращения выборка объема $n_0<n$. Найти закон распределения числа ξ белых шаров во второй выборке. Зависит ли этот закон от n ?

Ч-3.199

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и распределены нормально с одинаковыми шараметрами $a = 0, \quad \sigma = 1$; положим $\eta = \frac{\xi_1 + \xi_2 \xi_3}{\sqrt{1+\xi_3^2}}$. Найти распределение η.

Ч-3.20

2. Пусть $\xi_1,\ \xi_2, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математи ческим ожиданием $a > 0$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$, случайная величина v не вависит от $\xi,\ \xi$,.. и принимает целые положительные значения, $\mathrm{Mv} = b, a$

$$\tau = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_v.$$

Найти τ и (шри дополнительном условии $\mathrm{D}v = \delta^2$) $\mathrm{D}\tau$.

Ч-3.20

3. Случайные величины ξ, η независимы. Моказать, что ври любомм x

$$P\{\xi \geqslant \max(\eta, x)\} \geqslant P\{\xi \geqslant \eta\} \mathrm{P}\{\xi \geqslant x\}.$$

Ч-3.204

Случайные величины $\xi,\ \eta, \zeta$ независимы. Іоказать, что

$$P\{\xi \geqslant \max(\eta, \zeta)\} \geqslant P\{\xi \geqslant \eta\} P\{\xi \geqslant \xi\}.$$

Ч-3.205

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Пусть $\delta_1 = 1$, и если $n \geqslant 2$, то

$$\delta_n = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ при } \xi_n < \min\left\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\right\}, \\ 0 \text{ в противном случае. } \end{array} \right.$$

Построим последовательность τ_{k} моментов появления минимальных значений ξ_n и последовательность их величин η_k, т. е. положим $\tau_0 = 0, \eta_0 = 1, \tau_k \Rightarrow \min\left\{n : n > \tau_{k-1},\ \delta_n = 1\right\}, \eta_k = \xi_{\tau_k}, k = 1, 2, \ldots$

а) Доказать, что щри любых $k \geqslant 1$ и $x \in [0,1]$ условное распределение η_k при условии $\eta_{k-1} = x$ является равномерным на $[0, x]$.

б) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi_{\mathrm{h}} = -\ln \eta_h$.

в) Найти условное распределение, математичесгое ожидание и дисперсию случайной величины $\Delta_h =$ τ_h - τ_{h-1} при условии $\eta_{k-1} = x$.

г) Найти τ_h при $k \geqslant 1$.

Ч-3.207

Случайная величина & имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперспей σ^2. Показать, что при любых $x > 0, C > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\xi - x > \frac{C}{x} \mid \xi > x\right\} < e^{-C/\sigma 2}.$$

Ч-3.20

8. В схеме Бернулли с вероятностью p исхода 1 и вероятностью $q = 1-p$ исхода 0 найти математическое ожидание числа v_{00} испытаншй до первого появления дешочки из двух нулей. В частности, вычислить М v_{00} при $p = 1/2$.

Ч-3.209

В схеме Бернулли предыдущей задачи найтп математическое ожидание числа v_{111} испытаний до первого появлеиия цепочки из трех единиц. В частности, вычислить это математическое ожидание при $p = 1/2$.

Ч-3.210

В схеме Бернулли задачи n3.208 найти математіччское ожидание числа v_{01} испытаний до первого появленпя цешочки 01. В частности, вычислить это математіческое ожидан ие при $p = 1/2$.

Ч-3.211

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности единичной длишы. Найти вероятность того, что длина наименьшей дуги, содержащей все эти точки, не больше $x \leqslant 1/2$.

Ч-3.212

Точки $A_1, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на огружности S с центром O. Найти вероятность того, что О лежпт внутри выпукяого многоугольника с вершинами $A_1, \ldots, A_n$.

Ч-3.213

Точки $A_1, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности с центром O, а случайная величина v равна наименьшему n, при котором выпуклый многоугольник с вершинами $A_1, \ldots, A_n$ содержит O. Найти Mv и Dv.

Ч-3.216

Пусть выполнены условия задачи n3.215 и ξ_i длина дуги $A_{(i)} A_{(i+1)}$. Найти совместное распределение и коэффидиент коррелядии ξ_1, ξ_2.

Ч-3.217

Пусть выполнены условия задачи n3.216. Найтп закон совместного распределения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ при $k \leqslant n$.

Ч-3.21

8. Пусть выполвены условия задачи n3.216. Показать, тто совместное распределение $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots i_{\mathrm{h}} \leqslant n$ совшадает с распределением

Ч-3.219

Пусть выполнены условия задачи n3.216 и $v-$ число дуг $A_{(i)} A_{(++1)}$ длины больше $\Delta, 0 \leqslant \Delta \leqslant 2\pi r$. Найти Mv, Dv и асимптотические формулы для них при $r = = n/2\pi\lambda, n \to \infty$.

Ч-3.220

Нуусть выполнены условия задачи n3.216. Найти закон распределения случайной величины

$$\eta_n = \max\left\{\xi_1, \ldots, \xi_n\right\}.$$

Ч-3.221

Пусть выполнены условия задачи n3.220. Найтп $M\eta_n$ и асимптотическую формулу для η_n при $n \to \infty$.

Ч-3.222

Точки A, B, C независимы и имеют равномерное распределение на окружности единичного радиуса. Iуусть S - площадь $\triangle ABC, p-$ его периметр, r-радиус вгтисанного круга. Найти $\mathrm{MS}, \mathrm{Mp}, \mathrm{M}$ r.

Ч-3.223

Стороны прямоугольника $ABCD$ параллельны осям координат. Найти математическое ожидание площади о прямоугольника $ABCD$ в следующих случаях:

а) координаты (a_1, a_2) точки A фиксированы, $0 \leqslant a_1,\ a_2 \leqslant 1$, а точка C имеет равномерное распределение на диагонали единичного квадрата, соединяющей его вершины $(0,0)$ и $(1,1)$;

б) точки A и C независимы; точка A равномерно распределена в единичном квадрате $[0,1] \times [0,1]$, а точгка C имеет то же распределение, что в п. а).

МФТИ-Т22 Совместное распределение по заданным вероятностям

Найдем совместное распределение случайных величин ξ и η, принимающих значения -1, 0, 1, если известно:

$$\mathbf{P}(\xi\eta = 0) = 1;\ \mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(\xi = -1) = \mathbf{P}(\eta = 1) = \mathbf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$$

Из условия следует, что $P(\xi \neq 0) = \frac{1}{2},\ P(\eta \neq 0) = \frac{1}{2}$, поэтому $P(\xi = 0) \leq \frac{1}{2}, P(\eta = 0) \leq \frac{1}{2}$, то есть $P(\xi = 0) + P(\eta = 0) \leq 1$.

В то же время $1 = P(\xi\eta = 0) = P((\xi = 0) \cup (\eta = 0)) \leq P(\xi = 0) + P(\eta = 0)$, поэтому $P(\xi = 0) = \frac{1}{2}, P(\eta = 0) = \frac{1}{2}$.

Для плотности распределения получаем таблицу:

$\xi\downarrow;\ \eta\rightarrow$	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	1/2	1/4
1	0	1/4	0

Таблица 1: T22

А плотность распределения имеет вид:

	$\xi < -1$	$\xi \in [-1;0)$	$\xi \in [0,1)$	$\xi \leq 1$
$\eta < -1$	0	0	0	0
$\eta \in [-1;0)$	0	0	1/4	1/4
$\eta \in [0,1)$	0	1/4	3/4	1
$\eta \leq 1$	0	1/4	1	1

Таблица 2: T22

(????)

Она заполняется легко: нули ставятся, так как если бы был не ноль в этих местах, то не было бы $\mathbf{P}(\xi\eta = 0) = 1$.

Дальше оставшиеся равенства из условия дают нам заполнение боковых средних ячеек.

Ячейка посередине легко находится.

МФТИ-Т23 Закон распределения $\xi+\eta$ при известных плотности ξ и вероятности η (??)

Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$, если ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\eta \in \{-1, 0, 1\}$, $\mathbf{P}(\eta = 0) = \mathbf{P}(\eta = 1) = \mathbf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$.

Имеем:

$$\begin{aligned}F_{\xi+\eta}(x) =& P(\xi + \eta \leq x) = \\ =& P(\eta + \xi \leq x|\eta = 0)P(\eta = 0) + P(\eta + \xi \leq x|\eta = 1)P(\eta = 1) + P(\eta + \xi \leq x|\eta = -1)P(\eta = -1)\end{aligned}$$

$$P(\xi \leq x|\eta = 0) = \frac{P(\{\xi \leq x\} \cap (\eta = 0))}{P(\eta = 0)} = \frac{P(\xi \leq x)P(\eta = 0)}{P(\eta = 0)} = P(\xi \leq x)$$

Поэтому

$$F_{\xi+\eta}(x) = 1\frac{1}{3}(F_\xi(x) + F_\xi(x-1) + F_\xi(x+1)) =$$

$$= \frac{1}{3}(\int_{-\infty}^{x} f_\xi(y)dy + \int_{-\infty}^{x-1} f_\xi(y)dy + \int_{-\infty}^{x+1} f_\xi(y)dy)$$

Это и ответ.

МФТИ-Т.24 (?!!!) Функция распределения и плотность суммы координат точки в квадрате

В квадрат $\{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_i \leqslant 1; i = 1, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 - ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$$F_{\xi_i}(x) = P(\xi_1 \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{если } < 0 \\ x, & \text{если } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{если } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$\rho_{\xi_i} = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

ξ_1, ξ_2 - независимые случайные величины.

$$\rho(\xi_1 + \xi_2) = \rho(\xi_1)\rho(\xi_2)$$

Посчитаем

$$\rho(\xi_1 + \xi_2 \leq x) = \iint_S \rho_{\xi_1\xi_2}(u, s) duds$$

где S - площадь, которую пересекает заштрихованная часть на рисунке с единичным квадратом

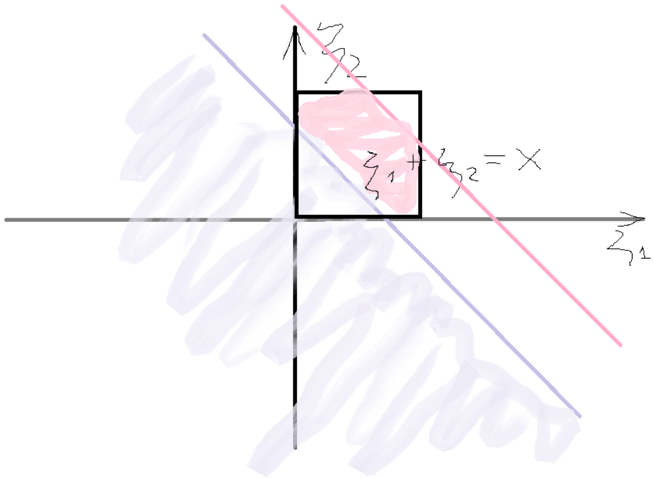


Рис. 5: МФТИ-Точка в квадрате

При $x < 0$ $\rho(\xi_1 + \xi_2 \leq x) = 0$.
При $x > 0$ $\rho(\xi_1 + \xi_2 \leq x) = 1$.
При $x \in [0, 1]$

$$\rho(\xi_1 + \xi_2 \leq x) = \int_0^x d\xi_1 \int_0^{x-u} d\xi_2 = \int_0^x (x - \xi) d\xi = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

При $x \in [1, 2]$ нужно посчитать площадь, заштрихованную розовым, для этого от площади квадрата отнимем оставшуюся площадь, которая легко находится, зная длину сторон этой области.

$$\rho(\xi_1 + \xi_2 \leq x) = 1 - \frac{(2 - x)^2}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

В итоге функция распределения имеет вид:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = P(\xi_1 \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{если x<0} \\ \frac{x^2}{2}, & \text{если } x \in [0, 1) \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & \text{если } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{если } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

Найдем плотность распределения:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = P(\xi_1 \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{если x<0} \\ x^2, & \text{если } x \in [0, 1) \\ 2 - x, & \text{если } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{если } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

МФТИ-? (?!!!) распределение суммы случайных величин по условному распределению одной и $\xi_1+\xi_2$

Пусть ξ_1, ξ_1 - независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1+\xi_2$.

$$P(\xi_1+\xi_2=k)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi_1=i;\xi_2=k-i)\underbrace{=}_{\text{независимость}}\sum_{i=0}^{k}P(\xi_1=i)P(\xi_2=k-i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{k!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Теперь найдем

$$P(\xi_1=k|\eta=n)=\frac{P(\xi_1=k\cup\xi_2=n-k)}{P(\eta=n)}=\frac{\xi_1(k)\xi_2(n-k)}{\eta(n)}=C_n^k\frac{(\lambda_1/\lambda_2)^k}{(\lambda_1/\lambda_2+1)^n}$$

МФТИ-? (?!!) Распределение $\eta=F_\xi(\xi)$

Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta=F_\xi(\xi)$.

Из непрерывности следует, что $\exists F_\xi^{-1}(x)$, поэтому просто преобразуем искомую функцию распределения:

$$F_\eta(x)=P(\eta\le x)=P(F_\xi(\xi)\le x)=P(\xi\le F_\xi^{-1}(x))=F_\xi(F_\xi^{-1}(x))=x.$$

В итоге

$$F_\xi(\xi)=\begin{cases}0, & \text{если x<0}\\ x, & \text{если } x\in[0,1]\\ 1, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

МФТИ-? Параметры ξ^2 по ξ

Пусть ξ имеет имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения и плотность случайной величины ξ^2

Функция распределения:

$$F_{\xi^2}(x)=P(\xi^2\le x)=P(\xi\le\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x}$$

А ее плотность есть производная $F_{\xi^2}(x)$:

$$f_{\xi^2}(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x}$$

4.4.5 Задачи на Нормальное распределение

Ч-3.225

Случайная величина ξ имевт нормальное распределение с матенатическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Какое из двух событий: $\{|\xi|\leqslant 0,7\}$ или $\{|\xi|\geqslant 0,7\}-$ имеет большую вероятность?

Ч-3.226

Случайнан величина ξ үмеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Что больше:

$$\mathrm{P}\{-0,5\leqslant\xi\leqslant-0,1\} \text{ или } \mathrm{P}\{1\leqslant\xi\leqslant 2\}\ ?$$

Ч-3.227

Случаїпая величина ξ ияеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Найти $M\xi^A, k=1,2,\ldots$

Ч-3.228

Случайеая величіна ξ имеет нормальное распределенпе с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Гоказать, что при любом $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left\{ \frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^9}{x^3} \right\} < \mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma}{x}.$$

Ч-3.229

Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $\left(a, \sigma^2\right)$. Найти:
а) плотность распределения - величины $\eta_1 = \xi^2$ при $a = 0$
б) цлотность распределения величины $\eta_2 = e^3$ при произвольных $a, 0$.

Ч-3.230

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $\left(0, \sigma^2\right)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = = \xi_1^2 + \xi_2^2$

Ч-3.231

Случайные величины $\xi 1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Распределение случайной величины $\eta_n = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ называется χ^2-распределением с n степенями свободы. Найти плотность распределения η_n.
Какое из рясцределений, перечисленных в конце введения к гл. 3, при соответствующем выборе параметров совпадает с распределением η_n ?

Ч-3.232

Случайная величина η_n имеет χ^2-распределение с n степенями свободы (см. задачу n3.231). Найти Mn η_n, Dn η_{n-}

Ч-3.233

Найти $M\xi$ и $D\xi$, если $\ln \xi$ имеет нормальное распределеиие с параметрами $\left(a, \sigma^2\right)$ (в этом случае говорят, тто & имеет логарифіически нормальное распределенue).

Ч-3.234

Ддл случайной величины ξ, определенной в задаче **3.233**, найдите точку, в которой максимальна плотность распределения ξ (эта точка называется модой распределения). Найдите отношение математического ожидания & кое моде.

Ч-3.235

Некоторая категория людей имеет средний вес m кг и среднее квадратпческое отклонение веса 3 кг. Для случаев $m = 60$ и $m = 10$ определить вероятность того, что вес случайно взятого человека отличается от m не более чем на 5 кг; если: а) вес имеет нормальное распределение; б) вес имеет логарифммически нормальное распределение.

Ч-3.236

Для случайных величин η_1, η_2, определенных в n3.229, найти $M\eta_1^k, M\eta_2^k$.

Ч-3.237

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Найти $M\xi\cos\xi, \quad M\frac{\xi}{1+\xi^2}, M\sin\xi$.

Ч-3.242

Случайная величина & нормально распределена с параметрами $(0,1)$. Положим

$$\eta=\begin{cases} \xi, & \text{если} \quad |\xi| \leqslant 1, \\ -\xi, & \text{если} \quad |\xi|>1. \end{cases}$$

а) Найти закон распределения η.
б) Имеет ли величина $\xi+\eta$ нормальное распределение?

Ч-3.243

Случайные величины & и η независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Найти

$$P\{|\xi-\eta| \leqslant 1\}.$$

Ч-3.244

Случайные велпчины ξ_1, ξ_2, ξ_3 незавпсимы й нормально распределены с параметрами $(1,1)$, (2, 5), (0,7) соответственно. Найти: а) $\mathrm{P}\left\{2 \xi_1-\xi_2<0\right\}$, б) $\mathrm{P}\left\{-3<2 \xi_1-\xi_2<5\right\}$, в) $\mathrm{P}\left\{1<2 \xi_1-\xi_2+\xi_3<4\right\}$.

Ч-3.245

Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет сферитески симметричное нормальное распределение с $\mathrm{D} \xi_1=\mathrm{D}_2=\sigma^2$. Найти распределение вектора (ζ_1, ζ_2), если

$$\xi_1=\xi_1 \cos \varphi+\xi_2 \sin \varphi, \quad \xi_2=-\xi_1 \sin \varphi+\xi_2 \cos \varphi .$$

симметричное пормальное распределение с $\mathrm{D}_1=\mathrm{D}_2=1$. Доказать, что случайные велгчины $\xi_1 \xi_2$ й $\frac{1}{2}\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)$ одинаково распределены.

Ч-3.247

Случайные величины ξ и η независиимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Найти совместное распределение случайных величин $\zeta_1==a \xi_1+b \xi_2, \xi_2=a \xi_1-b \xi_2$ при $a, b \neq 0$.

Ч-3.250

Случайшые величины ξ_1 и ξ_2 независпзы и имеч ют нормальное распределение с математическим ожидан нием 0 и дисперсией σ^2. Случайные величины η_1 и η_2 определяются соотношением

$$\eta_1+i \eta_2=\frac{\left(\xi_1+i \xi_2\right)^k}{\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^{(k-1) / 2}}$$

где $i=\sqrt{-1}$, а $k>0$ - целое число. Найти совместное распределение величин η_1 и η_2.

Ч-3.251

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имегот нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Найти математическое ожидание величины

$$\eta=e^{\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) / 2}\left(1+\xi_1^2+\xi_2^2\right)^{-3 / 2}$$

Ч-3.252

Случайные величины ξ, η независимы и нормально распределены с параметрами $\left(0, \sigma_1^2\right),\left(0, \sigma_2^2\right)$ соответственно. Вычислить при $\sigma_1=1, \sigma_2=2$ вероятность попадания случайной точки $(\xi, \eta) \in R^2$ в следующие области: а) прямоугольник $|x| \leqslant 1,|y| \leqslant 2$;
б) прямоугольл $0 \leqslant y \leqslant 4$;
г) трапецию $x+y \leqslant 0,|x| \leqslant 1, y \geqslant-2$;
д) область $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, ограниченную эллипсом, вписанпым в прямоугольник $|x| \leqslant 1,|y| \leqslant 2$;
е) область $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{4 c^2} \leqslant 1$, ограниченпую эллипсом, описаппым около прямоугольниKa $|x| \leqslant 1,|y| \leqslant 2$.

Ч-3.253

Мост через реку представляет собой прямоугольпик, координаты которого в декартовой системе координат удовлетворяют неравепствам: $|x| \leqslant 10, |y| \leqslant 100$. При артиллерийском обстреле моста точка попадания сиаряда (ξ, η) в той же снстеме коордишат иивет «вумерное нормальное распределение с независнмыми координатами и со средними квадратпческими отклоненгями $\sigma_{\xi} = 10, \sigma_{\eta} = 40$. «Точкой приделивания"назовем ((Mξ, MY). Определить вероятность попадания в мост при одном выстреле, если точка прицеливания равпа: a) $(0,0)$; б) $(10,0)$; в)$(5,20)$.

Ч-3.257

Случайная точка (ξ, η) имеет сферически симметричпое нормальное распреде.еение с DξD = D = 1. Найти вероятность попадания (ξ, η) :
а) в квадрат $C = \{(x,y) : |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$;
б) во внисанный в C круг;
в) в описанлый около C крус.

Ч-3.258

Случайные величнны ξ, η независимы и нормально распределены с M = M$\eta = 0$, Dξ = D$\eta = 4$. Найти вероятность того, что случайная точка (ξ, η) попадет в:
а) кольцо $\left\{(x,y) : 2 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\right\}$; 6) область $\{(x,y) : 2 \leqslant \min(|x|,|y|), \max(|x|,|y|) \leqslant 3\}$;
в) область $\{(x,y) : 2 \leqslant |x|+|y| \leqslant 3\}$.

Ч-3.259

Случайные то'ки $A_1 = (\xi_1, \eta_1)$ и $A_2 = (\xi_2, \eta_2)$ на плоскости R^2 независимы и имеют сферически симметричное нормальное распределение с единичной матрицей ковариаций. Найти функцию расцределения длины отрезка A_1A_2.

Ч-3.260

Случайные точки $A_1 = (\xi_1, \eta_1), A_2 = (\xi_2, \eta_2)$, $A_3 = (\xi_3, \eta_3)$ на плоскости R^2 независнмы и имеют нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и единцчной матрицей ковариаций. Найти функцию распредетения длины медианы A_1M_1 треугольника $A_1A_2A_3$.

Ч-3.261

Доказать, что в условиях задачи n3.260 длина сторонь A_2A_3 и длина медиаиы A_1M_{t} треугольника $A_1A_2A_3-$ независимые случайные величины.

Ч-3.262

В условиях задачи n3.260 найти вероятность того, что треугольпик $A_1A_2A_3$ - тупоугольный.

Ч-3.264

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий, область A - угол с вершиной в начале координат и раствором α. Доказать, что если область A' симметрична области A относительно начала координат, то $\mathrm{P}\{\xi \in A'\} = \mathrm{P}\{\xi \in A\}$.

Ч-3.265

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. Найти $\mathrm{P}\{|\xi_1| > a|\xi_2|\}, a > 0$.

Ч-3.266

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ шмеет невырожденное двумерное нормальное распределение с пулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\|\sigma_{ij}\|_{i,j=1}^2, |\sigma_{12}|^2 < \sigma_{11}\sigma_{22}$. Найти

$$p_{00} = P\{\xi_1 \geqslant 0, \xi_2 \geqslant 0\}, \quad p_{01} = P\{\xi_1 \geqslant 0, \xi_2 \leqslant 0\},$$
$$p_{10} = P\{\xi_1 \leqslant 0, \xi_2 \geqslant 0\}, \quad p_{11} = P\{\xi_1 \leqslant 0, \xi_2 \leqslant 0\}.$$

Ч-3.267

Случайный вектор $\xi - (\xi_1\,, \xi 2) \in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математическпх ожиданий и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} \sigma^2 & \alpha \\ \alpha & \sigma^2 \end{pmatrix}$ ξ $\alpha \mid< \sigma^2$. Найти

$$P\left\{0 \leqslant \xi_1 \leqslant x\xi_2\right\}, \quad x > 0.$$

Ч-3.268

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ имеет невырожденное нормальное распределевие с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей коварнаций $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Найти:
а) $\mathrm{P}\left\{\xi_1 > a\xi_2\right\}, -\infty < a < \infty$; 6) $\mathrm{P}\left\{\xi_1 > a\xi_2 + b\right\}, - \quad -\infty < a, b < \infty$.

Ч-3.271

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\xi_{(1,} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \xi_{(3)}$ те же, что в задаче n3.270.
а) Найти распределение вектора $(\xi_2 - \xi_1\,, \xi_3 - \xi_2)$.
б) Найти плотность $p\left(x_1, x_2\right)$ распределения вектора $\left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)}\right)$.
в) Найти распределение случайной величины $\xi = = \left(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}\right) / \left(\xi_{(3)} - \xi_{(2)}\right)$.

Ч-3.272

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ζ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Положим

$$\xi_3 = \begin{cases} \zeta, & \text{если } \xi_1\xi_2 = 0, \\ |\zeta| \operatorname{sgn}\left(\xi_1\xi_2\right), & \text{если } \xi_1\xi_2 \neq 0, \end{cases}$$

где $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ при $x \neq 0$.
а) Найти вектор математических ожиданий и матрицу ковариаций вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3).
б) Найти распределение ξ_3 и совместные распределения векторов (ξ_1, ξ_3) и (ξ_2, ξ_3).
в) Найти плотность $p\left(x_1, x_2, x_3\right)$ распределения вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Нвляется ли оно нормальным?

Ч-3.273

Используя предыдущую задачу, построить пример случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, распределение которого не является пормальным, но любые $n-1$ его координат ваапмно независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Ч-3.274

Случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет сферически симметричное нормальное распределение с пулевым вектором математических ожиданий и единичной ковариационной матрицей. Найти распределение вектора $\eta = \xi A$, где A-действительная матрица с k строками и m столбцами.

Ч-3.277

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы; ξ_i имеет нормальное распределение с параметрами $\left(0, \sigma_i^2\right)_j$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Найти распределение вектора

$$\eta = \left(\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \ldots, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\right).$$

Ч-3.278

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют пормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Найти минимальное значение k, при котором

$$P\left\{\max\left\{\left|\xi_1\right|, \left|\xi_2\right|, \ldots, \left|\xi_h\right|\right\} \geqslant 2\right\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ч-3.279

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет k-мерное нормальное распределение с математпческим ожиданием $a \in R^A$ и ковариационной матрицей A. Что больше: $\ln\left|M\xi_1 \ldots \xi_k\right|, M \ln\left|\xi_1 \ldots \xi_k\right|$ или $\ln M\left|\xi_1 \ldots \xi_h\right|$?

Ч-3.280

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \notin R^2$ нмеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и коваршацнонной матрицей $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ Найти условное распределение ξ_1 при условии $\xi_2 = x$.

Ч-3.281

Распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \in R^2$ таково, что при любом $x \in (-\infty, \infty)$ условное распределение ξ_1 при условии $\xi_2 = x$ и условное распределение ξ_2 при условии $\xi_1 = x$ нормальны. Является ли нормальным распределение вектора ξ ?

4.5 Задачи про предельные теоремы, производящие и характеристические функции

4.5.1 Задачи про закон больших чисел и лемму Бореля-Кантелли (????)

(уже года 2 как знаю, что такое есть, но только сейчас до задач дошел.)

Ч-4.1

. Пусть функция $g(x), x \geqslant 0$, неотрицательна и монотонно возрастает. Показать, что для любой действительной случайной величины ξ справедливо веравевство

$$P\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{Mg(|\xi|)}{g(x)}.$$

Ч-4.2

. Пусть случайшая величина η_n равна сумме очгов, чоявившихся при n бросаниях симметричной игральвой кости. Использя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3,5\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Ч-4.3

. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$– результаты $n+1$ испытаний схемы Бернулли ($\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = p, \mathrm{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - p$) и случайная величина η_n равна числу таких $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, что $\xi_i = \xi_{1+1} = 1$. Испольауя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Ч-4.4

Последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ образованы одинаково распределенвыми случайными величинами, независимыми ввутри каждой последовательности (случайяые величины ξ_i и η_i могут не быть независакон больших чисел для последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$

$$\xi_{2h-1} = \xi_h, \quad \zeta_{2h} = \eta_h, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ч-4.5

. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение,

$$\eta_n = \cos \frac{\varepsilon_n}{\xi_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\bigvee^{\eta}_{\text{довлетворяют ли последовательности}}, \eta_3, \eta_5, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ загопу больших чисел?

Ч-4.7

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ обравована независимыми случайными величинами,

$$M\xi_\Lambda = 0, \quad D\xi_h = Ck^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При каких значевиях α последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ может удовлетворять закопу больших чисел и при каких значениях α может не удовлетворять ему?

Ч-4.8

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ состопт из незавпспмых одинаково распрелеленных случайвых величин, M $\xi_h = 0, D\xi_k = \sigma^2 < \infty, k = 1, 2, \ldots$ Удовлетворяют ли вакону больших чисел последовательности случайных велігииі

$$\zeta_n = \xi_n + \xi_{n+1}, \quad \eta_n = \sum_{n=0}^{|n1/3]} \xi_{n+k}, \quad n = 1, 2, \ldots ?$$

Ч-4.9

Случайные величины $\xi_1, \quad \xi_2, \ldots$ независимы, $M\xi_1 = a, \quad D_{\xi_1} = \sigma^2 < \infty$. Пусть $\zeta_n = \sum_{1<i<j<n} \xi_i \xi_j$. Показать, что последовательность ξ_n удовлетворяет закопу больших чпсел: для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\zeta_n}{c_n^2} - a^2\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Ч-4.10

Показать, что утверждение предыдущей задачиг останется сшраведливым, если в ее формулировке заменить условие независимости $\xi_1, \xi_2, \ldots$ условием их пекоррелированвости:

$$M\left(\xi_i - a\right)\left(\xi_f - a\right) = 0, \quad 1 \leqslant i < j < \infty.$$

Ч-4.11

Пусть фушкция $f(x), 0 \leqslant x \leqslant 1$, огравичена и ивтегрируема, а $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимьт случайные єеличины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$.

а) Доказать, что чри любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{f\left(\xi_1\right) + \ldots + f\left(\xi_n\right)}{n} - \int_0^1 f(x) dx\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

б) Найти

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{f\left(\xi_0\right) + \ldots + f\left(\xi_n\right)}{n} - \int_0^1 f(x) dx \mid > \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

114

Ч-4.12

Пусть ограниченная интегрпруемая функция $f(x), -\infty < x < \infty$, имеет период 1, а случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Постропм последовательность случайных ве.Iичин

$$\xi_A = f(\xi + k\eta), \quad k = 1, 2, \ldots$$

а) Доказать, что случайные величины $\varsigma_1 \xi_2, \ldots$ попарно независимы и одинаково распределены. Найти $M\xi_1, D\xi_1$.

б) Показать, что для любого > 0

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{n} - \int_0^1 f(x) dx\right| > 8\right\} = 0.$$

в) Показать, что если $\left|f(y) - \int_0^1 f(x) dx\right| > \varepsilon$ при всех $y \in [a, b] \subset (0, 1)$, то при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\varepsilon_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \int f(x) dx\right| > \varepsilon\right\} \geqslant 2\left(\frac{b - a}{n}\right)^2.$$

Ч-4.15

Случайиые величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ невавпсимы, одпваково распределены, имеют математическое ожидание a и для некоторого $\varepsilon, 0<\varepsilon<1$,

$$m_{\mathrm{e}}=M\left|\xi_1-a\right|^{1+\mathrm{s}}<\infty .$$

Іоказать, что для любого $\delta>0$

$$\lim _{n \rightarrow \infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-a\right|>\delta\right\}=0 .$$

Ч-4.16

Лемма Бореля-Кантелли. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - события, заданные на одном вероятностном пространгстве, и случайная величина v равва числу одновремевно шроисходящих событий. Показать, что:

а) если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left\{A_n\right\}<\infty$, то $P\{v<\infty\}=1$,

б) если события $A_{\mathrm{r}}, A_2, \ldots$ попарно независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left\{A_n\right\}=\infty$, то $P\{v=\infty\}=1$.

Ч-4.17

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ события, заданные на одном вероятностном пространстве, и случайная велпчина v равна чисту одновремевво происходящиќ событий. Показать, что если $\mathrm{P}\left\{A_n\right\} \geqslant a>0, n=1,2, \ldots$ то $\mathrm{P}\{v==\infty\} \geqslant a$.

Ч-4.18

Последовательность чисел c_n удовлетворяет условиям $0 \leqslant c_n \leqslant 1, \lim _{n \rightarrow \infty} c_n=0$. Всегда ли существует такая последовательность событий $A_1, A_2, \ldots$, что $\mathrm{P}\left\{A_n\right\}==c_n$ и для числа v одновремевно происходящих событий справедливо соотношение $\mathrm{P}\{v<\infty\}=1$?

Ч-4.21

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незавпсимы и имеют одно и то же показательное распределение с вараметром λ :

$$P\left\{\xi_n \leqslant x\right\}=1-e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0, \quad n=1,2, \ldots$$

Пусть ε - произвольное число из пнтервала $(0,1 / \lambda)$, случайная величина v_{ε} равна числу одновременно происходящих событий $A_n^e=\left\{\frac{\xi_n}{\ln n}>\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right\}$, а μ_{ε} - чпслу одновременно происходящих событий

$$B_n^{\varepsilon}=\left\{\max _{\sqrt{n}<k<n} \frac{\xi_k}{\ln k}<\frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right\} .$$

а) Показать, что $\mathrm{P}\left\{v_{\mathrm{e}}<\infty\right\}=\mathrm{P}\left\{\mu_e<\infty\right\}=1$ при любом $\varepsilon \in(0,1 / \lambda)$.

б) Вывести из результата п. а), что последовательность случайных величин $\xi_n=\frac{\xi_n}{\ln n}, \quad n=1,2, \ldots$, удовлетворяет условию

$$P\left\{\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n=\frac{1}{\lambda}\right\}=1 .$$

Ч-4.22

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют математическое ожидание a и дисперсию $\sigma^2<\infty$ и ве коррелпрованы:

$$M\left(\xi_i-a\right)\left(\xi_i-a\right)=0 \text { при любых } i \neq 1 .$$

Доказать, что

$$p\left\{\lim _{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1+\ldots+\xi_{n^2}}{n^2}=a\right\}=1 .$$

ФР задача на нормальное распределение (!?!?!?)

Two random variables are given: $X \sim \mathcal{N}(0,9)$ and $Y \sim \mathcal{N}(0,4)$. $\operatorname{Corr}(X, Y)=-1$. (a) (5 pts) Evaluate $\mathrm{P}(X>1)$ (b) (5 pts) Evaluate $\mathrm{P}(2 X+Y>3)$ (c) (5 pts) Evaluate $\mathrm{P}(2 X+Y>3 \mid X=1)$ (d) (5 pts) Evaluate $\mathrm{P}(|X|>2)$ (e) (5 pts) Evaluate $\mathrm{P}\left((Y+1)^2<2\right)$

(такую важно решать, но пока плохо понимаю его, не уверен в решениях вообще.)

4.5.2 Задачи про доказательства предельных теорем

Ч-4.25

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение с параметром $p, 0<p<1$:

$$\mathrm{P}\left\{\xi_1=k\right\}=(1-p) p^n, \quad k=0,1,2, \ldots$$

а) Показать, что $\mathbf{P}\left\{\xi_1+\ldots+\xi_n=k\right\}=C_{k+n-1}^{n-1}(1-p)^n p^k{ }_\kappa k=0,1,2, \ldots$
б) Найти

$$q_k^{(n)}=\lim _{m \rightarrow \infty} P\left\{\xi_1+\ldots+\xi_n-m=k \mid \xi_1+\ldots+\xi_n \geqslant m\right\}_1$$
$$=0,1,2, \ldots$$

Ч-4.26

(см. задачу n1.53). Первый ряд кинотеатра состоит из N кресел. Зрители один за другим ваполнягот этот ряд, причем каждый из них может с равной вероятностью занять лобое из креселі, свободных в момент его прихода. Пусть $\tau_1(N)$ - порядковый номер первого зрителя, который сел в кресло, находящееся рядом с уже занятым креслом, $\tau_2(N)$ - цорядковьй номер первого зрителя, который сел в кресло, симметричное относительно середины ряда одному из занятых кресел. Найти законы распределения $\tau_1(N)$ и $\tau_2(N)$ и предельные при $N \rightarrow \infty$ расшределения случайных величин $\frac{\tau_i(N)}{V N}, i=1,2$, т. е. фунюции $G_i(x)=\lim _{N \rightarrow \infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\tau_i(N)}{\sqrt{N}} \leqslant x\right\}$.

Ч-4.27

. Плотность $p_{\mathrm{s}}(x)$ случайной величины & вепрерывша и ограничена на отреаке $[a, b]$ и равна 0 вве $[a, b]$. Полоэким $\eta_n=\{n \xi\}$, где $\{x\}-$ дробная часть п11сла x. Найти

$$\lim _{n \rightarrow \infty} P\left\{\eta_n \leqslant x\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 .$$

Ч-4.28

Показать, что утвержденпе предыдущей задачит справедливо для случайшой величиќы ξ с гусочновенрерывшой плотностыо.

Доказать, что при любом характере зависимостп межкду ξ_n и η_{n} для каждой точки нешрерывности $F(x)$ справедливы равенства:
а) $\lim _{n \rightarrow \infty} P\left\{\eta_n+\xi_n \leqslant x\right\}=F(x)$;
б) $\lim _{n \rightarrow \infty} \mathrm{P}\left\{\eta_n\left(1+\xi_n\right) \leqslant x\right\}=F(x)$.

Ч-4.34

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы,

$$\mathrm{P}\left\{\zeta_i=1\right\}=p, \quad \mathrm{P}\left\{\zeta_i=0\right\}=1-p, \quad i=1,2, \ldots$$

Положим $\xi_i^{(k)}=\zeta_i\left(1-\zeta_{i+1} \zeta_{i+2} \ldots \zeta_{i+k}\right)_2 \eta_n^{(k)}=\xi_1^{(k)}+\ldots \ldots+\xi_n^{(k)}$. В стучае когда $0<p<1_i \lim _{n \rightarrow \infty} p^{k(n)} \sqrt{n}=0$ найти

$$\lim _{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_n^{(h(n))}-n p}{\sqrt{n p(1-p)}} \leqslant x\right\} .$$

Ч-4.35

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ - такие последовательности случайных величин, что для некоторых чисел a, b для любого $\varepsilon>0$

$$\lim _{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\xi_n-\dot{a}\right|>\varepsilon\right\}=0, \quad \lim _{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\eta_n-b\right|>\varepsilon\right\}=0 .$$

Доказать, что при эюбом характере завпсимости между ξ_n и η_n для пюбого $\varepsilon>0$:
а) $\lim _{n \rightarrow \infty} \mathrm{P}\left\{\left|\xi_n-a\right|<\varepsilon, \quad\left|\eta_n-b\right|<\varepsilon\right\}=1$;
б) если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b), то дия тюбого $\varepsilon>0$

$$\lim _{n \rightarrow \infty} \mathrm{P}\left\{\left|f\left(\xi_n, \eta_n\right)-f(a, b)\right|<\varepsilon\right\}=1 .$$

Ч-4.36

Пусть $\xi^{(i)} = \left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}\right), i = 1, 2, \ldots, -$ независимые одинаково распределенные векторы в R^2,

$$M\xi_1^{(i)} = a_1 > 0, \quad M\xi_2^{(i)} = a_2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что последовательвость случайных величин.

$$\eta_n = \frac{\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \ldots + \xi_1^{(n)}}{\xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)} + \ldots + \xi_2^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

сходится по распределению к a_1/a_2, если либо а) $D^{(i)}_{\xi_1^{(i)}} < < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Ч-4.37

В последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайная величина ξ_n при любом $n = 1, 2, \ldots$ имеет геометрическое расщределение с параметром q_n, $q_n \to 0 \quad (n \to \infty)$. Найти предельное расщределевие случайных вежичин

$$\xi_n = q_n \xi_n \text{ шри } n \to \infty.$$

Ч-4.39

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $a > 0$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$, случайная величина v не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и пршиимает целые положительные значения, $Mv = b$ и

$$\tau = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\text{v}}..$$

Найти Мт и предельное распределение случайной величины $\tau/(M\tau)$, когда распределение v измепяется так, тто Mv $\to \infty$ я существует нешрерывная функция распределения $F(x)$, удовлетворяющая условцям $F(0) = 0$,

$$\lim \mathrm{P}\left\{\frac{v}{Mv} \leqslant x\right\} = F(x), \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Ч-4.40

Время & безотказной работы прибора имеет математическое ожидание $a > 0$ и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. Каждый отказ прибора независимо от предыстории и длин Периодов безотказной работы с вероятностыо p является несущественным (прибор требует только наладки), а с вероятностью $q = 1 - p-$ существенным (прибор нужно ремонтировать). Пусть τ_q-время от начала работы прибора до его ремонта.

а) Найті $M\tau_q, D\tau_q$.

б) Найти предельное распределение стучайной величины $\tau_q/M\tau_q$, когда параметры $a > 0$ и $\sigma^2 < \infty$ фиксированы, а $q \to 0$.

Ч-4.44

В бункер помещается не более $N = 150$ деталей. Ежеминутно в бункер поступает случайное число деталей, имеющее распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$; числа деталей, поступающих в бункер в непересекающиеся интервалы времени, независимы. Через каждый час все находящиеся в буикере детали перегружаются в тележку и отправлиются на дальнейпую обработку. В патальный момент времепи бункер свободен. ПольЗуясь предельными теоремами, указать приближенное значение вероятности того, что 3 время $T = 100$ часов не произойдет ни одното переполненпя бупкера.

Ч-4.45

Показать, что если последовательность случайных велитин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится $\kappa\ \xi$ с вероятностью 1 пли в среднем квадратитном, то опа сходится по вероятности и по распределению. Привести пример последовательшости $\xi_1, \xi_2, \ldots$, сходящейся $\kappa\ \xi$ по вероятиости, по не сходящейся ни в среднем квадратичном, ни с вероятностьо 1.

Ч-4.46

Последователность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, сходится $\kappa\ \xi$ по распределению. Показать, что можно задать на одном вероятностном пространстве слу122 чайиые величины $\xi_1', \xi_2' \ldots$ и ξ' так, что для всех x

$$\mathrm{P}_1\{\xi' \leqslant x\} = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}, \quad \mathrm{P}\{\xi_n' \leqslant x\} = \mathrm{P}\{\xi_n \leqslant x\}_,$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

и последовательность $\xi_1', \xi_2', \ldots$ сходится (??) с вероятностью 1.

Ч-4.48

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных велічин удовлетворяет условиям $\mathrm{P}\left\{\xi_{n+1} \geqslant \xi_n\right\} = 1$ для любого $n = 1, 2, \ldots$.

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = a < \infty.$$

Доказать, что существует случайная величина ξ, для которой

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1.$$

Верно ли равенство $\xi = a$?

Ч-4.49

Последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$ на отрезке $[0,1]$ строится по следующему правилу: ξ_1 имеет равномерное распределение на $[0,1]$, и если знатепия $\xi_1, \ldots \ldots, \xi_{h-1} (k \geqslant 2)$ ошределены, то точка ξ_h имеет равномерное распределение на минимальном по длпне из k отрезков, на которые $[0,1]$ разбивается точками $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$.

а) Доказать, что существует случайная величина ξ, удовлетворяющая условию $\mathrm{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1$. 6) Найти $M\xi, D\xi$.

Ч-4.50

Последовательность точек $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ па отрезке $[0,1]$ строится по следующему правилу: $\xi_0 = 0, \xi_1$ имеет равномерное распределение на $\{0,1]$, а ξn при любом $n \geqslant 2$ имеет равномерное распределение на интервале, образованпом ξ_{n-1} и ξ_{n-2}.

а) Доказать, что сушествует случайная величина ξ, удовтетворяющая условию $P\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1$.

б) Найти $M\xi$, D.

Ч-4.51

*. Последовательность случайных величин ξ, $\xi_2, \ldots$, последовательности чисел $\{a_n\}, \{b_n\}$ и случайная величина ξ удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad |a| < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \mathrm{P}\{|\xi| < \infty\} = 1_k$$

$$\lim_{d^{n\to\infty}} \mathrm{P}\left\{\frac{\xi_n - a_n}{b_n} \leqslant x\right\} = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$$

в каждой точке непрерывности функдии $F(x) = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$. Функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки а и $g'() \neq 0$. Доказать, что в каждой тотке непрерывности $F(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{g\left(\xi_n\right) - g\left(a_n\right)}{b_n g'\left(a_n\right)} \leqslant x\right\} = F(x).$$

Ч-4.52

Последовательность случайных величин ξ, $\xi_2, \ldots$, последовательности тисел $\{a_n\}, \{b_n\}$ и случайная величина ξ удовлетворяют тем же условпям, что в задаче n4.51. Фунгдия $g(x)$ имеет $k \geqslant 2$ непрерывных производных в окрестности точки и

$$g'(a) = g''(a) = \ldots = g^{(k-1)}(a) = 0, \quad g^{(k)}() \neq 0.$$

оказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{g\left(\xi_n\right) - g\left(a_n\right)}{b_n^k g^{(k)}\left(a_n\right)} \leqslant x\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi^k \leqslant x\right\}$$

в каждой точке непрерывности функдии $F_k(x) = \mathrm{P}\left\{\xi^h \leqslant x\right\}$.

Ч-4.53

Случайная величина μ_{n} равна числу успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью усuеха $p, 0 < p < 1$

а) Найти $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{(\mu_n - np)^2}{np(1-p)} \leqslant x\right\}$.

6) Пусть $0 < z < 1, z \neq$ р. Найти такие последовательности чисел $A_n(z)$ и $B_n(z), n = 1, 2, \ldots$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\left(\mu_n - ns\right)^2 - A_n(z)}{B_n(x)} \leqslant x\right\} = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Ч-4.54

". Случайная величина μ_n равна числу успехов в n независимых испытаниях Бернујлиє с вероятностью 124 успеха p; функция $g(x)$ определяется соотношениями

$$g(x) = \begin{cases} x\ln x + (1-x)\ln(1-x)_y & 0 < x < 1, \\ 0, \quad x = 0 \text{ или } x = 1. \end{cases}$$

а) При $p = 1/2$ найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{n\left(g\left(\frac{\mu_n}{n}\right) + \ln 2\right) \leqslant x\right\}_{\leftarrow} \qquad x \geqslant 0.$$

б) При $0 < p < 1, p \neq 1/2$, указать такую последовательность $B_n(p), n = 1, 2, \ldots$ что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{B_n(p)\left(g\left(\frac{\mu_n}{n}\right) - g(p)\right) \leqslant x\right\} = \Phi(x)_x$$
$$-\infty < x < \infty.$$

4.5.3 Задачи на Характеристические и производящие функции

В этом параграфе задачи n4.58-n4.83 свнзаны с вытислением производящих функций, моментов случайных величин и характеристических функций, в задачах n4.84-n4.99 рассматриваются различные свойства характерштических функцй, а в задачах n4.100-n4.104 вычисляются характеристические функции специальных распределений и иссяедуются свойства многомерного нормальтого распределения.

Ч-4.58

Найти производящие функции целотисленшых расшределений:
а) пуассоновского: $\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ 0 < \lambda < \infty$
б) геометрического: $\mathrm{P}\{\xi = k\} = pq^k, k = 0, 1, 2, \ldots; p, q > 0, p + q = 1;$
в) биномиального: $\mathrm{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-h}, k = 0, 1, \ldots \ldots, n; p, q > 0, p + q = 1.$

Ч-4.59

Найти производящуго функцию $\varphi(z)$ тисла ξ_n успехов в n независимых испытаниях, если вероятность успеха в каждом испытаниц равна p. Используя этот результат, найти формулы для $M\xi_n, \quad \mathrm{M}_n^{[k]}(k = 1, 2, \ldots),$

Ч-4.60

Производящая функция распределения случайной величины ξ, принимающей делые неотридательные значения, равна $\varphi(z) = Mz^{\mathrm{i}}$.
а) Найти $M\xi, D\xi, M(\xi - M\xi)^3$.
б) Найти производящие функции $\varphi_i(z) = Mz^{t_i}$ случайпых величин $\zeta_1 = \xi/2, \zeta_2 = 2\xi, \zeta_3 = -\xi$ и $\zeta_4 = \xi_1 - \xi_2$
где ξ_1 и ξ_2 - независумые случайные величины, имеющие то же распределение, что ξ.
в) Доказать, что при $b > a > 0$

$$M\frac{1}{\xi + a} = \int_0^1 z^{a-1}\varphi(z)dz_1$$
$$M\frac{1}{(\xi + a)\left(\frac{\xi}{\xi} + b\right)} = \int_0^1 z^{b-a-1}\int_0^1 u^{a-1}\varphi(u)dudz.$$

Ч-4.61

Пусть τ_1- порядковый номер первого из испытаний схемы Бернулли (т. е. последовательности невависимых испытаний), которое окончилось успехом „вероятность успеха в каждом испытании равна p, неудачи $-q = 1 - p$). Найти $M\tau_1, D\tau_1, Mz^{\tau 1}$.

Ч-4.62

В схеме Вернулли обозначим через θ_k порядковый номер испытания, в котором полвился k-й успех; считая вероятность успеха в каждом испытании равной p, найти: 1) $M\theta_k, D\theta_n$; 2) $\varphi_{\theta_k}(z) = Mz^{\theta_k}$.

Ч-4.63

Закон распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$P\{\xi = n\} = C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m} \quad n = m, m + 1_2 \ldots,$$

где m-делое положительное число, $0 < p < 1$, $\quad q = = 1 - p$. Найти производящую функцию распределения распределением суммы m независимых одинаково распределенных случайиых величин.

Ч-4.66

Производящая фуукция совместного распределения величии ξ, $\xi 2$ равна

$$\varphi_{S_1}, \xi_2(z) = e^{\lambda(p_1 z_i + p_2 z_2 + p_3 z_1 z_2 - 1)*}$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3$. Найти:
а) одномерные распределения ξ и ξ_2;
б) $M\xi_1, M\xi_2, D\xi_1, D\xi_2, \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$. Являются ли величины $\xi\ _1$ и ξ_2 независимыми?

Ч-4.67

Целочисленная неотрицательная случайная ветичина & имеет производящую функцию $\varphi_{\Xi}(z)$. Доказать, что если для целого $k \geqslant 1$

$$\lim_{u \uparrow 1} \frac{d^k}{dz^k} \varphi_{\underline{b}}(z) \bigg|_{z=u} = m_k < \infty$$

то $M\xi^{[k]} = M\xi(\xi - 1) \ldots (\xi - k + 1) = m_k$.

Ч-4.68

Пусть $\xi_{n,i}$ - число появлений i-го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами и вероятностью p_j появления j-го игсода в каждом ис пытании $(j = 1, \ldots, N)$. Найти
а) $\varphi(z_1, \ldots, z_N) = M z_1^{{}^n n,1} \ldots z_N^{b_{n,N}}$,

Ч-4.69

Пусть выполнены условия шредыдущей эадачй и $N = 4$,

$$\eta_{n,1} = \xi_{n,1}, \quad \eta_{n,2} = \xi_{n,2} + \xi_{n,3}, \quad \eta_{n,3} = \xi_{n,4},$$
$$\xi_{n,i} = \xi_{n,1} + \xi_{n,i+1} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Найти производящие функции распределениї векторов $(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \eta_{n,3}), (\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \zeta_{n,3})$ и коэффициенты корретяции $\rho(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}), \rho(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2})$.

Ч-4.73

Найти характеристические функции распределений:
а) пуассоповского: $P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, m = 0, 1, \ldots$;
б) биномиального: $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, \ldots, n$;
в) показательного: $p_{\mathbf{4}}(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x > 0$.

Ч-4.74

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α :

$$P\{\xi_i \leqslant x\} = 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Найтпт $M(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^n$ при любых значениях $k, n = = 1, 2, \cdots$

Ч-4.75

Случайные величины $\xi 1, \xi_2, \ldots$ незавпсимы, одинаково распределены и имеют характеристическую функцию $f(t) = Me^{it_1}$ (производящую функцию $\varphi(s) = = \mathrm{Ms}^{\xi_1}\Big)$, случайная величина v не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ принимает тольго пелые неотрицательпые значения и имеет производящую функцию $g(s) = Ms^2$. Найти характеристическую функцию (производящую функдию) случайшой величины

$$\xi = \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_v \text{ при } v \geqslant 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{при } v = 0 \end{cases}$$

Ч-4.76

Производящая функция распределения случайной величины ξ_1 принимающей делые неотридательные значения, равна $\varphi(z) = Mz^{\mathrm{t}}$. Выяснить, при каких условиях следующие выражения являются производящими Функциями вероятностных распределеиий, и если являются, то указать, гак соответствуюшие распределения связаны с распределеншем ξ :

а) $\psi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(1)^r}$ б) $\psi(z) = \frac{1-\varphi(z)}{\varphi'(1)(1-z)^*}$

в) $\psi(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\varphi(z)}$ r) $\psi(z) = 1 - \frac{\ln\varphi(z)}{\ln\varphi(0)^s}$

а) $\psi(z) = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1-\alpha\varphi(z)}}$

Ч-4.80

Случайные величины ξ, $\xi 2$, „„ ξ независимы, Доказать, что для любого действительного λ, удовлетворяющего условиям

$$Me^{\lambda\epsilon_i} < \infty_s \quad t = 1, \ldots, n_\varepsilon$$

справедливо равенство

$$Me^{\lambda(\mathrm{s}_1 + \cdots s + l_n)} = \prod_{\hat{j}=1}^{n} Me^{\lambda\hat{s}_i}.$$

Ч-4.81

Случайная величина уринимает дейотвитель ные яначения. Докавать, что для любоге действительного x

$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant \inf_{\lambda>0} e^{-\lambda xM} e^{\lambda\varepsilon_i}$$

$$P\{\xi \leqslant x\} \leqslant \inf_{\lambda>0} e^{\lambda xM} e^{-\lambda A_0}$$

Ч-4.88

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $\left(0, \sigma^2\right)$. Установив тождество

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx^2} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{1-2h\sigma^2}}, \quad h < \frac{1}{2\sigma^2},$$

$\eta = \xi e^{h\xi^2}$.

Ч-4.89

Функция $f(t), -\infty < t < \infty$, обладает следующими свойствами:

а) $f(0) = 1, f(t) \geqslant 0$ для любого t; б) $f(t) = f(-t)$ для любого t;

в) графиком $f(t), 0 \leqslant t < \infty$, является выпуклая вниз ломаная линия, состоящая из конечного qисла ввеньев. Явлнется ли $f(t)$ характеристической функцией распределения вероятностей?

Ч-4.90

Функдия $f(t), -\infty < t < \infty$, обладает следующими свойствами: $f(0) = 1, f(t) \geqslant 0, f(t) = f(-t)$ для любого $t, f(t)$ непрерывна и $f''(t) \geqslant 0$ для любого $t \neq 0$. Является ли $f(t)$ характеристической функдией распределения вероятностей?

Ч-4.91

Пусть $a > 0$ и функция $f_1(t)$ имеет период 4 а,

$$f_1(t) = 1 - \frac{|t|}{a}, \quad |t| \leqslant 2a.$$

а) Является ли $f_1(t)$ характеристической функдией?

б) Является ли характеристической функцией функция $f_2(t) = |f_1(t)|$?

Ч-4.92

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_k (k > 1)$ незавнсимы и имеют функдию распределения $F(x)$, случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_k$ независимы и имеют функцию расшределения $G(x)$. Следует ли из устовия

$$\mathrm{P}\left\{\xi_1 + \ldots + \xi_k \leqslant x\right\} = \mathrm{P}\left\{\eta_1 + \ldots + \eta_k \leqslant x\right\}$$

для каждого x совпадение функций распределения $F(x)$ и $G(x)$?

Ч-4.96

*. Характеристическая функдия $f(t) = \mathrm{M}\ e^{\mathrm{its}}$ удовлетворяет условию $|f''(0)| < \infty$. Показать, что

$$M\xi^2 = -f''(0).$$

Ч-4.97

Показать, что если характеристическая функция $f(t) = Me^{it?}$ дважды дифференцируема при $t = 0$ я $|f''(0)| < \infty$, то $|f'(t)| < \sqrt{|f''(0)|}$ при любом t.

Ч-4.9

8. Являются ли характеристичесгими фудкциями вероятностпых распределений следующие функции:
а) $e^{2\left(e^{it}-1\right)}$;
д) $|\cos t|^{2/s}$; 6) $\cos\left(t^2\right)$ е) $\frac{\sin t}{t}(t \neq 0), \quad 1 \quad (t = 0)$; В) $\cos^2 t$ ж) $e^{-2t}(t \geqslant 0), \frac{1}{1+t^2} \quad (t \leqslant 0)$; г) $\cos\left(|t|^{2/3}\right)$; 3) $e^{-|t!}$
?

Ч-4.99

Найти математическое ожидание и диспюрсию случайной величины ξ, характеристическая фуниция $f(t) = Me^{it\gtrless}$ которой равна:
а) $\frac{1}{at}\sin at \quad (a \neq 0)$,
б) $\frac{4}{t^2}\cos t \sin^2\frac{t}{2}$, В) $\frac{4}{t^2}e^{it}\sin^2\frac{t}{2}$, г) $\sqrt{2}e^{-a|t|/2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a|t|}{\sqrt{2}}\right) \quad (a > 0)$,

Ч-4.10

1. Исходя из формулы для плотности гамма-распредетения (см. введения к гл. 3 и 4), проверить, что если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 имеет гамма-распределение с параметром α, а ξ_2 - гамма-распределение с параметром β, то $\xi_1 + \xi_2$ имеет гамма-распределение с параметром $\alpha + \beta$. Используя это свойство семейства гамма-распределений, найти характеристическую функцию $f_a(t)$ и формулы для моментов $m_\alpha^{(\kappa)}(k = 1, 2, \ldots)k$-го порядка гамма-распределепия с параметром $\alpha > 0$.

Ч-4.10

2. Случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^h с вектором математических ожиданий $a = (a_1, \ldots, a_\frown)$ и матрицей ковариаций B. Найти распределение случайной- величины

$$\zeta = c_1\xi_1 + \ldots + c_k\xi_k,$$

где $c_1, \ldots, c_k$ - дейєтвительные числа.

Ч-4.10

3. Случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_\mathrm{f}\ )$ имеет многомерпое нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и матрицей ковариаций B; матрица $C = c_{ij}\|!(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots$ $\ldots, k)$ состоит из действительных чисел. Найти распределение слугайного вектора $(\xi_1, \ldots, \zeta_m)$, где

$$\xi_i = c_{i1}\xi_1 + \ldots + c_{ik}\xi_h, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ч-4.104

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и певырожденной матрицей ковариаций B. Показать, что существует такое ортогональное преобразование C пространства R^k в себя, что вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k) = C\xi$ имеет многомерное нормальное распределение с независимыми компонентами.

МФТИ-Т.9

Найти характеристическую функцию распределения Лапласа, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

$$\phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) f_\xi(x) d(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx - |x|) d(x)$$

$x < 0$

$$\int_{-\infty}^{0} \exp(itx - |x|) d(x) = \int_{-\infty}^{0} \exp(itx + x) d(x) = \frac{i}{i-t}$$

$x \geq 0$

$$\int_{0}^{+\infty} \exp(itx - |x|) d(x) = \int_{0}^{+\infty} \exp(itx - x) d(x) = \frac{i}{i+t}$$

$$\phi_\xi(t) = \frac{-1}{(-1-t^2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

МФТИ-Т.10

Найти характеристическую функцию нормального распределения с параметрами $\left(a, \sigma^2\right)$

$$\phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\tfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) d(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(itx - \tfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) d(x) =$$

1

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(ita + \left(\tfrac{it\sqrt{2}\sigma}{2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2} + 2\tfrac{it\sqrt{2}\sigma}{2}\tfrac{(x-a)}{\sqrt{2}\sigma} - \left(\tfrac{it\sqrt{2}\sigma}{2}\right)^2\right) d(x) =$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(ita + \left(\tfrac{it\sqrt{2}\sigma}{2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\tfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} - \tfrac{it\sqrt{2}\sigma}{2}\right)^2\right) d(x) =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(ita + \left(\tfrac{it\sqrt{2}\sigma}{2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\tfrac{x-a-it\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right) d(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp\left(ita - \tfrac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

МФТИ-Т.11

Найти распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$h_1(t) = \cos t; \quad h_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad h_3(t) = \frac{1}{2 - e^{-it}}$$

для первой:

$$h_1(t) = \cos(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} \to f_1(x) = \frac{1}{2}I(x=1) + \frac{1}{2}I(x=-1)$$

Для второй:

$$h_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(t)}{2} + i\frac{\sin(t)}{6} = \frac{1}{2}\exp(it \cdot 0) + \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{4} + i\frac{\exp(it) - \exp(-it)}{12}$$

поэтому

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x+1) + i\frac{1}{12}\delta(x-1) - i\frac{1}{12}\delta(x+1)$$

для третьей:

$$h_3(t) = \frac{1}{2 - \exp(-it)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\exp(-it)}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\exp(itn)}{2^{n+1}}\right)$$

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} I(x=n)\right)$$

МФТИ-Т.12 распределение, у которого хар функция $h(t) = e^{-t^2}\cos t$

Найти распределение, которому соответствует характеристическая функция $h(t) = e^{-t^2}\cos t$
(!?!?! просто посчитать интеграл?? мб потом упрощу вычисления??!)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\cos(t)\exp(-itx)d(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-t^2 - itx + it\right) + \exp\left(-t^2 - itx - it\right)}{2} d(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-t^2 - it(x-1)\right) + \exp\left(-t^2 - it(x+1)\right)}{2} d(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-t^2 - 2t\frac{x-1}{2}i - \left(\frac{x-1}{2}i\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}i\right)^2\right) + \exp\left(-t^2 - 2t\frac{x+1}{2}i - \left(\frac{x+1}{2}i\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}i\right)^2\right)}{2} d(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\left(t + \frac{x-1}{2}i\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}i\right)^2\right) + \exp\left(-\left(t + \frac{x+1}{2}i\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}i\right)^2\right)}{2} d(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\left(t + \frac{x-1}{2}i\right)^2\right)\exp\left(\left(\frac{x-1}{2}i\right)^2\right) + \exp\left(-\left(t + \frac{x+1}{2}i\right)^2\right)\exp\left(\left(\frac{x+1}{2}i\right)^2\right)}{2} d(t) = \\
&= \sqrt{\pi}\frac{\exp\left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right) + \exp\left(-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)}{2}
\end{aligned}$$

Вот такому распределению.

МФТИ-Т.13 Характеристическая ли $h(t) = \cos t^2$

Является ли функция $h(t) = \cos t^2$ характеристической?

$\cos\left(t^2\right)$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, а следовательно, и не может быть характеристической функцией.

Докажем это.

Нужно доказать, что

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists t_1, t_2\, |t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow \left|\cos\left(t_2^2\right) - \cos\left(t_1^2\right)\right| \geq \epsilon$$

Найлём решения уравнения $\cos\left(t^2\right) = 1:$

$$t^2 = 2\pi n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Найдём решения уравнения $\cos\left(t^2\right) = -1:$

$$t^2 = 2\pi n - \pi, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Пусть } t_1 = \sqrt{2\pi n}, t_2 = \sqrt{2\pi n - \pi}.\text{МФТИ-Тогда } \left|\cos\left(t_2^2\right) - \cos\left(t_1^2\right)\right| = 2 = \epsilon$$

$$|t_2 - t_1| = |\sqrt{2\pi n} - \sqrt{2\pi n - \pi}| = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n - \pi}} < \sqrt{\frac{\pi}{n}} \to n > \frac{\pi}{\delta^2} \to$$

$$\exists \epsilon = 2 : \forall \delta > 0 \exists t_1 = \sqrt{2\pi n}, t_2 = \sqrt{2\pi n - \pi}, n > \frac{\pi}{\delta^2}, |t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow \left|\cos\left(t_2^2\right) - \cos\left(t_1^2\right)\right| \geq \epsilon$$

Доказали.

МФТИ-Т.14 Предел среднего от хар функции (!??!)

Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$$

Рассмотрим, к чему стремится характеристическая функция случайной величины $\eta = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

$$\phi_\eta(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left(it\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \exp(-it\sqrt{\lambda})\mathbb{E}\left(\exp\left(it\frac{\xi_\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) =$$
$$= \exp(-it\sqrt{\lambda})\exp\left(\lambda\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1\right)\right) = \exp\left(-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1\right)\right)$$

И предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\phi_\eta(t) = \lim_{\lambda\to+\infty}\exp\left(-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1\right)\right) =$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\exp\left(-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right) - 1\right)\right) =$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\exp\left(-it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda}t^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right)\right)\right)$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right)\right) = \int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)d(t) = \Phi(x)$$

МФТИ-Т.15

Используя результат предыдущей задачи, найти предел

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=n}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

Так как

$$\Phi(x) = \lim_{\lambda\to+\infty}P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right) = \lim_{\lambda\to+\infty}P\left(\xi_\lambda \le \sqrt{\lambda}x + \lambda\right) =$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\exp(-\lambda)\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}x+\lambda\rfloor}\left(\frac{\lambda^k}{(k)!}\right)\right] = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\exp(-\lambda)\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda\rfloor}\frac{\lambda^k}{(k)!} + \sum_{k=\lfloor\lambda\rfloor+1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}x+\lambda\rfloor}\frac{\lambda^k}{(k)!}\right)\right]$$

Теперь рассмотрим случай $\lambda \in \mathbb{N}$:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n^k}{(k)!}\right) + \sum_{k=n+1}^{\lfloor\sqrt{n}x+n\rfloor}\frac{n^k}{(k)!}\right)\right)$$

$$\Phi(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[\exp(-n)\sum_{k=n+1}^{\lfloor\sqrt{n}x+n\rfloor}\left(\frac{n^k}{(k)!}\right)\right] + \lim_{n\to+\infty}\left[\exp(-n)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n^k}{(k)!}\right)\right]$$

Возьмём теперь предел $x \to +\infty$:

$$\Phi(+\infty) = 1 = \lim_{n\to+\infty}\left(\exp(-n)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n^k}{(k)!}\right)\right)$$

МФТИ-Т.16.

Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$ $m = 1, 2, \ldots, n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}, x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum_{m=1}^{n}\xi_{m,n}$

$$f(x) = \alpha_n\exp\left(-\alpha_n x\right) = \lambda n\exp(-\lambda n x)$$

Найдём характеристическую функцию случайной величины $\xi_{m,n}$:

$$\phi_{\xi_{m,n}}(t) = \mathbb{E}(\exp(itx)) = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda n \exp(-\lambda n x)\exp(itx)d(x) = \lambda n \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-\lambda n x)\exp(itx)d(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \lambda n \exp(-\lambda n x)\exp(itx)d(x) = -\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial(x)}(\exp(-\lambda n x))\exp(itx)d(x) =$$

$$= it\int_{\mathbb{R}^+} \exp(-\lambda n x)\exp(itx)d(x) - (\exp(-\lambda n x)\exp(itx))|_{x=0}^{x\to+\infty} = it\int_{\mathbb{R}^+} \exp(-\lambda n x)\exp(itx)d(x) + 1 \to$$

$$\to \phi_{\xi_{m,n}}(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda n \exp(-\lambda n x)\exp(itx)d(x) = \frac{\lambda n}{\lambda n - it} = 1 - \frac{it}{it - \lambda n}$$

Найдём предел характеристических функций:

$$\phi(t) = \lim_{n\to+\infty}\left(\phi_{\sum_{m=1}^{n}(\xi_{m,n})}(t)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1 - \frac{1}{1-\frac{\lambda n}{it}}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{1-\frac{\lambda n}{it}}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{it}}\right)\right) = \exp\left(\frac{it}{\lambda}\right)$$

$$f(x) = I\left(x = \frac{1}{\lambda}\right)$$

4.5.4 Задачи на Неравенства Бонферропи и сходимость к распределению Пуассона (???)

(вообще хз)

Ч-4.105

Случайные величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы, $\mathrm{P} \mid \xi_k^{(n)} = 1\Big\} = 1 - \mathrm{P} \mid \xi_k^{(n)} = 0\Big\} = p_k(n), \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть при $n \to \infty$ $\max_{1<k\leqslant n} p_k(n) \to 0, \quad p_1(n) + \ldots + p_n(n) \to \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty$.

Используя метод производящих функций, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)} = m\right\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

ФР ВШЭ

1. Стрельба по цели ведется до тех пор, пока суммарное число попаданий не достигнет N. Найдите математическое ожидание, дисперсию, а также функцию распределения вероятностей потребовавшегося числа выстрелов k, если выстрелы производятся независимо друг от друга и вероятность попадания в отдельной попытке равна p.

(!! тут вообще жесткие задачи, про них почти не думал, потом подумаю.)

Число выстрелов, требуемое чтобы получить N попаданий можно представить в виде суммы $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_N$, где k_n - это число выстрелов которое потребовалось для достижения n-го попадания, если отсчитывать от предыдущего попадания (или от начала стрельбы, если речь идет об $n = 1$). В силу отсутствия памяти о процесса Бернулли слагаемые статистически независимы. Каждое из них при этом имеет геометрическую функцию распределения вероятностей, заданную формулой (4). Воспользовавшись результатами, изложенными на третьей лекции и уравнением (5) и (7), запишем для случая произвольной вероятности p успеха в отдельном испытании

$$\mu_k = N\mu_{k_1} = \frac{N}{p},$$

$$\sigma_k^2 = N\sigma_{k_1}^2 = N\frac{1-p}{p^2}.$$

Чтобы получить функцию распределения вероятностей $p(k)$ нужно умножить вероятность получить ровно $N-1$ попаданий в серии из первых $k-1$ выстрелов на вероятность попадания в $k -$ m исходе, то есть

$$p(k) = pB(N-1, k-1, p) = \frac{(k-1)!}{(N-1)!(k-N)!}p^N(1-p)^{k-N}$$

Этот результат известен как распределение Паскаля.

ФР ВШЭ

2. Найти среднее число бросков симметричной монетки необходимое чтобы каждая ее сторона выпала хотя бы два раза.

Подбросим монетку три раза. С вероятностью $1/4$ все три исхода будут одинаковы, и тогда среднее оставшееся число попыток, требуемое для накопления двух недостающих исходов, равно $2+2=4$. С вероятностью $3/4$ не все исходы первых трех попыток одинаковы, и тогда, чтобы получить недостающий исход второй раз, в среднем придется подбросить монетку еще 2 раза. В итоге получаем, что среднее число бросков симметричной монетки необходимое чтобы каждая ее сторона выпала хотя бы два раза равно

$$\frac{1}{4}(3+4)+\frac{3}{4}(3+2)=\frac{22}{4}=5.5$$

ФР ВШЭ

3. Симметричный игральный кубик подбрасывают раз за разом. Найти среднее число попыток $\langle k\rangle$, необходимое, чтобы каждая из шести граней выпала хотя бы один раз. Найти также дисперсию требуемого числа попыток.

Обозначим через $k(p)$ число попыток, требуемых, чтобы в серии испытаний Бернулли впервые выпала единица, если вероятность получить единицу в отдельном испытании равна p. На каждом шаге случайного эксперимента с кубиком пространство элементарных исходов можно разделить на две группы: те исходы, которые уже выпадали, и те, что еще не выпадали. Каждый раз, когда в очередном исходе будет выпадать еще не наблюдавшаяся грань кубика, будем добавлять ее к списку уже произошедших исходов, и, соответственно, уменьшать на единицу количество исходом в группе еще ни разу не выпадавших. Тогда, если в текущий момент первая группа состоит из m исходов (неважно каких именно), то в следующем 6роске с вероятностью $(6-m)/6$ выпадет еще не наблюдавшийся исход, а с вероятностью $m/6$ повторится один из уже нам встречавшихся. Из сказанного становится ясным, что случайную величину k, математическим ожиданием которой мы интересуемся, можно представить в виде суммы

$$k=1+k_1\left(\frac{5}{6}\right)+k_1\left(\frac{2}{3}\right)+k_1\left(\frac{1}{2}\right)+k_1\left(\frac{1}{3}\right)+k_1\left(\frac{1}{6}\right)$$

где $k_1(p)$ - это время появления первой единицы в серии испытаний Бернулли с вероятностью получить единицу в отдельном исходе равной p. Усредняя, получаем

$$\langle k\rangle=1+\left\langle k_1\left(\frac{5}{6}\right)\right\rangle+\left\langle k_1\left(\frac{2}{3}\right)\right\rangle+\left\langle k_1\left(\frac{1}{2}\right)\right\rangle+\left\langle k_1\left(\frac{1}{3}\right)\right\rangle+\left\langle k_1\left(\frac{1}{6}\right)\right\rangle=14,7$$

где мы использовали Ур. (5).

ФР ВШЭ

4. Сколько в среднем раз необходимо подбросить симметричную монетку, чтобы впервые встретить в последовательности исходов реализацию вида "орел, решка"?

Для соответствующей случайной величины справедливо

$$k=k_1^{\circ}+k_1^{\mathbf{p}},$$

а значит

$$\langle k\rangle=\langle k_1^{\mathbf{o}}\rangle+\langle k_1^{\mathbf{p}}\rangle=\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p(1-p)}.$$

В частности, для симметричной монетки находим, что для появления пары "орел, решка"необходимо в среднем подкинуть монетку $\langle k\rangle=4$ раз. Отметим, что среднее число попыток, необходимое для появления пары "орел,орел"равно 6.

ФР ВШЭ

5. Сколько в среднем раз необходимо подбросить симметричную монетку, чтобы впервые встретить в последовательности исходов реализацию вида "десять орлов подряд"?

Для ответа на поставленный вопрос, рассмотрим схему Бернулли, где единица соответствует выпадению орла, а ноль - выпадению решки. Будем решать задачу в общем случае, когда вероятность выпадения единицы в отдельном испытании равна p, и речь идет об ожидании цепочки исходов из N единиц подряд. Количество попыток, требуемое для реализации первой такой цепочки обозначим через k. Каждая последовательность независимых повторений эксперимента Бернулли характеризуется некоторым количеством нулей, выпавших до первого появления единицы, и количеством единиц, выпавших подряд сразу вслед за этим. Если число идущих подряд единиц в первой встретившейся цепочке единиц меньше чем N, то можно считать, что процесс ожидания цепочки из N единиц подряд начинается заново в том смысле, что оставшееся число попыток k' необходимое для выпадения N единиц подряд имеет ту же статистику, что и k. Сказанное может быть записано в форме уравнения

$$k = k_1^{\mathbf{o}} + (N-1)\cdot I\left(k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right) + \left(k_1^{\mathbf{p}} + k'\right) I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)$$

где нами были введены следующие обозначения: k_1° - номер попытки в цепочке независимых испытаний Бернулли, когда впервые выпадает; единица, k_1^{P} - номер попытки в цепочке независимых испытаний Бернулли, когда впервые выпадает ноль, k' - независимая реализация случайной величины k, $I(\ldots)$ - индикаторная функция. Рекурсивное соотношение (43) представляет собой пример того, что называется уравнением обновления.

Произведем статистическое усреднение

$$\langle k\rangle = \langle k_1^{\mathbf{o}}\rangle + (N-1)\cdot\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right)\right\rangle + \left\langle k_1^{\mathbf{p}} I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle + \left\langle k' I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle .$$

Словом, мы приравняли друг другу математические ожидания левой и парвой частей Ур. (43). В силу отсутствия памяти у процесса Бернулли, $k_1^{\mathbf{p}}$ и k' это статистически независимые случайные величины, а значит $\left\langle k' I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle = \langle k'\rangle \left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle = \langle k\rangle \left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle$, и мы можем переписать

$$\langle k\rangle = \langle k_1^{\mathbf{o}}\rangle + (N-1)\cdot\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right)\right\rangle + \left\langle k_1^{\mathbf{p}} I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle + \langle k\rangle\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle$$

Решая это уравнение относительно $\langle k\rangle$, находим

$$\langle k\rangle = N - 1 + \frac{\left\langle k_1^{\mathbf{0}}\right\rangle + \left\langle k_1^{\mathbf{p}} I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle}{\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right)\right\rangle}$$

Остается лишь вычислить средние значения, входящие в правую часть полученного выражения.

Вспомним, что статистика случайных величин k_1° и $k_1^{\mathbf{p}}$ описывается геометрическими функциями распределения вероятностей, $P_{\mathbf{o}}\left(k_1^{\circ}\right) = p(1-p)^{k_1^{\circ}-1}$ и $P_{\mathbf{p}}\left(k_1^{\mathbf{P}}\right) = (1-p)p^{k_1^{\mathbf{P}}-1}$(см Ур. (4)). Значит

$$\left\langle I\left(k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right)\right\rangle = \operatorname{Prob}\left[k_1^{\mathbf{p}} > N-1\right] = \sum_{k_1^{\mathbf{p}}=N}^{\infty} (1-p)p^{k_1^{\mathbf{p}}-1} = p^{N-1},$$

$$\left\langle k_1^{\mathbf{p}} I\left(k_1^{\mathbf{p}} \le N-1\right)\right\rangle = \sum_{k_1^{\mathbf{p}}=1}^{N-1} k_1^{\mathbf{p}}(1-p)p^{k_1^{\mathbf{p}}-1} = \frac{1+(N-1)p^N - N^{N-1}}{1-p}.$$

Подстановка этих формул в Ур. (46) дает финальный ответ к задаче

$$\langle k\rangle = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{p^N} - 1\right).$$

В частности, для симметричной монетки ($p = 1/2$) имеем $\langle k\rangle = 2^{N+1} - 2$. То есть, чтобы встретить десять орлов подряд придется подбросить монетку (в среднем) $2^{11} - 2 = 2046$ раз.

ФР ВШЭ

6. Крупные метеориты падают на Землю в пуассоновские моменты времени с рейтом λ. Обозначим через t_n время ожидания падения n-го по счету метеорита, отсчитываемое от произвольно выбранного момента начала наблюдений. Какова функция плотности вероятности случайной величины t_n ?

(черновик от другого решателя)

$$P\left(T > t_n\right) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} : (\lambda t)^k}{k!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_n \neq H = P\left(T \le t_n\right) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-H}(\lambda t)^k}{k!}$$

$$f_n(t) = F_n(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\cdot t^k\right) =$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k k}{k!}\left(-\lambda e^{-kt}\cdot f^k + k e^{-\lambda t}\cdot t^{k-1}\right) = \lambda e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{14k}{k!} - e^{-\lambda t}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\lambda t}{(k-1)!} =$$

(тут кривая копия, много не так взял матпикс)

$$= \lambda e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\Delta t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(a+)^{k-1}}{k!}\Bigg) = \frac{\lambda^n\cdot t^{n-1}\cdot e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

ФР ВШЭ

7. В области полностью ионизированного водорода начинает происходить рекомбинация электронов с ионами, в результате чего газ постепенно деионизируется. Вероятность того, что электрон рекомбинируется за время dt равна $\rho(t)\beta dt$, где $\rho(t)$ это концентрация ионов в текущий момент времени t, а β - некоторый постоянный коэффициент, характеризующий акт рекомбинации. Известно, что концентрация ионов в начальный момент времени равна ρ_0, а система в целом электронейтральна. Найдите плотность вероятностей для случайной величины T - времени, прошедшего до момента рекомбинации отдельно взятого электрона. Каково медианное значение времени рекомбинации T ?

(решения не давалось)

Ч-4.106

Случайная величина ξ принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, а случайная величина η имеет распределение Пуассона с параметром $p : \mathrm{P}\{\eta = k\} = \frac{p^k}{k!}e^{-p}, k = 0, 1, 2, \ldots$. Доказать, что ξ и η можно задать на одном вероятностном пространстве так, что $\mathrm{P}\{\xi \neq \eta\} < p^2$.

Ч-4.107

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, $\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi_i = 0\} = p_i, \quad i = 1, \ldots, \quad n$. Используя результаты задачи n4.106, доказать, тто

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \mid \mathrm{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = k\} - \frac{(p_1 + \ldots + p_n)^k}{k!} e^{-(p_1 + \ldots + p_n)} \mid \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Ч-4.109

Случайная величина & принимает только пелые неотрицательные знатения. Доказать, что если $m_k = M\xi^{[k]} = M\xi(\xi - 1)\ldots(\xi - k + 1), k = 1, 2, \ldots$ и для целого $d \geqslant 1$ величина $m_{2d-1} < \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{2d}(-1)^{k-1}\frac{m_k}{k!} \leqslant \mathrm{P}\{\xi > 0\} \leqslant \sum_{k=1}^{2d-1}(-1)^{k-1}\frac{m_k}{k!}.$$

Ч-4.110

Пусть выполнены условия задачи n4.109. Докавать, что

$$\sum_{k=n}^{n+2d-1}(-1)^{k-n}C_k^n\frac{m_k}{k!} \leqslant \mathrm{P}\{\xi = n\} \leqslant \sum_{k=n}^{n+2d}(-1)^{k-n}C_k^n\frac{m_k}{k!}\imath$$

если $n = 0, 1, \ldots$ и $m_{n+2d-1} < \infty$.

Ч-4.111

Пусть выполнены условия задачи n4.109. Доказать, что при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=n}^{n+2d-1}(-1)^{k-n}C_{k-1}^{n-1}\frac{m_k}{k!} \leqslant \mathrm{P}\{\xi \geqslant n\} \leqslant \sum_{k=1}^{n+2d}(-1)^{k-n}C_{k-1}^{n-1}\frac{m_k}{k!^n}$$

если $m_{n+2d-1} < \infty$.

Ч-4.114

Пассажирский поезд состопт из N вагонов по s мест в каждом вагоне. В момент отправления в поезде находилось n пассажиров. Обозначим символом $\mu_i = = \mu_i(n, N, s)$ число ватонов, в которых при отправлгении поезда находилось ровно i пассажиров, $i = 0, 1, \ldots, \varepsilon_.$ Предполагая, что все $n!C_{Ns}^n = (Ns)^{[n]}$ вариантов размещения пассажиров в поезде равновероятны, н айти формулы для факториальных моментов величин $\mu_0, \mu_1, \ldots \cdots, \mu_{s.}$ Проанализировать поведение математических ожиданий μ_i при изменений n от 0 до Ns.

Ч-4.115

Пусть выполнены условия аадачи n4.114. Найти явное выражение для $\mathrm{P}\{\mu_i(n, N, \delta) = k\}$.

Ч-4.116

Пусть выполнены условия аадачи n4.114. Покаэать, что если s и i фиксированы, а $n, N \to \infty$ так, что М $\mu_i(n, N, s) \to \lambda \in (0, \infty)$, то при любом $k = 1, 2, \dots$

$$M\left(\mu_i(n, N, s)\right)^{[k]} \to \lambda^k.$$

Вывести отсюда, что тогда для любого $m = 0, 1, \dots$

$$\mathrm{P}\left\{\mu_i(n, N, s) = m\right\} \to \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Ч-4.117

Пусть n частиц размещаются по N ячейкам, иричем каждая тастица независимо от остальных с одй наковыми вероятностями (равными 1/N) может попасть в любую из N ячеек. Обозначим через $\mu_r(n, N)$ число ячеек, в которых находится ровно по r частид. Найти формулу для $M\mu_r(n, N)$ и доказать, что если $r \Rightarrow 0, 1, 2, \dots$ фиксировано, а $n, N \to \infty$ так, что $M\mu_r(n, N) \to \lambda_{\mathrm{r}}\ \ 0 < \lambda < \infty$, То

$$P\left\{\mu_r(n, N) = \{m\} \to \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, m = 0, 1, \dots\right.$$

Ч-4.118

Пусть частицы последовательно и независимо друг от друга размещаются по N ячейкам так, что i-я $(i = 1, 2, \dots)$ частица попадает в $j - 1 \quad (j = 1, \dots, N)$ ячейку с вероятностью 1/N. Положим

$$v_r(N) = \min\left\{ni\mu_r(n, N) > 0\right\}, \quad r = 2, 3, \dots$$

137 где $\mu_r(n, N)$ - число ячеек, содержащих после размещения n частиц ровно по r частиц. Найти такуio последовательность чйсел $b_1, b_2, \dots$ что распределения случайных величин $v_r(N)/b_N$ при $N \to \infty$ и фиксированпом r сходятся невырожденному закону, и сам предельный вакон.

Ч-4.119

Пусть n частиц независимо разменцаготся по N^2 ячейкам, расположенным в виде квадратпой таблицы размером $N \times N$. Назовем ячейку свободной, если после размещения n частиц ни в нее, ни в ячейки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбпе, не попало ни одной частицы. Найти предельное распределение чиста $\varkappa(n, N)$ свободных ячеек, когда

$$n = N(\ln \lambda N + o(1)), \quad N \to \infty.$$

4.5.5 Задачи на центральную предельную теорему и метод характеристических функций (??!!)

(мб это супер нужное??)
(!!!! напишу в 1 часть указания про решения!!!!! тут крутые указания должны быть!!!)

Вероятность прихода более половины студентов на лекции (!?!?!??)

Обзорную лекцию должны прослушать 100 студентов. Вероятность присутствовать на этой лекции для каждого студента равняется 0,7. Найти вероятность того, что на лекцию придет больше половины студентов.

(??? задача хорошая, но я слишком плохо разобрался, не уверен, что такое решение годное.)

Пусть X - случайная величина, равная числу студентов, пришедших на лекцию. Она равна сумме $n = 100$ независимых одинаково распределённых случайных величин, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью $p = 0,7$ (студент пришёл) и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p = 0,3$ (студент не пришёл).

Используем центральную предельную теорему, согласно которой, при больших значениях n случайную величину $Y = (X - MX)/\sqrt{DX}$ можно приближённо считать нормально распределённой с параметрами 0 и 1. Согласно стандартным формулам, $MX = np = 70, DX = npq = 21$. Нас интересует вероятность события $X > 50$, что равносильно условию $X - MX > -20$, то есть $Y > -20/\sqrt{21}$. Вероятность этого события находим, интегрируя функцию плотности нормального распределения:

$$P\{Y > -20/\sqrt{21}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-20/\sqrt{21}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \approx 0,9999936245$$

то есть эта вероятность практически равна единице.

Белан ВШЭ (!!!!)

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ - набор независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Найдите функцию плотности вероятности $P_N(g)$ среднего геометрического $G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N X_i}$ в случае $N \gg 1$.

(нужно тут прокачаться ещё!!)

Обозначим через $\rho_N(y)$ функцию плотности вероятности случайной величины $Y = \ln G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^N \ln X_i$. Понятно, что $P_N(G) = \rho_N(Y(G))\left|\frac{dY(G)}{dG}\right|$, а значит, если мы вычислим $\rho_N(y)$, то и искомую функцию распределения $P_N(g)$ можно будет легко выписать. Заметим, что Y представляет собой среднее арифметическое суммы независимых и одинаково распределенных случайных чисел $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$, где $Y_i = \ln X_i$. При этом Y обладает конечным средним значением $\mu_Y = \langle Y\rangle = \langle \ln X\rangle$ и дисперсией $\sigma_Y^2 = \left\langle Y^2\right\rangle - \langle Y\rangle^2 = \left\langle \ln^2 X\right\rangle - \langle \ln X\rangle^2$ (данное утверждение справедливо независимо от того, конечны ли $\langle X\rangle$ и $\left\langle X^2\right\rangle$). Таким образом, выполнены условия применимости центральной предельной теоремы, и при $N \gg 1$ величина Y имеет нормальное распределение

$$\rho_N(y) = \mathcal{N}\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{N}\right) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left(-\frac{N\left(y-\mu_Y\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right).$$

Тогда

$$P_N(g) = \rho_N(y(g))\left|\frac{dy(g)}{dg}\right| = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y g}\exp\left(-\frac{N\left(\ln g-\mu_Y\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right).$$

В пределе $N \to \infty$ получаем $P_\infty(g) = \delta\left(g - e^{\langle \ln X\rangle}\right)$.

Ч-4.120

(см. n4.2).

Случайная величина η_n равна сумме очков, выпавших игри n независимых бросаниях симметричной игральной кости. Используя дентральнуюо предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - 3,5\right| \geqslant 0,1\right\} \leqslant 0,1.$$

Ч-4.121

Складывается 10^4 чисел, округленных с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0,5\cdot 10^{-m}, 0,5\cdot 10^{-m})$, пайти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет лежать суммарная ошибка.

Ч-4.122

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены:

$$\mathrm{P}\left\{\xi_i = z\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi_i = \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad z \neq 1, \quad i = 1,2,\ldots$$

а) Найти пределы математического ожидания и дис$n \to \infty$.

б) Доказать, что при $n \to \infty$ распределение η_n сходится к логарифмически нормальному распределению (см. задачу **3.233**). Найти параметры a, σ^2 предельного логарифмически нормального распределеиия.

в) Сравнить найденные в п. а) значения $\lim_{n\to\infty} M\eta_n$ и $\lim_{n\to\infty} D_{\eta_n}$ с математическим ожиданием и дисперсией случайной величины η, имеющей логарифмически нормальное распределение из п. б).

Ч-4.123

*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково расiгеделены:

$$\mathrm{P}\left\{\xi_i = 1,25\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi_i = 0,8\right\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1,2,\cdots.$$

и $\eta_n = \xi_1 \ldots \xi_n$.

а) Найти $\mathrm{M}\ \eta_{1000}, \mathrm{D}\eta_{1000}, \mathrm{M}\ln\eta_{1000}, \mathrm{D}\ln\eta_{1000}$.

б) Пользуясь асимптотической нормальностью $\ln\eta_?$ при $n \to \infty$, найти приближенные значения $\mathrm{P}\left\{\eta_{1000}- \leqslant 0,001\right\}, \mathrm{P}\left\{\eta_{1000} < 1\right\}, \mathrm{P}\left\{\eta_{1000} \leqslant 1\right\}, \mathrm{P}\left\{\eta_{1000} \leqslant 10^4\right\}$.

в) Пользуясь формулой Стирлинга, найти $\mathrm{P}\left\{\eta_{1000}4 < 1\right\}, P\left\{\eta_{1000} \leqslant 1\right\}$.

Ч-4.124

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены:

$$\mathrm{P}\{\xi_i = 1,25\} = \mathrm{P}\{\xi_i = 0,75\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2 \ldots\ldots$$

и $\eta_n = \xi_1 \ldots \xi_n$.
а) Найти $M\eta_{1000}, D\eta_{1000}, M \ln \eta_{1000}$, D ln η_{1000}.
б) Пользуясь асимптотической нормальностью $\ln \eta_n$ при $n \to \infty$, найти приближенные значения

$$\mathrm{P}\left\{\eta_{1000} \leqslant 10^{-20}\right\},$$
$$\mathrm{P}\left\{\eta_{1000} < 1,25^{501} \cdot 0,75^{499} \approx 1,6 \cdot 10^{-14}\right\}$$
$$\mathrm{P}\left\{\eta_{1000} \leqslant 1,25^{501} \cdot 0,75^{499}\right\}, \quad \mathrm{P}\left\{\eta_{1000} \leqslant 10^{-7}\right\}.$$

в) Польвуясь формулой Стирлинга, найти

$$\mathrm{P}\left\{\eta_{1000} < 1,25^{501} \cdot 0,75^{499}\right\}$$
$$\mathrm{P}\left\{\eta_{1000} \leqslant 1,25^{501} \cdot 0,75^{499}\right\}$$

Ч-4.126

Случайпая точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ имеет раввомерное распределение на едпничной сфере в R^n, т. е. на множестве точек $S^{n-1} \Rightarrow \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n\ :$

Ч-4.127

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ имеет сферически симметричпое нормальное распределение с нулевым вектором средних и единичной матрицей ковариаций. Равенство

$$\xi = \rho\varepsilon, \quad \rho = |\xi|, \quad \varepsilon = \frac{1}{|\xi|}\xi,$$

где $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ - длина вектора ξ, дает представление ξ в виде произведения скалярной случайной величины ρ и вектора ε. Доказать, что ρ и ε независимы и qто в имеет равномерное распределение на единичной сфере в R^n (см. задачу

Ч-4.126

). Найти распределение, математическое ожидание и дисшерсню ρ^2.

Ч-4.128

Пусть вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in R^n$ имеет равномерное распределение на единичной сфере в R^n. Нспользуя результаты задач n4.127 и n4.125, доказать, что при $n \to \infty$:
а) распределение $\varepsilon_1\sqrt{n}$ сходится k стандартному нормальному распределению,
б) распределение вектора $(\varepsilon_1\sqrt{n}, \ldots, \varepsilon_k\sqrt{n})$, $k = \mathrm{const}$, сходится к совместному распределению k независимых случайных величин, имегопих стандартное нориальное распределение.

Ч-4.129

Случайные величины $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\left(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\right)/n}}$$

называется распределением Стьюдента с и степенями свободы. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\tau_n \leqslant x\}_\infty \quad -\infty < x < \infty.$$

Ч-4.130

Пусть $\xi_{n,1}$ обозначает число появлений t-го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами; вероятности появления атих исходов в каждом из испытаний равны $p_1, p_2, \ldots, p_n \geqslant 0$ соответствен140 по, $p_1 + \ldots + p_N = 1$. Далее, пусть $a_1, \ldots, a_N-$ действітельные числа iI

$$\eta_n = a_1\xi_{n,1} + \ldots + a_N\xi_{n,N}.$$

Найти $M\eta_n, D\eta_n$ и предельное распределение $\frac{\eta_n - M\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}}$ при $n \to \infty$.

Ч-4.131

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены; $\xi_{\mathrm{a}} = a, D\xi_{\mathrm{A}} \Rightarrow b^2, k = 1, 2, \ldots$ Положим $\eta_k = \xi_n + \xi_{k+1} + \xi_{k+2}, k = 1, 2, \ldots$ Найтв:

а) $M\eta_k, \operatorname{cov}(\eta_k, \eta_c)\,(k \neq l), D\eta_k$; б) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\eta_1+\ldots+\eta_n-3na}{b\sqrt{3n}} \leqslant x\right\}$. Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x\right\}.$$

Ч-4.134

Последовательность случайных величии $\xi_1,\ \xi_2, \ldots$ такова, что при люобом $n = 1, 2, \ldots$

$$\xi_n = \xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \ldots + \xi_{n,n}$$

141 где $\zeta_{n,1}, \ldots, \zeta_{n,n}$ - незаввсимые случайные велвчииы,

$$M\xi_{n,1} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\zeta n, h < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^{n} M\left|\zeta_{n,h}\right|^3 = 0.$$

Докавать, что распределепия случайных величин ξ_n/s_n при $n \to \infty$ сходятся к стандартному нормальному распрелелепию.

Ч-4.135

Случайные велитины $\xi 1, \xi_2, \ldots$ независимы,

$$\mathbf{P}\left\{\xi_n = 1\right\} = \frac{1}{n^\alpha}, \quad P\left\{\xi_n = 0\right\} = \frac{n^\alpha - 1}{n^\alpha},$$
$$n = 1, 2, \ldots, 0 < \alpha < 1.$$

Найти предельное расшределение случайных велвчип

$$\xi_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - M\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right)}{\sqrt{\overline{D\left(\xi_1\right.} + \ldots + \xi_n\Big)}} \text{ при } \quad n \to \infty.$$

Ч-4.138

Случайные величинлы $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы, $\mathbf{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 1\right\} = p_i^{(n)}{}_2$

$$P\left\{\xi_i^{(n)} = 0 \right| = 1 - p_i^{(n)} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)_S$$

и $\xi_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$.

а) Найти $M\zeta_n, \mathrm{D}\zeta_n$.

б) Доказать, что если $\mathrm{D}_n \to \infty$ прв $n \to \infty$, то предельное прв $n \to \infty$ распределение случайной величины $\frac{\zeta_n - M\xi_n}{\sqrt{\bar{D}\zeta_n}}$ является стандартным нормальным.

в) Положим $m_n = f\left(p_1^{(n)}\right) + \ldots + f\left(p_n^{(n)}\right)$, где $f(x) = 0$ при $x \leqslant 1/2$ и $f(x) = 1$ при $x > 1/2$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\zeta_n - m_n$, если

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ p_i^{(n)} \leq 1/2}} p_i^{(n)} \to \lambda_{0v} \quad \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ \phi_i^{(n)} > 1/2}} p_i^{(n)} \to \lambda_{1\varepsilon}$$

$$\max_{1 \leqslant i < n} \min\left[p_i^{(n)}, 1 - p_i^{(n)}\right] \to 0.$$

Ч-4.139

Случайная величина ξ_n имеет распределепве - дробно-динейной производящей функцией $\varphi_n(z) \Rightarrow = \frac{a_n+(1-d_n-a_n)^z}{1-d_n{}^2}, 0 \leqslant a_n \leqslant 1, 0 \leqslant d_n < 1$. Какие невырожденвые ваконы распределения $F(x)$ могут быть предельными для последовательности $F_n(x) = \mathrm{P}\left\{\frac{\xi_n}{A_n} \leqslant x\right\}$, где $A_n \rightarrow \infty$ - некоторые пормирующие константы? Какие условвя надо наложить на последовательности a_n, d_n, A_n, чтобы $\lim_{n\rightarrow\infty} F_n(x) = F(x)_s x > 0$?

Ч-4.144

Пусть случайная величина v_h та же, что в задаче n4.143. Найти предельное распределение случайной величины $v_k - k$, когда $N \rightarrow \infty, k^2/N \rightarrow \lambda, 0 < \lambda < \infty$.

Ч-4.145

Пусть выполнены условия аадачв n4.143. Найти асимптотические формулы для Mv_m, Dv_m и предельное распределение $\frac{v_m - v_m}{\sqrt{\mathrm{D}_m}}$, когда $N \rightarrow \infty$ и $\alpha_1 N \leqslant m \leqslant \alpha_2 N$ прі некоторых $\alpha_1, \alpha_2, 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

Ч-4.146

Производящая функдия $\varphi(z) = Mz^2$ случайной величины ξ является многочленом степени N, првчем все горни $z_1, \ldots, z_N$ уравнения $\varphi(z) = 0$ вещественны. Доказать, что распределение ξ совпадает с распределением суммы $\zeta = \zeta_1 + \ldots + \zeta_N$, где случайные величвны $\zeta_1, \ldots\ldots, \varsigma_{\mathrm{N}}$ незавпсий і

$$\mathrm{P}\{\zeta_i = 1\} = p_i, \quad \mathrm{P}\{\zeta_i = 0\} = 1 - p_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Найти зпачения $p_1, \ldots, p_N$.

Ч-4.147

*. Производящая фупкция $\varphi(z) = Mz^2$ случайной величины ξ является многочленом степенй N, причем все корни $z_1, \ldots, z_N$ уравнения $\varphi(z) = 0$ имеют неположительные вещественные части: $\operatorname{Re} z_i \leqslant 0, i = 1, \ldots, N$. Доказать, что распределение ξ совпадает с распределеиием суммы $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi$, где случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi$ независимы и $P\{\zeta_i = 2\} = r_i, \quad \mathbf{P}\{\zeta_i = 1\} = p_i, \quad \mathbf{P}\{\zeta_i = 0\} = 1 - p_i - r_i$, $i = 1, \ldots, M$. Найти значения $M, p_i, r_i (i = 1, \ldots, M)$.

Ч-4.149

Доказать, что если выполнены условия задачи n4.148, но $\mathrm{Dg}_n \rightarrow \lambda < \infty$ при $n \rightarrow \infty$ п, кроме тоrо,

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \max_{1<i\leqslant n} z_{n,i} = -\infty,$$

где $z_{n,1}, \ldots, z_{n,n}-$ корни уравнения $\varphi_n(z) = 0$, то рисспределенве ξ_n прв $n \rightarrow \infty$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

Ч-4.150

*. Пусть выполпены условия задачй n4.143 и $f_{n,N}(z) = z^{\mu_0{}^{(n,N)}}$ – производящая фуикция чвсла пустых ячеек. Найти рекуррентное уравпение, связывающее многочлены $f_{n,N}(z)$ и $f_{n+1,N}(z)$, и вывести иа него, что все $N-1$ корней уравненвя $f_{n,N}(z) = 0$ вещественны при любом $n \geqslant 1$.

Ч-4.151

Пусть выполнены условия задачи n4.143 и $\mu_0(n, N)$ - число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n частиц. Доказать, что если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $M\mu_0(n, N) \rightarrow \infty$ и $N - M\mu_0(n, N) \rightarrow \infty$, то предельное распределение случайной величины

$$\frac{\mu_0(n, N) - M_0(n, N)}{\sqrt{D\mu_0(n, N)}}$$

является стандартным нормальным.

Ч-4.152

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ везавискмы и имеют одно й то же распределение с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что еслв при некоторых $C > 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$,

$$f(t) = 1 - C|t|^\alpha (1 + o(1)), \quad t \to 0,$$

то при $n \to \infty$ существует предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n^{1/\alpha}}.$$

Найти его характеристическую функцию.

Ч-4.157

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют распределение Komи с нараметром a; при атом ξ_1 и ξ_2 независимы, а $P\{\xi_3 = \xi_1\} = 1$. Сравнить характеристические функции и функции распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ независимых и суммы $\xi_1 + \xi_3$ аависимых одинаково распределенных случайных величин.

Ч-4.158

Используя результат задачи n4.155, вычпслить

$$I_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)\,(b^2 + (x-u)^2)}.$$

5 Другие задачи

5.1 Задачи про элементарные случайные процессы

5.1.1 Задачи про простейшие случайные процессы

(!!! тут могут быть очень крутые задачи.)

ЛШ-9 Возврат назад при случайном блуждании

(!!! в теории укажу это, пока теория слабее каталога!!!)

Функции Грина оказываются полезными и при изучении вопросов, не имеющих отношения к квантовой механике. В этой и следующей задачах мы приведем два таких примера. Первый из них - задача о случайном блуждании.

Рассмотрим частицу, совершающую случайное блуждание по n-мерной кубической решетке. Движение начинается при $t = 0$ из начала координат. Попав на очередном шаге в какой-то из узлов решетки, частица на следующем шаге с одинаковой вероятностью переходит в любой из $2n$ соседних узлов. Пусть $p(t, \mathrm{x})$ - вероятность того, что частица через t шагов оказалась в узле $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ решетки. (В этой задаче время t является дискретным.) В теории вероятностей рассматривают производящую функиию

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}, t} z^t e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) \quad (t \geqslant 0, |z| < 1).$$

Свойства этой величины во многом аналогичны свойствам функции Грина. Покажите, что

$$G(z, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n}\left(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n\right).$$

Рассмотрим производящую функцию $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$ для блужданий, начинающихся из начала координат, но ни разу не возвращающихся туда на последующих шагах. Величина $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$ по своим свойствам похожа на функцию Грина частицы в поле отталкивающего центра (см. задачи 11,12 и 13). В частности, для нее можно написать такое же интегральное уравнение (напоминающее уравнение Дайсона). Выразите $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$ через $G(z, \mathbf{q})$. Найдите вероятность P того, что частица никогда не возвращается в начало координат. Покажите, что

$$P^{-1} = \int G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}.$$

Здесь интеграл берется по зоне Бриллюэна, т. е. по периоду обратной решетки. Вероятность возврата (2.17) имеет нетривиальную зависимость от размерности решетки n. Покажите, что

а) $P = 0$ при $n \leqslant 2$;

б) $0 < P < 1$ при $n > 2$;

в) $P \to 1$ при $n \gg 2$.

Поскольку перечисленные свойства чувствительны только к поведению $G(1, \mathbf{q})$ при малых $\mathbf{q}$, т.е. на больших масштабах, они имеют место для произвольного диффузионного движения, а не только для блуждания по решетке. Типичная диффузионная траектория имеет бесконечно много возвратов при $n \leqslant 2$, и конечное число при $n > 2$.

Решение Рассмотрим вероятность $p(t, \mathrm{x})$ блуждающей частицы оказаться в узле x на шаге t. Вероятности на шаге t и $t+1$ связаны простым соотношением:

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \frac{1}{2n} \sum_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=1} p\left(t, \mathbf{x}'\right)$$

(сумма берется по $2n$ соседям узла $\mathbf{x}$). Перейдем к фурье-образу $p(t, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}} e^{iq\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x})$. Соотношение (2.82) дает

$$p(t+1, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) p(t, \mathbf{q}), \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n}\left(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n\right).$$

Находим производящую функцию

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{t \geqslant 0} z^t p(t, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}.$$

Вероятности $p(t, \mathbf{x})$ выражаются через $G(z, \mathbf{q})$ так:

$$p(t, \mathbf{x}) = \frac{-i}{(2\pi)^{n+1}} \oint \frac{dz}{z^{t+1}} \int \frac{d^n q e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{1 - zW(\mathbf{q})},$$

где интеграл по $d^n q$ берется по области $-\pi < q_i < \pi (i = 1, \ldots, n)$, а интеграл по z - по любому контуру, охватывающему точку $z = 0$.

Теперь, чтобы найти вероятность блужданий без возврата в начало координат, немного модифицируем правила игры. Предположим, что частица блуждает случайно, как и раньше, но, как только она попадает в начало координат, ее «удаляют с поля». В этом случае связь между $p(t+1, \mathbf{x})$ и $p(t, \mathbf{x})$ будет такая:

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=1} p\left(t, \mathbf{x}'\right) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Переходя к фурье-образу $p(t, \mathbf{q})$, получаем

$$p(t+1, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) p(t, \mathbf{q}) - \int W(\mathbf{k}) p(t, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}.$$

Производящая функция $\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \sum_{t \geqslant 0} z^t p(t, \mathbf{q})$ получается умножением (2.86) на z^{t+1} и суммированием по $t \geqslant 0$. Находим

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q})(1 - zW(\mathbf{q})) = 1 - z \int W(\mathbf{k}) \tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}$$

Это уравнение можно записать в таком виде:

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = G(z, \mathbf{q}) + G(z, \mathbf{q}) \int \Sigma(z, \mathbf{k}) \tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n},$$

где $\Sigma(z, \mathbf{k}) = G^{-1}(z, \mathbf{k}) - 1$. (Заметим, что по форме уравнение (2.89) напоминает уравнение Дайсона (4.9).) Ищем решение (2.89) в виде

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \lambda(z) G(z, \mathbf{q})$$

где $\lambda(z)$ - некоторая функция z. Подставляя (2.90) в (2.89), находим

$$\lambda(z) = 1 - \lambda(z) \int (G(z, \mathbf{q}) - 1) \frac{d^n q}{(2\pi)^n},$$

откуда

$$\lambda^{-1}(z) = \int G(z, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}.$$

Рассмотрим вероятность P_t того, что частица за t шагов ни разу не вернулась в начало координат. Производящая функция $F(z)=\sum_{t\geqslant 0} z^t P_t$, очевидно, есть

$$F(z)=\tilde{G}(z,\mathbf{q}=0)=\frac{\lambda(z)}{1-z}.$$

Находим вероятность

$$P_t=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{dz}{z^{t+1}}\frac{\lambda(z)}{1-z},$$

где $\lambda(z)$ дается (2.92), а радиус контура интегрирования $r<1$. Для нахождения вероятности того, что частица никогда не вернется в начало координат, необходимо перейти в (2.94) к пределу $t\to\infty$. Это удобно сделать, рассмотрев

$$P_{a,t}=A_t\left(P_0+aP_1+\ldots+a^{t-1}P_{t-1}\right)=\frac{A_t}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\left(1-a^t z^{-t}\right)\lambda(z)}{(1-z)(z-a)}dz$$

где $a-$ параметр, который $0<a<r$, а $A_t=\left(1+a+\ldots+a^{t-1}\right)^{-1}=(1-)/\left(1-a^t\right)$. Переходя в (2.95) к пределу $t\to\infty$, получаем

$$P_a^*=\frac{1-a}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\lambda(z)dz}{(1-z)(z-a)},$$

Рассмотрим контурный интеграл (2.96). Функция $\lambda(z)$ аналитична внутри единичного круга, поэтому внутри контура $|z|=r$ подинтегральное выражение в (2.96) имеет один простой полюс $z=a$. Вычет в точке $z=a$ есть $\lambda(a)$, и поэтому $P_a^*=\lambda(a)$. Искомая вероятность невозвращения, согласно (2.95), есть $\lim_{a\to 1}P_a^*$. Следовательно,

$$P=\lambda(a)_{a\to 1}=\left[\int G(1,\mathbf{q})\frac{d^n q}{(2\pi)^n}\right]^{-1}.$$

При $n\leqslant 2$ интеграл в (2.97) расходится на малых q, поэтому вероятность невозвращения $P=0$.

В другом пределе, при $n\to\infty$, величина суммы косинусов в $W(\mathbf{q})$ порядка $\sqrt{n}$, согласно закону больших чисел. (Это справедливо не для всех q, а только для «типичныхя, но для оценки интеграла в (2.97) этого достаточно.) Заменяя в $G(1,q)$ величину $1-W(\mathbf{q})$ на 1, находим, что при больших n вероятность невозвращения $P\to 1$

Ч-5.1

Случайные величины $\xi_t(t=0,\pm1,\pm2,...)$ независимы, $M\xi_t=a, D\xi_t=\sigma^2$. По действительным числам $c_0,c_1,\ldots,c_h$, удовлетворяющим условито $c_0+c_1+\ldots\ldots+c_k=1$, Iгостроен случайный процесс

$$\eta_1=c_0\xi_t+c_1\xi_{t-1}+\ldots+c_k\xi_{t-k},\quad t=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Найти $M\eta_t,\mathrm{D}\eta_t,\operatorname{cov}(\eta_t,\eta_s)$. Показать, что $\operatorname{cov}(\eta_t,\eta_s)==R(|s-t|)$, т. е. зависит только от $|s-t|$.

Ч-5.2

. Пусть выполнены условия задачи н5.1.

а) Доказать, что последовательность случайных величив

$$\zeta_n=\frac{1}{n}\left(\eta_1+\ldots+\eta_n\right)$$

при $n\to\infty$ сходится фо вероятности к $a=\mathrm{M}\ \xi_t$.

б) Сходится ли ζ_n К а с вероятностью при $n\to\infty$?

Ч-5.3

Пусть выполнешы условия задачи н5.1 и, кроме того, $a=0, M\xi_t^4=c<\infty$.

а) Доказать, что для любого целого $s\geqslant 0$ последовательность случайных величин

$$\zeta_n^{(s)}=\frac{1}{n}\left(\eta_1\eta_{1+s}+\eta_2\eta_{2+s}+\ldots+\eta_n\eta_{n+s}\right)$$

при $n\to\infty$ сходится по вероятности к $R(s)$.

б) Сходится ли $\zeta_n^{(s)}$ ю $R(s)$ с вероятностью 1 при $n\to\infty$?

Ч-5.4

. Случайный процесс $\xi_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, определяется формулой

$$\xi_1 = \alpha \sin(At + \beta) + \varepsilon_t,$$

где $\alpha, \beta, \quad \{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ - независимые случайтые величины, $M\alpha = 0, \mathrm{D}\alpha = 1, \beta$ имеет равномерное распределение на отрезке $[-\pi, \pi], \quad M\varepsilon_t = 0, \quad D\varepsilon_t = \sigma^2$. Найти $M\xi_t, D\xi_t$, $\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s)$.

Ч-5.5

Случайный пропесс $\xi_1, -\infty < t < \infty$, задан форму Jюй

$$\xi_1 = \sin(t + \pi\eta_1) + \sin\pi(t + \eta_2),$$

где η_1 и η_2 независимы и имеют равпомерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найти $\xi_t, D\xi_t, \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_s)$.

Ч-5.6

Случайпый процесс $\xi_t, -\infty < t < \infty$, задан формуло й

$$\xi_t = \xi_1 \sin t + \xi_2 \sin \pi t$$

154 где ζ_1 и ζ_2 независимы и имеют равномерное распреде ление на отрезке $[-1, 1]$. Найтн плотность распределения случайной величины $\eta = \sup_t \xi_t$.

Ч-5.7

Случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, ра $= 0$, D $\alpha_1 = 1$. Случайные величины $\beta_1, \beta_2, \ldots$ независимы, не зависят от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и имеют равномерное распредетение па отрезке $[-\pi, \pi]$. Последовательность случайных процессов $\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots$ определяется равенством

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(t + \beta_k).$$

а) Найти предельное распределегие $\eta_n(t)$ при $n \to \infty$, $t = \mathrm{const}$.
б) Доказать, что $\eta_n(t) = \theta_n \cos(t + \gamma_n\rangle$. Найти предельное распределение вектора (γ_n, θ_n) при $n \to \infty$.

Ч-5.8

Случайный процесс $\varepsilon_t, 0 \leqslant t < \infty$, с вероятностью 1 имеет непрерывные траектории, $\varepsilon_t \equiv 0, \quad D\varepsilon_t < \infty$, $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = R(|t - s|)$ при любых $t, s \geqslant 0$. Пусть $\eta_t =$ определяется случайная величина

$$\tau_N = \inf\{t \geqslant 0 : \xi_t \geqslant N\}.$$

Найти фупкцию распределенпя $F_N(x) = \mathrm{P}\{\tau_N \leqslant x\}$ при $N > 0$ в следующих случаях:
а) $\xi_t = \zeta t$, где $\mathrm{P}\{\zeta \leqslant x\} = 1 - \frac{1}{(1+x)^k} \quad (x \geqslant 0, k > 0)_i$
б) $\xi_t = t^2 - 2t\xi$, где $\mathrm{P}\{\xi \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geqslant 0)$,
в) $\xi_t = \zeta e^{at}$, где $a > 0$ и $\mathrm{P}\{\zeta \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x}(x \geqslant 0)$.

Ч-5.10

По последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ независимых одипаково распределепных случайных величин построеп случайный продесс $\eta_k = \xi_{k+1} - \xi_k, k = 0, 1, \ldots$ Положим

$$\tau_1 = \inf\{k \geqslant 0 : \eta_k \leqslant 0\},$$
$$\tau_2 = \inf\{k \geqslant 0 : \eta_k < 0\}.$$

Найти $M\tau_1$ и τ_2 в следующих трех случаях:
а) $P\{\xi_0 = 1\} = P\{\xi_0 = 2\} = 1/2$,
б) $\mathrm{P}\{\xi_0 = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_0 = 2\} = \ldots = \mathrm{P}\{\xi_0 = d\} = 1/d$,
в) ξо имеет равномерное распределенпе на отрезке $[0, 1]$

Ч-5.11

Найти распределение корня τ случайного уравнепия $\xi x + \eta = 0$, где ξ и $\eta-$ независимые случайные ведичины, имеюшие стандартное нормальное распределение.

Ч-5.12

По последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых случайных величин, имеющих стандартвое нормальное распределение, строштся траектория случауloго пропесса $\xi_t (t \geqslant 0) : \xi_0 = 0, \xi_k = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ при любом делом $k \geqslant \geqslant 1$, а при $t \in (k, k+1), k = 0, 1, \ldots$, графиком траектории ξ_1 является отрезок, соединяюший точки (k, ξ_k) и $(k+1, \xi_{k+1})$, т. е.

$$\xi_t = (k+1-t)\xi_k + (t-k)\xi_{k+1} \text{ при } k < t < k+1.$$

Найти математическое ожидание числа μ_h нулей продесса ξ_1 на полуинтервале $[0, k) \quad (k \geqslant 1$-делое) и асимптотику $M\mu_k$ прi $k \to \infty$.

Ч-5.13

Случайный процесс $\xi_n(x), -\infty < x < \infty$, определяется равенством

$$\xi_n(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \ldots + \xi_n x^n,$$

где случайная величина Бо не зависит от случайного вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и имеет пепрерывную функцию распределекия. Доказать, что шри любых фиксированных x и a

$$\mathrm{P}\left\{\xi_n(x) = a\right\} = 0.$$

Ч-5.14

Доказать, что если выполнены условия задачи n5.13, то с вероятностью 1 все действительные корни многочлека $\xi_n(x)$ - простые.

Ч-5.15

Случайный продесс $\xi_n(x), -\infty < x < \infty$, определяется равенством

$$\xi_n(x) = \zeta_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_n x^n,$$

где Бо, ξ_1,..., ξ_n - незавпсимые случайные величины, имеющие нулевое математитеское ожидание и единичпую дйсшерсию. Найти $M\xi_n(x), D\xi_n(x), \operatorname{cov}\left(\xi_n(x), \xi_n(y)\right)$.

Ч-5.18

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одпо и то же распределение на множестве $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ с производящей функцией $f(s) = M_s^{k_1}$. По случайному блужданию

$$\rho_0 = 0, \rho_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \quad (n \geqslant 1)$$

построим случайные величины $\tau_1, \tau_2, \ldots$:

$$\tau_k = \begin{cases} \min\{n : \rho_n = -k\}, & \text{если } \inf \rho_n \leqslant -k, \\ \infty \text{ в шротивном случае.} & \text{c>0} \end{cases}$$

а) Доказать, что производящие функции $\varphi_k(s) = Ms^{\tau_k}$ связапы соотпошениями $\varphi_k(s) = \varphi_1^k(s)$, а производящая Фупкция $\varphi_1(s)$ является-решением уравнешия $sf\left(\varphi_1(s)\right) = 1$.

б) Найти фуикдию $\varphi_1(s)$, если

$$\mathrm{P}\left\{\xi_1 = k\right\} = (1-p)p^{k+1}, \quad k = -1, 0, 1, \ldots$$

в) Найти функцию $\varphi_1(s)$, если

$$\mathrm{P}\left\{\xi_1 = 1\right\} = p, \quad \mathrm{P}\left\{\xi_1 = -1\right\} = 1-p, \quad 0 < p < 1.$$

Ч-5.19

По случайному блуждавию ρ_n, определенпому в задаче n5.18, построим случайную величику $\mu = \inf_{n \geqslant 0} \rho_n$. а) Найти распределение μ.

б) Доказать, что $P\{\mu > -\infty\} = 1$ тогда и только тогда, когда $M\xi_1 > 0$ или $P\left\{\xi_1 = 0\right\} = 1$.

Ч-5.20

Показать, что если $\rho_0 = 0, \quad \rho_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n -$ случайное блуяддапие, построеппое по независимым одинаково распределенным случайным велвчинам $\xi_1, \xi_2, \ldots ...$

$$\mathrm{P}\left\{\xi_n = 1\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi_n = -1\right\} = 1/2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то справедливы следующие соотношения:

а) $\mathrm{M}\rho_n = 0, \quad D\rho_n = n, \quad \mathrm{P}\left\{\rho_{2n+1} = 0\right\} = 0, \mathrm{P}, \rho_{2n} = 0\} = = C_{2n}^n 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty;$

б) $\mathrm{M}\left|\rho_n\right| = \sum_{n=0}^{n-1} \mathrm{P}\left\{\rho_k = 0\right\} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}, n \to \infty.$

Ч-5.21

Случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots$ в d-мерном евклидовом пространстве независимы и при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$M\xi_k = 0, \quad M\left|\xi_k\right|^2 = \sigma_k^2 < \infty,$$

где $|\xi_k|$ – евтлидова длина ξ_k. Построим случайное блуждапие $\rho_0 = 0, \rho_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n (1 \geqslant 1)$. Доказать, что

$$M\rho_n = 0, \quad M\left|\rho_n\right|^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2.$$

Ч-5.22

Случайные векторы $\xi_n = (\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,d}) \quad (k = -1, 2, \ldots)$ в d-мерном евглидовом пространстве независимы ии имеют равномерное распределение на единичной chepe

$$S^{d-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in R^d : x_1^2 + \ldots + x_d^{\varkappa} = 1\right\}.$$

Пусть $\rho_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и $|\rho_n|$ – евклидова длика вектора ρ_n. Найти $M\left|\rho_n\right|^2$, $\mathrm{D}\left|\rho_n\right|^2$.

Ч-5.23

Пуссть выполнены условия задачи n5.22. Доказать, что при любом $\alpha > 3/2$

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n \to \infty} \frac{|\rho_n|}{n^\alpha} = 0\right\} = 1.$$

Ч-5.24

*. Случайные величины ξ, $\xi 2$,... везависимы, принимают значения 1 - -1 с вероятностями p и $q = = 1 - p$ соответственно, и $S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$ Обозначим через v qисло таких n, что $S_n = 0$.

а) Показать, что если $p \neq q$, то $\mathrm{P}\{v < \infty\} = 1$; 6) показать, что если $p = q = 1/2$, то $\mathrm{P}\{v = \infty\} = 1$.

Ч-5.25

Независимые случайные векторы $\xi_n = (\xi_{n,1}, \ldots,)\xi_{n,s} \in R^s, n = 1, 2, \ldots$, имеют независимые комнопепты и $\mathrm{P}\left\{\xi_{n,i} = 1\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi_{n,i} = -1\right\} = \frac{1}{2}, 1 \leqslant i \leqslant s, n = 1, 2, \ldots$ Положим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, n = 1, 2, \ldots$, п обозначим через v число таких n, что $S_n = (0, \ldots, 0)$. Покадать, что $\mathrm{P}\{v = \infty\} = 1$ при $s = 2$ и что $\mathrm{P}\{v < \infty\} = 1$ при $s \geqslant 3$.

Ч-5.26

(То Ждест во В альда.) Пусть случайпые веJичины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\xi_i = a$, м $\quad \xi_i \mid\leqslant C < \infty$ $(i \geqslant 1)$. Пусть $B_1 \subset R^1, B_2 \subset R^2, B_3 \subset R^3, \ldots -$ произвольгая последовательность измеримых множеств, и случайная величина v определяется равенством

$$v = \inf\left\{n : (\xi_1, \ldots, \xi_n) \not\equiv B_n\right\}$$

$(v = \infty$, если $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B_n$ при любом $n < \infty)$. Испольвуя равенство

$$\sum_{i=1}^{v} \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \chi\{v \geqslant i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (1 - \chi\{v < i\})$$

(где $\chi\{A\}-$ индикатор события A), доказать, что если $\mathrm{Mv} < \infty$, то

$$M\sum_{i=1}^{v} \xi_i = aMv.$$

Ч-5.27

Проверить справедливость устаповлепното в задаче н5.26 равенства в следующих случаях:
а) $\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_i = -1\} = 1/2, v = \min\{n \geqslant 0 : \xi_1 + \ldots \ \ldots + \xi_n = 1\}$ б) $\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_i = -2\} = 1/2, v = \min\{n \geqslant 0 : \xi_1 + \ldots \ \therefore n + \xi_n = 1\}$. Объяснить результаты.

Ч-5.28

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ гезависимы и одинаково распределены, $a = M\xi_1 > 0$ и $\mathrm{P}\{|\xi_1| \leqslant C\} = 1$ при некотором $C < \infty$. Пусть $\rho_0 = 0, \quad \rho_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \ (n \geqslant 1)$ и $N_1 = \inf\{n > 0 : S_n \geqslant t\}$. Доказать, что при любом $t > 0$

$$t \leqslant aMN_t \leqslant t + C.$$

Ч-5.29

Случайные величины $\rho_1, \rho_2, \ldots$ при ліобом целом $n \geqslant 1$ Удовлетворяют условию

$$M\{\rho_{n+1} \mid \rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \rho_n.$$

Доказать, что при любых целых $k, n \geqslant 1$

$$M\{\rho_{n+k} \mid \rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \rho_n.$$

Ч-5.30

*. Неотридательные случайные величины $\rho_1, \rho_2, \ldots$ при любом целом $n \geqslant 1$ удовлетворяют условию

$$M\{\rho_{n+1} \mid \rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \rho_n.$$

Доказать, что для любого $\delta > 0$ и любого делого $n \geqslant 1$

$$\mathrm{P}\{\max\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \delta\} \leqslant \frac{M\rho_n}{\delta}.$$

Ч-5.31

Случайпые величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathrm{M}\ \xi_i = 0, i = 1, 2, \ldots$ Доказать, что для любого $\delta > 0$ и любого делого $n \geqslant 1$

$$P\left\{\max_{1 \leqslant k < n} |\xi_1 + \ldots + \xi_k| \geqslant \delta\right\} \leqslant \frac{M|\xi_1 + \ldots + \xi_n|}{\delta}.$$

МФТИ-Т.17

Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями $0,4; 0,6$ и $0,2$, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не Остается, то с равным и вероятностями переходит в Любую из остальных подгрупп. Найти:

а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1 -ой подгруппе было 20% населения, во 2 -ой подгруппе -30%, и в 3 -ей подгруппе -50%

Данный процесс описывается марковской цепью с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

По условию начальное распределение было $(0,2 \quad 0,3 \quad 0,5)$. Тогда распределение в следующем поколении

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,44 & 0,22 \end{pmatrix}$$

Найти б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

$$\begin{pmatrix} 0,4-\lambda & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6-\lambda & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \lambda^3 - 1,2\lambda^2 + 0,18\lambda + 0,02 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{10}, \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{10}$$

$$\begin{pmatrix} 0,4-\lambda_1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6-\lambda_1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & -2y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & -2z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично получаем:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(-2+\sqrt{3}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда диагонализованная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{10} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) & \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-2+\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{10} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) & \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-2+\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) & \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-2+\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\sqrt{3}}{10}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) & \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-2+\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) & \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-2+\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\sqrt{3}}{10}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{4\left(-2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(\frac{7}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} \\ -\frac{4\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(-\frac{7}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}^n \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) & \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-2+\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{4\left(-2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(\frac{7}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} \\ -\frac{4\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} & -\frac{4\left(-\frac{7}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)}{13\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

МФТИ-Т.18

Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состоя ния м и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1$$

Найти вероятности перехода за n шагов и предельные вероятности.

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} \to (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = 0 \to$$

$$\lambda^2 - \lambda(2-\alpha-\beta) + (1-\alpha)(1-\beta) - \alpha\beta = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{2-\alpha-\beta \pm \sqrt{(2-\alpha-\beta)^2 - 4((1-\alpha)(1-\beta)-\alpha\beta)}}{2} =$$
$$= \frac{2-\alpha-\beta \pm \sqrt{(1-\alpha)^2 - 2(1-\alpha)(1-\beta) + (1-\beta)^2 + 4\alpha\beta}}{2} =$$
$$= \frac{2-\alpha-\beta \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta}}{2} = \frac{2-\alpha-\beta \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}}{2} = \frac{2-\alpha-\beta \pm (\alpha+\beta)}{2} \to$$
$$\begin{cases} \lambda_+ = 1 \\ \lambda_- = 1-(\alpha+\beta) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha-\lambda_\pm & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (1-\alpha-\lambda_\pm)\, x_\pm + \alpha y_\pm \\ \beta x_\pm + (1-\beta-\lambda_\pm)\, y_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1+\alpha+\lambda_\pm \end{pmatrix}$$

При $\alpha = \beta = 0$ тривиальный случай.

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При $\alpha, \beta \in (0, 1]$ вырождения нет. Тогда диагонализованная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-(\alpha+\beta) \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-(\alpha+\beta))^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha(1-(\alpha+\beta))^n + \beta & \alpha\,(1-(1-(\alpha+\beta))^n) \\ \beta\,(1-(1-(\alpha+\beta))^n) & \alpha+\beta(1-(\alpha+\beta))^n \end{pmatrix}$$

При $\alpha = 1, \beta = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

При $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}^n\right) = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Определение параметров, при котором процесс докритический, критический, надкритический (??)

Для производящей функции процесса Гальтона-Ватсона $f(z) = \frac{1}{m+1-mz}, m > 0$ выясним, при каких значениях параметра m процесс является: докритическим, критическим, надкритическим.

Найдём математическое ожидание z:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{d(f)}{d(z)}\bigg|_{z=1} = -\frac{-m}{(m+1-mz)^2}\bigg|_{z=1} = m$$

В итоге:
$m < 1$ -процесс докритический,
$m = 1$ -процесс критический,
$m > 1$ - процесс надкритический.
Найти вероятность вырождения процесса в надкритическом случае.

$$s = f(s) = \tfrac{1}{m+1-ms} \to s(m+1-ms) = ms + s - ms^2 = 1 \to ms^2 - s(m+1) + 1 = 0 \to$$
$$\to ms(s-1) - (s-1) = 0 \to (s-1)(ms-1) = 0 \to \begin{cases} s = 1 \\ s = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Показать, что n -тая итерация производящей функции может быть представлена в виде

$$f^n(z) = \tfrac{m^n-1-m\left(m^{n-1}-1\right)z}{m^{n+1}-1-m(m^n-1)z}$$

при $m \neq 1$ и

$$f^n(z) = \tfrac{n-(n-1)z}{n+1-nz}$$

Докажем утверждение по индукции.
База индукции следующая:

$$f^2(z) = f(f(z)) = f\left(\frac{1}{m+1-mz}\right) = \frac{1}{m+1-m\frac{1}{m+1-mz}} = \frac{m+1-mz}{(m+1)(m+1-mz)-m}$$
$$= \frac{m+1-mz}{(m+1)^2-(m+1)mz-m}$$

при $m \neq 1$ (иначе случай будет ниже)

$$f^2(z) = \frac{(m-1)(m+1-mz)}{(m-1)\left((m+1)^2-(m+1)mz-m\right)} = \frac{m^2-1-m(m-1)z}{m^3+1-m\left(m^2-1\right)z}$$

Шаг индукции:

$$f^{n+1}(z) = f\left(f^n(z)\right) = f\left(\frac{m^n-1-m\left(m^{n-1}-1\right)z}{m^{n+1}-1-m\left(m^n-1\right)z}\right) =$$
$$= \frac{1}{m+1-m\frac{m^n-1-m(m^{n-1}-1)z}{m^{n+1}-1-m(m^n-1)z}} =$$
$$= \frac{m^{n+1}-1-m\left(m^n-1\right)z}{(m+1)\left(m^{n+1}-1-m\left(m^n-1\right)z\right)-m\left(m^n-1-m\left(m^{n-1}-1\right)z\right)} =$$
$$= \frac{m^{n+1}-1-m\left(m^n-1\right)z}{(m+1)\left(m^{n+1}-1\right)-m\left(m^n-1\right)-m(m+1)\left(m^n-1\right)z+m^2\left(m^{n-1}-1\right)z} =$$
$$= \frac{m^{n+1}-1-m\left(m^n-1\right)z}{m^{n+2}-1-m\left(m^{n+1}-1\right)z}$$

теперь при $m = 1$ база индукции:

$$f^2(z) = \frac{m+1-mz}{(m+1)^2-(m+1)mz-m} = \frac{(m+1)-(m)z}{m(m+1)+1-(m+1)z} = \frac{2-(2-1)z}{2+1-2z}$$

и шаг индукции:

$$f^{n+1}(z) = f\left(f^n(z)\right) = f\left(\frac{n-(n-1)z}{n+1-nz}\right) =$$
$$= \frac{1}{2-\frac{n-(n-1)z}{n+1-nz}} =$$

$$= \frac{n+1-nz}{2(n+1-nz)-n+(n-1)z} =$$
$$= \frac{n+1-nz}{n+2-(n+1)z}$$

МФТИ-Т.20

Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс. Для $u \in \mathbb{R}$ определяется $\tau_u = \inf\{t : W_t = u\}$ - момент первого достижения уровня u траекторией винеровского процесса. Найти плотность распределения случайной величины τ_u

Если этот процесс впервые пересёк уровень u в точке τ_u, траекторию, исходящую из точки (τ_u, u) можно рассматривать, как самостоятельный винеровский процесс.

Следовательно, вероятность того, что в точке t будет выполнено $W_t \geq u$ равна $\frac{1}{2}$ в силу симметрии.

Заметим с другой стороны, что

$$P(W_t \geq u \mid \tau_u \leq t) = \frac{P(W_t \geq u)}{P(\tau_u \leq t)} = \frac{1}{2}$$

$$P(\tau_u \leq t) = 2P(W_t \geq u) = 2\int_u^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right) d(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{u}{\sqrt{\tau}\sigma}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial(t)}\left(P(\tau_u \leq t)\right) = \frac{\partial}{\partial(t)}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{u}{\sqrt{t}\sigma}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 t}\right) \frac{u}{t^{\frac{3}{2}}\sigma}$$

МФТИ-Т.21

Пусть

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, \quad t > 0$$

где $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс.

Найти плотность распределения случайной величины M_t

$$P(M_t \geq x) = P(\tau_x \leq t) = 2\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}\right) dy$$

$$P(M_t < x) = 1 - P(M_t \geq x) = 1 - 2\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}\right) dy$$

$$1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sigma\sqrt{t}}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

В итоге:

$$\frac{\partial}{\partial(x)}\left(P(M_t < x)\right) = \frac{\partial}{\partial(x)}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sigma\sqrt{t}}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) d(y)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

МФТИ-Т.22.

Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ - выборка из пуассоновского распределения с параметром λ.

Найти оценку наибольшего правдоподобия параметра λ

Функция правдоподобия

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^n \left(P_\lambda(X_i = k_i)\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^{k_i}}{(k_i)!}\exp(-\lambda)\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{(k_i)!}\right) \lambda^{\sum_{i=1}^n (k_i)} \exp(-n\lambda)$$
$$\ln(f(\lambda)) = -\sum_{i=1}^n \ln((k_i)!) + \sum_{i=1}^n (k_i)\ln(\lambda) - n\lambda$$

Найдём максимум этой функции.

$$\frac{\partial}{\partial(\lambda)}(\ln(f(\lambda))) = \sum_{i=1}^n (k_i)\frac{1}{\lambda} - n = 0 \to \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (k_i)$$

убедимся в максимуме с помощью второй производной:

$$\frac{\partial^2}{\partial(\lambda)^2}(\ln(f(\lambda))) = -\sum_{i=1}^n (k_i)\frac{1}{\lambda^2} = -\sum_{i=1}^n (k_i)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (k_i)\right)^{-2} = -n^2\left(\sum_{i=1}^n (k_i)\right)^{-1} < 0$$

МФТИ-Т.23.

Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ - выборка из нормального распределения $N\left(a, \sigma^2\right)$.
Найти оценки наибольшего правдоподобия параметров a и σ^2
Функция правдоподобия:

$$f(a,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \left(P_{a,\sigma}\left(X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) \exp\left(-\frac{\left(X_i - a\right)^2}{2\sigma^2} \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - a)^2 \right) \right) -$$

$$\ln(f(a,\sigma)) = -n(\ln(\sqrt{2\pi}) + \ln(\sigma)) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - a)^2 \right)$$

$$\ln(f(a,\sigma)) = -n(\ln(\sqrt{2\pi}) + \ln(\sigma)) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - a)^2 \right)$$

Максимум этой функции:

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma)}(\ln(f(a,\sigma))) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - a)^2 \right) = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - a)^2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial(a)}(\ln(f(a,\sigma))) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a) = 0$$

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(\sigma)^2}(\ln(f(a,\sigma))) = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - a)^2 \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(a)^2}(\ln(f(a,\sigma))) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial()\partial(\sigma)}(\ln(f(a,\sigma))) = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)$$

Матрица вторых производных в данной точке

$\begin{pmatrix} -\frac{2n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{\sigma^2} \end{pmatrix} = -\frac{n}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < 0 \rightarrow$ это точка строгого максимума

задача про билеты ПТФ

(давно хотел прорешать, потом подумаю)

5.1.2 Задачи на Пуассоновские процессы

Ч-5.33

Найти $\operatorname{cov}\left(\xi_{+}, \xi_{++\odot}\right)$ при $t, s \geqslant 0$, если:
а) ξ_t - пуассоновский продесс на $[0, \infty)$ с пнтенсивностью λ,
б) ξ_t- пуассоновский продесс на $[0, \infty)$ с интенсивпостью $\lambda(t)$.

Ч-5.34

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots)$ - положения точек пуассоновского потока на $[0, \infty)$ с интенсивностью λ. Доказать, что при любом $T > 0$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\tau_k \leqslant T\right\} = \lambda T.$$

Ч-5.35

Пусть выполнены условия задачи n5.34. Найтп $\mathrm{M}\tau_k, \mathrm{D}\tau_k$ и плотность $p_k(x)$ распределения τ_k. 160

Ч-5.36

Пусть выполнены условия задачи. n5.34. Найти:
а) плотность $p\left(x_1, \ldots, x_k\right)$ совместного распределения случайных величиин $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$,
б) $P\left\{\tau_1 \leqslant x \mid \tau_2 > T\right\}, 0 \leqslant x \leqslant \infty$, В) $P\left\{\tau_1 \leqslant x \mid \tau_1 \leqslant T < \tau_2\right\}, 0 \leqslant x \leqslant T$.

Ч-5.37

Пусть выполнены условия задачи n5.34. Найти условную шлотность $p_T\left(x_1, \ldots, x_k\right)$ совместного распределедия случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_h$ при условин, что $\tau_k \leqslant T < \tau_{k+1}$. Сравнить $p_T\left(x_1, \ldots, x_k\right)$ с плотностью . $q_T\left(x_1, \ldots, x_h\right)$ совместного распределения членов варпадионного ряда $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(h)}$, построеного по незавпсимым случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_k$, имеющим равномерное распределение на отрезке $[0, T]$.

Ч-5.43

Моменты поступения требований в систему массового обслуживания образуют пуассоновский поток' на $(-\infty, \infty)$ с интенсивностью λ. Каждое требование независимо от остальных находится в едстеме олучайное ние числа ξ_1 требований в сиетеме в момент. $\dot{}^{\text{тй}}$

Ч-5.44

Для системы массового обслуживания, описанной в задаче n5.43, найти функцию $f(t) = \mathrm{P}\left\{\xi_1 = 0 \mid \xi_0 = 0\right\}$. Убедиться в том, что $f(t)$ монотонно но воврастает no t.

Ч-5.45

Случайно расположенные на плоскости точки обравуют пуассоновское поле с интенсивностью λ, т. е. число точек в любой квадрируемой области S имевт пуассоновское распределение с математическим ожиданием $\lambda|S|$, где $|S|$ плокадь области S, и числа точек в нешересекающихся областях независимы. Пусть $\rho_1 \leqslant \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots$ - упорядоченные по возрастанию расстояния от начала координат до точек этого поля.

а) Как можно описать последовательность $\left\{\rho_k\right\}_{k=1}^{\infty}$?

б) Найти плотность $p_n(x)$ распределевия ρ_n, точную Формуау дая ρ_n и асимптотику $M\rho_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Ч-5.46

Случайно расположенные в пространстве R^3 точки образуют пуассоновское поле с интенсивностью λ, т. е. число точек в любой измеримой области V имеет пуассоновское распределение с математическим ожиданием $\lambda|V|$, где $|V|$ - объем области V, а числа точек в непересекающихся областях независимы. Ответить на те же вопросы, что в задаче **5.45**.

Ч-5.47

Автобусы прибывают на остановку в случайные моменты времени $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ Случайные величины τ_1, $\tau_2, \ldots$ независимы и τ_n имеет равномерное распределение в интервале $(n-1, n)$.

а) Найти плотность $p(x)$ распределения пнтервала $\delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ между автобусами.

б) Найти плотность $p_k\left(x_1, x_2\right)$ распределения двумерного вектора $\left(\delta_n, \delta_{n+\lambda}\right)$ при $k = 1, 2, \ldots$

в) Моменты ξ и ξ прихода двух пассажиров на остановку независимы и имеют равномерное распрвделеиие па интервале $(0, 1)$. Найти вероятность того, что онп поедут на одном и том же автобусе.

г) Моменты ξ_1 и $\xi 2$ прихода двух пассажиров на остаповку независимы, ξ_1 имеет равномерное распределевие на интервале $(0, 1)$, а ξ_2 - на интервале $(1, 2)$. Найти вероятность того, что эти пассажиры поедут на одном автобусе.

д) Пассажир приходит на остановку в случайный момевт ξ, имеющий равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Найти математическое ожидание, дисперсию и плотность $q(x)$ распределения времепи ожидания автобуса.

5.1.3 Задачи на цепи Маркова (!!!)

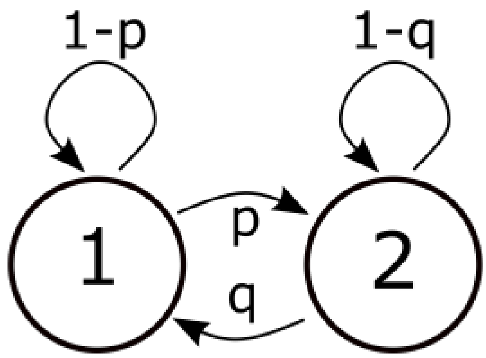
(займусь теорвером - в первый же день по ним тренироваться буду)

Белан-ВШЭ.л5.у1.(3 мин) Последовательность бросаний кубика и монеты

Допустим, берется симметричный кубик и бросается раз за разом до первого выпадения грани с шестью очками. После того как шесть очков выпали, берется симметричная монетка и подбрасывается до тех пор, пока не выпадет первый орел. После того как орел выпал, снова берут кубик и подбрасывают его до первого появления шести очков. И так далее. Вы должны угадать, кубиком или монеткой будет выполнен седьмой бросок в этой игре?

Решение Решаем самым обычным уравнением для марковских цепей, просто 1 формулой нужно воспользоваться.

Введем цепь Маркова с двумя состояниями и с дискретным временем. Будем говорить, что процесс находится в состоянии 1 в момент времени n, если $n+1$-й бросок в описанной игре осуществляется кубиком, и в состоянии 2, если $n+1$-й бросок выполняется монеткой. Схема наша как всегда:



Мы имеем $p = 1/6, q = 1/2$. Вероятности нахождения процесса в различных состояниях на n-м шаге даются выведенными формулами из возведения матрицы перехода в n-ю степень а также положить $\pi_1(0) = 1$ и $\pi_2(0) = 0$:

$$\pi_1(n) = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^n},$$
$$\pi_2(n) = \frac{p}{p+q} - \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

Итак, $\pi_1(6) > \pi_2(6)$, а значит с большей вероятностью седьмой бросок будет выполняться кубиком.

Задача в 2 строчки решилась цепью Маркова. А иначе и не решить ее вообще! (????? подумаю больше про разные методы для нее.)

Белан-ВШЭ.л5.у2.(3 мин) Переходы между тремя равновероятными состояниями

Марковский процесс с непрерывным временем может находиться в одном из трех состояний, 1,2 и 3, причем вероятность перехода между любыми двумя из них равна λ. Найдите вероятности, $\pi_1(t), \pi_2(t)$ и $\pi_3(t)$, найти систему в различных состояниях в произвольный момент времени $t > 0$, если известно, что в нулевой момент времени система находилась в состоянии 1.

Решение Пишем управляющее уравнение, элементарно его решаем.

Запишем управляющее уравнение на вероятности нахождения марковского процесса в различных состояниях

$$\dot{\pi}_1(t) = -2\lambda\pi_1(t) + \lambda\pi_2(t) + \lambda\pi_3(t),$$
$$\dot{\pi}_2(n) = \lambda\pi_1(t) - 2\lambda\pi_2(t) + \lambda\pi_3(t)$$
$$\dot{\pi}_3(n) = \lambda\pi_1(t) + \lambda\pi_2(t) - 2\lambda\pi_3(t).$$

Легко понять, что в силу начального условия $(\pi_1(0) = 1, \pi_2(0) = \pi_3(0) = 0)$ и симметрии вероятностей переходов, вероятности нахождения процесса во втором и третьем состояниях одинаковы, то есть $\pi_2(t) = \pi_3(t) = (1 - \pi_1(t))/2$. Отсюда получаем замкнутое уравнение на эволюцию вероятности $\pi_1(t)$

$$\dot{\pi}_1(t) = -3\lambda\pi_1 + \lambda$$

решение которого (с учетом начальных условий) имеет вид

$$\pi_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3\lambda t}$$

и, следовательно,

$$\pi_2(t) = \pi_3(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda t}$$

Белан-ВШЭ.л5.у3. Занятость телефонной линии

Телефонная линия может находиться в одном из двух состояний: (1) линия свободна и (2) линия занята. Длительности интервалов времени между разговорами на линии и длительности самих разговоров статистически независимы друг от друга и имеют экспоненциальные функции распределения, $p_1(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ и $p_2(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$, соответственно.

а) Предположим, что в начальный момент времени линия свободна и мы наблюдаем за ее стохастической динамикой в течении времени T. Обозначим через $r_2(T)$ долю времени, которое линия была занята в течении окна наблюдения. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $r_2(T)$.

б) Известно, что в нулевой момент времени и спустя время T линия свободна. Найдите вероятность того, что линия занята в промежуточный моменты времени $0 < t < T$.

Решение а) Рассмотрим стохастическую переменную

$$S(t) = \begin{cases} 1, & \text{если линия свободна в момент t,} \\ 2, & \text{если линия занята в момент t.} \end{cases}$$

Вероятности $\pi_1(t) \equiv \Pr[S(t) = 1]$ и $\pi_2(t) \equiv \Pr[S(t) = 2]$ подчиняются системе уравнений (21) и (22) с начальным условием $\pi_1(0) = 1, \pi_2(0) = 0$. Случайная величина $r_2(T)$, статистикой которой мы интересуемся, может быть представлена как

$$r_2(T) = \frac{\int_0^T I(S(t) = 2)dt}{T}$$

Тогда

$$\langle r_2(T)\rangle = \frac{\int_0^T \langle I(S(t) = 2)\rangle dt}{T} = \frac{\int_0^T \Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1]dt}{T},$$

где $\Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1]$ это вероятность обнаружить процесс в состоянии 2 в момент временя t при условии, что он находился в состоянии 1 в момент времени 0. Очевидно, $\Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1]$ дается решением $\pi_2(t)$ (см формулу (29)) с начальными условиями $\pi_1(0) = 1, \pi_2(0) = 0$. То есть

$$\Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - \exp[-(\lambda+\mu)t])$$

Подставляя Ур. (43) в Ур. (42) и интегрируя, находим

$$\langle r_2(T)\rangle = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\frac{1 - \exp[-(\lambda+\mu)T]}{T}.$$

Итак, в пределе бесконечно большого окна наблюдения, $T \to \infty$, математическое ожидание доли времени, проведенного процессом в состоянии 2, равно статистически равновесной вероятности π_2^{st} найти процесс в этом состоянии.

Решение б) Искомая вероятность может быть вычислена при помощи формулы Байеса. Действительно, с учетом марковского свойства вероятность $\Pr[S(t) = 2, S(T) = 1 \mid S(0) = 1]$ можно представить как

$$\begin{aligned} &\Pr[S(t) = 2, S(T) = 1 \mid S(0) = 1] = \Pr[S(T) = 1 \mid S(t) = 2, S(0) = 1] \Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1] = \\ &= \Pr[S(T) = 1 \mid S(t) = 2] \Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1] \end{aligned}$$

или как

$$\Pr[S(t) = 2, S(T) = 1 \mid S(0) = 1] = \Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1, S(T) = 1] \Pr[S(T) = 1 \mid S(0) = 1]$$

Приравнивая эти два представления, получаем

$$\Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1, S(T) = 1] = \frac{\Pr[S(T) = 1 \mid S(t) = 2] \Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1]}{\Pr[S(T) = 1 \mid S(0) = 1]},$$

где

$$\Pr[S(T) = 1 \mid S(t) = 2] = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)(T-t)}\right),$$

$$\Pr[S(t) = 2 \mid S(0) = 1] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - \exp[-(\lambda+\mu)t]),$$

$$\Pr[S(T) = 1 \mid S(0) = 1] = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)T}.$$

Белан-ВШЭ-л3.з8 О принципе больших отклонений (??)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ - набор независимых случайных величин, каждая из которых имеет функцию распределения $p(x) = (1-q)\delta(x) + q\delta(x-1)$. Используя теорему Гартнера-Эллиса, выясните, удовлетворяет ли функция плотности вероятности $P_N($ a) среднего арифметического $A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ принципу больших отклонений. Если да, то найдите соответствующую функцию Крамера I(a).

(?? хз, о чем задача??)

Вычисляем производящую функцию кумулянтов

$$\lambda(\xi) = \left\langle e^{\xi X} \right\rangle = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \xi x\right) dx\right) = \xi\mu + \frac{\sigma^2\xi^2}{2}$$

Видим, что она дважды дифференцируема. Тогда согласно теореме Гартнера-Эллиса распределение $P_N(a)$ удовлетворяет принципу больших отклонений с функцией Крамера

$$I(a) = \sup_{\xi \in \Re}\{\xi a - \lambda(\xi)\} = \xi_* a - \lambda(\xi_*) = \frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

где $\xi_* = \frac{a-\mu}{\sigma^2}$ - точка максимума функции $\xi a - \lambda(\xi)$. Значит

$$P_N(a) \propto e^{-NI(a)} = e^{-\frac{N(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Белан-ВШЭ-л1.дз-9 Энтропии выпадения орлов (???)

Пусть X это случайная величина, которая равна 1, если в эксперименте с подкидыванием монетки выпадает орел, и равна 0 в случае решки. Далее, Y это независимая от X случайная величина, которая равна 1, если в эксперименте с подкидыванием другой монетки выпадает орел, и равна 0 в случае решки. Наконец, Z это случайная величина равная 1, если в результате подкидывания двух вышеупомянутых монеток выпал хотя бы один орел, и ноль в любом другом случае. Найдите (а) частные энтропии, $S(X), S(Y)$ и $S(Z)$, (б) совместные энтропии, $S(X,Y), S(X,Z)$ и $S(Y,Z)$, а также (в) взаимные информации, $I(X,Y), I(X,Z)$ u $I(Y,Z)$

(?? хз, о чем задача??)

Решение

ФР дисперсия 4х подряд орлов

Задача 10 (12 баллов) Монетку подбрасывают до тех пор пока в череде исходов не встретится последовательность из четырех подряд идущих орлов. Найти дисперсиюо требуемого числа попыток.

(решение другого решателя, тут какая-то копия, оно огромнейшее какое-то. не копирую, потому что все равно не уверен в этом. жесть, а не задача.)

ФР пассажиры на автобусной стоянке

Задача 12 (10 баллов) Пассажиры приходят на автобусную остановку независимо друг от друга со средней частотой λ пассажиров 6 минуту. Прибытие автобусов это пуассоновские события со средней частотой μ автобусов в минуту. Будем предполагать, что вместимость автобуса достаточно велика, чтобы всякий раз принять всех скопивиихся на остановке пассажсров. Кроме того, будем пренебрегать временем, необходимым для посадки пассажиров в автобус.

(а) Вычислить стационариую вероятность p_n найти на остановке ровно n пассажсиров. Каковы условия существования статистически-стационарного режчма?

(б) Вычислить среднее количество людей, ожчдающих автобус на остановке, 6 статистически-стационарном режиме.

(6) Каково среднее число пассажиров, которые уедут с остановки в промежутке времени с 14:00 до 16:00, если $\lambda = 2$ мин $^{-1}$ и $\mu = 0.2$ мин $^{-1}$?

(элементарная задача, школой решается)

$$\pi_n(t+\bar{\varepsilon}t) = (\lambda, \varepsilon_t)\,\pi_{n-1} + (1-h\delta t)\pi_n + (1-\mu dt)\pi_t$$
$$\pi_n = -\alpha\pi_n - \mu\pi_n + h\pi_{n-1}$$
6 в стац случае $\dot{\pi} = 0$
$$\pi_n = \frac{A}{x+\mu}\pi_{n=1}$$
aAa $\pi_0 : \pi_0 = \mu\,(1-\pi_0) - \lambda\pi_0 \to \pi_0 = \dfrac{\mu}{R+M}$
$$\pi_h = \left(\frac{h}{L\pi H}\right)^h \frac{\mu}{L+\mu} = \frac{\mu}{L}\left(\frac{\lambda}{L+\mu}\right)^{h+1}$$
$$\langle h\rangle = \mu = \sum_h n\pi n = \frac{\mu}{\alpha+\mu}\sum_h^h n\left(\frac{\alpha}{L+\mu}\right)^n =$$
$$= \frac{A}{A}$$

Ч-5.49

Цепь Маркова ξt имеет множество состояний $\{-6,-5,\ldots,0,1,\ldots,6\}$. Переходные вероятности $p_{ij} = $ $= \mathrm{P}\left\{\xi_{t+1} = j\left\{\xi_t = i\right\}\right.$ при $i \neq 0$ определяются соотношениями $p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ еслiи } j = i+1 \leqslant 0 \\ 0 \text{ в остальньх случаях.}\end{cases}$ или $j = i-1 \geqslant 0$,, Провести классификацию цепи Маркова и множества ее состояний, если:
а) $p_{0,6} = 1, p_{0,i} = 0 \quad (i \neq 6)$,
б) $p_{0,6} = p_{0,-6} = 1/2, p_{0,1} = 0 \quad (|i| \neq 6)$, В) $p_{0,6} = p_{0,-5} = 1/2, p_{0,4} = 0 \quad (i \neq -5, i \neq 6)$.

Ч-5.50

Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид
$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$
Распределение по состояниям в момент времени $t = 0$ определяется вектором $(0,7; 0,2; 0,1)$. Найти: 1) распределение по состояшиям в момент $t = 2$; 2) вероятность того, что в моменты $t = 0, 1, .2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2; 3) стационарное распределение.

Ч-5.51

Пусть ξ_t- номер состояния в цепи Маркова в момент времени t; $\mathrm{P}\left(\xi_0 = 1\right) = 1$, и матрнца вероятностей перехода имеет вид
$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}$$
положим
$$\eta_t = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \xi_t = 1, \\ 2, & \text{если} \quad \xi_t \neq \mathbf{1}. \end{cases}$$
Показать, что последовательность η_t является цепью Маркова. Найти ев матрицу вероятностей перехода.

Ч-5.52

Случайные величины $\xi_i, t = 1, 2, \ldots$, невависимы и
$$\mathrm{P}\left(\xi_t = 1\right) = p, \quad \mathrm{P}\left(\xi_t = -1\right) = 1 - p = q.$$
Положим $\eta_0 = 0; \eta_{t+1} = \eta_t + \xi_{t+1}$. Является ли последовательность η_t цепью Маркова? Найти $\mathrm{P}\left(\eta_t = m\right), \quad m = $ $= 0, 1, 2, \ldots$

Ч-5.53

Пусть ξ_{f} , $t = 1, 2, \ldots$, - независимые случайные величины, $\mathrm{P}\left(\xi_t = 1\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\xi_t = -1\right) = p$ являются ли цепями Маркова последовательности случайных велитин:
а) $\eta_t = \xi_t\xi_{t+1}$ 5) $\eta_t = \xi_1\xi_2\ldots\xi_t$;
в) $\eta_t = \varphi\left(\xi_t, \xi_{t+1}\right)$, где $\varphi(-1,-1) = 1, \varphi(-1,1) = 2$, $\varphi(1,-1) = 3, \varphi(1,1) = 4$?
Для цепей Маркова найти вероятности перехода за один шаг.

Ч-5.54

В N ячейках последовательно независимо друг or друга равновероятно размещают частицы. Пусть $\mu_0(n)$ - число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n частид. Показать, что последовательность $\mu_0(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, является депью Маркова. Найти вероятности перехода.

Ч-5.55

В N ячейках независимо друг от друга размещаются комплекты, состоящие из m частиц. Частиды одного комплекта размещаются в ячейках по одной, и все возможные выборы m мест из N имеют одинаковые вероятности. Обознатим через $\mu_0(n)$ число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n комплектов. Покавать, что последовательность $\mu_0(n), n = 1, 2, \ldots$ является цепью Маркова. Найти вероятности перехода.

Ч-5.56

Урна вначале содержит N белых шаров. За 1 шаг из урны по схеме случайного равиовероятного выбора вынимают 1 шар и заменяют его новым, который независимо от предыстории продесса - является черным с вероятностью и белым с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим череа ξ_n число белых шаров в урне после n-го шага.

а) Найти $p_{ij} = \mathrm{P}\left\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\right\}, i, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Является ли последовательность ξ_n депью Маркова?

б) Найти $\lim \mathrm{P}_{n \to \infty}\left\{\xi_n = k\right\} = \pi_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

Ч-5.57

В бесконечной чоследовательности занумерованных шаров каждый шар независимо от остальных явля164 ется черным с вероятностью p и белым с вероятностью $q = 1 - p$. Будем считать, что в момент времени $n \in$ е $\{0, 1, \ldots\}$ урна содержит шары с номерами $n + 1$, $n + 2, \ldots, n + N$, и обозначим черев ξ_n тисло белых шаров в урне в момент п. Ответить на те же вопросы, что в задаче н5.56.

Ч-5.58

Матрица $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^{N}$ о неотрипательными эле$+p_{i2} + \ldots + p_{iN} = p_{1i} + p_{2i} + \ldots + p_{Ni} = 1$ для любого $i = = 1, 2, \ldots, N$. Показать, что если депь Маркова ξ с состояниями 1,.., N имеет дважды стохастическую матрицу вероятностей перехода $P \rightsquigarrow \|p_{ij}\|_{i,j=\text{ t, то}}^{N}$ равномерно распределение на множестве $\{1, \ldots, N\}$ является стапионарным для пепи, $\xi_{\text{t.}}^{\text{н.}}$.

Ч-5.59

Пусть $\zeta_0, \xi_1, \ldots$ депь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$, матрицей вероятностей перехода $\|p_{i\ \mathrm{s}}\|$ и стационарным распределением π_f Показать, что есле $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$ n $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$, то $p_{12} = p_{28} = p_{31}$ и $p_{13} \overset{21}{21} = p_{32}$.

Ч-5.60

Пусть $\eta_1; \eta_2, \ldots$ - последовательность невависимых одинаково распределенных случайных величии, и $f(x, y)$ - функдия, принимающая значения в множестве $\{1, \ldots, N\}$. Является ли последовательноогь случайных величин

$$\xi_0\left(P\left(\xi_0 = k\right) = p_k^{(0)}\right), \quad \xi_{t+1} = f\left(\xi_t, \eta_{t+1}\right)_i$$
$$t = 0, 1, 2, \ldots \times$$

цепью Маркова?

Ч-5.61

Пусть $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ последовательность невависимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отревке $[0, 1]$. Показать, что для любого начального распределения $p^{(0)} = \left(p_1^{(0)} \ldots, p_N^{(0)}\right)$ и для дюбой матрицы переходных вероятностей $P = \|p_{13}\|_{i.j=1}^{N}$ можкно указать такие функдии $f(x, y)$ и $g(y)(x$ е $\{1, \ldots, N\}$, $y \in [0, \quad 1])$, что последовательность $\varepsilon_0 g\left(\eta_0\right), \quad \xi_{t+1} = = f\left(\xi_t, \eta_{t+1}\right), t = 0, 1, \ldots$ будет дешью Маркова о начальным распределением $p^{(0)}$ и матрицей вероятностей перехода P.

Ч-5.62

Игральная кость последовательно перекладываетси с одной грани равновероятно на пюбую из четырех соседних независимо от предыдущего. К какому пределу стремится при $t \to \infty$ вероятность того, что при t-м перекладывании кость окажется на грани «6», если сначала она паходилась в этом же положении?

Ч-5.63

Цепь Маркова ξ имеет два состояния: 1 и 2− и матрицу вероятностей перехода $\begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $\tau \equiv = \min\{t \geqslant 1 : \xi_t = 2\}$.

а) Найти условное распределение τ при условии $\xi_0 = 1$.

б) Как иаменится ответ, если матрипа вероятностей перехода будет равна

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 1-p_{\bar{22}} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad 0 < p_{22} < 1?$$

Ч-5.64

Матрица вероятностей перехода $\|p_{6j}\|$ депи Маркова ξ с $n+1$ состояниями имеет вид: $p_{i1} = 1-\alpha, l = = 1, 2, \ldots, n+1; p_{ij} = \alpha/n, i \neq j$. В продессе, начавшемсн из состояния $k, k \neq n+1$, обозначим через τ_n момент первого попадания в состояние $n+1$. Подобрать последовательность $A_n\,(A_n \to \infty$ при $n \to \infty)$ так, чтобы существовал предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\tau_n\right] A_n > x\Big)_t$$

и найти его.

Ч-5.65

Матрица вероятностей перехода цепи Маркова $\xi_n^{(\varepsilon)}$ с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p-8 & p & 8 \\ 0 & e^2 & 1-e^2 \end{pmatrix} s$$

где $0 < p < 1-\varepsilon \leqslant 1$. Предшолагая, что $\xi_0^{(e)} = 1$, рассмотрим случайную величину $\tau_1(\varepsilon) = \min\left\{n \geqslant 1 : \xi_n^{(e)} = 1\right\}$ – время воавращения в состояние 1.

а) Доказать, что при любом $t = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\left\{\tau_1(\varepsilon) = t\right\} = P\left\{\tau_1(0) = t\right\}.$$

б) Показать, что $M\tau_1(0) < \infty$, но $\lim_{\varepsilon\to 0} M\tau_1(\varepsilon) = \infty$.

в) Найти проивводяшую Функцию $\varphi_\varepsilon(s) = Ms^{\tau_1(\varepsilon)}$.

Ч-5.66

Цепь Маркова ξ_a имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$$\mathrm{P}\left\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\right\} = p, \quad \mathrm{P}\left\{\xi_{n+1} = k \mid \xi_n = k\right\} = 1-p,$$

где $k, n = 0, 1, \ldots$ и $0 < p < 1$. Найти распределение ξn, математическое ожидание и дисперсию ξ_n. 166

Ч-5.67

По цепи Мартова ξ_n, описанвой в аадаче

Ч-5.66

, построим последовательность случайных величин

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_k = \min\left\{n : \xi_n = k\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

а) Доказать, что $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$-тоже цепь Маркова. Найти ее переходные вероятности.

б) Найти $M\tau_k, \quad \mathbf{D}_{\tau_k}, \quad \varphi_k(s) = Ms^{\tau_h}$.

Ч-5.68

Цепь Маркова ξ_n имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\} = p, \quad \mathrm{P}\{\xi_{n+1} = 0 \mid \xi_n = k\} = 1-p,$$

где $k, n \in \{0, 1, \ldots\}$ и $0 < p < 1$. Положим

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_k = \min\{n \geqslant 1 : \xi_n = k\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

а) Найти производящую функцию $\varphi_k(s) = Ms^{\tau_k}$ и $M\tau_{k*}$
б) Найти предельное распределение случайной вели- чины $\eta_h = \frac{\tau_h}{M\tau_h}$ при $k \to \infty$, пользуясь результатом п. a) и методом характеристических функций.

Ч-5.69

Переходные вероятности депи Маркова ξ_n при любом $n = 0, 1, \ldots$ определяются равенствами

$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = 1 \mid \xi_n = 0\} = p, \quad \mathrm{P}\{\xi_{n+1} = 0 \mid \xi_n = 0\} = 1-p,$$
$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\} = p,$$
$$\mathrm{P}\{\xi_{n+1} = k-1 \mid \xi_n = k\} = 1-p, k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\tau_{i,j}$ - время перехода цепи ξ_n из состояния i в состояние j :

$$\mathrm{P}\{\tau_{i,j} = t\} = \mathrm{P}\{\min\{n \geqslant 1 : \xi_{\mathrm{n}} = j\} = t \mid \xi_0 = i\},$$
$$t = 1, 2, \ldots$$

а) Найти производящую функцию $_{0,1}(s) = Ms^{\tau_{0,1}}$ и $M\tau_{0,1}$
б) Найтп рекурреитные формулы, связывагощие проиаводящие функции $\psi_{k,k+1}(s) = Ms^{\tau_{k,k+1}}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.
в) Используя результаты пі, а) и б), составить и решить рекуррентные уравнения для $\tau_{k,k+1}, k = 0, 1, \ldots$ Найти асимптотические формулы для М $\tau_{0,\hbar}$ при $k \to \infty$.

Ч-5.70

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые одинаново распределенные случайные велпчнны, $\mathrm{P}\{\xi_1 = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_1 = = -1\} = 1/2; z_0 = 0, z_n = z_{k-1} + \xi_k, k = 1, 2, \ldots$ Положим $\tau_N = \min\{n \geqslant 1 : |z_n| = N\}$. Найти $M\tau_1, M\tau_2, M\tau_3$.

Ч-5.71

Пусть последовательность $z_0, z_1, \ldots$ определена как в задаче н5.70. Покааать, что $M\tau_N = N^2$.

Ч-5.77

Матрица вероятностей перехода P и распределение q по состояниям в момент $t = 0$ депи Маркова $\xi_;$ имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} z/12 & 2/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 2/12 \\ 1/12 & 1/12 & 8/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$
$$q = (1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0).$$

Найти:
а) несущественные состояния;
б) математическое ожидание времени τ до выхода ия множества несущественных состояний;
в) вероятности $p_i^{(\alpha)}, p_i^{(\beta)}$ попадания в классы состоявий $\alpha = \{3; 4\}, \beta = \{5, 6\}$, если начальным состоянием является $i \in \{1, 2\}$;
г) предельное при $t \to \infty$ распределение по состояниям, т. е. величины $\pi_k = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}(\xi_t = k)$.

Ч-5.78

Цепь Маркова ξ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$$\mathrm{P}\left\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\right\} = \frac{1}{a^k s}$$
$$\mathrm{P}\left\{\xi_{n+1} = k \mid \xi_n = k\right\} = 1 - \frac{1}{a^k}$$

где $k, n \in \{0, 1, \ldots\}$ и $a > 1$. Составить рекуррентные уравнения для величия $p_k^{(n)} = \mathrm{P}\left\{\xi_n = k\right\}$ и с их помощью найти $\mathrm{M}a^{\xi_n}$ и $\mathbf{D}a^{kn}$.

Ч-5.79

Показать, что если все собстяенные числа $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ различны, то элемевты матрицы $A^m = \left\|a_{ij}^{(m)}\right\|_{i,j=1}^n$ представляются в виде

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{h=1}^n c_{ij}^{(h)} \lambda_h^m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Ч-5.80

Показать, что если матрипа $A = \|a_{ij}\|_{i,y=1}^n$ имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, причем кратность λ_3 равnа $s_i, s_1 + \ldots + s, = n$, то элементы матрицы $A^m = \left\|a_{ij}^{(m)}\right\|_{i,j=1}^n$ представляются в виде

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^r \lambda_k^m \sum_{l=0}^{s_k - 1} c_{ij}^{(k,l)} m^l, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Ч-5.81

Используя задачи н5.795.80, показать, что получение формулы для вероятности перехода за n пгагов из состояния i в состояние j в депи Маркова с N состояниями может быть сведено г нахождешию собстбеяных чисел матрицы $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ вероятностей перехода ва один шаг, вычнслеңию $P, P^2, \ldots, P^{N-1}$ и решению системы линейпых уравнений.

Ч-5.82

Матрица вероятностей перехода $P = \|p_{ij}\|$ цепи Маркова ξ, с состояний 1 и 2 овределяется формулами

$$p_{11} = 1 - \alpha, p_{12} = \alpha, p_{21} = \beta, p_{22} = 1 - \beta.$$

Найти вероятности $p_{ij}(t)$ перехода за время t и стационарные вероятности $\pi_.$.

Ч-5.83

Для деши Маркова ξ_t, рассмотрешной в задачя н5.82, обозначим через $v_1(t)$ число понаданий в состояние 1 за время t. Показать, что для любого $j = 1, 2$ при $t \to \infty$

$$M\left\{v_1(t) \mid \xi_0 = j\right\} = \frac{\nu\beta}{\alpha + \beta} t(1 + o(1)),$$
$$\mathrm{D}\left\{v_1(t)\xi_0 = j\right\} = o\left(t^2\right).$$

Ч-5.89

Вероятность того, что атом радиоактивного элемента, существующий в момент t, распадется на интервале $(t, t+h)$, при $h \downarrow 0$ имеет вид $\alpha h + o(h)$ и не завпсит от предыстории процесса. Найти:

а) вероятность того, что время τ до распада атома будет больше $t, > T\} = 1/2$,

в) плотность $p_n(t)$ распределения времгени до распада хотя бы одного из n существующих в момент $t = 0$ и независимо ведуших себя атомов.

Ч-5.90

Пусть $\boldsymbol{\xi}_t$– депь Маркова с непрерывным временем и множеством состояний $\{1,2\}$. Вероятности перехода $p_{ij}(h)=P\left(\xi_{t+\lambda}=j \mid \xi_t=i\right\}$ удовлетворяют условиям

$$p_{12}(h)=\alpha h+o(h), \quad p_{21}(h)=\beta h+o(h), \quad h+0.$$

Найти $p_{ij}(t), t \geqslant 0, i, j \in\{1,2\}$.

Ч-5.91

Пусть $p^{(\alpha, \beta)}(t)=\left\|p_{ij}^{(\alpha, \beta)}(t)\right\|$ – матрица вероятностей перехода ва время t депи Маркова ξ, описанной в аадаче н5.90, а $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – стохастическая матрица. Доказать, что для лююбого фиксированного чвсла $u>0$ цепь Маркова ξ_t удовлетворяющая условию

$$P^{(\alpha, \beta)}(u)=A,$$

существует тогда, и только тогда, когда $a_{11}+a_{22}>1$.

Ч-5.92

Для цепи Маркова ξ_i, определенной в задаче н5.90, обозначия через $\tau_k(t) \quad (k=1,2)$ суммарную длительность пребывапия цепи в состоявви k за время t. Найти $m_i(t)=\mathcal{M}\left\{\tau_1(t) \mid \xi_0=i\right\}$ и главный член асимптотической формулы дая $t \rightarrow \infty$ $b_i^2(t)=\mathrm{D}\left\{\tau_1(t) \mid \xi_0=i\right\}$ при $t \rightarrow \infty$

Ч-5.95

Цепь Маркова ξ с непрерывным временем имеет множество состояний $\{0,1, \ldots, N\}$, а вероятности $p_{ij}(h)=\mathrm{P}\left\{\xi_{1+\Lambda}=j \mid \xi_t=i\right\}$ перехода из состояния i в состояние j ва время h удовлетворяют при $h \downarrow 0$ ус ловиям

$$\begin{aligned}
p_{00}(h)&=1-\alpha h+o(h), \quad p_{NN}(h)=1-\beta h+o(h), \\
p_{ii}(h)&=1-(\alpha+\beta) h+o(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \\
p_{t-1, i}(h)&=\alpha h+o(h), \\
p_{i, i-1}(h)&=\beta h+o(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \\
p_{ij}(h)&=o(h), \text{ если } |i-j|>1,
\end{aligned}$$

а) Составить систему дифферендиялььиг уравнений для $p_{ij}(t), 0 \leqslant i, j \leqslant N, t \geqslant 0$.

б) Найти $\pi_j^{(N)}=\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t), j=0,1, \ldots, N_3$ как функции от $\theta=\alpha / \beta$. Показать что если $\theta=1$, то $\pi_0^{(N)}=\ldots \ldots=\pi_N^{(N)}=\frac{1}{N+1}$.

в) В случае $\theta<1$ найти $\pi_j=\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_j^{(N)}, j=0,1, \ldots$, а в случае $\theta>1$ найти $\pi_j^*=\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_{N-1}^{(N)} j=0,1, \ldots$

5.1.4 Задачи на приложения Марковских цепей

(!!!??? ну теорию доучить нужно, пока это вообще не продумал еще.)

Белан-ВШЭ-л6.з.4 Стоянка автомобилей

Автомобили приезжают на стоянку бесконечной вместимости независимо друг от друга в случайные моменты времени со средней частотой λ. Каждый автовладелец оставляет свой автомобиль на случайное время, имеющее экспоненциальную функцию плотности вероятности с параметром μ. Найдите среднее число занятых парковочных мест $\langle n(t)\rangle$ как функцию от времени t, если в нулевой момент на стоянке находилось m автомобилей.

Решение Используя Ур. (48) и (49), можно вывести замкнутое дифференциальное уравнение на эволюцию статистического момента $\langle n(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n(t)$

$$\frac{d\langle n(t)\rangle}{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\dot{\pi}_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left[\lambda\pi_{n-1}(t) - (\lambda+n\mu)\pi_n(t) + (n+1)\mu\pi_{n+1}(t)\right] = (62)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\lambda(n-1)\pi_{n-1}(t) + \lambda\pi_{n-1}(t) - \lambda n\pi_n(t) - \mu n^2\pi_n(t) + \mu(n+1)^2\pi_{n+1}(t) - (63)\right.$$
$$\left. -\mu(n+1)\pi_{n+1}(t)\right] = \lambda\langle n(t)\rangle + \lambda - \lambda\langle n(t)\rangle - \mu\left\langle n^2(t)\right\rangle + \mu\left\langle n^2(t)\right\rangle - \mu\pi_1(t) -$$
$$-\mu\langle n(t)\rangle + \mu\pi_1(t) = \lambda - \mu\langle n(t)\rangle$$

решение которого с начальным условием $\langle n(0)\rangle = m$ имеет вид

$$\langle n(t)\rangle = me^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right).$$

За время порядка μ^{-1} этот ответ релаксирует к стационарному значению $\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right)$.

Белан-ВШЭ-л6.з.5 Запросы на сервер (????)

5 Запросы поступают на сервер независимо друг от друга со средней частотой λ. Лист ожидания сервера имеет конечную вместимость N и каждый новый запрос добавляется в очередь, если в момент его прибытия в листе ожидания есть свободное место. Если же лист ожидания оказывается полностью заполненным в момент поступления очередного запроса, то этот запрос отражается. Сервер обслуживает запросы по одному в порядке их поступления. Время обработки одного запроса это случайная величина, имеющая экспоненциальную функцию распределения с параметром μ.

а) Вычислите вероятность p_n обнаружить ровно n задач на сервере в статистически-стационарном режиме его работы.

б) Вычислите среднее число задач в листе ожидания.

(?? не решал)

Белан-ВШЭ-л6.з.6 Автобус и пассажиры (!?!?)

Пассажиры приходят на автобусную остановку независимо друг от друга со средней частотой λ пассажиров в минуту. Прибытие автобусов это пуассоновские события со средней частотой μ автобусов в минуту. Будем предполагать, что вместимость автобуса достаточно велика, чтобы всякий раз принять всех скопившихся на остановке пассажиров. Кроме того, будем пренебрегать временем, необходимым для посадки пассажиров в автобус.

(а) Вычислить стационарную вероятность p_n найти на остановке ровно n пассажиров. Каковы условия существования статистически-стационарного режима?

(б) Вычислить среднее количество людей, ожидающих автобус на остановке, в статистически-стационарном режиме.

(в) Каково среднее число пассажиров, которые уедут с остановки за период времени длительностью T в статистически-стационарном режиме?

Решение (?!?! решал ее, элементарно делается, потом допишу)

Белан-ВШЭ-л6.з.7 Очереди к кассам в магазине

В магазине работают 2 кассы самообслуживания. Обслуживание одного покупателя на любой из касс занимает случайный промежуток времени, имеющий экспоненциальное распределение с параметром μ. Покупатели подходят к кассам в пуассоновские моменты времени со средней частотой λ, выстраиваясь в случае необходимости в единую очередь. Очередной покупатель проходит на ту кассу, которая освобождается первой. Предполагая, что система находится в статистически стационарном режиме, найдите

(а) вероятность того, покупателю, пришедшему на кассы в случайный момент времени, не придется стоять в очереди;

(б) среднее число людей, ожидающих своей очереди.

Будем обозначать через $\pi_n(t)$ вероятность того, что в момент времени t возле касс самообслуживания находятся ровно n покупателей. Эти вероятности подчиняются следующему управляющему уравнению

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t)$$
$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = \lambda\pi_0(t) - (\lambda+\mu)\pi_1(t) + 2\mu\pi_2(t)$$
$$\frac{d\pi_n(t)}{dt} = \lambda\pi_{n-1}(t) - (\lambda+2\mu)\pi_n(t) + 2\mu\pi_{n+1}(t), \quad \text{при } n \geq 2$$

Отсюда легко находим, что в статистически стационарном режиме $\pi_n^{st} = 2\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n \pi_0^{st}$ для $n \geq 1$. С учетом условия нормировки, $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n^{st} = 1$, окончательно имеем

$$\pi_0^{st} = \frac{1-\frac{\lambda}{2\mu}}{1+\frac{\lambda}{2\mu}}$$

$$\pi_n^{st} = 2\frac{1-\frac{\lambda}{2\mu}}{1+\frac{\lambda}{2\mu}}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n, \quad \text{при } n \geq 1$$

Видим, что стационарное решение существует при условии $\lambda < 2\mu$.

а) Вероятность того, покупателю, пришедшему на кассы в случайный момент времени, не придется стоять в очереди очевидно равна $\pi_0^{st} + \pi_1^{st}$.

б) Среднее число людей, ожидающих своей очереди равно $\sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)\pi_n^{st}$.

Белан-ВШЭ-л6.з.8 Очереди на прививки

Пациенты приходят в пункт вакцинации без предварительной записи и независимо друг от друга со средней частотой λ. Каждый пациент, дождавшись своей очереди, сперва попадает в кабинет терапевта, где проводит случайное время, имеющее экспоненциальную функцию распределения с параметром μ_1, а затем направляется в прививочный кабинет для прохождения процедуры вакцинации, которая длится экпоненциально распределенный с параметром μ_2 случайный промежуток времени.

(а) При каких условиях в такой системе существует статистически стационарное состояние? Предполагая, что система находится в статистически стационарном режиме, определите (б) среднее число пациентов, ожидающих своей очереди в кабинет терапевта;

(в) среднее число пациентов, ожидающих своей очереди в прививочный кабинет.

(г) вероятность p_k обнаружить в пункте вакцинации ровно k человек, прийдя туда в случайный момент времени.

Решение (крутая задача, но не смотрел пока что.)

а) Описанная в условии задачи система массового обслуживания представляет собой тандем из двух последовательных M/M/1 систем. Очевидно, что происходящее во второй системе не оказывает влияния на стохастическую динамику первой системы. Поэтому статистически-стационарная частная функция распределения вероятностей числа пациентов в первой системе имеет вид

$$\pi_n^{(1)} = \left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n$$

а само условие существование стационара дается неравенством $\lambda < \mu_1$. Далее, очевидно, что в статистически стационарном режиме, интенсивность потока пациентов, прибывающих в пункт вакцинации, равна интенсивности потока пациентов, покидающих кабинет терапевта. Словом, на вход второй системы тандема подается поток интенсивности λ. Значит частная функция распределения вероятностей числа пациентов во второй системе дается выражением

$$\pi_m^{(2)} = \left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m$$

при условии, что $\lambda < \mu_2$. Итого получаем, что статистический стационар имеет место, если $\lambda < \min(\mu_1, \mu_2)$.
б) Среднее число пациентов, ожидающих своей очереди в кабинет терапевта, равно

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n^{(1)} = -1 + \pi_0^{(1)} + \left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n = \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1-\lambda)}$$

(в) Среднее число пациентов, ожидающих своей очереди в прививочный кабинет: $\frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_2-\lambda)}$

г) Вероятность p_k обнаружить в пункте вакцинации ровно k человек, прийдя туда в случайный момент времени, может быть записана как

$$p_k = \Pr[n+m=k] = \sum_{n=0}^{k} \pi_{n,k-n}^{st}$$

где $\pi_{n,m}^{st}$ - совместная функция распределения количеств пациентов в обоих системах. Последняя факторизуется в произведение частных вероятностей

$$\pi_{n,m}^{st} = \pi_n^{(1)}\pi_m^{(2)} = \left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m$$

в чем легко убедиться подстановкой этого анзаца в систему управляющих уравнений тандема

$$\begin{aligned}
&\dot{\pi}_{0,0} = -\lambda\pi_{0,0} + \mu_2\pi_{0,1} \\
&\dot{\pi}_{n,0} = \lambda\pi_{n-1,0} - (\lambda + \mu_1)\,\pi_{n,0} + \mu_2\pi_{n,1}, \qquad \text{при } n \geq 1 \\
&\dot{\pi}_{0,m} = \mu_2\pi_{0,m+1} - (\lambda + \mu_2)\,\pi_{0,m} + \mu_1\pi_{1,m-1}, \qquad \text{при } m \geq 1, \\
&\dot{\pi}_{n,m} = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\,\pi_{n,m} + \mu_1\pi_{n+1,m-1} + \mu_2\pi_{n,m+1} + \lambda\pi_{n-1,m}, \qquad \text{при } n, m \ (78)
\end{aligned}$$
(780)

Значит

$$p_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^k \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^k \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k+1} - 1}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1}$$

5.2 Задачи элементарной математической статистики (????)

(ничего пока не шарю, нужно потом когда-то разобраться.)
(пока мало что тут есть.)

5.2.1 Задачи про параметры математической статистики

Ч-6.1

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n-$ едучайная выборка с $x_k = = a, \mathrm{D}x_k = \sigma^2, \mathrm{M}\,(x_k - a)^4 < \infty, k = 1, \ldots,$ n. Найти математическое ожидание величины

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_h - \bar{x})^2 \quad \left(\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Является ли s^2 состоятельной оденкой σ^2 ?

Ч-6.2

Найти математическое ожидание ш дисшерспю эмпирического момента $m_r = \frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}$ невависимой Вцюоркки, соответствующей случайной величине ξ с $M\xi^k = a_k, 1 \leqslant k \leqslant 2r$

Ч-6.3

По неоднородной выборке $x_1, \ldots + x_{n_1}$ где $x_k, k = \Rightarrow 1, \ldots, n,$ независимы, $x_n = a, \mathrm{D}x_k = \sigma_k^2\,(\sigma_k$ иввестны), вайти несмещенную лииейную относительно $x_n \quad (k = = 1, \ldots, n\ )$ оценку а параметра a, которая пимеет ваименьшую возможную дисперсию.

Ч-6.4

*. Пусть $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}\,(i = 1_2 \bullet .5I) -$ независимые нормально распределенные велпчины с параметраМ $\left(a, \sigma_1^2\right)$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik_i} \quad s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{k=1}^{n_i}(x_{ik} - \bar{x}_i)^2.$$

Является ли оденка

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{1} c_i\bar{x}_{iv} \quad c_i = \frac{s_i^2}{s_1^2 + \ldots + s_1^2}$$

несмещенной оценкой параметра a ?

Ч-6.5

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - независимые одиняково распределенные случайные величины с $\mathrm{D}x_1 > 0, \mathrm{M}x_1^4 < \infty$. Положим

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{k_\varepsilon} \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 .$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tilde{x} - Mx_1}{s/\sqrt{n}} \leqslant x\right)$$

Ч-6.6

Пусть (x_1, y_1),.., (x_n, y_n) - независимая выборка, соответствующая случайному вектору. (ξ, η), Т. θ_0 $\mathbf{P}\left(x_i \leqslant x, y_1 \leqslant y\right) = \mathbf{P}(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y)$. Показать, что величина

$$m = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})_i$$

где

$$\vec{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{k\mathbf{1}} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ks}$$

является несмещенной и состоятельной оценкой сор (ξ, η).

Ч-6.7

Пусть μ_n - число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностьо успеха p в каждом испытании. Найти оценку наибольпего правдоподобия p параметра p. Доказать ее несмещенность и состоятельность.

Ч-6.8

Пусть μ_n - число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытанин. Построить для p асимптоти чески доверительный интервал с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$.

Ч-6.9

Успольауя таблицу случайных чисел, получить реализациго выборки $x_1, \ldots, x_n$ где x_k равномерно рас- знаками; $n = 50$). Найти:

а) вариационный ряд $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$;

б) эмпирическую фупкцию распределепия (построить ее график и график теоретической функции распределения);

в) $\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + \ldots + x_n\right)$ (сравнить с x_k); т) $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2$ (сравнить с D x_k).

Ч-6.10

Испольауя таблипу нормальво распределенных случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, \ldots$ $\because, x_n$, где x_h имеет нормальное распределение с параметь рами $a = Mx_k = 0,5, \sigma^2 = \mathrm{D}x_n = 1; n = 50$. Найтн: а) вариационный ряд, б) эмпирическуюо функцию распределения, в) $\bar{x}, r)s^2$ (см. задачу 6.9).

Ч-6.11

По выборке, полученной в задаче н6.10н, построить доверителыный интервал для a (считая a й б неизвествыми) с доверительной вероятнотью 0,95.

Ч-6.12

Используя метод напбольшего правдоподобия, найти по выборке $x_1, \ldots, x_n$, где $\mathrm{P}\left(x_k = m\right) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, m =$ $= 0, 1, \ldots,$ оценку λ параметра λ. Будет ли ата оценка несмещенной и состоптедьной? Найти $M\lambda^*, \mathrm{D}\lambda$ *.

Ч-6.13

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - выборка, соответствунщая показательному распределению с параметром λ. Найти оценку максимальпого правдоподобия λ для λ. Вычислить $M\frac{1}{\lambda^*}$, D $\frac{1}{\lambda^*}$.

Ч-6.14

Для оценки параметров a, b, c имеются трш незавпсимые выборки $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n$. Известно, что $c = a+b$ и величины a_i, b_i, c_i распределены нормально с М $a_i = a, Mb_i = b$, М$cc_i = c$. Дисперсии $\mathrm{D}a_i = = \sigma_a^2, \mathrm{D}b_i = \sigma_b^2, \mathrm{D}c_i = \sigma_c^2$ известны. Найти:

а) оценки наибольшего правдоподобия a^*, b^*, с параметров a, b, c испольауя для каждого параметра только соответствуюпую ему выбоорку, а также найти $a^*, Mb, Mc^*, \mathrm{D}a^*, \mathrm{D}b^*, \mathrm{D}c^*$;

б) оценки наибольшего правдоподобия a^{**}, b^{**}, c^{**}, исдозьвуя сразу три выборки и связь $c = a + b$, и также найти $Ma^{**}, Mb^{**}, Mc^{**}, \mathrm{D}a^{**}, \mathrm{D}b^{**}, \mathrm{D}c^{**}$.

Ч-6.15

Пусть $y^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right), k = 1, \ldots, n, -$ независимые нормально распределенные случайные векторы, $My_i^{(k)} = a_i, \mathrm{D}_i^{(k)} = \sigma_i^2, i = 1, 2, \operatorname{cov}\left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right) = \rho\sigma_1\sigma_2$.ПП раметры σ_1, σ_2, ρ известны. Найти:

а) оценку максимального правдоподобия (a_1^*, a_2^*) параметров (a_1, a_2) по выборке $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$;

б) оденку максимального правдоподобия a_i^{**} параметра a_i по выборке $y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(n)}$; В) $Ma_i^*, \mathrm{D}a_i^*, Ma_i^{**}, \mathrm{D}a_i^{**}$.

Ч-6.16

*. Пусть $y^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right), k = 1, \ldots, n, -$ независимые нормально распределенные случайные векторы, $My_1^{(k)} = a_{1,}, My_2^{(k)} = a_2, \mathrm{D}_i^{(k)} = 1 (i = 1, 2), \operatorname{cov}\left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right) = = \rho_k (k = 1, \ldots, n)$. Параметры ρ_k известны. Найти:

в) оценки максимального правдоподобия a_1^*, a_2 параметров a_1, a_2 по выборке $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$;

б) оценку максимального правдоподобия a_1^{**} параметра a_1 по выборке $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(n)}$

Ч-6.19

Для величины $A = \alpha + \beta a + \gamma b$ получены оценки

$$A_{\mathrm{I}}^* = \alpha + \beta z_1 + \gamma z_3, \quad A_2^* = \alpha + \beta z_2 + \gamma z_3.$$

где α, β, γ - известные постоянные, z_1, z_2, z_3 - независимые оценки неизвестных параметров: $Mz_3 = b, \quad Mz_1 = = Mz_2 = a; \quad D_{z_i} = \sigma_i^2, i = 1, 2, 3$. Подобрать постоянные c_1, c_2 так, чтобы оценка $A^* = c_1 A_1^* + c_2 A_2$ была несмещенной и имела средиа несмещенных оценок наименьшую дисперспю.

Ч-6.20

Пусть z_1, z_2, z_3 - несмещенные оценкн параметра $a; Dz_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \operatorname{cov}(z_1, z_2) = \rho, \operatorname{cov}(z_i, z_3) = 0$ $(i = 1, 2)$. Найти несмещенную линейную оценку $z = = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$ параметра a с наименьшей возможной дисперсией и дисперспю атой огенки. Рассмотреть случаті: а) $|\rho| < 1$, б) $\rho = -1$, в) $\rho = 1$.

Ч-6.21

Функция $y = Ax$ измерена в точках $x_1, \ldots, x_{\mathrm{m.}}$. Пусть результаты измерений являются реалпзацией незавнспмых случайных величин $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$, у которых М$\tilde{y}_i = y_i = Ax_i, D\tilde{y}_i = \sigma^2 < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. Найти: ших квадратов, т. е. минимизируя по A выражение $I(A) = \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - Ax_i)^2$

б) MA_n^*, DA_{n*} Доказать, что оценка A_n состоятельиа, если $X_n^2 = = \sum_{i=1}^n x_i^2 \to \infty$ при $n \to \infty$.

6.2*. Проведено n иамерений значений функцій $= Ax$ и ее аргумента x. Пусть результаты измерений являются реализацней n независимых двумерных случайпых векторов $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$. $\quad (i = 1, \ldots, n)$, у которых координаты

независимы, М $\tilde{x}_i = x_i$, М $\tilde{y}_i = y_i = Ax_i, \quad D\tilde{x}_i = \sigma^2$, D $\tilde{y}_i = \sigma^2$ Найти:

а) оценку A_n параметра A_n, минимизируя по A и $x_1, \ldots, x_n$ выражение

$$I(A, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - Ax_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - x_i)^2 .$$

б) Показать, что оценка A_n состоятельна, если при

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \to \infty, \quad n/X_n^2 \to 0.$$

Ч-6.23

Функция $y = Ax$ измерена n_1 раз в точке $x_1, \ldots \because, n_h$ раз в точке x_k. Пусть результаты измерений y_{ij} $(j = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, k)$ некоррелированы и имеют вид

$$y_{ij} = Ax_i + \delta_{ij},$$

где $M\delta_{ij} = 0, D_{ij} = \sigma^2$.

а) Найти оценку А параметра A, используя метод наименьших квадратов, т. е. минимизируя по A вырач жение

$$I(A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - Ax_i\right)^2.$$

б) Найти MA и DA.

Ч-6.24

В предыдущей задаче обозначим

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Подобрать $c_1, \ldots, c_k$ так, чтобы оценка

$$A^* = c_1\ddot{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \ldots + c_k\bar{y}_k$$

была несмещенной и имела наименьшую дисперсию. Найти D$A*$ при наилучщем выборе $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ч-6.25

Из урны, содержащей N белых и черных шаров, производится выборка объема n с возвращением. Пусть μ_n - число белых шаров в выборке, а M - неизвестное число белых шаров в урне. Для оценкн величины $p = = M/N$ псдользуется статистика $p_n^* = \mu_n/n$. Найти Mp_nDp_n.

Ч-6.26

Из урны, содержащей N белых и черных шаров, производится выборка объема n без воввращения. Пусть 182 $\boldsymbol{\mu}_n$ - qясло белых шаров в выборке, а M - пеизвестное натальное число белых шаров в урне. Для оценки ведичины $p = M/N$ используется статистика $p_n^{**} = \mu_n/n$. Найти $\mathrm{Mp}_n^{**}, \mathrm{D}p_n^{**}$.

Ч-6.27

Для сравнения точности оценок p_n^*, p_n^{**}, определениых в задачах н6.25,н6.26, найти $\lim_{n\to\infty}\left(D_p^{**}/Dp_n^*\right)$ в следующих случаях: а) $n \to \infty, \frac{n}{N} \to \gamma \quad (0 < \gamma < \infty)$;

б) $n \to \infty, n/N \to 0$.

Ч-6.28

Из урны, содержащей неизвестное чнсло шаров N (шары завумерованы), производится выборка объема n с возвращением. Для оценки числа N используется величина $1/\eta_n$, где

$$\eta_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{N} \xi_k \left(\xi_k - 1\right),$$

ξ_k - qисло появлений шара с номером k в выборке. Найтп $M\eta_n$ и асимптотическуго формулу для D_n при $n,\ N \to \infty, n/N \to \alpha \in (0, \infty)$.

Ч-6.33

Чтобы оценить ширину кольца, образованного двумя окрущностями с общим центром, ивмерялись их радиусы R и r, т. е. была получена выборка $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n$, образованная независимыми случайными величинами, которые имеют нормальные распределения с $\mathrm{M}y_i = R, \quad \mathrm{M}x_i = r \quad (R > r), \mathrm{D}x_i = \mathrm{D}y_i = \sigma^2, i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\bar{x} = \left(x_1 + \ldots + x_n\right)/n$ и $\bar{y} = \left(y_1 + \ldots + y_n\right)/n$. Для оценок $\bar{a} = \bar{y} - \bar{x}, a^* = \max(0, \bar{y} - \bar{x})$ ширины кольца $a = = R - r$ найти: $\bar{a}, \mathrm{M}a^*, \sqrt{\mathrm{M}(\bar{a} - a)^2}, \sqrt{\mathrm{M}\left(a^* - a\right)^2}$. Вычислить эти величины шри $R = 1001$ м., $r = 1000$ м., $\sigma = 10$ м., $n = 200$.

Ч-6.34

Независимые наблюдения $\theta_{1,}^{*}, \ldots, \theta_n$ имеют не известные математические ожидания $\theta_i^* = \theta_i$ и известные дисшерсии $D\theta_i^* = \sigma_i^2, \quad i = 1, \ldots,$ n. Дли оценки линейной комбинацив $I = c_1\theta_1 + \ldots + c_n\theta_n$ с заданными $c_1, \ldots, c_n$ используются статистики

$$I_N = c_1\theta_1^* + \ldots + c_N\theta_N^* \quad (1 \leqslant N \leqslant n).$$

а) Доказать, что I_n - несмещенная, а I_N шри $N < n-$ смещенная оценка I.

б) Найти $M\left(I_N - I\right)^2$. При каких условиях среднеквадратическое отклонение смещенной оценки I_{n-1} меньше среднеквадратического отклонения несмещенной оценKu I_n ?

Ч-6.35

Используя критерий χ^2, проверить гипотезу о том, что выборка, полученная в задаче н6.9, соответствует равномерному распределению на отрезке $[0,1]$. ровень знатимости $\alpha = 0,05$.

Ч-6.36

Используя критерий χ^2, проверить гипотезу о том, что выбарка, полученная в задаче н6.10н, соответствует нормальному распределению; параметры a и σ считать неизвестными. У ровень вначимости положить равным 0,05. сона для различения по выборке $x_1, \ldots, x_n$ гинотез $H_1 : x_h$ распределены нормально с параметрами $\left(a_1, \sigma^2\right)$, $H_2 : x_k$ распределены нормально с параметрами $\left(a_2, \sigma^2\right)$.

Ч-6.40

*. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - выборка. Гипотеза H_1 состоит в том, что x_i равномерно распределены на интервале $(0,1)$ и независимы, а гипотеза H_2- в том, что x_i независимы и имеют непрерывно дифференцируемую плотность распределения $g(x); g(x) \neq 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $g(x) = 0$ при $x \notin [0,1]$. Разобьем $[0,1)$ на N полуинтервалов $\left[0, \frac{1}{N}\right), \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \ldots, \left[\frac{N-1}{N}, 1\right)$ и обозначим через μ_a число полуинтервалов, в которые не попало ни одно из внатений x_i.П ри гипотевах H_1 и H_2 найти $a_3 = = \lim\left(\mathrm{M}_0/N\right), j = 1,2$, ногда $n/N \to \gamma \in (0,\infty), n, N \to \infty$.

Ч-6.41

Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ положения точек пуассоновского потока с неизвестной интенсивностью λ.Н$_{\text{ай}}$ти: а) оценку максимального правдоподобия λ_n параметра λ, построенную по $\tau_1, \ldots, \tau_n$; б) $M\lambda_n^*, \mathrm{D}\lambda_n$.

Ч-6.42

Пусть $\tau_{12}(t)$ - число переходов в цепи Маркова, определенной в аадаче н5.82, из состояния 1 в состояние 2 ва время t.

а) Найти $\lim_{t\to\infty} M\frac{\tau_{12}(t)}{t} \times \lim_{t\to\infty} \mathrm{D}\frac{\tau_{12}(t)}{t}$.

б) Является ли величина $\tau_{12}(t)/t$ состоятельной оценкой параметра $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ при $t \to \infty$?

5.3 Задачи, возникающие при применениях теории вероятностей

(пока избры, но вообще тут много можно интересного порешать)

(наверное, крутые очень задачи, просто не до них абсолютно. доработаю базу - буду тренироваться, если захочу.)

5.3.1 Задачи теории вероятностей в физике

(тоже такая часть каталога.)

Избры-1 Теорема Вика

На лекции было получено, что

$$\left\langle \exp\left(-ip\frac{\xi}{N}\right)\right\rangle \approx \exp\left(-\frac{p^2\left\langle\xi^2\right\rangle}{2N^2}\right)$$

1. Для начала найдите моменты случайной величины, т.е. $\left\langle\xi^n\right\rangle = M_n$ 2. Рассмотрите усреднение в левой части выражения для случайной величины ξ, распределенной по Гауссу с нулевым средним.

Избры-2

Пусть случайная величина ξ нормально распределена с нулевым матожиданием и дисперсией $\left\langle\xi^2\right\rangle = \sigma^2$. Как распределена случайная величина ξ^2 ? А как распределена ξ^n?

Избры-3

В этой задаче попробуем проверить корректность нашего понимания вероятности. Пусть мы измеряем величину ξ и провели N измерений, которые дали нам результаты $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$. По этим результатам мы построили плотность вероятности: $\rho_e(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta\left(\xi - \xi_i\right)$. Мы будем считать, что все ξ_i– независимые случайные величины с полностью вероятности $\rho(\xi)$. Мы будем обозначать чертой - усреднение по ρ_e т.е. $\overline{f(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\rho_e(\xi)d\xi$. Треугольными скобками будем обозначать усреднение по реализация, то есть $\left\langle\delta\left(\xi - \xi_i\right)\right\rangle = \rho(\xi)$. - Покажите, что функция, полученная с помощью эксперимента в среднем совпадает с истинной функцией распределения: $\left\langle\rho_e(\xi)\right\rangle = \rho(\xi)$. Таким образом $\langle\overline{f(\xi)}\rangle = \langle f(\xi)\rangle$ - Вычислим теперь "дисперсию"для экспериментальной функции распределения:

$$\left\langle\left\langle\rho_e\left(\xi'\right)\rho_e\left(\xi''\right)\right\rangle\right\rangle = \left\langle\rho_e\left(\xi'\right)\rho_e\left(\xi''\right)\right\rangle - \left\langle\rho_e\left(\xi'\right)\right\rangle\left\langle\rho_e\left(\xi''\right)\right\rangle$$

- Предыдущий пункт помогает нам понять во сколько в среднем мы отклоняемся при вычислении различных экспериментальных величин. Выразите следующую величину через $\left\langle f^2(\xi)\right\rangle$:

$$\left\langle\{\overline{f(\xi)}\}^2\right\rangle - \langle\overline{f(\xi)}\rangle^2$$

Избры-4

В этой задаче нам предстоит разобраться с условиями применимости ЦПТ. Нас будет интересовать случайная величина $\xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \xi_i$. Все ξ_i– независимые случайные величины. Нас интересовала производящая функция этой величины:

$$f(p) = \left\langle e^{-ip\xi}\right\rangle = \left\langle\prod_i e^{-i\frac{p}{N}\xi_i}\right\rangle$$

Ключевым местом в доказательстве было предположение о малости величины в экспоненте. Попробуем понять применимость этого приближения. Для этого разложим величину $\left\langle e^{-ip\xi}\right\rangle$ до 4-го порядка по $1/N$ и выполним усреднение. Наша цель - представить результат этого усреднения в виде $f(p) = \exp(G(-ip/N))$. Где $G(x) = \sum_k \Delta_k \frac{x^k}{k!}$

- Выразите первые 4 коэффициента Δ_k через моменты величины $\xi - M_l = \left\langle\xi^l\right\rangle$
- Получите условие на то, что плотность вероятности можно восстановить используя метод перевала
- Воспользуйтесь этим условием для задачи, разобранной на лекции и получите правильное условие применимости ЦПТ

Часть IV
Другие темы теории вероятностей

6 Введение в случайные процессы

Приведем основы описания стохастических систем и покажем, как можно добавлять случайные процессы в любые физические модели.

6.1 Основы теории случайных процессов в двух словах

Разберем вкратце переход теории вероятности в теорию случайных процессов.
(по Жуковскому мфти)

6.1.1 Типичные случайные процессы

(где-то уже писал ведь их, наверное, в случпроцах, там разберу, вставлю сюда)

ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

В настоящей главе, а также в третьей и четвертых главах мы поговорим о важнейших примерах случайных процессов.

В этой главе речь пойдет о ветвящихся процессах.

Модель ветвящихся процессов была впервые предложена Ф. Гальтоном и Г. Ватсоном в 1873 году в связи с анализом вырождения аристократических фамилий Великобритании.

Физическая модель: в дискретные моменты времени частицы распадаются на случайное количество таких же частиц. Число потомков каждой частицы имеет одно и то же распределение.

Формальная математическая модель выглядит следующим образом.

Математическая модель: пусть ξ - случайная величина со значениями в $\mathbb{Z}_+$, а $\left\{\xi_k^{(n)}, k, n \in \mathbb{N}\right\}$ - набор независимых случайных величин с тем же распределением, что и ξ. Положим

$$X_0 = 1, X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}, n \geqslant 1$$

Определение

Процесс $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ называется ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц ξ.

Интерпретация величин модели совершенно ясна: X_n - это

число частиц в n -м поколении, а $\xi_k^{(n)}$ - число потомков k -й частицы из $(n-1)$ -го поколения.

Нас будут интересовать два вопроса относительно ветвящихся процессов. - Какова вероятность вырождения ветвящегося процесса $\mathbf{P}\left(\exists n: X_n = 0\right)$? - Каково распределение общего числа частиц в процессе? Ответы на эти вопросы можно найти с помощью метода производящих функций.

А Определение 2.2. Пусть ξ - случайная величина. Тогда ее производящей функцией называется функция

$$\varphi_\xi(z) = \mathbf{M} z^\xi, z \in \mathbb{R}$$

определенная для тех z, для которых конечно данное математическое ожидание. Выделим основные свойства производящих функций.

1. $\varphi_\xi(1) = 1$
2. $\varphi'_\xi(1) = \mathbf{M}\xi$
3. Если ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z) \cdot \varphi_\eta(z)$.

Если ξ принимает значения в $\mathbb{Z}_+$, то имеются дополнительные свойства:

4. $\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k \mathbf{P}(\xi = k)$ - степенной ряд, сходящийся абсолютно и равномерно в области $\{|z| \leqslant 1\}$
5. $\varphi_\xi(z)$ непрерывно дифференцируема бесконечное число раз в области $\{|z| < 1\}$
6. $\varphi_\xi(0) = \mathbf{P}(\xi = 0)$
7. $\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{dz^k}\varphi_\xi(z)\right)\Big|_{z=0}$

Пусть теперь $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ - это ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц ξ.

Лемма

2.1. Между производящими функциями элементов процесса X иметот место следуюицие рекуррентные соотношения:

1. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$

$$2.\ \varphi_{X_n}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi(z))}_{n \text{ раз}});$$

3. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$.

Данная лемма позволяет найти уравнение для вероятности вырождения. Обозначим через q вероятность вырождения, т.е.

$$q = \mathbf{P}(\text{ процесс выродился }) = \mathbf{P}(\exists n : X_n = 0)$$

Тогда выполнено следующее утверждение. Лемма 2.2. Вероятность вырождения q ветвящегося процесса с законом размножения частиц ξ является решением уравнения

$$z = \varphi_\xi(z)$$

Уравнение (2) - это первая замечательная формула в теории ветвящихся процессов. Отметим, что

$$z = 1$$

всегда является решением (2). Однако при наличии других корней нам надо уметь отбирать среди них вероятность вырождения. Полную классификацию ситуаций дает

Теорема о вероятности вырождения.

Teopema 2.1 (0 Вероятности вырождения).

Пусть случайная величина ξ не равна единице тождественно, т.е. $\mathbf{P}(\xi = 1) \neq 1$. Обозначим 1. Если $\mu \leqslant 1$, то уравнение (2) uneem **Ha** [0,1] только одно решение: $z = 1$. В этом случае $q = 1$. 2. Если $\mu > 1$, то уравнение (2) umeem edurственное решение $z_0 \in [0, 1\ )$. *B* этом случае $q = z_0$.

Вывод: вероятность вырождения - это наименыший корень уравнения $z = \varphi_\xi(z)$ из отрезка $[0, 1]$.

Отметим, что

Теорема имеет весьма жизненную интерпретацию: если среднее число потомКов в процессе не больше единицы, то процесс обречен на вымирание; в противном случае есть ненулевая вероятность бесконечного существования попу- ЛIЯIИИ.

Общее число частиц. Обсудим теперь вопрос об общем

16

числе частиц в ветвящемся процессе. Обозначим общее число частиц в процессе до момента времени n включительно $Y_n = = 1 + X_1 + \ldots + X_n$. Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение между производяшими функциями Y_n и Y_{n-1}, аналогичное соотношениям в лемме 2.1 для самого X_n :

$$\varphi_{Y_{n+1}}(z) = z\varphi_\xi\left(\varphi_{Y_n}(z)\right)$$

Далее, для каждого $z \in [0, 1)$ существует предел

$$\rho(z) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{Y_n}(z)$$

который можно интерпретировать как производящую функцию общего числа частиц за все время существования процесса. Пусть Y - общее число частиц в ветвяшемся процессе за все время (если процесс не выродился, то, конечно, $Y = +\infty$). Тогда

$$\rho(z) = \mathbf{M}\left(z^Y I(Y < +\infty)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathbf{P}(Y = k)$$

Найти $\rho(z)$ можно из второго замечательного уравнения в теории ветвящихся случайных процессов. Лемма 2.3. Функция $\rho(z)$ является решением уравнения

$$\rho(z) = z\varphi_\xi(\rho(z))$$

Понятие времени корреляции

Обозначим случайную бинарную переменную, кодирующую информацию о погодных условиях в n-й день наблюдений, через S_n. Здесь и далее мы будем считать, что случайный процесс S_n является статистически стационарным, то есть частные функции распределения случайных величин S_{n_1} и S_{n_2} одинаковы для любых моментов времени n_1 и n_2. Можно предложить несколько формальных способов детектирования присутствия корреляций во временном ряду значений такого случайного процесса. - Корреляции в строке значений $s_1, s_2, s_3, \ldots$ проявляются, к примеру, в том, что условная вероятность $\Pr\left[S_{n_2} = s_{n_2} \mid S_{n_1} = s_{n_1}\right]$, где $n_2 \geq n_1$, не равна частной вероятности $\Pr\left[S_2 = s_2\right]$. Други способом увидеть статистическую зависимость значений случайной функции S_n в разные моменты времени является основан на анализе автокорреляционной функции, которая определена как

$$C\left(n_1, n_2\right) = \left\langle S_{n_1} S_{n_2}\right\rangle$$

Очевидно, что при наличии корреляций справедливо $C\left(n_1, n_2\right) \neq \left\langle S_{n_1}\right\rangle\left\langle S_{n_2}\right\rangle = \left\langle S_n^2\right\rangle$. Наконец, вывод о присутствии статистических корреляций можно сделать из факта отличия от нуля взаимной информации $I\left(S_{n_1}, S_{n_2}\right) = \left\langle\log_2 \frac{P\left(S_{n_1}, S_{n_2}\right)}{P_1\left(S_{n_1}\right) P_2\left(S_{n_2}\right)}\right\rangle$. Корреляции имеют тенденцию затухать с ростом интервала $n_2 - n_1$ между моментами наблюдений, так что в пределе $n_2 - n_1 \to +\infty$ переменные S_{n_1} и S_{n_2} становятся статистически независимыми. Это, в частности, означает, что $\lim_{n_2 - n_1 \to +\infty} C\left(n_1, n_2\right) = \lim_{n_2 - n_1 \to +\infty}\left\langle S_{n_1} S_{n_2}\right\rangle = \left\langle S_{n_1}\right\rangle\left\langle S_{n_2}\right\rangle = \left\langle S_n\right\rangle^2 \leq \left\langle S_n^2\right\rangle = C(n, n)$. В этой связи удобно ввести маштаб времени τ_c, называемый временем корреляции, на котором корреляционная функция выходит на свое асимптотическое значение. Анализ поведения отношения $\Pr\left[S_{n_2} = s_{n_2} \mid S_{n_1} = s_{n_1}\right] / \Pr\left[S_{n_2} = s_{n_2}\right]$ и взаимной информации $I\left(S_{n_1}, S_{n_2}\right)$ обычно дает ту же оценку по порядку величины для характерного времени корреляции.

6.1.2 Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс

Теория по кому-то

Пуассоновский и винеровский процесс являются процессами с независимыми приращениями.

Так что изучим такие процессы.

Определение 3.1.

Процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любого натурального n и любых $t_n > \ldots > t_1 \geqslant 0$ случайные величины $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ независимы в совокупности.

Отметим, что в случае дискретного времени процесс с независимыми приращениями является не чем иным, как случайным блужданием.

Тем самым процессы с независимыми приращениями естественно рассматривать как обобщение случайных блужданий для непрерывного времени.

В теории случайных процессов важнейшую роль играют вопросы существования процессов.

Дело в том, что совместные распределения случайных величин X_t не могут быть уж совсем произвольными, а должны быть в определенном роде согласованы.

Для процессов с независимыми приращениями критерий существования звучит следующим образом.

Теорема:

задано $Q_{s,t}-$распределение вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с характеристической функцией $\varphi_{s,t}$ пусть Q_0-также некоторое распределение вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Тогда процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ с независимыми приращениями *и* условиями

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} Q_{s,t} \quad \forall 0 \leqslant s < t \text{ и } X_0 \stackrel{d}{=} Q_0$$

существует $\Leftrightarrow \forall 0 \leqslant s < u < t, \forall \tau \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau) \cdot \varphi_{u,t}(\tau)$$

Необходимость условия (4) почти очевидна из свойств характеристических функций, но оказывается, что его достаточно для установления существования процесса.

Первым процессом с независимыми приращениями нашего курса является пуассоновский процесс.

Определение пуассоновского случпроца

Случайный процесс $(N_t, t \geqslant 0)$ называется пуассоновским процессом интенсивности $\lambda > 0$, если выполнены три условия:

1. $N_0 = 0$ п.н.;
2. N_t имеет независимые приращения;
3. $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$ для любых неотрицательных $t > s$.

(ну и дальше куча теории Жуковского, потом мб пойму ее)

Суперпозиция потоков Пуассона

Важным свойством пуассоновского потока является его стабильность относительно сложения. Оказывается, суперпозиция двух независимых пуассоновских потоков с рейтами λ_1 и λ_2 дает пуассоновский поток с рейтом $\lambda_1 + \lambda_2$.

Для доказательства сложим количества событий, n_1 и n_2, произошедших за один и тот же интервал времени t в двух пуассоновских потоках с рейтами λ_1 и λ_2, соответственно.

Характеристическая функция вероятностного распределения случайной величины $n = n_1 + n_2$ равна

$$\Phi(k) \equiv \left\langle e^{ik(n_1+n_2)} \right\rangle = \left\langle e^{ikn_1} \right\rangle \left\langle e^{ikn_2} \right\rangle = \varphi_1(k)\varphi_2(k),$$

где $\phi_1(k)$ и $\phi_2(k)$ - характеристические функции распределений Пуассона случайных величин n_1 и n_2, то есть

$$\varphi_1(k) \equiv \left\langle e^{ikn_1} \right\rangle = \exp\left(-\lambda_1 t\right) \sum_{n_1=0}^{+\infty} e^{ikn_1}$$

$$= \exp\left(\lambda_1 t \left(e^{ik} - 1\right)\right)$$

$$\varphi_2(k) \equiv \left\langle e^{ikn_2} \right\rangle = \exp\left(\lambda_2 t \left(e^{ik} - 1\right)\right)$$

Таким образом, находим

$$\Phi(k) = \varphi_1(k)\varphi_2(k) = \exp\left(\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) t \left(e^{ik} - 1\right)\right)$$

откуда следует что случайная величина n имеет пуассоновское распределение с рейтом $\lambda_1 + \lambda_2$.

Деление потока Пуассона

Аналогично, пуассоновский поток с рейтом λ можно разделить на два независимых пуассоновских подпотока с рейтами λ_1 и $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$. Деление исходного процесса производится посредством подбрасывания монетки с вероятностями орла и решки равными λ_1/λ и $1 - \lambda_1/\lambda$, случайный исход которого определяет, к какому из двух производных процессов будет принадлежать очередное пуассоновское событие. Проще всего указанное свойство можно доказать, показав их справедливость для процесса Бернулли с малой вероятностью единицы, и перейдя затем к континуальному пределу. Упражнение: Посетители прибывают в торговый комплекс в случайные моменты времени и независимо друг от друга со средней частотой λ. В каждом отдельном случае вероятность того, что очередной посетитель будет женского пола равна q. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа женщин, прибывших в в торговый комплекс за промежуток времени t.

Неоднородный поток Пуассона

Неоднородным потоком Пуассона называется поток событий, в котором вероятность $\lambda(t)dt$ наблюдать событие в промежутке времени $[t, t+dt]$ как и в однородном случае не зависит предшествующей истории наблюдений, но зависит от времени t. Такой процесс можно рассматривать как предельный случай последовательности независимых испытаний Бернулли, в которой вероятность выпадения единицы в очередной попытке зависит от номера этой попытки. К примеру, события распада радиактивных атомов в образце, состоящим в начальный момент времени из большого их числа $N_0 \gg 1$, представляют собой неоднородный пуассоновский

Распределение числа событий

Пусть n - это число событий, произошедших за время t, отсчитываемое от произвольно выбранного момента начала наблюдений. Найдем функцию распределения вероятностей $p(n;t)$. В случае $n = 0$ получаем

$$P(0;t) = \Pr\left[qT_1 > t\right] = \int_t^{+\infty} dT_1 \frac{T_1}{\langle T_1 \rangle} P\left(T_1\right) \int_{t/T}^{1} dq = \int_t^{+\infty} dT_1 \frac{T_1}{\langle T_1 \rangle} P\left(T_1\right) \left(1 - \frac{t_1}{T}\right)$$

где q - это отношение, в котором точка начала наблюдений делит межсобытийный интервал, на который она попала. Если $n > 0$, то искомое распределение можно записать как

$$P(n;t) = \Pr\left[(qT_1 + T_2 + \ldots + T_n < t) \cap (T_{n+1} > t - qT_1 - T_2 - \ldots - T_n)\right] = \quad (22)$$
$$= \int_0^t d\tau \rho(\tau) \int_{t-\tau}^{+\infty} dT_{n+1} P\left(T_{n+1}\right)$$

где $\rho(\tau)$ - плотность вероятности случайной величины $qT_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

Решение в Лаплас-представлении (!?????!)

Из соотношения (23) с учетом теоремы о свертке следует простая связь между Лаплас-образазами функциями $p(n;t), \rho(\tau)$ и $P(T)$, а именно

$$\tilde{p}(n;s) = \frac{1 - \tilde{P}(s)}{s} \tilde{\rho}(s),$$

где

$$\tilde{\rho}(s) = \left\langle e^{-s\tau} \right\rangle = \left\langle e^{-s(qT_1 + T_2 + \ldots + T_n)} \right\rangle = \left\langle e^{-sqT_1} \prod_{i=2}^{n} e^{-sT_i} \right\rangle = \left\langle e^{-sqT_1} \right\rangle \prod_{i=2}^{n} \left\langle e^{-sT_i} \right. (25)$$
$$= \tilde{P}^{n-1}(s) \int_0^{+\infty} dT_1 \frac{T_1}{\langle T_1 \rangle} P\left(T_1\right) \int_0^1 dq e^{-sqT_1} = \tilde{P}^{n-1}(s) \int_0^{+\infty} dT_1 P\left(T_1\right) \frac{1 - e^{-sT_1}}{\langle T_1 \rangle s} = \quad (26)$$
$$= \frac{\tilde{P}^{n-1}(s)(1 - \tilde{P}(s))}{\langle T \rangle s}$$

Подставляя этот результат в Ур. (24), находим

$$\tilde{p}(n;s) = \frac{(1 - \tilde{P}(s))^2 \tilde{P}^{n-1}(s)}{\langle T \rangle s^2}$$

Упражнение: Проверьте, что в случае экспонециального распределения интервала времени между последовательными событиями обратное преобразование Лапласа от выражения (28) дает распределение Пуассона.

Гауссовские процессы.

Винеровский процесс

Марковские моменты

Мартингалы

Большая часть оставшихся глав настоящего учебного пособия посвящена различным классам случайных процессов, наиболее важным с точки зрения приложений. В предыдущих главах мы уже рассмотрели процессы с независимыми приращениями и гауссовские процессы. В этой главе речь пойдет о мартингалах. $\boldsymbol{\Delta}$ Определение 6.1. Пусть $T \subset \mathbb{R}$. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$ если 1. X_t corлacosat с $\mathbb{F}$; 2. X_t является L^1 -процессом, т.е. для любого $t \in T$ выполнено неравенство $\mathbf{M}|X_t| < +\infty$ 3. $\mathbf{M}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ п. н. для любых $s \leqslant t, s, t \in T$. A Определение 6.2. Если вместо условия 3 выполнено

$$\mathbf{M}\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) \geqslant X_s \text{ п. н.} \quad \forall s \leqslant t, s, t \in T$$

то процесс X_t называется субмартингалом относительно $\mathbb{F}$. Если же вместо условия 3 выполнено

$$\mathbf{M}\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) \leqslant X_s \text{ п. н.} \quad \forall s \leqslant t, s, t \in T$$

то X_t называется супермартингалом относительно $\mathbb{F}$.

Если же вместо условия 3 выполнено

$$\mathbf{M}\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) \leqslant X_s \text{ п. н.} \quad \forall s \leqslant t, s, t \in T$$

то X_t называется супермартингалом относительно $\mathbb{F}$. Субмартингалы и супермартингалы - это мартингалы "наполовину". Для мартингалов условие 3 означает, что функция среднего является постоянной, $\mathbf{M} X_t=\mathbf{M} X_s \forall s, t \in T$. A Определение 6.3. Мартингалами (без указания фильтрации будем называть мартингалы относительно их естественной фильтрации.

Какие же процессы являются мартингалами? Следующая

Теорема дает критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями.

независимые приращения. Тогда X_t - мартингал $\Leftrightarrow \mathbf{M} X_t=\text{const}$, т.е. функция среднего **по**$-$ стоянна.

Несложно проверить, что если функция среднего не убывает, то процесс с независимыми приращениями является субмартингалом. Если же она не возрастает, то тогда - супермартингалом.

Теорема 6.1 сразу дает нам несколько хороших примеров мартингалов. 1. Винеровский процесс $\left(W_t, t \geqslant 0\right)$ - мартингал. 2. $\left(S_n, n \in \mathbb{Z}_{+}\right)$ - случайное блуждание, $S_n= \xi_1+\ldots+\xi_n, \xi_i-$ независимые случайные величины, $\mathbf{M}\left|\xi_i\right|<+\infty$. Тогда S_n - мартингал $\Leftrightarrow$ для любого $i \mathbf{M} \xi_i=0$. 3. Пуассоновский процесс $\left(N_t, t \geqslant 0\right)$ - субмартингал. 4. Пусть $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ - независимые неотрицательные случайные величины, $S_n=\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$. Тогда S_n - мартингал $\Leftrightarrow \mathbf{M} \xi_i=1$ для Всех i

Определение

мартингал Леви

Пусть ξ - случайная величина, $\mathbf{M}|\xi|<+\infty$ $\mathbb{F}=\left(\mathscr{F}_t, t \in T\right)$ - фильтрация. Докажите, что процесс

$$X_t=\mathbf{M}\left(\xi \mid \mathscr{F}_t\right)$$

Является мартингалом относительно $\mathbb{F}$.

Рассмотрим два важных свойства мартингалов. Первым является разложение Дуба-Мейера для произвольных процессов с дискретным временем. Для его формулировки нам понадобится понятие предсказуемого процесса. A Определение 6.4. Процесс $\left(X_n, n \in \mathbb{N}\right)$ является пред сказуемым относительно фильтрации $\left(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{Z}_{+}\right)$, если X_n измерим относительно $\mathcal{F}_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема Пусть $\left(X_n, n \in \mathbb{Z}_{+}\right)-L^1$ -процесс, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}=\left(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{Z}_{+}\right)$. Тогда существует единственное разложение вида

$$X_n=M_n+A_n$$
$$\text{где } M_n \text{ - мартингал относительно } \mathbb{F}, \quad a$$

$\left(A_n, n \in \mathbb{N}\right)$ - предсказуемый процесс относи- Заметим в связи с теоремой, что процесс $\left(X_n, n \in \mathbb{Z}_{+}\right)$ является субмартингалом относительно $\mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда в его разложении Дуба-Мейера последовательность A_n является п. н. неубывающей.

Второе свойство связывает мартингалы с марковскими моментами и называется теоремой об остановке.

Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+) - L^1$-процесс, согласован- нъй c фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$. Тогда X_n является мартингалом (субмартингалом) относительно $\mathbb{F} \Leftrightarrow$для любых $\tau, \sigma-$ограниченных почти наверное марковских моментов относительно $\mathbb{F}$ таких, что $\tau \leqslant \sigma$ п. н., выполнено

$$\mathbf{M} X_\tau = (\leqslant) \mathbf{M} X_\sigma$$

6.1.3 Марковские процессы

Марковские процессы в двух словах (?)

(освоюсь - напишу)

Марковские цепи с дискретным временем

Марковские цепи - это марковские процессы, принимающие не более чем счетное число значений. Пусть x - не более чем счетное множество. Для удобства всегда можно считать, что либо $X = \{1, \ldots, N\}$, либо $X = \mathbb{N}$ А Определение 8.1. Случайный процесс $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ со значениями в x называется марковской цепъю, если для любого $m \in \mathbb{N}$, для любых $k_1 < \ldots < k_m < k < n$ и для любых $a_1, \ldots, a_m, i, j \in x$ выполнено (марковское свойство)

$$\mathbf{P}\left(X_n = j \mid X_k = i, X_{k_m} = a_m, \ldots, X_{k_1} = a_1\right) = \mathbf{P}\left(X_n = j \mid X_k = i\right)$$

всегда, когда $\mathbf{P}\left(X_k = i, X_{k_m} = a_m, \ldots, X_{k_1} = a_1\right) > 0$. Определение означает, что «будущее» процесса (X_n) и его «прошлое» $(X_{k_m}, \ldots, X_{k_1})$ независимы при фиксированном « настоящем (X_k). Также из теоремы 7.1 следует, что марковская Цепь - это марковский процесс с не более чем счетным числом значений. Формальное утверждение, объясняющее обозначенную выше независимость, сформулировано ниже.

Марковские цепи с непрерывным временем

ё

Линейные преобразования в пространстве L^2

Стационарные случайные процессы

Спектральное представление

Элементы стохастического исчисления Ито

6.1.4 О применении марковских процессов (?)

О марковских цепях в моделях социального обслуживания (??)

(такое тоже есть, напишу.)

6.1.5 Дополнения о случайных процессах

(всё остальное тут будет, потом буду про структуру думать уже)

6.2 методы задания случайных величин

(??)

Случайная величина задается производящим функционалом, который имеет вид:

$$F[\chi(t)] \equiv e^{-W[\chi(t)]} \equiv \left\langle e^{-i\int_0^l dt'\xi(t')\chi(t')}\right\rangle_\xi$$

Существует много частных случаев функции $W[\xi(t)]$, например, марковский:

$$W[\chi(t)] = \int_0^t dt' G\left(\chi\left(t'\right)\right)$$

В марковском случае два разных интервала времени статистически независимы, то есть события на одном интервале не влияют на события на другом.

Частный случай марковского процесса является случай с гауссовой силой, когда $G(\chi) = D\chi^2$.

6.2.1 вероятности перехода в при наличии случайных процессов

Теория

Построим простейшую модель, в которой есть случайность. Пусть у нас есть простейшее уравнение динамики системы: $\dot{x}(t) = -f(x(t))$, добавим к нему случайную величину, то, что получим называется уравнением Ланжевена:

$$\dot{x}(t) = -f(x(t)) + \xi(t).$$

Нашу добавку можно интерпретировать как случайную силу.

Простейшая задача, которую хочется решать, это задача о том, что если мы в момент времени $t = 0$ поместили частицу в точку x_i, с какой вероятностью она перейдет в окрестность точки x_f. (хз, почему, но запишем ее так):

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \left\langle\delta\left(x_f - x_\xi(t)\right)\right\rangle_\xi$$

Постараемся записать это в форме, которая нас сдвинет дальше. Преобразуем полный переход через сумму переходов за равные промежутки времени $\delta t = t/N$:

$$\delta(x_f - x_\xi(t)) = \delta(x_f - x_{n_1}))\delta(x_{n_1} - x_\xi(t)) = \ldots = \prod_{k=1;}^{N} \delta(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}); \qquad n_0 = i,\ n_N = f.$$

Хочется переписать каждый переход с учетом уравнений движения. Для этого посмотрим на дискретную их версию в интегральной форме, которое приближенно записывается в виде:

$$x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right) = -\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt f(x(t)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t) \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2}\left(t_{k+1} - t_k\right)\left(f\left(x\left(t_{k+1}\right)\right) + f\left(x\left(t_k\right)\right)\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t) \quad (6.1)$$

Введем обозначение $x_k = x\left(t_k\right)$, в итоге один переход записывается как:

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{\delta t}{2}\left(f\left(x_{k+1}\right) + f\left(x_l\right)\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t)$$

Вставка в дельта-функцию производится за счет ее свойства: $\delta(x_1-x_2) = |f'(x_c)|\delta(f(x_c))$, поэтому

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int dx_{N-1}\dots dx_1 \prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{\delta t}{2}f'\left(x_k\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left\langle \delta^{N-1}\left(x_{k+1}-x_k+\frac{\delta t}{2}\left(f\left(x_{k+1}\right)+f\left(x_k\right)\right)-\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\xi(t)\right)\right\rangle_\xi \quad (6.2)$$

Перепишем далее каждую дельта функцию через $\delta(x) = \int \frac{dp}{2\pi}e^{ipx}$, получим:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int dx_{N-1}\dots dx_1 dp_N\dots dp_1 \prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{\delta t}{2}f'\left(x_k\right)\right)$$
$$\cdot\, e^{i\sum_{k=1}^N p_k\left(x_k-x_{k-1}+\frac{\delta t}{2}(f(x_k)+f(x_{k-1}))\right)}\left\langle e^{-i\sum_{k=1}^N p_k\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt\xi(t)}\right\rangle_\xi \quad (6.3)$$

Далее учтем именно свойства самого случайного процесса, за счет добавления производящего функционала для марковского случая:

$$F[\chi(t)] \equiv e^{-W[\chi(t)]} \equiv \left\langle e^{-i\int_0^l dt' G(\chi(t'))}\right\rangle_\xi$$

Получим:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int dx_{N-1}\dots dx_1 dp_N\dots dp_1 \prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{\delta t}{2}f'\left(x_k\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\, e^{i\sum_{k=1}^N p_k\left(x_k-x_{k-1}+\frac{\delta t}{2}(f(x_k)+f(x_{k-1}))\right)}\left\langle e^{-\sum_{k=1}^N \delta t G(p_k)}\right\rangle_\xi \quad (6.4)$$

Теперь у нас есть готовое выражение для дискретного времени, которое будем решать. Его можно записать и в случае непрерывных переходов, для этого нужно перейти к непрерывной мере, записав бесконечное произведение в виде члена в экспоненте:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f}\mathcal{D}x(\tau)\mathcal{D}p(\tau)e^{i\int_0^t d\tau p(\tau)(\dot{x}(\tau)+f(x(\tau)))-\int_0^t d\tau G(p(\tau))+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau f'(x(\tau))}$$

А также в случае гауссовой силы $G(\chi) = D\chi^2$ после интегрирования по импульсу получаем (???):

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f}\mathcal{D}x(\tau)e^{-\frac{1}{4D}\int_0^t d\tau(x(\tau)+f(x(\tau)))^2+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau f'(x(\tau))}$$

Или в более понятном виде:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = e^{-\frac{1}{2D}\int_{x_i}^{x_f} dy f(y)}\int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f}\mathcal{D}x(\tau)e^{-\int_0^t d\tau\left(\frac{\dot{x}^2(\tau)}{4D}+\frac{1}{4D}f^2(x(\tau))-\frac{1}{2}f'(x(\tau))\right)}.$$

пример: случайные блуждания

Рассмотрим разные задачи случайного блуждания и их решения.

Блуждания с нулевой силой Рассмотрим случай $f = 0$. Вероятность перейти в конечную точку равна:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^t d\tau \frac{\dot{x}^2(\tau)}{4D}}$$

Для вычисления данного интеграла заменим:

$$x_{\text{new}} = x + x_i + \frac{x_f - x_i}{t}\tau$$

После замены у нас выносится константа:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = e^{-\frac{\left(x_f - x_i\right)^2}{4Dt}} \int_{x(0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^t d\tau \frac{\dot{x}^2(\tau)}{4D}}$$

Далее нужно посчитать интеграл по траекториям. Мы его считать не умеем, однако продвинуться нам помогут следующие соображения: во-первых заметим, что он константа; во-вторых так как частица в x_f где-нибудь на координатной оси точно находится, просуммировав все координаты, то есть проинтегрировав, мы должны получить единицу, так что:

$$\left(\int_{x(0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^t d\tau \frac{\dot{x}^2(\tau)}{4D}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_f e^{-\frac{\left(x_f - x_i\right)^2}{4Dt}} = 1,$$

и поэтому

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^t d\tau \frac{\dot{x}^2(\tau)}{4D}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}.$$

Окончательно задача решена:

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{\left(x_f - x_i\right)^2}{4Dt}}$$

(место количественных расчетов и на самом деле полезных выводов)

блуждание с силой, не зависящей от времени

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^t d\tau \frac{(t(r)+f(\tau))^2}{4D}}$$

$$\ddot{x}_c(\tau) = -\dot{f}(\tau)$$

$$x_c(\tau) = y(\tau) + \frac{x_f - y(t)}{t}\tau \quad y(\tau) = x_i - \int_0^\tau d\tau' f\left(\tau'\right)$$

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{\left(x_f - y(t)\right)^2}{4Dt}}$$

$$P\left(x_f, x_i; t\right) = e^{-\frac{\alpha\left(x^2 - x_i^2\right)}{4D} + \frac{\alpha t}{2}} \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^t d\tau \left(\frac{t^2(\tau)}{10} + \frac{\alpha^2 x^2(\tau)}{4D}\right)}$$

6.2.2 Основы броуновского движения

(тут самое основное и суть)

Теория

О применениях (!?!?)

(хз, пропишу тут, тоже важно.)

статистика частиц в идеальном газе

(задача с избров)

Пусть у нас есть идеальный газ который содержит N молекул. Каждая молекула может быть равномерно размазана по объёму V всего газа. Выделим в этом газе объём v и зададимся вопросом а какого вероятность того, что в этом объёме ровно m частиц.

нам нужна случайная величина, в данном случае это количество частиц в объёме назовём её ξ

6.3 Последовательности зависящих от прошлого испытаний

простейшие такие цепи - цепи маркова
дальше изучим ...

6.3.1 Основы марковских цепей

опишем цепи маркова и покажем их применения.

Теория по Горяйнову (??)

Пусть некоторая система меняет свое состояние случайным образом в моменты времени $t = 1, 2, \ldots, T$. Множество возможных состояний системы является конечным множеством $E = \{e_1, \ldots, e_r\}$ и называется фазовъи пространством.

Среди реальных систем важный класс образуют такие, у которых вероятности перехода из одного состояния в другое в данный момент времени не зависит от того, как вела себя система в предыдущие моменты времени.

Такие системы называют марковскими или иепями Маркова.

Эволюция изучаемой системы описывается траекторией $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_T)$, где $\omega_t = i$, если система в момент времени t находилась в состоянии e_i. Поэтому под элементарным событием будем понимать $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_T)$, т.

е.

последовательность номеров состояний, в которых находилась система в моменты времени $0, 1, \ldots, T$. Можно считать, что цепь Маркова является обобщением схемы независимых испытаний, в которой условие независимости заменяется на некоторые другие естественные предположения.

Рассмотрим эти предположения и введем некоторые понятия, связанные с цепями Маркова.

Для вычисления вероятности того, что траектория $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_T)$ будет реализована как $i_0, i_1, \ldots, i_T$, можно воспользоваться теоремой умножения

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\omega_0 = i_0, \ldots, \omega_T = i_T) = \\ &\mathrm{P}(\omega_0 = i_0)\,\mathrm{P}(\omega_1 = i_1 \mid \omega_0 = i_0) \cdots \mathrm{P}(\omega_T = i_T \mid \omega_0 = i_0, \ldots, \omega_{T-1} = i_{T-1})\end{aligned}$$

Здесь мы считаем, что условная вероятность относительно события с нулевой вероятностью равна нулю.

Условие марковости (независимость от прошлого) выражается в том, что для любых $s < t$ выполняются равенства

$$\mathrm{P}\left(\omega_t = j \mid \omega_0 = i_0, \ldots, \omega_{s-1} = i_{s-1}, \omega_s = i\right) = \mathrm{P}\left(\omega_t = j \mid \omega_s = i\right)$$

$i, j = 1, \ldots, r$.

Другими словами, вероятность перехода системы, находившейся в состоянии i в момент времени s, в состояние j в момент времени t не зависит от того, как она себя вела до момента времени s.

Кроме того, мы будем рассматривать однороднъе марковские цепи, для которых условные вероятности перехода из состояния i в состояние j за время t не зависят от того, в какой момент времени s она находилась в состоянии i Т.

е.

$$\mathrm{P}\left(\omega_{s+t} = j \mid \omega_s = i\right) = \mathrm{P}\left(\omega_t = j \mid \omega_0 = i\right) = p_{ij}(t)$$

Вероятности $p_{ij}(t)$ обладают следующими свойствами:

$$1^\circ \cdot p_{ij}(t) \geqslant 0$$

$2^\circ \cdot \sum_{j=1}^{r} p_{ij}(t) = 1$

$$3^\circ \cdot p_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

Матрицу, составленную из вероятностей $p_{ij}(t)$, будем обозначать $\Pi(t)$. Свойства 1° и 2° означают, что $\Pi(t)$ является стохастической матрицей.

Вероятности перехода системы из состояния i в состояние j за единичное время $p_{ij}(1)$ называются переходнъии вероятностями и обозначаются p_{ij}. Матрица $\Pi(1) = \Pi$ называется матрицей переходных вероятностей.

О днородная марковская цепь вполне определяется вектором-строкой $\vec{p}(0) = (p_1(0), \ldots, p_r(0))$ начальных вероятностей ($p_i(0)-$ вероятность того, что в начальный момент времени система находилась в состоянии i) и матрицей переходных вероятностей Π.

Действительно, вероятность $p_j(t)$ того, что система будет находиться в состоянии j в момент времени t определяется равенством

$$p_j(t) = \mathrm{P}\left(\omega_t = j\right) = \sum_{i=1}^{r} p_i(0) p_{ij}(t)$$

Если $\vec{p}(t)$ - вектор-строка вероятностей состояний в момент времени t, то

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0)\Pi(t)$$

С другой стороны, матрица $\Pi(t)$ выражается через Π.

Это следует из уравнений Колмогорова- Чепмена

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

которые выводятся непосредственно из свойств марковости и однородности

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s+t) &= \mathrm{P}\left(\omega_{s+t}=j \mid \omega_0=i\right) \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(\omega_{s+t}=j, \omega_0=i\right)}{\mathrm{P}\left(\omega_0=i\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{\mathrm{P}\left(\omega_{s+t}=j, \omega_0=i, \omega_s=k\right)}{\mathrm{P}\left(\omega_0=i\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{\mathrm{P}\left(\omega_s=k, \omega_0=i\right) \mathrm{P}\left(\omega_{s+t}=j \mid \omega_0=i, \omega_s=k\right)}{\mathrm{P}\left(\omega_0=i\right)} \\
&= \sum_{k=1} p_{ik}(s) p_{kj}(t)
\end{aligned}$$

Уравнения (11.1) можно также записать в матричном виде

$$\Pi(s+t)=\Pi(s)\Pi(t)$$

Поскольку $\Pi(1)=\Pi$, то $\Pi(t)=\Pi^t$. Следовательно

$$\vec{p}(t)=\vec{p}(0)\Pi^t$$

Важное значение в теории однородных марковских цепей имеет следующий результат. Тогда для каждого $j=1,\ldots,r$ сууществует предел

$$p_j=\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$$

При этом $p_j>0, j=1,\ldots,r$, не зависят от i и являтотся единственным реиением системы

$$\sum_{k=1}^{r} x_k p_{kj}=x_j, \quad \sum_{k=1}^{r} x_k=1$$

ДоКАЗАТЕльСТво.

Введем в рассмотрение

$$M_j(t)=\max_{1\leqslant i\leqslant r} p_{ij}(t), \quad m_j(t)=\min_{1\leqslant i\leqslant r} p_{ij}(t)$$

В силу уравнений (11.1)

$$p_{ij}(1+t)=\sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}(t)$$

Отсюда и непосредственно из определения $m_j(t)$ и $M_j(t)$ получаем неравенства

$$m_j(t)\leqslant p_{ij}(t+1)\leqslant M_j(t)$$

Из этих неравенств, в свою очередь, следуют неравенства

$$m_j(t)\leqslant m_j(t+1)\leqslant M_j(t+1)\leqslant M_j(t)$$

Это означает, что $m_j(t)$ не убывает по t, а $M_j(t)$ не возрастает по t. Обозначим

$$\varepsilon=\min_{1\leqslant i,j\leqslant r} p_{ij}\left(t_0\right)$$

По условию теоремы $0<\varepsilon<1$. Для $t>0$, используя уравнения (11.1), получаем

$$
\begin{aligned}
p_{ij}\left(t_0+t\right) &= \sum_{k=1} p_{ik}\left(t_0\right) p_{kj}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\left[p_{ik}\left(t_0\right)-\varepsilon p_{jk}(t)\right] p_{kj}(t)+\varepsilon \sum_{k=1}^{r} p_{jk}(t) p_{kj}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\left[p_{ik}\left(t_0\right)-\varepsilon p_{jk}(t)\right] p_{kj}(t)+\varepsilon p_{jj}(2t)
\end{aligned}
$$

Замечая, что выражения в квадратных скобках неотрицательны, получаем неравенство

$$
p_{ij}\left(t_0+t\right) \leqslant M_j(t) \sum_{k=1}^{r}\left[p_{ik}\left(t_0\right)-\varepsilon p_{jk}(t)\right]+\varepsilon p_{jj}(2t)=(1-\varepsilon) M_j(t)+\varepsilon p_{jj}(2t)
$$

из которого следует, что

$$
M_j\left(t_0+t\right) \leqslant(1-\varepsilon) M_j(t)+\varepsilon p_{jj}(2t)
$$

Аналогично получаются неравенства

$$
p_{ij}\left(t_0+t\right) \geqslant(1-\varepsilon) m_j(t)+\varepsilon p_{jj}(2t)
$$

И

$$
m_j\left(t_0+t\right) \geqslant(1-\varepsilon) m_j(t)+\varepsilon p_{jj}(2t)
$$

Сравнивая полученные выше неравенства, приходим к следующему

$$
M_j\left(t_0+t\right)-m_j\left(t_0+t\right) \leqslant(1-\varepsilon)\left(M_j(t)-m_j(t)\right)
$$

Применяя последовательно k раз последнее неравенство, получаем

$$
M_j\left(k t_0+t\right)-m_j\left(k t_0+t\right) \leqslant(1-\varepsilon)^k\left(M_j(t)-m_j(t)\right)
$$

Отсюда сразу же следует, что

$$
\lim_{k \rightarrow \infty}\left[M_j\left(k t_0+t\right)-m_j\left(k t_0+t\right)\right]=0
$$

а поскольку последовательность $\left\{M_j(t)-m_j(t)\right\}_{t=1}^{\infty}$ монотонно убывает, то

$$
\lim_{t \rightarrow \infty}\left[M_j(t)-m_j(t)\right]=0
$$

Таким образом, доказано существование пределов

$$
p_j=\lim_{t \rightarrow \infty} M_j(t)=\lim_{t \rightarrow \infty} m_j(t)=\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)
$$

$j=1, \ldots, r$. Заметим также, что поскольку $m_j(t)$ не убывают по t, то

$$
p_j \geqslant m_j\left(t_0\right) \geqslant \varepsilon>0
$$

т.

е.

все p_j строго положительны.

При этом

$$
\sum_{j=1}^{r} p_j=\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{r} p_{ij}(t)=1
$$

Осуществляя в равенстве

$$p_{ij}(t+1) = \sum_{k=1} p_{ik}(t)p_{kj}$$

предельный переход при $t \to \infty$, получаем

$$p_j = \sum_{k=1}^{r} p_k p_{kj}$$

т.

е.

$p_1, \ldots, p_r-$ решение системы (11.2). Допустим теперь, что $q_1, \ldots, q_r$ также является решением этой системы, т.

е.

$$q_j = \sum_{k=1}^{r} q_k p_{kj}, \quad \sum_{k=1}^{r} q_k = 1$$

Заметим, что тогда $q_1, \ldots, q_r$ будет решением и системы

$$q_j = \sum_{k=1}^{r} q_k p_{kj}(t)$$

при $t = 1, 2, \ldots$. Действительно

$$\sum_{k=1}^{r} q_k p_{kj}(t) = \sum_{k=1}^{r} q_k \sum_{l=1}^{r} p_{kl} p_{lj}(t-1) = \sum_{l=1}^{r} q_l p_{lj}(t-1) = \ldots = \sum_{k=1}^{r} q_k p_{kj} = q_j$$

Осуществляя в равенстве (11.3) предельный переход при $t \to \infty$, получаем

$$q_j = \sum_{k=1}^{r} q_k p_j = p_j$$

и единственность решения системы (11.2) доказана.

Доказанная Теорема относится к так называемым эргодическим теоремам.

Ее смысл состоит в том, что за длительный промежуток времени система как бы забывает, из какого начального состояния она стартовала.

Условие положительности элементов матрицы Π^{t_0} означает, что с положи- тельной вероятностью из любого состояния в любое состояние система может перейти за время t_0 |

Марковское свойство

Простейшей моделью коррелированного случайного процесса является цепь Маркова - случайный процесс с дискретным пространством состояний и дискретным временем, обладающий марковским свойством. Рассмотрим стохастическую переменную S_n, где n играет роль дискретного времени, возможные значения которой принадлежат счетному множеству Ω. Говорят, что стохастический процесс S_n обладает марковским свойством, если условное распределение вероятностей его будущих состояний зависит только от текущего состояния, но не от последовательности более ранних состояний, то есть

$$\Pr\left[S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n, S_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, S_1 = s_1\right] = \Pr\left[S_{n+1} = s_{n+1} \mid S(n) = s_n\right]$$

В силу наличия влияния текущего состояния на состояние в сразу следующий за этим момент, в общем случае значения марковской переменной величины в различные моменты времени оказываются скоррелироваными друг с другом. Отметим, что следствием Ур. (4) является равенство

$$\Pr\left[S_n = s_n \mid S_{n-m} = s_{n-m}, S_{n-k} = s_{n-k}\right] = \Pr\left[S_n = s_n \mid S_{n-m} = s_{n-m}\right],$$

где $k > m > 0$.

Теория по ВШЭ

Управляющее уравнение по ВШЭ Итак, наш случайный процесс совершает прыжки между двумя состояниями, причем если в момент времени процесс находится в состоянии 1 , то $S_n = 1$, а если в состоянии 2 , то $S_n = 0$. Обозначим вероятности обнаружить процесс на n-м шаге в состояниях 1 и 2 , через $\pi_1(n)$ и $\pi_2(n)$, соответственно. Предполагая марковское свойство стохастической динамики процесса и используя закон полной вероятности, распределение вероятностей на следующем шаге однозначно можно выразить через соответствующее распределение на шаге предыдущем как

$$\begin{aligned}\pi_1(n+1) &= \Pr\left[S_{n+1}=1 \mid S_n=1\right]\pi_1(n) + \Pr\left[S_{n+1}=1 \mid S_n=2\right]\pi_2(n)\\ \pi_2(n+1) &= \Pr\left[S_{n+1}=2 \mid S_n=1\right]\pi_1(n) + \Pr\left[S_{n+1}=2 \mid S_n=2\right]\pi_2(n)\end{aligned}$$

Условные вероятности переходов между состояниями будем считать не зависящими от времени n и обозначим через $\Pr\left[S_{n+1}=2 \mid S_n=1\right] = 1-\Pr\left[S_{n+1}=1 \mid S_n=1\right] = p$, $\Pr\left[S_{n+1}=1 \mid S_n=2\right] = 1-\Pr\left[S_{n+1}=2 \mid S_n=2\right] = q$. Тогда

$$\begin{aligned}\pi_1(n+1) &= (1-p)\pi_1(n) + q\pi_2(n)\\ \pi_2(n+1) &= p\pi_1(n) + (1-q)\pi_2(n)\end{aligned}$$

Удобно ввести двухкомпонентный вектор вероятностей $\vec{\pi}(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n))^T$ и перейти к матричной форме записи

$$\vec{\pi}(n+1) = \hat{P}\cdot\vec{\pi}(n),$$

где матрица $\hat{P}$ называется матрицей вероятностей перехода; ее элементы имеют вид $P_{11} = 1-p$, $P_{12} = q, P_{21} = p, P_{22} = 1-q$ Уравнение (10) называется управляющим.

Решение управляющего уравнения Если известно распределение вероятностей $\vec{\pi}(0)$ в начальный момент времени, то решение уравнения (10) записывается как

$$\vec{\pi}(n) = \hat{P}^n\cdot\vec{\pi}(0).$$

Дальнейший анализ требует возведения матрицы $\hat{P}$ в натуральную степень n, что проще всего сделать, представив эту матрицу в виде $\hat{P} = \hat{Q}\hat{D}\hat{Q}^{-1}$, где $\hat{D}$ - диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы $\hat{P}, \hat{Q}-$ матрица, составленная из собственных столбцов матрицы $\hat{P}$. Решая уравнение $\det(\hat{P}-\lambda\hat{I}) = 0$ находим пару собственных чисел $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1-p-q$, которым соответствуют собственные столбцы $\vec{a}_1 = (1/p, 1/q)^T$, $\vec{a}_2 = (1,-1)^T$, по определению удовлетворяющие условию $\hat{P}\vec{a} = \lambda\vec{a}$. Используя эти результаты, запишем

$$\begin{aligned}\hat{P}^n = \hat{Q}\hat{D}^n\hat{Q}^{-1} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{p} & 1\\ \frac{1}{q} & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p-q\end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix}\frac{pq}{p+q} & \frac{pq}{p+q}\\ \frac{p}{p+q} & -\frac{q}{p+q}\end{pmatrix} \neq (12)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}(1-p-q)^n & \frac{q}{p+q}-\frac{q}{p+q}(1-p-q)^n\\ \frac{p}{p+q}-\frac{p}{p+q}(1-p-q)^n & \frac{p}{p+q}+\frac{q}{p+q}(1-p-q)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Подстановка Ур. (13) в Ур. (11) дает

$$\begin{aligned}\pi_1(n) &= \frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}(1-p-q)^n\pi_1(0)-\frac{q}{p+q}(1-p-q)^n\pi_2(0)\\ \pi_2(n) &= \frac{p}{p+q}-\frac{p}{p+q}(1-p-q)^n\pi_1(0)+\frac{q}{p+q}(1-p-q)^n\pi_2(0)\end{aligned}$$

При выводе этих выражений мы использовали условие нормировки $\pi_1(0)+\pi_2(0) = 1$. Отметим также, что для решения, заданного уравнениями (32) и (33), в любой момент времени справедливо $\pi_1(n)+\pi_2(n) = 1$.

Релаксация к стационарному распределению вероятностей Из Ур. (32) и (33) видно, что если $0 < p + q < 2$, то любое начальное условие на больших временах релаксирует к стационарному распределению вероятностей

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_1(n) = \vec{\pi}_1^{\mathrm{st}} = \frac{q}{p+q},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \pi_2(n) = \vec{\pi}_2^{\mathrm{st}} = \frac{p}{p+q},$$

которое, как легко проверить, является решением уравнения $\hat{P} \cdot \vec{\pi}^{\mathbf{st}} = 0$. Характерное время релаксации оценивается как $\tau_{\mathrm{relax}} \sim \frac{1}{\ln \frac{1}{|1-p-q|}}$.

Анализ автокорреляций

Продемонстрием при помощи Ур. (32) и (33) скоррелированность случайного процесса S_n в разные моменты времени. Условная вероятность $\Pr[S_{n_2} = 1 \mid S_{n_1} = 1]$, где $n_2 \geq n_1$, равна решению π_1, заданному формулой (32), в которую необходимо подставить $n \to n_2 - n_1$, $\pi_1(0) = 1, \pi_2(0) = 0$. Таким образом, находим

$$\Pr[S_{n_2} = 1 \mid S_{n_1} = 1] = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^{n_2-n_1}$$

Аналогично можно выразить условные вероятности $\Pr[S_{n_2} = 0 \mid S_{n_1} = 1], \Pr[S_{n_2} = 1 \mid S_{n_1} = 0]$ и $\Pr[S_{n_2} = 0 \mid S_{n_1} = 0]$. Из (18) видно, что если $p \neq 1/2$ и $q \neq 1/2$, то $\Pr[S_{n_2} = 1 \mid S_{n_1} = 1] \neq \Pr[S_{n_2} = 1] = \frac{q}{p+q}$, так что значения случайной функции S_n в различные моменты времени не являются статистически независимыми. Время корреляции, очевидно, дается той же оценкой, что и время релаксации, т.е. $\tau_c \sim \frac{1}{\ln \frac{1}{|1-p-q|}}$. Упражнение: Вычислите парную корреляционную функцию $C(n_1, n_2) = \langle S_{n_1} S_{n_2} \rangle$ для рассмотренного случайного процесса.

Марковские цепи с непрерывным временем

В рассмотренной модели цепи Маркова роль времени выполнял дискретный параметр n - номер наблюдения. Обсудим теперь процесс Маркова с двумя состояниями и непрерывным временем, см. Рис. 1(b). Стохастическая динамика такой цепи по определению подчиняется следующим правилам. Если в момент времени t процесс находится в состоянии 1 , то в течении промежутка времени $[t, t + dt]$ с вероятностью λdt он перейдет в состояние 2 , а с вероятностью $1 - \lambda dt$ останется в состоянии 1 . Если же в момент t процесс находится в состоянии 2, то в течении промежутка времени $[t, t+dt]$ он с вероятностью μdt перейдет в состояние 1 , и с вероятностью $1-\mu dt$ останется в состоянии 2. Марковость процесса означает, что указанные вероятности не зависят от предшествующей истории процесса. С учетом сказанного вероятности $\pi_1(t + dt)$ и $\pi_2(t + dt)$ обнаружить процесс в состояниях 1 и 2 в момент $t + dt$ равны (см. Ур. (6) и (7))

$$\pi_1(t + dt) = (1 - \lambda dt)\pi_1(t) + \mu dt \cdot \pi_2(t)$$
$$\pi_2(t + dt) = \lambda dt \cdot \pi_1(t) + (1 - \mu dt)\pi_2(t)$$

откуда находим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = -\lambda\pi_1(t) + \mu\pi_2(t)$$
$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = \lambda\pi_1(t) - \mu\pi_2(t)$$

которую иногда удобно записывать в матричном виде

$$\frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = \hat{Q}\vec{\pi}(t),$$

где $Q_{11} = -Q_{21} = -\lambda$ и $Q_{12} = -Q_{22} = \mu$.

Решение для произвольного начального условия

Решение Ур. (21) и (22) при заданном начальном распределении вероятностей $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$ может быть построено, к примеру, методом преобразования Лапласа. Умножив обе этих части уравнений на e^{-st} и проинтегрировав их по t от 0 до $+\infty$, получим,

$$s\tilde{\pi}_1(s) - \pi_1(0) = -\lambda\tilde{\pi}_1(s) + \mu\tilde{\pi}_2(s)$$
$$s\tilde{\pi}_2(s) - \pi_2(0) = \lambda\tilde{\pi}_1(s) - \mu\tilde{\pi}_2(s)$$

где $\tilde{\pi}_1(s) = \int_0^{+\infty} dte^{-st}\pi_1(t)$ и $\tilde{\pi}_2(s) = \int_0^{+\infty} dte^{-st}\pi_2(t)$. Значит

$$\tilde{\pi}_1(s) = \frac{s+\mu}{s(s+\lambda+\mu)}\pi_1(0) + \frac{\mu}{s(s+\lambda+\mu)}\pi_2(0)$$
$$\tilde{\pi}_2(s) = \frac{s+\lambda}{s(s+\lambda+\mu)}\pi_2(0) + \frac{\lambda}{s(s+\lambda+\mu)}\pi_1(0)$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\pi_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dse^{st}\tilde{\pi}_1(s) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\pi_1(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\pi_2(\Delta 8,)$$
$$\pi_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dse^{st}\tilde{\pi}_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\pi_1(0) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\pi_2(0, 9.)$$

Представленный путь вывода, разумеется, не единственный возможный. Заметим, что это решение можно было получить из уравнений (32) и (33), подставив $p = \lambda\Delta t, q = \mu\Delta t$ и перейдя к пределу $\Delta t \to 0$. Кроме того, можно было подставить соотношение $\pi_1(t) = 1 - \pi_2(t)$ в (21) и решить получившееся линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Наконец, решение Ур. (23) может быть выписано через матричную экспоненту.

Релаксация к стационарному решению

Из формул (28) и (29) видно, что любое начальное условие экспоненциально быстро релаксирует к стационарному распределению вероятностей

$$\lim_{t\to+\infty}\pi_1(t) = \vec{\pi}_1^{\text{st}} = \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$
$$\lim_{t\to+\infty}\pi_2(t) = \vec{\pi}_2^{\text{st}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

которое, как легко проверить, является решением уравнения $\hat{Q}\cdot\vec{\pi}^{\mathbf{st}} = 0$. Соответствующее время релаксации оценивается как $(\lambda+\mu)^{-1}$. Этот временной масштаб можно также интерпретировать как время корреляции марковской цепи, то есть время, в течении которого марковский процесс помнит свое исходное состояние.

О моделях социальных сервисов (??)

(типичные задачи на это даются, чуть что буду разбирать эту теорию.)

ВШЭ $M/M/\infty$ парковка (мб в каталог перенесу потом)

Покажем, как происходит конструирование математической модели системы массового обслуживания на следующем простом примере. Предположим, что перед нами стоит задача обустроить автомобильную стоянку для посетителей нового торгового комплекса. На основании статистических данных мы можем оценить число посетителей, которые будут ежедневно приезжать в торговый комплекс на личных автомобилях, а также среднюю продолжительность визита типичного посетителя. Насколько большой следует сделать стоянку, чтобы быть уверенным, что большинству посетителей хватит парковочных мест?

Для ответа на этот вопрос поступим следующим образом. Оценим статистически-стационарное распределение вероятностей π_n^{st} обнаружить на стоянке ровно n автомобилей, которое имело бы место в том случае, если бы стоянка была неограниченно большой. Тогда для обеспечения большинства посетителей возможностью припарковать свой автомобиль число мест N на проектируемой нами стоянке должно быть таким, чтобы в рамках используемой вероятностной модели выполнялось условие $\Pr[n > N] \ll 1$. Вероятностное распределение π_n^{st} числа занятых парковочных мест может быть вычисленно аналитически, если сделать два предположения: (1) автомобили прибывают на стоянку независимо друг от друга в случайные моменты времени со средней частотой λ, (2) каждый автовладелец оставляет свой автомобиль на случайное время, имеющее экпоненциальную функцию плотности вероятности с параметром μ. Значения λ и μ на практике должны оцениваться исходя из статистических данных. Отметим, что указанная модель в англоязычной литературе часто обозначается как $M/M/\infty$, где первая M (от англ. memoryless) обозначает пуассоновскую статистику событий поступления новых клиентов, вторая M обозначает экспоненциальность статистики времени, затрачиваемого на обслуживание одного клиента, и, наконец, знак ∞ соответствует предположению о бесконечно большом числе каналов обслуживания (т.е. парковочных мест в контексте обсуждаемой задачи).

Итак, состояние стоянки в произвольный момент времени t характеризуется числом занятых парковочных мест n. С учетом сделанных предположений, стохастические переходы между этими состояниями описываются марковской цепью, изображенной на Рис. (2). А значит эволюция распределения вероятностей $\pi_n(t)$ подчиняется следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t)$$
$$\frac{d\pi_n(t)}{dt} = \lambda\pi_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)\pi_n(t) + (n+1)\mu\pi_{n+1}(t), \qquad \text{при } n \geq 1,$$

Занулив левые части этих уравнений, получим, что стационарные вероятности удовлетворяют соотношению $\pi_n^{\text{st}} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0^{\text{st}}$. Определяя π_0^{st} из условия нормировки $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n^{\text{st}} = 1$, находим, что искомое стационарное решение дается распределением Пуассона

$$\pi_n^{\mathbf{st}} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Математическое ожидание и дисперсия числа автомобилей на стоянке в рамках расмматриваемой модели равны $\langle n\rangle = \frac{\lambda}{\mu}$ и $\sigma_n^2 = \frac{\lambda}{\mu}$, соответственно. Легко видеть, что $\sigma_n \ll \langle n\rangle$ при $\langle n\rangle \gg 1$. Благодаря быстрому затуханию π_n^{st} при неограниченном возрастании n, можно ожидать, что если на практике N значительно превосходит безразмерное отношение $\frac{\lambda}{\mu}$, то ситуации, когда для очередного посетителя не найдется свободного места на стоянке, будут относительно редки.

ВШЭ $M/M/1$ Банкомат Предположим, что клиенты приходят к банкомату независимо друг от друга со средней частотой λ и каждый клиент, дождавшись своей очереди, тратит на проведение банковских операций случайное время, имеющее экспоненциальную функцию плотности вероятности с параметром μ. Какова статистически-стационарная функция распределения π_n^{st} числа клиентов возле банкомата?

Как и в предыдушей задаче, будем характеризовать состояние системы количеством клиентов, в находящихся в ней данный момент. Стохастическая динамика переходов между состояниями представляет собой случайный процесс Маркова, см. Рис. (3). Соответствующая система уравнений на эволюцию распределения вероятностей нахождения системы в различных состояниях выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_0(t)}{dt} &= -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t)\\ \frac{d\pi_n(t)}{dt} &= \lambda\pi_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)\pi_n(t) + \mu\pi_{n+1}(t), \qquad \text{при } n \geq 1.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что для стационарных вероятностей имеет место соотношение $\pi_n^{\mathrm{st}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0^{\mathrm{st}}$. С учетом условия нормировки это означает, что стационарное решение дается следующим распределением

$$\pi_n^{\mathbf{st}} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

Отметим, что такое решение существует только, если $\mu > \lambda$. В противном случае среднее время, затрачиваемое на обслуживание одного клиента, превосходит средний интервал времени между прибытием новых клиентов, так что длина очереди неограниченно возрастает с течением времени. Последнее отражается также в том, что среднее число клиентов в системе, $\langle n\rangle = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$, диктуемое распределением (53), становится бесконечно большим при стремлении μ к λ сверху.

Обозначим как T время, которое клиент, пришедший к банкомату в случайный момент времени, потратит на то, чтобы отстоять в очереди и получить услугу. Очевидна, эта случайная величина может быть записана как $T = \sum_{i=0}^{n} \tau_i$, где n - число человек, обнаруженное возле банкомата новым клиентом, τ_i - время, которое потратит на работу с банкоматом i-й человек в очереди. Так слагаемые в указанной сумме статистически независимы и одинаково распределены с экспоненциальной плотностью вероятности $\mu e^{-\mu\tau}$, то условная плотность вероятности $\rho(T \mid n)$ дается распределением Эрланга следующего вида

$$\rho(T \mid n) = \frac{\mu^{n+1}T^n}{n!}e^{-\mu T}$$

Тогда согласно формуле полной вероятности, функция распределения случайного времени T равна

$$\begin{aligned}P(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\rho(T \mid n)\pi_n^{st} = e^{-\mu T}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mu^{n+1}T^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n =\\ &= e^{-\mu T}(\mu-\lambda)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda T)^n}{n!} = (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)T}.\end{aligned}$$

Среднее время, которое клиент проведет в системе:

$$\langle T\rangle = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Последний ответ также можно было получить посредством формулы $\langle T\rangle = (\langle n\rangle + 1)\langle\tau\rangle$.

ВШЭ $M/M/N$ Наконец, рассмотрим модель $M/M/N$, характеризуемую произвольным количеством N каналов обслуживания. Предположим, в магазине работают N касс самообслуживания. Каждый покупатель занимает кассу на случайный промежуток времени, имеющий экспоненциальное распределение с параметром μ. Покупатели подходят к кассам в пуассоновские моменты времени со средней частотой λ, выстраиваясь в случае необходимости в единую очередь. Очередной покупатель проходит на ту кассу, которая освобождается первой, либо на любую из свободных, если таковых в момент его прихода несколько. Обозначим через n полное число покупателей в зоне оплаты покупок, включая и тех кто уже стоит на кассе, и тех, кто только ожидает своей очереди. Каково стационарное вероятностное распределение π_n^{st} ? Эволюция распределения вероятностей нахождения системы в состояниях, характеризуемых различным числом покупателей n, описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t)\\
&\frac{d\pi_n(t)}{dt} = \lambda\pi_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)\pi_n(t) + (n+1)\mu\pi_{n+1}(t), \qquad \text{при } 1 \le n \le N-1,\\
&\frac{d\pi_n(t)}{dt} = \lambda\pi_{n-1}(t) - (\lambda + N\mu)\pi_n(t) + N\mu\pi_{n+1}(t), \qquad \text{при } n \ge N.
\end{aligned}$$

Занулив левые части этих уравнений, находим стационарное решение

$$\pi_n^{\mathbf{st}} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0^{\mathbf{st}}, & \text{при } 0 \le n \le N-1 \\ \frac{1}{N!N^{n-N}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & \text{при } n \ge N \end{cases}$$

где $\pi_0^{\text{st}} = \left(\frac{1}{N!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{N\mu}{N\mu-\lambda} + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1}$ в силу условия нормировки. Легко видеть, что полученное решение переходит в распределения (50) и (53) в случаях $N \to +\infty$ и $N = 1$, соответственно.

6.3.2 Ветвящиеся процессы

описание модели

Описание модели.

Первоначально задача формулировалась следующим образом.

Пусть $p_0, p_1, p_2, \ldots$ - вероятности того, что отец имеет соответственно $0, 1, 2, \ldots$ сыновей, каждый из которых с теми же вероятностями может иметь своих сыновей и т.

д.

Какова вероятность, что мужская линия выродится к n -ому поколению?

В обшем случае можно рассматривать однотипные частицы, под которыми могут пониматься люди, животные, бактерии или нейтроны в цепных реакциях.

Вероятности $p_k, k = 0, 1, \ldots,$ будут связываться с событиями, что одна частица в следующем поколении превращается в k частиц.

Будем считать, что частицы размножаются независимо друг от друга и для каждой из них вероятности p_k $k = 0, 1, \ldots,$ одни и те же.

Обозначим через $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ число частиц в нулевом, первом, втором, .

.

поколениях соответственно.

Другими словами, ξ_n- объем популяции в n -ом поколении.

Будем считать (без особого ограничения общности), что $\xi_0 = 1$, т.

е.

начальное поколение состоит из одной частицы.

Объем последующих поколений $\xi_1, \xi_2, \ldots$ будет случайным.

Заметим, что при сделанных предположениях $\{p_0, p_1, \ldots\}$ будет распределением вероятностей случайной величины ξ_1, т.

е.

$\mathrm{P}(\xi_1 = k) = p_k, k = 0, 1, \ldots$

классификация

Поскольку частицы размножаются независимо друг от друга и число потомков каждой из них имеет одно и то же распределение вероятностей, то распределение случайной величины ξ_n должно определяться из начальных условий.

Важной характеристикой ветвящегося процесса является среднее число непосредственных потомков одной частицы $\mathrm{E}\xi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = m$. В зависимости от значения этой величины ветвящийся процесс называется:

докритическим, если $m < 1$; критическим, если $m = 1$;

- надкритическим, если $m > 1$ (или $m = \infty$).

Через σ^2 будем также обозначать дисперсию $\mathrm{D}\ \xi_1$. Пусть $A-$ событие, которое состоит в том, что процесс $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \ldots$ в конце концов выродится.

Его вероятность $q = \mathrm{P}(A)$ будем называть вероятностът вырождения процесса.

Ближайшей нашей целью будет найти зависимость q от начальных данных.

Производящая функция процесса.

Поскольку $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются целочисленными случайными величинами, то их распределения вероятностей естественно представлять производящими функциями.

В частности, обозначим

$$f(x) = g_{\xi_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$$

и будем называть f производящей функцией процесса.

Для отыскания производящих функций $g_{\xi_n}, n = 2, 3, \ldots$, нам потребуется следующий результат.

Теорема

12.1.

Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots -$ независимые одинаково распределенные висимая от них целочисленная случайная величина с производящей функци- $S_\nu = \eta_1 + \ldots + \eta_\nu$ $(S_0 = 0)$ определяется равенством

$$g_{S_\nu}(x) = g_\nu \circ g_\eta(x)$$

ДоКАЗАТЕльство.

Непосредственно из определения производящей функ- ции с использованием свойств математического ожидания получаем

$$\begin{aligned} g_{S_\nu}(x) = \mathrm{E}x^{S_\nu} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(x^{S_\nu} 1_{\{\nu=k\}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(x^{\eta_1+\ldots+\eta_k} 1_{\{\nu=k\}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(g_\eta(x)\right)^k \mathrm{P}(\nu = k) = g_\nu\left(g_\eta(x)\right) \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 12.2.

Пусть $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \ldots$ −ветвяицийся процесс Гальтона- Ватсона с производящей функцией $g_{\xi_1}(x) = f(x)$. Тогда производящая функция $g_{\xi_n}(x)$ представляет собой n -ут итераиито f^n функции f, т.

е.

$$g_{\xi_n}(x) = f^n(x) = f \circ \ldots \circ f(x)$$

ДоКАЗАТЕльство.

Представим n -ое поколение частиц в виде $\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_{\xi_{n-1}}$, где η_1- число потомков от первой частицы, η_2- от второй $, \ldots, \eta_{\xi_{n-1}}$ от последней из $(n-1)$ -го поколения.

Тогда по предыдущей теореме

$$g_{\xi_n}(x) = g_{\xi_{n-1}} \circ g_\eta(x) = g_{\xi_{n-1}} \circ f(x)$$

По индукции получаем требуемый результат.

Вероятность вырождения.

Пусть A_n- событие, которое заключается в том, что n -ое поколение отсутствует, т.

е.

$A_n = \{\xi_n = 0\}$. Тогда $A_n \nearrow A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Поэтому в силу непрерывности вероятностной меры

$$q = \mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(A_n\right)$$

Теорема

12.3.

Вероятность q вырождения процесса Гальтона-Ватсона с производяицей функцией $f(x)$ определяется равенством

$$q = \lim_{b \to \infty} f^n(0)$$

и является наименъиим неотрицателънъим корнем уравнения

$$f(x) = x$$

ДоКАЗАТЕльство.

Поскольку $\mathrm{P}\left(\xi_n = 0\right) = f^n(0)$, то $f^n(0) \nearrow q$. Осуществляя предельный переход при $n \to \infty$ в равенстве

$$f\left(f^n(0)\right) = f^{n+1}(0)$$

получаем $f(q) = q$, т. е. $q-$ корень уравнения $f(x) = x$. Остается показать, что q - наименьший неотрицательный корень уравнения $f(x) = x$. Допустим противное, т.е.

$f(\alpha) = \alpha$ и $0 \leqslant \alpha < q$. Тогда в силу монотонности функции f будем иметь

$$f(0) \leqslant f(\alpha) = \alpha < q = f(q)$$

Снова, используя монотонность функции f, получаем

$$f^2(0) \leqslant \alpha < q$$

Повторение этого процесса приводит к неравенствам

$$f^n(0) \leqslant \alpha < q, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Но тогда

$$\lim_{n \to \infty} f^n(0) \leqslant \alpha$$

что противоречит определению q.

процесс Гальтона-Ватсона критический или докритический, то $q = 1$

Теорема

12.4.

Если процесс Гальтона-Ватсона критический или докритический, то $q = 1$.

В случае надкритического прочесса $0 \leqslant q < 1$.

ДоКАЗАТЕльСтво.

Допустим, что $m = f'(1) \leqslant 1$. Если процесс не вырожденный, то $f'(x) < 1$ при $0 \leqslant x < 1$. Фиксируем произвольно $x_0 \in [0, 1)$. По теореме о среднем найдется такое $x^* \in (x_0, 1)$, что

$$1 - f(x_0) = f'(x^*)(1 - x_0)$$

Но тогда

$$1 - f(x_0) < 1 - x_0$$

и $f(x_0) > x_0$. Т.

о.

в интервале [0,1) корней уравнение $f(x) = x$ не имеет.

Если $m = f'(1) > 1$, то найдется такое $x_0 \in (0, 1)$, что $f'(x_0) > 1$. Используя теорему о среднем, получаем

$$1 - f(x_0) > 1 - x_0$$

т.

е.

$f(x_0) - x_0 < 0$. Если $f(0) = 0$, то $q = 0$. В противном случае $f(0) > 0$ и функция $\varphi(x) = f(x) - x$ принимает на концах промежутка $[0, x_0]$ значения разных знаков.

Следовательно, в этом промежутке найдется решение уравнения $f(x) = x$

6.4 Типичные прикладные вероятностные модели (!!)

(тут как раз уже такие модели, которые нужны в жизни хотя бы где-то!!)

6.4.1 Модели блуждания частиц

(написано в разделе про случпроцы, тут лишь готовые методы с минимумом пояснений)

6.4.2 Уравнение Фоккера-Планка

первая тут идея - что нужно перейти к проппагатору, то есть к интегралу от вероятности в прошлом. !!! здесь необходима связка с условной вероятностью, что-то я совсем там не помню никаких таких формул.

7 Введение в математическую статистику

7.1 Основы математической статистики в двух словах

(сперва пропишу это в части про мат статистику, потом сюда суть переносить буду. пока не до неё, так что позже займусь.)

7.1.1 Некоторые неравенства в математической статистике

(просто помню, что их прямо много)

7.1.2 Центральная предельная теорема

(хз, чего она именно в мат статистике, но ладно)

Простейший вариант ЦПТ

(из избров пишу)

Суть ЦПТ (???) Представим что у нас есть N независимых случайных величин $\xi_1 ... \xi_N$ с нулевым средним и не сильно разными дисперсиями. Поищем характеристики случайной величины $\xi = \frac{1}{N}\sum_k \xi_k$.

Вычислим её производящую функцию:

$$f(p) = \left\langle e^{-ip\frac{1}{N}\sum_i \xi_i} \right\rangle = \prod_i \left\langle e^{-ip\frac{1}{N}\xi_i} \right\rangle$$

$$f(p) = \prod_i e^{-\frac{\sigma_i^2 p^2}{2N^2}} = e^{-\frac{p^2}{2N^2}\sum_i \sigma_i^2}$$

$$\rho(\xi) = \frac{\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-N\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}}$$

Получили распределение Гаусса. Видим, что типичное отклонение ξ меньше чем среднеквадратичное отклонение случайных величин в $\sqrt{N}$ раз.

Проверим что наше предположение о малости - верное. При интегрировании $\sqrt{N}$ тогда условие малости верно если ξi $\sqrt{N}$.

Кажется что можно использовать условие ξi тогда условие малости переходит в условие $\sqrt{N}$ которое выполнено. В задаче с идеальном газом ξ_i Чтобы перейти к распределению Гаусса нам потребовалось не просто условие как так-то?

Центральная предельная теорема, как следует из её названия, очень важна. Вопервых, Она позволяет понять как ведёт себя случайная величина которая зависит от многих параметров. Хорошим примером такой величины является случайная ошибка в эксперименте. ЦПТ позволяет понять что ошибка распределена Гаусовым образом и зависит всего от одного параметра. Во-вторых,

ЦПТ говорит о том как улучшается ваш результат при повторении измерений.

строгая формулировка и доказательство ЦПТ

(зубков)
Ранее

Теорема Муавра-Лапласа о сходимости распределения центрированного и нормированного числа успехов в n независимых испытаниях Бернулли к нормальному распределению была доказана с помощью довольно громоздких вычислений, а результат относился к узкому классу случаев.

С помощью характеристических функций легко доказывать значительно более общие утверждения.

Теорема. (зачем она?)

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, одинаково распределены, $\mathbf{M}\xi_1 = a$, D $\xi_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

Доказательство.

Согласно теореме о непрерывности соответствия между функциями распределения и характеристическими функциями, достаточно показать, что характеристические функции $f_n(t) = \mathbf{M}e^{it\zeta_n}$ случайных величин

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

при $n \to \infty$ для каждого $t \in \mathbb{R}$ сходятся к характеристической функции стандартного нормального распределения, равной $\exp\{-t^2/2\}$.

Очевидно,

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_1 - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - a}{\sigma}$$

слагаемые в сумме в правой части независимы и имеют такое же распределение, как ζ_1.

Поэтому

$$\mathbf{M}\exp\left\{it\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)\right\} = (\mathbf{M}\exp\{it(\xi_1 - a)\})^n = f_1^n(t).$$

Так как $\mathbf{M}\frac{\xi_1 - a}{\sigma} = 0$ и $\mathbf{D}\frac{\xi_1 - a}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{D}\xi_1 = 1$, то по свойству 6 характеристических функций

$$f_1(t) = \mathbf{M}\exp\left\{it\frac{\xi_1 - a}{\sigma}\right\} = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right), \quad t \to 0$$

Следовательно, при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ и $n \to \infty$

$$\mathbf{M}\exp\{it\zeta_n\} = \mathbf{M}\exp\left\{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)\right\} = f_1^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right)^n \to e^{-t^2/2}$$

Тем самым Теорема доказана.

(и что с этого? кст, суть не понял)

Теорема Ляпунова (????) Метод характеристических функций позволяет доказывать предельные теоремы и в более общих ситуациях.

В качестве примера рассмотрим теорему Ляпунова.

Теорема Ляпунова.

Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ случайные величины $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$ независимы

$$\mathbf{M}\xi_{n,k} = a_{n,k}, \quad \mathbf{D}\xi_{n,k} = \sigma^2_{n,k}, \quad \mathbf{M}\left|\xi_{n,k} - a_{n,k}\right|^3 = c^3_{n,k}, \quad n, k = 1, 2, \ldots$$

и $S_n = \xi_{n,1} + \ldots + \xi_{n,n}$. Если

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma^2_{n,k}, \quad C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} c^3_{n,k}$$

и распределения слагаемых изменяются так, что $\frac{C_n}{B_n} \to 0, n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{S_n - A_n}{B_n} \leqslant x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

Доказательство.

Достаточно доказать, что характеристические функции случайных величин $\frac{1}{B_n}(S_n - A_n)$ в каждой точке сходятся к характеристической функции стандартного нормального распределения, равной $\exp\{-t^2/2\}$.

Аналогично случаю, когда слагаемые одинаково распределены, представим характеристическую функцию в виде произведения характеристических функций центрированных и нормированных слагаемых и используем разложения характеристических функций с явной оценкой остаточного члена:

при любом $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{M}\exp\left\{it\frac{S_n - A_n}{B_n}\right\} = \mathbf{M}\exp\left\{it\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_{n,k} - a_{n,k}}{B_n}\right\} =$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{M}\exp\left\{it\frac{\xi_{n,k} - a_{n,k}}{B_n}\right\} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{t^2}{2B_n^2}\sigma_{n,k}^2 + \theta_{n,k}\frac{t^3}{B_n^3}c_{n,k}^3\right)$$

где $|\theta_{n,k}| \leqslant \frac{1}{6}, \quad k = 1, \ldots, n$. Согласно неравенству Ляпунова

$$\sigma_{n,k} = \sqrt{\mathbf{M}\left(\xi_{n,k} - a_{n,k}\right)^2} \leqslant \left(\mathbf{M}\left|\xi_{n,k} - a_{n,k}\right|^3\right)^{1/3} = c_{n,k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

По условию $\frac{C_n}{B_n} \to 0$ при $n \to \infty$, значит,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{c_{n,k}^3}{B_n^3} \leqslant \left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3 \to 0, \quad \text{т. е.} \quad \max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{c_{n,k}}{B_n} \to 0$$

Следовательно,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\sigma_{n,k}}{B_n} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{c_{n,k}}{B_n} \to 0$$

Таким образом, для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{t^2}{2B_n^2}\sigma_{n,k}^2 + \theta_{n,k}\frac{t^3}{B_n^3}c_{n,k}^3\right) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

и поэтому при $n \to \infty$ и $k = 1, \ldots, n$

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{2B_n^2}\sigma_{n,k}^2 + \theta_{n,k}\frac{t^3}{B_n^3}c_{n,k}^3\right) = \left(-\frac{t^2}{2B_n^2}\sigma_{n,k}^2 + \theta_{n,k}\frac{t^3}{B_n^3}c_{n,k}^3\right)(1 + o(1))$$

где в силу (47) остаточные члены стремятся к 0 при $n \to \infty$ равномерно по $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Отсюда следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$ при некоторых $\theta = \theta(n,t) \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$

$$\ln\mathbf{M}\exp\left\{it\tfrac{\xi_{n,1}+\ldots+\xi_{n,n}-A_n}{B_n}\right\} = \textstyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{t^2}{2B_n^2}\sigma_{n,k}^2 + \theta_{n,k}\frac{t^3}{B_n^3}c_{n,k}^3\right) =$$
$$= (1 + o(1))\textstyle\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{t^2}{2B_n^2}\sigma_{n,k}^2 + \theta_{n,k}\frac{t^3}{B_n^3}c_{n,k}^3\right) =$$
$$= (1 + o(1))\left(-t^2\frac{B_n^2}{2B_n^2} + \theta t^3\frac{C_n^3}{B_n^3}\right) = -\frac{t^2}{2}(1 + o(1))$$

Теорема доказана.

(?? и зачем она??)

применения

7.1.3 Характеристические функции (?!!!!)

(чего раньше я не вынесу эту часть?!!!! почему это мат статика? вынесу скорее всего скоро.)

(тут подробная теория. чет её прямо дохрена. чего кст раньше об этом ничего не было?)

Конструкция характеристической функции

Основные формулы характеристической функции (?) (пока хз)

Теория Распространим понятие математического ожидания на комплекснозначные случайные величины. Для комплексной случайной величины $\zeta = \xi + i\eta$, где $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$ и $\eta = \mathbf{Im}\zeta-$ случайные величины с действительными значениями, причем существуют и конечны $\mathrm{M}\ \xi$ и $\mathbf{M}\eta$. Тогда по определению полагают

$$\mathbf{M}\zeta = \mathbf{M}\xi + i\mathbf{M}\eta$$

Таким образом, $\mathrm{ReM}\,\zeta = \mathrm{MRe}\,\zeta$, $\mathrm{ImM}\,\zeta = \mathrm{MIm}\,\zeta$

Основные свойства математического ожидания (аддитивность, мультипликативность для произведения независимых случайных величин) переносятся на математические ожидания комплекснозначных случайных величин.

Лемма Если существует математическое ожидание комплекснозначной случайной величины ζ, то

$$|\mathbf{M}\zeta| \leqslant \mathbf{M}|\zeta|$$

Рассмотрим функцию $m(x+iy) = |x+iy|, x, y \in R$, как функцию от двух действительных переменных x и y.

Графиком функции $m(x,y)$ является конус $z = (x^2+y^2)^{1/2}$.

Для любой точки $(a,b) \in R^2$, плоскость

$$z = z(x,y) = \frac{xa+yb}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

касается конуса по лучу $\left(ta, tb, t\,(a^2+b^2)^{1/2}\right), t \geqslant 0$, а для остальных точек плоскости лежит строго ниже конуса, т.е.

$$z(x,y) \leqslant m(x+iy) \text{ для всех } x, y \in R$$

Пусть теперь ζ - комплекснозначная случайная величина и $\mathbf{M}\zeta = a + ib$. Тогда

$$\mathbf{M}|\zeta| = \mathrm{M}\,m(\zeta) \geqslant \mathbf{M}z(\mathrm{Re}\,\zeta, \mathrm{Im}\,\zeta) = \tfrac{\mathbf{M}(a\,\mathrm{Re}\,\zeta + ib\,\mathrm{Im}\,\zeta)}{(a^2+b^2)^{1/2}} =$$
$$= (a^2+b^2)^{1/2} = |a+ib| = |\mathbf{M}\zeta|$$

Определение характеристической функции (зубков)

Характеристической функцией случайной величины ξ, принимающей действительные значения, называется функция

$$f(t) = \mathbf{M}\exp\{it\xi\}, \quad -\infty < t < \infty$$

Основные свойства характеристической функции (?) (!! надо бы посмотреть это!!)

Перечислим несколько простых свойств характеристических функций.

1. $|f(t)| \leqslant 1$ при всех $t \in R, f(0) = 1$

Первое неравенство - простое следствие леммы, так как $|\exp\{it\xi\}| = 1$ и $|f(t)| = \mathbf{M}\exp\{it\xi\}| \leqslant \mathbf{M}|\exp\{it\xi\}\ | = 1$. Второе равенство очевидно.

2. Если $\eta = a\xi + b$, где $a, b-$ константы, то

$$f_\eta(t) = e^{itb} f_\xi(at)$$

Действительно,

$$f_\eta(t) = \mathbf{M}\exp\{it\eta\} = \mathbf{M}\exp\{it(a\xi + b)\} = e^{itb}\mathbf{M}\exp\{ita\xi\} = e^{itb}f_\xi(at)$$

3. $f_\gamma(-t) = \overline{f_\gamma(t)}$, где черта - знак комплексного сопряжения.

Действительно: $f_\gamma(-t) = \mathbf{M}\exp\{i(-t)\gamma\} = \mathbf{M}\exp\{-it\gamma\} = \text{M}\overline{\exp\{it\gamma\}} = \overline{\mathbf{M}\exp\{it\gamma\}} = \overline{f_\gamma(t)}$

Следствие.

Если распределение случайной величины γ симметрично, т.е. γ и $-\gamma$ одинаково распределены, то

$$f_\gamma(t) = \mathbf{M}\exp\{it\gamma\} = \mathbf{M}\exp\{-it\gamma\} = f_\gamma(-t) = \overline{f_\gamma(t)}$$

т. е. характеристическая функция случайной величины с симметричным распределением принимает только действительные значения.

4. Если случайные величины $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ независимы, то

$$f_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\gamma_k}(t)$$

Так как $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ независимы, то случайные величины $\exp\{it\gamma_1\}, \ldots, \exp\{it\gamma_n\}$ тоже независимы, и поэтому

$$\begin{aligned} f_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n}(t) = &\mathbf{M}\exp\{it(\gamma_1 + \ldots + \gamma_n)\} = \mathbf{M}\prod_{k=1}^{n}\exp\{it\gamma_k\} = \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{M}\exp\{it\gamma_k\} = \prod_{k=1}^{n} f_\gamma(t) \end{aligned}$$

свойства характеристических функций (горяйнов)

1°. $|h_\xi(t)| \leqslant 1$ и $h_\xi(0) = 1$

2°.$h_\xi(-t) = \overline{h_\xi(t)}$

3°.$h_{a\xi+b}(t) = e^{itb}h_\xi(at), \quad a, b \in \mathbb{R}$

4°. Если $\xi_1, \ldots, \xi_n -$ независимые случайные величины и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ то $h_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} h_{\xi_k}(t)$

5°. Функция $h_\xi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и если $\mathbf{M}|\xi|^n < \infty$, то $h_\xi(t)$ имеет производные до n -го порядка включительно и

$$\mathbf{M}\xi^n = \frac{1}{i^n}h_\xi^{(n)}(0)$$

Свойства $1^\circ - 4^\circ$ следуют непосредственно из определения характеристической функции и свойств математического ожидания.

Доказательство последнего свойства опирается на теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема

(Бохнера)

Для того, чтобы непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $h(t)$с $h(0) = 1$ бъиа характеристической функцией некоторого распределения, необходимо и достаточно, чтобъ она была положсителъно определенной, т. е. для любъи $t_1, \ldots, t_n$ из $\mathbb{R}$ и $z_1, \ldots, z_n$ из $\mathbb{C}, n = 1, 2, \ldots$, выполнялось условие

$$\sum_{k,l=1}^{n} h(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geqslant 0$$

Доказательство Необходимость условия следует из простых преобразований.

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} h_\xi\left(t_k-t_l\right) z_k \bar{z}_l &= \mathbf{M}\left(\sum_{k,l} z_k \bar{z}_l e^{i(t_k-t_l)\xi}\right) \\ &= \mathbf{M}\left(\sum_k z_k e^{it_k\xi}\right)\left(\overline{\sum_l z_l e^{it_l\xi}}\right) \\ &= \mathbf{M}\left|\sum_k z_k e^{it_k\xi}\right|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Доказательство достаточности условия теоремы выходит за рамки данного курса.

Характеристические функции для простейших распределений а) пусть имеет симметричное двухточечное распределение:

$\mathbf{P}\{\xi=a\}=\mathbf{P}\{\xi=-a\}=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\mathbf{M}\exp\{it\xi\}=\mathbf{P}\{\xi=a\}e^{ita}+\mathbf{P}\{\xi=-a\}e^{-ita}=\frac{(e^{ita}+e^{-ita})}{2}=\cos(at)$$

б) Пусть ξ имеет равномерное распределение на $[-a,a]$:

$$p\xi(x)=\frac{1}{2a} \text{ при } x\in[-a,a] \text{ и } p\xi(x)=0 \text{ при } |x|>a$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{Me}^{it\xi} &= \int_{-a}^{a} e^{itx}\frac{1}{2a}dx=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}(\cos(tx)+i\sin(tx))dx= \\ &= \frac{1}{2a}t(\sin(tx)-i\cos(tx))\Big|_{-a}^{a}=\frac{\sin(at)}{at}\end{aligned}$$

в) Пусть ξ имеет стандартное нормальное распределение с плотностью $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\left(\frac{-x^2}{2}\right)$. Так как плотность $\varphi(x)-$ четная функция, то

$$\begin{aligned}f(t) =&\mathbf{M}\exp\{it\xi\}=\int_R e^{itx}\varphi(x)dx= \\ &=\int_R(\cos(tx)+i\sin(tx))\varphi(x)dx=\int_R\varphi(x)\cos(tx)dx\end{aligned}$$

Составим уравнение для производной $f(t)$

$$\begin{aligned}f'(t) =&\frac{d}{dt}\int_R\varphi(x)\cos(tx)dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R x\sin(tx)e^{-x^2/2}dx= \\ =&-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\sin(tx)d\left(e^{x^2/2}\right)= \\ =&-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sin(tx)e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}-t\int_R\cos(tx)e^{-x^2/2}dx\right)=-tf(t)\end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение $f'(t)=-tf(t)$ с начальным условием $f(0)=1$ решается методом разделения переменных:

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=(\ln f(t))'=-t\to\ln f(t)=\frac{-t^2}{2}$$

Т.е. $f(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), t \in R$

Если случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, то случайная величина $\eta = \sigma\xi + a$ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2) (математическим ожиданием a и дисперсией σ^2). По свойству 2) получаем:

$$\mathbf{M}\exp(it\eta) = e^{ita} f(\sigma t) = \exp\left(ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Случайная величина η имеет функцию распределения $\mathbf{P}\{\eta \leqslant x\} = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ и плотность распределения $\varphi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$.

дальнейшие свойства

Как и функция распределения, характеристическая функция существует для любой случайной величины с действительными значениями.

Более того, характеристические функции обладают рядом аналитических свойств.

Лемма 2.

Для любых $t \in R$ и целых неотрицательных n

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|t|^n}{n!}$$

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 0$ имеем

$$\left| e^{it} - 1 \right| \leqslant |t| \text{ при всех } t \in R$$

Допустим, что для некоторого целого неотрицательного n утверждение леммы справедливо, и сделаем индуктивный переход. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\right) = ie^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{ik(it)^{k-1}}{k!} = i\left(e^{it} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!}\right)$$

и что при $t = 0$ правая часть равна 0. Поэтому

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \right| = \left| i \int_0^t \left(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!}\right) du \right|$$

Оценивая подынтегральное выражение с помощью индуктивного предположения, находим

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \right| = \left| \int_0^t \left(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!}\right) du \right| \leqslant \int_0^t \frac{|u|^n}{n!} du = \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Лемма доказана.

5.

Лемма 3. Пусть случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x) = \mathbf{P}\{\xi \leqslant x\}, x \in R$. Положим $\mathbf{M}\xi^n = m_n$. Если $|m_n| < \infty$, то существуют производны $f^{(k)}(t)$ npu $k = 1, \ldots, n$ u

$$f^{(k)}(0) = i^k \mathbf{M}\xi^k = i^k m_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

более того, имеют место разложения

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} m_k \frac{(it)^k}{k!} + R_n(t), \quad R_n(t) = o\left(t^n\right), \quad t \to 0$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \frac{(it)^k}{k!} + r_n(t), \quad |r_n(t)| \leqslant \mathbf{M}|\xi|^n \cdot \frac{|t|^n}{n!}$$

Доказательство. Формальным дифференцированием равенства

$$f(t) = \mathbf{M}\exp\{it\xi\} = \int_R e^{itx} dF(x)$$

Получаем:

$$f^{(k)}(t) = \int_R (ix)^k \exp\{itx\} dF(x)$$

законность дифференцирования следует из того, что полученный интеграл сходится абсолютно при любом t :

$$\int_R \left|(ix)^k \exp\{itx\}\right| dF(x) = \int_R |x|^k dF(x) = m_k < \infty$$

Полагая $t = 0$ в (46), доказываем первое утверждение:

$$f^{(k)}(0) = \int_R (ix)^k dF(x) = i^k m_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

После того, как доказана n -кратная дифференцируемость $f(t)$, для доказательства равенства (44) достаточно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Оценка остаточного члена в (45) следует из разложения

$$\mathbf{M}\exp\{it\xi\} = \mathbf{M}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!} + \rho_n(t\xi)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_k (it)^k}{k!} + \mathbf{M}\rho_n(t\xi)$$

где $\rho_n(x) = e^{ix} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!}$ и по лемме $|\rho_n(t\xi)| \leqslant \frac{|t\xi|^n}{n!}$. Так как для комплекснозначной случайной величины ζ справедлива оценка $|\mathbf{M}\zeta| \leqslant \mathbf{M}|\zeta|$, то

$$|r_n(t)| = |\mathbf{M}\rho_n(t\xi)| \leqslant \mathbf{M}|\xi|^n \cdot \frac{|t|^n}{n!}$$

Важными частными случаями соотношения (44) являются

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + o(t) = 1 + it\mathbf{M}\xi + o(t)$$

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + t^2 \frac{f''(0)}{2!} + o(t) =$$

$$= 1 + it\mathbf{M}\xi - \frac{t^2 \mathbf{M}\xi^2}{2} + o\left(t^2\right), \quad t \to 0$$

если $\mathbf{M}\xi = 0$, то $\mathbf{M}\xi^2 = \mathbf{D}\xi = \sigma^2$ и

$$f(t) = 1 - \tfrac{t^2\sigma^2}{2} + o\left(t^2\right) \quad (t \to 0)$$
$$f(t) = 1 - \tfrac{t^2\sigma^2}{2} + \Theta t^3 \mathbf{M}|\xi|^3, \quad |\Theta| \leqslant \tfrac{1}{6}$$

Следующие два свойства лежат в основе почти всех применений аппарата характеристических функций в теории вероятностей.

6. Теорема.

Различным распределениям вероятностей соответствуют различные характеристические функции.

Доказательство этой теоремы можно найти в учебниках Б.А.Севастьянова или Боровкова.

Пример. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимые случайные величины, имеющие нормальные распределения: ξ_k имеет нормальное распределение с параметрами $\left(a_k, \sigma_k^2\right), k = 1, \ldots, n$; им соответствуют характеристические функции

$$f_k(t) = \mathbf{M}e^{it\xi_k} = \exp\left\{iat - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\right\}, k = 1, \ldots, n$$

Тогда сумма $\zeta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ имеет характеристическую функцию

$$f(t) = \mathbf{M}e^{it(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{M}\mathbf{e}^{it\xi_k} = \exp\left\{i\left(a_1 + \ldots + a_n\right)t - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2\right)t^2\right\}$$

Т. е. ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(a_1 + \ldots + a_n, \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)$. Таким образом, (согласно теореме единственности) сумма независимых случайных величин, имеющих нормальные распределения, имеет нормальное распределение, параметры которого являются суммами параметров слагаемых.

Случайные величины - это функции на пространстве элементарных событий. В математическом анализе рассматриваются разные виды сходимости функций: поточечная, равномерная, почти всюду, в том или ином функциональном пространстве и т.д. В теории вероятностей тоже рассматриваются разные виды сходимости случайных величин. Пока рассмотрим только сходимость распределений (слабую сходимость).

Слабая сходимость. Определение. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин с действительными значениями слабо сходится к случайной величине ξ, если функции распределения $F_n(x) = \mathbf{P}\left\{\xi_n \leqslant x\right\}$ сходятся к функции распределения $F(x) = \mathbf{P}\{\xi \leqslant x\}$ в каждой точке непрерывности $F(x)$

В общем случае последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ со значениями в измеримом пространстве $(B, \mathcal{B})$ с метрикой ρ называют слабо сходящейся к случайной величине ξ, если для любой непрерывной ограниченной функции $g : B \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}g\left(\xi_n\right) = \mathbf{M}g(\xi)$$

Пример. При слабой сходимости функции распределения могут не сходиться к предельной функции в точках ее разрыва. Пусть случайные величины ξ_n- двухточечные:

$$\mathbf{P}\left\{\xi_n = -\frac{1}{n}\right\} = p_n, \quad \mathbf{P}\left\{\xi_n = \frac{1}{n}\right\} = 1 - p_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

а $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1$. Тогда при любых значениях p_n последовательность функций распределения

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left\{\xi_n \leqslant x\right\} = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{n} \\ p_n, & -\frac{1}{n} \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 1, & x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится к функции распределения $F(x) = 0$ при $x < 0, F(x) = 1$ при $x \geqslant 1$ при каждом $x \neq 0$, но последовательность $F_n(0) = p_n$ может (в зависимости от выбора значений p_n) сходиться к любому числу из отрезка $[0, 1]$, а может не иметь предела.

7.

Теорема непрерывности. а) Если последователъность F_n *распредеденеий* саучайнъх величин γ_n слабо сходится при $n \to \infty$ к распределенил F случайной вели- $f_n(t) = \mathbf{M}e^{it\gamma_n}$ сходится κ характеристической функиии $f(t)$ распределения F при каждом t, и эта сходимость равномерна на любом конечном интервале значений t. б) Обратно, если последователъность характеристических функиий $f_n(t)$ при каждом t сходится κ функции $f(t)$, непрерывной в нуле, то последователъность соответствулощих распределений F_n слабо сходится к распределенило F и $f(t)$ есть характеристическая функция распределения F.

Доказательство теоремы непрерывности, как и доказательство теоремы единственности, можно найти в учебниках Б.А.Севастьянова и А.А.Боровкова.

Приведем пример, показывающий, что при нарушении условия непрерывности в 0 в п.б) слабой сходимости может не быть. Пусть ξ_n имеет равномерное распределение на отрезке $[-n, n]$: $\mathbf{P}\left\{\xi_n \leqslant x\right\} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2n}, |x| \leqslant n, n = 1, 2, \ldots$; тогда (**cm**. приведенный в начале параграфа пример б))

$$f_n(t) = \mathbf{Me}^{it\xi_n} = \frac{\sin(nt)}{nt}$$

и $f_n(0) = 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, но $f_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $t \neq 0$. Пределом функций распределения $F_n(t) = \mathbf{P}\left\{\xi_n \leqslant x\right\} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2n}$ при $n \to \infty$ является функция,

тождественно равная $\frac{1}{2}$, не являющаяся функцией распределения собственной случайной величины (которая с вероятностью 1 принимает конечные значения).

Следствие.

Непрерывная функция, являюиаяся поточечным пределом последовательности характеристических функций, сама является характеристической.

Теорема о непрерывности позволяет сводить доказательство слабой сходимости случайных величин или их функций распределения к доказательству поточечной сходимости характеристических функций. В ряде случаев такое доказательство оказывается проще непосредственного.

примеры Приведем теперь характеристические функции некоторых часто встречающихся в приложениях распределений.

Врожденное распределение $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$. Непосредственно из определения характеристической функции получа- ем ее вид

$$h_\xi(t) = \mathbf{M}e^{it\xi} = e^{iat}$$

Равномерное на отрезке распределение с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \nVdash_{[a,b]}(x)$$

Ее характеристическая функция также получается непосредственно из определения. В случае $t \neq 0$ имеем

$$h_\xi(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx = \left. \frac{e^{itx}}{it(b-a)} \right|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

При $t=0$ имеем $h_\xi(0)=1$

Экспоненциальное распределение зависит от параметра $\lambda>0$ и определяется плотностью

$$f_\xi(x)\lambda e^{-\lambda x}1_{[0,\infty)}(x)$$

Здесь снова воспользуемся определением характеристической функции

$$h_\xi(t)=\lambda\int_0^\infty e^{itx}e^{-\lambda x}dx=\left.\frac{\lambda e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\right|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-it}$$

Нормальное распределение, определяемое плотностью

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

с двумя параметрами $a\in\mathbb{R}$ и $\sigma>0$, имеет важное значение как в теории, так и в приложениях. Для вычисления характеристической функции нормального распределения вначале рассмотрим случай, когда $a=0$ и $\sigma=1$. В этом случае говорят, что случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. При этом

$$\begin{aligned}h_\xi(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-x^2/2}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\cdot e^{-x^2/2}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\cdot e^{-x^2/2}dx\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\cdot e^{-x^2/2}dx\end{aligned}$$

поскольку интеграл в мнимой части берется по симметричному промежутку от нечетной функции. Замечая, что выполнены условия дифференцирования несобственного интеграла, зависяшего от параметра, по- лучаем

$$\begin{aligned}h'_\xi(t)&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\sin tx\cdot e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\cdot de^{-x^2/2}\\&=-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\cdot e^{-x^2/2}dx=-th_\xi(t)\end{aligned}$$

Таким образом, характеристическая функция стандартного нормального распределения является решением дифференциального уравнения

$$h'_\xi(t)=-th_\xi(t)$$

Это вместе с условием $h_\xi(0)=1$ приводит к ее виду

$$h_\xi(t)=e^{-t^2/2}$$

Пусть теперь $\sigma>0$ и $a\in\mathbb{R}$. Случайная величина $\eta=\sigma\xi+a$ будет иметь, в силу свойства 3°, характеристическую функцию

$$h_\eta(t)=e^{iat}e^{-\sigma^2t^2/2}$$

С другой стороны,

$$F_\eta(x)=\mathbf{P}(\sigma\xi+a\leqslant x)=\mathbf{P}\left(\xi\leqslant\frac{x-a}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma}e^{-u^2/2}du$$

Т. е.

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

и η имеет нормальное распределение с параметрами a, σ^2. Зная вид характеристической функции, легко вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины с использованием свойства 5°. В частности, если ξ имеет стандартное нормальное распределение, то из равенств

$$h'_\xi(t) = -t h_\xi(t), \quad h''_\xi(t) = -h_\xi(t) - t h'_\xi(t)$$

следует, что $h'_\xi(0) = 0, h''_\xi(0) = -1$. Отсюда получаем

$$\mathbf{M}\xi = 0, \quad \mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 = 1$$

Для произвольного нормального распределения, когда $\eta = \sigma\xi + a$, получаем

$$\mathbf{M}\eta = a, \quad \mathbf{D}\eta = \sigma^2$$

Таким образом, параметры нормального распределения имеют вероятностный смысл.ы

Целочисленная случайная величина с производящей функцией $g_\xi(x)$ имеет характеристическую функцию $h_\xi(t) = g_\xi\left(e^{it}\right)$. Это следует непосредственно из определений характеристической и производящей функций.

Важным моментом в применении характеристических функций является то, что они вполне определяют распределение случайной величины. Приведем два результата, известные как формулы обращения. Напомним вначале, что распределение случайной величины ξ представляет собой вероятностную меру $\mathbf{P}_\xi$ определенную на σ -алгебре борелевских множеств, т. е. на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Эта мера связана с функцией распределения F_ξ равенствами

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}_\xi((-\infty, x]), \quad \mathbf{P}_\xi((a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} h_\xi(t)dt &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{P}_\xi([a,b)) + \mathbf{P}_\xi((a,b])\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F_\xi(b-0) - F_\xi(a-0) + F_\xi(b) - F_\xi(a)\right]\end{aligned}$$

Теорема Пусть характеристическая функция h_ξ абсолютно интегрируема, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_\xi(t)|\, dt < \infty$$

Тогда ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, а ее плотность определяется по формуле

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} h_\xi(t)dt$$

Из формулы обращения следует, что между множеством функций распределения F и множеством характеристических функций h имеет место взаимно-однозначное соответствие. Это соответствие является даже непрерывным относительно соответствующих сходимостей.

(!!) Определение слабой сходимости Будем говорить, что последовательность функций распределения $F_n, n = 1, 2, \ldots,$ слабо сходится к функции распределения F и писать $F_n \to F$, если $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ в каждой точке непрерывности функции F.

Теорема 9.4. Пусть $F_1, F_2, \ldots -$ функиии распределения, а $h_1, h_2, \ldots - \mathbf{co}-$ ответствуточие им характеристические функции. Тогда иметт место сле- дутощие утверждения:

(i) Eсли $F_n \rightarrow F$ и h - характеристическая функция, соответствулощцая функиии распределения F, то $h_n(t) \rightarrow h(t)$ npu $n \rightarrow \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (ii) Ecau $h_n(t) \rightarrow h(t)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и функция h непрерывна в точке $t=0$, то h является характеристической функцией некоторой функции распределения F и $F_n \rightarrow F$.

Важную роль в приложениях играют результаты, утверждающие нормальность распределения сумм независимых случайных величин. Обычно их объединяют в одну группу с названием централъной предельной теоремы. Мы рассмотрим один из вариантов центральной предельной теоремы.

Теорема 9.5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots -$ последователъность независимых одинаково распределенных случайных величин c конечнъии $\mathbf{M} \xi=a$ и $\mathbf{D} \xi=\sigma^2$. Тогда для $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ въиолняется следутощее предельное соотношение

$$
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n-n a}{\sigma \sqrt{n}} \leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2 / 2} d u
$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ ДОКАЗАТЕльство. Обозначим $\zeta_n=\left(S_n-n a\right) / \sigma \sqrt{n}, n=1,2, \ldots$ Тогда утверждение теоремы эквивалентно тому, что $F_{\zeta_n} \rightarrow \Phi$, где $\Phi-$ функция Лапласа, т. е. функция распределения случайной величины η, имеющей стандартное нормальное распределение. В силу теоремы сходимости это эквивалентно условию $h_{\zeta_n}(t) \rightarrow h_\eta(t)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случайные величины $\hat{\xi}_n=\left(\xi_n-a\right) / \sigma, n=1,2, \ldots$ Очевидно, что $\mathbf{M} \hat{\xi}_n=0$ и $\mathbf{D} \hat{\xi}_n=\mathbf{M} \hat{\xi}_n^2=1$. При этом

$$
\zeta_n=\frac{\hat{\xi}_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{\hat{\xi}_n}{\sqrt{n}}
$$

Пусть

$$
h(t)=h_{\hat{\xi}_n}(t)=\mathbf{M} e^{i t \hat{\xi}_n}
$$

$$
\text{Поскольку } h(0)=1, h^{\prime}(0)=i \mathbf{M} \hat{\xi}_n=0, h^{\prime \prime}(0)=-\mathbf{M} \hat{\xi}_n^2=-1, \mathbf{То}
$$

$$
h(t)=1-\frac{1}{2} t^2+o\left(t^2\right)
$$

Но тогда

$$
h_{\zeta_n}(t)=\left(h_{\hat{\xi}_n / \sqrt{n}}(t)\right)^n=\left(h\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=\left(1-\frac{1}{2} \frac{t^2}{n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n
$$

При фиксированном $t \in \mathbb{R}$ имеем $t^2 / n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$
\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\zeta_n}(t)=\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(1-\frac{t^2}{2 n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)}=e^{-t^2 / 2}
$$

Замечая, что $h_\eta(t)=e^{-t^2 / 2}$, приходим к утверждению теоремы. хов в схеме Бернулли из n независимых испытаний с вероятностьт р, $0<p<1$, успеха в отделъном испытании. Тогда для $-\infty<a<b<\infty$ выполняется предельное соотношение

$$
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(a \leqslant \frac{S_n-n p}{\sqrt{n p q}} \leqslant b\right)=\Phi(b)-\Phi(a)
$$

где $q=1-p$

Доказательство. Заметим, что S_n можно представить как сумму независимых случайных величин ξ_k, которые являются индикаторами успеха в k -ом испытании: $\mathbf{P}\left(\xi_k=1\right)=$ $p, \mathbf{P}\left(\xi_k=0\right)=q, k=1,2, \ldots$ Тогда $\mathbf{M} \xi_k=p, \mathbf{D} \xi_k=p q$ Применение центральной предельной теоремы дает требуемый результат.

Характеристические функции распределений случайных векторов

(зубков, быстро разберу)

Характеристические функции распределений случайных векторов вводятся аналогично скалярному случаю с заменой произведения аргумента характеристической функции и случайной величины скалярным произведением векторного аргумента характеристической функции и случайного вектора.

Характеристическая функция распределения случайного вектора Определение.

Характеристической функцией распределения случайного вектора $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, принимающего значения в $\mathbb{R}^d$, называется

$$f(t) = \mathbf{M}e^{i(\bar{t}, \bar{\gamma})}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}^d$$

О случаях применения (???) (?? потом разберу!!)

Свойства Свойства характеристических функций и их доказательство аналогичны одномерным случайным величинам:

1) $|f(\bar{t})| \leqslant 1$ при всех $\bar{t} \in R^d, f(\bar{0}) = 1$.

Если $d = 1$ и $f(t_0) = \mathbf{M}e^{it_0\gamma} = e^{i\lambda}$ при некоторых $t_0 \neq 0, \lambda \in R$, то в силу выпуклости окружности $\left\{e^{i\beta}, \beta \in [0, 2\pi)\right\}$

$$\mathbf{P}\left\{t_0\gamma \in \{\lambda + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\right\} = 1$$

т. е. распределение γсосредоточено на арифметической прогрессии $\left\{t_0^{-1}\lambda + \ 2kt_0^{-1}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Аналогично, если $d > 1$ и $f\left(\overline{t_0}\right) = \mathbf{M}e^{i\left(\overline{t_0, \bar{\gamma}}\right)} = e^{i\lambda}$ при некотором $\overline{t_0} \neq \bar{0}$, то

$$\mathbf{P}\left\{\left(\overline{t_0}, \bar{\gamma}\right) \in \{\lambda + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}\right\} = 1$$

т. е. распределение случайного вектора $\bar{\gamma}$ сосредоточено на семействе параллельных гиперплоскостей вида $\left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : \left(\overline{t_0}, \bar{x}\right) = \lambda + 2\pi k\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

2) Если $\bar{\gamma}$ - случайный вектор (столбец) и $\bar{\kappa} = B\bar{\gamma} + \bar{a}$, где $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^d, \bar{a} \in R^d$ то

$$f_{\bar{K}}(\bar{t}) = \mathbf{M}e^{i(\bar{t}, \bar{\kappa})} = e^{i(\bar{t}, \bar{a})} f_{\bar{\gamma}}\left(B^\top \bar{t}\right),$$

где $^\top$ - знак транспонирования.

Действительно, так как

$$\left(\bar{t}, B\bar{\gamma}^\top\right) = \sum_{i=1}^d t_i \sum_{j=1}^d b_{ij}\gamma_j = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d b_{ij} t_i\right)\gamma_j = \left(B^\top \bar{t}, \bar{\gamma}\right)$$

то

$$f_{\bar{\kappa}}(\bar{t}) = \mathbf{M}e^{i(\bar{t}, \bar{\kappa})} = \mathbf{M}e^{i(\bar{t}, B\bar{\gamma} + \bar{a})} = e^{i(\bar{t}, \bar{a})}\mathbf{M}e^{i(\bar{t}, B\bar{\gamma})} = e^{i\bar{t}, \bar{a})}\mathbf{M}e^{i\left(B^\top \bar{t}, \bar{\gamma}\right)} = e^{i(\bar{t}, \bar{a})} f_{\bar{\gamma}}\left(B^\top \bar{t}\right)$$

Пример Случайная величина ζ имеет стандартное нормальное распределение с параметрами (0,1), если ее плотность распределения равна $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty$; функция стандартного нормального распределения есть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

а его характеристическая функция

$$\psi(t) = \mathbf{M}e^{it\zeta} = e^{-t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty$$

Среди вероятностных распределений в $\mathbb{R}^d$ аналогом стандартного нормального распределения является распределение случайного вектора $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$, компоненты которого - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Такой случайный вектор имеет нулевой вектор математических ожиданий и единичную матрицу ковариаций:

$$\mathbf{M}\bar{\zeta} = \bar{0}, \quad \mathrm{Cov}(\bar{\zeta}) = \|\mathrm{cov}\,(\zeta_i, \zeta_j)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Плотность и характеристическая функция распределения вектора $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ имеют вид

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_d\right) = \prod_{k=1}^{d} \varphi\left(x_k\right) = \tfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{x_1^2 + \ldots + x_d^2}{2}}$$
$$\psi\left(t_1, \ldots, t_d\right) = \mathbf{M}\mathbf{e}^{i(\bar{t}, \bar{\zeta})} = \mathbf{M}e^{i(t_1\zeta_1 + \ldots + t_d\zeta_d)} = \mathbf{M}\prod_{k=1}^{d} e^{it_k\zeta_k} = e^{-\frac{t_1^2 + \ldots + t_d^2}{2}}$$

Плотность $\varphi(\bar{x})$ распределения $\bar{\zeta}$ зависит только от расстояния точки $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ от начала координат, т.е. инвариантна относительно ортогональных преобразований $\mathbb{R}^d$, оставляющих точку $\bar{0}$ на месте. Такие распределения называются сферически симметричными. Если случайный вектор имеет сферически симметричное распределение, то ортогональное преобразование с неподвижной точкой $\bar{0}$ переводит этот случайный вектор в другой случайный вектор, имеющий то же самое распределение.

Согласно определению случайный вектор $\bar{\zeta}$ с $\mathbf{M}\bar{\zeta} = \bar{0}, \mathrm{Cov}(\bar{\zeta}) = I$ можно представить в виде $\bar{\zeta} = \zeta_1\overline{e_1} + \ldots + \zeta_d\overline{e_d}$, где $\zeta_1, \ldots, \zeta_d-$ независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$, а $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_d}-$ единичные векторы координатных осей. Из сферической симметричности распределения $\bar{\zeta}$ следует, что для любого другого ортонормированного базиса $\overline{e_1'}, \ldots, \overline{e_d'}$ в соответствующем разложении $\bar{\zeta} = \zeta_1'\overline{e_1'} + \ldots + \zeta_d'\overline{e_d'}$ случайные величины $\zeta_1', \ldots, \zeta_d'$ тоже независимы и имеют то же самое нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

Распределение любого случайного вектора $c\bar{\zeta}$ с математическим ожиданием $\bar{0}$ и матрицей ковариаций $c^2 I$ тоже является нормальным и сферически симметричным. Такое распределение имеет плотность

$$\varphi_{\bar{0}, c^2 I}\left(x_1, \ldots, x_d\right) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} c^d} e^{-\frac{x_1^2 + \ldots + x_d^2}{2c^2}}$$

и характеристическую функцию

$$\psi_{\bar{0}, c^2 I}\left(t_1, \ldots, t_d\right) = e^{-\frac{\left(t_1^2 + \ldots + t_d^2\right)c^2}{2}}$$

Определение.

Распределение случайного d -мерного вектора $\bar{\kappa}$ называется многомерным нормальным, если его можно представить в виде линейного преобразования случайного вектора $\bar{\zeta}_{\bar{0}, I}$ с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей ковариаций: $\bar{\kappa} = B\bar{\zeta}_{\bar{0}, I} + \bar{a}$, где $\bar{a} \in \mathbb{R}^d-$ неслучайный вектор и $B - (d \times d)-$ матрица.

Найдем $\mathbf{M}\bar{\kappa}$ и ковариационную матрицу $\operatorname{Cov}(\bar{\kappa})$. Переход от вектора $\bar{\zeta}_{\bar{0},I}$ к вектору $\bar{\kappa}$ осуществляется преобразованием $g(\bar{x}) = B\bar{x} + \bar{a}$. Значит,

$$\mathbf{M}\bar{\kappa} = \mathbf{M}g\left(\bar{\zeta}_{\bar{0},I}\right) = \mathbf{M}\left(B\bar{\zeta}_{\bar{0},I} + \bar{a}\right) = \bar{a}$$

В силу утверждения 2 из \$18

$$\operatorname{Cov}(\bar{\kappa}) = B\operatorname{Cov}\left(\bar{\zeta}_{\bar{0},I}\right)B^{\top} = BB^{\top}$$

В частности, отсюда следует, что $\det C(\bar{\kappa}) = (\det B)^2 \geqslant 0$.

Согласно утверждению 1 из \$24 при невырожденной $d \times d$ -матрице B плотность распределения вектора $\bar{\kappa}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\bar{\kappa}}(\bar{x}) = \frac{\varphi_{\bar{\zeta}_{\pi,I}}\left(B^{-1}(\bar{x}-\bar{a})\right)}{|\det B|} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\det B|}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^{-1}(\bar{x}-\bar{a}), B^{-1}(\bar{x}-\bar{a})\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det C(\bar{\zeta})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{a})C^{-1}(\bar{\kappa})(\bar{x}-\bar{a})^{\top}\right\}
\end{aligned}$$

По теореме из линейной алгебры для любой неотрицательно определенной симметричной матрицы C существует такая матрица B, что $C = BB^{\top}$. Поэтому для любой симметричной неотрицательно определенной $d \times d$ -матрицы C и любого вектора $\bar{a} \in \mathbb{R}^d$ существует d -мерное нормальное распределение с математическим ожиданием $\bar{a}$ и ковариационной матрицей C.

Так как плотность $\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$ выражается через $\bar{a} = \mathbf{M}\zeta$ и $\operatorname{Cov}(\bar{\zeta})$, то многомерное нормальное распределение однозначно определяется вектором математических ожи- даний и матрицей ковариаций. В отличие от плотности сферически симметричного нормального распределения, у которой поверхностями уровня являлись сферы с центром в начале координат, для плотности многомерного нормального распределения (48) поверхностями уровня являются эллипсоиды.

Пользуясь свойством 2) характеристических функций, найдем характеристическую функцию многомерного нормального распределения с плотностью (48): так как $\bar{\kappa} = B\bar{\zeta}_{\bar{0},I}^{\top} + \bar{a}$, то

$$\psi_{\bar{\kappa}}(\bar{t}) = \mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\kappa})} = e^{i(\bar{t},\bar{a})}\psi_{\bar{\varepsilon}_{=}}\left(B^{\top}\bar{t}\right) = e^{i(\bar{t},\bar{a})}e^{-\left|B^{\top}\bar{t}\right|^2/2} =$$

$$= e^{i(\bar{t},\bar{a})}e^{-\left(B^{\top}\bar{t},B^{\top}\bar{t}\right)/2} = e^{i(\bar{t},\bar{a})}e^{-\left(BB^{\top}\bar{t},\bar{t}\right)/2} = e^{i(\bar{t},\bar{a})}e^{-t\operatorname{Cov}(\bar{k})\bar{t}^{\top}/2}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}^d$$

Равенство (49) можно использовать как

определение многомерного нормального распределения с математическим ожиданием $\bar{a}$ и ковариационной матрицей $C(\bar{\kappa})$. Нужно иметь в виду, что плотность (48) существует только для многомерных нормальных распределений с невырожденными матрицами ковариаций.

Далее для случайного вектора с математическим ожиданием a и матрицей ковариаций C мы будем использовать обозначение $\zeta_{a,C}$. 3) При любом $\bar{t} \in \mathbb{R}^d$ значения $f(-\bar{t}) = \mathbf{M}e^{i(-\bar{t},\gamma)} = \mathbf{M}e^{-i(\bar{t},\gamma)}$ и $f(\bar{t}) = \mathbf{M}e^{i(\bar{t},\gamma)}$ комплексно сопряжены. 4) Если случайные векторы $\bar{\gamma}^{(1)}, \ldots, \bar{\gamma}^{(n)}$ независимы, то

$$f_{\bar{\gamma}^{(1)}+\ldots+\bar{\gamma}^{(n)}}(\bar{t}) = \mathbf{M}e^{i\left(\bar{t},\bar{\gamma}^{(1)}+\ldots+\bar{\gamma}^{(n)}\right)} = \mathbf{M}\prod_{k=1}^{n}e^{i\left(\bar{t},\bar{\gamma}^{(k)}\right)} = \prod_{k=1}^{n}f_{\bar{\gamma}^{(k)}}(\bar{t})$$

Замечание. Из свойств 3) и 4) следует, что если $f(t) = \mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\gamma})}$, то $|f(t)|^2-$ характеристическая функция случайного вектора $\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2$, где $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ независимы и имеют такое же распределение, как $\bar{\gamma}$. Распределение разности $\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2$ симметрично:

$-(\bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_2)=\bar{\gamma}_2-\bar{\gamma}_1$, и характеристическая функция любого симметричного распре- деления принимает только действительные неотрицательные значения. 5) Теорема. Различным распределениям вероятностей соответствуют различные характеристические функкии. 6)

Теорема непрерывности. а) Если последовательность F_n распределений случайных векторов $\bar{\gamma}_n$ со значениями в $\mathbb{R}^d$ слабо сходится при $n\to\infty$ к распреде- $f(\bar{t})$ распределения F при каждом $\bar{t}$. б) Обратно, если последователъность характеристических функкиий $f_n(\bar{t})$ при каждом $\bar{t}$ сходится к функиии $f(\bar{t})$, непрерывной в нуле, то последователъность соответствуюиц распределений F_n слабо сходится к распределению F и $f(\bar{t})$ есть характеристическая функция распределения F. Как и в скалярном случае, теоремы единственности и непрерывности в этом курсе приводятся без доказательств.

Следствие. Непрерывная функиия, являющаяся поточечным пределом последователъности характеристических функций, сама является характеристической. 7) Лемма 1. Если случайнъий вектор $\bar{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$ имеет конечные смешанные моменты

$$m_{k_1,\ldots,k_d}=\mathbf{M}\gamma_1^{k_1}\ldots\gamma_d^{k_d},\quad k_1,\ldots,k_d\in\{0,1,\ldots\},\quad \sum_{j=1}^{d}k_j\leq r$$

и характеристическую ∮ункиито $f(\bar{t})=\mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\gamma})},\bar{t}=(t_1,\ldots,t_d)\in\mathbb{R}^d$, то существу- ют частные производные характеристической функции вплоть до r -го порядка и

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_d}}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_d^{k_d}}f(t_1,\ldots,t_d)=i^{k_1+\ldots+k_d}\mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\gamma})}\gamma_1^{k_1}\ldots\gamma_d^{k_d},\quad \sum_{j=1}^{d}k_j\leq r$$

$$m_{k_1,\ldots,k_d}=i^{-k}\left.\frac{\partial^k f(\bar{t})}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_d^{k_d}}\right|_{\bar{t}=\bar{0}},\quad k=\sum_{j=1}^{d}k_j\leqslant r$$

и

$$f(\bar{t})=1+\sum_{k=1}^{r}i^k\sum_{k_1+\ldots+k_d=r}m_{k_1,\ldots,k_d}\frac{t_1^{k_1}\ldots t_d^{k_d}}{k_1!\ldots k_d!}+R_k(\bar{t})$$

где $R_k(\bar{t})=o\left(|\bar{t}|^k\right)$ при $|\bar{t}|=|t_1|+\ldots+|t_d|\to 0$ Доказательство леммы. Доказательство проводится индукцией. Формула для частной производной первого порядка, например, по t_1 следует из равенства

$$\frac{f(t_1+h,t_2,\ldots,t_d)-f(t_1,t_2,\ldots,t_d)}{h}=\mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\gamma})}\frac{e^{ih\gamma_1}-1}{h}$$

Согласно лемме 2 из $29 дробь под знаком математического ожидания не превосходит $|h|$ по абсолютной величине и стремится к $i\gamma_1$ при $h\to 0$, поэтому под знаком математического ожидания можно перейти к пределу:

$$\frac{\partial}{\partial t_1}f(t_1,\ldots,t_d)=\mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\gamma})}\gamma_1$$

Получив такие формулы для всех частных производных первого порядка, аналогично можно доказывать формулы для производных второго порядка, и по индукции для частных производных всех таких порядков, при которых конечны соответствующие смешанные моменты. Лемма доказана.

Формулы для моментов получаются из формул леммы 1 подстановкой $\bar{t}=\overline{0}$. После того, как доказаны формулы для частных производных, формула (51) становится формулой Тейлора для функции d переменных.

Следствие. Пусть случайный вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ имеет конечные математическое ожидание $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_d) = (\mathbf{M}\gamma_1, \ldots, \mathbf{M}\gamma_d)$ и матрицу ковариаций $C(\bar{\gamma})$ *Тогда при*$|\bar{t}| = |t_1| + \ldots + |t_d| \to 0$

$$f(\bar{t}) = e^{i(\bar{t},\bar{a})}\left(1 - \frac{1}{2}\bar{t}C(\bar{\gamma})\bar{t}^{\top} + o\left(|\bar{t}|^2\right)\right)$$

Доказательство. Представим вектор $\bar{\gamma}$ в виде $\bar{\gamma} = \bar{a} + (\bar{\gamma} - \bar{a})$. По свойству 2)

$$\mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\gamma})} = e^{i(\bar{t},\bar{a})}\mathbf{M}e^{i(\bar{t},\bar{\gamma}-\bar{a})}$$

Далее, $\mathbf{M}(\bar{\gamma} - \bar{a}) = (m_1, \ldots, m_d) = 0$ и

$$C(\bar{\gamma}) = \|c_{ij}\| = \|\mathrm{Cov}\,(\gamma_i, \gamma_j)\| = \|\mathbf{M}\,(\gamma_i - a_i)\,(\gamma_j - a_j)\|$$

т.е. ковариации компонент вектора $\bar{\gamma}$ совпадают со смешанными моментами второго порядка вектора $\bar{\gamma} - \bar{a}$; поэтому по свойству 6)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\mathrm{e}^{i(\bar{t},\bar{\gamma}-\bar{a})} &= 1 - \sum_{k_1+\ldots+k_d=2} m_{k_1,\ldots,k_d}\frac{t_1^{k_1}\cdots t_d^{k_d}}{k_1!\ldots k_d!} + o\left(|\bar{t}|^2\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} c_{ij}t_it_j + o\left(|\bar{t}|^2\right)\end{aligned}$$

Тем самым следствие доказано. Теперь докажем центральную предельную теорему для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.

7.1.4 Закон больших чисел

простейший закон больших чисел

(зубков 19)
просто сперва сформулируем и докажем ее.

Закон больших чисел Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ попарно независимы или попарно некоррелированы и имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии: $\mathbf{M}\xi_t = a, \mathbf{D}\xi_t = \sigma^2 < \infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right) - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \quad n \to \infty$$

Замечание.

Для случайных величин ξ_t, множество значений которых конечно, условие $\mathbf{D}\xi_t < \infty$ выполняется автоматически.

Закон больших чисел в указанной форме является следствием более общего утверждения.

Теорема.

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ попарно независимы или попарно некоррелированы и $\sup_t \mathbf{D}\xi_t \leqslant \sigma^2 < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right) - \frac{1}{n}\left(\mathbf{M}\xi_1 + \ldots + \mathbf{M}\xi_n\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Доказательство.

Положим $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда

$$\mathbf{M}\zeta_n = \mathbf{M}\xi_1 + \ldots + \mathbf{M}\xi_n, \quad \mathbf{D}\zeta_n = \mathbf{D}\xi_1 + \ldots + \mathbf{D}\xi_n \leqslant n\sigma^2$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}\left(\tfrac{1}{n}\zeta_n\right) = \tfrac{1}{n}\left(\mathbf{M}\xi_1 + \ldots + \mathbf{M}\xi_n\right)$$
$$\mathbf{D}\left(\tfrac{1}{n}\zeta_n\right) \leqslant \tfrac{1}{n^2}\left(\mathbf{D}\xi_1 + \ldots + \mathbf{D}\xi_n\right) \leqslant \left(\tfrac{1}{n^2}\right) n\sigma^2 = \tfrac{\sigma^2}{n}$$

Применим к случайной величине ζ_n/n неравенство Чебышева:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\zeta_n - \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\zeta_n\right)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\mathbf{D}\left(\frac{1}{n}\zeta_n\right)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Правая часть этого неравенства стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\zeta_n - \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\zeta_n\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\zeta_n - \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\zeta_n\right)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \to 1$$

что завершает доказательство.

Следствие (

Теорема Бернулли).

(теперь мы можем доказать то, что выглядит максимально очевидно. а когда оно могло бы нарушаться?)

Пусть проводятся испытания по схеме Бернулли с вероятность успеха $p \in (0,1)$ и μ_n -число успехов в первых п испытаниях. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\mu_n - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \quad n \to \infty$$

Доказательство.

Свяжем с k -м испытанием Бернулли индикатор $\mathbb{I}_k$, который равен 1 , если испытание оканчивается успехом, и равен 0 в противном случае.

Тогда $\mu_n = \mathbb{I}_1 + \ldots + \mathbb{I}_n$, случайные величины $\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \ldots$ независимы в совокупности

$$\mathbf{P}\left\{\mathbb{I}_k = 1\right\} = p_k, \quad \mathbf{P}\left\{\mathbb{I}_k = 0\right\} = 1 - p_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и поэтому $\mathbf{MI}_k = p_k, \mathbf{D}\mathbb{I}_k = \mathbf{M}\mathbb{I}_k^2 - \left(\mathbf{MI}_k\right)^2 = p - p^2 = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$. Теперь для доказательства следствия остается применить закон больших чисел.

усиленный закон больших чисел

(зубков)

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathbf{M}\xi_n \equiv 0, \mathbf{D}\xi_n = \sigma_n^2, S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n u \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$. тогда

$$\frac{1}{n} S_n \stackrel{\text{п. н.}}{\rightarrow} 0$$

Доказательство.

Согласно утверждению 1 для доказательства того, что последовательность $\frac{1}{n} S_n$ сходится с вероятностью 1, достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{\omega : \sup_{k \geqslant n}\left|\frac{1}{k} S_k\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

Введем события

$$A_m = \left\{\omega : \max_{2^{m-1} \leqslant k < 2^m} \left|\frac{1}{k} S_k\right| > \varepsilon\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Тогда (54) равносильно тому, что

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{m \geqslant n} A_m\right\} \to 0, \quad n \to \infty$$

Вероятность объединения событий не больше суммы вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{m \geqslant n} A_m\right\} \leqslant \sum_{m \geqslant n} \mathbf{P}\left\{A_m\right\}$$

поэтому (55) будет доказано, если показать, что ряд $\sum_{m \geqslant 1} \mathbf{P}\left\{A_m\right\}$ сходится.

Оценим члены этого ряда с помощью неравенства Колмогорова:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{A_m\right\} = \mathbf{P}\left\{\max\nolimits_{2^{m-1} \leqslant k < 2^m} \left|\tfrac{1}{k} S_k\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\max\nolimits_{2^{m-1} \leqslant k < 2^m} \left|S_k\right| > 2^{m-1}\varepsilon\right\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\left\{\max\nolimits_{1 \leqslant k < 2^m} \left|S_k\right| > 2^{m-1}\varepsilon\right\} \leqslant \tfrac{\mathbf{D}S_{2^m}}{(\varepsilon 2^{m-1})^2} = \tfrac{1}{\varepsilon^2 2^{2(m-1)}} \sum\nolimits_{k=1}^{2^m} \sigma_k^2 \end{aligned}$$

Из полученных оценок и условия теоремы следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{m \geqslant 1} \mathbf{P}\left\{A_m\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m \geqslant 1} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{\sigma_k^2}{2^{2(m-1)}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k \geqslant 1} \sigma_k^2 \sum_{m : 2^m \geqslant k} \frac{1}{2^{2(m-1)}} < \\ < \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k \geqslant 1} \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \frac{16}{3\varepsilon^2} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие .

Для числа ν_n успехов в схеме Бернулли с вероятностъю успеха p справедливы как слабый закон больших чисел

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{P} p, \quad n \to \infty$$

так и усиленный закон больших чисел

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{\text{п. н.}} p, \quad n \to \infty$$

Проведенные рассуждения можно дополнить и доказать, что усиленный закон больших чисел для одинаково распределенных случайных величин верен при тех же условиях, при которых верен слабый закон больших чисел.

Усиленный закон больших чисел Колмогорова.

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены.

Для справедливости усиленного закона больших чисел $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\text{п.н.}}$a необходимо и достаточно, чтобы существовало конечное математическое ожидание $\mathbf{M}\xi_k = a$.

7.1.5 виды сходимости последовательностей случайных величин

(горяйнов. потом укажу применения, пока хз!!! мб в дополнения потом перекину, хз)

В этом параграфе рассматриваются основные виды сходимости последовательностей случайных величин и устанавливается взаимосвязь между ними.

Определение сходимости по вероятности Будем говорить, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, и писать $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, если для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Именно этот вид сходимости имеет место в законе больших чисел Чебышёва.

Заметим, что из сходимости по вероятности последовательности случайных величин мы ничего не можем сказать о том, как ведет себя последовательность в отдельных экспериментах.

В этом отношении более содержательную информацию дает следующий вид сходимости.

определение сходимости почти наверное (ну и название...)

Будем говорить, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ с вероятностью 1 или почти наверное, и писать $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to}$, если

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\}\right) = 1$$

Следующий вид сходимости требует от случайных величин существования средних порядка p.

определение 10.3.

Будем говорить, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ в среднем порядка $p, p > 0$ и писать $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, если $\mathbf{M}\,|\xi_n - \xi|^p \to 0$ при $n \to \infty$. При $p = 2$ эта сходимость называется также в среднем квадратичном.

определение 10.4.

Будем говорить, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ по распределенито, и писать $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если $F_{\xi_n} \to F_\xi$

Теорема Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots -$последовательность случайных величин. Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) Если $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$, *то* $\xi_n \xrightarrow{\text{P}} \xi$

(ii) Если $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi, \text{то}\, \xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$

(iii) Если $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi, \text{то}\, \xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Доказательство.

(i) Для $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение последовательность событий

$$A_n^\varepsilon = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}$$

$n = 1, 2, \ldots$ Заметим, что условие $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ должно выполняться предельное соотношение $\mathbf{P}\left(A_n^\varepsilon\right) \to 0$ при $n \to \infty$ Также для каждого $\varepsilon > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$ рассмотрим

$$B_n^\varepsilon = \left\{\omega : \sup_{k \geqslant n} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\right\}$$

Очевидно, что $A_n^\varepsilon \subset B_n^\varepsilon$ и $\{B_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ является монотонно убывающей последовательностью.

Пусть $B^\varepsilon = \cap_{n=1}^\infty B_n^\varepsilon -$ предел этой последовательности.

В силу свойства непрерывности вероятностной меры $\mathbf{P}(B_n^\varepsilon) \to \mathbf{P}(B^\varepsilon)$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, если $\omega \in B^\varepsilon$, то $\xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)$. Это означает, что

$$B^\varepsilon \subset \{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\}$$

Однако, из условия $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$ следует

$$\mathbf{P}(\{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\}) = 0$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n^\varepsilon) = \mathbf{P}(B^\varepsilon) = 0$$

Из неравенств

$$0 \leqslant \mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(B_n^\varepsilon)$$

следует, что и $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$, т.

е.

$\xi_n \overset{\mathbf{P}}{\to} \xi$.

(ii) Допустим теперь,что $\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi$, т.

е.

$\mathbf{M}|\xi_n - \xi|^p \to 0$ при $n \to \infty$. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Используя неравенство (8.1) Маркова, получаем

$$\mathbf{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(|\xi_n - \xi|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \frac{\mathbf{M}|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0$$

при $n \to \infty$, т.

е.

$\xi_n \overset{\mathbf{P}}{\to} \xi$. (iii) Пусть $\xi_n \overset{\mathbf{P}}{\to} \xi$, т.

е.

$\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\varepsilon > 0$. Обозначим $F_n = F_{\xi_n}$ и $F = F_\xi$.

Доказательство $F_n \to F$ будет следовать из того, что для всех $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$F(x-\varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x+\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}$$

Эти неравенства, в свою очередь, сразу же следуют из включений

$$\{\xi \leqslant x - \varepsilon\} \subset \{\xi_n \leqslant x\} \cup A_n^\varepsilon, \quad \{\xi_n \leqslant x\} \subset \{\xi \leqslant x + \varepsilon\} \cup A_n^\varepsilon$$

и того, что $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$. В точках непрерывности функции F предельный переход в неравенствах (10.1) при $\varepsilon \to 0$ дает

$$F(x) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x)$$

что означает $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ и

Теорема доказана.

Пример-контрпример 2 (?) Следующие два примера показывают, что из сходимости последовательности случайных величин почти наверное не следует сходимость в среднем, а из сходимости в среднем не следует сходимость почти наверное.

Пример 1. Пусть $\Omega = [0,1], \mathscr{A} = \mathscr{B}([0,1]), \mathbf{P}-$ мера Лебега.

Рассмотрим последовательность

$$\xi_n(\omega) = n^{1/p} \cdot 1_{[0,1/n]}(\omega)$$

$$n = 1, 2, \ldots \text{ Тогда } \xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi, \xi(\omega) \equiv 0, \text{ но } \xi_n \to \xi \text{ в } L_p, p > 0$$

Пример 2 .

Пусть $\Omega = \mathbb{T}-$ единичная окружность, $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{T}), \mathbf{P} = \mu/2\pi-$ нормированная мера Лебега.

Для $n = 1, 2, \ldots$ рассмотрим

$$E_n = \left\{\omega = e^{i\theta} : \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \theta < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\} \subset \mathbb{T}$$

Заметим, что $\mathbf{P}(E_n) = 1/(2\pi n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, для любого $p > 0$ последовательность $\xi_n = 1_{E_n}$ сходится в среднем порядка p и $\xi(\omega) \equiv 0$. С другой стороны, поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$, то каждое элементарное событие ω принадлежит бесконечному числу событий из последовательности $\{E_n\}$, т.

е.

$\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \Omega$. Это означает, что $\xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)$ ни при каком $\omega \in \Omega, \mathbf{x}, \mathbf{M}$. последовательность ξ_n не сходится почти наверное.

Закон больших чисел Чебышёва касался последовательности независимых случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями.

Метод характеристических функций позволяет снять условие конечности вторых моментов для одинаково распределенных случайных величин.

Теорема Хинчина (????)

Теорема

(Хинчина)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным $\xi = a$.

Тогда для $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ имеет место предельное соотношение

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} a \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Доказательство ДоКАЗАТЕльСтво.

Поскольку все $\xi_k, k = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены, то они имеют одну и ту же характеристическую функцию

$$h(t) = h_{\xi_k}(t) = \mathbf{M}e^{it\xi_k}$$

В силу того, что ξ_k имеет конечное математическое ожидание, характеристическая функция h дифференцируема и

$$h(t) = 1 + iat + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0$$

По условию $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы.

Поэтому

$$h_{S_n}(t) = (h(t))^n$$

и

$$h_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left(h\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

Используя асимптотическую формулу $\ln(1 + z) = z + o(|z|)$, при $z \to 0$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} h_{\frac{S_n}{n}}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln\left(1+\frac{iat}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)} = e^{iat}$$

Предельная функция e^{iat} непрерывна и по теореме сходимости она является характеристической функцией некоторой случайной величины η, причем $S_n/n \xrightarrow{d} \eta$. Заметим также, что $h_\eta(t) = e^{iat}$ является характеристической функцией вырожденного распределения, сосредоточенного в точке a, т.е.

$$F_\eta(x) = \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x)$$

Остается показать, что $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$. Для $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geqslant \varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a - \varepsilon\right) + \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a + \varepsilon\right) \\ &\leqslant F_n(a-\varepsilon) + \left(1 - F_n\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

где F_n- функция распределения случайной величины S_n/n. Поскольку точки $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon/2$ являются точками непрерывности функции F_η, то

$$F_n(a-\varepsilon) \to 0, \quad F_n(a+\varepsilon/2) \to 1$$

при $n \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

и $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{P}}$ a.

О применениях теоремы Хинчина (хз вообще)
и что с этого?

7.1.6 Некоторые задачи про математическую статистику

(потом буду разбирать, пока: раз встретилось, то просто сюда вставлю и всё.)

Равенство для порядковых статистик (???) (в матстатиску закину и забью, ибо не до этого)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x)$. Для каждого элементарного события $\omega \in \Omega$ вектор $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ преобразуем в упорядоченный $\left(X_{(1)}(\omega), \ldots, X_{(n)}(\omega)\right)$, где $X_{(1)}(\omega) \leq \ldots \leq X_{(n)}(\omega)$. Упорядоченный вектор $\left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ в математической статистике называют вариационным рядом, а случайные величины $X_{(k)}, k = 1, \ldots, n$ - порядковыми статистиками. Покажите, что плотность совместного распределения порядковых статистик определяется равенством.

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = n! f\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot f\left(x_n\right) \mathbb{1}_{\{x_1 \leq \ldots \leq x_n\}}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

Множество, на котором совпали X_i, X_j $i \neq j$ имеет меру ноль. Для остальных каждому корректному вариационному ряду соответствует $n!$ неупорядоченных векторов. Из независимости $X_1, \ldots X_n$

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Поэтому

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = n! f\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot f\left(x_n\right) \mathbb{1}_{\{x_1 \leq \ldots \leq x_n\}}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

(также тут укажу приложения)

7.2 Основы математической статистики

Разберем основы математической статистики, укажем примеры и приложения.
(пока что еще не дошел, но мб этим буду очень много заниматься.)
(структура по Жуковскому мфти, потом буду развивать нормально)

7.2.1 доверительные интервалы

8.2.

7.2.2 Асимптотические доверительные интервалы

7.2.3 Линейная регрессия

7.2.4 Проверка статистических гипотез

7.2.5 Равномерно наиболее мощные критерии

7.2.6 Проверка простых гипотез

7.2.7 Проверка сложных гипотез

7.2.8 Проверка линейных гипотез в гауссовской регрессионной модели

7.2.9 Критерии согласия

7.2.10 Критерий согласия Колмогорова

7.2.11 Критерий согласия хи-квадрат

(жуковский)

Пусть $X_1, \ldots, X_n-$ выборка из схемы Бернулли с $m \geq 2$ исходами, т.е. $a_1, \ldots, a_m-$ исходы и $\mathrm{P}\left(X_i = a_j\right) = p_j$ для $j = 1, \ldots, m$ Построим критерий для проверки гипотезы

$$H_0 : p_j = p_j^0, \quad j \in \{1, \ldots, m\}$$

определение

12.3. Статистикой хи-квадрат называется

$$\hat{\chi} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(\mu_j - np_j^0\right)^2}{np_j^0}$$

где

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n} I\left\{X_i = a_j\right\}$$

Теорема

В предположсении верности гипотезы H_0 имеет место сходимость по распределенито

$$\hat{\chi} \xrightarrow[n \to \infty]{d} \chi_{m-1}^2$$

А Критерий хи-квадрат Пирсона записывается сле- дующим образом: $\left\{\hat{\chi} > u_{1-\alpha}\right\}$, где $u_{1-\alpha} - (1-\alpha)$ -Квантиль распределения χ_{m-1}^2 Из теоремы 12.2 следует, что критерий хи-квадрат является состоятельным. Напоследок заметим, что критерий хи-квадрат принято применять, если $n \geq 50$ и $\mu_j \geq 5$ для всех $j \in \{1, \ldots, m\}$.

7.2.12 Другое о математической статистике (???)

(там много всего есть, так что тут укажу это, подробнее - в записи по мат статистике)

Коэффициенты корреляции

Коэффициент корреляции Пирсона

Коэффициент корреляции Спирмена

Коэффициент корреляции Кэндалла

Байесовские оценки

7.3 Типичные распределения

Приведем часто встречающиеся распределения.

(в порядке пользы отсортирую потом. укажу, зачем они нужны. графики добавлю потом! удалю разделы про распределения, которые не так нужны.)

7.3.1 Нормальное

Суть нормального распределения

Нормальное (или гауссовское) с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$$

Случайная величина ζ имеет стандартное нормальное распределение с параметрами (0,1), если ее плотность распределения равна $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty$; функция стандартного нормального распределения есть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

а его характеристическая функция

$$\psi(t) = \mathbf{M} e^{it\zeta} = e^{-t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty$$

Свойства (!!!)

(очень часто могут быть задачи про это. мб в разделе выше это напишу, посмотрим.)

Случаи применения

Вывод

7.3.2 Равномерное

Конструкция и свойства равномерного распределения

Равномерное на $[a, b]$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

Равномерное распределение на конечном множестве $\{1, \dots, N\}$ определяется равенствами

$$\mathbf{P}\{\xi = m\} = \frac{1}{N}, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

Функция распределения $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi \leqslant x\}$ такой случайной величины равна 0 при $x < a$, pasНа 1 при $x > b$ и равНа $\frac{x-a}{b-a}$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Плотность распределения этой случайной величины равна $\frac{1}{b-a}$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и равна 0 вне отрезка $[a, b]$.

Равномерное распределение не является устойчивым относительно суммирования.

Найдём функцию и плотность распределения суммы двух независимых случайных величин с одинаковым равномерным на отрезке [0, 1] распределением, но не по формуле свёртки, а используя геометрическую вероятность.

Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{U}_{0,1}-$ неза а ис им ые случайные величины. Пару (ξ_1, ξ_2) можно считать координатой точки, брошенной науддачу в единичный квадрат. Тогда $F_{\xi_1} + \xi_2(x) = \mathrm{P}\left(\xi_1 + \xi_2 < x\right)$ равна площади области внутри квадрата под прямой $x_2 = x - x_1$. Эта область - заштрихованные треугольник при $0 < x \leqslant 1$, и пятиугольник при $1 < x \leqslant 2$. Окончательно получаем:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^2/2, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2x - x^2/2 - 1, & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Плотность распределения суммы равна

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,2) \\ x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Случаи применения

7.3.3 Показательное

Конструкция

Показательное

$$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad \lambda > 0$$

Случаи применения

Вывод

7.3.4 Коши

Конструкция

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}$$

Вырожденное распределение — это распределение случайной величины, которая с вероятностью 1 принимает какое-то одно значение (т. е. как функция на пространстве элементарных событий Ω она равна константе на множестве меры 1)

Случаи применения

Вывод

7.3.5 Биноминальное (???)

Конструкция

Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ - индикаторы успехов в последовательности независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p :

$$\mathbf{P}\{\eta_k = 1\} = p, \quad \mathbf{P}\{\eta_k = 0\} = 1 - p, k = 1, 2, \ldots$$

Биномиальный закон с параметрами (n, p) соответствует распределению числа $\mu_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ успехов в n независимых испытаниях по схеме Бернулли, если в каждом испытании вероятность успеха равна p :

$$\mathbf{P}\{\mu_n = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n$$

Случаи применения

7.3.6 Геометрическое

Конструкция

Геометрическое распределение с параметром p определяется равенствами

$$\mathbf{P}\{\nu = m\} = p(1-p)^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Одна из интерпретаций случайной величины с геометрическим распределением Число неудач (нулей) до первого успеха (единицы) в последовательности испытаний Бернулли: $\nu = \min\{n \geqslant 1 : \eta_n = 1\} - 1$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots$. - те же, что в предыдущем примере.

Случаи применения

Вывод

7.3.7 Гипергеометрическое

Гипергеометрическое распределение имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad \max\{0, n - N + M\} \leqslant m \leqslant \min\{n, M\}$$

(???)

$$\mathbf{P}\{\xi = m\} = \left(\frac{\lambda^m}{m!}\right) e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Очевидно,

$$\sum_{m \geqslant 0} \mathbf{P}\{\xi = m\} = \sum_{m \geqslant 0} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1$$

Случаи применения

Гипергеометрическое распределение с параметрами n, M и N является распределением числа ξ белых шаров среди n шаров, извлеченных по схеме равновероятного выбора без возвращения урны, содержавшей вначале M белых и $N - M$ черных Шаров:

Вывод

7.3.8 Гамма распределение

Суть

Пусть распределение случайной величины X задаётся плотностью вероятности, имеющей вид $f_X(x) = \begin{cases} x^{k-1}\frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k\Gamma(k)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, где $\Gamma(k)$ - гамма-фуунция Эйлера. Тогда говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с положительными параметрами θ и k. Пишут $X \sim \Gamma(k, \theta)$.

Замечание. Иногда используют другую параметризацию семейства гаммараспределений. Или вводят третий параметр - сдвиг.

О случаях применеия (!??!??!)

Свойства

(вики)

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей гаммараспределение, имеют вид

$$\mathbb{E}[X] = k\theta,$$
$$\mathbb{D}[X] = k\theta^2.$$

- Если $X_1, \ldots, X_n$ - независимые случайные величины, такие что $X_i \sim \Gamma(k_i, \theta), i = 1, \ldots, n$, то

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, \theta\right).$$

- Если $X \sim \Gamma(k, \theta)$, и $a > 0$ - произвольная константа, то $aX \sim \Gamma(k, a\theta)$ - Гамма-распределение бесконечно делимо.

7.3.9 О других распределениях

(о тех, про которых что-то слышал, но пока хз)

О распределении Ландау

(понадобится - пропишу, пока мало касался его)

О распределении Бозе-Эйнштейна

(подготовлю его свойства!!!)

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/kT} - 1}$$

Mξ и Dξ для статистики Бозе-Эйнштейна (?!!!!)

(пока хз, но посмотрю, это важно. потом добавлю в пар-ф выше!)

В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе-Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть ξ - число пустых ячеек. Найти $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$.

$$E\xi = \sum_i E\mathbb{1}_{A_i} = \sum_i P(A_i) = N\frac{|A|}{|\Omega|} = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

$$E\xi^2 = E(\sum_i \mathbb{1}_{A_i} + \sum_{i\neq j} \mathbb{1}_{A_i A_l}) = \sum_{i=k} E\mathbb{1}^2_{A_i} + \sum_{i\neq k} E\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_k} = (N^2 - N)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = (N^2 - N)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - N^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n}$$

(хочется цифру в конце получить!!!)

О распределении Ферми-Дирака

(подготовлю его свойства!!!)

Mξ и Dξ для статистики Ферми-Дирака (?!!!!)

(пока хз, даже по аналогии хз, как это сделать)

7.4 Статистические методы проверки гипотез

Посмотрим, как можно статистически проверить, верна гипотеза или нет?

(пропишу сюда структуру и ответы как только разберусь с выгрузками из курсов мф-ти)

7.4.1 О проверке гипотез в жизни (???)

как это делать?
в жизни где применять?
интересно.
тут как раз примеры

(раздел мелкий ибо по факту так никто не делает, а значит я в последнюю очередь буду про это думать, ибо тут отдельное скорее всего развитие нужно.)

напоминание про адекватность

Хоть методы проверки гипотез и будут хорошие, не нужно их применять к любой мелочи. Они нужны для на самом деле важных вопросов. К сожалению находятся отбитые от жизни люди, которые проверяют всякие мелочи, которые ни на что не влияют. Чтобы этого избежать - следует развиваться в психологии и духовности.

7.4.2 теория проверки гипотез

8 О применениях в физике (!??!?!)

(отдельный большой раздел про это)

9 Применение теории вероятности в программировании (???)

(тоже важное указание, потому что только для этого многие её и изучают.)

9.1 Анализ данных

разбираемся с анализом данных, полученных в лабораториях.

9.1.1 анализ лабораторных работ

9.1.2 конкретный шаблон

что куда пишем, чтобы проанализировать данные?

9.1.3 обработка данных из эксперимента

да хз.
какие эксперименты вообще?

9.2 Типичные приложения в программировании

(пока не до этого, чуть что - сюда писать буду)

9.2.1 Визуализация результатов вероятностных моделей

Построение распределений на Питоне (??)

(идем по [?] - там отличное введение в приложения.)

как и обещанно в введении, будет много кода и примеров, позже раскидаю многое по другим главам.

выглядит так:

```
from IPython.core.pylabtools import figsize
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
figsize(11, 9)

import scipy.stats as stats

dist = stats.beta
n_trials = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 15, 50, 500]
data = stats.bernoulli.rvs(0.5, size=n_trials[-1])
x = np.linspace(0, 1, 100)

# For the already prepared, I'm using Binomial's conj. prior.
for k, N in enumerate(n_trials):
sx = plt.subplot(len(n_trials) / 2, 2, k + 1)
plt.xlabel("$p$, probability of heads") \
if k in [0, len(n_trials) - 1] else None
plt.setp(sx.get_yticklabels(), visible=False)
heads = data[:N].sum()
y = dist.pdf(x, 1 + heads, 1 + N - heads)
plt.plot(x, y, label="observe %d tosses,\n %d heads" % (N, heads))
plt.fill_between(x, 0, y, color="#348ABD", alpha=0.4)
plt.vlines(0.5, 0, 4, color="k", linestyles="--", lw=1)

leg = plt.legend()
leg.get_frame().set_alpha(0.4)
plt.autoscale(tight=True)



plt.suptitle("Bayesian updating of posterior probabilities",
y=1.02,
fontsize=14)

plt.tight_layout()
```

и это уже круто. вот - прикладной теорвер!!!

9.3 Вероятностные методы в машинном обучении

часто этим мы и занимаемся, ведь МЛ это круто и полезно.

9.4 Байесовский метод в машинном обучении

обзор

есть курс на ютубе от ВШЭ про это, так что можно посмотреть.

статья.

вообще так или иначе - байесовские темы достойны отдельной подглавы.

степень нашей уверенности в событии A обозначим цифрой $P(A)$.

а далее мы получаем какую-то дополнительную информацию, и с ней наше видение вероятности уже становится другим. обозначим новое видение $P(A|X)$, где X - новое событие. оно называется *условная вероятность (posterior probability)*.

(какие-то рассуждения про величину количества испытаний)

вообще, следует заметить, что тут стиль более программирования и мало физики, мало сути вероятности. для сути вероятности нужно читать другую главу в разделе про квантмех. тут какой-то поверхностный такой метод.

но в этом и его польза.

9.5 Другое

9.5.1 программирование вероятностных задач

там в вольфраме полно наработок, сяду и досмотрю их просто.

9.5.2 Некоторые методы машинного обучения

(нужно будет - займусь.)

10 Особые конструкции

(по идее хватит такой структуры на них, все равно этим почти не занимался.)

10.0.1 Теорема Фробениуса — Перрона

Материал из Википедии — свободной энциклопедии Перейти к навигацииПерейти к поиску Теорема Фробениуса — Перрона — теорема о наибольшем собственном значении вещественной квадратной матрицы с положительными компонентами. Эта теорема имеет многочисленные приложения в теории вероятностей (эргодичность цепей Маркова); в теории динамических систем; в экономике; в демографии; в социальных сетях; в поисковых системах.

Доказана Оскаром Перроном (1907) и независимо Георгом Фробениусом (1912). Идея использования этой теоремы для определения порядка игроков в турнирах принадлежит Эдмунду Ландау.

Формулировка

Пусть A - квадратная матрица, со строго положительными вещественными элементами, тогда справедливы утверждения: - наибольшее по модулю собственное значение r является вещественным и строго положительным; - это собственное значение является простым корнем характеристического многочлена; - соответствующий r собственной вектор имеет (точнее говоря, может быть выбран таким образом, чтобы иметь) строго положительные координаты, все остальные собственные векторы таким свойством не обладают; - собственное значение r удовлетворяет неравенствам $\min_i \sum_j a_{ij} \leqslant r \leqslant \max_i \sum_j a_{ij}$.

Доказательство (??)

10.1 Случайные матрицы

(почитаю избры, потом впишу)

и да, так как тема сложная, будем излагать просто, без четких определений как в прошлых разделах.

и тут важный взгляд такой: у нас была случайная величина, мы там интегрировали, что-то с ней делали, так же и с матрицами хочется делать, поэтому

Определение 10.1. *дифференциальная вероятность от случайной матрицы*

Определение 10.2. *дифференциал случайной матрицы*

(пока просто понятно что как-то определяется, потом пойму)

но в сути мы берем тип матриц, закидываем в элементы случайные величины и смотрим характеристики.

Определение 10.3. *гауссовый унитарный ансамбль - GUE - набор эрмитовых матрицы, с такой-то функцией распределения*

функция экспонента на что-то на след квадрата этой матрицы. ну типа напоминает фунцию гауссова распределения

Определение 10.4. *среднее от функции от случайной матрицы*

ок, на этом этапе мы поняли, как ставится задача, ввели определения.

нужно еще характеризовать распредения.

(вообще как можно скорее нужно теорию вообще распределений клеить, но это позже обязательо сделаю. здесь как раз вопрос о распределениях)

Определение 10.5. *плотность состояний случайной матрицы*

в общем, на этом этапе мы должны просто понять постановку задачи и все такое и короче говоря мы задачи не умеем на это решать

10.2 диаграммные техники

здесь типа самое главное эдванст методов

10.3 Квантовая теория вероятностей

(тут от Амосова прописываю введение в его случпроцы. потом в 1 части также добавлю теорию)

10.4 Отдельные методы по Алану Спенсеру (????)

(такую книгу в академе открывал, да и не до нее, так, структуру заготовил на всяйи случай)

10.4.1 Основы вероятностных методов

- **Теория графов**
- **Комбинаторика**
- **Комбинаторная теория чисел**
- **Пары с пустым пересечением**
- **Упражнения**
- **Вероятностный взгляд: Теорема Эрдёша-Ко-Радо**

10.4.2 Линейность математического ожидания

- **Основы**
- **Разбиение графов**
- **Два быстрых результата**
- **Балансировка векторов**
- **Разбалансировка лампочек**
- **Без подбрасывания монет**
- **Упражнения**
- **Вероятностный взгляд: Теорема Брегмана**

10.4.3 Малые вариации

- **Числа Рамсея**
- **Независимые множества**
- **Комбинаторная геометрия**
- **Упаковка**
- **Перекраска**
- **Непрерывное время**
- **Упражнения**
- **Вероятностный взгляд: Большой обхват и большое хроматическое число**

10.4.4 Корреляционные неравенства

- **Теорема о четырех функциях Альсведе и Дайкина**
- **FKG-неравенство**
- **Монотонные свойства**
- **Линейные расширения частично упорядоченных множеств**
- **Упражнения**
- **Вероятностный взгляд: Теорема Турана**

10.4.5 Мартингалы и плотная концентрация

- **Определения**
- **Большие уклонения**
- **Хроматическое число**
- **Два обобщения**
- **Четыре примера**

ния Вероятностный взгляд: Число подграфов

10.4.10 Сложность схем

Предварительные замечания Случайные ограничения и схемы ограниченной глубины Еще о схемах ограниченной глубины Монотонные схемы Формулы Упражнения Вероятностный взгляд: Максимальные антицепи

10.4.11 Разброс

Основы Достаточность шести стандартных отклонений Линейный и наследственный разброс Нижние оценки Теорема Бека—Фиала Упражнения Вероятностный взгляд: Несбалансированные матрицы

10.4.12 Геометрия

Наибольший угол между точками в евклидовом пространстве
Пустые треугольники, определяемые точками плоскости
Геометрическая реализация $\pm$-матриц
ε-сети и VC-размерности ранжированных пространств
Двойственная функция расщепления и разброс
Упражнения
Вероятностный взгляд: Эффективная упаковка

10.4.13 Коды, игры и энтропия

Коды
Игра лжеца
Игра «постоянная должность»
Игра «балансировка векторов»
Неадаптивные алгоритмы
Энтропия
Упражнения
Вероятностный взгляд: Экстремальные графы

10.4.14 Дерандомизация

Метод условных вероятностей d-независимые случайные величины в пространствах малого размера Упражнения Вероятностный взгляд: Число пересечений, инцидентности, суммы и произведения

10.5 Особые модели и парадоксы

(пока тут, особо углубляться нет в планах)

10.5.1 Особые модели обычной жизни

Парадокс дней рождений

(должно хватить этого раздела)

Модель ИнтуИтИвное восприятИе

В группе из 23 человек вероятность совпадения дней рождения у двух человек столь высока, потому что рассматривается вероятность совпадения дней рождения у любых двух человек в группе. Эта вероятность определяется количеством пар людей, которые можно составить из 23 человек. Так как порядок людей в парах не имеет значения, общее число таких пар равно числу сочетаний из 23 по 2 , то есть $(23 \times 22)/2 = 253$ пары.

В формулировке парадокса речь идёт именно о совпадении дней рождения у каких-либо двух членов группы. Одно из распространённых заблуждений состоит в том, что этот случай путают с другим случаем, на первый взгляд похожим, когда из группы выбирается один человек и оценивается вероятность того, что день рождения каких-либо других членов группы совпадёт с днём рождения выбранного человека. В последнем случае вероятность совпадения значительно ниже.

Расчёт вероятности

Требуется определить вероятность того, что в группе из n человек как минимум у двух из них дни рождения совпадут. Пусть дни рождения распределены равномерно, то есть примем, что: - в году 365 дней (нет високосных лет); - в группе нет людей, заведомо родившихся в один день (например, близнецов); - рождаемость не зависит от дня недели, времени года и других фракторов. В действительности это не совсем так - в частности, в некоторых странах из-за особенностей работы больниц больше детей рождается в определённые дни недели. Однако неравномерность распределения может лишь увеличить вероятность совпадения дней рождения, но не уменьшить: если бы все люди рождались только в 3 дня из 365, то вероятность совпадения дней рождения была бы очень высокой.

Возьмём наугад одного человека из группы и запомним его день рождения. Затем возьмём наугад второго человека, при этом вероятность того, что у него день рождения не совпадёт с днем рождения первого человека, равна $1 - \frac{1}{365}$. Затем возьмём третьего человека; при этом вероятность того, что его день рождения не совпадёт с днем рождения одного из первых двух, равна $1 - \frac{2}{365}$. Рассуждая по аналогии, мы дойдём до последнего человека, для которого вероятность несовпадения его дня рождения со всеми предыдущими будет равна $1 - \frac{n-1}{365}$. Перемножая все эти вероятности, получаем вероятность того, что все дни рождения в группе будут различными:

$$\bar{p}(n) = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$$

Тогда вероятность того, что хотя бы у двух человек из n дни рождения совпадут, равна

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n).$$

Значение этой функции превосходит $1/2$ при $n = 23$, при этом вероятность совпадения равна примерно 50,73 %, а $p(22) \approx 47,57\%$. Список значений n и соответствующих им вероятностей приведён в следующей таблице.

(напишу нормально, на вики куча воды)

Выводы (??)

О применениях (?) (кст, если группа более 23 человек, то можно найти с одинаковым днем рождения. прикольно ведь)

Вероятность счастливого билета

(пока тут, напишу потом это решение.)

10.6 Другие теории

10.6.1 О теории принятия решений

(слышал, что такое есть, но это скорее бред, так что пока не трогаю.)

статистика Максвелла-Больцмана

(и также раскрою, зачем она нужна? пример приведу)

статистика Бозе— Эйнштейна

(и также раскрою, зачем она нужна? пример приведу)

10.7 Приложения к финансовой математике

связка с записями про финансы
просмотрю, как конкретно она там используется?

10.8 Приложения к теории игр

10.9 Задачи о лотереях

разберем подробно эти модели, ибо самое полезное.

10.9.1 Модель

научусь тут считать всё, что нужно.

10.9.2 Примеры типичных задач

то, что и буду оценивать, если буду думать купить лотерею.

какая вероятность, что 3 раза подряд 3/6 цифр совпадают?

10.10 Приложения к жизненным задачам (!)

10.10.1 задача о случайной встрече

Два человека живут в одном месте.
и скажем, они выходят из

где применяется

например, если нужно увидится с человеком, который, скажем раза 4 в день в случайное время выходит из дома и

10.10.2 простейшая задача о лотерее

10.11 Другие применения в программировании

(не в МЛ. пока не слышал, но мб потом появятся.)

Часть V
Дополнения

A Введение

Приведем соображения о подходе к теории вероятностей.

A.1 Мышление профессионала в теории вероятностей

A.1.1 Общая мотивация к теории вероятностей

Востребованность в аналитических работах (?)

(про то, что на собеседованиях нужно, а также аналитики её по идее используют)

Множество приложений

(? пока хз, каких, потом пропишу)

Множество приложений в программировании (? пока хз, каких, потом пропишу)

Удивительные факты

(позже пропишу)

Результаты теории вероятности

Обсудим, какие способности и знания дает нам теория вероятности.
(позже пропишу)

Мотивация к разделам теории вероятностей

(потом пропишу, пока не так вижу их, да и тут разделов не столько много, сколько в других записях)

A.1.2 Взгляд на теорию вероятностей

об использовании теории вероятностей в жизни

(?? пока не знаю, насколько на самом деле теория вероятностей используется в жизненных задачах, ибо её знаю пока плохо)

О важности алгебры и теории меры

(??? я хз, насколько она нужна, пока изучаю, потом пойму и пропишу. мб нужна, мб и нет.)

Способы догадаться до главных идей теории вероятностей

незаменимая часть нормального понимания теории вероятностей.
хз

Наиболее прикладные темы теории вероятностей (?)

обсудим, какие темы используются более всего.

О взгляде, что теория вероятностей большая и глубокая

(действительно, много книг про неё написано, так что я придерживаюсь такого взгляда. но потом обсудим.)

О взгляде, что теория вероятностей проста и поверхностна

(так некоторые думают, обсудим этот подход. пока хз, мне и в ней хватает работы)

A.1.3 Эффективное изучение теории вероятностей

Необходимые темы для изучения теории вероятностей

Необходимо хорошее знакомство с математическим анализом (потому что очень много и теорем из него и в целом предмет берется ровно так же, как и матан. потом распишу подробнее, пока еще сам не освоил кучу лем и кучу переходов.)

Необходимо хорошее знакомство с теорией меры Тоже без минимальных заготовок на неё отлетишь. Однако если нужно будет, её по ходу дела доделывать правильнее, чем готовить изначально.

способы изучения теории вероятностей

важно собрать основы теории, потому что они постоянно нужны и это не так много, мб даже страниц 50 только - самые основы.
но они не простые.
хотя и не сложные.
сесть просто нужно, и сделать их.
а дальше всё и заживет.

как можно скорее на задачи выходим в основах можно долго тормозить, поэтому важно скорее выйти на задачи.
а с задачами - есть устойчивость и база, там уже дело техники - выйти на приложения.

A.2 Литература по теории вероятностей

Литературы аж навалом, так что важно понимать основную и не урываться в неё вечно.

A.2.1 Теоретическая литература

Минимальная

В. А. Колемаев, В. Н. Калинина и др. Теория Вероятностей В Примерах И Задачах
Крутая книга, где компактно всё написано,
[1] Зубков А. М. Конспект лекций по теории вероятностей
Небольшой сборник лекций, где достаточно теории, чтобы с неё начать. Однако правильнее вообще забить на это, потому что куда полезнее начать задачи решать.
[4] Горяйнов
добавка в помощь для Зубкова

С.Е. Демин, Е.Л. Демина ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В трех частях Часть 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Хорошая книга с многими хорошими задачами разобрана, посмотрю потом.

Задачники

(скоро начну решать начать задачи!!!)

Чистяков задачник

помню, мб потом порешаю.

Обучающая

(займусь теорвером - их буду смотреть и тренироваться.)

жуковский родинов от мфти

методички скорее всего очень много тоже их добавлю.

Самарова куча методичек

надеюсь, они загуглятся!!! там неплохие методички, чисто на тренировку. если не найду, то или Посадского спросить можно, или наверное аналогичные методички найти вообще запросто. в любом случае, указания, как решать задачи, нужно иметь точно под рукой. это прямо очень хочется сделать, крутые по ним тренировки могли бы быть!

Кондратенко А. Е. задачи с зачетов по теории вероятностей

запись гуглится, если гуглить про какие-то задачи. интересно по ней потренироваться, вроде годная. типичные решены задачи, так что посмотрю ее, по идее за пару часов возьмется!

Математическая помощь

[5] Гусев мера

справочник по теории меры. не уверен, насколько она нужна.

A.2.2 Дополнительная

Более подробная

[3] Гнеденко Б. В. курс теории вероятностей

(!!!!) вроде хороший вмеру подробный курс. Уже завершаю по Зубкову и Горяйнову, так что его скоро и начну и он очень сильно повлияет на мою структуру!!! Пока еще пара шагов до него остается.

Особенно глубокая

(это вряд ли открою вообще когда-то.)

Феллер Введение в теорию вероятностей

Амосов сказал, что хорошая большая книга.

Статьи при интересные модели теории вероятностей

[6] Семенов А. Г. О случайном блуждании «пьяной компании»

помню, что это интересная статья о континуальном интеграле и случайных блужданиях, соберу эти теории - прочитаю её, ибо интересно очень.

По отдельным конструкциям

(пока их не смотрел, но помню, что супер интересная, чуть что посмотрю)

[2] Алон Н. Спенсер Дж. Вероятностный метод

топ книга, но сперва азы нормально прописать нужно!! профессиональные тут всякие теоремы и подходы. Мне не до этого пока.

Про квантовую теорию вероятностей

(просто знаю, что такое есть, курс Амосова ни о чем был, так что забить можно на копание в этом. чуть что - здесь укажу эти книги.)

По основам случайных процессов

Жуковский МФТИ лекции по случайным процессам

помню, что такая есть, потом добавлю тоже мб ей, пока что не актуально.

Лекции по случайным процессам Под редакцией А. В. Гасникова

нашел в интернете, хотелось бы тоже взять их, но уже после многих других книг, что выше я писал, начну их.

По основам математической статистики

Боровков математическая статистика

помню такую книгу, отдельная большая история. мб когда-то добавлю какие-то основы из неё в раздел про основы мат статистики, но пока не до неё.

A.2.3 Литература с приложениями

Про жизненные применения теории вероятностей

Существует множество популярных или упрощенно прикладных книг по теорверу, многие из которых обсудим ниже, они же вписаны в многие части (будут).

(Каждое приложение - отдельная запись, здесь основную литературу по ним приведем.)

Тарасов Закономерности окружающего мира. Случайность, необходимость, вероятность

наверное, такая о жизни книга. как основы сделаю - дополню ей много баланса. Очень круто она в помощь для прикладного понимания теорвера.

Мандельбродт Фракталы случай и финансы

очень наверное крутые связки там раскрыты. прямо очень интересно, и как раз куча приложений будет начато рассматриваться. так что очень крутая книга, дойти бы!

По приложениям в программировании и анализе данных

тоже много книг в таком направлении, так что обсудим и их тут.

A.3 Обзор теории вероятностей

что вообще в нем происходит?

Основная идея формализма теории вероятностей

(укажу тут, что типа мы смотрим на множества, вводим их алгебру, и дальше с ними работаем. напишу, когда теорию буду понимать.)

Обзор формализмов

О деталях формализмов

(о квантовой теории вероятностей тоже скажу.)

обзор моделей

(нарешаюсь задач - сюда и впишу. пока слабо ориентируюсь, какие вообще модели есть.)

А.3.1 Обзор классической теории вероятностей

(потом пропишу все общие соображения)
Классическая вероятность использует понятие повторяемости событий и (что еще?)
Она полезна в дискретных моделях, (когда она полезна???)

А.3.2 Обзор других конструкций и применений теории вероятностей

(потом напишу, пока слабо дальнейшие предметы прошел)

А.3.3 Связь теории вероятностей с другими науками

(думаю, такого раздела хватит)

Связь с физикой

Внимательно посмотрим на применения теории вероятностей в физике, раскрытию которых будет посвящен отдельный раздел.

О связи теории вероятностей с квантовой механикой (мб Амосова для этого почитаю)

О связи теории вероятностей с термодинамикой (тут всё вроде не так сложно)

О применении продвинутых методов теории вероятностей в КТП и приложениях (это затрагивали, но мне не зашло, ибо там всё сложно. функция грина, всё с ней связанное)

О связи теории вероятностей с кинетикой (тут больше про случпроцы, в них сперва эту связь разберу, потом здесь укажу её)

Связь с программированием (??!)

(четко пропишу потом, пока не до этого)

Связь с теорией меры

(вроде главная связь)

Связи с другими разделами математики

О связи теории вероятностей с геометрией (такая вот есть)

О связи теории вероятностей с дифференциальными уравнениями (???)

Есть траектории, которые вероятностные. Может быть, так можно использовать теорию вероятностей в дифференциальных уравнениях?? Чем-то они может быть похожи в частности на цепи Маркова.

(Как из детерменированных траекторий сделать вероятностные ???)

(?? может быть, так и происходит переход из классической механики в квантовую?)

О других связях

А.3.4 Описание записи

Описание записи в целом

первая часть

(потом напишу, когда сделаю)

вторая часть

(потом напишу, когда сделаю)

Третья

(потом напишу, когда сделаю)

приложения

к(акие вообще приложения я разбирал?)

обозначения

А.3.5 Короткий исторический обзор

(что-то потом напишу, пока вообще не интересно.)

появление теории вероятностей в нашей картине мира (???)

развитие ветвящихся процессов

История возникновения теории ветвяшихся процессов связывается с публикацией Гальтона 1873 года. Было замечено исчезновение фамилий лиц, которые занимали видное положение в истории, это факт, неоднократно отмечавшийся в прошлом;

по этому поводу строились разные догадки...

Слишком многочисленны были примеры фамилий, которые, будучи распространенными, становились редкими или совсем исчезали".

Чтобы разобраться в природе исчезновения фамилий, Гальтон поставил задачу создания математической модели, описывающей этот процесс.

Такую модель построил Ватсон в 1874 году.

Математическая модель Гальтона и Ватсона была вскоре забыта в связи с элементарной ошибкой Ватсона, которая приводила к выводу, что каждая фамилия должна выродиться даже в том случае, если средняя численность популяции растет от поколения к поколению.

Более подробно об этом можно почитать в монографии Т. Харриса "Теория ветвяшихся случайных процессов".

Интересно, что в монографии 1934 года Н. Н. Семенов использовал модель Гальтона-Ватсона как элемент своей теории химических (неядерных) цепных реакций. За эти исследования Н. Н. Семенов в 1956 году получил Нобелевскую премию. Сам термин , ветвящийся процесс"впервые появился в работе А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева 1947 года.

A.4 Головоломки теории вероятностей

Обсудим в порядке интересности задачки по теории вероятностей.

B Математика для теории вероятностей

Обсудим все математические конструкции, применяющиеся в теории вероятностей. (Многое потом добавлю, пока не успел. по актуальности соберу)

B.1 Другая математика для теории вероятностей

(странно, что до сих пор ничего про нее не написано)

B.1.1 Конструкции теории меры

(по потребности буду их добавлять)

B.1.2 Теоремы сходимости

При доказательстве различных теорем теории вероятностей часто используются два утверждения, фактически относящиеся к математическому анализу: теоремы о монотонной и мажорируемой сходимости. (в отдельный раздел потом перенесу)

Теорема о монотонной сходимости

Если последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин такова, что $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$ при $n \uparrow \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n = \mathbf{M}\xi$$

Эта теорема отличается от аналогичного утверждения при обосновании корректности определения математического ожидания тем, что случайные величины ξ_n не предполагаются простыми.

Доказательство. В силу свойства монотонности математического ожидания из условия $0 \leqslant \xi_n \leqslant \xi$ следует, что $0 \leqslant \mathbf{M}\xi_n \leqslant \mathbf{M}\xi$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n \leqslant \mathbf{M}\xi$$

Введем монотонные последовательности простых случайных величин $\{\xi_{nk}\}$ так, что $0 \leqslant \xi_{nk} \uparrow \xi_n$ при $k \uparrow \infty$. Случайные величины

$$\eta_k = \max_{1\leqslant n\leqslant k} \xi_{nk} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant k} \xi_n = \xi_k$$

тоже являются простыми, причем последовательность η_k не убывает:

$$0 \leqslant \eta_k = \max\{\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots, \xi_{kk}\} \leqslant \max\{\xi_{1k+1}, \xi_{2k+1}, \dots, \xi_{k+1k+1}\} = \eta_{k+1}$$

Значит, для всех $\omega \in \Omega$ существует $\lim_{k\to\infty} \eta_k = \eta$. Так как $\eta_k \leqslant \xi_k$ при всех k и η_k - простые случайные величины, то

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k = \mathbf{M}\eta \leqslant \lim_{k\to\infty} \mathbf{M}\xi_k$$

С другой стороны, $\xi_{nk} \leqslant \eta_k \leqslant \eta$; переходя к пределу по $k \to \infty$, находим: $\xi_n \leqslant \eta$ при всех n, откуда $\xi \leqslant \eta$ и $\mathbf{M}\xi \leqslant \mathbf{M}\eta$. Таким образом,

$$\mathbf{M}\xi \leqslant \mathbf{M}\eta \leqslant \lim_{k\to\infty} \mathbf{M}\xi_k \leqslant \mathbf{M}\xi$$

и Теорема доказана.

Без условия монотонного возрастания монотонной сходимости может не быть (?????)

Без условия монотонного возрастания утверждение теоремы может быть неправильным.

пример монотонно убывающей последовательности неотрицательных случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, сходящейся к случайной величине, тождественно равной 0.

(ХЗ, сказали построить, но я тупой)

Следствия теоремы о монотонной сходимости

Если случайные величины ξ_n неотрицательны, то

$$\mathbf{M}\sum_{n\geqslant 1} \xi_n = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{M}\xi_n$$

Для доказательства достаточно рассмотреть монотонно не убывающую последовательность случайных величин $\eta_k = \sum_{n=1}^{k} \xi_n$ и применить теорему о монотонной сходимости.

Следствие 2. Если М η конечно и последователъность событий $A_n \downarrow \varnothing$ при $n \uparrow \infty, mo$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\eta I\left\{A_n\right\} = 0$$

Доказательство. По условию $\mathbf{M}|\eta| < \infty$. Представим $|\eta|$ в виде $|\eta| = \eta_n + \eta_n'$, где $\eta_n = |\eta| I\left\{A_n\right\}, \eta_n' = |\eta| I\left\{\overline{A_n}\right\}$. Тогда

$$\mathbf{M}|\eta| = \mathbf{M}\eta_n + \mathbf{M}\eta_n'$$

Так как $\overline{A_n} \uparrow \Omega$, то $0 \leqslant \eta_n' \uparrow |\eta|$ и по теореме о монотонной сходимости

$$\mathbf{M}\eta_n' \uparrow \mathbf{M}|\eta|, \text{ значит } \mathbf{M}\eta_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Но тогда $\left|\mathbf{M}\eta I\left\{A_n\right\}\right| \leqslant \mathbf{M}\left|\eta I\left\{A_n\right\}\right| = \mathbf{M}\eta_n \to 0$.

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

(?? зачем она вообще в мат ожидании??)

Если $\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) u \left|\xi_n(\omega)\right| \leqslant \eta$ при всех $\omega \in \Omega$, причем $\mathbf{M}\eta < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\xi_n = \mathbf{M}\xi$$

Доказательство.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и рассмотрим последовательность событий

$$A_n = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{m>n} |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из условия теоремы следует, что $\overline{A_n} \downarrow \varnothing$ при $n \uparrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда, как в следствии 2 ,

$$\xi_n = \xi_n I\left\{A_n\right\} + \xi_n I\left\{\overline{A_n}\right\}$$

И

$$\xi I\left\{A_n\right\} - \varepsilon \leqslant \xi_n I\left\{A_n\right\} \leqslant \xi I\left\{A_n\right\} + \varepsilon$$
$$-\eta I\left\{\overline{A_n}\right\} \leqslant \xi_n I\left\{\overline{A_n}\right\} \leqslant \eta I\left\{A_n\right\}$$

Складывая почленно эти неравенства с учетом равенства $\xi I\left\{A_n\right\} = \xi - \xi I\left\{\overline{A_n}\right\}$ получаем

$$\xi - \xi I\left\{\overline{A_n}\right\} - \varepsilon - \eta I\left\{\overline{A_n}\right\} \leqslant \xi_n \leqslant \xi - \xi I\left\{\overline{A_n}\right\} + \varepsilon + \eta I\left\{\overline{A_n}\right\}$$

далее вычислим математическое ожидание от всех частей неравенства:

$$\mathbf{M}\xi - \varepsilon - 2\mathbf{M}\eta I\left\{\overline{A_n}\right\} \leqslant \xi_n \leqslant \mathbf{M}\xi + \varepsilon + 2\mathbf{M}\eta I\left\{\overline{A_n}\right\}$$

Переходя здесь к пределу по $n \to \infty$ и учитывая следствие 2, получим:

$$\mathbf{M}\xi - \varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \mathbf{M}\xi + \varepsilon$$

Ввиду того, что $\varepsilon > 0$ можно выбирать произвольно малым, теорема доказана.

B.1.3 Вычисление интегралов

(?? с этим могут быть проблемы или особенности)

B.2 Элементы дискретной математики

B.2.1 теория множеств

остановимся на леммах теории множеств, которые часто нужны в задачах про вероятность. Укажем также, где они нужны.

B.2.2 комбинаторика

запишем подробно разные методы комбинаторики, которые нам нужны для задач на теорию вероятностей.

размещения это ...

сочетания это..

типа там для каждого набора из k элементов с учетом порядка можно получить $k!$ разных наборов, меняя элементы местами. !! кстати, тут уже интересный момент, сколько перестановок? их $A_n^n = n!$. тут-то и пригождаются наши рассуждения.

круто, теперь с возвращением с учетом порядка: n^k. тоже

(место где рассуждаем про возвращение и без учета порядка) честно - пока пофиг, потом добью, пока просто понимаю, что это есть.

B.3 Программирование для теории вероятностей (!?!??!)

(тоже часто нужно какие-то посчитать вещи, напишу тут эти методы потом.)

Список литературы

[1] А.М.Зубков. *Конспект лекций по теории вероятностей Механико-математический факультет МГУ, 4-й семестр.* 2014.

[2] Спенсер Дж. Алон Н. *Вероятностный метод.* Бином, 2007.

[3] Б. В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей.* URSS, 2010.

[4] В. В. Горяйнов. *Лекции по теории вероятностей МФТИ.* 2019.

[5] Н.А. Гусев. *Заметки к курсу Мера и интеграл Лебега.* 2020.

[6] А.Г. Семенов. *Уравнение Ланжевена и функциональный интеграл.* заметки к лекциям, 2010.